

Aplicación del método de volúmenes  
finitos a la ecuación de  
difusión-advección  
Trabajo Final de Máster

---



Máster en Matemática  
Computacional

Margarita Vinaroz Córcoles

Curso 2017-2018

---

**Tutores académicos:**

Vicente Martínez García  
Juan Miguel Tiscar Cervera



# Resumen

En el siguiente trabajo se presenta el estudio realizado sobre la variación de temperatura en una tubería por la cual circula un líquido y bajo ciertas condiciones de contorno.

Las técnicas utilizadas para llevar a cabo este estudio se enmarcan dentro del campo de la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). La CFD es el área del conocimiento que trata sobre la simulación numérica de flujos de fluidos, transferencia de calor y fenómenos relacionados tales como reacciones químicas, combustión, aeroacústica, etc.[Kessler, M. 2016]. La CFD hace uso de métodos de aproximación numérica para la resolución y el análisis de problemas sobre el flujo de fluidos llevando a cabo una partición previa del dominio en pequeños volúmenes discretos. Para el caso específico en el que se centra el estudio, utilizaremos el método de aproximación numérica de volúmenes finitos. Por otra parte, cabe destacar que el uso de CFD ofrece numerosas ventajas como son la predicción de las propiedades del fluido con gran detalle en el dominio estudiado, ayuda al diseño y prototipaje y soluciones rápidas evitando costosos experimentos, la obtención de una visualización y animación del proceso en términos de las variables del fluido [Ruiz, M.M. 2018]. El objetivo de este trabajo es la simulación del problema del transporte de calor sobre tuberías mediante el método de volúmenes finitos, aplicado en un programa realizado en un software especializado en el cómputo numérico (*Scilab*).

En este documento se recoge la fundamentación teórica de las técnicas utilizadas, la implementación del programa y el análisis y discusión de los resultados obtenidos.

## Palabras clave

Dinámica de Fluidos Computacional, intercambio de calor, simetría axial, simulación numérica.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. La ecuación de advección-difusión . . . . .	11
1.2. El método de volúmenes finitos . . . . .	13
<b>2. Objetivos</b>	<b>17</b>
<b>3. Aplicación del método de volúmenes finitos a la ecuación</b>	<b>19</b>
3.1. Metodología . . . . .	19
3.2. Planteamiento del problema . . . . .	27
3.3. Discretización . . . . .	33
3.3.1. Celdas interiores . . . . .	35
3.3.2. Celdas de salida . . . . .	36
3.3.3. Celdas de entrada . . . . .	37
3.3.4. Celdas pared inferior . . . . .	38
3.3.5. Celdas pared superior . . . . .	40
3.3.6. Esquinas . . . . .	41
3.4. Ensamblado . . . . .	46
<b>4. Resultados numéricos</b>	<b>49</b>
4.1. Efecto del espesor de la pared . . . . .	49
4.2. Efecto de la velocidad media axial del flujo . . . . .	51
4.3. Efecto del cambio de fluido . . . . .	54
<b>5. Conclusiones generales y trabajo futuro</b>	<b>57</b>
5.1. Conclusiones generales . . . . .	57
5.2. Trabajo futuro . . . . .	59
<b>A. Teoremas utilizados.</b>	<b>61</b>
<b>B. Métodos de aproximación</b>	<b>63</b>
B.1. Método Upwind de primer orden . . . . .	63
B.2. Condición de contorno tipo Dirichlet . . . . .	64

---

B.3. Método Euler implícito . . . . .	66
<b>C. Matriz de coeficientes</b>	<b>67</b>
<b>D. Implementación en Scilab</b>	<b>69</b>
D.1. Módulo principal del programa . . . . .	69
D.2. Cargar parámetros . . . . .	69
D.3. Componer la matriz y resolver el sistema lineal . . . . .	70
D.4. Cálculos de los coeficientes de la matriz y del vector de términos independientes . . . . .	71
D.5. Mostrar gráfica animada . . . . .	77
D.6. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo . . . . .	77
<b>E. Gráficas</b>	<b>79</b>
E.1. Efecto del espesor de la pared . . . . .	79
E.1.1. 0.001 m de espesor . . . . .	80
E.1.2. 0.01 m de espesor . . . . .	82
E.1.3. 0.1 m de espesor . . . . .	84
E.2. Efecto de la velocidad media axial del flujo . . . . .	86
E.2.1. 0.001 m/s de velocidad medial axial del flujo . . . . .	86
E.2.2. 0.005 m/s de velocidad medial axial del flujo . . . . .	88
E.2.3. 0.01 m/s de velocidad medial axial del flujo . . . . .	90
E.3. Efecto del cambio de fluido . . . . .	92
E.3.1. Agua . . . . .	93
E.3.2. Alcohol amílico . . . . .	95

---

# Índice de figuras

1.1. Proceso de difusión. . . . .	12
1.2. Proceso de convección natural. . . . .	12
1.3. Diferencias de mallado entre métodos. . . . .	16
3.1. Mallado ortogonal estructurado en dos dimensiones espaciales. . . . .	20
3.2. Mallado tetrahédrico no estructurado en dos dimensiones espaciales. . . . .	21
3.3. Ejemplo. . . . .	23
3.4. Mallado del ejemplo. . . . .	23
3.5. Esquema de los centros de las celdas y caras en una dimensión espacial. . . . .	24
3.6. Coordenadas cilíndricas. . . . .	28
3.7. Mallado axisimétrico 2D. . . . .	29
3.8. Celdas interiores del mallado. . . . .	35
3.9. Celdas outlet del mallado. . . . .	36
3.10. Celdas inlet del mallado. . . . .	37
3.11. Celdas pared inferior del mallado. . . . .	39
3.12. Celdas pared superior del mallado. . . . .	40
3.13. Celdas de las esquinas del mallado. . . . .	41
3.14. Reindexado del mallado. . . . .	46
4.1. Variación de temperatura en los diferentes espesores . . . . .	51
4.2. Variación de temperatura en las velocidades medias axiales del flujo . . . . .	53
4.3. Variación de temperatura en los diferentes líquidos . . . . .	56
E.1. Mapa de temperaturas en °C con $t=10000$ s y espesor 0.001 m . . . . .	80
E.2. Mapa de temperaturas en °C con $t=20000$ s y espesor 0.001 m . . . . .	80
E.3. Mapa de temperaturas en °C con $t=30000$ s y espesor 0.001 m . . . . .	81
E.4. Mapa de temperaturas en °C con $t=40000$ s y espesor 0.001 m . . . . .	81
E.5. Mapa de temperaturas en °C con $t=10000$ s y espesor 0.01 m . . . . .	82

E.6. Mapa de temperaturas en °C con $t=20000$ s y espesor 0.01 m .	82
E.7. Mapa de temperaturas en °C con $t=30000$ s y espesor 0.01 m .	83
E.8. Mapa de temperaturas en °C con $t=40000$ s y espesor 0.01 m .	83
E.9. Mapa de temperaturas en °C con $t=10000$ s y espesor 0.1 m .	84
E.10. Mapa de temperaturas en °C con $t=20000$ s y espesor 0.1 m .	84
E.11. Mapa de temperaturas en °C con $t=30000$ s y espesor 0.1 m .	85
E.12. Mapa de temperaturas en °C con $t=40000$ s y espesor 0.1 m .	85
E.13. Mapa de temperaturas en °C con $t=5000$ s y $u_{avg}=0.001$ m/s	86
E.14. Mapa de temperaturas en °C con $t=10000$ s y $u_{avg}=0.001$ m/s	87
E.15. Mapa de temperaturas en °C con $t=15000$ s y $u_{avg}=0.001$ m/s	87
E.16. Mapa de temperaturas en °C con $t=20000$ s y $u_{avg}=0.001$ m/s	88
E.17. Mapa de temperaturas en °C con $t=5000$ s y $u_{avg}=0.005$ m/s .	88
E.18. Mapa de temperaturas en °C con $t=10000$ s y $u_{avg}=0.005$ m/s	89
E.19. Mapa de temperaturas en °C con $t=15000$ s y $u_{avg}=0.005$ m/s	89
E.20. Mapa de temperaturas en °C con $t=20000$ s y $u_{avg}=0.005$ m/s	90
E.21. Mapa de temperaturas en °C con $t=5000$ s y $u_{avg}=0.01$ m/s .	90
E.22. Mapa de temperaturas en °C con $t=10000$ s y $u_{avg}=0.01$ m/s .	91
E.23. Mapa de temperaturas en °C con $t=15000$ s y $u_{avg}=0.01$ m/s .	91
E.24. Mapa de temperaturas en °C con $t=20000$ s y $u_{avg}=0.01$ m/s .	92
E.25. Mapa de temperaturas en °C para agua con $t=2500$ s . . . . .	93
E.26. Mapa de temperaturas en °C para agua con $t=5000$ s . . . . .	93
E.27. Mapa de temperaturas en °C para agua con $t=7500$ s . . . . .	94
E.28. Mapa de temperaturas en °C para agua con $t=10000$ s . . . . .	94
E.29. Mapa de temperaturas en °C para alcohol amílico con $t=2500$ s	95
E.30. Mapa de temperaturas en °C para alcohol amílico con $t=5000$ s	95
E.31. Mapa de temperaturas en °C para alcohol amílico con $t=7500$ s	96
E.32. Mapa de temperaturas en °C para alcohol amílico con $t=10000$ s	96

# Índice de tablas

3.1. Tabla coeficientes del ejemplo. . . . .	27
--	----



# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se expone, por una parte, la ecuación de advección-difusión, que es aquella que representa el transporte de propiedades físicas o químicas (tales como la energía, la materia y la cantidad de movimiento) en un determinado dominio. Por otra parte, en una segunda sección, se introduce el método de volúmenes finitos para su resolución numérica y los principales motivos por los que se ha llevado a cabo su elección, frente a otros métodos numéricos que existen para resolver los problemas de la mecánica de fluidos.

### 1.1. La ecuación de advección-difusión

La ecuación de advección-difusión describe el fenómeno físico del transporte por medio de dos tipos: transporte por difusión y transporte por advección (o convección<sup>1</sup>) [Van Slingerland, P. 2007]. Estas dos tipos de transporte pueden definirse del siguiente modo:

- Transporte por difusión: la difusión es el proceso físico por el cual se produce propagación espontánea de la materia debido al movimiento aleatorio de moléculas. En la Figura 1.1 se puede observar de manera esquemática este proceso.
- Transporte por advección: la advección o convección es el transporte de materia o propiedad debido al movimiento del fluido. La Figura 1.2 muestra un ejemplo de advección/convección representado mediante flechas rojas.

---

<sup>1</sup>En algunos textos se trata a la convección como a un mecanismo que engloba tanto a la difusión como a la advección. En otras ocasiones se asocia a la convección únicamente el fenómeno de advección vertical.

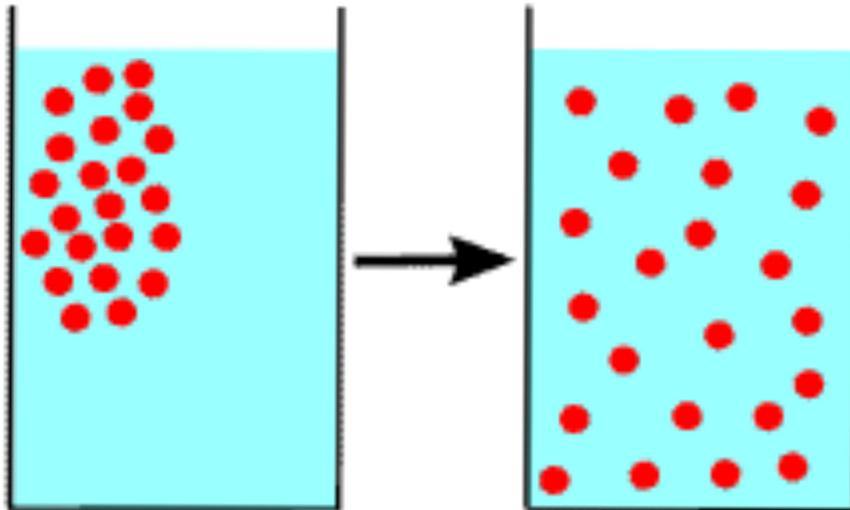


Figura 1.1: Proceso de difusión.

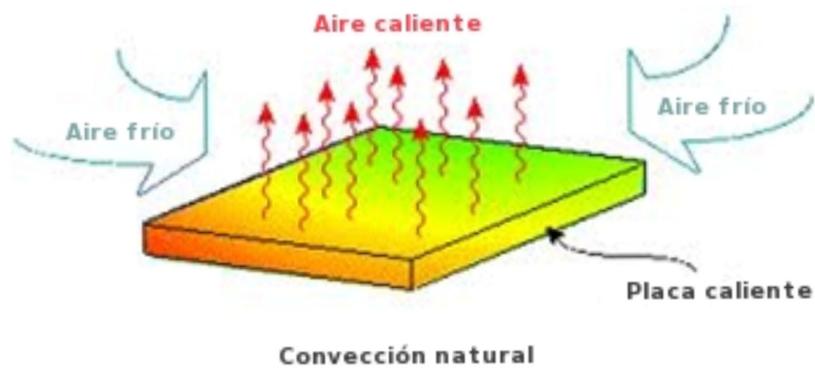


Figura 1.2: Proceso de convección natural.

De acuerdo con esta descripción física, podemos sintetizar en términos generales la ecuación del transporte por advección-difusión.

**Definición 1.1.1.** Se define la **ecuación de advención-difusión** para un modelo no estacionario y en diversas variables, como la ecuación en derivadas parciales tal que verifica:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (1.1)$$

donde  $\phi$  es la variable de interés (propiedad fisicoquímica),  $\Gamma$  es el coeficiente de difusión,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\mathbf{u}$  es la velocidad del fluido a lo largo del sistema.

Pasemos ahora a dar una breve descripción de cada uno de los términos de la ecuación (1.1):

- $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$  expresa la variación de propiedad por unidad de tiempo. En el caso estacionario, este término será nulo.
- $\nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u})$  es el **término advectivo**.
- $\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)$  es el incremento de la propiedad debido a la difusión y recibe el nombre de **término difusivo**.
- $S_\phi$  es un generador o sumidero de propiedad y recibe el nombre de **término fuente**.

Una vez se ha dado una interpretación física de la ecuación y se ha detallado el papel de cada uno de sus términos, a continuación, se introducirá el método de aproximación numérica utilizado a lo largo del estudio.

## 1.2. El método de volúmenes finitos

La ecuación (1.1) resulta ser un caso particular que deriva de las ecuaciones generales de Navier-Stokes, [Boivin, S. et al. 1999]. La ecuación de advención-difusión es análoga al transporte de momento de un fluido newtoniano incompresible [Gurtin et al. 2009]. Las soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido desarrolladas sólo para flujos bajo condiciones ideales y en geometrías simples. No obstante, para resolver problemas de la mecánica de fluidos reales en geometrías complejas se hace imprescindible la utilización de métodos numéricos.

Existen diversos métodos de aproximación numérica a la hora de resolver este tipo de problemas. Uno de los más utilizados es el *método de diferencias finitas* [Courant, R. et al. 1928]. En este método, se resuelve la ecuación en derivadas parciales (EDP) directamente, aproximando sus derivadas parciales sobre un conjunto de puntos interconectados en el dominio. El método basa su argumento en que, si la EDP se resuelve con la suficiente precisión, la ley física subyacente sobre la que se construye el método se satisface automáticamente.

En este caso, la metodología con la que se pretende abordar el problema es mediante la implementación del método de volúmenes finitos. A diferencia del método descrito en el párrafo anterior, este método basa su argumento en que se satisfaga la ley física subyacente a la EDP en los distintos volúmenes de control. La solución obtenida mediante este método recibe el nombre de *solución débil de la EDP*<sup>II</sup>.

Uno de los primeros ejemplos de la aplicación de este último método, de manera rigurosa y formal, aparece en [Harlow et al. 1965]. En él, se desarrolla el método de marcador y celda, que sirve para analizar problemas de flujo en fluidos incompresibles en superficies libres. Cabe destacar también la gran aportación de [McDonald, P.W. 1971] y [MacCormack et al. 1972] a la introducción e implementación del método en la dinámica de fluidos. En dichos trabajos, se lleva a cabo la resolución de las ecuaciones de Euler dependientes del tiempo en dos dimensiones espaciales por medio de este método, que fue extendido posteriormente a tres dimensiones por [Rizzi et al. 1973].

Históricamente, el método de volúmenes finitos ha sido el preferido por científicos e ingenieros que trabajan con la mecánica de fluidos. Si bien posteriormente ha aparecido el *método de los elementos finitos*, el cual ha resuelto con éxito los desafíos de la mecánica de fluidos, los problemas complejos relacionados con flujos multifásicos, reactivos o fuertemente turbulentos sólo se pueden resolver en la práctica mediante el método de volúmenes finitos [Osses, J. 2016]. Un aspecto importante en el método de volúmenes finitos es que los principios de conservación de la masa, el momento y la energía, son respetados por las ecuaciones discretas obtenidas a partir del método.

Aunque el trabajo se centra en la aplicación del método a un problema de la dinámica de fluidos, cabe señalar que este método no se limita sólo a problemas de esta índole.

De manera general el método consta de los siguientes pasos:

---

<sup>II</sup>Véase la definición en: [Vázquez, M.Elena 2008], págs 55-56.

## 1.2. Método de volúmenes finitos

---

1. Descomponer el dominio en volúmenes de control.
2. Formular las ecuaciones integrales de la conservación para cada volumen de control del dominio.
3. Aproximar numéricamente las diferentes ecuaciones integrales.
4. Aproximar los valores de las variables en las caras y las derivadas con la información de las variables nodales.
5. Ensamblar y resolver el sistema algebraico obtenido.

Como se ha mencionado a lo largo de esta sección, existen diversos métodos de aproximación numérica que permiten resolver problemas de la dinámica de fluidos. Para llevar a cabo el objetivo final del trabajo, se ha decidido aplicar el método de volúmenes finitos por las numerosas ventajas que ofrece. Entre ellas cabe destacar [Mazumder, S. 2015]:

- El método de volúmenes finitos emplea directamente las ecuaciones de conservación en su forma integral. Discretiza las ecuaciones en cada uno de los poliedros considerados en el dominio y la integral de superficie es aproximada por la suma de los flujos que atraviesan cada una de las caras del poliedro. Este último hecho implica que el método sea puramente conservativo.
- La discretización espacial se lleva directamente a cabo en el espacio físico del problema y evita problemas de transformación en cambios de coordenadas. Este hecho permite la utilización de mallas estructuradas o no, lo que hace al método idóneo para la resolución de problemas de flujo con geometrías complejas.
- A diferencia de otros métodos como el de diferencias finitas, en el método de volúmenes finitos se toman como punto de discretización los centros de las celdas y no los vértices. Esta consideración implica que en ningún vértice de la malla se satisfacen las condiciones de contorno directamente. Por ello, se toma la forma integral de la ecuación y se hacen las aproximaciones sobre las caras de los volúmenes de control.

En la siguiente figura se pueden apreciar las diferencias de mallado entre estos dos métodos: el método de diferencias finitas (a), donde los puntos de discretizado se toman en los vértices de las celdas, y el método de volúmenes finitos (b), donde los puntos de discretizado se toman en el centroide de cada una de las celdas.

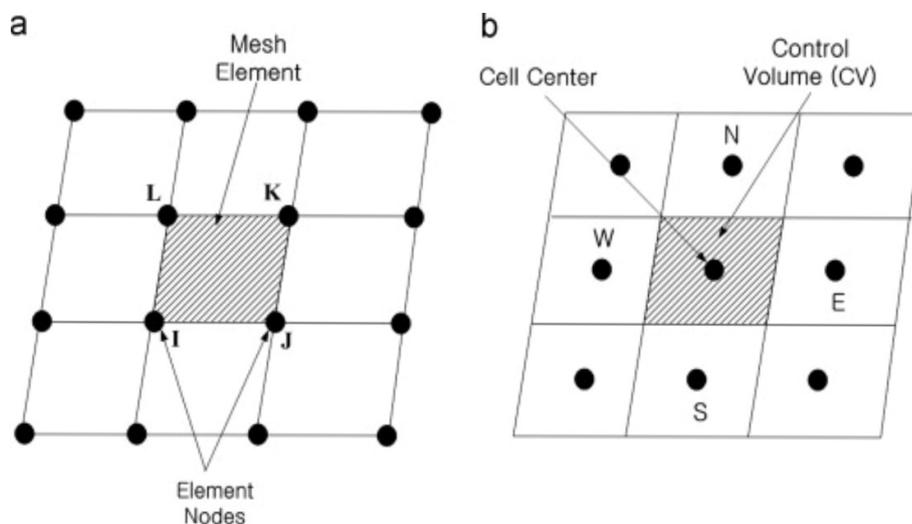


Figura 1.3: Diferencias de mallado entre métodos.

Así pues, existen diversos métodos de aproximación numérica que se aplican en la resolución de problemas de la dinámica de fluidos. Cada uno de ellos tiene su propia metodología particular, y actúa sobre la ecuación de forma distinta. De este modo, la decisión de utilizar un determinado método u otro dependerá del contexto del problema planteado.

# Capítulo 2

## Objetivos

En el siguiente capítulo, se exponen los principales objetivos que se pretenden alcanzar a lo largo del trabajo.

- Exponer de manera detallada y rigurosa la metodología que sigue el método de aproximación numérica de volúmenes finitos aplicado a la ecuación de advección-difusión.
- Plantear el problema de advección y difusión en el campo de transporte del calor no estacionario sobre un dominio y condiciones de contorno determinados.
- Discretizar las ecuaciones obtenidas, teniendo en cuenta las premisas consideradas y plasmadas en el planteamiento del problema.
- La realización de un ensamblado de las ecuaciones discretizadas mediante transformaciones lineales que permita obtener un sistema lineal.
- Elaborar un programa de simulación que permita reproducir el comportamiento del problema discretizado y llevar a cabo la resolución del sistema lineal obtenido.
- Implementar el modelo en distintos escenarios mediante la ejecución del programa realizado, variando diversos parámetros y/o variables del problema.
- Comparar y analizar los distintos resultados obtenidos con tal de observar si se produce alguna variación significativa de la temperatura en función del tiempo.



# Capítulo 3

## Aplicación del método de volúmenes finitos a la ecuación

Con tal de llevar a cabo los objetivos del trabajo, a lo largo de este capítulo se realizará una descripción detallada y rigurosa de la aplicación del método de volúmenes finitos, en este caso, sobre la ecuación de advección-difusión. Una vez concluida esta tarea, en una segunda sección se planteará un problema concreto sobre el transporte de propiedad fisicoquímica en tuberías. Posteriormente en las dos últimas secciones se llevará a cabo la discretización y ensamblado del sistema lineal resolviendo el problema planteado.

### 3.1. Metodología

A lo largo del primer capítulo se ha introducido el método de volúmenes finitos, así como los pasos de los que se compone. En la siguiente sección se proporcionarán las nociones y pasos a realizar, para llevar a cabo una descripción rigurosa del método aplicado a la ecuación de advección-difusión.

Primeramente, se proporcionan las nociones relevantes a los volúmenes control, volúmenes finitos o simplemente celdas:

**Definición 3.1.1.** Denominamos **celdas** al conjunto en el cual se divide el dominio de la ecuación de advección-difusión.

Las superficies de discretización delimitantes de las celdas reciben el nombre de **caras de las celdas** o simplemente **caras**. Los vértices de las celdas reciben el nombre de **nodos** y los centroides geométricos reciben el nombre de **centro de las celdas**.

Básicamente, existen dos tipos de mallado:

- *Mallados estructurados*: cada punto de la malla está inequívocamente identificado por los índices  $i, j, k$  en coordenadas cartesianas. Normalmente las celdas se toman:
  - Polígonos convexos en dos dimensiones.
  - Poliedros en tres dimensiones.

Como resultado, si la superficie de delimitación es curva, se aproxima mediante lados rectos o caras planas.

Usualmente, en este tipo de mallado, al centro de la celda sobre la cual se pretende aplicar el método se denota por  $O$ , y el resto de centroides de las celdas adyacentes reciben cada una las iniciales (en mayúscula) respectivas a su posición cardinal con respecto a la celda de centroide  $O$ . La notación de las caras de la celda sigue este mismo argumento pero con letras minúsculas. La Figura 3.2 muestra de manera general un mallado estructurado ortogonal (en coordenadas cartesianas) en dos dimensiones espaciales.

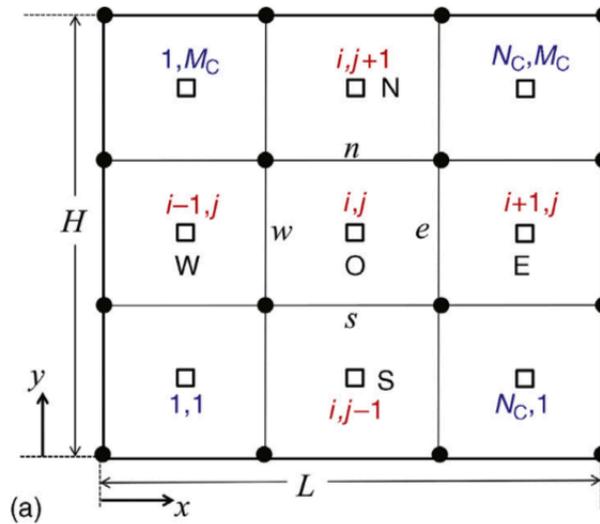


Figura 3.1: Mallado ortogonal estructurado en dos dimensiones espaciales.

De este modo, si se consideran  $M$  subdivisiones iguales de la altura  $H$ , se tendrán  $j \in \{1, 2, \dots, M_C = M - 1\}$  nodos respecto del eje  $y$ . Análogamente, para la longitud  $L$  si se consideran  $N$  subdivisiones, se tienen  $i \in \{1, 2, \dots, N_C = N - 1\}$  nodos respecto al eje  $x$ . De esta manera

### 3.1. Metodología

---

se obtiene una mallado con  $N_C \times M_C$  celdas, numeradas conforme se aprecia en la figura.

- *Mallados no estructurados*: las celdas y los nodos de la malla no tienen un orden particular, es decir, los celdas o nodos cercanos a uno dado no pueden identificarse directamente por sus índices.

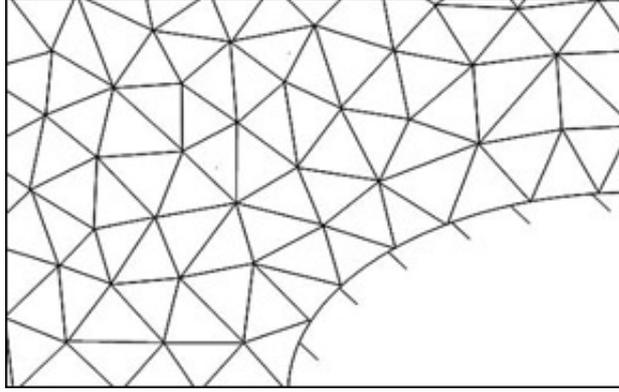


Figura 3.2: Mallado tetrahédrico no estructurado en dos dimensiones espaciales.

Una vez descritos los volúmenes de control, podemos pasar a la resolución de la ecuación de advección-difusión. Retomando la ecuación (1.1) e integrando sobre los volúmenes de control  $V_i$  tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \left( \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) \right) dV &= \int_{V_i} (\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi) dV \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{V_i} \left( \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \right) dV + \int_{V_i} (\nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u})) dV = \\ &\int_{V_i} (\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)) dV + \int_{V_i} (S_\phi) dV. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aplicando el **Teorema de la divergencia de Gauss**<sup>1</sup> sobre la ecuación (3.1) resulta:

$$\int_{V_i} \left( \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \right) dV + \int_{S_i} (\rho\phi\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_i} (\Gamma\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_i} (S_\phi) dV \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Ver Apéndice A.

De este modo, se pasa de integrar los términos difusivos y advectivos de la ecuación sobre los diferentes volúmenes, a hacerlo sobre las caras de las celdas.

Aplicando el **Teorema del valor medio**<sup>II</sup> en el término fuente de la ecuación (3.2), podemos simplificar asumiendo que el valor medio de  $S_\phi$  en  $V_i$  es el mismo que el de  $S_\phi$  evaluado en el centroide de la celda  $i$ , se obteniéndose la siguiente igualdad:

$$\int_{V_i} \left( \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \right) dV + \int_{S_i} (\rho\phi\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_i} (\Gamma\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + S_i V_i. \quad (3.3)$$

Asimismo, modificando el primer término de la izquierda de la igualdad para obtener la tasa de cambio del flujo total de la propiedad  $\phi$  en el volumen de control:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{V_i} (\rho\phi) dV \right) + \int_{S_i} (\rho\phi\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_i} (\Gamma\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + S_i V_i. \quad (3.4)$$

De este modo, se obtiene una expresión que conserva una propiedad del flujo para un volumen de control de tamaño finito.

Una vez integrada la ecuación sobre los distintos volúmenes de control como se ha indicado, el paso siguiente consiste en obtener una ecuación discretizada evaluada en los valores centrales de dicho volumen. Una vez obtenidas las ecuaciones discretizadas evaluadas en estos puntos, queda un sistema lineal. Este sistema se puede resolver de manera matricial, y de este modo se obtienen los distintos valores de la propiedad  $\phi$  en función de los volúmenes de control.

Para reforzar los contenidos vistos hasta el momento, veamos a continuación un sencillo ejemplo del método en una dimensión, estacionario en el tiempo y sin término fuente, [Versteeg et al. 1995].

**Ejemplo 3.1.1.** Consideramos un problema sobre el transporte de calor en una barra aislada, donde sus extremos se mantienen a temperatura constante de 100°C y 500°C, como se muestra en la Figura 3.3 que tiene por ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.5)$$

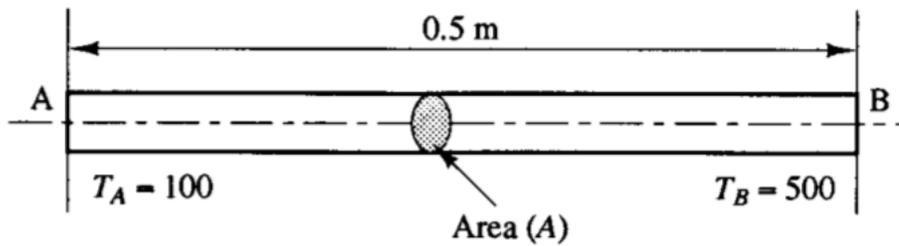


Figura 3.3: Ejemplo.

Se pretende calcular la distribución de temperatura a lo largo de la barra con conductividad térmica  $k = 1000W/(m \cdot K)$  y sección  $A = 10^{-2} m^2$ .

**Solución:**

1. Descomposición del dominio en volúmenes de control.

Se consideran 5 volúmenes de control igualmente espaciados,  $\delta x = 0,5/5 = 0,1 m$ . De este modo, se obtiene un mallado estructurado, donde los distintos centros de las celdas aparecen ordenados a lo largo de la barra.



Figura 3.4: Mallado del ejemplo.

Con tal de obtener una mejor apreciación de los centros de las celdas y caras en una dimensión espacial, la Figura 3.5 muestra las caras (representadas por letras  $w$  y  $e$ ) e incrementos espaciales alrededor de un punto central general  $O$  y sus adyacentes  $W$  y  $E$ .

---

<sup>11</sup>Ver Apéndice A.

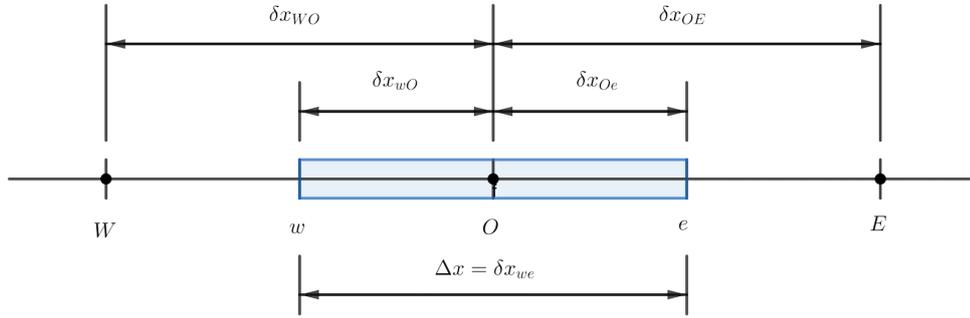


Figura 3.5: Esquema de los centros de las celdas y caras en una dimensión espacial.

2. Formular las ecuaciones integrales de la conservación para cada volumen de control del dominio.

Integramos sobre los volúmenes de control de manera general la ecuación (3.5), y posteriormente consideraremos los diferentes casos.

$$\int_{V_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV = 0$$

3. Aproximar numéricamente las diferentes ecuaciones integrales.

Aplicamos el Teorema de la divergencia de Gauss<sup>III</sup> y se tiene:

$$\int_A \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0$$

Como se considera el caso en una única variable espacial, la integral obtenida se aproxima sobre los valores de las variables en las caras este ( $e$ ) y oeste ( $w$ ) del nodo  $O$ .

$$\left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = 0$$

4. Aproximar los valores de las variables en las caras y las derivadas con la información de las variables nodales.

Para calcular los gradientes (y flujos) en las caras del volumen de control utilizamos aproximaciones lineales como son las diferencias centradas.

<sup>III</sup>Véase Apéndice A.

### 3.1. Metodología

---

Para una malla uniforme como la del ejemplo, los valores interpolados para  $k_e$  y  $k_w$  quedan:

$$k_w = \frac{k_W + k_O}{2}$$

$$k_e = \frac{k_O + k_E}{2}$$

Y los términos difusivos quedan:

$$\left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = k_e A_e \left( \frac{T_E - T_O}{\delta x_{OE}} \right) - k_w A_w \left( \frac{T_O - T_W}{\delta x_{WO}} \right) \quad (3.6)$$

Reescribiendo la ecuación (3.6) se obtiene la temperatura en cada nodo central junto con los coeficientes que la acompañan como se muestra a continuación:

$$\left( \frac{k_e}{\delta x_{OE}} A_e + \frac{k_w}{\delta x_{WO}} A_w \right) T_O = \left( \frac{k_w}{\delta x_{WO}} A_w \right) T_W + \left( \frac{k_e}{\delta x_{OE}} A_e \right) T_E$$

Para este problema concreto se tiene que la conductividad térmica, el espaciado de nodos ( $\delta x$ ) y el área son constantes, y por tanto,  $k = k_e = k_w$ ,  $\delta x_{OE} = \delta x_{WO} = \delta x$  y  $A = A_e = A_w$ . De este modo las ecuaciones discretizadas quedan:

- Para los centros del interior de la malla ( centros 2, 3 y 4).

$$\left( \frac{k}{\delta x} A + \frac{k}{\delta x} A \right) T_O = \left( \frac{k}{\delta x} A \right) T_W + \left( \frac{k}{\delta x} A \right) T_E$$

- Para el centro 1.

Hay que tener especial atención con este centro. Prestando atención a la Figura 3.4, se puede ver que corresponde a la celda que limita con las condiciones de contorno. En este caso la ecuación (3.6) queda:

$$kA \left( \frac{T_E - T_O}{\delta x} \right) - kA \left( \frac{T_O - T_A}{\delta x/2} \right) = 0$$

Esta expresión muestra que el flujo a través del volumen de control está en el contorno  $A$ . Se ha aproximado asumiendo una relación

lineal entre las temperaturas en el punto de contorno  $A$  y el centro  $O$ . Reescribiendo la ecuación se obtiene:

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_O = \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_A$$

- Para el centro 5.

Observando la Figura 3.4 se tiene que este caso es similar al del nodo 1, sólo que en el lado opuesto de la barra. Por tanto, ahora se aproximará la ecuación asumiendo una relación lineal entre las temperaturas en los centros  $B$  y  $O$ :

$$kA \left(\frac{T_B - T_O}{\delta x/2}\right) - kA \left(\frac{T_O - T_W}{\delta x}\right) = 0$$

Reescribiendo la ecuación como en los casos anteriores, se tiene:

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_O = \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_W + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_B$$

5. Ensamblar y resolver el sistema algebraico obtenido.

De manera general, se puede considerar la ecuación discretizada obtenida para cada celda en el paso anterior mediante la siguiente expresión:

$$a_O T_O = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

donde  $a_i$  son los coeficientes que acompañan a la temperatura del centro de la celda  $i$ ,  $T_i$  con  $i \in \{O, W, E\}$ . En la Tabla 3.1 se muestra de forma esquemática el valor obtenido para cada coeficiente y la relación que verifica el coeficiente  $a_O$ . Cabe notar que los términos  $S_u$  y  $S_O$  son la forma lineal por la que se aproxima el término fuente ( $S_i V_i = S_u + S_O T_O$ ).

### 3.2. Planteamiento del problema

---

Nodo	$a_W$	$a_E$	$S_u$	$S_O$	$a_O = a_W + a_E - S_P$
1	0	$\frac{kA}{\delta x}$	$\frac{2kA}{\delta x}T_A$	$-\frac{2kA}{\delta x}$	$\frac{kA}{\delta x} + \frac{2kA}{\delta x}$
2	$\frac{kA}{\delta x}$	$\frac{kA}{\delta x}$	0	0	$\frac{kA}{\delta x} + \frac{kA}{\delta x}$
3	$\frac{kA}{\delta x}$	$\frac{kA}{\delta x}$	0	0	$\frac{kA}{\delta x} + \frac{kA}{\delta x}$
4	$\frac{kA}{\delta x}$	$\frac{kA}{\delta x}$	0	0	$\frac{kA}{\delta x} + \frac{kA}{\delta x}$
5	$\frac{kA}{\delta x}$	0	$\frac{2kA}{\delta x}T_B$	$-\frac{2kA}{\delta x}$	$\frac{kA}{\delta x} + \frac{2kA}{\delta x}$

Tabla 3.1: Tabla coeficientes del ejemplo.

De manera matricial, se tiene que el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} a_{O_1} & -a_{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{W_2} & a_{O_2} & -a_{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{W_3} & a_{O_3} & -a_{E_3} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{W_4} & a_{O_4} & -a_{E_4} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{W_5} & a_{O_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{u_1} \\ S_{u_2} \\ S_{u_3} \\ S_{u_4} \\ S_{u_5} \end{pmatrix}$$

Substituyendo los datos proporcionados en el problema ( $k = 1000$ ,  $A = 10 \cdot 10^{-3}$ ,  $T_A = 100$  y  $T_B = 200$ ) y resolviéndolo queda:

$$T_1 = 140^\circ C, \quad T_2 = 220^\circ C, \quad T_3 = 300^\circ C, \quad T_4 = 380^\circ C, \quad T_5 = 460^\circ C.$$

Por tanto, la aplicación del método y las resultantes ecuaciones lineales obtenidas lo que proporcionan es la distribución de temperatura en un sistema estacionario bajo las condiciones del problema.

### 3.2. Planteamiento del problema

En la siguiente sección, se planteará el problema del transporte de propiedad sobre tuberías en dos dimensiones espaciales y dependiente del tiempo, bajo ciertas condiciones de contorno. Con tal de aplicar el método de volúmenes finitos a este problema, en la sección se dará una descripción detallada del

mallado considerado. Por último, se aplicará la forma integral a la ecuación del transporte sobre las variables correspondientes.

Se considera el problema de difusión y advección en el campo de transporte de la energía. El problema consiste en el enfriamiento de un tubo cilíndrico mediante la pérdida de calor a través de su pared exterior. El objetivo es encontrar la distribución de temperatura en el tubo en función del tiempo y del espacio.

Como el dominio sobre el cual se quiere aplicar el método es un cilindro, a la hora de realizar el mallado en este tipo de geometrías se utilizan coordenadas cilíndricas. Este tipo de coordenadas tiene tres variables independientes tal y como se muestra en la Figura 3.6, donde  $r$  representa la componente radial,  $\theta$  la componente angular y  $z$  la componente axial.

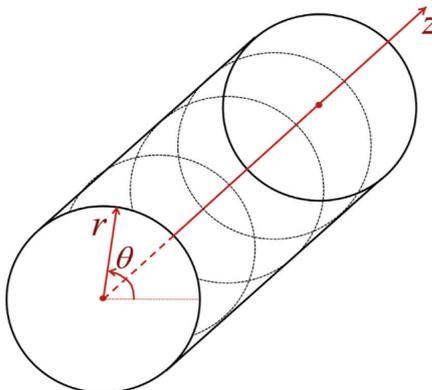


Figura 3.6: Coordenadas cilíndricas.

En el planteamiento del problema se considera que existe simetría angular, es decir, la variación de propiedad con respecto a la componente angular es nula. Para los casos en que la variación de propiedad en la dirección de la variable angular es nula o despreciable como es el caso, el problema se reduce al llamado **problema axisimétrico en 2D**. Por tanto, las ecuaciones a discretizar y su forma integral quedan definidas en función de las variables  $r$  y  $z$ . En la siguiente figura se observa un ejemplo de mallado en un problema axisimétrico en 2D, el cual representa una tubería.

### 3.2. Planteamiento del problema

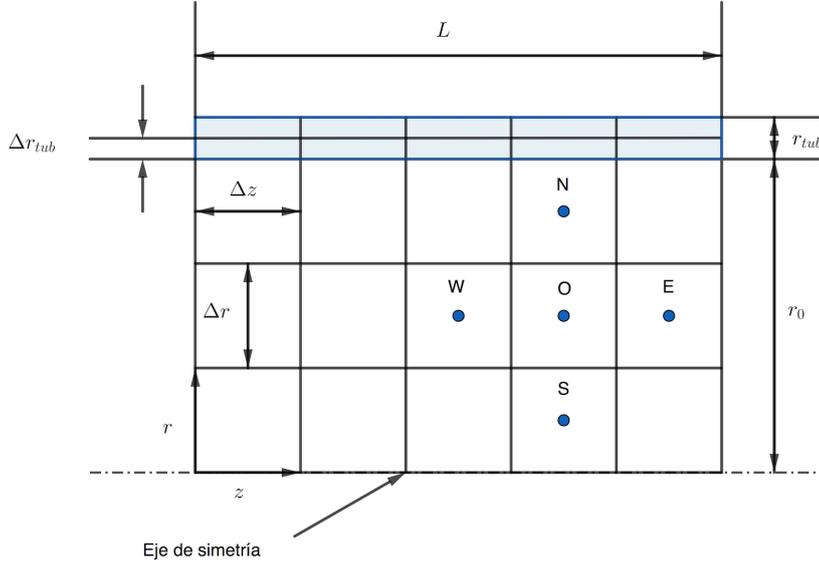


Figura 3.7: Mallado axisimétrico 2D.

En la Figura 3.7 se representa el mallado del problema considerado: el radio interior de la tubería  $r_0$ , el espesor de la pared de la tubería  $r_{tub}$  y su longitud  $L$ . Se ha decidido dividir el radio total del cilindro en dos partes para realizar un refinamiento más fino de la malla sobre la parte sólida del cilindro. Como consecuencia, se tendrán dos incrementos radiales diferentes:  $\Delta r$  para el mallado en  $r_0$  y  $\Delta r_{tub}$  para  $r_{tub}$ .

Por otra parte, en el problema se asumen las siguientes consideraciones:

1. La propiedad física que se transporta en esta caso es la energía, y las magnitudes físicas  $(\rho, \kappa, c_p, \dots)$  se consideran constantes, aunque no iguales, en las dos zonas diferenciadas en el mallado del cilindro, en consecuencia la ecuación (1.1) se rescribe:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\alpha \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.7)$$

donde  $\phi$  es la temperatura y  $\alpha = \frac{\kappa}{\rho \cdot c_p}$  es el coeficiente de difusividad térmica, donde  $\kappa$  es la conductividad térmica,  $\rho$  la densidad y  $c_p$  el calor específico, [Patankar S.V. 1980].

2. El valor de  $\phi$  a la entrada se toma como un valor fijo  $\phi(z, r, t = 0) = \phi_{in}$ .

3. A la salida se considera que  $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0$ . A estas condiciones se las conoce como condiciones de flujo libre o abiertas. Se asume que la longitud de la tubería es suficientemente larga para que cuando  $z = L$  el valor de  $\phi$  no dependa de  $z$ .
4. Sobre la pared exterior del cilindro se tiene la condición de contorno  $\phi(z = L, r, t) = \phi_{ext}$ , donde  $\phi_{ext}$  será el valor de la propiedad  $\phi$  en el exterior la tubería.
5. Las condiciones de contorno en el eje de simetría vienen impuestas implícitamente en la discretización cuando  $r = 0$ .
6. El problema consta de un flujo axial completamente desarrollado<sup>IV</sup>, es decir, el perfil de velocidades es independiente de  $z$ . Asimismo, el perfil radial de velocidad axial se escribe como:

$$u(r) = 2u_{avg} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

Notar que  $u_{avg}$  es la velocidad axial media del flujo a través del tubo. El perfil de velocidad axial solo se considerará en la parte del dominio por donde circula el fluido. En la parte sólida del tubo no hay perfil de velocidad de ningún tipo, por lo que el transporte de energía se produce únicamente por difusión térmica.

La ecuación del transporte de propiedad (3.7) en coordenadas cilíndricas y con simetría axial, se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.9)$$

De manera general, se integra la ecuación sobre un volumen de control :

$$\int_V \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] dV = 0 \implies$$

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left( u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV = 0$$

---

<sup>IV</sup>Se dice que el fluido es completamente desarrollado cuando el perfil de velocidades del flujo deja de cambiar en la dirección del flujo. [Dulhoste, J.F. 1991]

### 3.2. Planteamiento del problema

---

Como se ha descrito en la metodología del método (Sección 3.1) en el siguiente paso se ha de aplicar el Teorema de la divergencia de Gauss, A.0.1. En la sección anterior, se ha aplicado dicho teorema sobre mallados en coordenadas cartesianas. Por el contrario, ahora se tiene un problema axisimétrico en 2D y las variables sobre las que se trabaja están descritas en coordenadas cilíndricas. De este modo, el diferencial del volumen se reescribe como:  $dV = r dr dz d\theta$ . Al tratarse de un problema axisimétrico, se tiene que el diferencial no depende de  $\theta$ , deduciéndose fácilmente que:  $dV = 2\pi r dr dz$ . De este modo, se tiene que la ecuación intregada sobre las caras de las celdas resulta:

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) 2\pi r dr dz + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) 2\pi r dr dz + \\ + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left( u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) 2\pi r dr dz = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como el problema planteado no es estacionario, es necesario integrar la ecuación con respecto de la variable temporal. Si se considera que los nodos temporales están equiespaciados, de manera recursiva se tiene:

$$t_n = n\Delta t,$$

donde  $\Delta t$  el incremento de tiempo en cada paso y  $n$  el índice del instante de tiempo. El valor de  $n$  representa el número de pasos de tiempo que se han llevado a cabo.

De forma general se puede expresar el tiempo (con nodos temporales equiespaciados o no) al cabo de  $n + 1$  pasos como:

$$t_{n+1} = t_n + (\Delta t)_n$$

Donde  $(\Delta t)_n$  expresa el paso de tiempo entre el instante  $n$  y el  $n + 1$ .

Integrando la ecuación (3.10) respecto de la variable temporal y posteriormente simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) 2\pi r dr dz \right] dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) 2\pi r dr dz \right] dt + \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left( u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) 2\pi r dr dz \right] dt = 0 \implies \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) r dr dz \right] dt}^{\text{Término I}} + \overbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} \left( -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dr dz \right] dt}^{\text{Término II}} + \\
 & \quad + \overbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left( u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) r dr dz \right] dt}^{\text{Término III}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

A continuación se reordenan las integrales con tal de simplificar la ecuación:

- Término I

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) r dr dz \right] dt = \\
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left[ \int_s^n \int_w^e r dr dz \right] dt = \\
 & \quad \Delta z \frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

- Término II

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} \left( -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dr dz \right] dt = \\
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_w^e \left( \left[ -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_n - \left[ -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_s \right) dz \right] dt = \\
 & \quad \Delta z \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \left[ -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_n - \left[ -r\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_s \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

- Término III

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left( u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) r dr dz \right] dt = \\
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_s^n \left( \left[ u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_e - \left[ u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_w \right) r dr \right] dt = \\
 & \quad \frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \left[ u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_e - \left[ u\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_w \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

### 3.3. Discretización

---

Cuando se considere un mallado uniforme sobre el dominio, el coeficiente  $(r_n^2 - r_s^2)/2 = (r_n - r_s)(r_n + r_s)/2$  queda reducido a  $r_O \Delta r_j$ , donde  $r_j$  denota el radio del centro de la celda y  $\Delta r_j$  el incremento radial en la celda  $(i, j)$ . De este modo, el radio en las caras se puede expresar en función del radio en el centro de la celda:

$$r_n = r_O + \frac{\Delta r_j}{2}, r_s = r_O - \frac{\Delta r_j}{2} \quad (3.16)$$

Con tal de simplificar la notación, como el radio en el centro  $O$  sólo depende de la componente radial se denotará por  $r_j$ . Y por tanto (3.16) queda:

$$r_n = r_j + \frac{\Delta r_j}{2}, r_s = r_j - \frac{\Delta r_j}{2} \quad (3.17)$$

### 3.3. Discretización

En la siguiente sección se procede a discretizar la ecuación obtenida a partir de la fórmula integral sobre los distintos volúmenes. Se describirá con detalle la aproximación realizada para cada tipo de celda del mallado.

Primeramente ha de llevarse a cabo la discretización de los flujos, teniendo en cuenta que los flujos difusivos siguen la dirección del gradiente de la variable dependiente y, por el contrario, los flujos advectivos siguen la dirección del flujo.

Para llevar a cabo las distintas aproximaciones sobre los términos advectivos, se aplicará el método *Upwind de primer orden*<sup>v</sup>. Este método toma nota de la dirección del flujo a la hora de determinar la aproximación en una cara de la celda: el valor advectivo de  $\phi$  en la cara de una celda es tomado de manera que sea igual al del nodo contiguo. En lo que procede de trabajo, se considera que la masa se conserva y que el flujo es positivo, es decir,  $\rho u > 0$ .

Por otra parte, observando la expresión obtenida para la velocidad en (3.8), se observa que está expresada en función de la componente radial. En lo sucesivo, con tal de simplificar la notación,  $u(r)$  se denota por  $u_j$ <sup>vi</sup>.

Asimismo, se considera que el coeficiente de difusividad térmica  $\alpha$  solo varía en función de la zona de la tubería considerada. De este modo, se

---

<sup>v</sup>Ver Apéndice B, Sección B.1.

<sup>vi</sup>En la zona sólida ( $r_{tub}$ ), su valor es 0.

considera un valor constante de  $\alpha$  a lo largo del radio interno de la tubería,  $\alpha_0$ , y otro valor constante del coeficiente de difusividad térmica, también constante, en la zona correspondiente al espesor de la tubería,  $\alpha_{tub}$ .

Así pues, la ecuación (3.15), aplicando las ecuaciones del esquema Upwind (B.1) y (B.2) queda:

$$\frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \left[ u_j \phi_{i,j} - \alpha_j \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_e \right] - \left[ u_j \phi_{i-1,j} - \alpha_j \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_w \right] \right) dt \quad (3.18)$$

Posteriormente, se aplicarán las aproximaciones correspondientes a las caras de las celdas en los límites del dominio como se muestra en el Apéndice B, Sección B.1.

A la hora de discretizar la derivada parcial de la propiedad con respecto al tiempo se hará servir el *método de Euler hacia atrás o implícito*<sup>vii</sup>. Aplicándolo a la ecuación (3.13) obtenida en el Término I, se tiene:

$$\Delta z \frac{r_n^2 - r_s^2}{2} \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right) \quad (3.19)$$

Al aplicar este método sobre la variable temporal, se tiene que el resto de términos que forman la ecuación (3.12) quedan evaluados en el instante  $n + 1$ . Otro dato a destacar a la hora de discretizar la ecuación sobre las distintas celdas, es que se asumirá que se verifica (3.17).

A continuación, se procede a la discretización de la ecuación (3.12) en función de las celdas del mallado. Para ello, se toman de forma genérica:  $N$  particiones del segmento  $L$ ,  $M$  particiones del segmento  $r_0$  y  $Q$  particiones sobre el segmento  $r_{tub}$  (Figura 3.7).

Como consecuencia, se tiene que respecto del eje axial  $i = 1, 2, \dots, N_c$  con  $N_c = N - 1$  celdas, y respecto al eje radial  $j = 1, 2, \dots, M_c, M_c + 1, \dots, M_c + Q_c$  celdas, con  $M_c = M - 1$  y  $Q_c = Q - 1$ . Así pues, se tendrá un mallado con  $(M + Q - 2) \times (N - 1)$  celdas.

Recopilando todo lo obtenido hasta ahora, a partir de las ecuaciones (3.12), (3.18) y (3.19) se tiene de manera general:

---

<sup>vii</sup>Ver Apéndice B, Sección B.3

$$\begin{aligned}
 & r_j \Delta z \Delta r_j \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] + \Delta z \left( \left[ -r_n \alpha_j \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial r} \Big|_n \right] - \left[ -r_s \alpha_j \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial r} \Big|_s \right] \right) \\
 & + r_j \Delta r_j \left( \left[ u_j \phi_{i,j,n+1} - \alpha_j \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial z} \Big|_e \right] - \left[ u_j \phi_{i-1,j,n+1} - \alpha_j \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial z} \Big|_w \right] \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

### 3.3.1. Celdas interiores

Estas son las celdas cuyos subíndices toman los valores:

$$2 \leq i \leq N_c, 2 \leq j \leq M_c + Q_c - 2$$

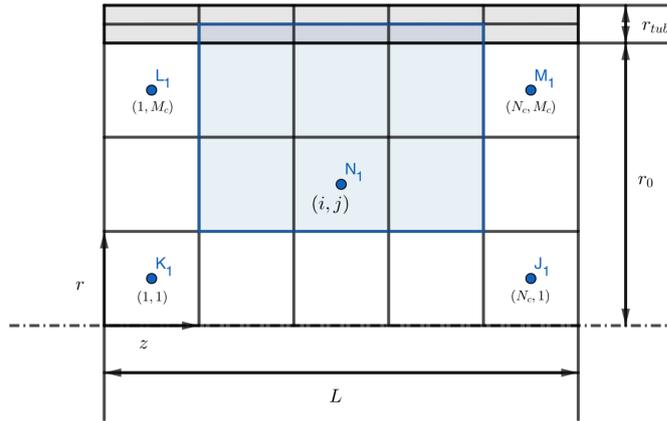


Figura 3.8: Celdas interiores del malla.

En las celdas interiores del malla no se tiene ninguna condición de contorno. Por tanto, se puede aproximar el flujo en las distintas caras de las celdas mediante el método Upwind de primer orden descrito en el Apéndice B. Como consecuencia, se reescribe la ecuación (3.20) y se tiene:

$$\begin{aligned}
 & r_j \Delta z \Delta r_j \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] \\
 & + \Delta z \left( \left[ -r_n \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j+1,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta r_j} \right) \right] + \left[ r_s \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1}}{\Delta r_j} \right) \right] \right) \\
 & + r_j \Delta r_j \left[ u_j \phi_{i,j,n+1} - \alpha_j \left( \frac{\phi_{i+1,j,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$-r_j \Delta r_j \left[ u_j \phi_{i-1,j,n+1} - \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i-1,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] = 0 \quad (3.21)$$

Reordenando la ecuación:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{r_j \Delta r_j \Delta z}{\Delta t} + \alpha_j (r_n + r_s) \frac{\Delta z}{\Delta r_j} + u_j r_j \Delta r_j + 2\alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\ & - \left( \alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{i+1,j,n+1} - \left( u_j r_j \Delta r_j + \alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{i-1,j,n+1} \\ & - \left( \alpha_j r_n \frac{\Delta z}{\Delta r_j} \right) \phi_{i,j+1,n+1} - \left( \alpha_j r_s \frac{\Delta z}{\Delta r_j} \right) \phi_{i,j-1,n+1} = \left( \frac{r_j \Delta r_j \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} \quad (3.22) \end{aligned}$$

### 3.3.2. Celdas de salida

Estas son las celdas cuyos subíndices toman los valores:

$$i = N_c, 2 \leq j \leq M_c + Q_c - 2$$

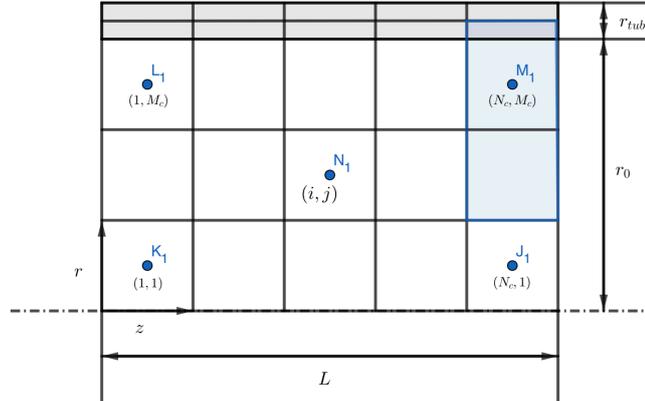


Figura 3.9: Celdas outlet del malla.

Para estas celdas, se considera que el flujo difusivo es cero sobre la cara este, i.e.,  $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_e = 0$  (condición de contorno tipo Neumann). Sobre el resto de caras se aplica el método Upwind de primer orden descrito en el Apéndice

### 3.3. Discretización

B. Como consecuencia, la ecuación (3.20) queda expresada de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 & r_j \Delta z \Delta r_j \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] \\
 & + \Delta z \left( \left[ -r_n \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j+1,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta r_j} \right) \right] + \left[ r_s \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1}}{\Delta r_j} \right) \right] \right) \\
 & + r_j \Delta r_j u_j \phi_{i,j,n+1} - r_j \Delta r_j \left[ u_j \phi_{i-1,j,n+1} - \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i-1,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] = 0 \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Finalmente, reordenando la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{r_j \Delta r_j \Delta z}{\Delta t} + \alpha_j (r_n + r_s) \frac{\Delta z}{\Delta r_j} + u_j r_j \Delta r_j + \alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\
 & - \left( u_j r_j \Delta r_j + \alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{i-1,j,n+1} - \left( \alpha_j r_n \frac{\Delta z}{\Delta r_j} \right) \phi_{i,j+1,n+1} \\
 & - \left( \alpha_j r_s \frac{\Delta z}{\Delta r_j} \right) \phi_{i,j-1,n+1} = \left( \frac{r_j \Delta r_j \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

#### 3.3.3. Celdas de entrada

Estas son las celdas cuyos subíndices toman los valores:

$$i = 1, 2 \leq j \leq M_c + Q_c - 2$$

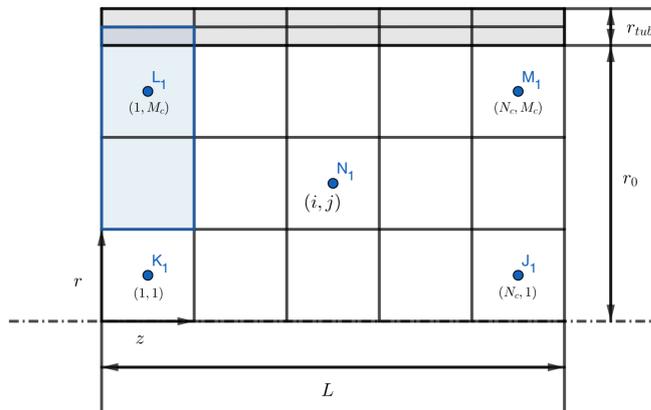


Figura 3.10: Celdas inlet del mallado.

En estas celdas se considera que el valor de la variable dependiente,  $\phi$ , se impone a la entrada de la tubería, i.e.,  $\phi(z = 0, r, t) = \phi_{in}$ . Se está por tanto ante una condición de contorno de tipo Dirichlet<sup>VIII</sup>.

A la hora de aproximar el flujo sobre la cara oeste de las celdas, se deberá hacer uso de la ecuación (B.9). Para el resto de las caras, se aplicará el método Upwind de primer orden sobre el flujo, como se muestra en el Apéndice B. De este modo, la ecuación (3.20) queda:

$$\begin{aligned}
 & r_j \Delta z \Delta r_j \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] \\
 & + \Delta z \left( \left[ -r_n \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j+1,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta r_j} \right) \right] + \left[ r_s \alpha_j \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1}}{\Delta r_j} \right) \right] \right) \\
 & + r_j \Delta r_j \left[ u_j \phi_{i,j,n+1} - \alpha_j \left( \frac{\phi_{i+1,j,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] \\
 & - r_j \Delta r_j \left[ u_j \phi_{in} - \alpha_j \left( \frac{9\phi_O - \phi_E - 8\phi_{in}}{3\Delta x} \right) \right] = 0 \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Finalmente, después de reordenar la ecuación, se llega a:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{r_j \Delta r_j \Delta z}{\Delta t} + \alpha_j (r_n + r_s) \frac{\Delta z}{\Delta r_j} + u_j r_j \Delta r_j + 4\alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\
 & - \left( \frac{4}{3} \alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{i+1,j,n+1} - \left( \alpha_j r_n \frac{\Delta z}{\Delta r_j} \right) \phi_{i,j+1,n+1} \\
 & - \left( \alpha_j r_s \frac{\Delta z}{\Delta r_j} \right) \phi_{i,j-1,n+1} = \left( u_j r_j \Delta r_j + \frac{8}{3} \alpha_j r_j \frac{\Delta r_j}{\Delta z} \right) \phi_{in} + \left( \frac{r_j \Delta r_j \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

### 3.3.4. Celdas pared inferior

Estas son las celdas cuyos subíndices toman los valores:

$$2 \leq i \leq N_c, j = 1$$

---

<sup>VIII</sup>Véase la definición en: [Arendt, W. et al. 2003]

### 3.3. Discretización

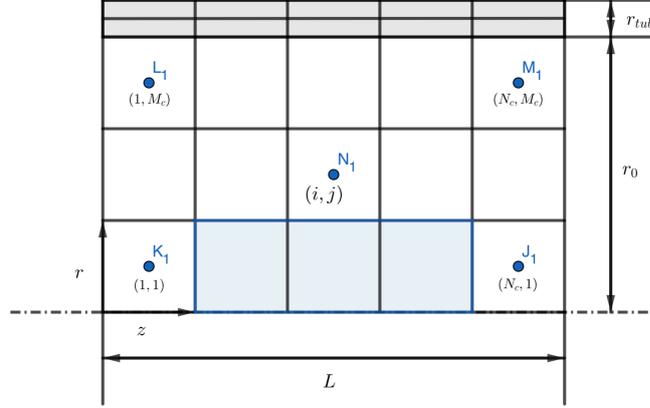


Figura 3.11: Celdas pared inferior del mallado.

Antes de aproximar el flujo en las diferentes caras de las celdas, ha de tenerse en cuenta que:

1. Las celdas están sobre el eje de simetría, y por tanto,  $r_s = 0$  en todas ellas.
2. Todas las celdas están situadas en la parte no sólida del cilindro. Esto quiere decir que, han de tomarse los correspondientes incrementos axiales,  $\Delta r$ , y el coeficiente de difusividad como  $\alpha = \alpha_0$ .

Aplicando sobre la ecuación (3.20) el método Upwind de primer orden sobre las diversas caras de las celdas, como se especifica en el Apéndice B, se tiene:

$$\begin{aligned}
 r_j \Delta z \Delta r \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] + \Delta z \left[ -r_n \alpha \left( \frac{\phi_{i,j+1,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta r} \right) \right] \\
 + r_j \Delta r \left[ u_j \phi_{i,j,n+1} - \alpha \left( \frac{\phi_{i+1,j,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] \\
 - r_j \Delta r \left[ u_j \phi_{i-1,j,n+1} - \alpha \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i-1,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] = 0 \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Una vez se reordena la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{r_j \Delta r \Delta z}{\Delta t} + \alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} + u_j r_j \Delta r + 2\alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\
 - \left( \alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{i+1,j,n+1} - \left( u_j r_j \Delta r + \alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{i-1,j,n+1} \\
 - \left( \alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} \right) \phi_{i,j+1,n+1} = \left( \frac{r_j \Delta r \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

### 3.3.5. Celdas pared superior

Estas son las celdas cuyos subíndices toman los valores:

$$2 \leq i \leq N_c - 1, j = M_c + Q_c$$

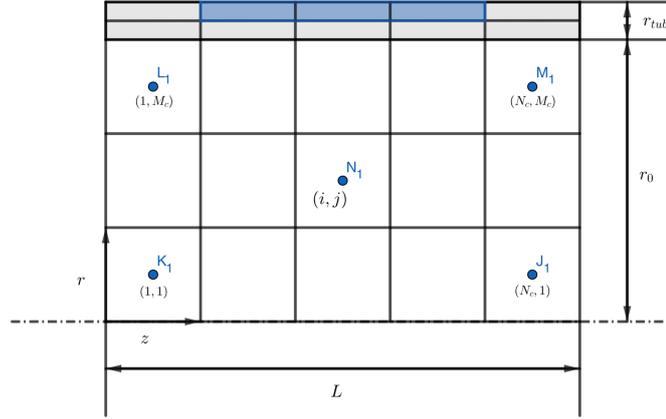


Figura 3.12: Celdas pared superior del mallado.

Para aproximar la ecuación en las celdas adyacentes a la pared superior del cilindro, ha de tenerse en cuenta que:

1. Se tiene la condición de contorno  $\phi(z = L, r, t) = \phi_{ext}$ . Por tanto, se está ante una condición de contorno de tipo Dirichlet.

Para aproximar el flujo en la cara norte de las celdas haremos uso de la fórmula (B.12) obtenida en el Apéndice B.

2. Estas celdas se sitúan en la parte sólida del cilindro, donde el mallado consta un refinamiento más fino. Como consecuencia, en la ecuación (3.20), la velocidad será nula y el incremento respecto de la componente axial será en todas ellas  $\Delta r_{tub}$ .
3. Se considera  $\alpha$ , como el coeficiente de difusión correspondiente a la parte sólida del cilindro, i.e.,  $\alpha = \alpha_{tub}$ .

Teniendo en cuenta estas premisas y aplicando el método Upwind de primer orden sobre el flujo en las caras este, oeste y sur, la ecuación (3.20) queda:

$$r_j \Delta z \Delta r_{tub} \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right]$$

### 3.3. Discretización

$$\begin{aligned}
 & +\Delta z \left( \left[ -r_n \alpha \left( \frac{9\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1} - 8\phi_{ext}}{3\Delta r_{tub}} \right) \right] + \left[ r_s \alpha \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1}}{\Delta r_{tub}} \right) \right] \right) \\
 & + r_j \Delta r_{tub} \left[ -\alpha \left( \frac{\phi_{i+1,j,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] - r_j \Delta r_{tub} \left[ -\alpha \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i-1,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Reordenando la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{r_j \Delta r_{tub} \Delta z}{\Delta t} - 3\alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} + \alpha r_s \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} + 2\alpha r_j \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\
 & - \left( \alpha r_j \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{i+1,j,n+1} - \left( \alpha r_j \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{i-1,j,n+1} \\
 & - \left( \alpha r_n \frac{\Delta z}{3\Delta r_{tub}} + r_s \alpha \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} \right) \phi_{i,j-1,n+1} = \left( \frac{r_j \Delta r_{tub} \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} + \frac{8}{3} \alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} \phi_{ext}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

#### 3.3.6. Esquinas

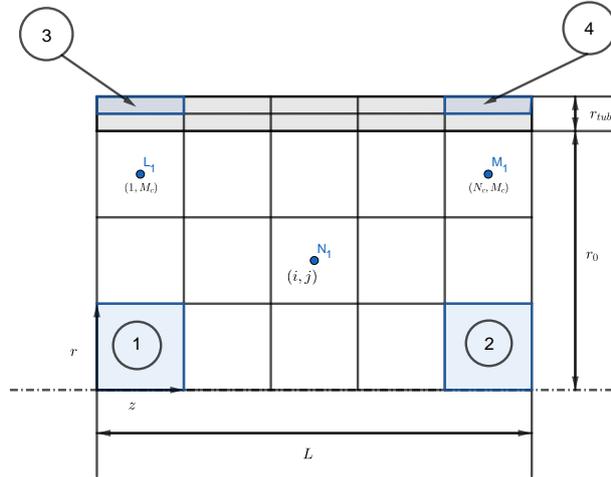


Figura 3.13: Celdas de las esquinas del malla.

Se discretiza cada una de las esquinas por separado como se muestra a continuación.

### 1. Esquina inferior de entrada

En esta celda los subíndices toman los valores:

$$i = 1, j = 1$$

Se tendrán las siguientes condiciones sobre la celda:

- Está situada sobre el eje de simetría, i.e.,  $r_s = 0$ .
- El valor de la variable dependiente,  $\phi$  está prescrita en la entrada del cilindro:  $\phi(z = 0, r, t) = \phi_{in}$ . Se tiene por tanto, una condición de contorno de tipo Dirichlet. El flujo en la cara oeste se debe aproximar mediante la fórmula (B.9).
- Se han de tomar  $\alpha$  y  $\Delta r$ , las correspondientes a la parte no sólida del cilindro.

Teniendo en cuenta las condiciones descritas, la ecuación (3.20) queda:

$$\begin{aligned} r_j \Delta z \Delta r \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] + \Delta z \left( \left[ -r_n \alpha \left( \frac{\phi_{i,j+1,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta r} \right) \right] \right) \\ + r_j \Delta r \left[ u_j \phi_{i,j,n+1} - \alpha \left( \frac{\phi_{i+1,j,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] \\ - r_j \Delta r \left[ u_j \phi_{in} - \alpha \left( \frac{9\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i+1,j,n+1} - 8\phi_{in}}{3\Delta z} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Reordenando la ecuación:

$$\begin{aligned} \left( \frac{r_j \Delta r \Delta z}{\Delta t} + \alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} + u_j r_j \Delta r + 4\alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\ - \left( \frac{4}{3} \alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{i+1,j,n+1} - \left( \alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} \right) \phi_{i,j+1,n+1} \\ = \left( \frac{r_j \Delta r \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} + \left( r_j \Delta r u_j + \frac{8}{3} \alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{in} \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 2. Esquina inferior de salida

En esta celda los subíndices toman los valores:

$$i = N_c, j = 1$$

Se tendrán las siguientes condiciones sobre la celda:

### 3.3. Discretización

---

- Está situada sobre el eje de simetría, i.e.,  $r_s = 0$ .
- Se considera que el flujo difusivo es cero sobre la pared este de la celda, i.e.,  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_e = 0$  (condición de contorno de tipo Neumann).
- Se considera  $\alpha$ , como la conductividad térmica correspondiente a la parte no sólida del cilindro, i.e.,  $\alpha = \alpha_0$ .
- Se considera el incremento de la componente radial correspondiente,  $\Delta r$ .

Teniendo en cuenta las condiciones descritas, la ecuación (3.20) queda:

$$\begin{aligned}
 & r_j \Delta z \Delta r \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] \\
 & + \Delta z \left[ -r_n \alpha \left( \frac{\phi_{i,j+1,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta r} \right) \right] + r_j \Delta r u_j \phi_{i,j,n+1} \\
 & - r_j \Delta r \left[ u_j \phi_{i-1,j,n+1} - \alpha \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i-1,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] = 0 \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{r_j \Delta r \Delta z}{\Delta t} + \alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} + u_j r_j \Delta r + \alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\
 & - \left( u_j r_j \Delta r + \alpha r_j \frac{\Delta r}{\Delta z} \right) \phi_{i-1,j,n+1} \\
 & - \left( \alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} \right) \phi_{i,j+1,n+1} = \left( \frac{r_j \Delta r \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

### 3. Esquina superior de entrada

En esta celda los subíndices toman los valores:

$$i = 1, j = M_c + Q_c$$

Sobre esta celda se tienen las siguientes condiciones:

- Se está en la región sólida del cilindro, como consecuencia  $u_j = 0$ .

- El valor de la variable dependiente,  $\phi$  está prescrita en la entrada del cilindro:  $\phi(z = 0, r, t) = \phi_{in}$ . Se tiene por tanto, una condición de contorno de tipo Dirichlet. El flujo en la cara oeste se debe aproximar mediante la fórmula (B.9).
- El valor de la variable dependiente está fijado en la pared superior del cilindro:  $\phi(z = L, r, t) = \phi_{ext}$ . Se está ante una condición de contorno tipo Dirichlet. El flujo en la cara norte se aproxima mediante la fórmula (B.12).
- Se han de tomar  $\alpha$  y  $\Delta r$ , las correspondientes a la parte sólida del cilindro.

Considerando estas premisas, se tiene que la ecuación (3.20) queda:

$$\begin{aligned}
 & r_j \Delta z \Delta r_{tub} \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] \\
 & + \Delta z \left( \left[ -r_n \alpha \left( \frac{9\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1} - 8\phi_{ext}}{3\Delta r_{tub}} \right) \right] + \left[ r_s \alpha \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1}}{\Delta r_{tub}} \right) \right] \right) \\
 & + r_j \Delta r_{tub} \left[ -\alpha \left( \frac{\phi_{i+1,j,n+1} - \phi_{i,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] - r_j \Delta r_{tub} \left[ -\alpha \left( \frac{9\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i+1,j,n+1} - 8\phi_{in}}{3\Delta z} \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Reordenando la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{r_j \Delta r_{tub} \Delta z}{\Delta t} - 3\alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} + r_s \alpha \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} + 4\alpha r_j \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\
 & - \left( \frac{4}{3}\alpha r_j \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{i+1,j,n+1} - \left( \alpha r_s \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} - r_n \alpha \frac{\Delta z}{3\Delta r_{tub}} \right) \phi_{i,j-1,n+1} \\
 & = \left( \frac{r_j \Delta r_{tub} \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} + \frac{8}{3} r_j \alpha \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \phi_{in} - \frac{8}{3} r_n \alpha \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} \phi_{ext}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

#### 4. Esquina superior de salida

En esta celda los subíndices toman los valores:

$$i = N_c, j = M_c + Q_c$$

Sobre esta celda se tienen las siguientes condiciones:

### 3.4. Ensamblado

---

- Se está en la región sólida del cilindro, como consecuencia  $u_j = 0$ .
- El valor de la variable dependiente está fijado en la pared superior del cilindro:  $\phi(z = L, r, t) = \phi_{ext}$ . Se está ante una condición de contorno tipo Dirichlet. El flujo en la cara norte se aproxima mediante la fórmula (B.12).
- Se considera que el flujo difusivo es cero sobre la pared este de la celda, i.e.,  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_e = 0$  (condición de contorno tipo Neumann).
- Se han de tomar  $\alpha$  y  $\Delta r$ , las correspondientes a la parte sólida del cilindro.

Teniendo en cuenta estas premisas y aplicándolas sobre la ecuación (3.20), se tiene:

$$\begin{aligned}
 & r_j \Delta z \Delta r_{tub} \left[ \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} \right] \\
 & + \Delta z \left( \left[ -r_n \Gamma \left( \frac{9\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1} - 8\phi_{ext}}{3\Delta r_{tub}} \right) \right] + \left[ r_s \Gamma \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j-1,n+1}}{\Delta r_{tub}} \right) \right] \right) \\
 & - r_j \Delta r_{tub} \left[ -\Gamma \left( \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i-1,j,n+1}}{\Delta z} \right) \right] = 0 \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{r_j \Delta r_{tub} \Delta z}{\Delta t} - 3\alpha r_n \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} + \alpha r_s \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} + \alpha r_j \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{i,j,n+1} \\
 & - \left( \alpha r_j \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{i-1,j,n+1} - \left( \alpha r_s \frac{\Delta z}{\Delta r_{tub}} - r_n \alpha \frac{\Delta z}{3\Delta r_{tub}} \right) \phi_{i,j-1,n+1} \\
 & = \left( \frac{r_j \Delta r_{tub} \Delta z}{\Delta t} \right) \phi_{i,j,n} - \left( \frac{8}{3} \alpha r_n \frac{\Delta r_{tub}}{\Delta z} \right) \phi_{ext} \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

De este modo, se tienen discretizadas todas las celdas del dominio.

### 3.4. Ensamblado

En la siguiente sección se realiza el ensamblado de las ecuaciones discretizadas obtenidas en la sección anterior. Este ensamblado nos permitirá obtener un sistema lineal, que posteriormente se resolverá de forma matricial.

Como se ha descrito anteriormente, las distintas aproximaciones realizadas dependen de la componente axial y radial del dominio, denotadas por  $i, j$  respectivamente. De manera general, se han discretizado las ecuaciones para  $K = N_c \times (M_c + Q_c)$  celdas en el dominio, con  $N_c$  y  $M_c + Q_c$  arbitrarios.

Por tanto el sistema que se pretende resolver es de la forma:

$$Ax = b \quad (3.39)$$

con  $A \in \mathcal{M}_{K \times K}(\mathbb{R})$  matriz de coeficientes del sistema,  $b \in \mathcal{M}_{K \times 1}(\mathbb{R})$  vector de coeficientes independientes y  $x \in \mathcal{M}_{K \times 1}(\mathbb{R})$  el vector de incógnitas.

Para poder obtener el sistema descrito se debe pasar de dos subíndices a un único, es decir, hay que realizar una nueva indexación sobre las distintas celdas del dominio. Este cambio se lleva a cabo mediante la transformación lineal:

$$T: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (i, j) \longmapsto N_c(j - 1) + i \quad (3.40)$$

Si denotamos  $T(i, j) = k$ , para  $i = 1, 2, \dots, N_c$ ,  $j = 1, 2, \dots, M_c + Q_c$ , de manera esquemática, se puede observar la reindexación del mallado en la figura siguiente.

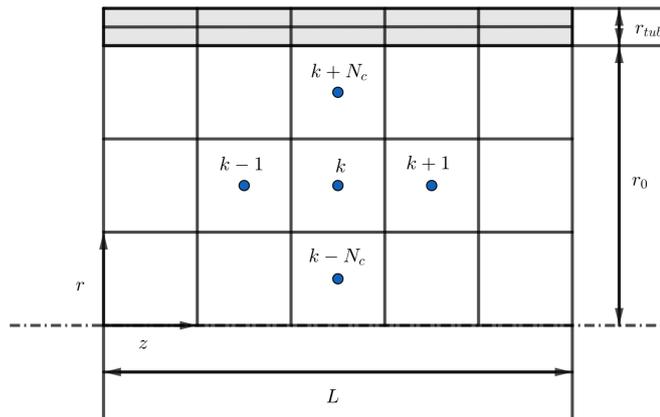


Figura 3.14: Reindexado del mallado.

### 3.4. Ensamblado

---

De este modo, se tiene que la ecuación expresada en términos generales en función de la nueva reindexación  $k$  es de la forma:

$$A_{k,k}\phi_{k,n+1} - A_{k,k-1}\phi_{k-1,n+1} - A_{k,k+1}\phi_{k+1,n+1} - A_{k,k-N_c}\phi_{k-N_c,n+1} - A_{k,k+N_c}\phi_{k+N_c,n+1} = b_{k,n} \quad (3.41)$$

Donde las entradas de la matriz  $A^{\text{ix}}$  son los coeficientes que acompañan al valor de la propiedad en los nodos correspondientes en el instante  $n + 1$ , y el vector  $b$  está formado por los coeficientes independientes del sistema en el instante  $n$  y las condiciones de contorno.

Así pues, el sistema lineal que se obtiene al reindexar las ecuaciones discretizadas es en banda. A la hora de resolver el sistema (3.39), se hará uso de la *descomposición LU<sup>x</sup>* que se lleva a cabo en *Scilab* mediante la orden **lusolve**.

---

<sup>ix</sup>Veáse la matriz de los coeficientes en el Apéndice C

<sup>x</sup>Ver [Donat et al. 2000].



# Capítulo 4

## Resultados numéricos

En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos a partir de la ejecución del programa realizado en *Scilab*<sup>1</sup>. Se resolverá el problema planteado variando el espesor de la tubería, la velocidad media axial del flujo y el cambio de fluido a través de la tubería, con tal de ver la influencia de estos en los resultados obtenidos. En un primer caso, se resolverá el problema variando el espesor de la tubería y se analizarán los resultados obtenidos en cada uno de los experimentos. Posteriormente, se seguirá el mismo procedimiento para la variación de la velocidad media axial, y por último, para la variación del fluido que pasa a través de la tubería.

### 4.1. Efecto del espesor de la pared

En este caso, se considera que sobre el problema discretizado anteriormente en la sección 3.3, se produce una variación del espesor de la pared de la tubería. La finalidad de estos ensayos es estudiar si se produce, o no, una variación significativa de la temperatura como consecuencia de variar el espesor de la tubería. Para los diferentes ensayos a realizar, se han escogido en particular, tres espesores distintos en la tubería: 0.001, 0.01 y 0.1 metros.

Para cada uno de los diferentes espesores considerados, los siguientes parámetros y/o variables se mantendrán constantes:

- La longitud de la tubería ( $L$ ), es de 100 metros.
- El radio interior de la tubería ( $r_0$ ), es de 0.1 metros.
- En el radio interior se considera que circula agua, y por tanto, han de tomarse las propiedades físicas correspondientes a este fluido:

---

<sup>1</sup>Veáse el Apéndice D

- Densidad ( $\rho$ ):  $1000 \text{ kg/m}^3$
- Conductividad térmica ( $\kappa$ ):  $0.613 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
- Calor específico ( $c_p$ ):  $4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$
- La velocidad media axial del flujo a través de la tubería,  $u_{avg}$ , se considera que es de  $0.001 \text{ m/s}$ .
- La tubería se considera que está formada por acero, por tanto, se toman las propiedades físicas correspondientes a este material en el espesor de la tubería:
  - Densidad ( $\rho$ ):  $7850 \text{ kg/m}^3$
  - Conductividad térmica ( $\kappa$ ):  $500 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
  - Calor específico ( $c_p$ ):  $460 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$
- El tiempo final es de 40000 segundos, con un paso de tiempo de 100 segundos.
- En la entrada de la tubería se considera que se tiene una condición de tipo Dirichlet con  $T_{in} = 20^\circ\text{C}$ .
- En la pared superior se considera que se tiene una condición de tipo Dirichlet con  $T_{top} = 5^\circ\text{C}$ .
- Se considera un mallado con  $N = 100$ ,  $M = 200$  y  $Q = 30$ , por tanto, se tiene un mallado con un total de  $(200 + 30 - 2) \times (100 - 1)$  celdas.

Llevando a cabo la ejecución del programa D.2 (véase el Apéndice D) variando el espesor de la tubería, se obtienen para cada uno de los casos un campo escalar de temperaturas en los ejes radial y axial tomadas cada 100 segundos. Se calcula, para  $z = L/2$ , el valor de la temperatura promedio del líquido. De este modo, a partir de las distintas ejecuciones se obtiene la Figura 4.1.

En la Figura 4.1 se representa la evaluación de la temperatura promedio del fluido a lo largo del eje radial, y para  $z = L/2$ , en función del tiempo. Cada una de las curvas representa esta evaluación para un espesor de material distinto. Tal y como se observa, el efecto del espesor es poco significativo. Los diferentes casos presentan un comportamiento muy similar de la temperatura conforme evoluciona el sistema en el tiempo. En un principio, la temperatura decae rápidamente en los primeros 35000 segundos hasta alcanzar un valor

## 4.2. Efecto de la velocidad media axial del flujo

---

cercano a  $7^{\circ}\text{C}$  y, de ahí en adelante, se mantiene aproximadamente constante a lo largo del tiempo.

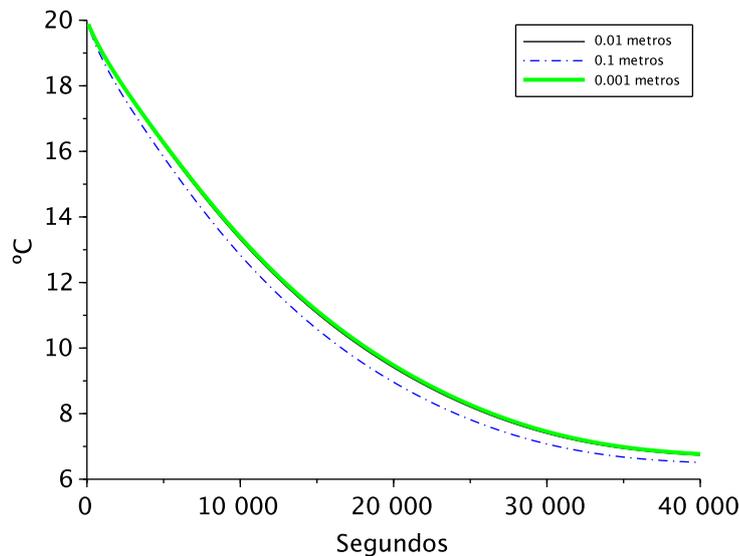


Figura 4.1: Variación de temperatura en los diferentes espesores

## 4.2. Efecto de la velocidad media axial del flujo

En esta sección, se considera la variación de la velocidad media axial del flujo a través de la tubería,  $u_{avg}$ . De este modo, se pretende estudiar si el efecto de esta variable sobre la temperatura en los distintos casos es significativo o no. Para los distintos ensayos llevados a cabo, se han tomado como velocidades medias axiales del flujo 0.01, 0.005 y 0.001  $m/s$ .

En los distintos ensayos realizados variando la velocidad media axial del flujo, los siguientes parámetros y/o variables que se enumeran a continuación, se consideran constantes:

- Para la longitud de la tubería se toman 100 metros.
- El radio interior de la tubería se considera que es de 0.1 metros.

---

<sup>11</sup>En el Apéndice E se pueden observar los diferentes mapas de temperaturas obtenidos cada 10000 segundos para cada uno de los espesores considerados.

- El espesor de la tubería se toma de 0.001 metros.
- En el radio interior circula agua, por tanto se toman las propiedades físicas correspondientes a este fluido:
  - Densidad ( $\rho$ ):  $1000 \text{ kg/m}^3$
  - Conductividad térmica ( $\kappa$ ):  $0.613 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
  - Calor específico ( $c_p$ ):  $4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$
- El espesor de la tubería se considera que está formado a partir de acero, como consecuencia, se tiene que las propiedades físicas correspondientes a este material son:
  - Densidad ( $\rho$ ):  $7850 \text{ kg/m}^3$
  - Conductividad térmica ( $\kappa$ ):  $500 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
  - Calor específico ( $c_p$ ):  $460 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$
- El tiempo final se considera que son 40000 segundos con un paso de tiempo de 10 segundos para la velocidad media axial del flujo de 0.001, 0.005 y 0.01  $\text{m/s}$ <sup>III</sup>.
- En la entrada de la tubería se considera que se tiene la condición de contorno de tipo Dirichlet:  $T_{in} = 20^\circ\text{C}$ .
- En la pared superior de la tubería se tiene la condición de contorno de tipo Dirichlet:  $T_{top} = 5^\circ\text{C}$ .
- El mallado considerado en los diversos casos toma los valores:  $N = 100$ ,  $M = 200$  y  $Q = 30$ . De este modo se tiene que el mallado, en total, consta de  $(200 + 30 - 2) \times (100 - 1)$  celdas.

Al igual que en la Figura 4.1, en la Figura 4.2 se representa la evaluación de la temperatura promedio del fluido a lo largo del eje radial, y para  $z = L/2$ , en función del tiempo. Cada una de las curvas representa esta evaluación para una velocidad media axial del flujo distinta. Tal y como se observa, el efecto de la velocidad media axial del flujo es significativo.

---

<sup>III</sup>Este paso temporal se ha tomado teniendo en cuenta el número de Courant-Friedrichs-Levy y que, garantiza la convergencia del método.

## 4.2. Efecto de la velocidad media axial del flujo

---

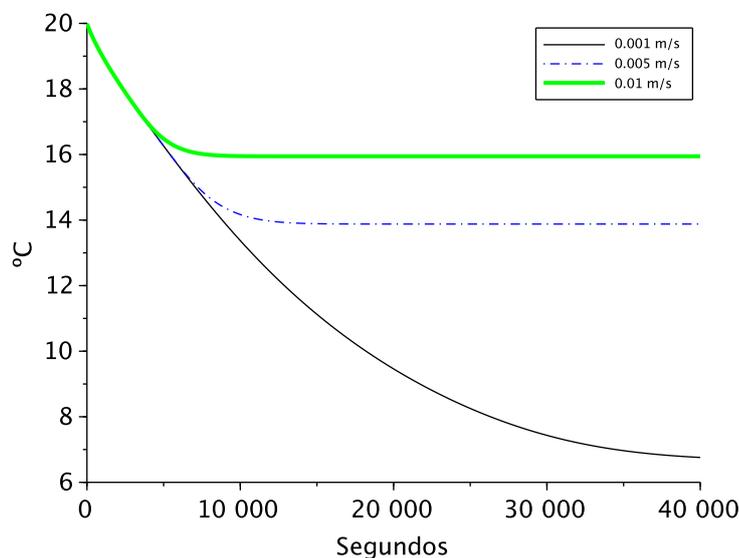


Figura 4.2: Variación de temperatura en las velocidades medias axiales del flujo

Para el caso en que se toma una velocidad media axial de  $0.001 \text{ m/s}$ , se tiene que la temperatura se estabiliza cerca de los  $7 \text{ °C}$  alrededor de los 35000 segundos aproximadamente. Cuando se toma una velocidad media axial de  $0.005 \text{ m/s}$ , se puede observar que la temperatura se estabiliza cerca de los  $14 \text{ °C}$  al cabo de 10000 – 15000 segundos. Por último, para el caso en que se toma una velocidad media axial de  $0.01 \text{ m/s}$  se tiene que la temperatura se estabiliza cerca de los  $16 \text{ °C}$  al cabo de 5000 – 10000 segundos<sup>IV</sup>.

Llegados a este punto es necesario realizar dos puntualizaciones:

- Por una parte, a lo largo del trabajo se ha considerado que el modelo sigue un régimen laminar. Cuando se trabaja en régimen laminar, a velocidades bajas, y se fuerza al fluido para que adquiera mayor velocidad, comienzan a aparecer ondulaciones (régimen crítico), y de persistir este aumento llevará al fluido a alcanzar el régimen turbulento, [Ortega, N. 2016]. Para el caso turbulento, la ecuación de advección-difusión debería modificarse teniendo en cuenta la componente turbulenta de la velocidad, [Socolofsky et al. 2005].

---

<sup>IV</sup>En el Apéndice E se pueden observar los diferentes mapas de temperaturas obtenidos cada 5000 segundos para cada una de las velocidades consideradas.

- Por otra parte, la condición de contorno considerada a la salida de la tubería,  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ , deja que verificarse a medida que se aumenta la velocidad media axial<sup>v</sup>. Para contrarrestar este efecto, se debería aumentar la longitud de la tubería ( $L$ ).

Por tanto, se tiene que, al contrario que en el primer caso considerado en el que se variaba el espesor de la tubería, la variación de la velocidad media axial del flujo que circula a través de la tubería produce una variación significativa de la temperatura promedio así como del tiempo, en que dicha temperatura se estabiliza.

### 4.3. Efecto del cambio de fluido

Para este último caso se cambia el fluido que pasa a través del radio interior de la tubería. Se considera dos casos diferentes, uno en el que circule agua y otro en el que circule alcohol amílico. Siguiendo la misma metodología que en las secciones anteriores, los resultados obtenidos de las temperaturas promedias en los diferentes ensayos se muestran conjuntamente en una gráfica con tal de estudiar si se produce o no una variación significativa de la temperatura.

Retomando una vez más el problema discretizado en capítulos anteriores, se tiene que, en los distintos ensayos a realizar en esta sección, los parámetros y/o variables que se mantienen constantes son:

- La longitud de la tubería ( $L$ ), se considera que es de 100 metros.
- El radio interior de la tubería ( $r_0$ ), es de 0.1 metros.
- La velocidad media axial del flujo ( $u_{avg}$ ), a través de la tubería se toma de 0.001  $m/s$ .
- La tubería se considera que está formada por acero por tanto, han de tomarse las propiedades físicas correspondientes a dicho material en el espesor de la tubería:
  - Densidad ( $\rho$ ): 7850  $kg/m^3$
  - Conductividad térmica ( $\kappa$ ): 500  $W/m^{\circ}C$
  - Calor específico ( $c_p$ ): 460  $J/kg^{\circ}C$

---

<sup>v</sup>Se puede observar dicho efecto en E.2.

### 4.3. Efecto del cambio de fluido

---

- El tiempo final es de 40000 segundos con un paso de tiempo igual a 100 segundos.
- A lo largo de la entrada de la tubería se tiene la condición:  $T_{in} = 20^{\circ}\text{C}$ .
- A lo largo de la pared superior se considera que se tiene la condición:  $T_{top} = 5^{\circ}\text{C}$ .
- Se toman en el mallado las constantes:  $N = 100$ ,  $M = 200$  y  $Q = 30$ . Como consecuencia se tiene un mallado con un total de  $(200 + 30 - 2) \times (100 - 1)$  celdas.

En esta sección, al considerar dos fluidos distintos, por lo que ha de tenerse en cuenta que cada uno de ellos tiene diferentes propiedades físicas. Para el caso en que circule agua, se tomarán en el radio interior de la tubería, las propiedades físicas consideradas en las secciones anteriores. En el caso del alcohol amílico, se tiene que sus propiedades físicas son:

- Densidad ( $\rho$ ):  $907 \text{ kg/m}^3$
- Conductividad térmica ( $\kappa$ ):  $0.106 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$
- Calor específico ( $c_p$ ):  $2010 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$

En la Figura 4.3 representa la evaluación de la temperatura promedio del fluido, a lo largo del eje radial, y para  $z = L/2$  en función del tiempo. Cada una de dichas curvas que aparecen en la figura, representa esta evaluación para un fluido distinto. Tal y como se observa, el efecto del cambio de fluido que circula a través de la tubería es significativo.

En este caso se muestran claras diferencias entre el comportamiento de ambos líquidos. Se puede observar claramente como el alcohol tiene una menor capacidad para la transferencia del calor que el agua. En el caso por el que circula alcohol amílico, la temperatura promedio del flujo se estabiliza alrededor de los 10000 segundos, y toma una temperatura cercana a los  $18^{\circ}\text{C}$ , a partir de la cual se mantiene constante. Por el contrario, para el caso en que circula agua, y como ya se había observado en las anteriores secciones, se tiene que la temperatura se estabiliza cerca de los  $7^{\circ}\text{C}$  partir de los 35000 segundos aproximadamente.

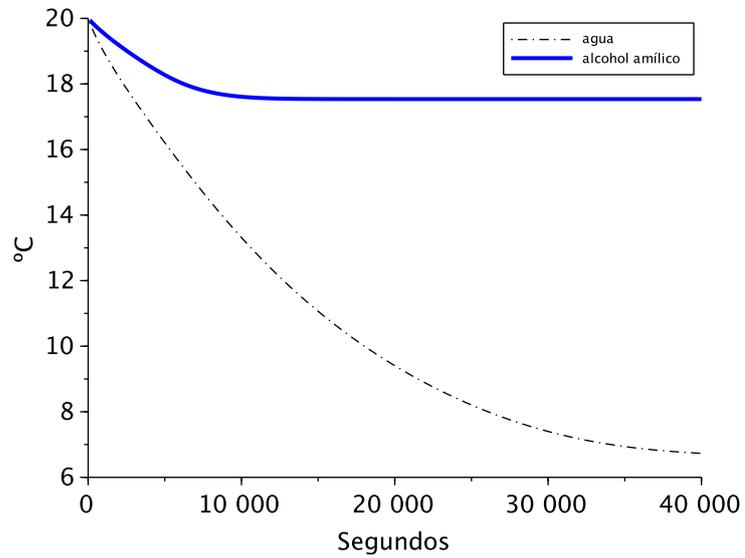


Figura 4.3: Variación de temperatura en los diferentes líquidos

Para más detalle, en el Apéndice E se pueden observar los diferentes mapas de temperaturas obtenidos para cada uno de los casos cada 2500 segundos.

# Capítulo 5

## Conclusiones generales y trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones generales

El proyecto ha sido desarrollado en el Instituto de Tecnología Cerámica (ITC). En él se han llevado a cabo las distintas fases para la resolución y obtención de los distintos resultados que se han plasmado a lo largo de las distintas secciones y capítulos del trabajo.

La importancia del proyecto reside en la obtención de un modelo robusto, que simule de la forma realista la variación de temperatura que se produce en un determinado flujo a través de una tubería, bajo ciertas condiciones. Con tal de alcanzar dicha meta, se toma un método de aproximación numérica que ajuste el modelo de manera evolutiva en el tiempo y bajo las diversas condiciones que se imponen en el dominio, como es el método de volúmenes finitos.

Con tal de llevar a cabo la resolución de dicho problema, por una parte se ha presentado la ecuación del transporte, así como de manera paralela, se ha presentado de manera rigurosa el método de aproximación aplicado. Posteriormente, se han entrelazado los dos elementos mencionados para describir la metodología que sigue el método de volúmenes finitos sobre la ecuación del transporte de energía de manera general.

Una vez descrita dicha metodología, se ha planteado el problema concreto a resolver. Se han llevado a cabo diversas consideraciones sobre el dominio como por ejemplo, el uso de coordenadas cilíndricas. La utilización de estas coordenadas ha permitido reducir el problema en tres dimensiones espaciales

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES GENERALES Y TRABAJO FUTURO

---

a un problema en dos dimensiones espaciales, (i.e., el problema axisimétrico en 2D).

Posteriormente, se han aplicado los cambios de coordenadas e hipótesis a la ecuación obtenida de manera general. De este modo, se tiene el problema planteado de manera estacionaria. Puesto que se busca que el modelo simule un problema evolutivo en el tiempo, como último paso en el planteamiento del problema, se lleva a cabo sobre la ecuación obtenida la integración de la variable temporal en función de los incrementos temporales considerados.

Una vez planteado el problema a resolver, se ha llevado a cabo su discretización. Para ello se han considerado los distintos casos en los que intervienen las condiciones de contorno o condiciones especiales respecto al eje axial o radial. Finalmente, esta discretización ha dado paso al ensamblado del problema. Tras la reindexación de los índices de las ecuaciones discretizadas mediante una transformación lineal se ha obtenido un sistema lineal en banda, el cual es computacionalmente factible de resolver. Una vez se ha llegado a dicho sistema lineal, se ha realizado un programa en *Scilab* que ha permitido la resolución del mismo.

El capítulo de resultados plasma la ejecución de dicho programa considerando casos distintos, así como su análisis. Este análisis refleja, en cada uno de los casos, la variación de la temperatura promedio del líquido en función del tiempo, y permite ver si se produce una variación significativa en función del cambio de parámetros y/o variables.

En un primer caso, se ha considerado la variación del espesor de la tubería y se observa que el espesor de la tubería tiene escaso impacto en el transporte de calor. El resultado se debe a que la tubería es de acero, cuyas propiedades conductoras son excelentes. Por el contrario, los casos en que se ha variado la velocidad media axial del flujo y la variación del fluido que circula a través de la tubería, han reflejado cambios significativos en la evolución temporal de la temperatura promedio en la tubería.

Para el caso en que se produce la variación de la velocidad media axial del flujo, se ha observado que conforme aumenta dicha velocidad, la temperatura promedio se estabiliza en mucho menos tiempo. Además, también se obtiene una variación significativa en °C de la temperatura en la cual se estabiliza el sistema.

Por último se ha considerado el caso de la variación del fluido que circula a través de la tubería. Como se ha podido observar en el Capítulo 4 a partir

de los resultados obtenidos en las diferentes ejecuciones del programa, la variación del flujo ha permitido concluir que la temperatura promedio, así como el tiempo en el cual se estabiliza el sistema, varían drásticamente al pasar de tener agua circulando a través de la tubería a tener alcohol amílico.

## 5.2. Trabajo futuro

Las futuras líneas de investigación que se pueden llevar a cabo mediante la continuación del estudio realizado son:

- La extensión del problema al caso multicapa, es decir, considerar en el planteamiento del problema, la existencia de diversas capas alrededor de la tubería, cada una compuesta de distintos materiales. Una aplicación concreta podría ser el planteamiento del problema, considerando que la tubería tiene una o diversas capas de materiales aislantes alrededor para evitar la pérdida de calor.
- Llevar a cabo la simulación sobre tuberías curvadas, codos, etc.
- Considerar que circula a través de la tubería un gas en vez de un líquido. Para este caso, el perfil de velocidades debería obtenerse como una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Extender este modelo para su aplicación en campos de estudio relevantes, tales como en el diseño de pozos geotérmicos, entre otros.



# Apéndice A

## Teoremas utilizados.

### **Teorema A.0.1. Teorema de la divergencia de Gauss.**

Sean  $H$  y  $U$  dos subconjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^3$  donde  $U \subset H$  es simplemente conexo y el borde de  $U$ ,  $S = \partial U$  es una curva regular o regular a trozos y cerrada.

Sea  $F : H \rightarrow \mathbb{R}^3$ , un campo vectorial de clase  $C^1$ , i.e  $F$  cuenta con derivadas parciales de primer orden continuas.

Entonces:

$$\int_S F \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_U \nabla \cdot F dV$$

siendo  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector normal a la superficie.

**Teorema A.0.2. Teorema del valor medio.** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $A$  y  $[a, b] \subseteq A$ , donde  $[a, b] = \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$ . Entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que:

$$\| f(b) - f(a) \| = \nabla f(c) \cdot (b - a).$$



# Apéndice B

## Métodos de aproximación

### B.1. Método Upwind de primer orden

Se conoce como esquema Upwind o de diferenciación hacia arriba, a aquel esquema de aproximación dependiente de la dirección del flujo. Matemáticamente, puede escribirse para una celda genérica  $(i, j)$  de un mallado uniforme, los valores  $\phi_e$ ,  $\phi_w$  (veáse sección 3.3) tal que:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_{i,j} & \text{si } \rho u|_{e,i} > 0 \\ \phi_{i+1,j} & \text{si } \rho u|_{e,i} < 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_{i,j} & \text{si } \rho u|_{w,i} < 0 \\ \phi_{i-1,j} & \text{si } \rho u|_{w,i} > 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Con tal de llevar a cabo la discretización en las diferentes caras de las celdas del mallado uniforme, se aplica desarrollos de Taylor. De este modo, para la cara  $e$  situada entre dos centros genéricos  $(i, j)$  e  $(i + 1, j)$  se tiene:

$$\phi_{i+1,j} = \phi_e + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_e + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_e + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_e + \dots$$

$$\phi_{i,j} = \phi_e - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_e + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_e - \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_e + \dots$$

Restando estas dos ecuaciones, queda:

$$\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} = \Delta z \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_e + \frac{2}{6} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_e \dots$$

Despejando:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_e = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta z} - \frac{(\Delta z)^2}{24} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right|_e + \dots$$

De este modo, se obtiene la aproximación del flujo en la cara este de una celda genérica por el método *Upwind de primer orden*:

$$\boxed{\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_e \approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta z}} \quad (\text{B.3})$$

Aplicando desarrollos de Taylor para la cara oeste de la celda genérica que tiene por centro  $(i, j)$ , se tiene:

$$\phi_{i,j} = \phi_w + \frac{\Delta z}{2} \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_w + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|_w + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^3 \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right|_w + \dots$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_w - \frac{\Delta z}{2} \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_w + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|_w - \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta z}{2} \right)^3 \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right|_w + \dots$$

Restando y reordenando las ecuaciones, se obtiene la aproximación del flujo en la cara oeste de una celda genérica por el método *Upwind de primer orden*:

$$\boxed{\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_w \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta z}} \quad (\text{B.4})$$

Aplicando de manera análoga estos procedimientos sobre la segunda coordenada del punto genérico  $(i, j)$ , se obtiene el método *Upwind de primer orden* sobre las caras norte y sur:

$$\boxed{\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_n \approx \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta r}} \quad (\text{B.5})$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_s \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta r}} \quad (\text{B.6})$$

## B.2. Condición de contorno tipo Dirichlet

Las condiciones de contorno de tipo Dirichlet son aquellas que solo especifican valores de la función sobre el contorno. Para poder discretizar las condiciones de contorno de tipo Dirichlet, es necesario derivar las expresiones del flujo en la cara correspondiente.

## B.2. Método Upwind de primer orden

---

- Si se considera que la condición se sitúa en la cara oeste ( $w$ ) de la celda, esta se aproxima mediante los siguientes pasos:

1. Aplicamos desarrollos de Taylor de los centros  $O$  y  $E$  sobre  $w$  :

$$\phi_O = \phi_w + \frac{\Delta x}{2} \frac{d\phi}{dx} \Big|_w + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_w + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^3 \frac{d^3\phi}{dx^3} \Big|_w + \dots \quad (\text{B.7})$$

$$\phi_E = \phi_w + \frac{3\Delta x}{2} \frac{d\phi}{dx} \Big|_w + \frac{1}{2} \left( \frac{3\Delta x}{2} \right)^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_w + \frac{1}{6} \left( \frac{3\Delta x}{2} \right)^3 \frac{d^3\phi}{dx^3} \Big|_w + \dots \quad (\text{B.8})$$

2. Multiplicamos (B.7) por 9, y le restamos (B.8).

$$9\phi_O - \phi_E = 8\phi_w + 3\Delta x \frac{d\phi}{dx} \Big|_w - \frac{3}{8} (\Delta x)^3 \frac{d^3\phi}{dx^3} \Big|_w + \dots$$

3. Reordenando la ecuación obtenemos una aproximación de la derivada de la propiedad de segundo orden de precisión:

$$\frac{d\phi}{dx} \Big|_w = \frac{9\phi_O - \phi_E - 8\phi_w}{3\Delta x} + \frac{1}{8} (\Delta x)^2 \frac{d^3\phi}{dx^3} \Big|_w + \dots$$

4. Asimismo, sabemos que  $\phi_w$  es cierto valor dado en la cara oeste,  $\phi_L$ , y por tanto:

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx} \Big|_w \approx \frac{9\phi_O - \phi_E - 8\phi_L}{3\Delta x}} \quad (\text{B.9})$$

- Si se considera que la condición se sitúa en la cara norte ( $n$ ) de la celda:

1. Aplicamos desarrollos de Taylor de los centros  $O$  y  $S$  sobre  $n$  :

$$\phi_O = \phi_n + \frac{\Delta y}{2} \frac{d\phi}{dy} \Big|_n + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \frac{d^2\phi}{dy^2} \Big|_n + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^3 \frac{d^3\phi}{dy^3} \Big|_n + \dots \quad (\text{B.10})$$

$$\phi_S = \phi_n + \frac{3\Delta y}{2} \frac{d\phi}{dy} \Big|_n + \frac{1}{2} \left( \frac{3\Delta y}{2} \right)^2 \frac{d^2\phi}{dy^2} \Big|_n + \frac{1}{6} \left( \frac{3\Delta y}{2} \right)^3 \frac{d^3\phi}{dy^3} \Big|_n + \dots \quad (\text{B.11})$$

2. Multiplicamos (B.10) por 9, y le restamos (B.11).

$$9\phi_O - \phi_S = 8\phi_n + 3\Delta y \left. \frac{d\phi}{dy} \right|_n - \frac{3}{8}(\Delta y)^3 \left. \frac{d^3\phi}{dy^3} \right|_n + \dots$$

3. Reordenando la ecuación obtenemos una aproximación de la derivada de la propiedad de segundo orden de precisión:

$$\left. \frac{d\phi}{dy} \right|_n = \frac{9\phi_O - \phi_S - 8\phi_n}{3\Delta y} + \frac{1}{8}(\Delta y)^2 \left. \frac{d^3\phi}{dy^3} \right|_n + \dots$$

4. Por la condición, sabemos que  $\phi_n$  es cierto valor dado en la cara norte,  $\phi_T$ , y por tanto:

$$\boxed{\left. \frac{d\phi}{dy} \right|_n \approx \frac{9\phi_O - \phi_S - 8\phi_T}{3\Delta y}} \quad (\text{B.12})$$

### B.3. Método Euler implícito

Este método<sup>1</sup> se aplica a lo largo del trabajo sobre la derivada temporal de la ecuación del transporte de propiedad sobre tuberías. Esta aproximación se obtiene empleando una expansión hacia atrás de la serie de Taylor en el tiempo:

$$\phi_{i,j,n} = \phi_{i,j,n+1} - \Delta t \left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{i,j,n+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right|_{i,j,n+1} - \frac{(\Delta t)^3}{6} \left. \frac{\partial^3\phi}{\partial t^3} \right|_{i,j,n+1} + \dots$$

Reordenando la ecuación para expresar la derivada temporal en función del resto de términos se tiene:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{i,j,n+1} = \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right|_{i,j,n+1} + \dots$$

Si se asume un error de primer orden, el método de Euler implícito resulta:

$$\boxed{\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{i,j,n+1} = \frac{\phi_{i,j,n+1} - \phi_{i,j,n}}{\Delta t}} \quad (\text{B.13})$$

---

<sup>1</sup>Véase la definición del método en [Doubova, A. et al. 2007].

# Apéndice C

## Matriz de coeficientes

A continuación, se muestra de manera general la matriz  $A$  obtenida a partir de la reindexación realizada en la sección 3.4 del ensamblado de las ecuaciones discretizadas. En ella se observa claramente su disposición en banda.

$$\begin{pmatrix}
 A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & A_{1,1+N_c} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & A_{2,2+N_c} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & 0 & \dots & A_{3,3+N_c} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & 0 & X & X & X & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & X & X & X & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 X & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & X & 0 & \dots \\
 \vdots & 0 & X & \dots & \dots & \dots & X & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & \dots & 0 & A_{k,k-N_c} & 0 & \dots & A_{k,k-1} & A_{k,k} & A_{k,k+1} & 0 & A_{k,k+N_c} & 0 & \dots \\
 \vdots & \dots & \dots & 0 & X & \dots & 0 & X & X & X & 0 & X & \dots \\
 \vdots & \dots \\
 0 & \dots & A_{K,K-1} & A_{K,K}
 \end{pmatrix}$$

# Apéndice D

## Implementación en Scilab

### D.1. Módulo principal del programa

```
//=====METVOLFINEVOL2.SCE
//Módulo principal

//Método bidimensional de volúmenes finitos para problemas axisimétricos
//evolutivos con variación de temp en el top en func del tiempo.

//=====

clear();
clearglobal();

//=====Ejecución de módulos.

ExecPath= get_absolute_file_path("metvolfinevol2.sce");
exec(ExecPath+"parametrosevol2.sce",-1);
exec(ExecPath+"matrizevol21.sce",-1);
exec(ExecPath+"graficaevol2.sce",-1);
```

### D.2. Cargar parámetros

```
//=====PARAMETROSEVOL2.SCE
//Datos de entrada y mallado con variación de temperatura en pared top.

//=====

//=====Datos iniciales.
Tin=20; //Temperatura en la entrada.
L=100; //Longitud tubería en metros.
Tiempo=2000; //En segundos.
radio=0.1; //Radio interior tubería en metros.
R=0.1; //Espesor tubería en m.
densi=1000; //Densidad en el radio interior.
densitub=7850; //Densidad en el espesor de la tubería.
kappa=5.613; //Conductividad térmica interior tub.
```

## CAPÍTULO D. APÉNDICE D. IMPLEMENTACIÓN EN SCILAB

---

```
kappatub=500; //Conductividad térmica en espesor tub.
cp=4200; //Calor específico en el interior de la tub.
cptub=460; //Calor específico en el espesor de la tub.

umed=0.001; //Velocidad media en m/s.
r_s=0; //Radio en la cara sur del volumen en el eje de simetría.
Ttop=5; //Temperatura en la pared de la tubería.
cte=2;
//=====Calculamos el coeficiente de difusión.

Gamma=kappa/(cp*densi); //Coef difusividad térmica en interior tub.
Gammatub=kappatub/(cptub*densitub); //Coef difusividad térmica espesor tub.

//=====Num de subdivisiones en en mallado.
M=200; //Número de particiones sobre el eje r.
N=100; //Número de particiones sobre el eje z.
C=30; //Número de particiones sobre el espesor de la tubería.
//=====Incrementos de r y z en coord cilíndricas y de t.
r=radio/(M-1); // Num. celdas en el interior de la tub.
rtub=R/(C-1); //Num. celdas en el espesor de la tub.
rtubinicial=radio+rtub/2; //Primer radio en la tubería.
rtotal=radio+R; //Radio total.
rinicial=r/2; //Primer radio de volumen de control.
z=L/(N-1); //Num. celdas en el eje z.
zinicial=z/2; //Primer z del volumen de control.
t=1; //Incremento de tiempo en cada paso.
```

### D.3. Componer la matriz y resolver el sistema lineal

```
//=====MATRIZEVOL2.SCE

//Creamos la matriz de los coeficientes.

//-----Radios y velocidad que varia en función de la celda.

r0(1)= 3*r/2; //Empiezo en i=2.

for j=2:M-2
    r0(j)=r0(j-1)+r;
end

vecr1=r0*ones(1:N-1); //Vector de r's que quiero aplicar para las u's.
vectu=2*umed*(1.-((vecr1./radio).^2));

r0(M-1)=rtubinicial;

for j=M:M+C-4
    r0(j)=r0(j-1)+rtub;
end

vecr=r0*ones(1:N-1);

h=(M+C-4)*(N-1);
```

## D.4. Cálculos de los coeficientes de la matriz

---

```
h1=(M-2)*(N-1);
erres=matrix(vecr',h,1);
erres1=matrix(vecr1',h1,1);
ues=matrix(vectu',h1,1);
id2=zeros(1,h)';
id2(1:h1)=ues;
ue=id2.*erres;
rin=rinicial*ones(N-1,1);
rfin=(rtotal-(rtub/2))*ones(N-1,1);
errescte=[rin;erres;rfin];

//Vector de la constante por la que se mult la sol anterior.

incre1=r*z/t;
incre=incre1*errescte;
x=Tin*ones((M+C-2)*(N-1),1);

//=====
exec(ExecPath+"matrizevol2.sci",-1);
//=====Matriz de coeficientes.

A=sparse(diag(apfunc()+...
diag(aefunc(),1)+...
diag(awfunc(),-1)+...
diag(anfunc(),N-1)+...
diag(asfunc(),-(N-1)));

//Bucle iterativo en tiempo para calcular las temperaturas.
i=1;
posicion=int((N-1)/2);
Y=(M-1)*(N-1);

for q=t:t:Tiempo

b=coefindep(q);
x=lusolve(A,b+incre.*x);
res(:,i)=x;
tiempoq(i)=q;

Temperatura(i)=mean(res(posicion:N-1:Y, i),'r');
//Guardar en un csv la temp media en el
//perfil del nodo celtral en cada instante de tiempo.

i=i+1;
end

Matdat=[tiempoq,Temperatura];
fprintfMat("Datosrtubli", Matdat)
```

## D.4. Cálculos de los coeficientes de la matriz y del vector de términos independientes

```
//=====MATRIZEVOL2.SCI
```

## CAPÍTULO D. APÉNDICE D. IMPLEMENTACIÓN EN SCILAB

---

```
//Creamos los vectores de la matriz correspondientes a los coeficientes y
//el vector de términos independientes.

//=====

//=====Para los coeficientes ap.
function [aptotal]=apfunc()

//-----Pared bottom + esquinas.

rn=r;

u1=2*umed*(1-(rinicial/radio)^2);

ap1=u1*rinicial*r+(4*Gamma*rinicial*r)/z+(Gamma*rn*z)/r;
apult=u1*rinicial*r+(Gamma*rinicial*r)/z+(Gamma*rn*z)/r;
ap=u1*r*rinicial+(2*Gamma*rinicial*r)/z+(Gamma*z*rn)/r;

apcentral1=ap*ones(2:N-2);

//-----Celdas intermedias + inlets + outlets.

apin2=(4*Gamma*r/z+2*Gamma*z/r);
apout2=(Gamma*r/z+2*Gamma*z/r);
apmid2=(2*Gamma*r)/z+(2*Gamma*z)/r;

apcentral=apmid2*ones(2:N-2);

apt=[apin2, apcentral, apout2];

v= repmat(apt, 1, M-2);

apin3=(4*Gammatub*rtub/z+2*Gammatub*z/rtub);
apout3=(Gammatub*rtub/z+2*Gammatub*z/rtub);
apmid3=(2*Gammatub*rtub)/z+(2*Gammatub*z)/rtub;

apcentral3=apmid3*ones(2:N-2);
apt3=[apin3, apcentral3, apout3];

v2= repmat(apt3, 1, C-2);

apvector=[v, v2]';

apvectormiddle2=apvector.*erres;
apvectormiddle=(ue*r + apvectormiddle2)';

//-----Pared top + esquinas.

rp=rtotal-(rtub/2);
rS=rtotal-rtub;

apinsup2=(3*rtotal*Gammatub*z + rS*Gammatub*z)/rtub+(4*Gammatub*rp*rtub)/z;
apoutsup2=(Gammatub*rp*rtub)/z+(3*Gammatub*radio*z+Gammatub*rS*z)/rtub;
aptop2=(2*Gammatub*rp*rtub)/z + (3*Gammatub*z*rtotal)/rtub+(rS*Gammatub*z)/rtub;

apcentral2=aptop2*ones(2:N-2);
```

#### D.4. Cálculos de los coeficientes de la matriz

---

```
//-----Juntamos todos los coefs en un mismo vector.
    aptotal=incre'+[ap1,apcentral1,apult,apvectormiddle,apinsup2,apcentral2,apoutsup2];
endfunction

//=====Para los coeficientes ae.
function[aetotal]=aefunc()

//-----Pared bottom + esquinas.
    aein=-(4*rinicial*Gamma*r)/(3*z);
    ae=-(rinicial*Gamma*r)/z;
    aeout=0;
    aecentral=ae*ones(2:N-2);

//-----Celdas intermedias + inlets + outlets.
    aemid=-(Gamma*r)/z;
    aeinmid=-(4*Gamma*r)/(3*z);
    aeoutmid=0;

    aecentralmid=aemid*ones(2:N-2);
    aet=[aeinmid,aecentralmid,aeoutmid]; //Vector coef de una fila sin la r.

    ve= repmat(aet,1,M-2);

    aemid3=-(Gammatub*rtub)/z;
    aeinmid3=-(4*Gammatub*rtub)/(3*z);
    aeoutmid3=0;
    aecentral3=aemid3*ones(2:N-2);
    aet3=[aeinmid3,aecentral3,aeoutmid3];

    ve3= repmat(aet3,1,C-2);

    aevectormid=[ve,ve3]';

    aevectormiddle=(aevectormid.*erres)';

//-----Pared top + esquinas.
    rp=rtotal-(rtub/2);

    aeinsup=-(2*Gammatub*rp*rtub)/z;
    aesup=-(rp*Gammatub*rtub)/z;

    //aeoutsup es 0 pero no aparece en la matriz.
    aecentral1=aesup*ones(2:N-2);

//-----Juntamos todos los coefs en un mismo vector.
    aetotal=[aein,aecentral,aeout,aevectormiddle,aeinsup,aecentral1];
endfunction

function[awtotal]=awfunc()

//-----Pared bottom + esquinas.
```

## CAPÍTULO D. APÉNDICE D. IMPLEMENTACIÓN EN SCILAB

---

```
u=2*umed*(1-(rinicial/radio)^2);

aw=-rinicial*(u*r+(Gamma*r)/z);
awvectbottom=aw*ones(2:N-1);

//-----Celdas intermedias + inlets + outlets.

awin=0;
awconst=(Gamma*r)/z;

awcola=awconst*ones(2:N-1);
awt=[awin,awcola];

vw= repmat(awt,1,M-2);

awin3=0;
awmid3=Gammatub*rtub/z;
awcola3=awmid3*ones(2:N-1);
awt3=[awin3,awcola3];
vw3= repmat(awt3,1,C-2);

awvector=[vw,vw3]';

awvectormiddle2=(-(ue*r+(awvector.*erres)))';
awvectormiddle2(1:N-1:$)=0;

//-----Pared top + esquinas.

rp=rtotal-(rtub/2);

awinsup=0; //En el inlet el aw=0.
awsup=-rp*Gamma*r/z; //Coefs del aw en el top.

awcentral1=awsup*ones(2:N-1);

awvectortop=[awinsup,awcentral1];

//-----Juntamos todos los coefs en un mismo vector.

awtotal=[awvectbottom,awvectormiddle2,awvectortop];

endfunction

//=====Para los coeficientes an.

function[antotal]=anfunc()

//-----Pared bottom + esquinas.

rn=2*rinicial;
an=-(Gamma*rn*z)/r;

anvectbottom=an*ones(1:N-1);

//-----Celdas intermedias + inlets + outlets.

an1=-(Gamma*z)/r;
an2=-(Gamma*z)/(2);
ancentral=an1*ones(1:N-1);
ancentral2=an2*ones(1:N-1);
```

#### D.4. Cálculos de los coeficientes de la matriz

---

```
vn= repmat(acentral,1,M-2);
vn2= repmat(acentral2,1,M-2);

an3= -(Gammatub*z)/rtub;
an4= -(Gammatub*z)/(2);
acentral3= an3*ones(1:N-1);
acentral4= an4*ones(1:N-1);

vn3= repmat(acentral3,1,C-2);
vn4= repmat(acentral4,1,C-2);

anvectormid=[vn,vn3]';
anvectormid2=[vn2,vn4]';

//Multiplico para obtener parte de los coef an:

anivect=anvectormid.*erres;

//Sumo la parte constante del coef an y obtengo los an definitivos.

anvectormiddle=(anivect+anvectormid2)';

//-----Juntamos todos los coefs an.
antotal=[anvectbottom,anvectormiddle];

endfunction

//=====Para los coeficientes as.
function[astotal]=asfunc()

//-----Celdas intermedias + inlets + outlets.

as1= -(Gamma*z)/r;
as2= (Gamma*z)/(2);
ascentral= as1*ones(1:N-1);
ascentral2= as2*ones(1:N-1);

vs= repmat(ascentral,1,M-2);
vs2= repmat(ascentral2,1,M-2);

as3= -(Gammatub*z)/rtub;
as4= (Gammatub*z)/(2);
ascentral3= as3*ones(1:N-1);
ascentral4= as4*ones(1:N-1);

vs3= repmat(ascentral3,1,C-2);
vs4= repmat(ascentral4,1,C-2);

asvectormid=[vs,vs3]';
asvectormid2=[vs2,vs4]';

//Multiplico para obtener parte de los coef as:

asivect=asvectormid.*erres;
```

## CAPÍTULO D. APÉNDICE D. IMPLEMENTACIÓN EN SCILAB

---

```
//Sumo la parte constante del coef as y obtengo los as definitivos.
asvectormiddle=(as1vect+asvectormid2)';

//-----Pared top + esquinas.

rS=rtotal-rtub;
rp=rtotal-(rtub/2);

as=-((Gammatub*rtotal*z)/(3*rtub)+(Gammatub*rS*z)/rtub);

asvecttop=as*ones(1:N-1);

//-----Juntamos todos los coefs an.

astotal=[asvectormiddle,asvecttop];

endfunction

//=====Vector de términos independientes.

function[b]=coefindep(q)

ubottom=2*umed*(1-(rinicial/radio)^2);

b11=rinicial*Tin*(ubottom*r+(8*Gamma*r)/(3*z)); //coef inlet bottom corner.
bi1=zeros(2:N-1); //coefs pared bottom+corner.

b1jaux=(8*Gamma*r)/(3*z); //Coef parciales en celda inlet.
bij=0; //Coef celda interiores.
bijcentral=bij*ones(2:N-2); //Vector coef celda interiores.
bNcj=0; //Coef celda outlet.

bmid=[b1jaux,bijcentral,bNcj]; //Vector de coefs. en cada fila.
binter1= repmat(bmid,1,M-2); //Repetimos las filas.

b1jaux2=(8*Gammatub*rtub)/(3*z);

bmid2=[b1jaux2,bijcentral,bNcj];
binter2= repmat(bmid2,1,C-2);

binter=[binter1,binter2]';

besaux=binter.*erres; //Coefs intermedios repetidos las veces necesarias.
bes2=(Tin*(ue*r + besaux))';

id=zeros(1,(M+C-4)*(N-1));
id(1:N-1:$)=1;
bes=bes2.*id;

rp=rtotal-(rtub/2); //Variacion del radio en el top.

b1Maux=(Tin*rp*8*Gammatub*rtub)/(3*z);

//Parte que depende de la temp en la pared top.

biMaux=(8*Gammatub*rtotal*z)/(3*rtub); //Coef top cell.
biMc=biMaux*ones(1:N-1); //Coefs vector top cells.
```

## D.6. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo

---

```
btop2=biMc.*temptop(q);
btopaux=b1Maux*eye(1,N-1);

btop=btopaux+btop2;

b=[b11,bi1,bes,btop]';

endfunction

//Función en la condición de contorno de la pared superior.

function[temp]=temptop(q)

//vectz=zinicial:z:L;

//vz=cte*vectz+4*sin(%pi*q/100);
vecttop=Ttop*ones(1:N-1);
temp=vecttop // -vz;

endfunction
```

## D.5. Mostrar gráfica animada

```
//=====GRAFICAEVOL2.SCE
//Creamos la grafica correspondiente y la mostramos por pantalla.

//=====

exec(ExecPath+"graficaevol2.sci",-1);

i=1;

for q=t:t:Tiempo
if(modulo(i,500)==0)
graficatemp(res(:,i),q);
i=i+1;
else
i=i+1;
end
end

end
```

## D.6. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo

```
//=====GRAFICAEVOL2.SCI
//Creación de la gráfica cada  $q$  instantes.

//=====

function graficatemp(x,q)
```

## CAPÍTULO D. APÉNDICE D. IMPLEMENTACIÓN EN SCILAB

---

```
Zmin=4; //temp mínima.
Zmax=25; //temp máxima.
nc= 100; //num. de colores.

Z=matrix(x,N-1,M+C-2)';
//Z=[flipdim(Z,1);Z]; //Para que muestre el diámetro de la tubería
Z=(round(Z*10^6))/10^6;
vectr1=rinicial:r:radio;
vectr2=rtubinicial:rtub:rtotal;
vectr=[vectr1,vectr2]; //Para que muestre el diámetro de la tubería.

//vectr=[vectr1,vectr2]';
//vectr=[flipdim(-vectr,1);vectr]';

vectz=zinicial:z:L;

[X,Y]=meshgrid(vectz,vectr);

f=scf();
surf(X,Y,Z);
f.color_map=jetcolormap(nc);

title("Método vol. finitos para t="+string(q) , 'fontsize',5);
a=gca();
a.y_label.text="r";
a.labels_font_size=4;
a.x_label.font_size = 4;
a.y_label.font_size = 4;
a.x_label.text="z";
a.z_label.text="temp";
a.view="2d";

e=gce();
cm= e.data.color; //color matrix
boolMatrix= cm < Zmin;
cm(boolMatrix) = Zmin;
e.data.color=((cm-Zmin)./(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
e.cdata_mapping="direct";
colorbar(Zmin,Zmax);
e.color_mode=-2; //elimina les edge
e.color_flag=2; //Nombre que recibe cada una de las gráficas en formato eps.
xs2eps(gcf(),ExecPath+"graftempertub1"+string(i)+".eps")

endfunction
```

# Apéndice E

## Gráficas

A continuación, se muestran las gráficas obtenidas en las diversas ejecuciones del programa con las variaciones consideradas en el capítulo 4. Las gráficas representan la temperatura a través de la tubería en diversos instantes de tiempo (en segundos).

### E.1. Efecto del espesor de la pared

En este apartado se muestran las gráficas cada 10000 segundos.

### E.1.1. 0.001 m de espesor

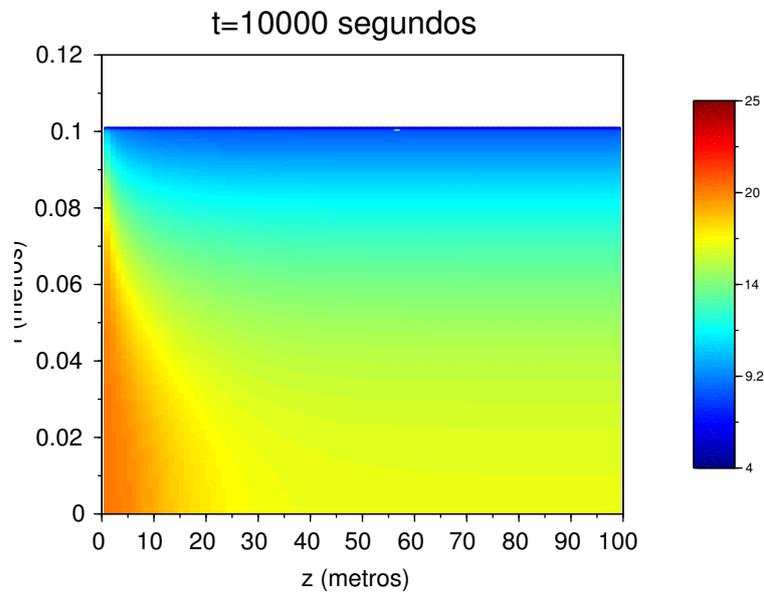


Figura E.1: Mapa de temperaturas en °C con  $t=10000$  s y espesor 0.001 m

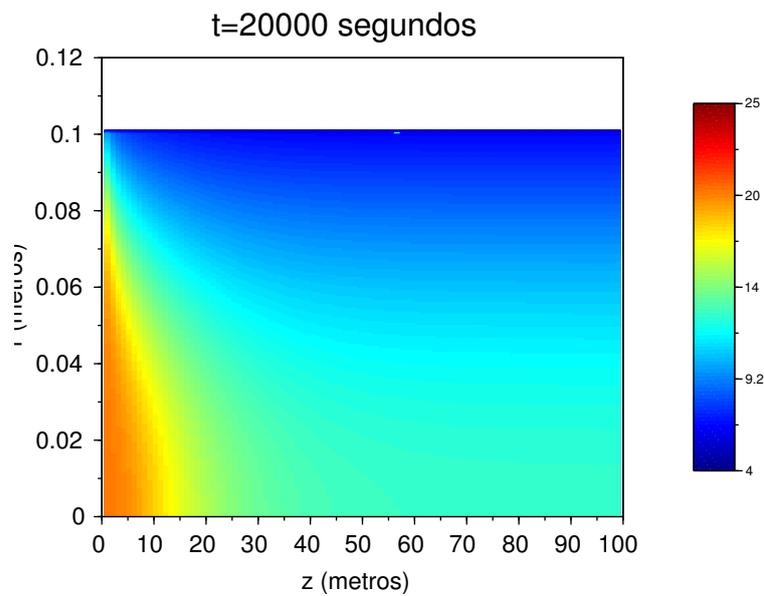


Figura E.2: Mapa de temperaturas en °C con  $t=20000$  s y espesor 0.001 m

E.1. Creación de las gráficas cada  $q$  instantes de tiempo

---

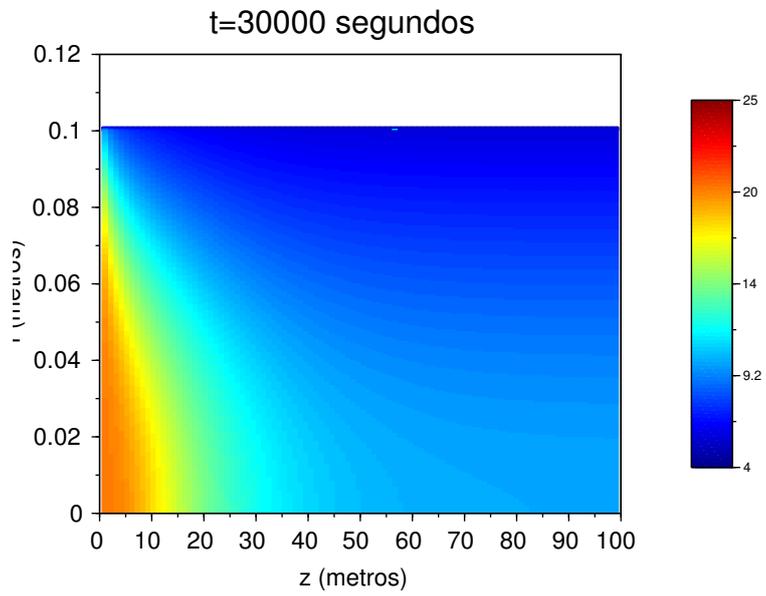


Figura E.3: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=30000$  s y espesor 0.001 m

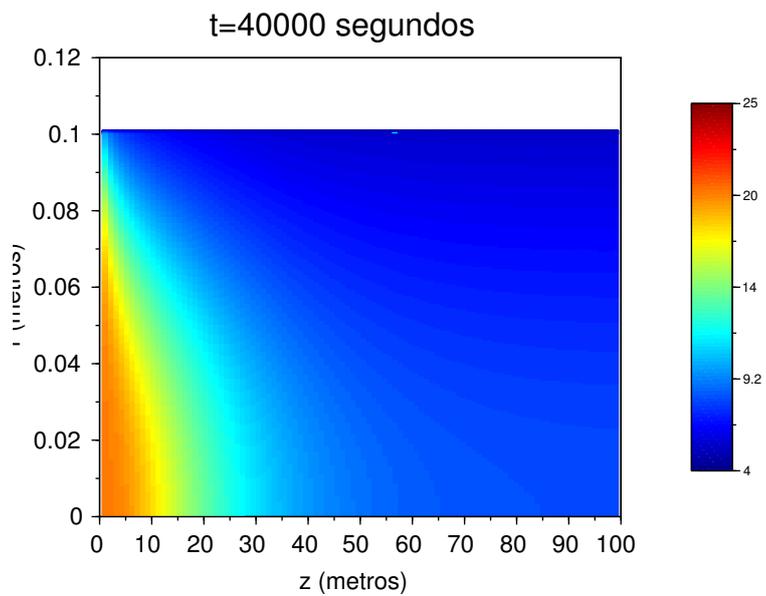


Figura E.4: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=40000$  s y espesor 0.001 m

### E.1.2. 0.01 m de espesor

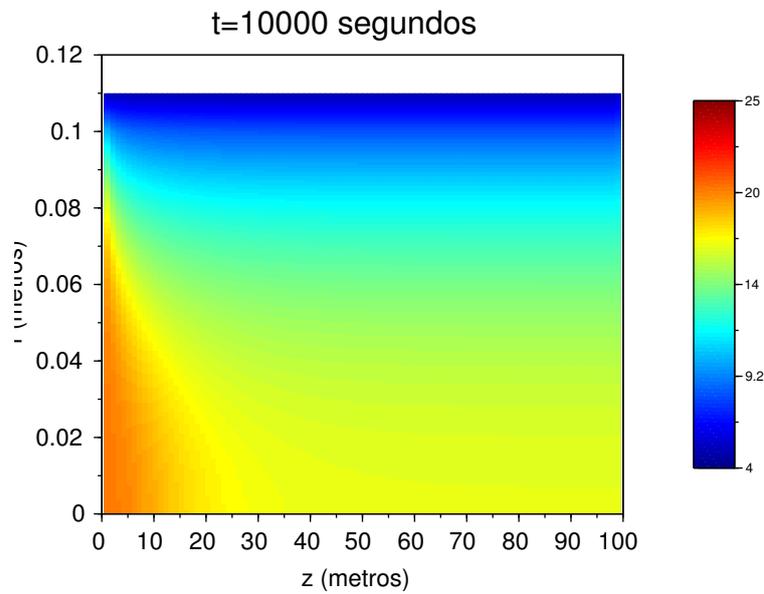


Figura E.5: Mapa de temperaturas en °C con  $t=10000$  s y espesor 0.01 m

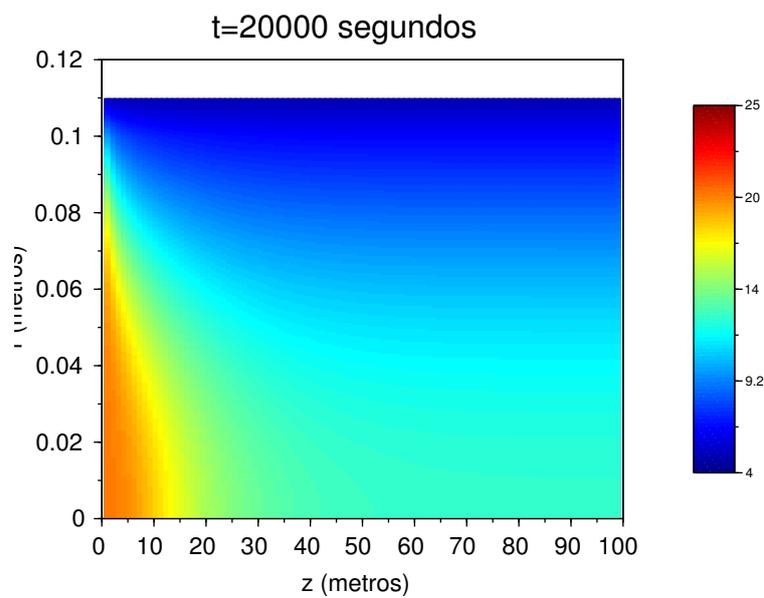


Figura E.6: Mapa de temperaturas en °C con  $t=20000$  s y espesor 0.01 m

E.1. Creación de las gráficas cada  $q$  instantes de tiempo

---

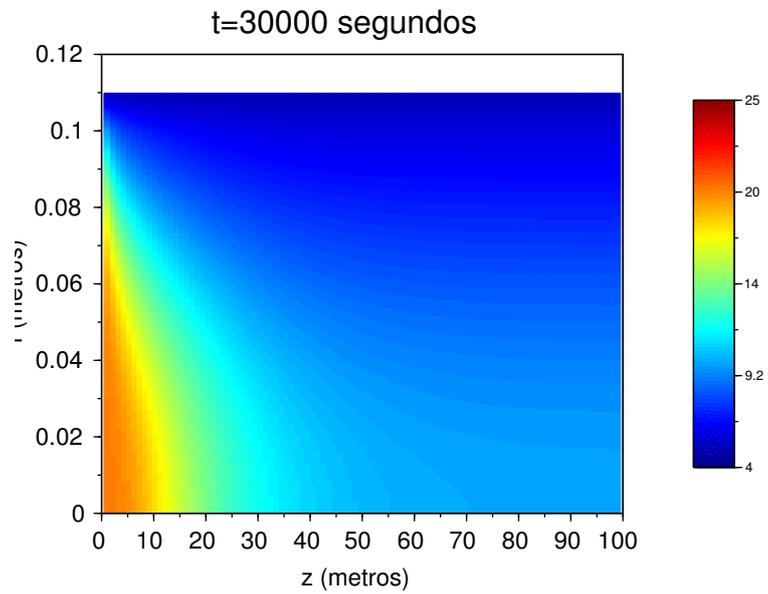


Figura E.7: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=30000$  s y espesor 0.01 m

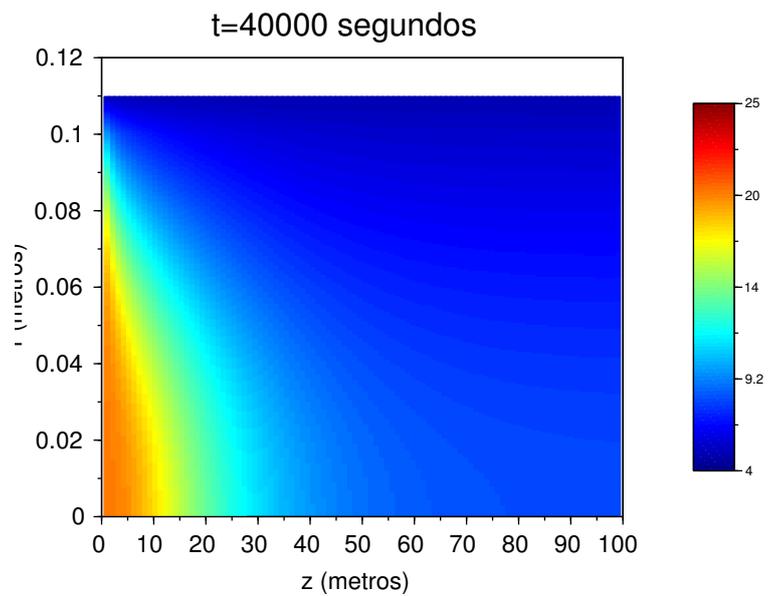


Figura E.8: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=40000$  s y espesor 0.01 m

### E.1.3. 0.1 m de espesor

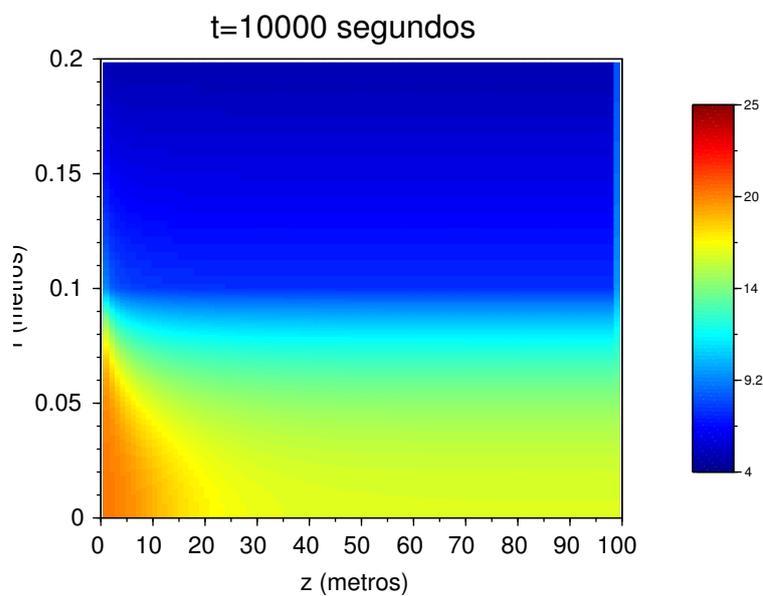


Figura E.9: Mapa de temperaturas en °C con  $t=10000$  s y espesor 0.1 m

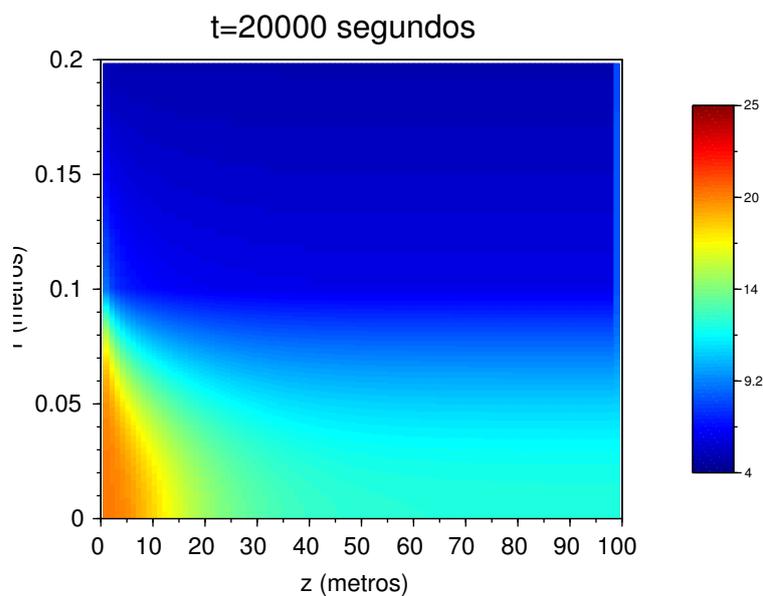


Figura E.10: Mapa de temperaturas en °C con  $t=20000$  s y espesor 0.1 m

## E.2. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo

---

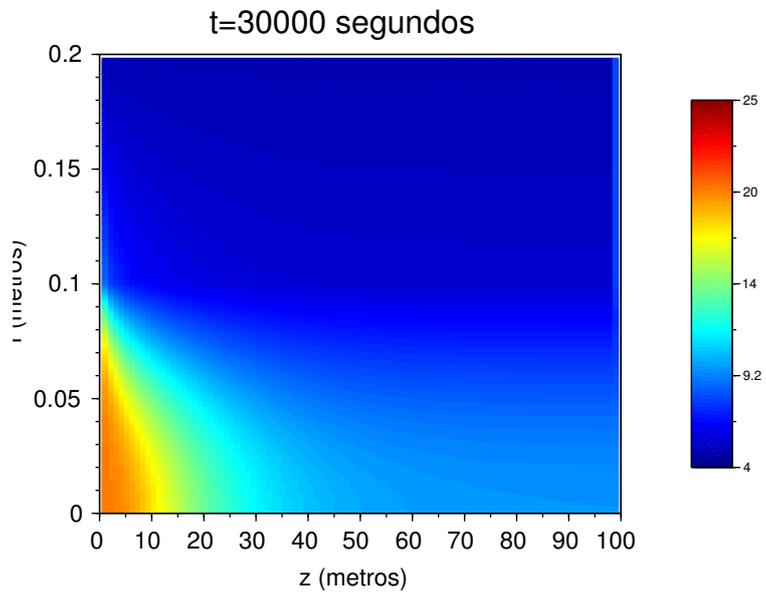


Figura E.11: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=30000$  s y espesor 0.1 m

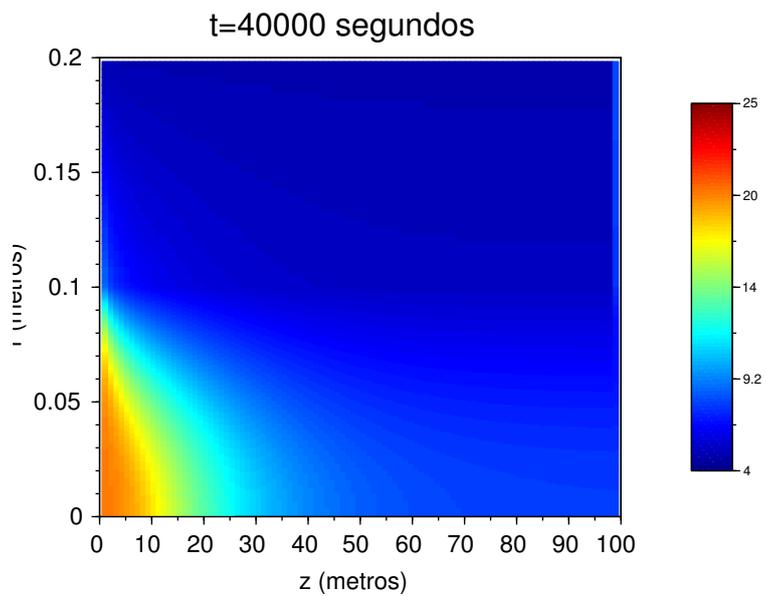


Figura E.12: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=40000$  s y espesor 0.1 m

## E.2. Efecto de la velocidad media axial del flujo

Para este caso se muestran las gráficas hasta los 20000 segundos cada 5000 segundos.

### E.2.1. 0.001 m/s de velocidad medial axial del flujo

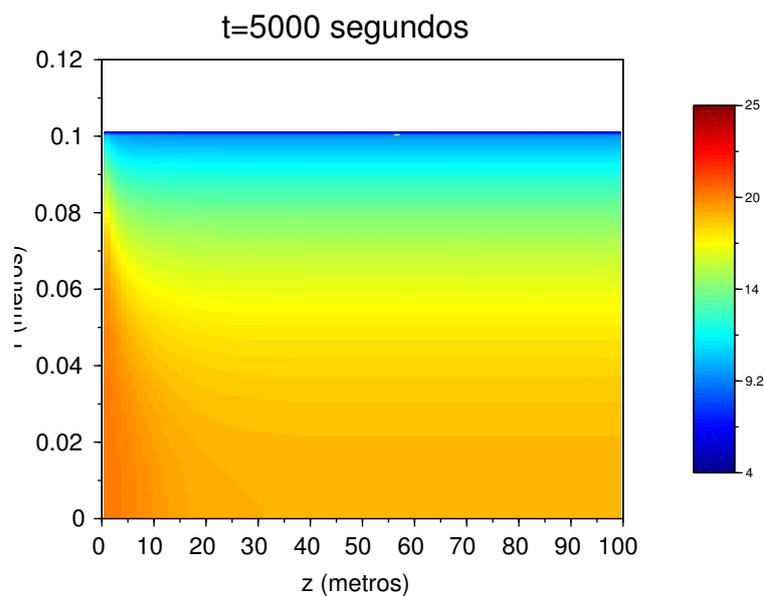


Figura E.13: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=5000$  s y  $u_{avg}= 0.001$  m/s

## E.2. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo

---

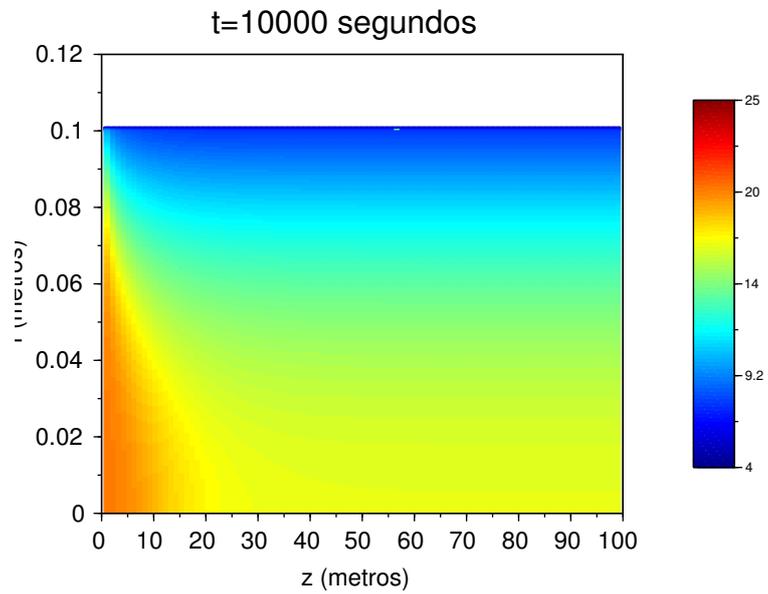


Figura E.14: Mapa de temperaturas en °C con  $t=10000$  s y  $u_{avg}=0.001$  m/s

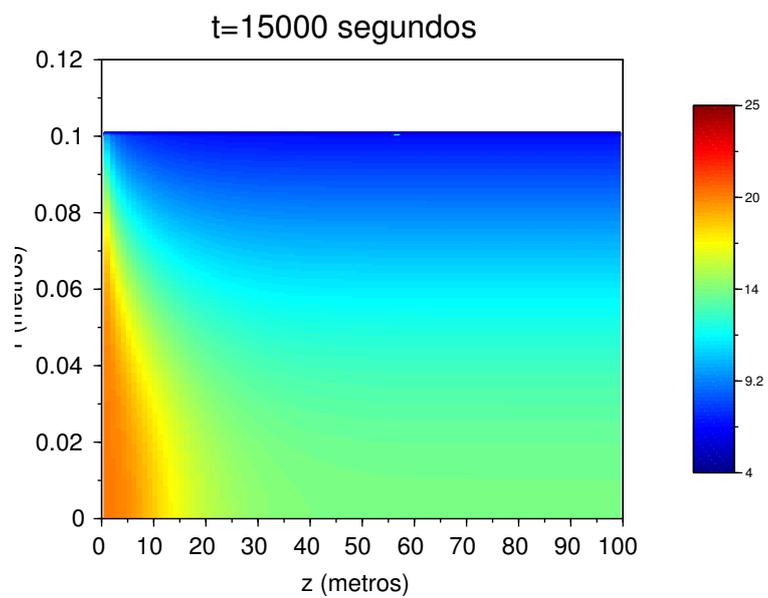


Figura E.15: Mapa de temperaturas en °C con  $t=15000$  s y  $u_{avg}=0.001$  m/s

---

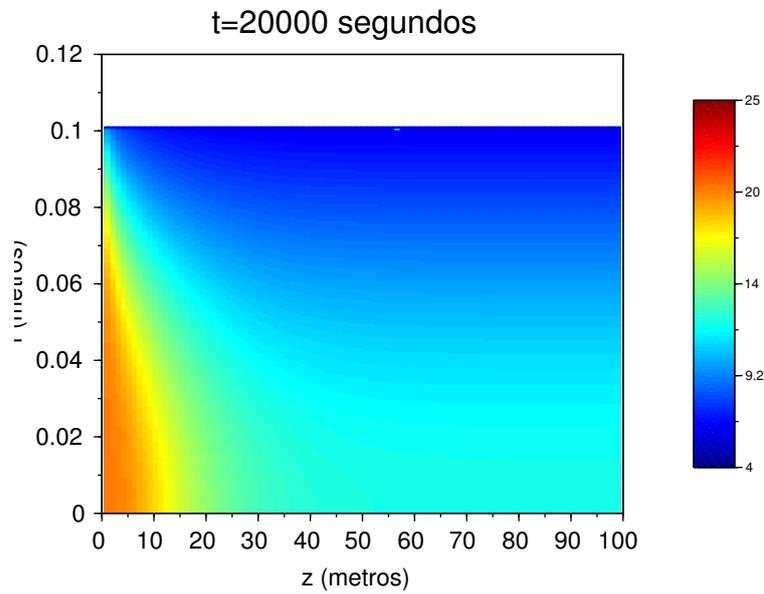


Figura E.16: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=20000$  s y  $u_{avg}=0.001$  m/s

### E.2.2. 0.005 m/s de velocidad medial axial del flujo

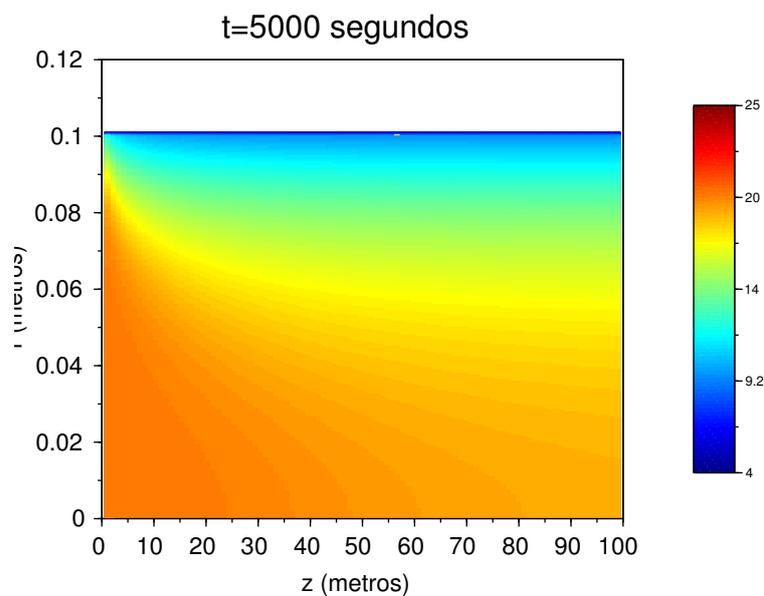


Figura E.17: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=5000$  s y  $u_{avg}=0.005$  m/s

## E.2. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo

---

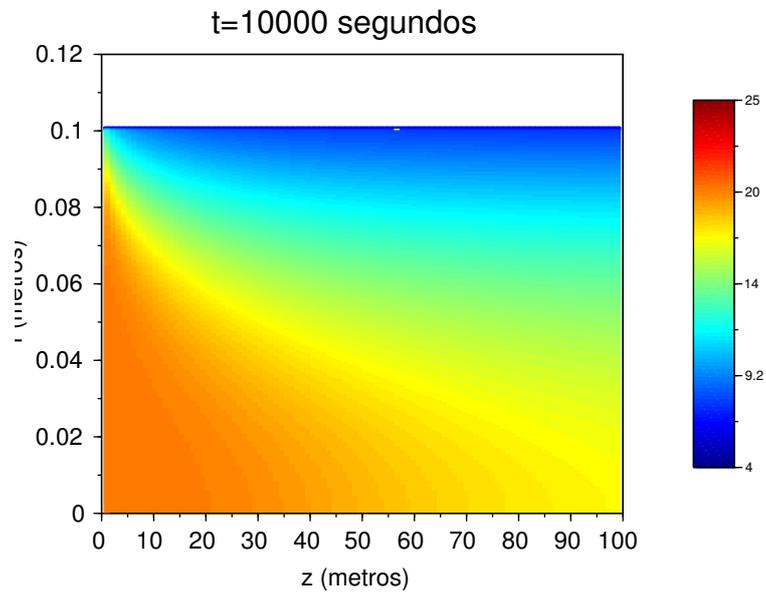


Figura E.18: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=10000$  s y  $u_{avg}=0.005$  m/s

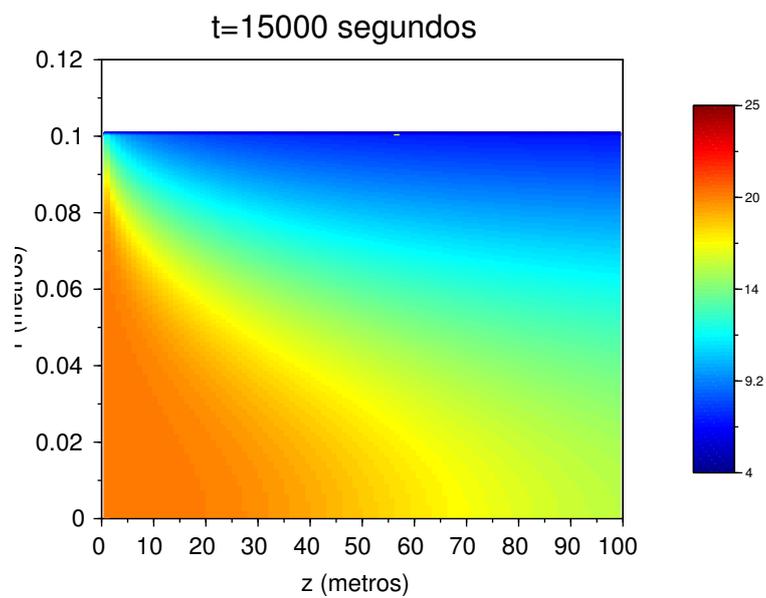


Figura E.19: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=15000$  s y  $u_{avg}=0.005$  m/s

---

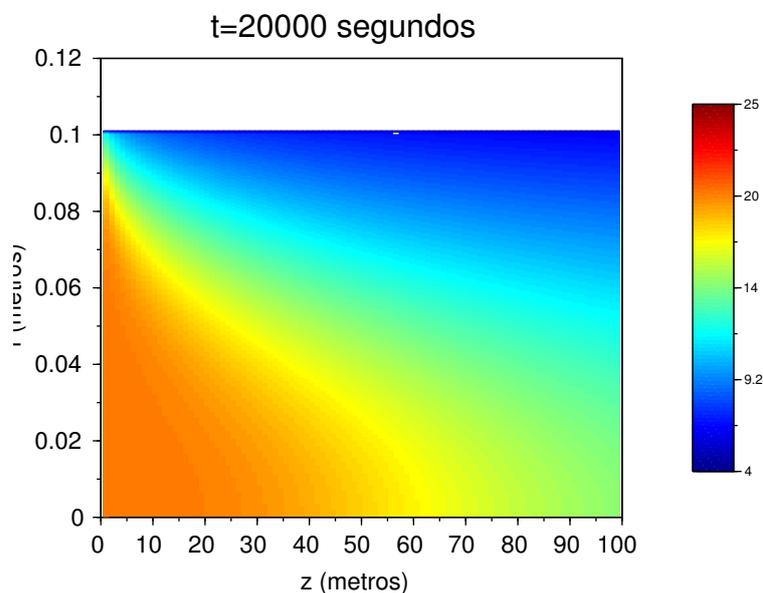


Figura E.20: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=20000$  s y  $u_{avg}=0.005$  m/s

### E.2.3. 0.01 m/s de velocidad medial axial del flujo

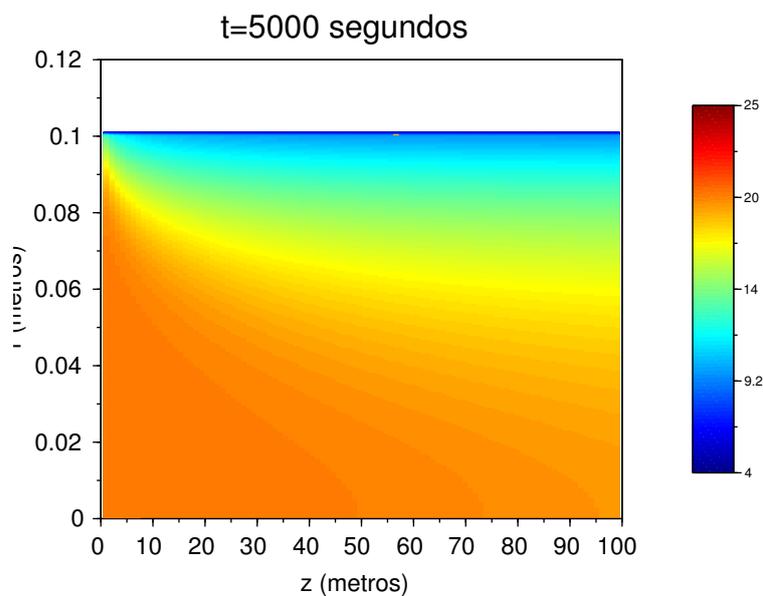


Figura E.21: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=5000$  s y  $u_{avg}=0.01$  m/s

## E.2. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo

---

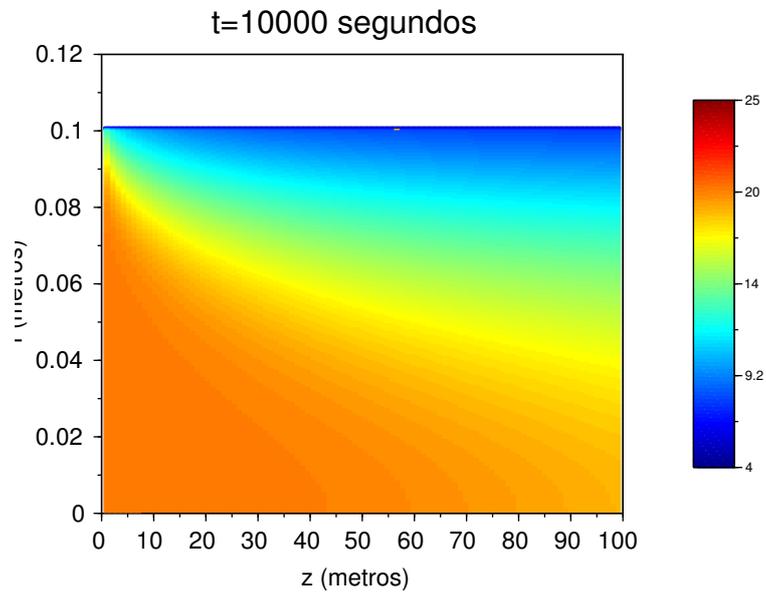


Figura E.22: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=10000$  s y  $u_{avg}=0.01$  m/s

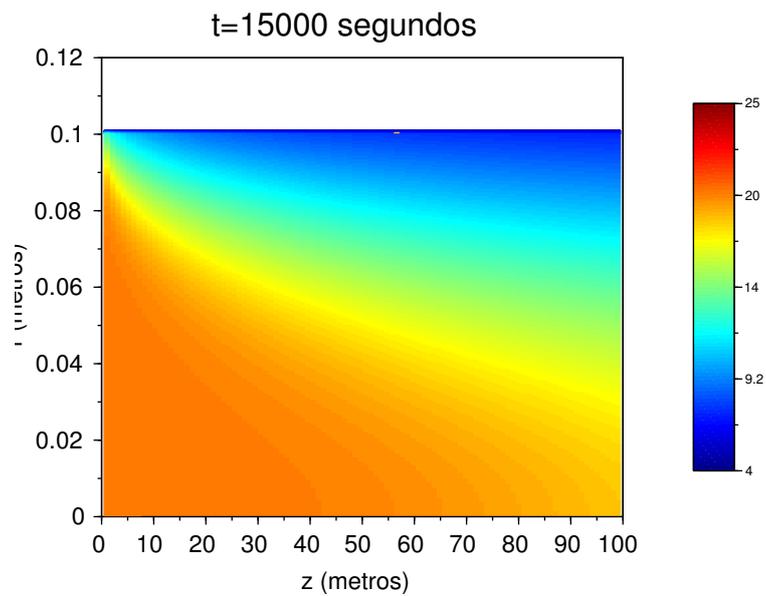


Figura E.23: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  con  $t=15000$  s y  $u_{avg}=0.01$  m/s

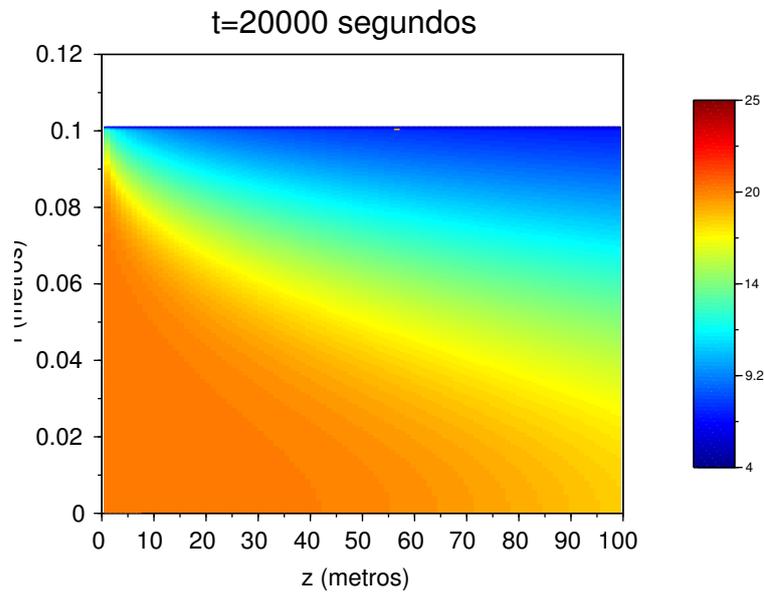


Figura E.24: Mapa de temperaturas en °C con  $t=20000$  s y  $u_{avg}=0.01$  m/s

### E.3. Efecto del cambio de fluido

Para este caso se muestran las gráficas hasta los 10000 segundos cada 2500 segundos.

### E.3.1. Agua

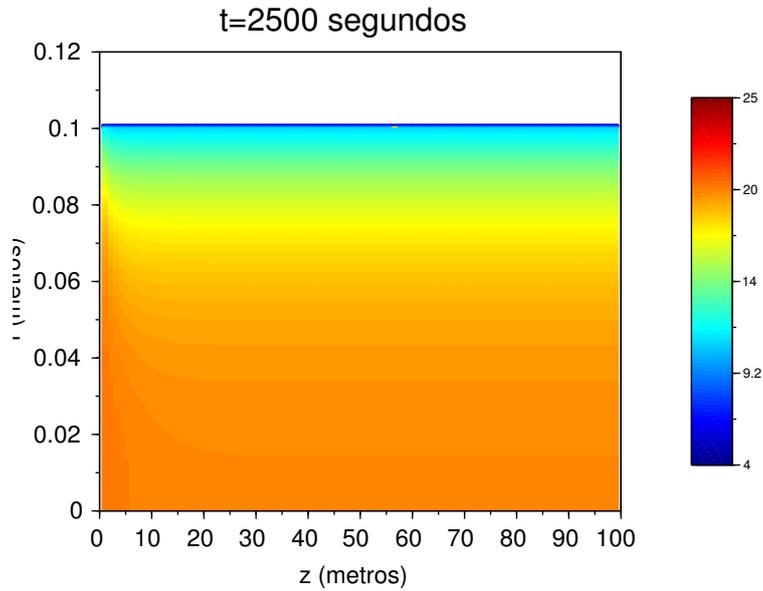


Figura E.25: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  para agua con  $t=2500$  s

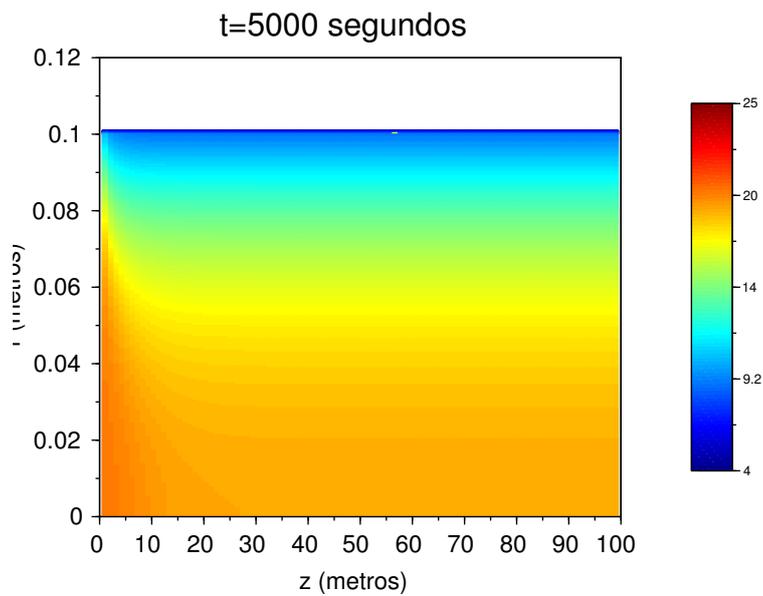


Figura E.26: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  para agua con  $t=5000$  s

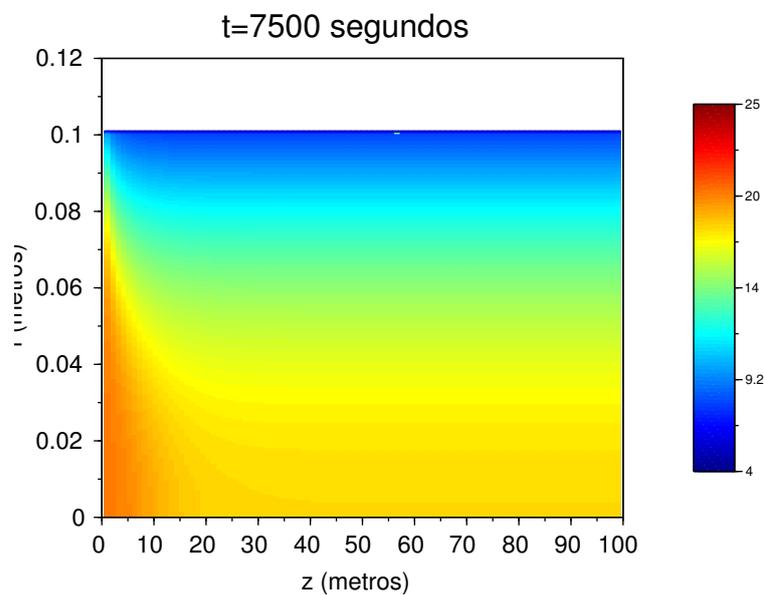


Figura E.27: Mapa de temperaturas en °C para agua con t=7500 s

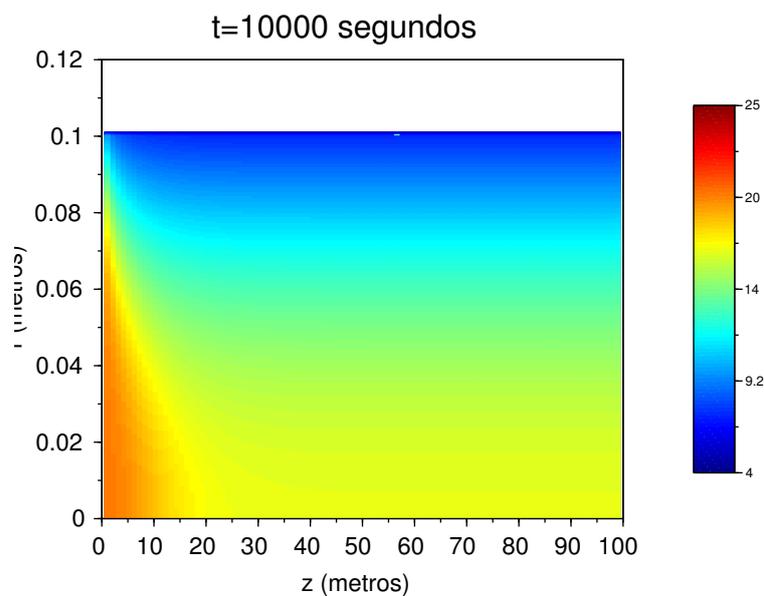


Figura E.28: Mapa de temperaturas en °C para agua con t=10000 s

### E.3.2. Alcohol amílico

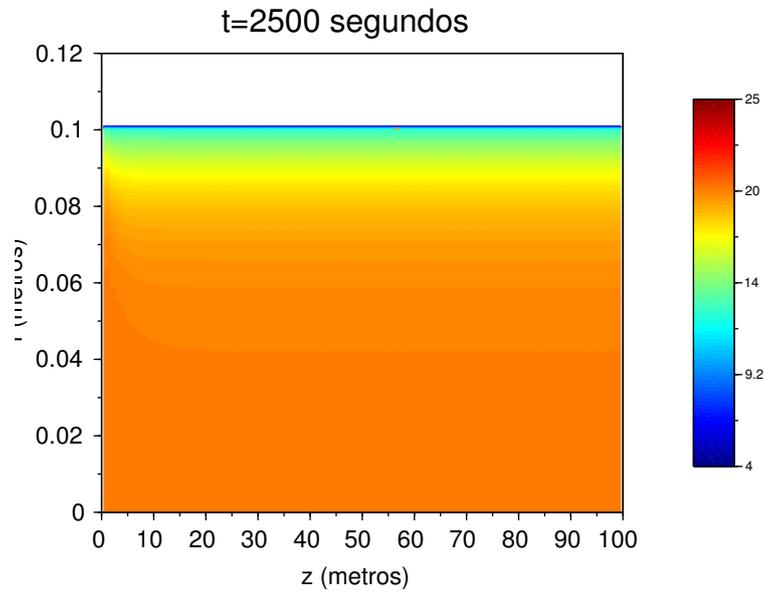


Figura E.29: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  para alcohol amílico con  $t=2500$  s

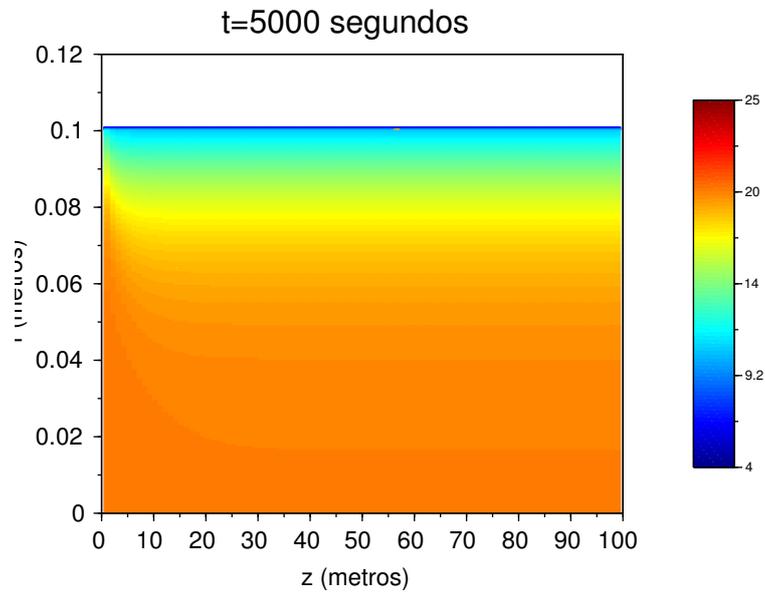


Figura E.30: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  para alcohol amílico con  $t=5000$  s

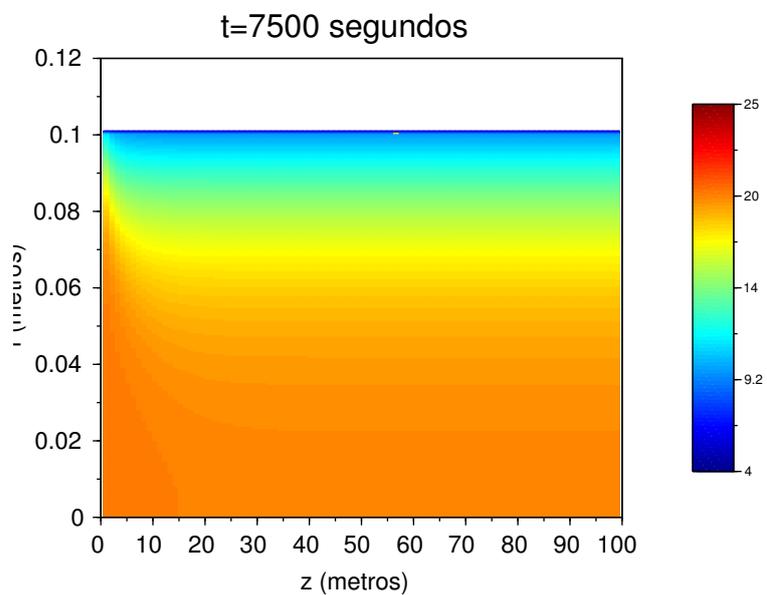


Figura E.31: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  para alcohol amílico con  $t=7500$  s

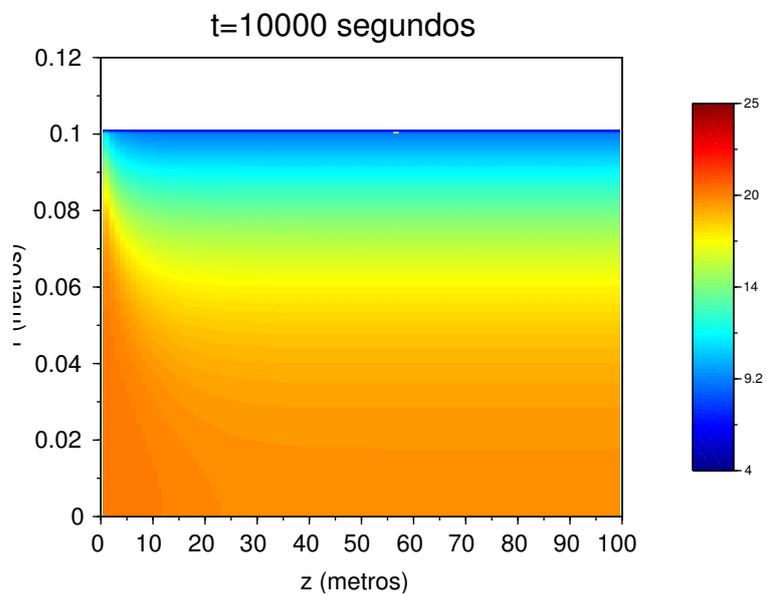


Figura E.32: Mapa de temperaturas en  $^{\circ}\text{C}$  para alcohol amílico con  $t=10000$  s

# Bibliografía

- [Arendt, W. et al. 2003] Arendt, W, Warma, M. “*Dirichlet ans Neumann boundary conditions: What is in between?*.” J.evol.equ. 3 (2003) 119 – 135 1424–3199/03/010119 – 17, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [Boivin, S. et al. 1999] Boivin, S., Cayré, F., Hérard, J.M. (1999) “*A finite volume method to solve the Navier–Stokes equations for incompressible flows on unstructured meshes.*” Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.
- [Courant, R. et al. 1928] Courant ,R., Friedrichs K.O., Lewy H. “*Über die partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik.*” Math. Ann. 1928;100:32–74.
- [Donat et al. 2000] Donat, R.M., Aràndiga, F. & Mulet, P. *Mètodes numérics per a l'àlgebra lineal.*” ISBN: 84-370-4390-5, Universitat de València, 2000.
- [Doubova, A. et al. 2007] Doubova, A. & Guillén, F. “*Un curso de cálculo numérico: Interpolación, Aproximación, Integración y Resolución de Ecuaciones Diferenciales.*” ISBN: 978-84-472-0941-5. Imprenta Kadmos, Sevlia, España.
- [Dulhoste, J.F. 1991] Dulhoste, J.F. “*Mecánica de fluidos: Flujos internos.*” [http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean/index\\_archivos/Documentos/MF6\\_Flujos\\_internos.pdf](http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean/index_archivos/Documentos/MF6_Flujos_internos.pdf) Recuperado 10 de Julio de 2018.
- [Gurtin et al. 2009] Gurtin, M.E, Fried, E & Anand, L. “*The mechanics and thermodynamics of continua.*” Cambridge University Press.
- [Harlow et al. 1965] Harlow, F.H, Welch, J.E. “*Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow fluid with a free surface.*” Phys Fluids 1965;8:2182-9.

- [Kessler, M. 2016] Kessler, M. “*Dinámica de fluidos computacional: ¿Qué es?*.” <https://www.esss.co/blog/es/dinamica-de-fluidos-computacional-que-es/> Recuperado 2 de Agosto de 2018.
- [MacCormack et al. 1972] MacCormack R.W & Paullay A.J. “*Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators.*” AIAA paper 72-154, San Diego, CA.
- [Mazumder, S. 2015] Mazumder, S. “*Numerical methods for partial differential equations: finite difference and finite volume methods.*” Academic Press (Elsevier), Columbus, Ohio.
- [McDonald, P.W. 1971] McDonald, P.W. “*The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades.*” ASME paper 71-GT-89.
- [Ortega, N. 2016] Ortega, N. <http://numerodereynoldsortega.blogspot.com/2016/07/numero-de-reynolds-flujo-laminar-y.html> Recuperado 2 de Octubre de 2018.
- [Osses, J. 2016] Osses, J. “*El método de volúmenes finitos.*” <https://www.esss.co/blog/es/el-metodo-de-volumenes-finitos/> Recuperado 18 de Julio de 2018.
- [Patankar S.V. 1980] Patankar, S.V. “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.*” ISBN 9780891165224. CRC Press.
- [Rizzi et al. 1973] Rizzi, A.W & Inouye, M. “*Time-Split Finite-Volume Method for Three-Dimensional Blunt-Body Flow.*” AIAA Journal, Vol. 11, No. 11 (1973), pp. 1478-1485.
- [Ruiz, M.M. 2018] <https://www.unirioja.es/cu/manuruiz/simulacion%20que%20es%20cfd.shtml> Recuperado 24 de Septiembre de 2018.
- [Socolofsky et al. 2005] Socolofsky, S.A. & Jirka, G.H. “*Special Topics in Mixing and Transport Processes in the Environment.*” Texas A & M University, M.S. 3136, College Station, TX 77843-3136.
- [Van Slingerland, P. 2007] Van Slingerland, P. “*An accurate and robust finite volume method for the advection diffusion equation.*” Academic Press.
- [Vázquez, M.Elena 2008] Vázquez Céndon, M.Elena. “*Introducción al método de volúmenes finitos.*” Servicio de Publicaciones e Intercambi Científico (Manuais Universitarios; 10), España.

### E.3. Creación de las gráficas cada $q$ instantes de tiempo

---

[Versteeg et al. 1995] Versteeg, H.K. & Malalasekera, W. “*An introduction to computational fluid dynamics: The Finite Volume Method.*” ISBN: 0-582-21884-5. Longman Scientific & Technical, England.