Tema 9

Integración

El concepto de integral definida se desarrolló históricamente para calcular el área de regiones planas acotadas por líneas curvas. Tomando como referencia inicial que el área del cuadrado que tiene lados de longitud l es igual a l^2, es muy sencillo calcular el área de cualquier rectángulo y, recurriendo a la geometría elemental, puede calcularse tanbién el área de cualquier polígono si lo dividimos en triángulos. La necesidad de un método más sofisticado de calcular áreas aparece al intentar calcular la superficie de figuras acotadas por "curvas". Por ejemplo, ¿cómo calcular el área de un círculo, o de una parábola? Uno de los logros más importantes del Cálculo Integral es el de proporcionar un método unificado y eficiente para la resolución de este tipo de problemas.

El concepto básico aquí es el de la integral. Inicialmente, lo entenderemos como una expresión para calcular el área por medio de un límite. Consideremos una función positiva y acotada f definida en un intervalo $[a, b]$. Vamos a "medir" el área de la región acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (en la práctica la función f será continua casi siempre).

El método consiste en reemplazar la región curvada que queremos medir por recintos cuya área es fácil de calcular y que aproximan tanto como sea necesario la región. Para ello, consideraremos dos tipos de recintos: los que están incluídos en el interior de la región curvada y los que la contienen. Obtenemos así valores que aproximan el área de interés superior e inferiormente. Empezaremos con algunas definiciones.

9.1. Definiciones básicas

Definición 9.1 Una *partición* P de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos $\{x_0, x_1..., x_n\}$ del intervalo tal que estan ordenados de forma creciente, es decir, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Cada uno de los subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ para $j = 1, 2, ...n$ es un *subintervalo de la partición*. Si $\delta_j = x_j - x_{j-1}$, la longitud del mayor subintervalo, $\delta(P) = \text{máx}\{\delta_j : 1 \leq j \leq n\}$, se llama *norma* de la partición.

Definimos ahora las recintos que aproximan el área superior e inferiormente.

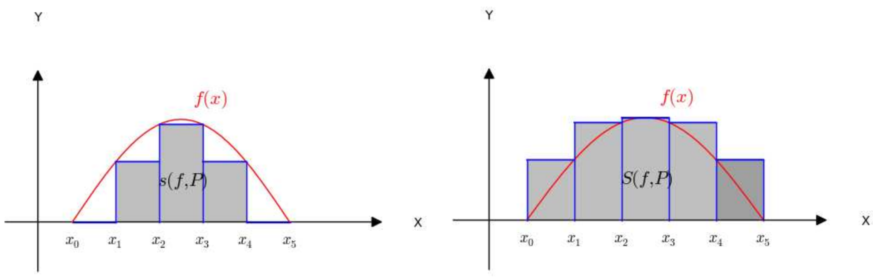
Definición 9.2 Sea M_j y m_j el supremo y el ínfimo respectivamente de los valores de $f(x)$ en el interval $[x_{j-1}, x_j]$. Definimos

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j \delta_j$$

y

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j \delta_j$$

Se tiene que la *suma superior* $S(f, P)$ es la suma de las áreas de n rectángulos, de los que el j-ésimo tiene base $[x_{j-1}, x_j]$ y altura M_j. La suma de estas áreas es mayor o igual que la del área R contenida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Análogamente, la suma $s(f, P)$ es menor o igual que el área de R (ver Fig. 9.1)



(a) Suma inferior (b) Suma superior

Figura 9.1: Sumas superior e inferior

Si ahora t_j es un valor arbitrario del intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ ($j = 1, ..., n$) y tomamos el conjunto $T = \{t_1, ..., t_n\}$, la suma

$$\sigma(f, P, T) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\delta_j$$

satisface que

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, T) \leq S(f, P)$$

En la Fig. 9.2 se ha construido esta suma tomando como conjunto T los puntos medios de cada subintervalo.

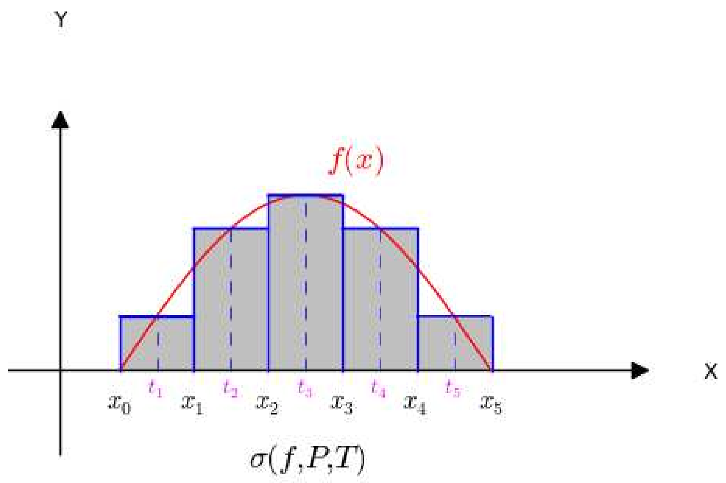


Figura 9.2: Suma para los puntos medios

Nuestro objetivo es demostrar que si f es una función "razonablemente buena" (lo que incluye a las funciones continuas y a las monótonas), las tres sumas anteriores tienden a un límite común cuando $\delta(P)$ tiende a 0. Este límite denotado por

$$\int_a^b f(x)dx$$

será la integral de la función f sobre el intervalo $[a, b]$.

Sin embargo, la operación de límite que acabamos de introducir es muy complicada. Por ello, abordaremos inicialmente un proceso más sencillo.

9.1.1. Integral superior e inferior de Darboux

Si M, m son el supremo e ínfimo de $f(x)$ en $[a, b]$ y si, dada una partición P, construimos las sumas $S(f, P)$ y $s(f, P)$ como antes, de las desigualdades $M \geq m_j$ y $m_j \geq m$ $(j = 1, ..., n)$ se deduce que

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a).$$

Así que el conjunto de los valores $S(f, P)$ está acotado inferiormente por $m(b-a)$ y, por tanto, tienen ínfimo denotado

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

que se llama *integral superior de Darboux* de la función f. Análogamente, los valores $s(f, P)$ están acotados superiormente por $M(b-a)$ y, por ello, tienen supremo denotado

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

que se llama *integral inferior de Darboux* de la función f.

Los teoremas que siguen demuestran que la integral superior es siempre mayor o igual que la integral inferior.

Teorema 9.3 La introducción de un nuevo punto de división en una partición P disminuye el valor de $S(f, P)$y aumenta el valor de $s(f, P)$.

Corolario 9.4 Si P_1 y P_2 son dos particiones de $[a, b]$ tales que $P_1 \subset P_2$ entonces

$$S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$$

y

$$s(f, P_2) \leq s(f, P_1).$$

Si la partición P_1 está incluída en la partición P_2, como en el corolario, se dice que P_2 *refina* a P_1.

A partir de los dos resultados anteriores se demuestra

Teorema 9.5

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

La posibilidad de que la integral superior sea mayor estrictamente que la inferior es real

Ejemplo 9.1 La función definida por

$$\begin{array}{ll} f(x) = 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ f(x) = 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{array}$$

definida en el intervalo $[0,1]$ satisface que su integral superior es igual a 1 mientras que su integral inferior es igual a 0.

Definición 9.6 Se dice que f es *integrable Riemann* cuando la integral superior de f es igual a la integral inferior.

9.1.2. Teorema de caracterización

Teorema 9.7 La función f es integrable en el intervalo $[a,b]$ si, y sólo si, existe el límite de los valores

$$\sigma(f,P,T)$$

cuando $\delta(P)$ tiende a 0.

Corolario 9.8 Una función f acotada en $[a,b]$ es integrable si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.

Entonces es posible demostrar que una amplia variedad de funciones son integrables; entre ellas destacaremos dos tipos.

Teorema 9.9 Si f es continua en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.

Teorema 9.10 Si f es monótona en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.

9.2. Propiedades de la Integral

9.2.1. Reglas de integración y Teorema del Valor Medio

Teorema 9.11 Dada una función integrable f en $[a,b]$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $f \leq g \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5. La función $|f|$ es integrable y se satisface

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Por comodidad de notación se adoptan los siguientes convenios

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorema 9.12 (Teorema del Valor Medio) Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

9.2.2. Función integral. Regla de Barrow.

Supongamos en lo que sigue, y hasta que no se diga lo contrario, que f es integrable en $[a,b]$ y escribamos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

La función así definida se llama *función integral*.

Teorema 9.13 F es una función continua.

Teorema 9.14 (Teorema Fundamental del Cálculo) Si f es continua en el punto $x \in [a, b]$ entonces F es diferenciable en x y se satisface $F'(x) = f(x)$.

Se dice que F es una *primitiva* de f en $[a, b]$ cuando $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$.

Teorema 9.15 Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe primitiva de f en $[a, b]$.

Teorema 9.16 (Regla de Barrow) Si f es integrable en $[a, b]$ y F es una primitiva de f en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

El Teorema 9.14 demuestra la existencia de una función primitiva de f cuando ésta es continua. Se deduce de las propiedades de la derivada que si F y G son primitivas de f entonces $F - G$ es una constante. Por lo tanto, el conjunto de todas las primitivas de f está formado por todas las funciones de la forma $F + k$, siendo F cualquier primitiva de f y k una constante arbitraria. El conjunto de todas las funciones primitivas de f se denota $\int f(x)dx$ y se denomina *integral indefinida* de f. La regla de Barrow proporciona un procedimiento muy sencillo para calcular la integral (definida) de una función cuando se conoce su integral indefinida. Es por ello importante disponer de métodos para hallar la integral indefinida de una función. Veremos algunos de estos métodos en lo que sigue.

Teorema 9.17 (Propiedades de las integrales indefinidas)

1. $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$
2. $\int \frac{d}{dx} F(x)dx = F(x) + k$
3. $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 9.2 Calcula $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Solución: $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + k.$

$\square$

Ejemplo 9.3 Calcula $I = \int \cos^2 x dx$.

Solución: Aplicando la fórmula trigonométrica de $\cos^2 x$ se tiene $I = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$ que ya puede descomponerse en integrales inmediatas.

$\square$

Ejercicio 9.1 Calcula la integral $\int \sin^2(x)\ dx$

(**Sol.:** $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + k$)

Ejercicio 9.2 Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \sin(ax)\cos(bx)\ dx$

(b) $\int \cos(ax) cos(bx)\ dx$

(**Sol.:** (a) $\frac{(a-b)\cos((a+b)x)+(a+b)\cos((b-a)x)}{2b^2-2a^2} + k$;
(b) $\frac{(b-a)\sin((b+a)x)+(b+a)\sin((b-a)x)}{2b^2-2a^2} + k$)

Ejercicio 9.3 Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \tan^2(x)\ dx$

(b) $\int \sin^3(x)\cos^4(x)\ dx$

(**Sol.:** (a) $\tan(x) - x + k$ (b) $\frac{5\cos^7 x - 7\cos^5 x}{35} + k$)

9.2.3. Integración por partes y sustitución

Teorema 9.18 (Integración por partes) Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ tales que existen sus derivadas f', g', que son también continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx + \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$$

Ejemplo 9.4 Veamos algunos ejemplos:

(1) $I = \int \ln x \, dx$.

Solución: Tomamos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$ en la fórmula de integración por partes. Y, por tanto,

$$I = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + k$$

$\square$

(2) $I = \int x^3 \sin x \, dx$.

Solución: Se aplica integración por partes varias veces, tomando siempre como función $f(x)$ la parte polinómica, hasta llegar a la integral de una función trigonométrica.

$$I = \left(3x^2 - 6\right) \sin(x) + \left(6x - x^3\right) \cos(x) + k$$

$\square$

(3) $I = \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, dx$ y $J = \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, dx$

Solución: Se aplica integración por partes a las dos integrales y se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones con incógnitas I y J, que se resuelve sin mayor dificultad.

$$I = \frac{\mathrm{e}^{ax} \left(a \sin(bx) - b \cos(bx)\right)}{b^2 + a^2} + k; \qquad J = \frac{e^{ax} \left(b \sin(bx) + a \cos(bx)\right)}{b^2 + a^2} + k$$

$\square$

(4) $I = \int \mathrm{e}^{2x} \sin x \, dx$.

Solución: Se aplica integración por partes dos veces y se despeja el valor de I de la expresión. También podemos aprovechar la fórmula del ejemplo anterior tomando $a = 2$ y $b = 1$; por lo que,

$$I = \frac{\mathrm{e}^{2x}(2 \sin x - \cos x)}{5} + k$$

$\square$

Ejercicio 9.4 Calcula la siguiente integral $\int \ln^2(x)\ dx$. (H: Toma $f(x) = \ln^2(x)$ y aplica integración por partes)

(**Sol.:** $x\left(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2\right) + k$)

Ejercicio 9.5 Halla la fórmula de reducción de $I_n = \int\ x^n \cos(ax)\ dx$.

(**Sol.:** $\frac{x^{n-1}(ax\sin(ax)+n\cos(ax))}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2}\ I_{n-2}$)

Teorema 9.19 (Integración por sustitución) Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea g una función continua de $[c,d]$ a $[a,b]$ tal que $g(c) = a$ y $g(d) = b$, y existe la derivada de g en $[c,d]$. Entonces $(f \circ g) \cdot g'$ es integrable en $[c,d]$ y

$$\int_c^d f(g(s)) \cdot g'(s)ds = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 9.5 Veamos algunos ejemplos:

(1) $I = \int \sqrt{16 - x^2}dx$, $x \in [-4,4]$.

Solución: Se aplica el cambio $x = 4\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $dx = 4\cos t$; por lo que la integral se transforma en

$$I = \int \sqrt{16 - \sin^2 t} \cdot 4\cos t dt = 16\int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = 16\int \cos^2 t dt$$

que ya sabemos resolver. Para deshacer el cambio, se tiene en cuenta que $\sin t = \frac{x}{4}$ y, por tanto $\cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$. Ahora,

$$I = 8t + 4\sin(2t) = 8t + 8\sin t\cos t = 8\arcsin\frac{x}{4} + 8\frac{x}{4}\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} + k$$

$\square$

(2) $I = \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$, $x \in [-1,1]$.

Solución: Se aplica el cambio $u = \arcsin x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; por lo que la integral se transforma en

$$I = \int u^{-3} du = -\frac{u^{-2}}{2} + k = -\frac{(\arcsin x)^{-2}}{2} + k$$

habiendo deshecho el cambio en el último paso.

$\square$

(3) $I = \int x^2 \sqrt{x-7} dx$

Solución: Se aplica el cambio $x = t^2 + 7$, $dx = 2tdt$; por lo que la integral se transforma en

$$I = \int (t^2+7)^2 2t^2 dt = \frac{2\left(15t^7 + 294t^5 + 1715t^3\right)}{105} + k$$

que ya es inmediata al ser la integral de un polinomio y, deshaciendo el cambio, $t = \sqrt{x-7}$, queda

$$I = \frac{2\left(15(x-7)^3\sqrt{x-t} + 294(x-7)^2\sqrt{x-t} + 1715(x-7)\sqrt{x-t}\right)}{105} + k$$

$\square$

Ejercicio 9.6 Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; (b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(**Sol.:** Ver la tabla de primitivas del final)

A continuación se proponen algunos ejercicios más de los tipos vistos anteriormente.

Ejercicio 9.7 Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \dfrac{dx}{x^2+6x+10}$; (b) $\int \dfrac{dx}{9x^2+25}$; (c) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}$ $(a > 0)$.

(**Sol.:** (a) $\arctan\left(\frac{2x+6}{2}\right) + k$; (b) $\frac{\arctan\left(\frac{3x}{5}\right)}{15} + k$; (c) $\frac{\ln(x-a)}{2a} - \frac{\ln(x+a)}{2a} + k$)

Ejercicio 9.8 Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; (b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

(**Sol.:** (a) $\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+k$; (b) $-\arcsin\left(\frac{-2x-2}{4}\right)+k$)

Ejercicio 9.9 Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \dfrac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$; (b) $\int \dfrac{\tan^3(x)+\tan(x)}{1-2\tan(x)}\,dx$

(**Sol.:** (a) $4\ln\left(e^x+1\right)-3e^x+k$; (b) $-\frac{\ln(2\tan(x)-1)}{4}-\frac{\tan(x)}{2}+k$)

Ejercicio 9.10 Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \dfrac{\cos(x)}{\sin^3(x)+2\cos^2(x)\sin(x)}\,dx$; (b) $\int \dfrac{\cos(x)}{a^2+b^2\sin(x)}\,dx$

(**Sol.:** (a) $\frac{\ln(\sin(x))}{2}-\frac{\ln\left(\sin(x)^2-2\right)}{4}+k$; (b) $\frac{\ln\left(b^2\sin(x)+a^2\right)}{b^2}+k$)

Ejercicio 9.11 Halla la fórmula de reducción de $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}$ y aplícalo a la integral $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^4}$.

9.3. Aplicaciones

Veamos alguna aplicaciones de la integralal cálculo de áreas, volúmenes y longitudes de curva.

Áreas de superficies limitadas por curvas

1. El área limitada por la curva $y=f(x)$ (siendo $f\geq 0$) y las rectas $x=a$, $x=b$, $y=0$ es
$$\int_a^b f(x)dx. \tag{9.1a}$$
2. El área limitada por las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$ (siendo $f\geq g$) y las rectas $x=a$, $x=b$ es
$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx. \tag{9.1b}$$

Ejemplo 9.6 Ejemplos de aplicaciones al cálculo de áreas:

(a) Calcula el área de la región S limitada por las rectas $x = 0$, $x = 2$, y las curvas $y = x(x-2)$, $y = x/2$.

Solución: Hallamos los puntos de corte entre las gráficas, planteando para ello la ecuación

$$x(x-2) = x/2 \quad \Rightarrow \quad x(2x-5) = 0$$

cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 5/2$. En la Figura 9.3 se ha representado la región solicitada.

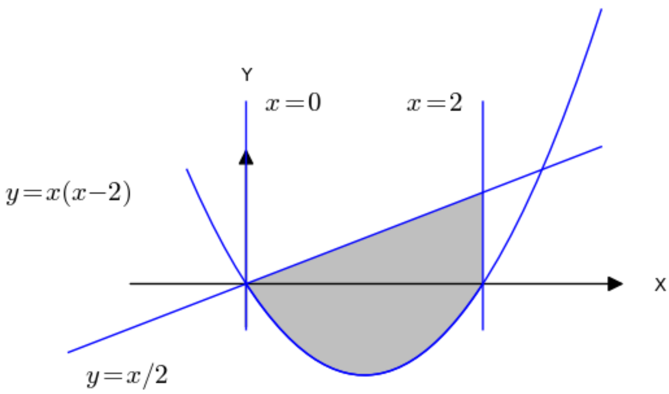


Figura 9.3: Área entre dos curvas

Como el recinto está limitado por $x = 2$, el área solicitada es

$$a(S) = \int_0^2 [\frac{x}{2} - (x^2 - 2x)]dx = \int_0^2 [\frac{5}{2}x - x^2]dx = \frac{7}{3}$$

□

(b) Calcula el área de la región S limitada por las rectas $x = -1$, $x = 2$ y las curvas $y = x$, $y = x^3/4$.

Solución: Hallamos los puntos de corte entre las gráficas, planteando para ello la ecuación

$$x = x^3/4 \quad \Rightarrow \quad x(x^2-4) = 0$$

cuyas soluciones son $x = 0$, $x = -2$ y $x = 2$. En la Figura 9.4 se ha representado la región solicitada.

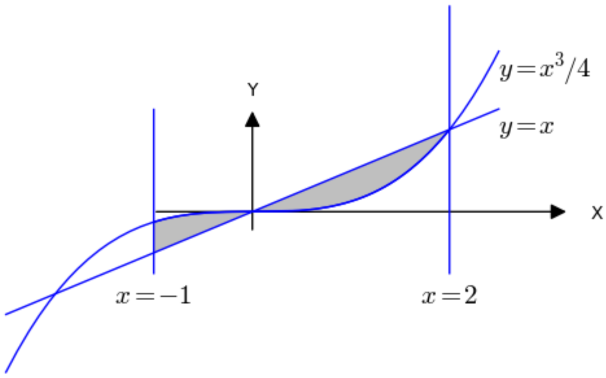


Figura 9.4: Área entre dos curvas que se cortan

Se observa que hay dos recintos, donde las gráficas han intercambiado sus posiciones, así pues, el área solicitada es

$$a(S) = \int_{-1}^{0} [\frac{x^3}{4} - x]dx + \int_{0}^{2} [x - \frac{x^3}{4}]dx = \frac{23}{16}$$

□

Ejercicio 9.12 Calcula el área de la región limitada por el eje OX y las curvas $y = \sin^3(x)$, $y = \cos^3(x)$ con $0 \leq x \leq \pi/2$.

(**Sol.:** $\frac{2(5-2\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}$)

Ejercicio 9.13 Calcula el área comprendida entre las curvas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

(**Sol.:** $\frac{64}{3}$)

Ejercicio 9.14 Calcula el área de la región limitada por el eje OX, la recta $x = 1$ y la curva $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

(**Sol.:** $\frac{1}{3}$)

Ejercicio 9.15 Calcular el área del dominio limitado por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

(**Sol.:** πab)

Longitud de un arco de curva

1. Dada la curva definida por la gráfica de la función $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, su longitud viene dada por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx. \tag{9.2a}$$

2. Si la curva viene dada en forma paramétrica

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad t \in [a, b]$$

entonces su longitud viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \tag{9.2b}$$

3. Si la curva está en el espacio y sus ecuaciones son

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \quad t \in [a, b]$$

entonces su longitud viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt \tag{9.2c}$$

Ejemplo 9.7 Calcula la longitud del arco de parábola $y^2 = 2px$, desde el vértice hasta el punto $(1, \sqrt{2p})$.

Solución: Representando la curva en forma paramétrica obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = \ \ t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2p}$$

de donde, aplicando la Fórmula (9.2b),

$$L = \int_0^{\sqrt{2p}} \sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}dt = \left[\frac{t}{2\pi}\sqrt{t^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{t+\sqrt{t^2+p^2}}{p}\right]_0^{\sqrt{2p}}$$

$$= \frac{p\ln\left(\frac{\sqrt{p^2+2p}+\sqrt{2p}}{p}\right)}{2} + \frac{\sqrt{2p}\sqrt{p^2+2p}}{2\pi}$$

□

Ejercicio 9.16 Calcula la longitud de una circunferencia de radio r por los dos métodos siguientes: (a) utilizando la parametrización $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, con $0 \le t \le 2\pi$ y la Fórmula (9.2b); (b) utilizando la ecuación de la semicircunferencia superior, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y la Fórmula (9.2a).

(**Sol.:** $2\pi r$)

Área y volumen de una superficie de revolución

Si se tiene una curva definida por la gráfica de $y = f(x)$, siendo $f \ge 0$, $x \in [a, b]$, y giramos dando una vuelta completa alrededor del eje OX, entonces se engendra un cuerpo de revolución cuya área lateral es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx \tag{9.3a}$$

y cuyo volumen es

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \tag{9.3b}$$

Ejemplo 9.8 Veamos algunos ejemplos de aplicación de estas fórmulas.

(a) Evalua el volumen del sólido S formado por la rotación 2π radianes de la cicloide

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

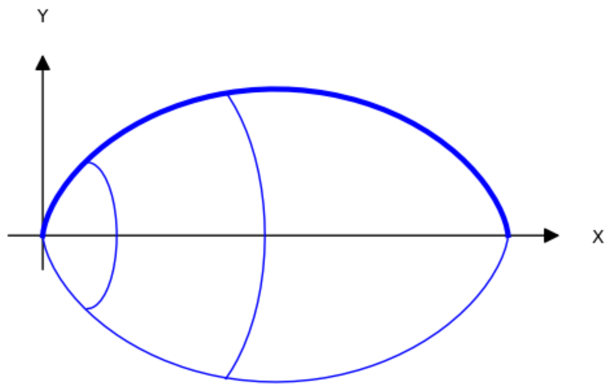


Figura 9.5: Sólido de revolución generado por una cicloide

Solución: Cuando t varía de 0 a 2π, la variable x crece de 0 a $2\pi a$. Por lo tanto, aplicando la fórmula para hallar el volumen de un sólido de revolución a la función $y = y(x)$, se obtiene

$$v(S) = \pi \int_0^{2\pi a} y(x)^2 dx$$

haciendo el cambio de variable $x = a(t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, resulta

$$v(S) = \pi \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt = 5\pi^2 a^3.$$

$\square$

(b) Calcula el área de una esfera E de radio R.

Solución: La esfera puede obtenerse por la rotación 2π radianes de la gráfica de la curva $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$. Aplicando la fórmula para el área de una superficie de revolución, resulta

$$a(E) = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 4\pi R^2.$$

$\square$

Ejercicio 9.17 Calcula el área lateral de un cilindro circular recto de radio $a = 5$ y altura $h = 8$ (H: el cilindro es un cuerpo de revolución).

(**Sol.:** 80π)

Área de una superficie definida por medio de coordenadas polares

Sea f una función no negativa definida en el intervalo $[a, b]$. El conjunto de todos los puntos de coordenadas polares (ρ, θ) que satisfacen $\rho = f(\theta)$ es la gráfica de f en *coordenadas polares*. La ecuación $\rho = f(\theta)$ es la *ecuación polar* de esa gráfica.

Ejemplo 9.9 Vemos dos ejemplos de ecuaciones polares a continuación.

1. La circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio 1 se representa por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ (coordenadas cartesianas) y $\rho = 1$ (coordenadas polares).

2. La curva cuya ecuación en coordenadas cartesianas es $(x^2 + y^2)^3 = y^2$ se representa en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} &\rho^6 = \rho^2 \sin^2 \theta \\ &\rho^4 = \sin^2 \theta \\ &\rho^2 = |\sin \theta| \\ &\rho = \sqrt{|\sin \theta|} \end{aligned}$$

Si se tiene una curva definida por una ecuación polar $\rho = r(\theta)$, siendo r no negativa y definida para θ en un intervalo $[a, b]$, entonces el área del dominio S encerrado por la gráfica de la función en el intervalo $a \leq \theta \leq b$ viene dado por la integral

$$a(S) = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta. \tag{9.4}$$

Ejemplo 9.10 Ejemplos de aplicaciones al cálculo de áreas:

1. Calcula el área de un sector circular de radio R y amplitud $\alpha < \theta < \beta$.
   Solución: $a(S) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta R^2 d\theta = \frac{R^2}{2}(\beta - \alpha)$.

□

2. Calcula el área de la región S limitada por la curva cuya ecuación polar es $\rho = \sqrt{|\sin\theta|}$.

   Solución: $a(S) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 2(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}) = 2.$

$\square$

Ejercicio 9.18 Hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas cuya ecuación en polares es $r = 3\ \sin(2\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

(**Sol.:** $\frac{9\pi}{8}$)

9.4. Problemas adicionales

Ejercicio 9.19 Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 + x^2 - 2x$ y el eje OX.

(**Sol.:** $\frac{37}{12}$)

Ejercicio 9.20 Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 3x + 8$ y las rectas $y = -3x$, $x = -3$ y $x = 0$.

(**Sol.:** $\frac{81}{4}$)

Ejercicio 9.21 Halla el área de la región del plano comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y la parábola $2y = x^2$.

(**Sol.:** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$)

Ejercicio 9.22 Halla el área encerrada por la recta $y = z-1$ y la paraábola $y^2 = 2x + 6$.

(**Sol.:** 18.)

Ejercicio 9.23 Halla el área acotada por el eje x y por un arco de la cicloide

$$x = r\ (t - \sin t)\,, \quad y = r\ (1 - \cos t)\ ,$$

donde $r > 0$, y $0 \le t \le 2\pi$ (H: Aplica la Fórmula (9.1a)).

(**Sol.:** $3\pi r^2$)

Ejercicio 9.24 Halla el valor de b para que la recta $y = b$ divida el recinto encerrado por las curvas $y = x^2$ e $y = 4$ en dos regiones de igual área.

(**Sol.:** $b = \sqrt[3]{16}$)

Ejercicio 9.25 Un alambre delgado tiene la forma de la primera espiral de la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Halla su longitud.

(**Sol.:** $2\sqrt{2}\,\pi$)

Ejercicio 9.26 Halla la longitud de la línea helicoidal cónica $x = a\,\mathrm{e}^t \cos t$, $y = a\,\mathrm{e}^t \sin t$, $z = a\,\mathrm{e}^t$; desde el punto $A(0, 0, 0)$ al punto $B(a, 0, a)$. (H: Al punto A le corresponde un valor del parámetro $t_0 = -\infty$ y al punto B el valor $t_1 = 0$).

(**Sol.:** $a\sqrt{3}$.)

Ejercicio 9.27 Halla el volumen del sólido generado al girar la región encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$, alrededor del eje OX una vuelta completa.

(**Sol.:** $\frac{2\pi}{15}$)