INFORMÁTICA Gráfica

Ingeniería Técnica en
Diseño Industrial
(3er. curso)

3

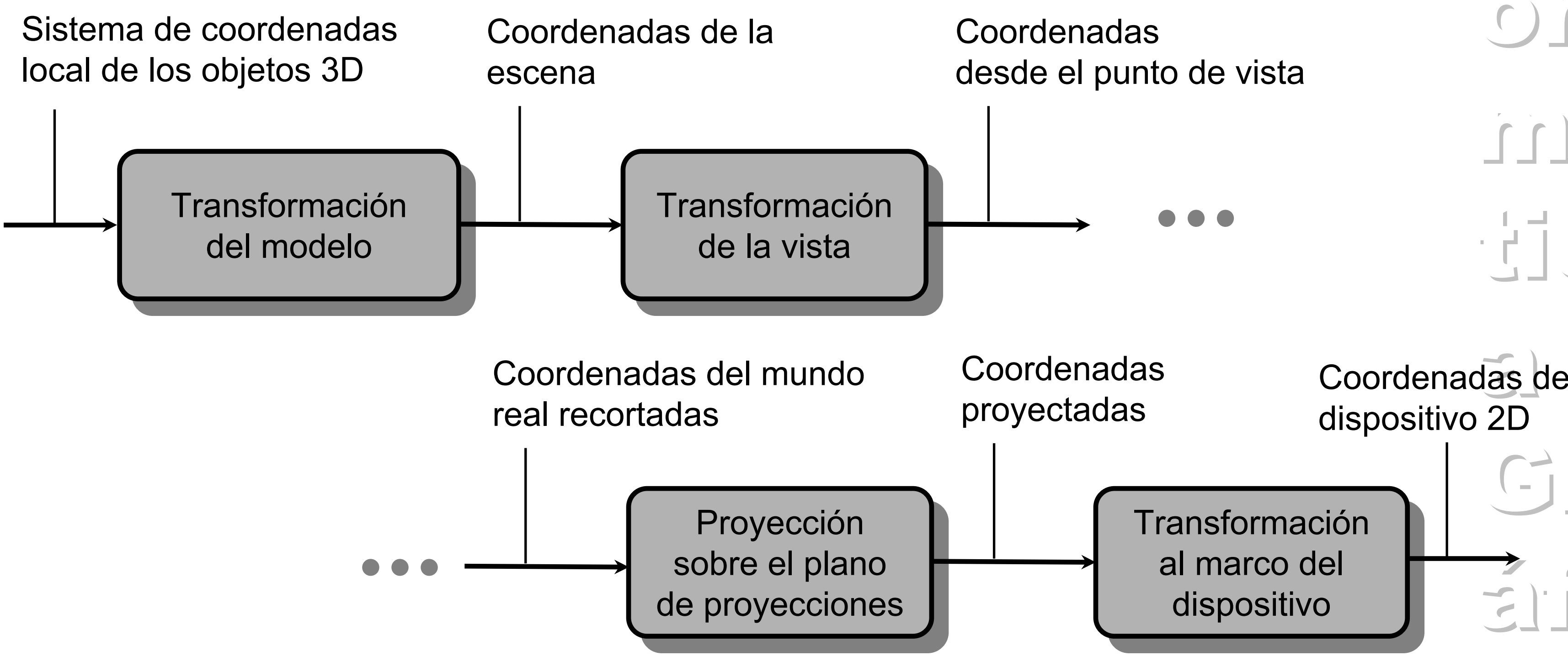
Transformaciones y proyecciones

1. **Transformaciones geométricas**
2. **Proyecciones**

Profesor: *Miguel Chover*

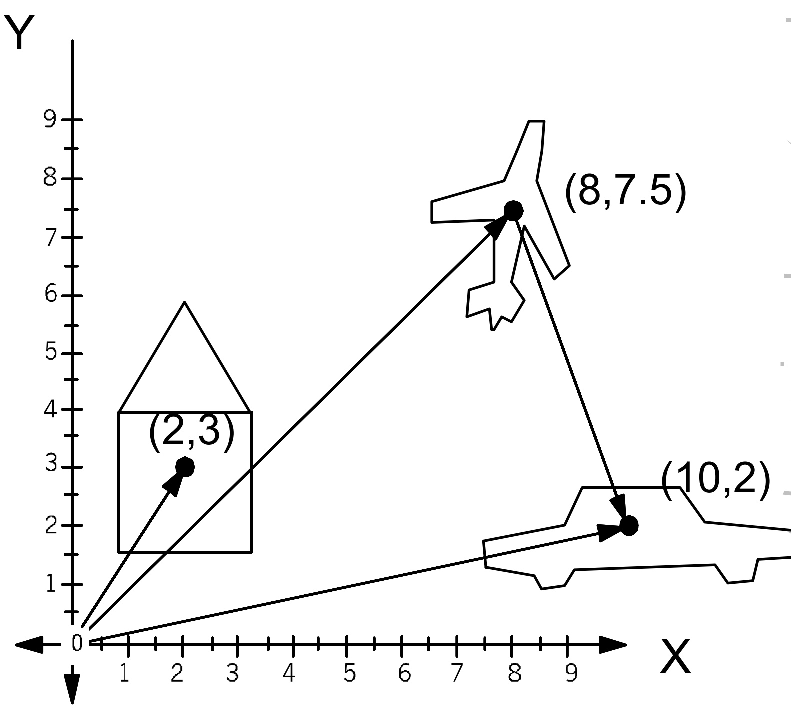
Transformaciones geométricas

- *Modelo conceptual del proceso de visualización*



Transformaciones geométricas

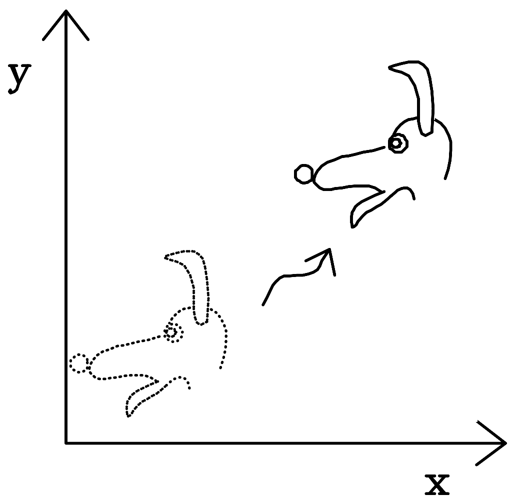
- *Los sistemas de coordenadas*
  - Definen el espacio de forma numérica
  - Proporcionan una métrica
    - *Permiten describir la distancia entre dos puntos*
    - *Utilizando los sistemas de coordenadas tenemos instrucciones cuantitativas para mover los objetos*
  - Notación: fila o columna
    - *P.Ej.: el vector que apunta al centro del coche*

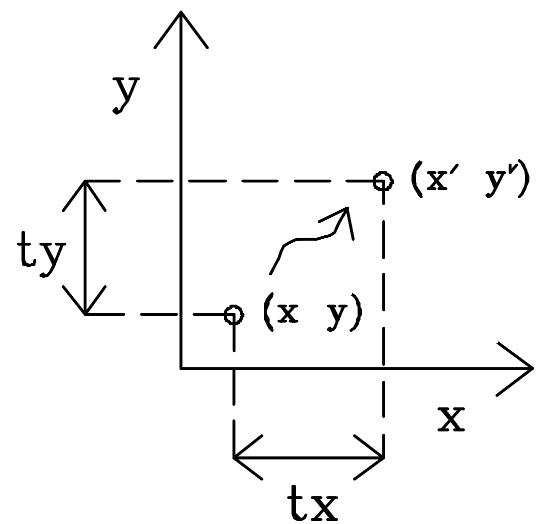


$$\begin{bmatrix}10 & 2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}10 \\ 2\end{bmatrix}$$

Transformaciones geométricas

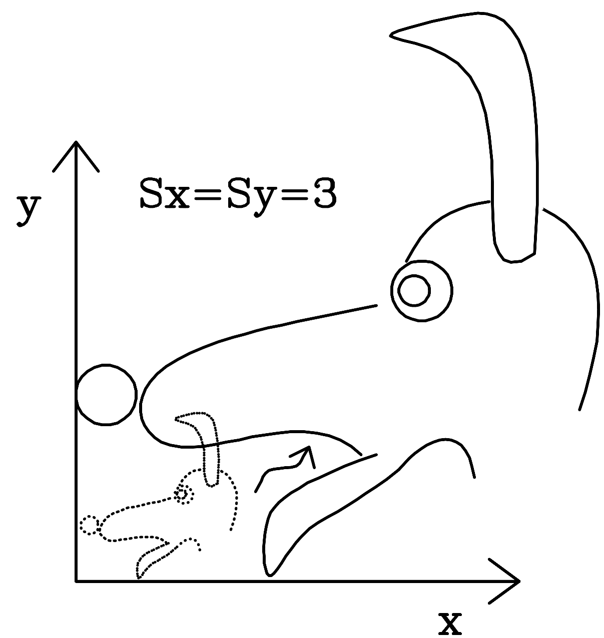
- *Translación*
  - Consiste en mover un objeto a una nueva posición
  - Las nuevas coordenadas vienen dadas por
    - $x' = x + Tx \qquad y' = y + Ty$





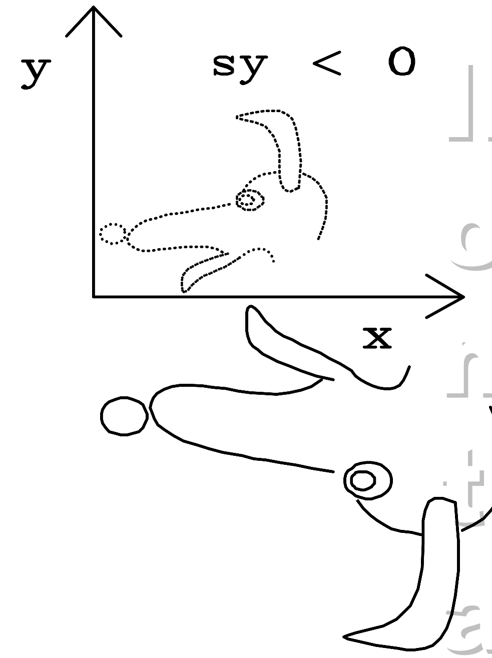
Transformaciones geométricas

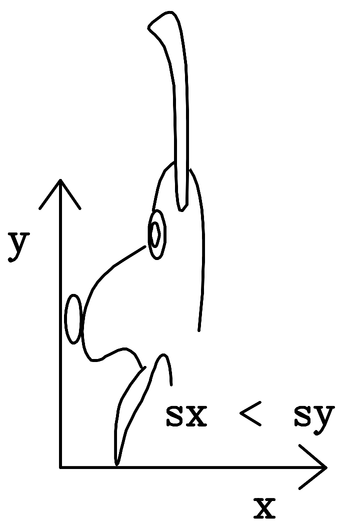
- *Escalado*
  - Cambia el tamaño del objeto
  - Se realiza respecto a un punto
  - Si se realiza respecto al origen las nuevas coordenadas son
    - $x' = x * Sx \qquad y' = y * Sy$
  - Si |Sx|>1 y |Sy|>1 aumenta el tamaño, Si |Sx|<1 y |Sy|<1 disminuye

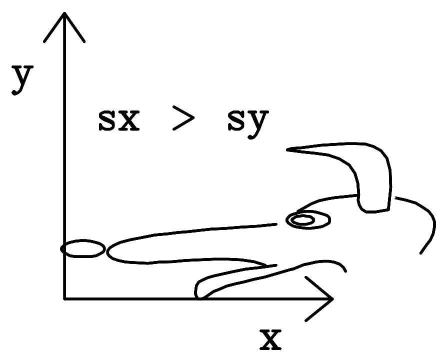


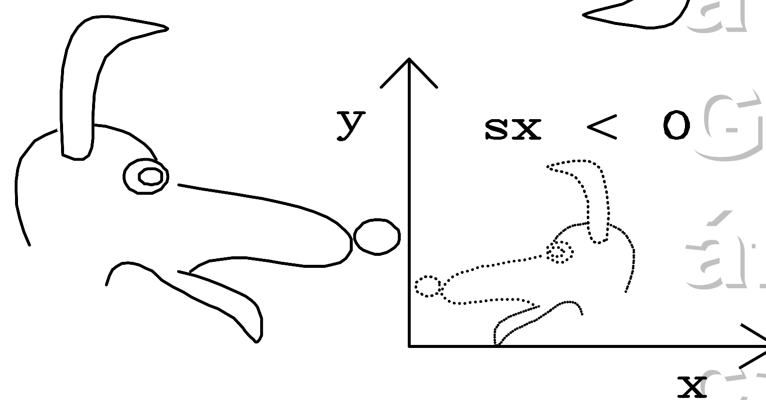
Transformaciones geométricas

- Si Sx=Sy escalado uniforme, Si Sx<>Sy escalado no uniforme
- Si Sx<0 el objeto se refleja respecto al eje Y
- Si Sy<0 el objeto se refleja respecto al eje X



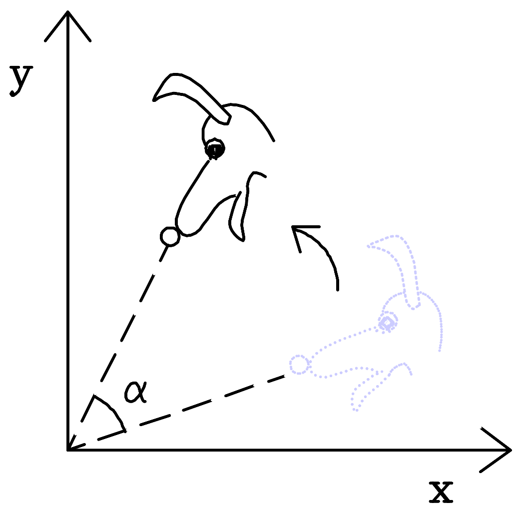


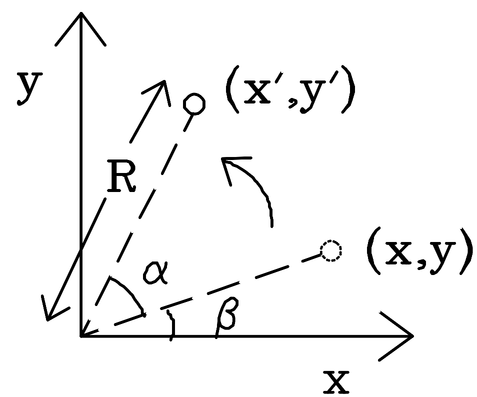




Transformaciones geométricas

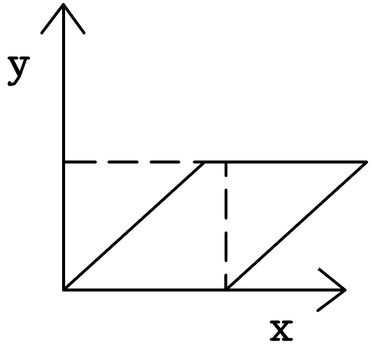
- *Rotación*
  - Se utiliza para orientar objetos
  - Como el escalado, se realiza respecto a un punto
  - Si se realiza respecto al origen las nuevas coordenadas son
    - $x' = x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \quad y' = x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha$



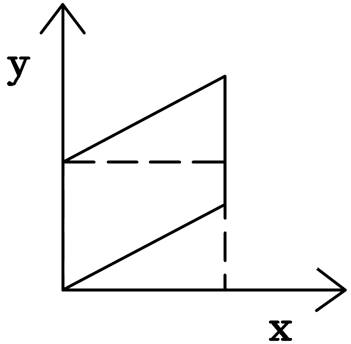


Transformaciones geométricas

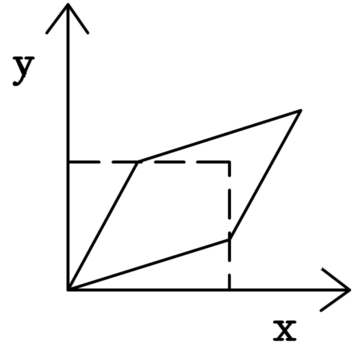
- *Distorsión (shearing)*
  - Distorsiona la forma de un objeto
  - La distorsión se produce respecto de un eje
  - Las nuevas coordenadas son
    - $x' = x + y * a \quad y' = y + x * b$



Distorsión en x



Distorsión en y



Distorsión en x e y

Transformaciones geométricas

- *Representación matricial de las transformaciones*
  - Las transformaciones anteriores se pueden representar como:
    - $x' = a*x + b*y + c \qquad y' = d*x + e*y + f$
  - Esto se puede representar utilizando matrices
  - Si incluimos todas las constantes en una matriz
  - Es más eficiente manejar matrices cuadradas
  - Las transformaciones se representarán con las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalado

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación

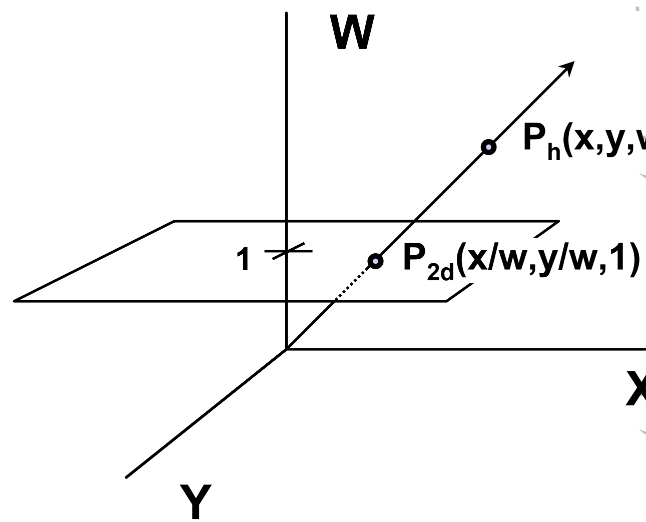
$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Distorsión

Transformaciones geométricas

- *Coordenadas homogéneas*
  - Las coordenadas homogéneas permiten tratar la traslación como la rotación y el escalado
  - Para obtener las matrices cuadradas se añade una nueva fila a la matriz y aparece una nueva coordenada w'
  - Entonces los puntos del plano 2D se representan como coordenadas homogéneas 3D
  - Si la última fila es [0 0 1] entonces w' = 1
  - Si w'<>1 se proyecta sobre el plano w=1, esto se denomina la división homogénea

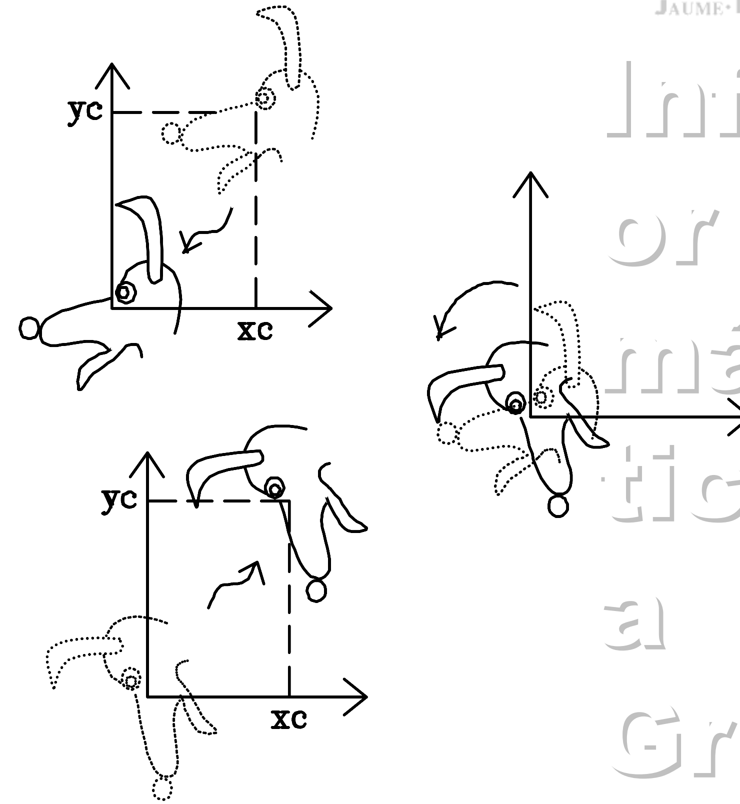
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transformaciones geométricas

- *Concatenación de transformaciones*
  - Podemos combinar varias transformaciones para obtener operaciones más complejas
  - Por ejemplo -> Rotación respecto a un punto cualquiera (x_c , y_c)
    - *En tres pasos: Traslación ($-x_c$, $-y_c$), Rotación y Traslación (x_c , y_c)*
    - *Como las matrices son cuadradas se obtiene una única matriz*

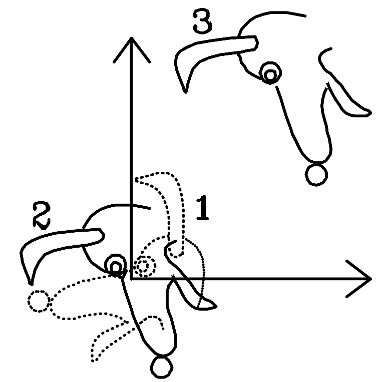
      $P3 = T(x_c , y_c) * R * T(-x_c , -y_c) * P$



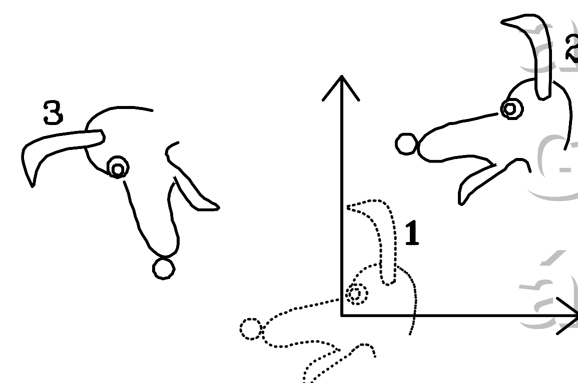
$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & (x_c - \cos\alpha \cdot x_c + \sin\alpha \cdot y_c) \\ \sin\alpha & \cos\alpha & (y_c - \sin\alpha \cdot x_c - \cos\alpha \cdot y_c) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones geométricas

- *Orden de las transformaciones*
  - El producto de matrices no es conmutativo M1*M2<>M2*M1
  - La aplicación de transformaciones tampoco lo es
  - Transformaciones que si son conmutativas
    - *Traslación-Traslación*
    - *Escalado-Escalado*
    - *Rotación-Rotación*
    - *Escalado Uniforme-Rotación*
  - Transformaciones que no son conmutativas
    - *Traslación-Escalado*
    - *Traslación-Rotación*
    - *Escalado No Uniforme-Rotación*



Traslación después de rotación



Rotación después de traslación

Transformaciones geométricas

– Notación

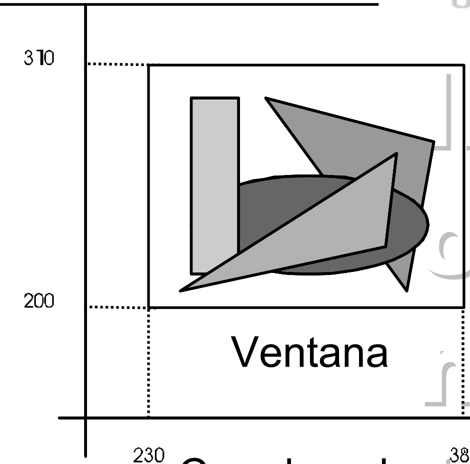
- *Si se utiliza un vector fila, el orden de aplicación cambia, las matrices que se utilizan son las traspuestas*

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

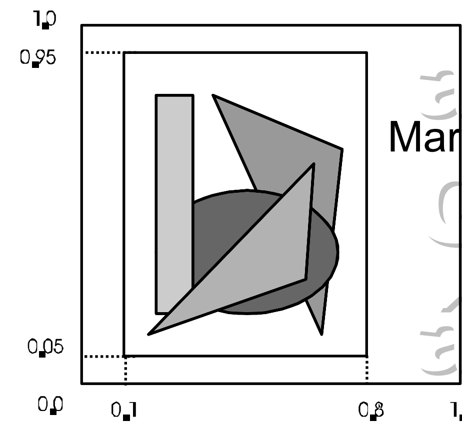
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & & c_n \\ & & & & \\ m_1 & m_2 & m_3 & & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 x_1) + (a_2 x_2) + (a_3 x_3) + \quad + (a_n x_n) \\ (b_1 x_1) + (b_2 x_2) + (b_3 x_3) + \quad + (b_n x_n) \\ (c_1 x_1) + (c_2 x_2) + (c_3 x_3) + \quad + (c_n x_n) \\ \\ (m_1 x_1) + (m_2 x_2) + (m_3 x_3) + \quad + (m_n x_n) \end{bmatrix}$$

Transformaciones geométricas

- *Transformación ventana-marco*
  - En las aplicaciones gráficas hay que utilizar unidades que se ajusten al problema:
    - *Coordenadas del mundo real (CMR)*
  - Los dispositivos físicos tienen diversos tamaños y rangos
    - *Habitualmente se utiliza un dispositivo virtual*
      - Coordenadas del dispositivo normalizado (CDN) (0.0,0.0) a (1.0,1.0)
  - La transformación de coordenadas de la aplicación en coordenadas del dispositivo físico (CD) se realiza en 2 pasos:
    - *De CMR a CDN*
      - Transformación normalizada
    - *De CDN a CD*
      - Transformación del dispositivo



Coordenadas del mundo real



Coordenadas del dispositivo normalizado

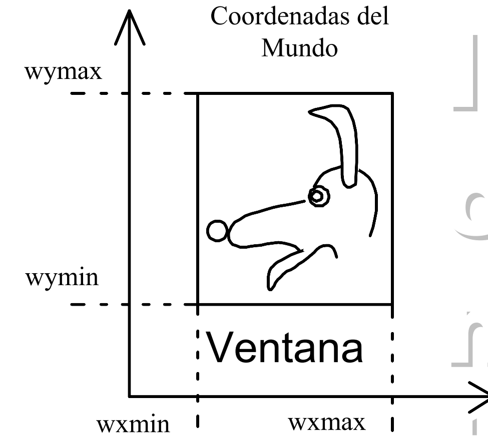
Transformaciones geométricas

- *Pasos (CMR a CDN)*
  - Se traslada la esquina inferior izquierda de la ventana al origen
  - Se aplican los factores de escala para que marco y ventana tengan el mismo tamaño
  - Se traslada el origen a la esquina inferior izquierda del marco

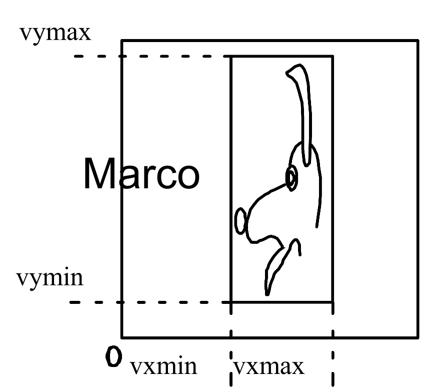
$$s_x = \frac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}}$$

$$s_y = \frac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}}$$

$$\mathbf{P'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_{xmin} \\ 0 & 1 & v_{ymin} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w_{xmin} \\ 0 & 1 & -w_{ymin} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \mathbf{P}$$



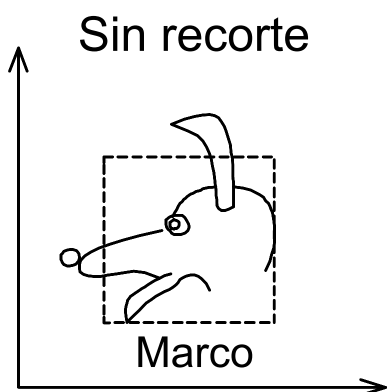
Coordenadas del mundo real

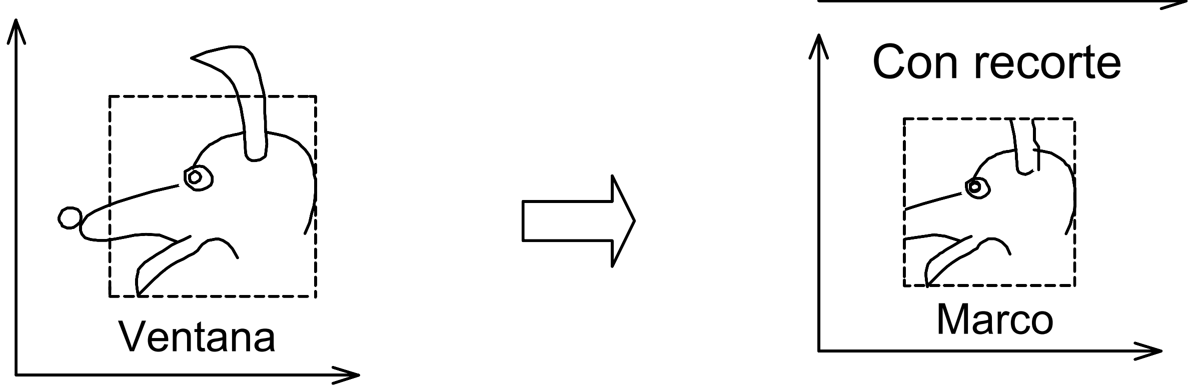


Coordenadas del dispositivo normalizado

Transformaciones geométricas

- Si al realizar el cambio de sistema de coordenadas alguna parte del dibujo queda fuera del marco
  - *Entonces se puede realizar un proceso de recortado*
- La transformación puede ser:
  - *Isotrópica: sin distorsión*
  - *Anisotropica: factores de escala distintos*





Coordenadas del mundo real

Coordenadas del dispositivo normalizado

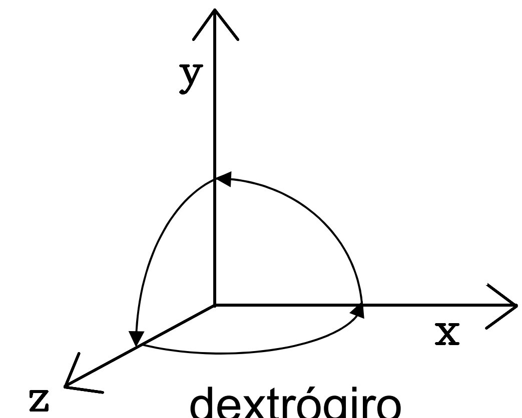
Transformaciones geométricas

- *Las transformaciones en 3D:*
  - Se utilizan para manipular objetos en el espacio 3D
  - Los sistemas de coordenadas pueden ser
    - *Dextrógiro*
    - *Levógiro*
  - También se utilizan coordenadas homogéneas
    - *Un punto 3D (x, y, z) se representa por (x, y, z, w) y se transforma por la matriz*

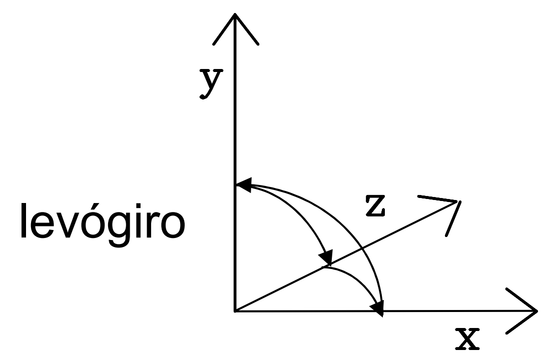
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

    - *Para obtener el punto 3D de las coordenadas homogéneas se debe dividir por w x''= x'/w'   y''= y'/w'   z''= z'/w'*

El eje Z apunta hacia el exterior del papel



El eje Z apunta hacia el interior del papel



Transformaciones geométricas

- *Traslación*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Escalado*

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Distorsión*
  - La distorsión con respecto al eje X se controla con (b,c), respecto al eje Y con (e,g), respecto al eje Z con (i,j)

$$\begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ e & 1 & g & 0 \\ i & j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Rotación*
  - Eje X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Eje Y

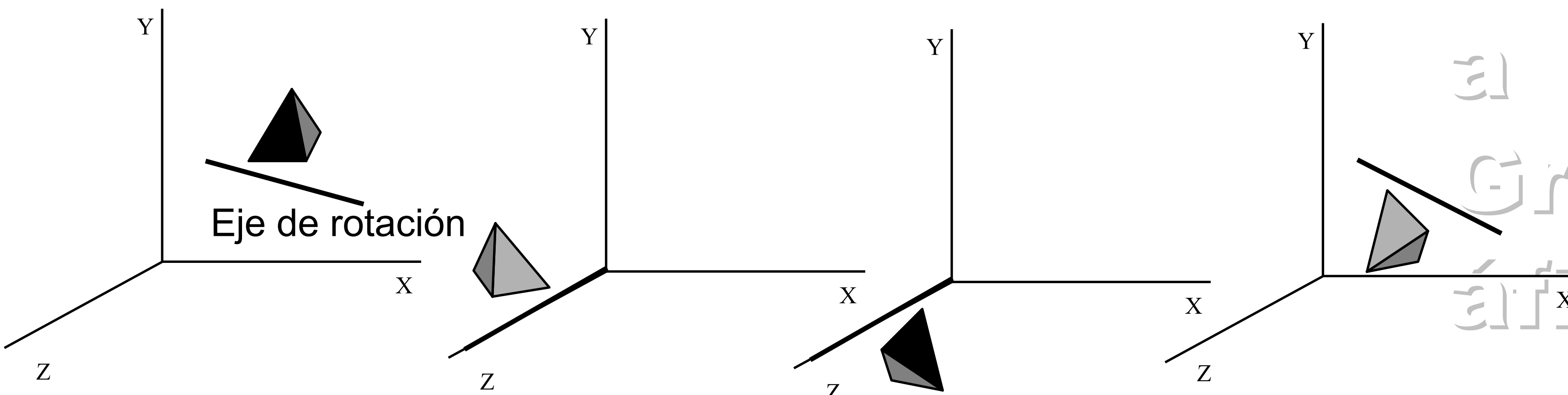
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Eje Z

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

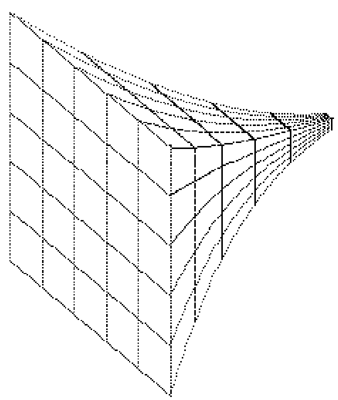
Transformaciones geométricas

- *Ejemplo de transformación geométrica en 3D*
  - Para realizar una rotación respecto a un eje cualquiera, se deben de realizar los siguientes pasos:
    - *Traslación para que el eje pase por el origen*
    - *Rotar el eje para que coincida con uno de los ejes de coordenadas*
    - *Realizar la rotación deseada alrededor del eje anterior*
    - *Aplicar las rotaciones inversas para que el eje vuelva a su orientación original*
    - *Aplicar la traslación inversa para que el eje vuelva a su posición original*

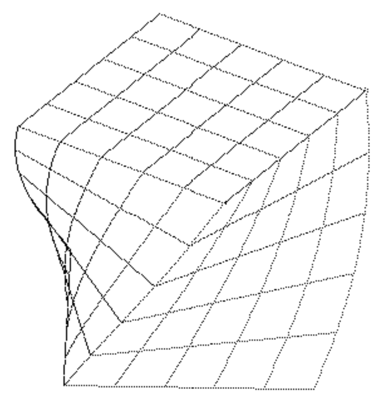


Transformaciones geométricas

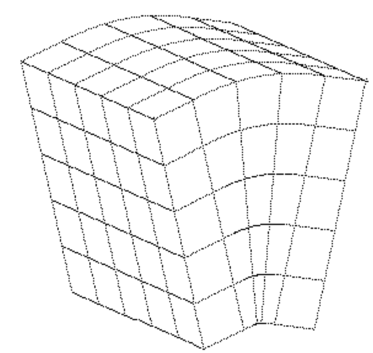
- *Transformaciones no lineales*
  – Conjunto de transformaciones que no se aplican de forma constante sobre todo el objeto
    - *En lugar de utilizar constantes en las matrices de transformación se emplean funciones*
  – A este tipo de transformaciones se les llama deformaciones globales
  – Entre las más conocidas destacan



Afilar (Taper)



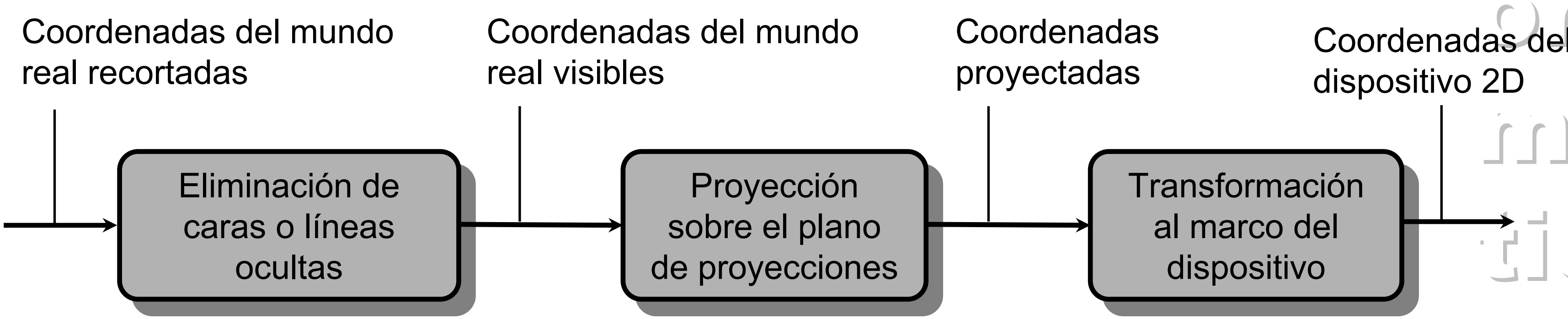
girar (Twist)



curvar (Bend)

Proyecciones

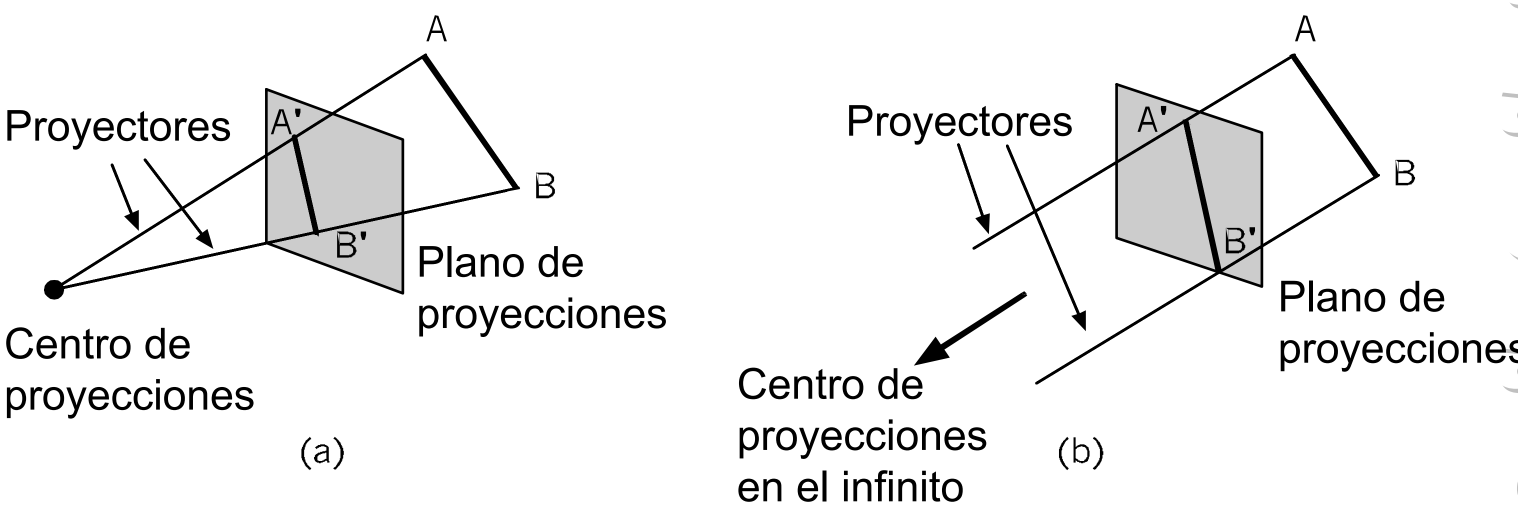
- *Modelo conceptual del proceso de visualización 3D*



  - El marco es el área rectangular del dispositivo donde se va a visualizar la escena
  - El marco y el plano de proyecciones no tienen porque tener la misma razón de aspecto
    - *La transformación del marco indica que se debe de hacer si las razones de aspecto difieren*

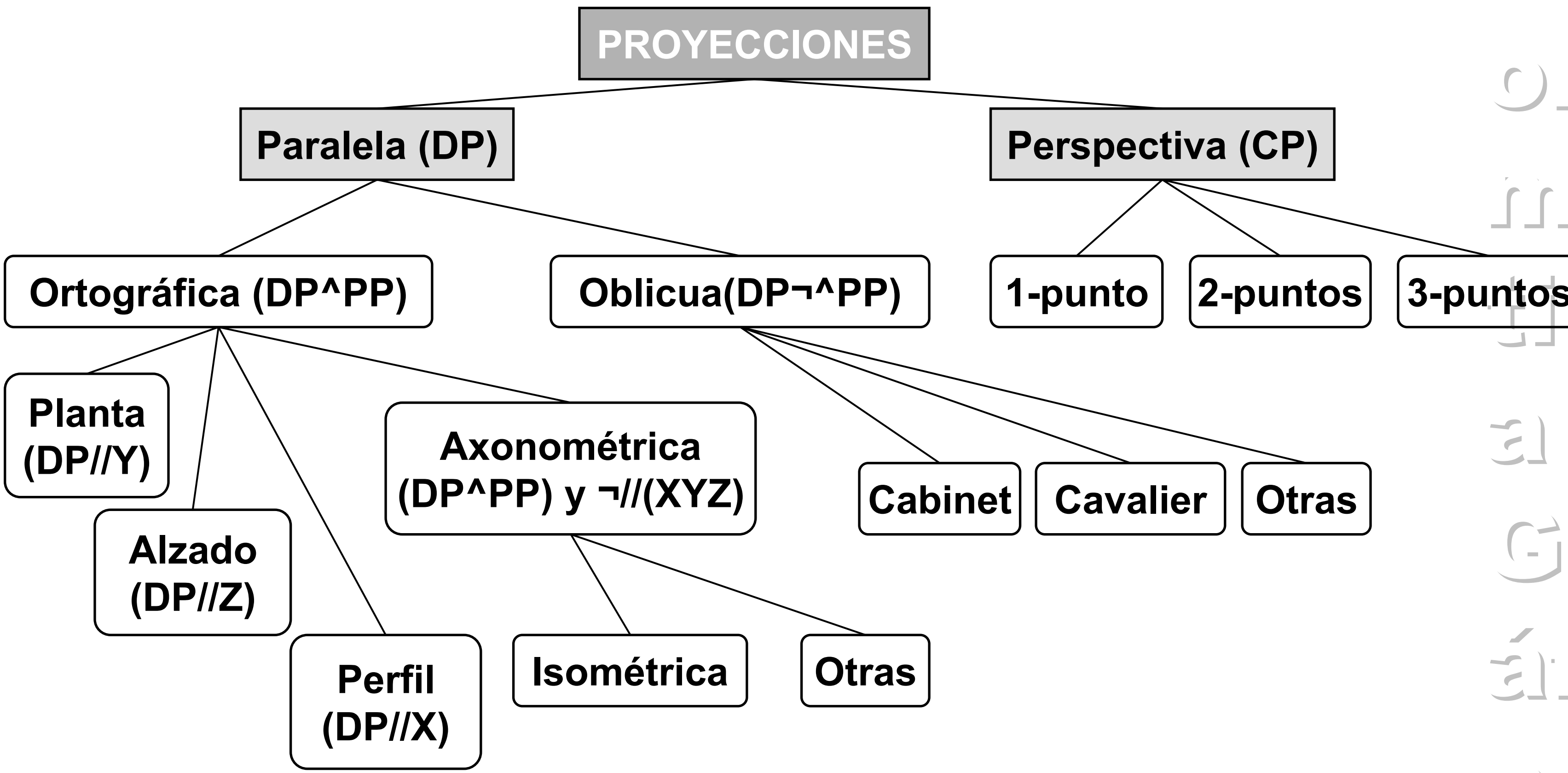
Proyecciones

- *Tipos principales de proyecciones:*
  - a) Perspectiva
    - *Determinada por el centro de proyecciones (CP)*
  - b) Paralela
    - *Determinada por la dirección de proyección (DP) (los proyectores son paralelos ya que el CP esta en el infinito)*



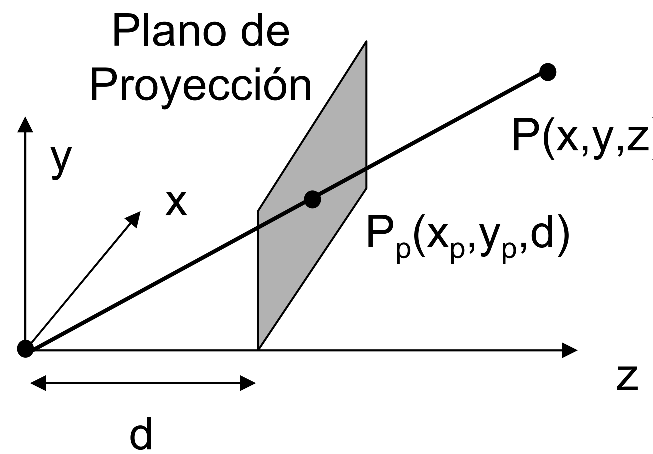
Proyecciones

- *Relaciones entre los distintos tipos de proyecciones:*



Proyecciones

- *Matemáticas de las proyecciones:*
  - La proyección se define como una matriz 4x4
    - *Composición con las matrices de transformación*
  - Cálculo del punto en perspectiva



$$P_p = (x_p, y_p, z_p)$$

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}; \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}$$

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}; \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}$$

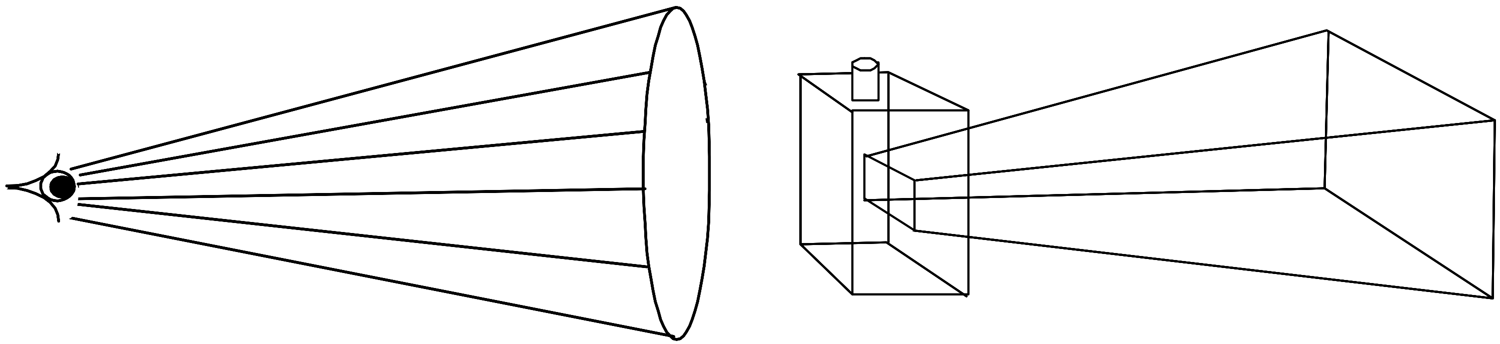
$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = M_{per} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W} \right) = (x_p, y_p, z_p) = \left(\frac{x}{z/d}, \frac{y}{z/d}, d \right)$$

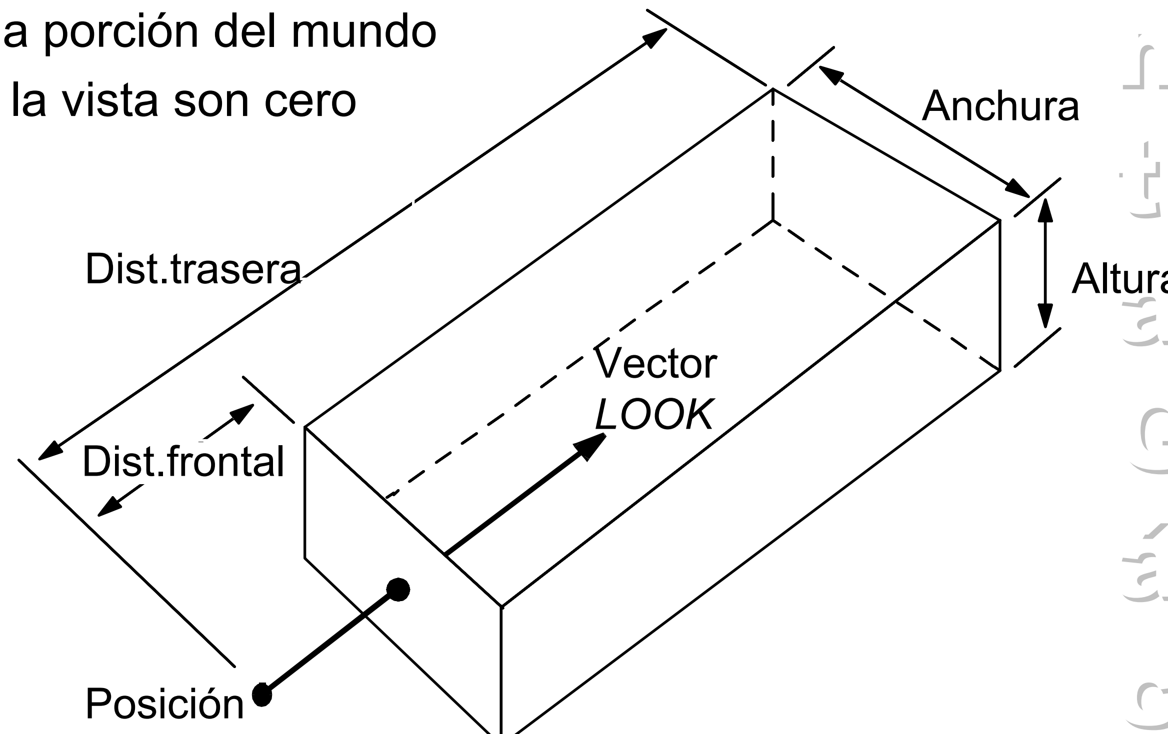
Proyecciones

- *Volumen de la vista*
  - El volumen de la vista contiene todo aquello que es visible
  - En el ojo humano el volumen es cónico
    - *El coste computacional de recortar contra una superficie cónica es excesivo*
  - En nuestro caso se aproxima mediante una pirámide truncada de base rectangular "*frustrum".*
    - *Trabaja perfectamente con una ventana rectangular*
    - *El recortado es un proceso más sencillo*



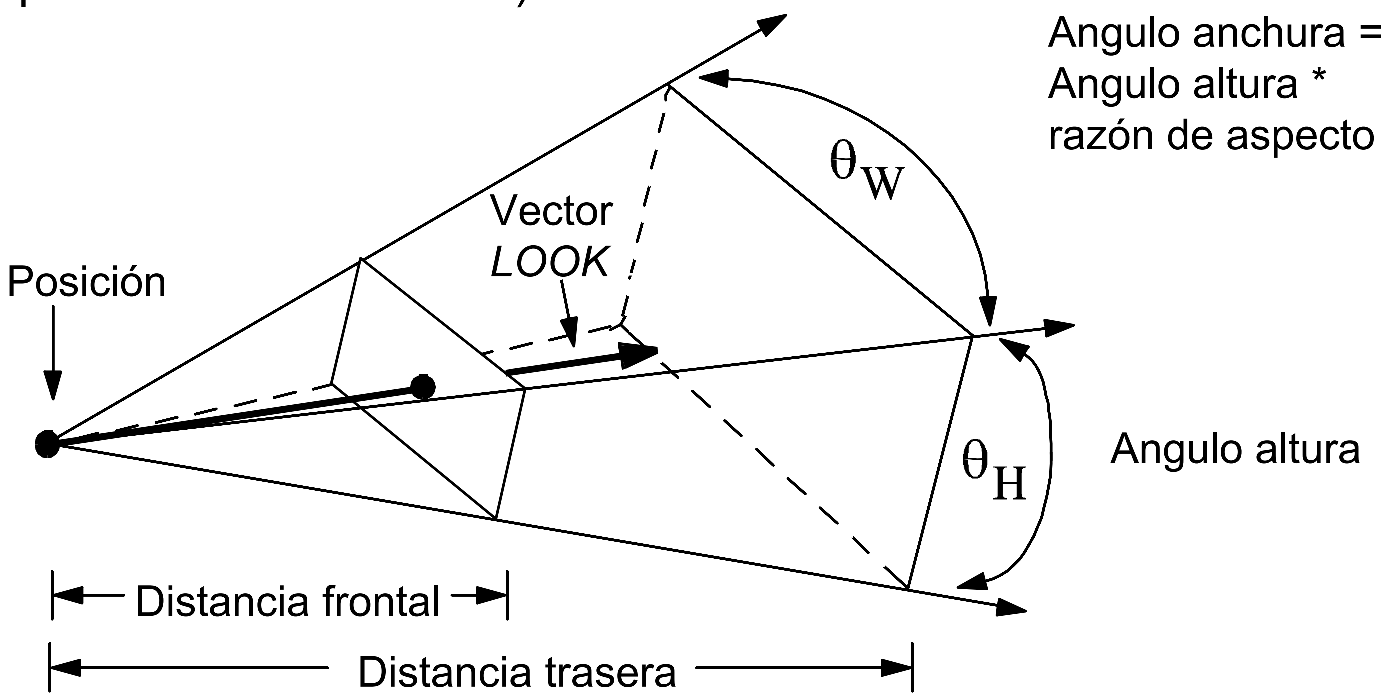
Proyecciones

- *Volumen de la vista para una proyección paralela ortográfica*
  – El volumen de la vista es útil para eliminar objetos extraños y permitir que el usuario se centre en una porción del mundo
  – Los ángulos de la vista son cero



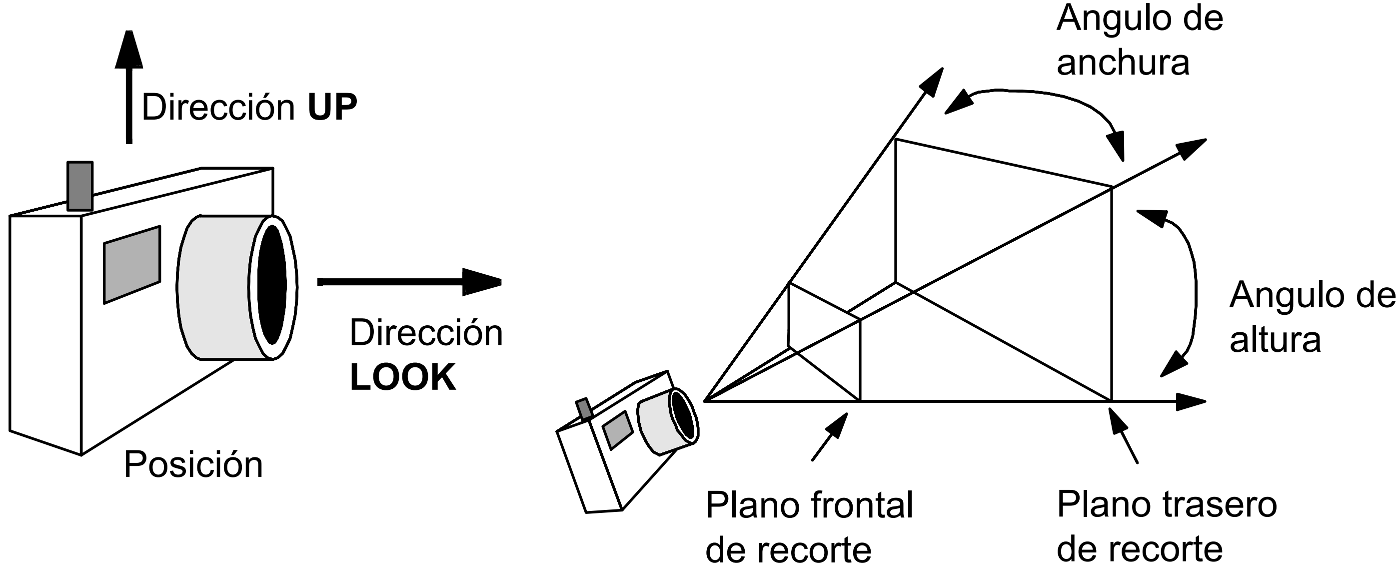
Proyecciones

- *Volumen de la vista para una proyección perspectiva*
  - Elimina los objetos demasiado lejanos a *Posición*
  - Elimina los objetos demasiado cercanos a *Posición* (pueden aparecen distorsionados)

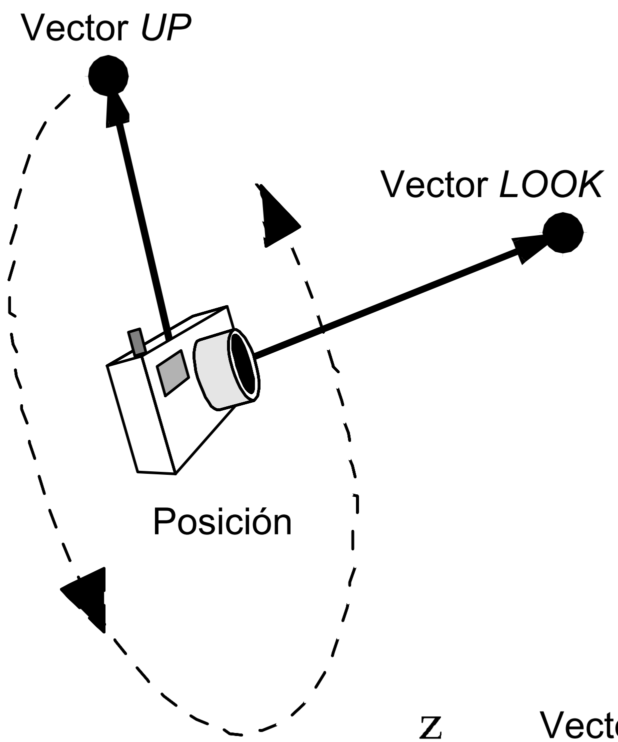


Proyecciones

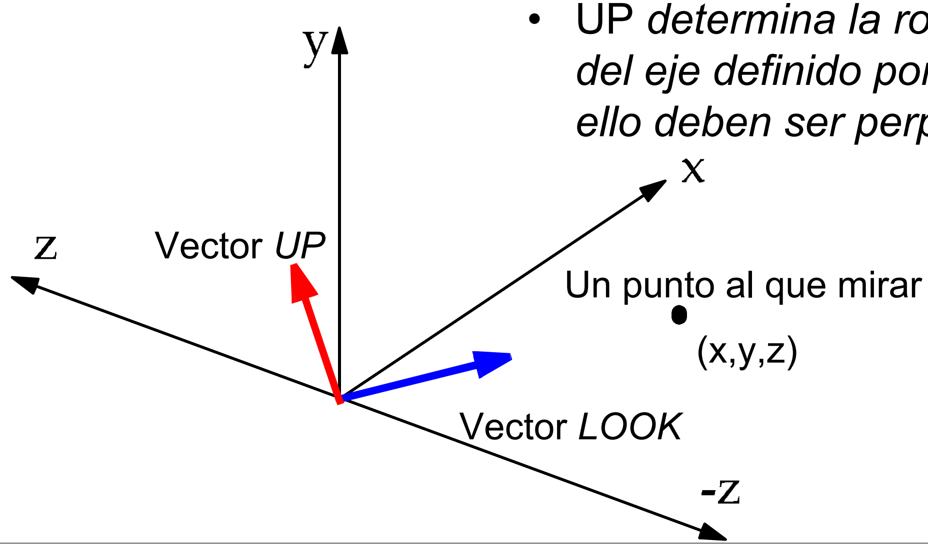
- *Modelo de cámara*
  - Especificación del volumen de la vista
  - Es necesario determinar distintos parámetros de la cámara sintética para poder realizar la visualización



Proyecciones

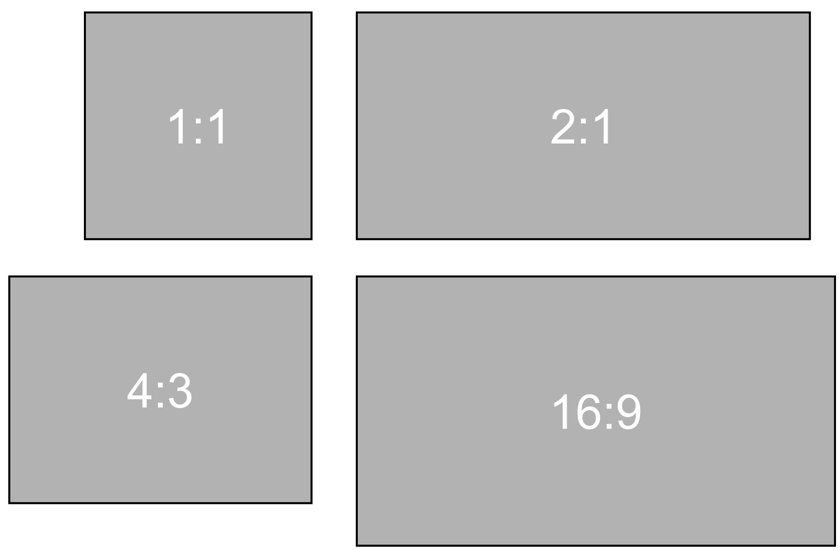


- *Posición*
  - Tres grados de libertad (x,y,z)
- *Orientación*
  - Se define mediante los vectores *LOOK* y *UP*
    - *El vector* LOOK *indica hacia donde está mirando la cámara*
    - UP *determina la rotación a través del eje definido por* LOOK, *por ello deben ser perpendiculares*



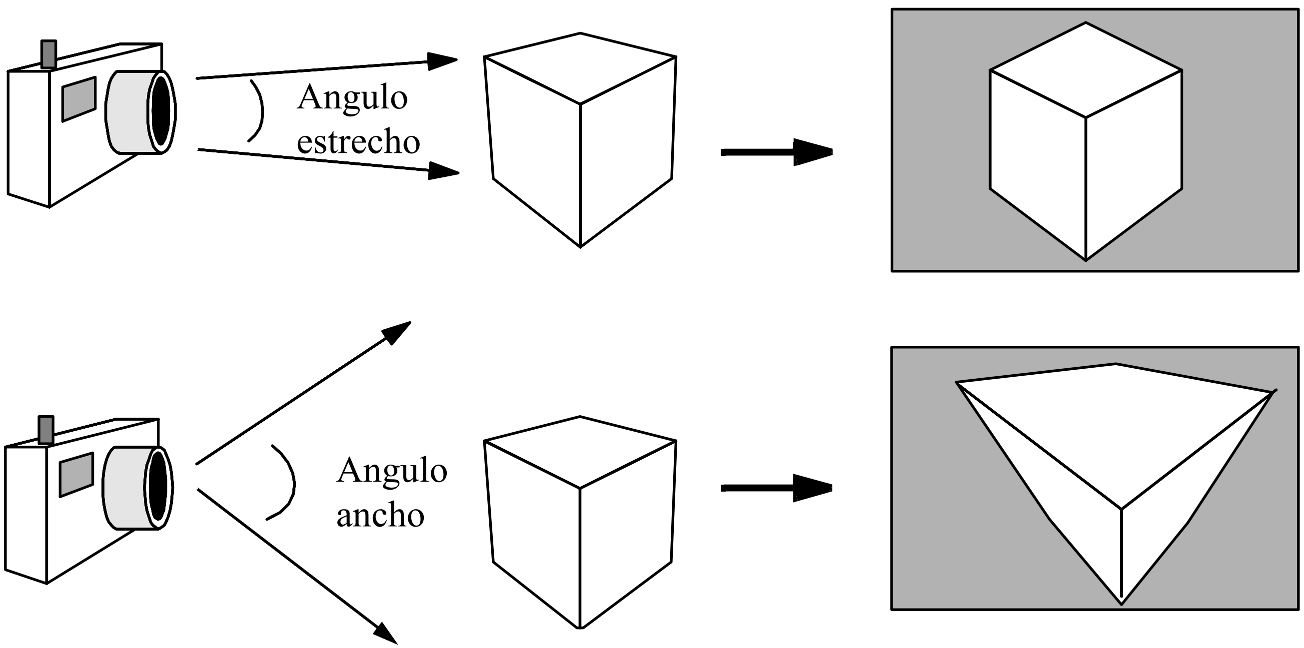
Proyecciones

- *Razón de aspecto*
  - Análogo al tamaño de las fotografías, indica la proporción entre anchura y altura
  - Una ventana de visualización cuadrada tiene una razón de aspecto de 1:1, otras utilizadas son 2:1, 4:3, 16:9



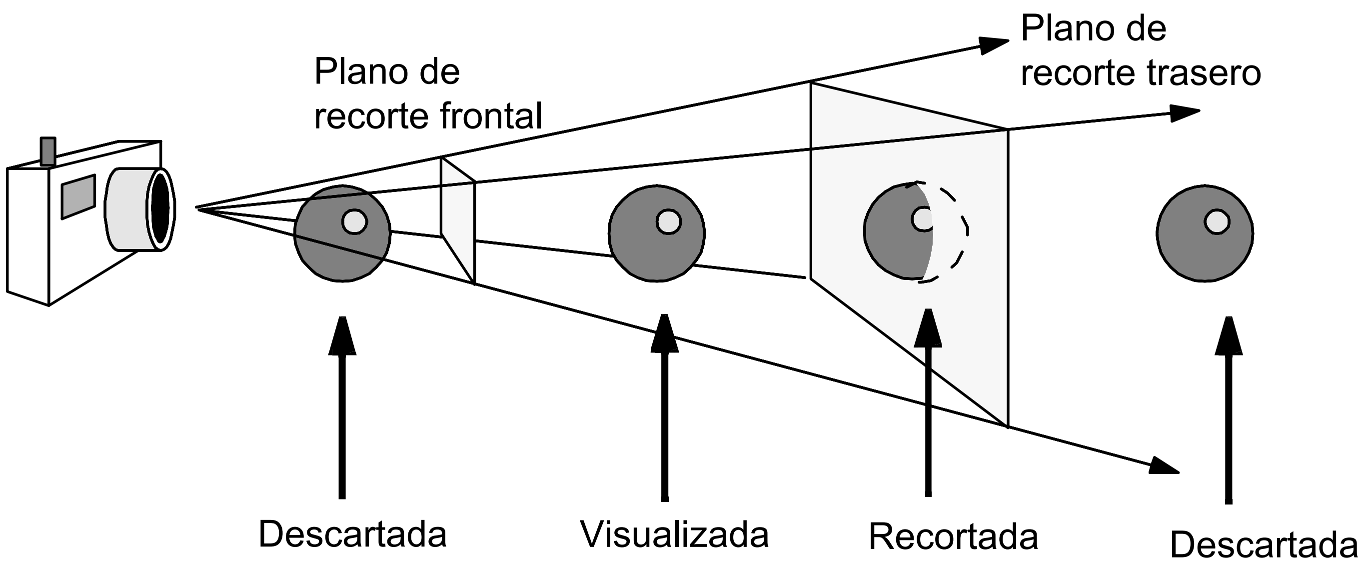
Proyecciones

- *Campo de visión*
  - Análogo a escoger una lente de una cámara fotográfica
  - Determina la cantidad de distorsión perspectiva



Proyecciones

- *Planos de recorte frontal y trasero*
  - El volumen entre los dos planos de recorte define lo que se ve
  - Su posición se definen por la distancia a lo largo del vector *LOOK*
  - Los objetos que quedan fuera del volumen no se dibujan
  - Los objetos que intersectan con el volumen se recortan

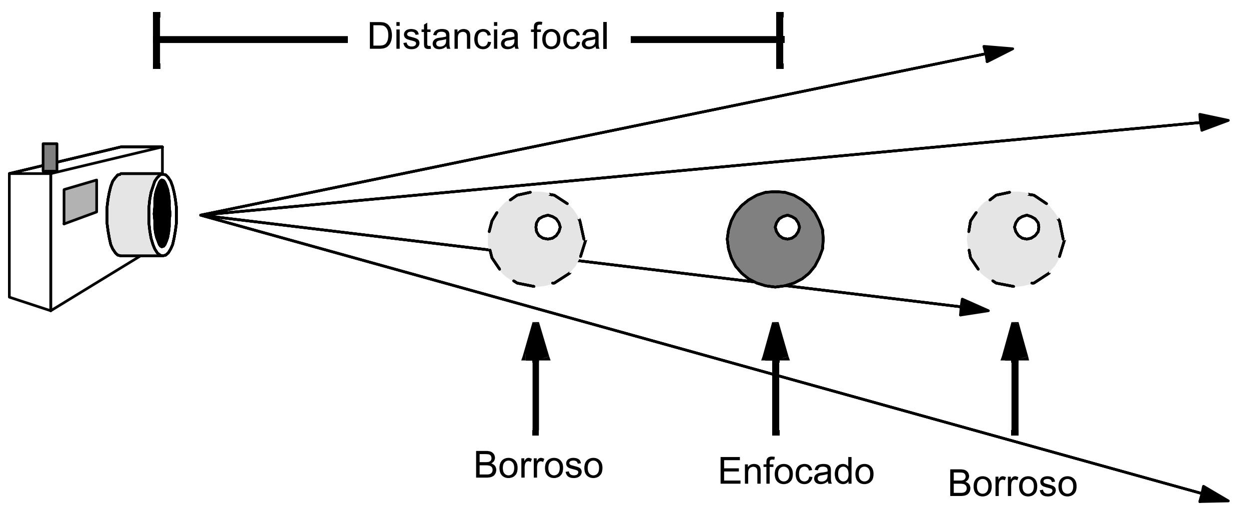


Proyecciones

- *Razones para utilizar el plano frontal*
  - No dibujar los objetos que están muy cerca de la cámara porque pueden bloquear la visión del resto de la escena
  - No dibujar los objetos que quedan detrás de la cámara, sobre todo en una proyección perspectiva
- *Razones para utilizar el plano trasero*
  - Los objetos muy distantes pueden dibujarse demasiado pequeños para que sean visualmente significativos, pero sigue siendo igual de costoso visualizarlos
  - Si se tiene una escena muy compleja, es posible que por claridad, se desee visualizar sólo aquellos objetos más cercanos a la cámara y descartar el resto

Proyecciones

- *Profundidad de campo*
  - Algunos modelos de cámara tienen profundidad de campo para medir el rango de enfoque ideal, aproximando el comportamiento de una cámara real
  - Los objetos situados a la distancia focal desde la cámara se visualizarán nítidos (enfocados), los que estén más cercanos o más lejanos aparecerán borrosos (desenfocados)



SUMARIO

- *Las transformaciones geométricas más habituales son: la traslación, la rotación, el escalado y la distorsión*
- *Las coordenadas homogéneas permiten tratar la traslación como la rotación y el escalado*
- *Se pueden realizar transformaciones complejas mediante la concatenación de transformaciones geométricas*
- *Los tipos principales de proyecciones son las perspectivas y las paralelas (ortográficas y oblicuas)*
- *El volumen de la vista define la zona visible de la escena*

Informática Gráfica