Tema 3

Series Numéricas

Imaginemos que se va a celebrar una carrera con las siguientes reglas:

1. El primer minuto debe recorrerse 100 metros.
2. El minuto siguiente debe recorrerse la mitad, 50 metros.
3. El minuto siguiente debe recorrerse la mitad del anterior, 25 metros.
4. El minuto siguiente dee recorrerse la mitad del anterior, 12,50 metros.

   y así sucesivamente.

Por otra parte, al mismo tiempo empieza otra carrera, con las reglas ligeramente modificadas:

1. El primer minuto se recorren 100 metros.
2. El minuto siguiente se recorren la mitad de 100 metros, 50 metros.
3. El minuto siguiente se recorren la tercera parte de 100 metros, 33,3 metros.
4. El minuto siguiente se recorren la cuarta parte de 100 metros, 25 metros.

   y así sucesivamente.

Dos corredores empiezan a la vez las carreras. Si la meta de la primera se encuentra situada a 300 metros y la de la segunda a 1000 metros, ¿quién llega primero a la meta y cuánto tiempo tarda?

Llamamos $D = 100$ metros la distancia recorrida en el primer minuto. La primera carrera va recorriendo las distancias:

$$D + \frac{D}{2} + \frac{D}{4} + \frac{D}{8} + \ldots$$

La segunda carrera va recorriendo las distancias:

$$D + \frac{D}{2} + \frac{D}{3} + \frac{D}{4} + \ldots$$

La pregunta es cuál de estas sumas alcanza la distancia a la que está situada la meta respectiva. Al acabar este tema deberemos ser capaces de dar una respuesta razonada[1].

3.1. Series reales

Del mismo modo que en el capítulo anterior, nos limitaremos a tratar con series de números reales, porque, de nuevo, el estudio de las series complejas se reduce al estudio de las series determinadas por las partes reales e imaginarias.

Consideramos una sucesión de números reales

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

A partir de ella formamos una nueva sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}$$

[1]La respuesta es que el primer corredor no consigue llegar jamás a la meta mientras el segundo sí.

La sucesión $\{S_n\}$ así definida se llama sucesión de las *sumas parciales* y a_n recibe el nombre de *término general* n-ésimo. Llamaremos *serie* al par de sucesiones $\{(a_n), (S_n)\}$.

Definición 3.1 Diremos que la serie $\{(a_n), (S_n)\}$ es *convergente* si existe $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$. Al valor S se le llama *suma* de la serie y lo escribiremos

$$S = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Por abuso de notación representaremos a la serie $\{(a_n), (S_n)\}$ por su suma, es decir, por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$; aunque es posible que dicha suma ni siquiera exista.

Notas: Algunas observaciones a tener en cuenta:

- El índice de sumación n es una variable muda, y puede sustituirse por cualquier otra letra.
- No es necesario que una serie empiece a sumar desde $n = 1$. Puede empezar desde $n = 0$ o $n = p$ $(p > 1)$; pero siempre se puede reescribir para que empiece en $n = 1$ mediante un cambio de variable (ver el Ejemplo 3.25).
- S_n siempre representa la suma de los n primeros términos de la sucesión a_n y entonces se deberá tener cuidado al calcularla cuando la serie no empiece por $n = 1$.
- Las definiciones de convergencia y divergencia no dependen del término a partir del cual empiezan a sumar, aunque si afecta al valor de la suma (véase el Teorema 3.3). Así, las propiedades que no involucren a la suma de la serie son ciertas independientemente del término en que empiecen. Por este motivo, y por comodidad, enunciaremos casi todas las propiedades para series que empiecen en $n = 1$ e, incluso, a veces ni tan siquiera especificaremos desde qué término empiezan a sumar, escribiendo únicamente $\sum a_n$.
- Aunque hablemos de *la suma* de una serie, no debemos olvidar que dicha suma es, en realidad, un límite de sumas y, entonces, pueden no

ser ciertas las propiedades usuales de las sumas finitas: por ejemplo, el orden de los sumandos sí puede alterar la suma (consultad la Sección 3.3); o también resulta ser falsa la propiedad asociativa (ver el Ejemplo 3.6).

Ejemplo 3.1 Reescribe la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ para que el índice de sumación empiece en $n = 1$.

Solución: Se trata, simplemente, de realizar un pequeño cambio de variable.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n-1=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

donde $k = n - 1$ y, substituyendo $n = k + 1$,

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}$$

renombrando el contador.

Observa que la serie no ha cambiado; sólo se ha modificado el contador:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}$$

□

Ejercicio 3.1 Reescribe la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)\log\left[(\log(n))\right]}$ para que empiece a sumar desde $n = 1$:

(**Sol.:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\log(n+2)\log\left[(\log(n+2))\right]}$)

Ejercicio 3.2 Reescribe la serie $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}}$ para que empiece a sumar desde $n = 1$:

$$\left(\textbf{Sol.: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}} \right)$$

Un ejemplo importante lo constituyen las llamadas series geométricas.

Ejemplo 3.2 Consideremos la progresión geométrica $1, r, r^2, r^3, \ldots, r^n, \ldots$ de la cual obtenemos la serie

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \quad (r \in \mathbb{R})$$

Vamos a calcular S_n en función de n. Para ello, multiplicamos S_n por la razón r

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1} \\ rS_n &= r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots + r^{n-1} + r^n \end{aligned}$$

y restando las dos expresiones

$$S_n - rS_n = 1 - r^n \Rightarrow \; S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad \text{si } r \neq 1$$

Para calcular el límite de S_n distinguimos dos posibilidades, según el valor de la razón r:

$$\begin{array}{llll} |r| < 1 & \Rightarrow \; \lim\limits_n r^n = 0 & \Rightarrow \; \lim\limits_n S_n = \dfrac{1}{1-r} \\ |r| > 1 & \Rightarrow \; \lim\limits_n r^n = \infty & \Rightarrow \; \lim\limits_n S_n = \infty \end{array}$$

Ahora,

$$r = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \;\; \Rightarrow \;\; \left\{ \begin{array}{l} S_1 = 1 \\ S_2 = 1 + 1 = 2 \\ \vdots \\ S_n = n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_n S_n = \infty$$

$$r=-1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = 1 \\ S_2 = 1-1=0 \\ S_3 = 1-1+1=1 \\ S_4 = 1-1+1-1=0 \\ \vdots \\ S_{2n-1}=1 \\ S_{2n}=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_n S_n$$

En definitiva, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ es convergente sii $|r|<1$ y, en ese caso, suma exactamente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Ejemplo 3.3 Calcula la suma de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Solución: Se trata de una serie geométrica de razón $r=-\frac{1}{2}$. Entonces, por lo visto en el ejemplo anterior, es convergente (porque $|r|<1$) y suma

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

□

Ejercicio 3.3 Calcula la suma de la serie $1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots$

(**Sol.:** $\frac{10}{9}$)

Teorema 3.2 Si tenemos dos series convergentes $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S'$ entonces,

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S+S'$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lambda S \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3.4 Encuentra dos series divergentes $\sum a_n$ y $\sum b_n$ de manera que la serie suma $\sum(a_n + b_n)$ sea convergente.

(**Sol.:** $a_n = \dfrac{1}{n}$ y $b_n = \dfrac{-1}{n+1}$)

Ejercicio 3.5 Demuestra que si $\sum a_n$ es convergente y $\sum b_n$ es divergente entonces $\sum(a_n + b_n)$ es divergente. (H: Si $\sum(a_n + b_n)$ fuera convergente también lo sería $\sum(a_n + b_n - a_n)$.

Esta propiedad nos permite encontrar la fórmula de la suma de una serie geométrica cuyo primer término no es 1; es decir, que no empieza a sumar desde $n = 0$.

Ejemplo 3.4 Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} r^n = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \dots$

Entonces,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} r^n = \sum_{n=p}^{+\infty} r^p r^{n-p} = r^p \sum_{n=p}^{+\infty} r^{n-p} = r^p \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{r^p}{1-r}$$

por lo que,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r}$$

Ejemplo 3.5 Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$.

Solución: La serie puede descomponerse en suma de dos, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{10^n} + \frac{5^n}{10^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

puesto que cada una de estas dos últimas series es convergente ya que se trata de series geométricas de razón $r = \frac{1}{5} < 1$ y $r = \frac{1}{2} < 1$, respectivamente. Por el ejemplo anterior podemos calcular su suma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1/5}{1-1/5} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

por lo que, finalmente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$\square$

Ejercicio 3.6 Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(**Sol.:** $\frac{1}{4}$)

Ejercicio 3.7 Calcula la suma de la serie $8 + 6 + \dfrac{9}{2} + \dfrac{27}{8} + \dfrac{81}{32} + \ldots$

(**Sol.:** 32)

Ejercicio 3.8 Calcula la suma de la serie $4 - 2 + 1 - \dfrac{1}{2} + \ldots$

(**Sol.:** $\dfrac{8}{3}$)

Teorema 3.3 La convergencia de una serie no depende del término en el que se empiece a sumar; es decir;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \;\text{ es convergente } \Leftrightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \;\text{ es convergente}$$

Además, en este caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}) + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \quad (p > 1)$$

Teorema 3.4 Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente entonces también lo es $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ donde

$$\begin{aligned}
&b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} \\
&b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2} \\
&b_3 = a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \ldots + a_{n_3} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Es decir, también es convergente la serie obtenida por agrupación de términos de la primera. La misma propiedad es cierta si cambiamos convergente por divergente a $\pm\infty$.

El recíproco de la propiedad anterior no es cierto como lo prueba el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.6 Consideremos la serie geométrica de razón $r = -1$, es decir,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Hemos visto antes que esta serie no es convergente, no obstante esto, al agrupar términos:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

si resulta una serie convergente.

No obstante, puede probarse que el recíproco de la propiedad anterior sí es cierto si la serie es de términos positivos.

3.2. Criterios de convergencia

Las series geométricas son sencillas de sumar. En general, calcular la suma exacta de una serie no resulta tarea fácil. Antes de intentar encontrar la suma de una serie puede ser muy útil saber si la serie es o no es convergente. Este tipo de problemas se conoce como *Problemas sobre el carácter de una serie*. En las siguientes secciones estableceremos una relación de criterios que nos permitirán determinar el carácter de una serie. El primero de todos nos da una condición necesaria que debe cumplir toda serie convergente.

Teorema 3.5 (Condición necesaria de convergencia) Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim_n a_n = 0$

Ejemplo 3.7 La condición anterior no es suficiente, como lo prueba la llamada *serie armónica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Esta serie verifica que $\displaystyle\lim_n \frac{1}{n} = 0$ y, no obstante, la serie es divergente. Vamos a probar esto último. Sea $\{S_n\}$ la sucesión de las sumas parciales , es decir,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \\ S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \overset{\text{n términos}}{\ldots} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \overset{\text{n términos}}{\ldots} + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

de donde $\displaystyle\lim_n (S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$ y entonces $\displaystyle\lim_n (S_{2n} - S_n) \neq 0$.

Concluimos, entonces, que la sucesión $\{S_n\}$ no puede ser convergente; porque si $\lim_n S_n = S$, entonces también $\lim_n S_{2n} = S$ (al ser S_{2n} una subsucesión de S_n); pero entonces

$$\lim_n (S_{2n} - S_n) = 0$$

y hemos probado anteriormente que no puede ser así. Por tanto, la serie armónica es divergente.

Ejemplo 3.8 La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ es divergente porque $\displaystyle\lim_n \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Ejercicio 3.9 Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

(**Sol.:** Divergente.)

Ejercicio 3.10 Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$.

(**Sol.:** Divergente.)

Ejercicio 3.11 Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

(**Sol.:** Divergente.)

3.2.1. Series de términos positivos

Una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ donde cada $a_n > 0$ se dice una *serie de términos positivos.* En este caso, como

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$$

resulta que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es creciente. Entonces, la serie será convergente si, y sólo si, la sucesión $\{S_n\}$ está acotada superiormente. Si no lo está, la serie será divergente a $+\infty$ (Teorema2.8).

Ejemplo 3.9 Hemos visto antes que la serie armónica era divergente. Como es de términos positivos podemos afirmar que su suma vale $+\infty$.

Si una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es de términos negativos (i.e., $a_n < 0 \ \forall n$) entonces el estudio de este tipo de series se puede reducir al de las series de términos positivos, teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{+\infty} -a_n$$

y esta última ya es de términos positivos y tiene el mismo carácter.

Además, como el carácter de una serie no se altera si eliminamos un número finito de términos, equipararemos a este tipo todas aquellas series que si bien no son de términos positivos, sólo tienen un número finito de términos negativos.

Vamos a ver algunos criterios para averiguar si una serie de términos positivos es convergente o divergente.

Teorema 3.6 (Criterio de la serie mayorante) Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos.

- Si $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n \; \forall \; n \Rightarrow \sum a_n$ es convergente
- Si $\sum a_n$ es divergente y $a_n \leq b_n \; \forall \; n \Rightarrow \quad \sum b_n$ es divergente

Ejemplo 3.10 Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$

Solución: Como $\log n < n, \; \forall n \geq 2$, resulta $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\log n}, \; \forall n \geq 2$ y como la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente concluimos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ es divergente.

$\square$

Ejercicio 3.12 Averigua el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2 - \cos(n)}{n}$.

(**Sol.:** Divergente.)

Ejercicio 3.13 Sean $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes de términos positivos. Prueba que también lo es $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n b_n}$. (H: Utiliza la desigualdad $\sqrt{a_n b_n} \leq \dfrac{a_n + b_n}{2}$ y el criterio de la serie mayorante.)

Ejercicio 3.14 Sean $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes de términos positivos. Prueba que también lo es $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$. (H: Utiliza la desigualdad $\dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n} \leq a_n$ y el criterio de la serie mayorante.)

Como consecuencia del criterio de la serie mayorante, se obtiene el siguiente criterio.

Teorema 3.7 (Criterio de comparación en el límite) Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos y sea $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$. Entonces,

- Si $0 < \lambda < +\infty$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter.
- Si $\lambda = 0$ y $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.
- Si $\lambda = +\infty$ y $\sum b_n$ es divergente, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Ejemplo 3.11 Considérese la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$

Vamos a compararla con la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$, que sabemos es divergente (Ejemplo 3.10)

$$\lim_n \frac{\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{\dfrac{1}{\log n}} = \lim_n \frac{\log n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

Este límite lo resolvemos por Stolz:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\log n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} &= \lim_n \frac{\log(n+1)-\log n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_n \frac{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n+1}} = \lim_n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \log \mathrm{e} = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, ambas series tienen el mismo carácter y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \quad \text{es divergente.}$$

El inconveniente de este criterio reside en que necesitamos otra serie conocida para poder compararla. Las más utilizadas para comparar son las llamadas series de Riemann (ver el Ejemplo 3.15).

Para evitar este problema, veremos otros criterios en los que sólo se utiliza el término general a_n de la serie a investigar y, por tanto, no se necesita ninguna otra serie para comparar.

Teorema 3.8 (Criterio de D'Alambert) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y sea $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Entonces,

- Si $0 \leq \lambda < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
- Si $1 < \lambda \leq +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Este criterio se suele utilizar cuando el término general a_n consta de productos o cocientes. Notar que este criterio no determina el carácter de la serie cuando $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Cuando esto ocurre puede utilizarse el criterio siguiente.

Teorema 3.9 (Criterio de Raabe) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y sea $\lim\ n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$. Entonces,

- Si $\lambda < 1$, entonces $\sum a_n$ es divergente.
- Si $\lambda > 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

Ejemplo 3.12 Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$. Identificamos el término general de la serie

$$a_n = \frac{n^3}{n!}$$

y aplicamos el criterio de D'Alambert:

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y podemos concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$ es convergente.

Ejemplo 3.13 Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$. Identificamos el término general de la serie

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

y aplicamos el criterio de D'Alambert:

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)}}{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}} = \lim_n \frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

y no podemos concluir nada. Aplicamos ahora el criterio de Raabe, utilizando que, según el cálculo anterior, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$:

$$\begin{aligned} \lim_n n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_n n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim_n n \frac{1}{2n+2} \\ &= \lim_n \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

y entonces obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \quad \text{es divergente.}$$

Ejercicio 3.15 Estudia el carácter de la series (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$ y (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

(**Sol.:** (a) Convergente; (b) Convergente)

Ejercicio 3.16 Estudia el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.17 Estudia el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.18 Estudia el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.19 Estudia el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$.

(**Sol.:** Divergente.)

El siguiente criterio es equivalente al criterio de D'Alambert pero se utiliza en vez de éste cuando el término general a_n consta de potencias de exponente n, n^2, etc.

Teorema 3.10 (Criterio de la raíz o de Cauchy) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y sea $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Entonces,

- Si $0 \leq \lambda < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
- Si $1 < \lambda \leq +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Ejemplo 3.14 Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin^3 n}{n^n}$. Identificamos el término general

$$a_n = \frac{1+\sin^3 n}{n^n}$$

y aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1+\sin^3 n}{n^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{1+\sin^3 n}}{n} = \lim_n \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{1+\sin^3 n}$$

Para calcular este límite, vamos a probar en primer lugar que $\sqrt[n]{1+\sin^3 n}$ es una sucesión acotada. En efecto,

$$-1 \leq \sin^3 n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1+\sin^3 n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[n]{1+\sin^3 n} \leq \sqrt[n]{2} \leq 2$$

entonces, aplicando el Teorema 2.11,

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{1+\sin^3 n}}_{\text{acotada}} = 0 < 1$$

y concluimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin^3 n}{n^n}$ es convergente.

Ejercicio 3.20 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.21 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.22 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$.

(**Sol.:** Divergente.)

El criterio siguiente se suele utilizar cuando el término general a_n consta de potencias de exponente cualquiera.

Teorema 3.11 (Criterio Logarítmico) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y sea $\lim \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log n} = \lambda$. Entonces,

- Si $\lambda < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
- Si $\lambda > 1$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Ejemplo 3.15 Vamos a estudiar la convergencia de una familia de series, llamadas Series de Riemann: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Identificamos el término general:

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

y aplicamos el criterio logarítmico:

$$\lim_n \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log n} = \lim_n \frac{\log n^\alpha}{\log n} = \lim_n \frac{\alpha \log n}{\log n} = \alpha$$

Así, si $\alpha > 1$ la serie es convergente y si $\alpha < 1$ la serie es divergente. Si $\alpha = 1$ la serie queda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

que es divergente.

Resumiendo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},\ (\alpha \in \mathbb{R})\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Convergente si} \quad \alpha > 1 \\ \\ \text{Divergente si} \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Las series de Riemann se utilizarán a menudo en el criterio de comparación en el límite, sobre todo si el término general es un cociente de polinomios. En el ejemplo siguiente vemos su aplicación.

Ejemplo 3.16 Determina el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n-3}{n^3+n}$.

Solución: Vamos a compararla en el límite con la serie de término general $d\frac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$ (que son los dos infinitos de mayor orden que aparecen en la serie a estudiar).

$$\lim \frac{\frac{5n-3}{n^3+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3+n} = 5$$

por lo que la serie inicial tiene el mismo carácter que la serie $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ y, siendo ésta convergente, por ser una serie de Riemann de exponente $\alpha = 2 > 1$, nos permite concluir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n-3}{n^3+n} \quad \text{es convergente.}$$

$\square$

Ejercicio 3.23 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2-2n+3}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.24 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.25 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.26 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{[\log(\log(n))]^{\log(n)}}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.27 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\log(n)}}$.

(**Sol.:** Divergente.)

Teorema 3.12 (Criterio de Condensación) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos, donde la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, entonces las series

$$\sum_n a_n \qquad \text{y} \qquad \sum_k 2^k \cdot a_{2^k}$$

tienen el mismo carácter.

Ejemplo 3.17 Determina el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$.

Solución: Llamamos $a_n = \dfrac{1}{n \log n}$. Como $\{n \log n\}$ es una sucesión creciente deducimos que $\{a_n\}$ es decreciente. Así, podemos aplicar el criterio de condensación y concluir que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log 2^k}$ tienen el mismo carácter. Estudiemos ahora esta última:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log 2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\log 2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

y resulta ser la serie armónica que es divergente. Concluimos, pues, que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ es divergente.

□

Ejercicio 3.28 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\,(\log(n))^p}$, $p \in \mathbb{N}$.

(**Sol.:** Convergente si $p > 1$.)

Ejercicio 3.29 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n\log(n)\log\left[(\log(n))\right]}$.

(**Sol.:** Divergente.)

3.2.2. Series alternadas

Definición 3.13 Una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se dice *alternada* si $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, para todo n (i.e. sus términos alternan el signo).

Para series alternadas disponemos del siguiente criterio:

Teorema 3.14 (Criterio de Leibnitz) Sea $\sum a_n$ con $a_{n+1} \cdot a_n < 0$, para todo n. Si la sucesión $\{|a_n|\}$ es decreciente, entonces

$$\sum a_n \text{ es convergente} \iff \lim_n |a_n| = 0$$

Notas:

- A una serie alternada no se le puede aplicar ninguno de los criterios vistos anteriormente para series de términos positivos.
- Si la sucesión $\{|a_n|\}$ es creciente entonces no puede tener límite 0 y así la serie será divergente, pero la sucesión $\{|a_n|\}$ puede no ser ni creciente ni decreciente y, en este caso, no podremos aplicar el criterio de Leibnitz.
- Toda serie alternada puede ser escrita de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ ó de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ donde $a_n > 0$ (dependiendo que sean negativos los términos impares o pares, respectivamente).

Ejemplo 3.18 Determina el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Solución: Se trata de una serie alternada. Veamos si cumple la hipótesis del criterio de Leibnitz.

Llamamos $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$; por tanto $|a_n| = \dfrac{1}{n}$. Como $\{n\}$ es una sucesión creciente, deducimos que $\{a_n\}$ es decreciente. Por tanto, podemos aplicar el criterio de Leibnitz y al ser

$$\lim_{n} \frac{1}{n} = 0$$

podemos concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es convergente.

$\square$

Ejemplo 3.19 Comprobar que la serie alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

diverge y explicar por qué no se contradice el criterio de Leibnitz.

Solución: No se puede aplicar el criterio de Leibnitz porque la sucesión de los valores absolutos de los términos no es decreciente. No es convergente porque al agrupar los términos de la forma:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots$$

obtenemos la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

que es divergente y recuerda que si una serie es convergente, cualquier reagrupación debe ser convergente (Teorema 3.4).

$\square$

Ejercicio 3.30 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$.

(**Sol.:** Divergente.)

Ejercicio 3.31 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.32 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.33 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

(**Sol.:** Convergente.)

Ejercicio 3.34 Determina el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.

(**Sol.:** Divergente.)

3.3. Convergencia absoluta y condicional

Definición 3.15 Una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se dice *Absolutamente Convergente* si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ es convergente.

Ejemplo 3.20 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente (Ejemplo 3.18) pero no absolutamente convergente, ya que la serie de los valores absolutos no es convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergente}$$

Ejercicio 3.35 Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots$$

(**Sol.:** Convergente pero no absolutamente.)

Nota: Está claro que para series de términos positivos (o de términos negativos) los conceptos de convergencia y convergencia absoluta son equivalentes. Es más, si recordáis que el carácter de una serie no depende del término en que empieza a sumar, podemos afirmar lo mismo para series con un número finito de términos negativos (o, respectivamente, de términos positivos).

En general la relación entre la convergencia y la convergencia absoluta viene dada por la siguiente propiedad:

Teorema 3.16 Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

Esta propiedad nos da un nuevo criterio para estudiar la convergencia de las series alternadas:

Ejemplo 3.21 Consideremos la serie:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$$

Es una serie alternada pero no podemos aplicarle el criterio de Leibnitz porque los términos, en valor absoluto, no forman una sucesión decreciente. Estudiemos la convergencia absoluta:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^3}+\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

Si esta última la descomponemos en dos series:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3} \quad \text{que es convergente, comparándola con} \quad \sum\frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} \quad \text{que es convergente, comparándola con} \quad \sum\frac{1}{n^2}$$

Entonces, como las dos son convergentes, concluimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^3}+\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

es convergente, por lo que la serie primera resulta ser absolutamente convergente y, por tanto, convergente.

Definición 3.17 Dadas dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$, diremos que $\sum b_n$ es una *reordenación* de $\sum a_n$ si la sucesión $\{b_n\}$ se ha obtenido a partir de $\{a_n\}$ reordenando sus términos.

Definición 3.18 Una serie $\sum a_n$ se dice:

- *Incondicionalmente convergente* si la serie es convergente y cualquier reordenación de ella es convergente y suma lo mismo.
- *Incondicionalmente divergente* si la serie es divergente y cualquier reordenación de ella es divergente.
- *Condicionalmente convergente* si es convergente pero no incondicionalmente convergente.
- *Condicionalmente divergente* si es divergente pero no incondicionalmente divergente.

El siguiente resultado simplifica el estudio de la convergencia condicional:

Teorema 3.19 La serie $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente si, y sólo si, es absolutamente convergente.

Ejemplo 3.22 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente, ya que es convergente (por el criterio de Leibnitz) pero no absolutamente convergente (ver el Ejemplo 3.20).

Si una serie tiene un número finito de términos negativos (o de términos positivos) sabemos que su convergencia implica convergencia absoluta. Por tanto, para que una serie sea condicionalmente convergente ha de tener infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Suponemos entonces una serie $\sum a_n$ de manera que $\{a_n\}$ tiene infinitos términos positivos $\{b_n\}$ e infinitos términos negativos $\{c_n\}$. Entonces,

Teorema 3.20 Con la notación anterior se tienen las siguientes propiedades:

- $\left.\begin{array}{r}\sum b_n \\ \sum |c_n|\end{array}\right\}$ convergentes $\Rightarrow \sum a_n$ incondicionalmente convergente.
- $\left.\begin{array}{r}\sum b_n \\ \sum |c_n|\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{una es convergente} \\ \text{y la otra divergente}\end{array}$ $\Rightarrow \sum a_n$ incond. divergente.
- $\left.\begin{array}{r}\sum b_n \\ \sum |c_n|\end{array}\right\}$ divergentes $\Rightarrow \sum a_n$ cond. convergente o cond. divergente.

Además, en este último caso, si $\lim a_n = 0$, podemos obtener una reordenación o bien divergente o bien convergente.

Ejemplo 3.23 Estudia la convergencia condicional de la serie

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6} + \ldots = \sum a_n$$

Solución: Consideramos por separado los términos positivos b_n y negativos c_n.

$$\sum b_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \rightarrow \text{ convergente.}$$

$$\sum |c_n| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \rightarrow \text{ divergente.}$$

Entonces, la serie $\sum a_n$ es incondicionalmente divergente.

□

Ejercicio 3.36 Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \ldots$

(**Sol.:** Divergente.)

Ejercicio 3.37 Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\frac{1}{1} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} + \ldots$

(**Sol.:** Incondicionalmente divergente.)

Ejercicio 3.38 Dada la serie

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots$$

de la cual sabemos que es convergente pero no absolutamente (Ejercicio 3.35); considera la siguiente reordenación

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \ldots$$

¿Qué podemos decir sobre su convergencia? ¿Y sobre la convergencia absoluta?

(**Sol.:** No absolutamente convergente y divergente.)

3.4. Sumación de series

Hasta ahora hemos visto métodos para determinar si una serie es convergente o divergente. Cuando una serie $\sum a_n$ es convergente sabemos que tiene una suma finita S. El objetivo de esta sección es calcular la suma de la serie. Este problema resulta más complicado de abordar que el estudio del carácter, dado que la suma es, en realidad, el límite de la sucesión de las sumas parciales y no siempre será factible poder calcularlo.

Hemos estudiado ya la suma de una serie geométrica y, con una técnica parecida, estableceremos la suma de algunos tipos más de series.

(a) *Series Aritmético-Geométricas*

Son de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ donde $\{a_n\}$ es una progresión aritmética (de distancia d) y $\{b_n\}$ es una progresión geométrica (de razón r). Entonces,

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = b_1 r^{n-1} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Se observa por simple sustitución que la serie no es convergente cuando $|r| = 1$. Vamos a calcular S_n en los otros casos:

$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n$$

$$rS_n = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + \ldots a_{n-1}b_n + a_nb_{n+1}$$

de donde restando ambas expresiones resulta

$$S_n(1-r) = a_1b_1 + [(a_2 - a_1)b_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1})b_n] - a_nb_{n+1}$$

pero, como la diferencia entre dos términos consecutivos de una progresión aritmética siempre es la distancia d, obtenemos:

$$\begin{aligned} S_n(1-r) &= a_1b_1 + d\,[b_2 + b_3 + \ldots + b_n] - a_nb_{n+1} \\ &= a_1b_1 + db_1\left[r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right] - a_nb_{n+1} \end{aligned}$$

y ahora como $r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \dfrac{r - r^n}{1-r}$ obtenemos

$$S_n(1-r) = a_1b_1 + db_1\frac{r - r^n}{1-r} - a_nb_{n+1}$$

y aislando S_n :

$$S_n = \frac{a_1b_1}{1-r} + db_1\frac{r-r^n}{(1-r)^2} - \frac{a_nb_{n+1}}{1-r}$$

Suponemos ahora que $|r| < 1$, entonces

$$\left.\begin{aligned} \lim_n r^n = 0 \\ \lim_n a_nb_{n+1} = \lim_n (d(n-1) + a_1)b_1r^n = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_n S_n = \frac{a_1b_1}{1-r} + \frac{drb_1}{(1-r)^2}$$

Por contra si $|r| > 1$ entonces $\lim_n r^n = \infty$ y no existe $\lim_n S_n$.

Resumiendo, la serie aritmético-geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ es convergente sii $|r| < 1$ y en este caso suma exactamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_nb_n = \frac{a_1b_1}{1-r} + \frac{drb_1}{(1-r)^2} \tag{3.1}$$

Ejercicio 3.39 Encuentra la fórmula de la suma cuando la serie empieza a sumar desde $n = p$.

Ejemplo 3.24 Calcularemos la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)}$$

Solución: Simplificando los términos, se observa que corresponde a una serie aritmético-geométrica.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)} &= \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \\
&+ \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots \\
&= \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{6}{2^6} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

de donde $d = 1$, $r = \dfrac{1}{2}$, $a_1 = 3$ y $b_1 = \dfrac{1}{2^3}$ por lo que aplicando la fórmula (3.1), se obtiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)} \frac{3 \cdot \frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 1$$

□

(b) *Series Hipergeométricas*

Son series de términos positivos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ que cumplen la relación

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \quad \text{con} \quad \alpha + \beta - \gamma \neq 0$$

Puede probarse que

$$S_n = \frac{(\alpha n + \gamma) a_{n+1} - \gamma a_1}{\alpha + \beta - \gamma}$$

Si suponemos ahora que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente, entonces necesariamente deben ser $\lim_n n a_{n+1} = 0$ y $\lim_n a_{n+1} = 0$ y así,

$$S = \lim_n S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1 \gamma}{\gamma - \alpha - \beta} \tag{3.2}$$

Nota: Para determinar los valores correctos de α, β y γ, la serie debe empezar a sumar desde $n = 1$.

Ejemplo 3.25 Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}}$

Solución: Como $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ resulta

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{p!(n-p)!}{n!}$$

Estudiemos primero su carácter mediante el criterio de D'Alambert: llamando $a_n = \dfrac{p!(n-p)!}{n!}$ $(n \geq p\ )$ obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{\dfrac{p!(n+1-p)!}{(n+1)!}}{\dfrac{p!(n-p)!}{n!}} \\ &= \lim_n \frac{n+1-p}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

Aplicamos ahora el criterio de Raabe

$$\begin{aligned} \lim_n n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_n n\left(1 - \frac{n+1-p}{n+1}\right) \\ &= \lim_n \frac{np}{n+1} = p \end{aligned}$$

Así si $p > 1$ la serie es convergente. El caso $p = 1$ lo estudiaremos más adelante.

Además, la serie es hipergeométrica porque

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1-p}{n+1}$$

Ahora bien, para determinar la suma y, más concretamente, los valores correctos de α, β, γ la serie debe empezar a sumar desde $n = 1$. Para conseguirlo haremos un cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{p!(n-p)!}{n!} &= \sum_{n+1=p+1}^{+\infty} \frac{p!(n-p)!}{n!} \\ &= \sum_{n+1-p=1}^{+\infty} \frac{p!(n-p)!}{n!} \overset{k=n+1-p}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p!(k-1)!}{(k+p-1)!}\end{aligned}$$

Llamando ahora $a_k = \dfrac{p!(k-1)!}{(k+p-1)!}$ $k \geq 1$ obtenemos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{p!k!}{(k+p)!}}{\dfrac{p!(k-1)!}{(k+p-1)!}} = \frac{k}{k+p}$$

de donde $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y $\gamma = p$ con $\alpha + \beta - \gamma = 1 - p$ y, aplicando la fórmula (3.2), se obtiene

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{p!(n-p)!}{n!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p!(k-1)!}{(k+p-1)!} = \frac{1 \cdot p}{p-1} = \frac{p}{p-1} \quad (p > 1)$$

Finalmente, si $p = 1$, resulta que $\dbinom{n}{1} = n$, de donde

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{p!(n-p)!}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

que es divergente.

$\square$

(c) *Series telescópicas*

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se dice telescópica si el término general a_n puede descomponerse de la forma

$$a_n = b_n - b_{n-1}$$

es decir, es la diferencia entre dos términos consecutivos de otra sucesión. En este caso, es posible hallar la suma parcial S_n y calcular su límite.

Ejemplo 3.26 Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solución: La serie es telescópica puesto que, al descomponer $\dfrac{1}{n(n+1)}$ en fracciones simples, resulta

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Entonces, para calcular S_n hacemos:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ a_2 & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ a_3 & = & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ & \vdots & \\ a_{n-1} & = & \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ a_n & = & \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ \hline a_1 + a_2 + \ldots + a_n & = & 1 - \frac{1}{n+1} \end{array}$$

Ahora, al sumar estas igualdades, resulta que, en la parte de la derecha se cancelan los términos dos a dos (salvo el primero y el último) y en la izquierda queda $a_1 + a_2 + \ldots a_n = S_n$, por lo que

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

□

Ejercicio 3.40 Calcula la suma de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$, descomponiéndola previamente en fracciones simples.

(**Sol.:** $\frac{3}{4}$)

Ejercicio 3.41 Calcula la suma de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$, descomponiéndola previamente en fracciones simples.

(**Sol.:** $+\infty$)

Ejercicio 3.42 Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(**Sol.:** $-\log 2$)

3.5. Problemas adicionales

Ejercicio 3.43 Averigua el carácter de las series

$$
\begin{array}{lll}
(a)\ \sum \frac{\log(n)}{n^2} & (b)\ \sum \frac{2(-1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}} & (c)\ \sum \cos(n\pi) \\
(d)\ \sum \frac{4^n}{3^n+1} & (e)\ \sum \frac{(2n)!}{5^n} & (f)\ \sum \frac{n^n}{n!} \\
(g)\ \sum \frac{1}{[\log(n)]^n} & (h)\ \sum \frac{n7^n}{n!} & (i)\ \sum \frac{\cos(n)}{2^n} \\
(j)\ \sum \frac{\sin(\pi/n)}{\sqrt{n}} & &
\end{array}
$$

(**Sol.:** Son convergentes (a), (b), (g), (h), (i) y (j).)

Ejercicio 3.44 Averigua el carácter de la serie

$$\sum \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$$

(**Sol.:** Convergente)

Ejercicio 3.45 Estudia el carácter de las series:

$(a)\ \sum \left(2+\dfrac{1}{n}\right)$ $\quad (b)\ \sum \dfrac{3}{5^n}$ $\quad (c)\ \sum (-7)^n$

$(d)\ \sum \log\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)$ $\quad (e)\ \sum \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ $\quad (f)\ \sum \sqrt[3]{\tan^2\left(\dfrac{1}{n^4+3}\right)}$

$(g)\ \sum \dfrac{5n-3}{n(n^2+1)}$ $\quad (h)\ \sum \dfrac{n}{(n+1)2^{n-1}}$ $\quad (i)\ \sum \dfrac{n2^n+5}{4n^3+3n}$

$(j)\ \sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $\quad (k)\ \sum \dfrac{n!}{3^n}$ $\quad (l)\ \sum \dfrac{\log(n)}{n+1}$

$(m)\ \sum \sin\left(\dfrac{(n^2+1)^2\pi}{n^3}\right)$ $\quad (n)\ \sum \dfrac{(-1)^n}{n!}$

(**Sol.:** Son convergentes: (b), (f), (g), (h), (m) y (n).)

Ejercicio 3.46 Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie

$$\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\log\frac{4}{3}++\frac{1}{4}-\log\frac{5}{4}++\ldots+\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}+\ldots$$

(H: Utilizar la desigualdad $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ para demostrar que los valores absolutos de los términos de la serie forman una sucesión decreciente)

(**Sol.:** Condicionalmente convergente)

Ejercicio 3.47 Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$.

(**Sol.:** $\dfrac{1}{2}$)

Ejercicio 3.48 Calcula la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4}{n(n+2)}$, descomponiéndola previamente en fracciones simples.

(**Sol.:** 3)

Ejercicio 3.49 Calcula la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$, descomponiéndola previamente en fracciones simples.

(**Sol.:** $\dfrac{1}{12}$)

Ejercicio 3.50 Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2-1}$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \log 2$.

(**Sol.:** $\dfrac{1}{4} \log 2$)