



Máster universitario en Matemática Computacional

TFM: Aspectos matemáticos de la radio definida
por *software*.

Autor : José Ismael Sánchez Ordiñana.

Director: Jorge Galindo Pastor.

Agradecimientos.

En primer lugar, deseo agradecer a Jorge las diversas ideas y orientaciones tanto a la hora de abstraer conceptos para dar una visión matemática, como a la hora de jerarquizar su contenido.

También deseo dar las gracias a mi padre por haberme introducido en el mundo de la radioafición, así como a los operadores de estaciones que me han hecho ser conocedor de la existencia de la tecnología SDR, en particular a Francisco Ángel.

Finalmente, quisiera agradecer a mi mujer, Salomé; a mis hijos, Noa y Saül; y a mis padres, José y Remedios por todo el tiempo y ánimos que me han concedido, sin los que este trabajo me hubiese sido inviable.

José Ismael.

Índice general

Capítulo 0. Introducción a la radio.	7
0.1. Radio convencional.	7
0.2. Definiciones formales y consecuencias.	9
0.2.1. Radiotransceptores convencionales.	10
0.3. SDR. Radiotransceptores definidos por <i>software</i> .	14
0.3.1. Elementos y definición formal.	14
0.3.2. Visión detallada de las partes de un receptor SDR	15
0.3.2.1. <i>Fuente de datos</i> .	15
0.3.2.2. <i>Proceso de datos</i> .	16
0.3.2.3. <i>Interfaz de usuario</i> .	17
Capítulo 1. Elementos matemáticos.	19
1.1. Espacios de funciones oscilantes.	19
1.1.1. Funciones casi periódicas.	20
1.1.2. Propiedades de funciones casi periódicas.	21
1.1.3. Visión de las funciones periódicas continuas como funciones casi periódicas.	23
1.2. La transformada de Fourier en funciones casi periódicas.	26
1.3. Convergencia de la serie de Fourier y transformada de Fourier.	30
1.4. La fórmula de convolución.	31
1.4.1. Transformada del producto de dos funciones de $\mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$	31
1.4.2. La transformada de la convolución en $\mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$.	33
Capítulo 2. Filtros.	35
2.1. Nociones básicas.	35
2.2. Filtros físicos.	38
2.2.1. Filtro PASO BAJO.	39
2.2.2. Filtros paso alto.	41
2.2.3. Filtros pasa banda.	42
2.2.4. Filtros RCL	43
2.3. Otros filtros.	46
2.3.1. Filtros integrales.	46
2.3.2. Filtros diferenciales.	46
Capítulo 3. Modulación clásica.	47
3.1. Modulación: elementos básicos.	47
3.2. Señales moduladas en amplitud.	51
3.2.1. MODULACIÓN AM	51
3.2.2. ASPECTOS DE LA SEÑAL X_m .	53
3.3. Demodulación de la onda portadora.	55

3.3.1. Método con portadora compleja.	55
3.3.2. Demodulación de AMa.	57
3.4. Modulaciones angulares.	60
3.4.1. Modulación.	61
3.4.2. Aspectos de la señal en FM	62
3.4.3. Demodulación en FM de la onda portadora.	64
3.5. Modulaciones digitales.	65
Capítulo 4. Señales en cuadratura. Modulación y demodulación.	67
4.1. Elementos básicos.	67
4.1.1. Comportamiento en señales unitonales.	68
4.1.2. Comportamiento en señales casi periódicas reales.	69
4.2. Demodulación de señales I/Q.	70
4.2.1. Demodulación AM desde señales I/Q	70
4.2.2. Demodulación FM desde señales I/Q	71
Capítulo 5. Conversión entre señal digital y analógica (DAC y ADC). Consecuencias.	73
5.1. Muestreo e interpolación.	73
5.2. Operaciones con muestreo.	76
5.2.1. <i>Zero-padding</i> .	77
5.2.2. Interpolación.	77
5.3. Transformada discreta y muestreo pasa banda.	77
5.3.1. Uso de la transformada discreta.	78
5.3.2. Muestreo pasa banda.	78
5.4. Muestreo I/Q y demodulación discreta.	79
5.5. Filtrado digital.	80
5.5.1. Filtros recursivos (IIR)	81
5.5.2. Filtros no recursivos (FIR)	82
5.5.3. Filtros BIN	83
Capítulo 6. SDR: ejemplos prácticos de las etapas.	85
6.1. Muestreo.	85
6.1.1. Obtención física de los datos con RTLSDR	85
6.1.2. Obtención física de los datos con GNURadio.	85
6.1.3. Formato del archivo de salida.	86
6.2. Principios de la generación de <i>la waterfall</i> .	86
6.2.1. Ejemplo de paso al dominio en frecuencia de una onda.	86
6.2.2. Función fila de asociación de registro de colores. Potencia de señal.	87
6.2.3. Obtención de la WF a partir de señales I/Q	87
6.2.4. Componentes frecuenciales y cascada en GNURadio.	89
6.3. Demodulación.	91
6.4. Simulación completa con GNU-Radio.	93
6.4.1. Esquema demodulador AM en banda ciudadana.	93
6.4.2. Demodulador FM en banda de 2m y comercial.	94
6.5. Transcepción SDR.	96
Bibliografía	97

Introducción.

La finalidad de este trabajo es la descripción matemática de los procesos que intervienen en las comunicaciones por radio, dando un paralelismo entre la visión clásica analógica y la implementación de la misma por *software*. Para ello, dotaremos de contexto matemático tanto a la información a transmitir como al modo en que lo hace, justificando la coherencia matemática en las sucesivas etapas que forman este tipo de comunicación.

Focalizaremos la base matemática en el contexto de las funciones casi periódicas, ya que se ajustan al tipo de señales oscilantes con espectros discretos que suelen utilizarse en la radio, definiendo los operadores involucrados en la emisión y recepción del mensaje y haciendo referencia a las ideas que subyacen en la radiocomunicación.

La visión computacional de este proceso se enmarca en una implementación de estas descripciones mediante *software* que consiga recrear las distintas etapas que forman parte de un proceso de comunicación por radio.

Palabras clave.

- Radio definida por *software* (SDR).
- Funciones casi periódicas.
- Teoría de la señal.
- Señales I/Q.
- Modulación y demodulación de señales.
- Muestreo.
- Filtros.

Capítulo 0. Introducción a la radio.

En esta introducción, se fijará un marco con las ideas y aspectos técnicos de la radio sobre los que en los posteriores capítulos se dotará de base matemática y justificación de sus distintas posibles implementaciones.

0.1. Radio convencional.

Al igual que en otros seres vivos, la comunicación auditiva forma parte intrínseca del ser humano en el sentido en que dispone de órganos corporales destinados a tal fin, tanto para transmitir como para recibir información usando la atmósfera como canal de transmisión, alterándola localmente mediante ondas¹ que propagan diferencias de presión y que contienen el mensaje entre el emisor y el receptor, cuya frecuencia² oscila entre 20Hz y 20.000Hz en el caso humano.



Existen otras formas de transmitir este tipo de información entre las que se encuentra la *radiofónica*, en la que en lugar de transmitir una onda de presión usando la atmósfera como medio, se usa una onda electromagnética que se propaga incluso en el vacío llevando consigo el mensaje.

Las ondas electromagnéticas poseen diferentes propiedades respecto a las sonoras, entre las que se incluye el hecho de poder trabajar con ondas de alta frecuencia (i.e. por encima de las audibles del caso acústico) y una mayor capacidad de propagación que las ondas sonoras. Su componente eléctrica, les confiere el poder ser tratadas y propagadas mediante hilo conductor, y su carácter dual electromagnético les aporta la propiedad de ser susceptibles de propagarse por el espacio mediante su *irradiación* a través de un elemento llamado *antena* a un cierto nivel de energía, el cual va disminuyendo según se propaga. El modelo más simple de antena es el dipolo, formado por una doble varilla cuya longitud equivaldría (para optimizar la emisión) a la de $\frac{\lambda}{2}$, donde λ es la longitud de onda emitida definida como el cociente entre la velocidad de propagación de la onda³ y su frecuencia ν . Formalmente, el proceso de recepción sería simétrico en el sentido que requeriríamos de una antena para captar las ondas electromagnéticas previamente emitidas, y de algunos módulos o etapas más que consiguiesen reconstruir el pulso recibido al medio acústico. El problema de la emisión y recepción de este tipo de ondas, es que si queremos enviar un mensaje de voz⁴ en su propio rango de frecuencias (llamado banda base) la longitud de la antena sería de unos $50Km$, lo que prácticamente imposibilitaría su implementación real.

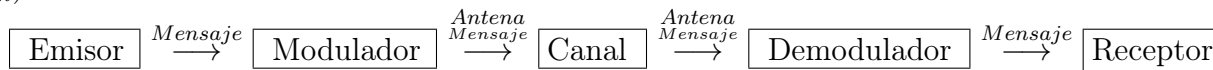
¹Perturbación de alguna propiedad del canal a un cierto nivel de energía mediante oscilaciones que se propagan.

²Número de oscilaciones por segundo en un momento determinado, esta magnitud se llama Hercio (*Hz*).

³La velocidad de una onda electromagnética en el vacío es aproximadamente de $3 \times 10^8 m/s$.

⁴Los mensajes de fonía humana oscilan entre los 300Hz hasta 5.000Hz, dentro del rango audible.

Por tanto, dado que para establecer una comunicación con una onda electromagnética en el rango de frecuencias audible, se requeriría de un dipolo de tamaño kilométrico, se utilizará una estrategia con el objetivo inicial de simplificar los elementos de transmisión que involucrará el uso del concepto de *onda portadora*, de forma que, para transmitir audio, lo que en realidad se hace es generar una onda de alta frecuencia llamada portadora (x_p) y conjugarla de algún modo con la onda de baja frecuencia audible que contiene el sonido (en el caso de fonía), o la onda con el mensaje si la comunicación tiene otro tipo de datos a emitir, y que llamaremos onda *moduladora* (x_m).



Se buscará en todo caso que la onda resultante (X_m) llamada *onda modulada*, cumpla que:

- sea emitible en alta frecuencia, es decir, que la antena o dipolo sea de factible creación y uso.
- incluya la información a transmitir (onda moduladora).
- sea susceptible de ser captada y dissociada para la obtención de la onda de información desde la onda modulada para poder obtener el mensaje.

Ceñiremos por tanto la definición estricta de “radio” al contexto propuesto en el que para transmitir el mensaje se requiera del uso del concepto de onda portadora, cuya frecuencia esté comprendida en un rango aceptable en el sentido de la viabilidad de construcción de la antena.

Llamamos *espectro radioeléctrico* a todo el intervalo de frecuencias en el que una emisión de radio es posible y que se divide en subintervalos disjuntos llamados *bandas*, de modo que dependiendo del rango en el que se sitúe una hipotética transmisión mediante su onda portadora, podrá indicarse en qué banda se produce. El concepto de banda es relevante debido a que es un factor a tener en cuenta a la hora de gestionar el uso del espacio radioeléctrico acorde a las necesidades de cada tipo de transmisión, ya que pese a que las ondas de radio no requieren de atmósfera en su canal de transmisión, sí es cierto que la frecuencia es uno de los factores que influye en la forma en la que se propagan las ondas por el medio en el cual las comunicaciones se realizan dentro del planeta, viéndose afectados parámetros de la transmisión como la capacidad de propagar la onda en relación con la potencia de emisión, o la aparición de fenómenos ondulatorios (rebote, interferencia, dispersión, etc.) que dependen explícitamente de la banda entre otras condiciones del canal en el momento de la transmisión. La subdivisión en bandas tradicional es:

Número	Nombre de banda	Rango en frecuencia	Propiedades
<4	VLF (y menor)	<30KHz	Antenas largas, medio marítimo
5,6	LF,MF	[30KHz,300KHz]-[300KHz,3MHz]	Antenas miriamétricas
7	HF	[3MHz,30MHz]	Antenas del orden de 80m
8	VHF	[30MHz,300MHz]	Antenas métricas (11m-1.5m)
9	UHF	[300MHz,3GHz]	Antenas reducidas 90cm-3cm
>9	SHF,EHF	>3GHz	Antenas muy reducidas

Existe una normativa llamada "plan de bandas" que asigna a cada rango de frecuencias un uso⁵ determinado y al que haremos referencia posteriormente con la siguiente simplificación:

USO: <-..AMBroad[.] CB..FMBroad..B.Aérea..Satélites..Radioafición Servicios [...] Radioafición/QRP-PMR-Servicios.TDT..4G..ADSB->
 Frec(Mhz):0.53-1.6.....27...88.5-108..108-137.137.140...144-146.....146-174.....430..440.....446...446-479...480...800-820...1090
 Banda:..HF.....VHF.....UHF.....

⁵CB (banda ciudadana), AM/FMBroad (estaciones de radio comercial), B.Aérea (utilizado para comunicaciones con aviones en AM), Satélites (enlace satelital, meteorológicos, etc.), TDT (estaciones de vídeo comercial), Servicios (frecuencias comerciales y estatales), Radioafición (frecuencias asignadas a radioaficionados), QRP (emisores domésticos de baja potencia, mandos, etc.), 4G (frecuencias de telefonía móvil), ADSB (radiobalizas de aeronaves).

0.2. Definiciones formales y consecuencias.

Definimos el concepto de *señal* como una función compleja $x : I \rightarrow \mathbb{C}$, de modo que el dominio generalmente estará asociado al tiempo, y que tiene por objetivo describir una gran variedad de fenómenos físicos. Además, si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, diremos que la señal es continua y haremos referencia a ella mediante $x(t)$, y en el caso que el dominio sea un conjunto de elementos consecutivos de \mathbb{Z} , representaremos la señal por $x[n]$, y diremos que es discreta. Llamaremos además, S al conjunto de todas las señales.

Notemos que entre los fenómenos físicos a los que puede asociarse una señal, están las oscilaciones de presión o electromagnéticas que pueden matematizarse bajo el modelo de un oscilador armónico, de modo que si consideramos un movimiento rectilíneo de un punto al que le asociamos una propiedad m^6 , y que es atraído por otro punto fijo con una fuerza proporcional a la distancia a ese punto de atracción, tenemos que por la segunda ley de Newton de la dinámica ($f = m \cdot a$) podemos plantear la ecuación diferencial $m\ddot{x}(t) = -k \cdot x(t)$, de la cual obtenemos $\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$. Así, que haciendo $\omega^2 = -\frac{k}{m}$ nos queda la siguiente ecuación diferencial de segundo orden homogénea de coeficientes constantes: $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$, cuya solución general es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Dado que $\frac{dx}{dt}(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$, y derivando nuevamente obtenemos $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -c_1 \omega^2 \cos \omega t - c_2 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x(t)$, por lo que la solución propuesta es válida.

Considerando $c_1 = A \cos \alpha$; $c_2 = -A \sin \alpha$, la solución general se puede expresar como

$$x(t) = A \cos \alpha \cos \omega t - A \sin \alpha \sin \omega t = A(\cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Veamos ahora cómo obtener el valor de las constantes:

- El valor de A , se obtiene elevando al cuadrado las expresiones anteriores de c_1 y c_2 , obteniendo

$$c_1^2 = A^2 \cos^2 \alpha, \quad c_2^2 = (-A)^2 \sin^2 \alpha = A^2 \sin^2 \alpha,$$

y sumando las dos expresiones y despejando, obtenemos $A = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$.

- El valor de α , lo obtenemos dividiendo las expresiones de c_1 y c_2 de la siguiente manera:

$$\frac{c_2}{c_1} = -\frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

Tenemos aquí dos casos: $c_1 \neq 0$, entonces $\alpha = -\arctan \frac{c_2}{c_1}$; si $c_1 = 0$, tenemos $\alpha =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\pi}{2} & \text{si } c_2 > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } c_2 < 0 \end{array} \right\}, \text{ dependiendo además del signo de } \cos \alpha, \text{ pues } A > 0.$$

En lo sucesivo, llamaremos *señal sinusoidal* a aquella que puede escribirse matemáticamente como

$$x(t) = A \cos(2\pi\nu + \phi)$$

donde A, ν, ϕ , se llaman parámetros de la señal sinusoidal, y respectivamente A se llama *amplitud* y determina el valor máximo de la señal, ν se llama *frecuencia* e indica el número de oscilaciones

⁶Si la propiedad es la variación de presión, haremos referencia a ondas sonoras propagadas en la atmósfera; y si la propiedad hace referencia a la variación del campo electromagnético, estaremos hablando de las ondas de radio.

por segundo que se producen, y ϕ altera el ángulo de inicio y se llama *fase*.

El concepto físico de onda (transmitida o recibida) va ligado al de señal en tanto que esta última es la expresión matemática (función) que modeliza tanto la onda modulada, como la moduladora y la portadora; pudiendo así heredar el sentido de las definiciones anteriores de forma que podemos hablar de *señal portadora* (que será siempre de tipo sinusoidal), *señal moduladora* y *señal modulada*. Formalmente el proceso de modulación implicará la variación de alguno de los tres parámetros asociados a la señal portadora en cada momento del tiempo y en función del valor de la señal moduladora en ese mismo tiempo. Además, dependiendo de qué parámetro se varíe para generar la onda modulada, estaremos hablando de una transmisión con modulación en amplitud (AM), con modulación de frecuencia (FM), o con modulación de fase (PM).

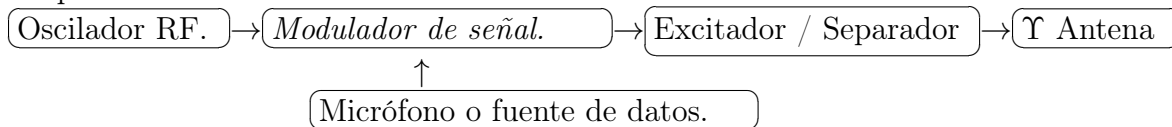
Como el propio proceso de modulación implica variaciones en las propiedades de la señal modulada, para una determinada transmisión cuya onda portadora está fijada en una frecuencia ν_p , se tiene que en realidad dicha transmisión no implica un uso puntual del espacio radioeléctrico, sino de un entorno centrado en esa frecuencia de radio ϵ (comparativamente pequeño) que determinará el intervalo real del uso del espacio radioeléctrico de dicha transmisión. Esta idea nos lleva al concepto de *ancho de banda*, que indica el intervalo en frecuencia donde se concentra la mayor parte de la señal transmitida. Estas definiciones conllevan las siguientes consecuencias:

1. - Bajo ciertas condiciones en su potencia, dos o más emisiones independientes a la vez que usen parte del mismo intervalo del espacio radioeléctrico, se entremezclarían causando dificultades o imposibilidad de recepción de la transmisión de interés debida justamente a esas otras señales, esto es lo que se conoce como *interferencia* y que en la práctica conduce a gestionar las distintas asignaciones del uso de las bandas del espacio radioeléctrico en finos rangos de frecuencia, es decir, a canalizar su uso. Es más, dentro del propio contexto de recepción se requerirá de dos conceptos llamados *sintonía*, que formalmente significará que la señal demodulada toma la información contenida sólo dentro del intervalo del espacio radioeléctrico en el que se sitúa la señal de interés en recepción⁷; y de *filtrado*, que serán los procesos necesarios para eliminar las frecuencias no deseadas que durante las etapas del proceso de recepción puedan generar, directa o indirectamente interferencias.
2. - Dependiendo del uso asociado a una transmisión y banda en la que se produzca, convendrá usar un sistema u otro de modulación, lo que justifica el tratamiento de los diversos tipos realizado en el capítulo 3.

0.2.1. Radiotransceptores convencionales. Describiremos la funcionalidad de las etapas en el tratamiento de la señal de las que constan los emisores y receptores electrónicos tradicionales:

- **Emisión.** El circuito emisor es el encargado de generar y tratar convenientemente la señal portadora para incluir en ella la señal moduladora e irradiarla en forma de onda electromagnética:

Etapas básicas de un emisor⁸:



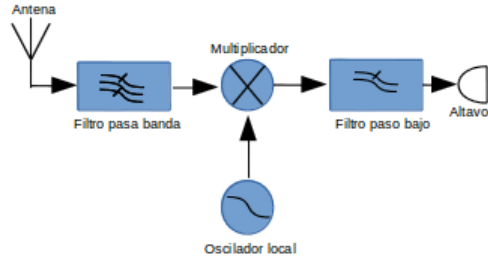
⁷En otras palabras: de todo el espacio radioeléctrico se seleccionará solamente un intervalo de tamaño coincidente con el ancho de banda de la transmisión con centro ν_p (la frecuencia de la portadora de interés).

⁸RF: Radiofrecuencia, EM: Electromagnético.

El objetivo de cada una de las etapas viene marcado por una parte, por la creación de la señal portadora x_p mediante el oscilador RF, y por otra parte, por la obtención de x_m mediante un micrófono para volcar ambas señales al modulador (ya sea en amplitud o frecuencia) obteniendo así X_m . Finalmente, se procederá a la etapa de irradiación electromagnética tras amplificar suficientemente la señal con la etapa excitadora, para conseguir la emisión en sí mediante la antena.

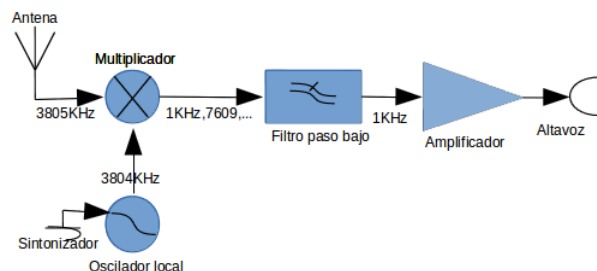
- **Recepción.** Por lo que respecta al receptor, estará formado también por una sucesión de etapas en donde la primera será la obtención de la señal modulada de interés para someterla a un proceso de *detección*, es decir, de extracción de la señal que contiene la información en su banda base. Aunque este proceso aparenta ser inverso a la emisión, posee ciertos aspectos que lo dotan de diferencias sustanciales como el hecho de que así como en la emisión ideal se emite únicamente la señal modulada, en recepción se recoge todo el rango que acepte la antena, actuando esta como un primer filtro de todas las portadoras que contenga el espacio radioeléctrico y que tendrá que afinarse más con filtros en posteriores etapas con el objetivo de obtener únicamente la portadora de interés de sintonía. Atendiendo a esta particularidad y al tipo de modulación usado, existen diversos tipos de esquemas de bloques básicos de receptores:

- Receptor de *conversión directa*, en el que convenientemente filtrada ya la señal entrante (ya se dispone de X_m), se genera una onda en el oscilador local a casi la misma frecuencia que la portadora, que al mezclarse con ella, la traslada a la zona audible, de modo que tratando convenientemente la señal obtenida queda solamente la señal moduladora. Este es a grandes rasgos el tipo de receptor más parecido al proceso inverso de emisión.

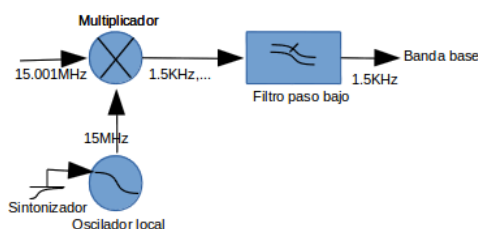


En la práctica, la onda es recogida por la antena en forma de señal eléctrica X_m , que es mezclada con otra señal x_s generada con un oscilador y que llamaremos señal de sintonía, de modo que al hacer la diferencia de frecuencias entre la señal modulada y la de sintonía rebajamos la frecuencia de la señal recibida al espectro audible. Tras esto, se eliminan las frecuencias no deseadas con un proceso llamado *filtrado* (que se describirá en el segundo capítulo) y se prepara la señal para generar una onda sonora audible. Conviene que el oscilador tenga un rango determinado, de forma que el receptor pueda recibir portadoras moduladas en diferentes frecuencias cercanas (un problema de estos sistemas de recepción clásicos son la necesidad de mucha circuitería y variaciones en el cálculo de la misma) para la recepción o emisión en diferentes áreas del espectro radioeléctrico, o cambios en el modo de modulación.

EJEMPLO 0.1. Veamos un ejemplo de un esquema que ilustra cómo se produce la recepción completa mediante un sistema de recepción directa de una señal emitida en 3.805KHz con un oscilador local cuya frecuencia de oscilación es controlable por voltaje y que está fijado en 3.804KHz.



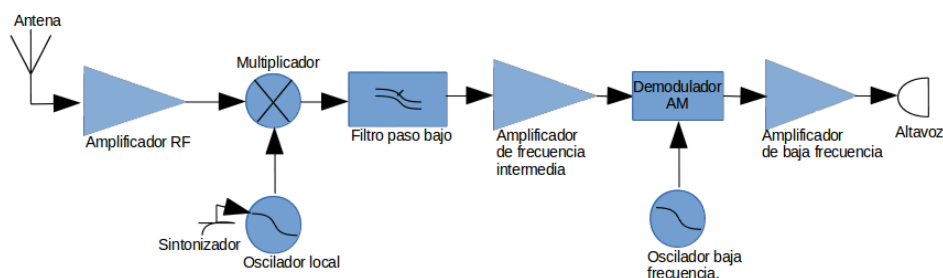
EJEMPLO 0.2. Ejemplo de una portadora ya filtrada de 15.001Mhz mezclada con una señal generada con el oscilador local fijado a 15Mhz.



1. Por una parte la onda es recogida, y por otra se genera una señal sintonizadora cercana.
2. Se mezclan ambas señales obteniendo cuatro señales de frecuencias:
 - $\nu_p + \nu_{lo} = 15.001 \text{ MHz} + 15.000 \text{ MHz} = 30.001 \text{ MHz}$
 - $\nu_p - \nu_{lo} = 15.001 \text{ MHz} - 15.000 \text{ MHz} = 0.001 \text{ MHz}$
 - $-\nu_p + \nu_{lo} = -15.001 \text{ MHz} + 15.000 \text{ MHz} = -0.001 \text{ MHz}$
 - $-\nu_p - \nu_{lo} = -15.001 \text{ MHz} - 15.000 \text{ MHz} = -30.001 \text{ MHz}$
3. Al filtrarse todas las señales de frecuencia mayor a 1.5KHz, hemos conseguido trasladar la señal recibida al espectro audible.

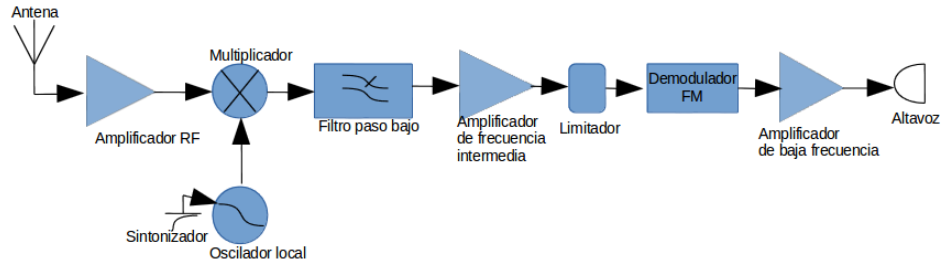
- Receptor *superheterodino*, en el que la señal sintonizada de interés se desplaza a una frecuencia constante llamada *frecuencia intermedia* donde es tratada, con lo que se reduce la cantidad de ajustes necesarios en la circuitería a la hora de sintonizar otras frecuencias dentro de la banda de recepción. La sintonía se realiza mediante el ajuste de la frecuencia del oscilador local. Las herramientas matemáticas que justifican el desplazamiento de frecuencia se desarrollarán en el capítulo 1.

Un receptor superheterodino con detección en AM (simple) tendría el siguiente esquema básico:



Tiene la ventaja de que la mayor parte del recorrido de la señal se hace en un mismo y estrecho margen de frecuencias, de modo que solamente la parte comprendida entre la antena y el mezclador ha de ser sensible al ancho de banda al que es receptivo. Este sistema posee además la capacidad de evitar acoplamientos provenientes tanto de otras zonas del espacio radioeléctrico como de los propios cables y circuitería del receptor.

Una desventaja de este sistema, es que al igual que pasaba con los receptores de conversión directa, para diferentes tipos de modulación, se requiere de diferencias en el demodulador al igual que en parte de su circuitería, de modo que, un receptor superheterodino con detección en FM adoptaría la forma siguiente:



No obstante, y de cara a posteriores reflexiones, estos receptores se dividen en tres partes bien diferenciadas: recogida de la onda y tratamiento de la señal con obtención de la señal modulada, demodulación de la misma, y registro o emisión acústica. Tanto las diversas formas en las que se puede modular la señal portadora como las diferentes estrategias de demodulación, así como su justificación, serán tratadas en el capítulo 3.

- Transceptores.

Llamamos transceptor a la implementación de un receptor y de un emisor en un mismo aparato. Técnicamente presenta ciertas ventajas, como el hecho de que ciertas partes de la circuitería pueden ser comunes. Respecto al diseño electrónico de cada etapa cabe resaltar que dependiendo del tipo de modulación y zona del espacio radioeléctrico usado, requerirá de un tratamiento específico de la señal tanto para la emisión de la onda modulada como de su recepción. De hecho, la construcción de radiotransceptores clásicos están sujetos por diseño a una serie de inconvenientes, entre los que se incluyen:

- la posibilidad de aparición de interferencias debido a que los procesos en todas las etapas son procesos físicos sobre la onda, es decir, lo que se está procesando es una corriente que contiene la señal y no la señal en sí, y pese a que los receptores superheterodinos minimizan el impacto sobre la señal resultante, lo cierto es que también son susceptibles de sufrir interferencias.
- el hecho de que resulte necesaria una circuitería específica altamente especializada que abarque todas las etapas de las que consta la radio para distintas bandas y métodos de modulación, ampliaría tanto el volumen como la complejidad del transceptor, de modo que lo haría prácticamente imposible de fabricar.

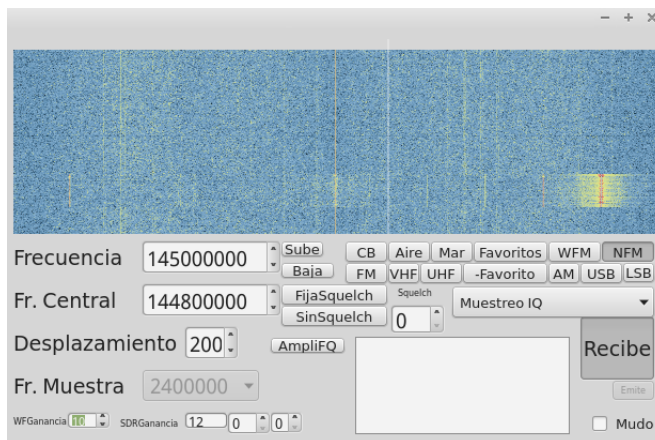
0.3. SDR. Radiotransceptores definidos por *software*.

0.3.1. Elementos y definición formal. Llamamos SDR a un conjunto de tres elementos que interactúan entre sí para implementar mediante *software*, en la mayor parte posible, las distintas etapas de una radio convencional. En la definición preliminar, simplificaremos el concepto de SDR a una terna formada por:

- un elemento físico de obtención de una amplia zona del espacio radioeléctrico o emisión de la señal de radio.
- un programa de ordenador que emula las diferentes etapas del tratamiento de la señal que se da en la circuitería de radio : filtrado, sintonía, demodulación y reproducción.
- una parte de emulación de lo que serían los distintos elementos físicos de control de la circuitería emulada, cuyo manejo puede realizarse mediante comandos o elementos gráficos para la selección de la frecuencia de la sintonía, el ancho de banda de la señal a demodular, volumen, etc.

Estrictamente hablando, el concepto de receptor SDR únicamente cabría aplicarlo al programa que implementa los cálculos de acuerdo a los parámetros para los cuales se haya calibrado con el objetivo de modular o demodular una señal. No obstante, en el contexto de recepción SDR se suelen utilizar tanto por la información que ofrece, como por la facilidad que proporciona al operador los siguientes elementos:

- *Waterfall* (WF o cascada): es una representación visual que usa un segmento horizontal que describe un intervalo de frecuencia del espacio radioeléctrico. De modo que, mediante variaciones en el color de los puntos, se indica la energía presente en su frecuencia asociada. Se generan sucesivas nuevas líneas que contienen la evolución temporal de dicha energía presente en las distintas frecuencias del espacio radioeléctrico visualizado, presentándose en un gráfico con desplazamiento vertical y facilitando así la detección de las portadoras presentes en cada frecuencia.
- Línea de sintonía (dial): es una línea vertical sobre la cascada (WF), que marca la frecuencia sobre los que están sintonizados los distintos elementos de la radio emulada, así como su ancho de banda.
- Botones y elementos de control del procesado de la señal (uso de filtros, selección de banda, tipo de demodulación).
- Elementos de ayuda de operación.



En el capítulo 4 y 5 se fundamentarán los algoritmos que implementan estos elementos descritos.

Es ahora cuando podemos poner en contraste la visión tradicional de un receptor de radio formado por los tres elementos descritos anteriormente con la radio definida por *software*. Como vemos, su diferencia estriba en que solamente la recogida de datos trata electrónicamente la señal, ya que las otras etapas de la radio vendrán suplidas por el tratamiento de los datos a nivel informático utilizando las herramientas matemáticas pertinentes en el contexto de SDR.

Esto supone una mejora sustancial, ya que permite subsanar los dos problemas de la radio tradicional mencionados anteriormente:

- excepto en casos determinados, únicamente se requiere de una circuitería mínima y común que recoge la onda electromagnética y la convierte en señal digital.
- sea cual sea el tipo de modulación, como el proceso de tratamiento de la señal está implementado por *software*, se elimina la posibilidad de que se altere durante su procesado.

0.3.2. Visión detallada de las partes de un receptor SDR. Seguidamente ampliaremos dentro del contexto de SDR los tres niveles que lo forman:

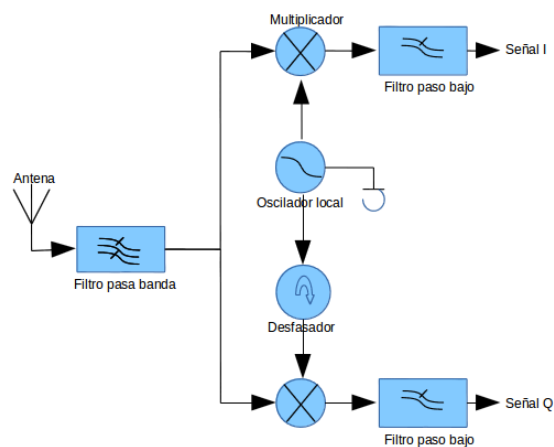
0.3.2.1. Fuente de datos. La primera etapa es la que se encarga de alimentar las siguientes, obteniendo el flujo de datos requerido a la velocidad que es necesaria para que el sistema de emulación en las demás etapas de radio no pase hambre.⁹ Este tipo de alimentación puede ser de diversos tipos:

- En tiempo real, que sería en primera instancia una circuitería del mismo tipo que en un receptor de radio tradicional, es decir, se obtiene la señal como una señal continua.

Aunque son implementables los sistemas de detección vistos anteriormente, en el contexto SDR suele utilizarse un tipo de detección de señal específico proveído por un paso intermedio llamado *generador de señales en cuadratura*.

Básicamente es una evolución de la idea de la detección directa en la que en lugar de una señal en banda base, se obtienen dos, que cumplen cierta propiedad llamada desfase.

Un receptor de señal en cuadratura consta de una etapa inicial física común de la que se obtendrán las señales desfasadas, llamadas respectivamente $I(t)$ y $Q(t)$.



⁹Se dice que un sistema simulado pasa hambre cuando el flujo de datos entrante es insuficiente para generar la cantidad de datos deseada a su salida.

Tras la detección, como en el resto de etapas (filtros, demoduladores, etc.) se procesará la señal; dichas etapas estarán implementadas por *software* con lo que por razones tecnológicas deberemos ceñirnos a un modelo de datos digital, y por tanto, se necesitará conocer tan solo los valores de la señal en ciertos instantes de tiempo, lo que en la práctica obligará a que el módulo de obtención de datos que recoge la onda solamente alimente al sistema con el valor de la señal recibida un cierto número de veces cada segundo. A este proceso lo llamaremos *muestreo digital de la señal recibida* (y lo trataremos en el capítulo quinto), y es en esencia el objetivo final de la etapa de obtención de datos: obtener o generar el flujo que alimentará las entradas de los procedimientos que simulan las otras etapas de radio. La información recibida en esta primera etapa puede transferirse al ordenador mediante un puerto que respete la velocidad a la que haya que alimentar el sistema (USB, MIC, etc.).¹⁰

- Muestra en archivo, donde la alimentación del flujo de radio se produce a base de ofrecer paquetes de datos ya obtenidos o registrados mediante un archivo físico o un flujo de datos a través de la red. Lo que en la práctica permite la separación física entre el módulo de recepción de la onda y la unidad de proceso de los datos. Ejemplos de esta forma de funcionar pueden ser:

- flujos en crudo de ondas recogidas enviadas en tiempo real mediante protocolos de transmisión de datos de red, permitiendo así la mencionada separación física de la unidad de recogida de datos con la de su proceso.
- datos en crudo (*RAW*) presentes en grandes archivos previamente almacenados en soporte digital, que permiten su posterior escucha (*diexismo*) o diversos tipos de análisis como decodificado (una vez conocido un hipotético sistema de encriptado o resuelto satisfactoriamente un criptoanálisis).

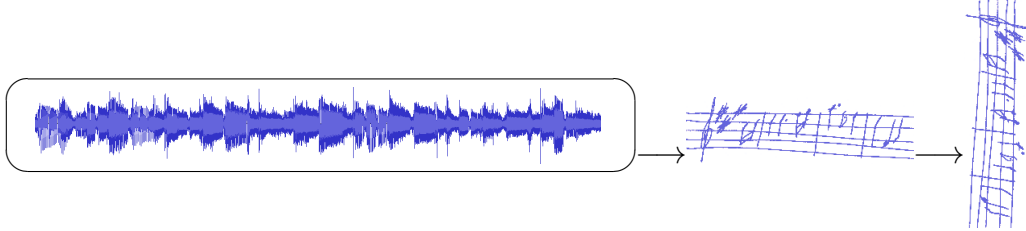
- Muestra creada aleatoriamente o mediante un generador de onda, de modo que los datos describen una señal de prueba con el objetivo de alimentar el sistema en una simulación. Esto es usado generalmente para pruebas de funcionamiento del propio *software* SDR.

0.3.2.2. Proceso de datos. Una vez recogidos y digitalizados los datos, en esta segunda etapa, se le aplican los algoritmos matemáticos con el objetivo de recrear la radio. Estos algoritmos deben por tanto ser capaces como mínimo de detectar la señal moduladora tratando convenientemente la discretización de la señal modulada recibida.

En el caso de la radio convencional, resulta usual la necesidad de determinar de qué frecuencias está compuesta la onda que se está recibiendo. Esto, matemáticamente implica que la muestra es recogida y enviada al procesador de señal en donde por ejemplo su valor como función que depende del tiempo, puede transformarse al dominio de frecuencia, demodularse, etc. Podemos equivalentemente ejemplificar lo descrito con una analogía musical, en el que de una pieza musical escuchada se transcribe a un pentagrama (por unidad de tiempo).

¹⁰Ejemplos de elementos de *hardware* de esta parte específica son: *doongles rtl_sdr*, *sdrplay*, *funcube*, ...

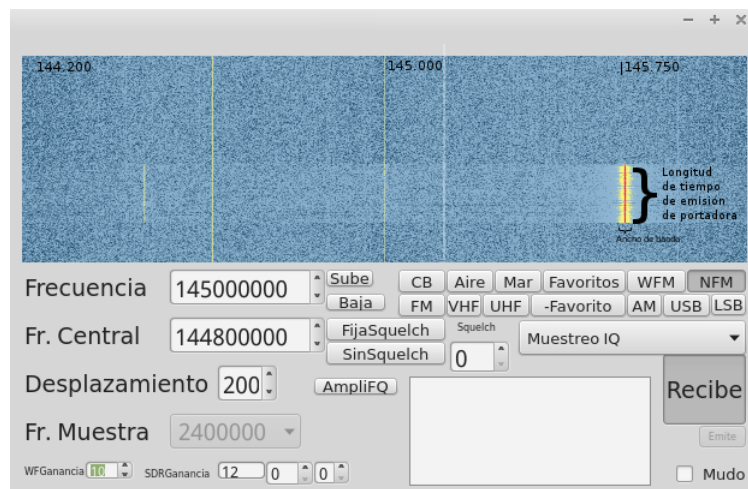
Así, mediante las herramientas matemáticas necesarias, estaremos en condiciones de que dada una onda sonora, poder averiguar instantáneamente de qué frecuencias está formada, de modo que repitiendo el proceso en el tiempo, obtendríamos las notas:



De éste modo, su transposición es un conjunto de frecuencias en el eje X y duración relativa expresada en el eje Y. La herramienta matemática que utilizaremos para este fin es la transformada de Fourier y será descrita rigurosamente en el siguiente capítulo.

0.3.2.3. Interfaz de usuario. El componente de adquisición de radiofrecuencias transforma las señales de alta frecuencia en un flujo de muestra, y aunque puede tener previamente otros componentes físicos electrónicos para mejorar la calidad de dichas muestras, es deseable que estos componentes estén implementados por *software* en la medida de lo posible. Asimismo, los parámetros asociados a la segunda etapa (frecuencia de demodulación, ancho de banda, modo de modulación, etc.) requieren también de un sistema de control y ajuste por parte del operador.

Estos parámetros son generalmente controlados por el usuario mediante una *interfaz de usuario*:

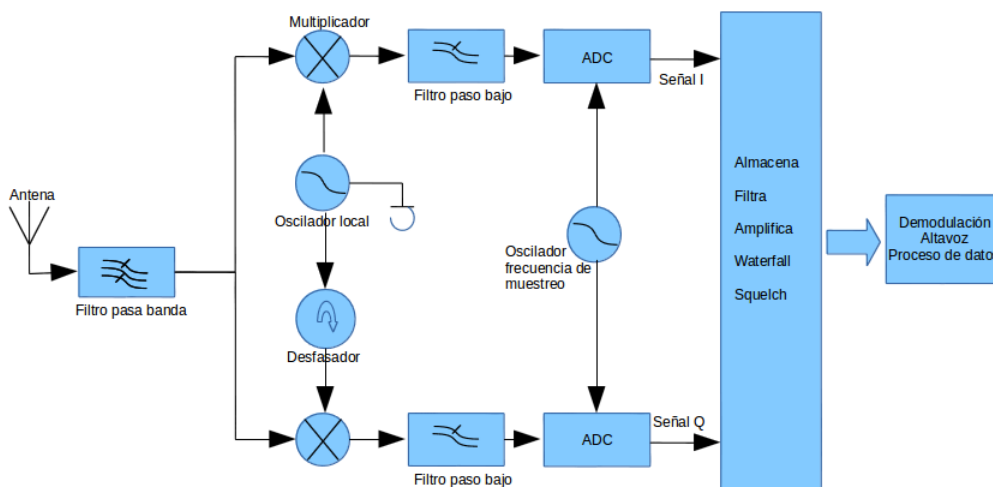


Esta interfaz generalmente suele constar de los siguientes elementos:

- Detección visual/manual de la portadora mediante la cascada o *waterfall* (WF). Es la zona azul de la gráfica donde se muestran visualmente las portadoras en el eje X y su evolución en el tiempo mediante un desplazamiento en el eje Y. Además, se percibe el ancho de banda y se advierte comparativamente su potencia en recepción. En otras palabras, es una evolución del antiguo dial de las radios convencionales en donde también se visualizan las distintas portadoras que existen en la ventana del espacio radioeléctrico representado.

- Ajuste de la sintonía, desplazando el dial virtual a la portadora vista en la cascada. Es la línea en la que se fija el ajuste al centro del rango de frecuencias que se utilizará para pasar a la etapa de detección. Si además se consigue implementar el intervalo de máxima potencia del ajuste de la sintonía, seremos capaces también de controlar el ancho de banda en recepción.
- Elección del método de demodulación. Son los botones para seleccionar el tipo de modulación/demodulación deseado (AM/FM, etc.).
- Calibración de diferentes ayudas en la operación de radio: *scquelch* (silencia el ruido blanco¹¹ si no se detecta portadora o un mínimo de *potencia de señal*).
- Elección de filtros que mejoren la calidad de la recepción.
- Control de ganancia (control automático de ganancia). Permite normalizar la amplitud de todo el espectro representado amplificándolo y tomando como máximo absoluto el valor máximo que esta presente en toda la ventana del espacio radioeléctrico.
- Redirección del flujo de audio hacia altavoces, o registro de datos.
- Control del cálculo interno de la parte SDR (la calidad de demodulación o de cálculo de la *waterfall*, el tamaño de la muestra, etc.).

Así pues, el esquema físico-logicl de un receptor SDR será del tipo:



Con todo, y justificada la mejora que ofrece este sistema de transección de radio frente al tradicional, el objetivo de este trabajo será el de presentar las herramientas matemáticas necesarias para formalizar los modos de modulación/demodulación clásicos y su evolución como etapas definidas por *software*, indicando los procesos matemáticos que la conforman, así como describir el uso de los mismos en aplicaciones prácticas (en el capítulo 6) de elementos como los anteriormente descritos en el contexto SDR: generación de la WF, demodulación, filtros, etc.

Referencias principales:
[L1, R1, 10, CC, ASM].

¹¹Es una señal aleatoria que no posee relación entre dos tiempos diferentes, y que contiene todas las frecuencias a la misma potencia.

Elementos matemáticos.

En este capítulo definiremos los conceptos y sus propiedades asociadas con el objetivo de introducir la base matemática que sustentará los argumentos que en los capítulos posteriores darán una visión más exhaustiva de lo relatado en la introducción anterior.

1.1. Espacios de funciones oscilantes.

DEFINICIÓN 1.1. Una señal será una función $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ donde I puede ser, o bien un intervalo en \mathbb{R} (y en tal caso la llamaremos señal analógica), o bien un intervalo en \mathbb{Z} (si se trata de una señal digital). En el primer caso escribiremos $x(t)$ para hacer referencia a su valor en cada instante t y en el segundo $x[n]$. Diremos que x es periódica, de período $T \in \mathbb{R}$, si se cumple que $x(t) = x(t + nT)$, para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 1.2. Llamamos conjunto de señales unitonales de frecuencia $\nu \in \mathbb{R}^+$ al conjunto:¹

$$S_\nu = \{x(t) : x(t) = A \cos(2\pi\nu t + \phi), \text{ con } A, \phi, t \in \mathbb{R}\}$$

DEFINICIÓN 1.3. Un polinomio trigonométrico complejo será una función de variable real $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de la forma $P(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j t}$, de modo que $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_j, t \in \mathbb{R}$. Al conjunto de todos los polinomios trigonométricos lo denotamos por

$$\mathcal{T}rig(\mathbb{R}) = \left\{ P(t) : P(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\nu_j t} : \nu, t \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}; a_j \in \mathbb{C} \right\}.$$

De igual modo que $\mathcal{T}rig(\mathbb{R})$ podemos considerar de cada uno de ellos los subconjuntos formados por los elementos cuyo dominio es \mathbb{Z} , es decir

$$\mathcal{T}rig(\mathbb{Z}) = \left\{ x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : x = \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{2\pi i \nu_j j}, \nu_j \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

PROPOSICIÓN 1.4. *El espacio vectorial generado por S_ν está contenido en $\mathcal{T}rig(\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de la identidad de Euler $e^{i\nu t} = \text{Cos}(\nu t) + i\text{Sin}(\nu t)$, obtenemos que

$$\cos(2\pi\nu t) = \frac{e^{2i\pi\nu t}}{2} + \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{2}$$

con lo que aplicándolo sobre la suma finita que compone el polinomio trigonométrico tenemos el resultado deseado. □

¹Notar que tanto la función coseno como la función seno son funciones periódicas, y por tanto señales periódicas. Además, ambas verifican la relación $\cos(\phi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \phi)$.

DEFINICIÓN 1.5. Llamamos polinomio trigonométrico real a aquel formado por una suma finita de señales unitonales $\sum_{n=1}^m x_n$, con $x_n \in S_{\nu_n}$.

PROPOSICIÓN 1.6. Tanto la parte real como la imaginaria de un polinomio trigonométrico complejo son polinomios trigonométricos reales.

DEMOSTRACIÓN. Dado un polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{i\lambda_k t}$$

fijémonos que si consideramos la sucesión de coeficientes $a_k = b_k + ic_k$, podemos aplicar la identidad de Euler $e^{i\lambda_k t} = \text{Cos}(\lambda_k t) + i\text{Sin}(\lambda_k t)$, con lo que se tiene que:

$$\text{Re}\{P(t)\} = \sum_{k=1}^N (b_k \cos(\lambda_k t) - c_k \sin(\lambda_k t)) \quad \text{Im}\{P(t)\} = \sum_{k=1}^N (b_k \sin(\lambda_k t) + c_k \cos(\lambda_k t)),$$

y atendiendo a la proposición 1.4, deducimos que son polinomios trigonométricos reales. \square

1.1.1. Funciones casi periódicas.

DEFINICIÓN 1.7. Diremos que una señal compleja de variable real $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, es casi periódica si $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon(t) \in \mathcal{T}\text{rig}(\mathbb{R}) : |x(t) - P_\epsilon(t)| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}$. Al conjunto de todas las funciones casi periódicas lo indicamos por $\mathcal{AP}(\mathbb{R})$.

EJEMPLO 1.8. Trivialmente cualquier elemento de $P(t) \in \mathcal{T}\text{rig}(\mathbb{C})$, así como su parte real o imaginaria, es una función casi periódica, ya que dado $\epsilon > 0$, basta tomar $P_\epsilon(t) = P(t)$, para que la diferencia $|P(t) - P_\epsilon(t)|$ sea nula.

TEOREMA 1.9. Existen señales casi periódicas que no son periódicas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t) \in \mathcal{T}\text{rig}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ definida por $x(t) = e^{it} + e^{i\pi t}$. Supongamos que x es periódica entonces existirá un $\omega = \frac{1}{T}$ de modo que $x(t+T) = x(t)$, es decir, se cumple $e^{i(t+\omega)} + e^{i\pi(t+\omega)}$. Igualando con $x(t)$ y sacando factor común obtenemos

$$(1.1.1) \quad (e^{i\omega} - 1)e^{it} + (e^{i\pi\omega} - 1)e^{i\pi t} = 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

dividiendo ahora por e^{it} , tenemos $e^{i\omega} - 1 + e^{i(\pi-1)t}(e^{i\pi\omega} - 1) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Esta igualdad se cumple para cualquier valor real t , con lo que continúa siendo cierta si derivamos respecto t , con lo que nos queda

$$i(\pi - 1)e^{i(\pi-1)t}(e^{i\pi\omega} - 1) = 0 \implies e^{i\pi\omega} = 1$$

de modo que si dividimos ahora la fórmula (1.1.1) por $e^{i\pi t}$, obtenemos mediante un proceso análogo (derivando respecto de t), que $e^{i\omega} = 1$ pero como $e^{i\omega} = 1$ implica que $\omega = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, y $e^{i\pi\omega} = 1$ implica que $\pi\omega = 2j\pi, j \in \mathbb{Z}$. Pero entonces $2k\pi = 2j$, lo cual es imposible ya que π es irracional. Por tanto ω no existe, con lo que no puede ser periódica. \square

AFIRMACIÓN 1.10. Como consecuencia del ejemplo 1.8., las señales casi periódicas heredan las propiedades de los polinomios trigonométricos. Además, por el teorema anterior vemos que pueden existir otras propiedades al no cumplirse la doble inclusión.

1.1.2. Propiedades de funciones casi periódicas.

TEOREMA 1.11. Si $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ es continua y acotada, $x(t)$ es uniformemente continua.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe un polinomio trigonométrico

$$T_\epsilon(t)/|x(t) - T_\epsilon(t)| < \frac{\epsilon}{3}, t \in \mathbb{R}.$$

Como cada función $c_k e^{i\lambda_k t}$ es uniformemente continua, la suma finita de ellas también lo es, con lo que $T_\epsilon(t)$ es uniformemente continuo, con lo que

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 / |t_1 - t_2| < \delta(\epsilon) \implies |T_\epsilon(t_1) - T_\epsilon(t_2)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como $|x(t_1) - x(t_2)| \leq |x(t_1) - T_\epsilon(t_1)| + |T_\epsilon(t_1) - T_\epsilon(t_2)| + |T_\epsilon(t_2) - x(t_2)| = < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$, cuando $|t_1 - t_2| < \delta(\epsilon)$ se tiene que $x(t)$ es uniformemente continua. \square

PROPOSICIÓN 1.12. Dados dos polinomios trigonométricos $T(t), T'(t)$, se cumple que el conjugado de cualquiera de ellos, el producto por un escalar, su suma o resta, $T(t+a)$ y $T(at)$, $a \in \mathbb{R}$, también son polinomios trigonométricos.

DEMOSTRACIÓN. Sean $T(t) = \sum a_k e^{i\nu_k t}, T'(t) = \sum a'_k e^{i\nu'_k t}$.

Se tiene que si consideramos $(T' \pm T)(t) = \sum a_k e^{i\nu_k t} \pm \sum a'_k e^{i\nu'_k t} = \sum b_k e^{i\omega_k t}$,

donde hemos definido ω_k que coincide con ν_k en los primeros N índices, y luego con ν'_k , y b_k de forma similar respecto los coeficientes a_k y a'_k . Por tanto, tanto la suma como la resta, son polinomios trigonométricos.

Trivialmente sucede con la conjugada y el producto por un escalar, dado que admiten una expresión como polinomios trigonométricos tomando los nuevos coeficientes y valores de ν_k .

Que $T(t+a)$ también es polinomio trigonométrico, con un cambio de variable obtenemos una expresión similar.

Que $T(at)$ es un polinomio trigonométrico, al poder reescribir el polinomio trigonométrico redefiniendo los valores $\lambda_i^1 := a\lambda_i$. \square

TEOREMA 1.13. Si $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}), c \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$, las funciones $\bar{x}(t), cx(t), x(t+a)$ y $x(at)$ también son casi periódicas.

DEMOSTRACIÓN. Por ser $x(t)$ casi periódica, se tiene que para cada $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon(t)$ de modo que $|x(t) - T_\epsilon(t)| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}$.

Como $T_\epsilon(t) \in \mathcal{Trig}(\mathbb{R}), \bar{T}_\epsilon(t), T_\epsilon(at), T_\epsilon(t+a)$ y $cT_\epsilon(t)$ son polinomios trigonométricos por la proposición anterior. Pero además $T_\epsilon(t)$ es una combinación lineal de términos $c_k e^{i\lambda_k t}$. Por tanto, $\bar{x}(t), cx(t), x(t+a)$ y $x(at)$ son también polinomios trigonométricos, ya que se cumple que

$$|\bar{x}(t) - \bar{T}_\epsilon(t)| < \epsilon, |x(at) - T_\epsilon(at)| < \epsilon, |x(t+a) - T_\epsilon(t+a)| < \epsilon, |cx(t) - cT_\epsilon(t)| < \epsilon. \quad \square$$

TEOREMA 1.14. Dadas las funciones casi periódicas $f(t), g(t)$, tenemos que tanto su producto $f(t)g(t)$, como su suma $f(t) + g(t)$ son funciones casi periódicas.

DEMOSTRACIÓN. Dado $0 < \epsilon < 1$, consideremos los polinomios trigonométricos S_ϵ y T_ϵ de modo que

$|f(t) - S_\epsilon(t)| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}$ y $|g(t) - T_\epsilon(t)| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}$, donde M cumple $|f(t)| \leq M, |g(t)| \leq M, \forall t \in \mathbb{R}$.

Por la proposición anterior, tanto S_ϵ como T_ϵ son polinomios trigonométricos.

Así pues, $|S_\epsilon(t)| \leq |S_\epsilon(t) - f(t)| + |f(t)| < M + 1$. Y como además, se cumple la desigualdad $|fg - S_\epsilon T_\epsilon| \leq |g| |f - S_\epsilon| + |S_\epsilon| |g - T_\epsilon|$, tenemos que $|fg - S_\epsilon T_\epsilon| < \epsilon$ en todos los reales, el producto de funciones casi periódicas también es casi periódico.

El caso de la suma es trivial, ya que dado $\epsilon > 0$, si consideramos S_ϵ, T_ϵ , tenemos que $|f(t) + g(t) - (S_\epsilon + T_\epsilon)| < \epsilon$. \square

TEOREMA 1.15. *El límite uniforme de una sucesión uniformemente convergente de funciones casi periódicas es una función casi periódica.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una sucesión $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $f_n(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ converge uniformemente a $f(t)$, tenemos que para cada $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) / |f(t) - f_n(t)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in \mathbb{R}, n \geq N$. Además, como para cada f_i existe $T_i \in \mathcal{T}rig(\mathbb{R}) / |f_i(t) - T_i(t)| < \frac{\epsilon}{2}, t \in \mathbb{R}$, tomando $T_\epsilon = T_i$, se tiene la desigualdad $|f(t) - T_\epsilon| < \epsilon, t \in \mathbb{R}$. \square

COROLARIO 1.16. *$\mathcal{AP}(\mathbb{R})$ coincide con la clausura para la topología de la convergencia uniforme del conjunto de polinomios trigonométricos.*

DEMOSTRACIÓN. Por aplicación del teorema 1.14. tenemos que $\mathcal{AP}(\mathbb{R})$ es cerrado. \square

Vemos en este colorario la importancia de que las funciones periódicas sean cerradas respecto la convergencia uniforme. Todas las funciones que pueden ser aproximadas por una función casi periódica, con suficiente precisión, son casi periódicas.

TEOREMA 1.17. *Dadas $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones casi periódicas, si existe m con $0 < m < |g(x)|$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ es una función casi periódica.*

La demostración puede encontrarse en el Colorario 3.3., pág. 55 de [CO2].

LEMA 1.18. *Dada una señal casi periódica tanto su parte real como su parte imaginaria también son casi periódicas.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser señales casi periódicas admiten una expresión aproximada por polinomios trigonométricos de cualquier orden determinado por un valor ϵ . Por tanto, por la proposición 1.6 se tiene que sus partes reales también son polinomios trigonométricos. Como esto sucede para cualquier ϵ , se tiene que tanto la parte real, como la imaginaria son señales casi periódicas. \square

TEOREMA 1.19. *Si $f(t)$ es casi periódica y $f'(t)$ es uniformemente continua en \mathbb{R} , entonces $f'(t)$ es casi periódica.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, con lo que f_i son funciones reales de variable real. Como $f'(t) = f'_1(t) + if'_2(t)$, ya que f'_i son uniformemente continuas, definimos la función

$$\varphi_n(t) = n \left[f \left(t + \frac{1}{n} \right) - f(t) \right], n \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema del Valor Medio², se tiene que

$$\varphi_n(t) = f'_1 \left(t + \frac{\theta_n}{n} \right) + if'_2 \left(t + \frac{\tau_n}{n} \right), 0 < \theta_n, \tau_n < 1,$$

²Dada f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , se tiene que existe $c \in (a, b)$ que cumple $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

lo que implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ de modo que $|\varphi_n(t) - f'(t)| < \epsilon, t \in \mathbb{R}$ para cualquier $n > N$, así $\varphi_n \rightarrow f'$.

Como $\varphi_n(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, por continuidad uniforme existe δ de modo que $|f'(s) - f'(t)| < \epsilon$, si n es suficientemente grande $|f'(t + \frac{s}{n}) - f'(s)| < \epsilon$, con lo que se tiene que $f'(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$. \square

DEFINICIÓN 1.20. Dada una función $f(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, diremos que:

1. $f(t)$ es normal si dada una sucesión de números reales $\{h_n\}$, y una sucesión del tipo $\{f(t + h_n)\}$ podemos extraer una subsucesión uniformemente convergente en la recta real.
2. $f(t)$ cumple la propiedad de Harald Bohr si $\forall \epsilon > 0, \exists l(\epsilon) > 0$, de modo que cualquier intervalo de longitud $l(\epsilon)$ de la recta real contiene al menos un punto de abscisa ξ , de modo que $|f(t + \xi) - f(t)| < \epsilon, t \in \mathbb{R}$, donde el número ξ lo llamamos número de translación asociado a ϵ (o ϵ -traslación).

Los siguientes resultados pueden encontrarse probados en [CO1, CO2].

LEMA 1.21. Si $f(t)$ es normal, entonces cumple la propiedad de Bohr.

PROPOSICIÓN 1.22. Si $f(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, entonces $f(t)$ es normal (y por tanto cumple la propiedad de Bohr).

TEOREMA 1.23. Teorema: si $f(tx)$ cumple la propiedad de Bohr, entonces $f(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$.

COROLARIO 1.24. $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \iff$ cumple la propiedad de Bohr.

1.1.3. Visión de las funciones periódicas continuas como funciones casi periódicas.

DEFINICIÓN 1.25. Dada una función f continua y periódica de periodo T , definimos \tilde{f} también periódica, de periodo 2π como:

$$\tilde{f}(t) = f\left(\frac{t}{2\pi}T\right)$$

PROPOSICIÓN 1.26. Si \tilde{f} es casi periódica, f también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \tilde{f} es casi periódica, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe P_ϵ de modo que $|\tilde{f}(t) - P_\epsilon(t)| < \epsilon$, y se tiene que por ser \tilde{f} de período T , esto sucede también para $|\tilde{f}(\frac{2\pi}{T}t) - P_\epsilon(\frac{2\pi}{T}t)| < \epsilon$, es decir, para f . Por tanto se encontró una sucesión de polinomios trigonométricos que se aproximan a f tanto como queramos, de lo que concluimos que f es casi periódica. \square

AFIRMACIÓN 1.27. Por tanto, sin pérdida de generalidad, en los siguientes razonamientos, consideraremos las funciones de período 2π .

DEFINICIÓN 1.28. Llamamos núcleo de Dirichlet $D_n(t)$ al polinomio trigonométrico

$$D_n = \sum_{k=-N}^N e^{ikt}$$

PROPOSICIÓN 1.29. $D_n(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$

DEMOSTRACIÓN. Podemos entender que el núcleo de Dirichlet es expresable como la suma de una progresión geométrica de razón e^{it} , con lo que $D_n(t) = \frac{e^{-N-1/2} - e^{it(N+1/2)}}{e^{(-1/2)it} - e^{(1/2)it}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$. \square

DEFINICIÓN 1.30. Llamamos núcleo de Fejér a la media aritmética de los núcleos de Dirichlet

$$F_N(t) = \frac{\sum_{k=1}^N D_{n-1}}{N}.$$

PROPOSICIÓN 1.31. $F_n(t) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nt/2)}{\sin^2(t/2)}$

DEMOSTRACIÓN. La prueba puede hallarse en [W]. \square

DEFINICIÓN 1.32. Dada una función f periódica, de período 2π , llamamos suma parcial de Fourier, de grado N a:

$$S_N(f)(t) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}[k] e^{ikt},$$

donde a cada $\hat{f}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ lo llamamos coeficiente k -ésimo de Fourier.

DEFINICIÓN 1.33. Dadas dos señales $x(t), y(t)$, de período 2π , definimos

$$(x *_{2\pi} y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) y(t-s) ds$$

TEOREMA 1.34. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, periódica, de período 2π , se tiene:

a) $S_n(f)(t) = (f *_{2\pi} D_n)(t)$

b) $(f *_{2\pi} F_n)(t) = \frac{\sum_{k=1}^N S_{N-1}(f)(t)}{N}$

DEMOSTRACIÓN. a) $S_N(f)(t) = \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{k=-N}^N e^{k(t-s)} \right) ds = (f *_{2\pi} D_n)(t)$.

b) $f * F_n = f * \left(\frac{1}{N} \sum D_{k-1} \right) = \frac{1}{N} \sum f * D_{k-1} = \frac{\sum S_{k-1}}{N}$. \square

LEMA 1.35. Se cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha t} e^{i\beta t} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } \alpha = \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha t} e^{i\beta t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha+\beta)t} dt = \left. \frac{e^{i(\alpha+\beta)t}}{i(\alpha+\beta)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } \alpha = \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$. \square

LEMA 1.36. Los núcleos de Dirichlet y Fejér cumplen: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Considerando que las funciones e^{ikt} son ortogonales y F_n es la media aritmética de los primeros núcleos de Dirichlet, se tiene el resultado deseado. La prueba del valor de dichas integrales puede hallarse en [W]. \square

TEOREMA 1.37. *Dada una función continua en $[-\pi, \pi]$, entonces $F_N *_{2\pi} f$ tiende uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $t_0 \in \mathbb{T}_{2\pi}$, por el lema anterior, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt - f(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) - f(t_0) dt$$

y por tanto se tiene

$$(f *_{2\pi} F_N)(t_0) - f(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) (f(t_0 - s) - f(t_0)) ds.$$

Por ser continua en un compacto tenemos que estará acotada, con lo que $\exists M/|f(t)| \leq M, \forall t$. Por tanto, dado $\delta > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} |(f *_{2\pi} F_N)(t_0) - f(t_0)| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) (f(t_0 - s) - f(t_0)) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |F_n(s) (f(t_0 - s) - f(t_0))| ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |s| \geq \delta} |F_n(s) (f(t_0 - s) - f(t_0))| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |F_n(s) (f(t_0 - s) - f(t_0))| ds + \frac{2M}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |F_n(s)| ds. \end{aligned}$$

Así, por ser f continua en $[-\pi, \pi]$, se tiene que dado: $\epsilon > 0, \exists \delta > 0/|s - t_0| < \delta \implies |f(s) - f(t_0)| < \epsilon$.

Si tomamos este δ en la desigualdad anterior, como además $0 < F_N(t)$, tendremos

$$|(f *_{2\pi} F_N)(t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(s) ds + \frac{M}{\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_N(s) ds.$$

Por el segundo apartado del teorema anterior, y aplicando que el valor del núcleo es 1 por 1.36, tenemos entonces que si $N \rightarrow \infty$, el segundo sumando tiende a cero, con lo que deducimos que:

$\lim_{N \rightarrow \infty} |(f *_{2\pi} F_N)(t_0) - f(t_0)| = 0$, lo que nos garantiza la continuidad uniforme en el intervalo. \square

COROLARIO 1.38. *Toda señal periódica continua es casi periódica.*

DEMOSTRACIÓN. Como $F_N *_{2\pi} f$ es por 1.34 (apartado b) un polinomio trigonométrico. Por el teorema 1.15 tenemos garantizado que f , que es el límite de $F_N * f$, es casi periódica. \square

1.2. La transformada de Fourier en funciones casi periódicas.

DEFINICIÓN 1.39. Dada $f(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, definimos su valor medio como

$$V_m^a \{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

TEOREMA 1.40. $\forall a, a'$, se cumple $V_m^a \{f(x)\} = V_m^{a'} \{f(x)\}$. Es decir, el valor medio es independiente del valor de a elegido.

DEMOSTRACIÓN. Primero veremos que si $f(t) \in \mathcal{Trig}(\mathbb{R})$, la media existe. Para ello definimos: $S(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k t}$, con $\lambda_k \neq 0, k \in \{1..n\}$, de lo que obtenemos $\frac{1}{T} \int_a^{a+T} S(t) dt = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \frac{e^{i\lambda_k(a+T)} - e^{i\lambda_k a}}{i\lambda_k T}$, con lo que para $T > 0$ se tiene:

$\left| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} S(t) dt - c_0 \right| < \frac{2}{T} \sum_{k=1}^n \left| \frac{c_k}{\lambda_k} \right|$, esto implica que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} S(t) dt = c_0$. Así, el valor medio existe para cualquier polinomio trigonométrico, uniformemente respecto de a . Además esto significa que el valor medio es independiente del valor de a .

Sea ahora $f(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, $\epsilon > 0$, podemos determinar $S(t) \in \mathcal{Trig}(\mathbb{R}) / |f(t) - S(t)| < \frac{\epsilon}{3}, t \in \mathbb{R}$ y un número $T(\epsilon)$ de modo que $\left| \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} S(t) dt - \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} S(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{3}, T_1, T_2 \geq T(\epsilon)$. Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} S(t) dt - \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} S(t) dt \right| \leq \\ & < \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} |f(t) - S(t)| dt + \left| \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} S(t) dt - \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} S(t) dt \right| + \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} |S(t) - f(t)| dt < \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \text{ con } T_1, T_2 \geq T(\epsilon). \end{aligned}$$

Probemos ahora que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dx$ de donde se sigue que la media es independiente del valor a . Como $f(t)$ está acotada, $\exists M / |f(t)| \leq M, t \in \mathbb{R}$. Suponiendo que $T > a > 0$, tenemos que

$$\frac{1}{T} \left| \int_a^{a+T} f(t) dx - \int_0^T f(t) dx \right| = \frac{1}{T} \left| \int_T^{a+T} f(t) dx - \int_0^a f(t) dx \right| \leq \frac{2aM}{T}.$$

La prueba con $a < 0$ se demuestra de igual modo. Así, existe para cualquier función casi periódica la media. \square

DEFINICIÓN 1.41. Dada una señal casi periódica $x(t)$, definimos la media sobre $\mathcal{AP}(\mathbb{R})$ como

$$V_m \{f(x)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} x(t) dt.$$

Si dicha señal $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$, entonces definimos el valor medio como: $V_m(x[n]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=a}^{a+N} x[k]$

TEOREMA 1.42. *La media de una función trigonométrica coincide con la integral usual a lo largo de un período en las funciones periódicas.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f(t)$ es una función periódica de período 2ω , para cada $T \in \mathbb{R}$, podemos considerar $\alpha_n \in \mathbb{R}$ de modo que $T = 2n\omega\alpha_n$, de modo que $0 \leq \alpha_n < 2\omega$. Como $T \rightarrow \infty \iff n \rightarrow \infty$, si calculamos tenemos

$$\begin{aligned} V_m \{f(t)\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \\ &= \lim_n \frac{1}{2n\omega + \alpha_n} \int_0^{2n\omega + \alpha_n} f(t) dt = \lim_n \frac{1}{2n\omega + \alpha_n} \left\{ n \int_0^{2\omega} f(t) dt + \int_0^{\alpha_n} f(t) dt \right\} = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} f(t) dt. \end{aligned}$$

Es decir, la media para una función casi periódica coincide con la media para el caso de funciones periódicas. \square

TEOREMA 1.43. *Dadas $f(x), g(x) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{C}$, se tiene que:*

1. $V_m \{\bar{f}(t)\} = \overline{V_m \{f(t)\}}$
2. $V_m \{cf(t)\} = cV_m \{f(t)\}$
3. $V_m \{af(t)\} \geq 0$, si $f(t) \geq 0$.
4. $V_m \{f(t) + g(t)\} = V_m \{f(t)\} + V_m \{g(t)\}$
5. $|V_m \{f(t)\}| \leq V_m \{|f(t)|\} = |f|_B$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de las cuatro primeras propiedades se sigue de la linealidad de la integral o del hecho de la compacidad.

La demostración de la última propiedad se basa en el hecho de que dada una $\{f_n(t)\}$ sucesión uniformemente convergente a $f(t)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} V_m \{f_n(t)\} = V_m \{f(t)\}$ ya que $|V_m \{f_n\} - V_m \{f\}| = |V_m \{f_n - f\}| \leq |f_n - f|_B$. \square

DEFINICIÓN 1.44. Consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ (o $x \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$), como también $f(t)e^{-i\lambda t} \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ (respectivamente en $\mathcal{AP}(\mathbb{Z})$), entonces podemos definir

$$a(\lambda) := V_m \{f(t)e^{-i\lambda t}\}.$$

DEFINICIÓN 1.45. Dada una función $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, definimos el operador transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$ como

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : \mathcal{AP}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & l_\infty(\mathbb{R}) \\ f(t) & \rightsquigarrow & A_\nu \end{array}$$

o equivalentemente $\hat{f}(\omega) = \sum_j a_j \delta(\omega - \nu_j)$.

TEOREMA 1.46. *La función $\varphi(c_1, c_2, \dots, c_n) = V_m \left\{ \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k e^{i\mu_k t} \right|^2 \right\}$ alcanza su mínimo valor para $c_k = a(\mu_k) = V_m \{f(t)e^{-i\mu_k t}\}$, con $k=1, 2, \dots, n$. Y tenemos*

$$(1.2.1) \quad \sum_{k=1}^n |a(\mu_k)|^2 \leq M \{ |f(t)|^2 \}.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando las propiedades del teorema anterior tenemos

$$V_m \left\{ \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k e^{i\nu_k t} \right|^2 \right\} = V_m \{ |f(t)|^2 \} - \sum_{k=1}^n \bar{c}_k V_m \{ f(t) \} e^{-i\nu_k t} - \sum_{k=1}^n c_k V_m \{ \bar{f}(t) \} e^{i\nu_k t} + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n c_k \bar{c}_h V_m \{ e^{i\nu_k t} e^{-i\nu_h t} \}. \text{ Como } V_p \{ e^{i\nu_k t} e^{-i\nu_h t} \} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k \\ 0 & \text{si } h \neq k \end{cases} .$$

Con lo cual tenemos que

$$V_m \left\{ \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k e^{i\nu_k t} \right|^2 \right\} = V_m \{ |f(t)|^2 \} - \sum_{k=1}^n \bar{c}_k a(\nu_k) - \sum_{k=1}^n c_k \bar{a}(\nu_k) + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n c_k \bar{c}_h V_m \{ e^{i\nu_k t} e^{-i\nu_h t} \} = V_m \{ |f(t)|^2 \} + \sum_{k=1}^n |c_k - a(\nu_k)|^2 - \sum_{k=1}^n |a(\nu_k)|^2 .$$

Esta expresión toma su valor mínimo para cuando $c_k = a(\nu_k)$, es decir, cuando el término central es nulo, con lo que queda probado el enunciado. \square

TEOREMA 1.47. *Existen como mucho un conjunto numerable de λ_k de modo que $a(\lambda_k) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Teorema 1.15., pág. 26. **[CO1]** \square

DEFINICIÓN 1.48. Dichos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ no nulos se llaman exponentes de Fourier de la función $f(t)$, y $a(\lambda_k)$ son los coeficientes de Fourier de $f(t)$.

DEFINICIÓN 1.49. Definimos $A_k = a(\lambda_k)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, donde el hecho de que λ_k sean los exponentes de Fourier de $f(t)$ y A_k , $k \in \{1, 2, \dots\}$ sean los coeficientes de Fourier implica que $f(t)$ se puede aproximar como $f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k t}$, que es la llamada serie de Fourier asociada a la función $f(t)$.

TEOREMA 1.50. *Si la derivada (o primitiva) de una función casi periódica es una función casi periódica, entonces la transformada de Fourier se obtiene por una diferenciación formal (integral). Así para la derivada:*

$$f' \in AP(\mathbb{R}) \implies \widehat{f'}(\omega) = \omega \widehat{f}(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(t), f'(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, entonces existe $V_m \{ f'(t) e^{-i\lambda t} \}$. Como

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f'(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{T} f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_a^{a+T} + i\lambda \int_a^{a+T} f(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

si $T \rightarrow \infty$ tenemos que $V_m \{ f'(t) e^{-i\lambda t} \} = i\lambda V_m \{ f(t) \}$, con lo que $f'(t)$ tiene los mismos exponentes de Fourier que $f(t)$ excepto para el caso $\lambda = 0$.

Sean A'_k los coeficientes de Fourier de $f'(t)$, entonces $A'_k = i\lambda_k A_k$, con lo cual

$$f'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} i\lambda_k A_k e^{i\lambda_k t}$$

de lo que se sigue que si la primitiva $F(t)$ de una función $f(t)$ es casi periódica, tendremos que $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \sim C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{i\lambda_k} e^{i\lambda_k t}$. Notar que los λ_k de los denominadores no afectan a la validez del resultado ya que $\lambda_i = 0$ no puede suceder porque son exponentes de una función casi periódica que es derivada de otra función casi periódica.

Es decir, para que una primitiva de una función casi periódica sea casi periódica se necesita que los exponentes de Fourier de la función no sean nulos, aunque se conocen ejemplos de que esta no resulta ser una condición suficiente. \square

TEOREMA 1.51. *Dada una señal casi periódica $x(t) \sim \sum_{k=1}^n A_k e^{i\lambda_k t}$ se tiene que se cumple la igualdad de Parseval:*

$$\sum_{k=1}^n |A_k|^2 = V_m \{ |x(t)|^2 \}.$$

DEMOSTRACIÓN.

De la desigualdad 1.46 podemos escribir que para cada n , se cumple la llamada desigualdad de Bessel:

$$\sum_{k=1}^n |A_k|^2 \leq V_m \{ |x(t)|^2 \}.$$

Consideremos ahora $S(t) \in \mathcal{T}rig(\mathbb{R})$ y $S^*(t) \equiv 0$, si ninguno de los exponentes de $x(t)$ son diferentes de los exponentes de Fourier de $S(t)$, y $S^*(t) = \sum A_k e^{i\lambda_k t}$, la suma extendida sobre los subíndices k para los que λ_k es un exponente de Fourier, es común en las funciones $x(t)$ y $S(t)$.

Como la función $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, existe una sucesión de polinomios trigonométricos $\{S_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que se cumple

$$|x(t) - S_n(t)| < \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Así que por la desigualdad de Bessel tenemos que $V_m \{ |x(t) - S_n(t)|^2 \} \leq \frac{1}{n}$,

Así que aplicando el teorema 1.46 tenemos que $V_m \{ |x(t) - S_n^*(t)|^2 \} \leq V_m \{ |x(t) - S_n(t)|^2 \} \leq \frac{1}{n}$

No obstante, $V_m \{ |x(t) - S_n^*(t)|^2 \} = V_m \{ |x(t)|^2 \} - \sum_n |A_k|^2$. Donde la suma es extendida para esos subíndices k , de modo que λ_k es un exponente de Fourier de $S_n(t)$.

Así, $V_m \{ |x(t)|^2 \} \leq \sum_n |A_k|^2 + \frac{1}{n}$, de modo que como esto sucede $\forall k$, $V_m \{ |x(t)|^2 \} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_k|^2 + \frac{1}{n}$

, y finalmente haciendo n grande tenemos que $V_m \{ |x(t)|^2 \} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_k|^2$, lo que se deduce de la igualdad de Bessel mediante la técnica de la doble desigualdad. \square

OBSERVACIÓN 1.52. La interpretación de esta fórmula es que la energía total de la señal $f(t)$ es igual a la energía total de su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ a lo largo de todas sus componentes frecuenciales.

1.3. Convergencia de la serie de Fourier y transformada de Fourier.

Dada la sutileza del problema, veremos solamente dos criterios de convergencia.

PROPOSICIÓN 1.53. *Dada $x \in \mathcal{T}\text{rig}(\mathbb{R})$, se tiene que*

$$x = \sum_{j=1}^n a_j e^{2\pi i \nu_j t},$$

donde $a_j = \lim_{l \rightarrow \infty} (2l)^{-1} \int_{-l}^l x(t) e^{-i \nu_j t} dt = V_m \{x(t) e^{-i \nu_j t}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero que si $x(t)$ es periódica, de período T , entonces

$$V_m \{x\} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt,$$

ya que basta aplicar $a = -\frac{T}{2}$ en el teorema 1.40. De este modo se tiene que si $x(t) = e^{2\pi i \nu}$, entonces $V_m \{x(t)\} = 0$, cuando $\nu \neq 0$ y que $V_m(1) = 1$ (donde 1 es la función constante 1 (unitonal con $\nu = 0$)). Por tanto, el único coeficiente de Fourier no nulo de $e^{2\pi i \nu}$ es el que corresponde al exponente ν , con lo que se cumple $A_\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \nu_j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$ con a_j con las condiciones dadas. \square

OBSERVACIÓN 1.54. Al proceso de obtención de dichos coeficientes lo llamamos *análisis*. Además por definición, se cumple que $x(t) = \sum_{A_\nu \neq 0} A_\nu e^{2\pi i \nu t}$, a esta suma la llamaremos *serie de Fourier* del polinomio trigonométrico $x(t)$, y al proceso de llegar a ella, *síntesis*.

DEFINICIÓN 1.55. En el espacio topológico real con la topología discreta, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_D)$, definimos $\delta(\omega - \nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \nu \\ 0 & \text{si } \omega \neq \nu \end{cases}$.

AFIRMACIÓN 1.56. Al definirlo de esta forma obtenemos que $\delta(\omega - \nu)$ es una función, lo que facilita los cálculos.

PROPOSICIÓN 1.57. *La transformada de $f(t) = e^{2\pi i \nu t}$, es $\hat{f}(t) = \delta(\omega - \nu)$.*

DEMOSTRACIÓN. La serie de Fourier de una función cuya transformada es la $\delta(\omega - \nu)$ es simplemente $e^{2\pi i \nu t}$. \square

COROLARIO 1.58. $\hat{f}(\omega) = \sum_{\nu_j \neq 0} (\omega - \nu_j)$, si $f(t)$ es un polinomio trigonométrico.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, si $f(t) \in \mathcal{T}\text{rig}(\mathbb{R})$ entonces $f(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i \nu_j t}$ con lo que por linealidad de la transformada se tiene $\hat{f}(\omega) = \sum_{\nu_j \neq 0} (\omega - \nu_j)$. \square

EJEMPLO 1.59. Dada una señal unitonal. $x \in S_s$ $\mathcal{F}(\text{Cos}(2\pi \nu t))(\omega) = \pi \delta(\omega - \nu) + \pi \delta(\omega + \nu)$. Como $\text{cos}(2\pi \nu t) = \frac{e^{2i\pi \nu t}}{2} + \frac{e^{-2i\pi \nu t}}{2}$, y el operador transformada es lineal, por la proposición 1.51. se sigue el resultado.

TEOREMA 1.60. *Dos funciones casi periódicas distintas tienen una serie de Fourier distinta.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede encontrarse en [CO1], pág 29. \square

TEOREMA 1.61. *Si la serie de Fourier de una señal casi periódica es uniformemente convergente, entonces la suma de la serie es la señal dada.*

DEMOSTRACIÓN. Dada $x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k t}$, consideremos $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k t}$; como la convergencia es uniforme $S(t)$ está bien definida. Si tomamos las sucesiones parciales, $S_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\lambda_k t}$, entonces $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S(t)$ uniformemente, con lo que

$$V_m \{S(t)e^{-i\lambda t}\} = \lim_n \sum_{k=1}^n A_k V_m \{e^{i\lambda_k t} \cdot e^{-i\lambda t}\} = \begin{cases} A_k & \text{si } \lambda = \lambda_k \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \lambda_k \end{cases}, \text{ por la proposición 1.53. Así}$$

$S(t)$ tiene la misma serie de Fourier que $x(t)$, con lo que de acuerdo con el teorema de unicidad 1.60, deducimos que $x(t) \equiv S(t)$. \square

1.4. La fórmula de convolución.

DEFINICIÓN 1.62. Dadas dos funciones $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ definimos el operador convolución como

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)dx.$$

OBSERVACIÓN 1.63. Recordemos que en este caso se tiene $\widehat{(f * g)}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$, donde $\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$ es la transformada de Fourier clásica, no obstante la fórmula del producto de convolución no puede ser definido al no tener por qué ser integrables las funciones casi periódicas.

Nos centraremos en:

- Calcular la transformada del producto de dos funciones con serie de Fourier absolutamente convergente.
- Calcular la transformada de las respuestas de los sistemas LTI:

$$x(t) \xrightarrow{\text{Entrada}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\text{Salida}} (x * h)(t).$$

OBSERVACIÓN 1.64. Por otra parte, para describirlos desde el punto de vista frecuencial, necesitamos conocer $\widehat{(x * h)}$, de modo que en este caso la convolución es la convolución ordinaria

$$(x * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)h(t-s)ds.$$

1.4.1. Transformada del producto de dos funciones de $\mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$. Un análisis completo, o bien sería técnicamente muy complejo, o bien requeriría del uso de la compactación de Bohr. Para evitar estas complejidades, obtendremos los teoremas de convolución para las funciones de $\mathcal{AP}(\mathbb{R})$ cuyos coeficientes de Fourier son absolutamente convergentes, y que lo designaremos por $\mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 1.65. Decimos que $f \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$ cuando $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda_k| < \infty$, donde λ_k son los coeficientes de Fourier de f .

OBSERVACIÓN 1.66. Cuando $f \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, como consecuencia del teorema de unicidad se tiene que

$$f(t) = \sum \lambda_k \omega_k e^{i\omega_k t}.$$

Notar que si $f \notin \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, la suma $\sum \lambda_k e^{i\omega_k t}$ puede no ser convergente con lo que no define función alguna.

DEFINICIÓN 1.67. Definimos $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / f(r) \neq 0, \text{ para una cantidad numerable de } r \in \mathbb{R} \text{ y } \sum |f(r)| < \infty\}$. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, definimos su producto de convolución $(f_1 * f_2)$ como

$$(f_1 * f_2)(t) = \sum_{r \in \mathbb{R}} f_1(r) f_2(t - r).$$

AFIRMACIÓN 1.68. Por tanto, si $f \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

LEMA 1.69. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, entonces $(f_1 * f_2) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. $|f_1 * f_2| = \left| \sum_{r \in \mathbb{R}} f_1(r) f_2(t - r) \right| = \left| \sum_{r \in \mathbb{R}} f_1(t - r) f_2(r) \right|$, por ser absolutamente convergente. \square

DEFINICIÓN 1.70. Definimos el conjunto de funciones reales $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es acotada y la función } \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-2\pi i \omega s} ds \text{ es también acotada.} \right\}.$$

PROPOSICIÓN 1.71. Se cumple $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Las funciones de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ son acotadas y sus transformadas son continuas y tienden a 0 en el infinito por el teorema de Riemann-Lebesgue, por tanto también son acotadas. \square

DEFINICIÓN 1.72. Definimos la función seno cardinal $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 1.73. Definimos transformada del seno cardinal con transformada como

$$\widehat{\text{sinc}(t)}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \end{cases} =: \Pi(t).$$

PROPOSICIÓN 1.74. Dada una función $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, se tiene $(f * \delta(\omega - a))(\omega) = f(\omega - a)$.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar la suma definida por la convolución, con lo que tenemos

$$f * \delta(\omega - a) = \sum_s \delta(\omega - a)(s) \cdot f(\omega - s) = f(\omega - a).$$

\square

1.4.2. La transformada de la convolución en $\mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$.

PROPOSICIÓN 1.75. Dada $f(t) \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, se cumple

$$(K * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} K(s)f(t-s)ds \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R}).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{2\pi i \nu_j t} \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, (o sea, con $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| < \infty$), entonces

$$\begin{aligned} (K * f)(t) &= \int_{\mathbb{R}} K(s)f(t-s) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} K(s)\alpha_j e^{2\pi i \nu_j (t-s)} ds = \\ (1.4.1) \quad &= e^{2\pi i \nu_j t} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} K(s)\alpha_j e^{-2\pi i \nu_j s} \right) ds. \end{aligned}$$

Como $K \in \mathcal{L}$, tenemos que existen M y N tales que $|K(s)| \leq M |K^\nu| \leq M$ para todo $s, \nu \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |K(s)\alpha_j e^{2\pi i \nu_j (-s)}| \leq M \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j|,$$

podemos intercambiar suma y límite en la ecuación 1,4,1 y nos queda

$$\begin{aligned} (K * f)(t) &= e^{2\pi i \nu_j t} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} K(s)\alpha_j e^{-2\pi i \nu_j s} \right) ds = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} K(s)\alpha_j e^{-2\pi i \nu_j s} \right) e^{2\pi i \nu_j t} = \\ (1.4.2) \quad &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{K}(\nu_j)\alpha_j e^{2\pi i \nu_j t}. \end{aligned}$$

Si esta suma es finita (esto es, si $f \in \mathcal{T}rig(\mathbb{R})$), ya tenemos que $K * f \in \mathcal{T}rig(\mathbb{R})$. Si hay infinitos α_j , hemos de observar que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{K}(\nu_j)\alpha_j \right| \leq N \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j|.$$

con lo que $(K * f) \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$. □

COROLARIO 1.76. Si $K \in \mathcal{L}$, y $f \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{(K * f)} = \widehat{K} \cdot \widehat{f}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta con tomar la igualdad 1.4.2 y considerar que a cada $e^{2\pi i \nu_j t}$ le acompaña un $K^{\nu_j}\alpha_j$ y $\alpha_j = f^{\nu_j}$. □

TEOREMA 1.77. Si $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ y $K \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, entonces $f * K \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, y

$$\widehat{(f * K)}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \int K(t)e^{-i\omega t} dt = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{K}(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in f(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, y $\{T_n(t); n \geq 1\} \subset \mathcal{Trig}(\mathbb{R})$ una sucesión de polinomios trigonométricos de modo que convergen uniformemente a f . Como $K * T_n$ es también un polinomio trigonométrico, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} K(s)f(t-s) - \int_{\mathbb{R}} K(s)T_n(t-s)ds \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} K(s)[f(t-s) - T_n(t-s)]ds \right| \leq \\ &\leq \int |K(s)| |f(t-s) - T_n(t-s)| ds \leq |K|_{L^1} |f - T_n|_{\mathcal{AP}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Como el segundo factor de la fórmula tiende a 0, al aumentar el valor de n , se tiene que la primera diferencia de integrales se anula, con lo que $K * f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$. \square

Algunas de las pruebas pueden encontrarse en las referencias principales:
[CO1, CO2, W].

Capítulo 2

Filtros.

En este capítulo daremos una visión matemática de los filtros comúnmente utilizados en el contexto del uso de un dispositivo SDR. Estos filtros pueden dividirse en dos clases:

- filtros físicos, que son filtros que tratan la señal antes de entrar al dispositivo físico de recepción.
- filtros digitales, que tratan la versión muestreada de la señal (que veremos en el capítulo 5).

El uso que se le dará al concepto de filtro será el de realizar una atenuación selectiva de ciertas componentes espectrales de la señal de entrada.

2.1. Nociones básicas.

DEFINICIÓN 2.1. Dada una señal $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, definimos el operador traslación: $\tau_t x(s) = x(s+t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 2.2. Llamamos *filtro* a un operador

$$\mathcal{A} : \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{R})$$

lineal, continuo e invariante por traslación (es decir, que se cumpla $\mathcal{A}(\tau_t x) = \mathcal{A}(x)$, $x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

AFIRMACIÓN 2.3. Por la expresión obtenida, para conocer la imagen de cualquier señal casi periódica, bastará con conocer las imágenes del filtro para cada entrada exponencial de su expresión trigonométrica asociada.

DEFINICIÓN 2.4. Si llamamos $e_\nu(t) = e^{2i\pi\nu t}$, denotaremos su imagen por el filtro como $f_\nu = \mathcal{A}(e_\nu)$.

TEOREMA 2.5. Dado un filtro \mathcal{A} , se cumple que existe $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, que cumple

$$\mathcal{A}(e_\nu) = H(\nu)e_\nu.$$

DEMOSTRACIÓN. Por las propiedades de la exponencial se tiene que $e_\nu(t+u) = e_\nu(t)e_\nu(u) = \tau_{-t}e_\nu(u)$, donde se considera t un parámetro y u la variable. Si definimos $f_\nu(t+u) = \mathcal{A}(e_\nu(t)e_\nu(u)) = e_\nu(t)f_\nu(u)$, de modo que para $u = 0$, se tiene $f_\nu(t) = e_\nu(t)f_\nu(0)$, esta expresión que puede ser reescrita como $\mathcal{A}(e_\nu) = H(\nu)e_\nu$, es decir : $H(\nu) = f_\nu(0)$. \square

DEFINICIÓN 2.6. Llamamos respuesta en frecuencia a la función H del teorema anterior (también llamada función de transferencia).

PROPOSICIÓN 2.7. Dado un filtro $\mathcal{A} : \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ y $P(t) = \sum_{k=1}^N \hat{P}(\nu_j) e^{2\pi i \nu_j t} \in \mathcal{Trig}(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathcal{A}(P)(t) = \sum_{k=1}^N \widehat{P}(\nu_j) H(\nu_j) e^{2\pi i \nu_j t} \in \mathcal{T}rig(\mathbb{R})$$

esto es,

$$\widehat{\mathcal{A}(P)}(\nu) = H(\nu) \cdot \widehat{P}(\nu).$$

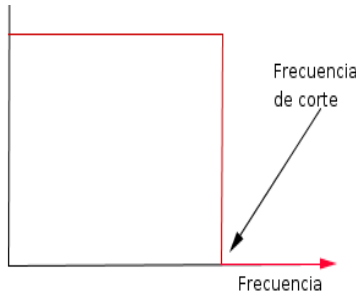
PROPOSICIÓN 2.8. Si $\mathcal{AP}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ es un filtro, entonces \mathcal{A} queda determinado por H .

DEMOSTRACIÓN. Dada una señal $x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, sabemos que existe una sucesión $P_n \in \mathcal{T}rig(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = x$. Si conocemos H , conocemos $\mathcal{A}(P_n)$ por la proposición anterior, y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}(P_n) = \mathcal{A}(x)$, también conocemos $\mathcal{A}(x)$. \square

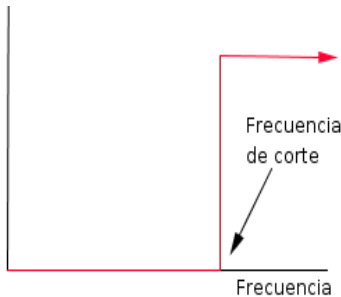
HECHO 2.9. De especial interés en el contexto de la radio son una clase de filtros llamados filtros ideales centrados, es decir, que su función se rige en gran parte por un parámetro llamado frecuencia central o de corte, que será el que determine si procede atenuar o no las frecuencias en la imagen del operador de filtrado.

Atendiendo al comportamiento de dicho filtro y dada su frecuencia central o de corte ν_c , suelen clasificarse diversos grupos:

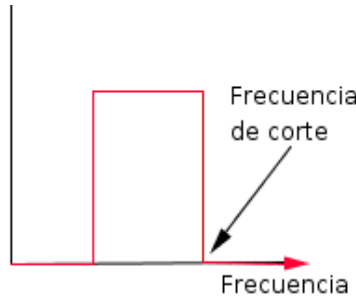
- Filtro paso bajo (LPF). Se trata de un filtro que solamente dejará pasar las componentes espectrales de la señal que se encuentren por debajo de la frecuencia de corte ν_c . El comportamiento de este tipo de filtros se basa en que dado un pulso de corte $\omega_0 \in \Omega$ y una función $H(\omega) : \Omega \rightarrow \Omega$. Decimos que es un filtro paso bajo ideal si $H(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{si } \omega < \omega_0 \\ 0 & \text{si } \omega \geq \omega_0 \end{cases}$.



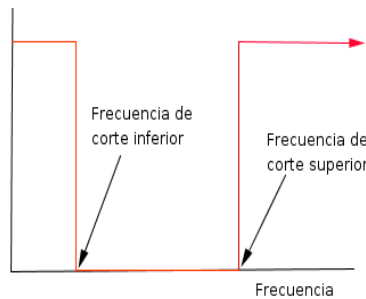
- Filtro paso alto (HPF). En este caso el filtro solamente dejará pasar las componentes espectrales de la señal que se encuentren por encima de la frecuencia de corte ν_c . Es decir, se trata de un filtro cuya respuesta en frecuencia es $H(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{si } \omega \geq \omega_0 \\ 0 & \text{si } \omega < \omega_0 \end{cases}$.



- Filtro pasa banda (BPF). Este tipo de filtros deja pasar las componentes espectrales que se encuentran en un entorno centrado en v_c , de un cierto radio r , se trata de un operador con respuesta en frecuencia $H(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{si } \omega \in [\omega_o - r, \omega_o + r] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$.



- Filtros rechaza-banda (NPF). Este tipo de filtros deja pasar las componentes espectrales que no se encuentran en un entorno centrado en v_c , de un cierto radio r . El operador en este caso es definido como $H(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in [\omega_o - r, \omega_o + r] \\ \omega & \text{caso contrario} \end{cases}$.



PROPOSICIÓN 2.10. Si F es un filtro paso bajo con pulsación de corte ω_c , tenemos que para cualquier $x \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$,

$$F(x)(t) = (h * x)(t),$$

con

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi t \omega_c)}{\pi t} = 2\omega_c \text{sinc}(2\omega_c t).$$

DEMOSTRACIÓN. Recordando la definición en 1.73 de la función seno cardinal, que es acotada con transformada (la función caja) también acotada, se tiene que es de \mathcal{L} , con lo que podemos seguir la misma línea argumental descrita en 1.75 de modo que $\widehat{\text{sinc}}(\omega) = \prod_{\frac{1}{2}}(\omega)$, con banda de paso $[-\omega_c, \omega_c]$.

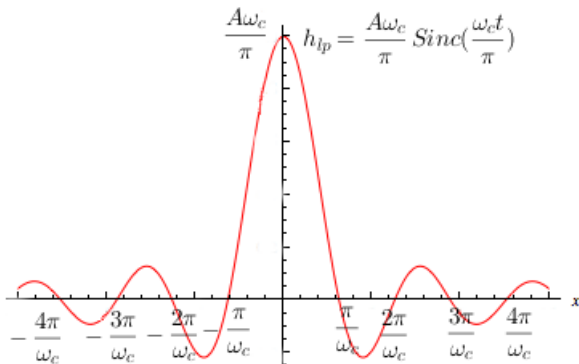
Considerando $\widehat{x(2t\omega_c)}(\omega) = \frac{1}{2\omega_c} \widehat{x}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$, se tiene que la transformada de $2\omega_c \text{sinc}(2\omega_c t)$ es precisamente la función caja $\frac{\omega}{2\omega_c}$ con banda de paso $[-\omega_c, \omega_c]$, y como

$$\left(\frac{\widehat{\text{sinc}(2\pi t \omega_c)}}{\pi t} * x(t) \right)(\omega) = H(\omega) \cdot \widehat{x}(\omega) = U_{\frac{1}{2}},$$

por 1.73 y 1.74 deducimos que la respuesta temporal del filtro es $F(f) = 2\omega_c \text{sinc}(2\omega_c t)x(t)$. \square

DEFINICIÓN 2.11. Definimos $h(t)$ como la *respuesta al impulso* del filtro F , es decir, cuál es su imagen ante el límite de una sucesión de señales positivas cuya duración tiende a 0 y cuya integral es siempre 1.

EJEMPLO 2.12. Veamos las gráficas de la respuesta de impulso de un filtro paso bajo:

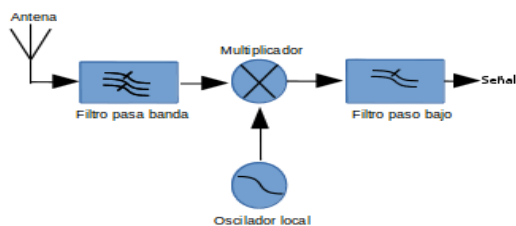


OBSERVACIÓN 2.13. El problema con los filtros ideales es que no disponen de una implementación electrónica posible, y la digital requiere del costo computacional de realizar la transformación al dominio de frecuencia, eliminar las frecuencias no deseadas y retornar la señal al dominio del tiempo. Como seguidamente veremos, lo que sí es asequible en la práctica, son filtros basados en la idea de filtro ideal, pero cuya transición de frecuencia de paso a frecuencia atenuada no es escalonada, sino que se sucede en un intervalo al que llamaremos banda de transición del filtro. Pese a todo, la clasificación expuesta anteriormente de los tipos de filtros, sigue siendo válida.

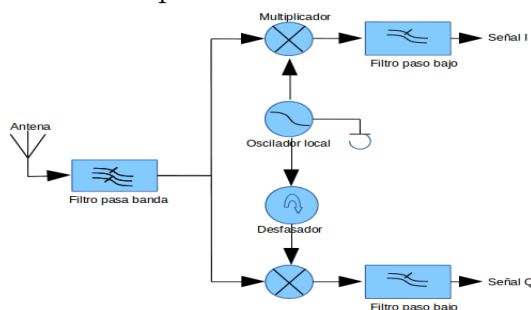
2.2. Filtros físicos.

Existen diversos tipos de implementación electrónica de filtros físicos según los componentes de los que estén formados, entre los que destacan la implementación RC y RCL, y que dependiendo de la distribución de sus componentes actuarán de un modo u otro. Por lo que respecta a su uso, recordemos que en los diagramas propuestos en el capítulo 0, tanto en el contexto de radio clásica como en la etapa física de SDR, se utilizaban filtros en tres contextos diferenciados: eliminación de bandas no deseadas provenientes de la antena, filtro de eliminación de señales no audibles y filtros estrechos para la obtención de una señal lo más parecida posible a la señal emitida, que en el caso SDR serán también implementados por *software*.

Receptor de conversión directa:



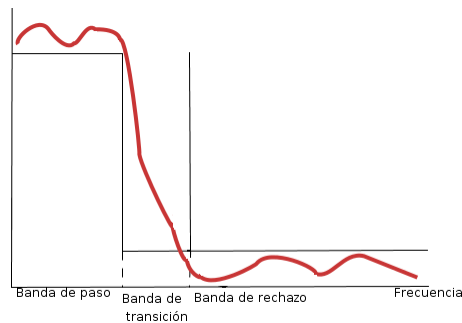
Receptor SDR:



El primer filtro es el que elimina las bandas para las que el receptor no está diseñado. Así, por ejemplo, en el caso de un receptor de FM comercial convencional, se busca la atenuación de

aquellas frecuencias superiores e inferiores a los rangos que consta la banda (88,108)MHz, y en el caso SDR, teóricamente al disponer de un amplio rango de posibles frecuencias de recepción de entre los pocos KHz hasta 1GHz, se buscará el filtrado espectral fuera de este rango. Sin embargo, debido justamente a la amplia gama de frecuencias que generalmente cubren los dispositivos de muestreo para SDR, se requiere en muchas ocasiones de un filtrado más fino y específico de ciertas bandas con el fin de evitar intermodulaciones producidas al tratar la señal provenientes de señales fuertes del espectro. Conviene además, filtrar antes de realizar el muestreo para evitar posibles pérdidas de información.

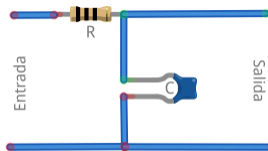
2.2.1. Filtro PASO BAJO. En esta sección estudiaremos casos no ideales de este tipo de filtros, en los que cuanto mayores sean las componentes espectrales presentes en la señal, mayor será su atenuación.



Como hemos comentado, nos puede interesar situar estos filtros tras la antena a la hora de tratar de sintonizar bandas bajas para evitar interferencias provenientes de estaciones de alta potencia provenientes de, por ejemplo, las frecuencias asociadas a las estaciones de *broadcasting* de AM o FM. Así, con el fin de poder trabajar con una onda libre de interferencias o intermodulaciones procedentes de dichas emisiones en el caso de que por ejemplo queramos sintonizar los 50Mhz, procederíamos del mismo modo. También se extiende su uso al previo envío de la señal demodulada al altavoz para eliminar señales de alta frecuencia.

EJEMPLO 2.14. Filtro paso bajo RC.

Consideremos los siguientes esquemas electrónicos formados por una resistencia y un condensador en la disposición señalada, a los que llamaremos célula RC.



Por una parte, si aplicamos la ley de Ohm¹ se tiene que $V_r = RI(t) = RQ'(t)$ (donde $Q(t)$ es la carga del condensador en el instante t , R y C son respectivamente el valor de la resistencia y capacidad del condensador). Por otra parte, como la carga acumulada en el condensador genera otra caída de voltaje proporcional a la carga, el voltaje en el condensador será de $V_c(t) = \frac{1}{C}Q(t)$.

Aplicando ahora la segunda ley de Kirchoff², los voltajes de entrada y de salida deben ser iguales, con lo que $RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V_e$.

¹Una resistencia provoca una caída de voltaje proporcional a la intensidad que circula por el circuito.

²Comúnmente llamada LVK. En un lazo cerrado la suma de las caídas de tensión es igual la tensión total suministrada.

Llegados a este punto, si elegimos como señal el voltaje de salida, éste es igual al voltaje del condensador, determinado por $\frac{1}{C}Q(t)$ y todo el sistema determinado por el circuito lo podemos representar mediante el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V_e(t) & \longrightarrow & \begin{cases} RCV'_s(t) + V_s(t) + V_s(t) = V_s(t) \\ V_s(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow V_s(t) \\ \downarrow \mathcal{F} & & \\ \widehat{V}_e(\omega) & \longrightarrow & \widehat{V}_s(\omega) = \frac{1}{1+iRC\omega} \widehat{V}_e(\omega) \longrightarrow \widehat{V}_s(\omega) \end{array}$$

TEOREMA 2.15. *Una célula RC es un filtro.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $\widehat{V}_s(\omega) = \frac{1}{1+iRC\omega} \widehat{V}_e(\omega)$. Si consideramos la señal $h(t) := \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$, su transformada es $\frac{1}{1+iRC\omega}$, con lo que atendiendo a que $h(t) \in \mathcal{L}_1$, aplicando 1.75 tenemos

$$(2.2.1) \quad Ax(t) = (x * h)(t).$$

Como las señales de entrada son casi periódicas, son acotadas con lo que se tiene que

$$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty \int_{\mathbb{R}} h(s) ds = \|x\|_\infty$$

Esto, junto con la evidencia de ser temporalmente invariante y lineal, justifica que es un filtro. \square

HECHO 2.16. *Análisis de las propiedades del filtro RC.*

- Respuesta de impulso. $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$.
- Respuesta en frecuencia (función de transferencia). Sea una función $e_\omega(t)$, entonces la respuesta viene determinada por $v(t) = H(\omega)e_\omega(t)$, de modo que sustituyendo en la ecuación 5.1.1., obtenemos $(i\omega RC + 1)H(\omega)e_\omega(t) = e_\omega(t)$, de donde obtenemos $H(\omega) = \frac{1}{1+iRC\omega}$, con módulo $|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+(iRC)^2\omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+(RC)^2\omega^2}}$.
- Su respuesta de salto es $s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t)$.
- Su frecuencia de corte es $\nu_c = \frac{1}{2\pi RC}$.
- Estos filtros pueden además situarse en cascada, y dependiendo del número n de filtros usados, se les puede llamar de grado o orden n .

EJEMPLO. **2.16.1** Veamos como filtrar todas las frecuencias superiores no audibles tras un circuito en la que se obtuvo una transmisión de voz en su banda base.

Nuestro objetivo será filtrar las frecuencias no audibles, de modo que eliminaríamos frecuencias superiores a 20KHz. En otras palabras, haremos uso de un filtro real paso bajo cuya frecuencia de corte es tratable por una célula RC.

La frecuencia de corte se obtiene entre la ecuación $\nu_c = \frac{1}{2\pi RC}$, y aunque la pareja de valores RC puede en principio ser de cualquier valor mientras cumpla las expectativas deseadas para la ν_c , conviene que el valor del condensador (que a ser posible no sea polarizado) sea relativamente pequeño de modo que empíricamente sea funcional. Resulta útil, además, fijar el valor del condensador, ya que el abanico de valores comerciales de las resistencias es mucho mayor.

Así, fijado un valor de $C=10\text{nF}$, se tiene que $R = \frac{1}{2\pi 10\text{nF} \cdot 20\text{KHz}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-9} \cdot 20 \cdot 1000} = 7957,74 \cong \frac{7,95\text{K}\Omega}{C}$ (siendo este último la aproximación al valor comercial).

DEFINICIÓN 2.17. Llamamos belio a la razón en potencia entre la señal a la entrada del filtro y a la salida. En el contexto de telecomunicaciones suele usarse un submúltiplo llamado decibelio de esta relación definido como $db = 10 \log_{10} \frac{\|A(x(t))\|_2}{\|x(t)\|_2}$, aunque puede definir también relaciones entre voltajes o intensidades.

TEOREMA 2.18. Dado un filtro RC, en su frecuencia de corte, se cumple:

- reduce $\sqrt{2}$ veces la tensión de entrada.
- se reduce un 50 % su potencia de entrada.
- reduce -3dB la salida respecto la entrada.

DEMOSTRACIÓN. a) Supongamos que se le aplica una señal $s \in S_\nu$ unitonal, se tiene $V_{in} = ACos(\omega t)$. Tenemos por una parte que al aumentar la potencia X_c , disminuye, por lo que aplicando la ley de Ohm, la corriente del circuito es $I_{max} = \frac{V_{in}}{R}$, y. Por otra parte, la corriente total del circuito es $I = \frac{V_{in}}{\sqrt{R^2 + X_c^2}}$, si a la frecuencia de resonancia se da que $R = X_c$, entonces tenemos:

$$I = \frac{V_{in}}{\sqrt{2R^2}} = \frac{V_{in}}{R\sqrt{2}} \longrightarrow I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Alternativamente, $f_c = \frac{1}{2\pi RC} \xrightarrow{\omega=2\pi\nu} \omega = \frac{1}{RC}$, con lo que $|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+(i\frac{1}{\omega})^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Como la definición de potencia conlleva una integral y un límite, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i^2(t) dt$ al ser afectada por el filtro, en la frecuencia de corte se tendrá $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(\frac{i(t)}{\sqrt{2}}\right)^2 dt = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i(t)^2 dt$.

c) En general vemos que si se reduce la potencia a la mitad, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} G_{db1} = 10 \log A \\ G_{db2} = 10 \log \frac{A}{2} \end{array} \right\} \longrightarrow G_{db2} - G_{db1} = 10 \log \frac{A}{2} - 10 \log A = 10 \log A - 10 \log 2 - 10 \log A \simeq -3db. \quad \square$$

2.2.2. Filtros paso alto.

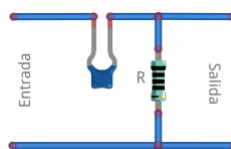
DEFINICIÓN 2.19. Un filtro paso alto es el que deja pasar las componentes de la señal cuya frecuencia superen cierta frecuencia de corte. Podemos requerir el uso de este tipo de filtros en el caso que el objetivo sea tratar con una señal de un transpondedor ADS-B para que únicamente deje pasar las frecuencias altas relevantes, de modo que al amplificar la señal no se vea alterada por moduladoras vecinas.

OBSERVACIÓN 2.20. En la implementación RC de un filtro paso alto cabe indicar que, de forma recíproca, su uso con frecuencia de corte superior a 3MHz es atípico tanto por la especificación de los componentes necesarios, como por la poca calidad de su salida.

TEOREMA. 2.19.1. Cálculo de la respuesta de impulso en un filtro paso alto ideal con pulsación de corte ω_c , es una función de la señal unitonal $X_c \in S_s$.

Por tanto, como $h_{hp}(t) = \delta(t) - h_{lp}$ en el caso de un filtro ideal paso alto se tiene:
 $h(t) = \delta(t) - h_{lp} = \delta(t) - h_{lp} = A\delta(t) - \frac{\omega_c A}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$.

AFIRMACIÓN 2.21. El esquema de un filtro paso alto es:



EJEMPLO. **2.19.2.** Análisis de un filtro RC. Considérese el filtro siguiente dado por un circuito RC con valores: $R=1$, $C=1/10$.

Por los cálculos indicados en la teoría, la respuesta en frecuencia de este filtro es:

$$H(\omega) = \frac{1}{1+iRC\omega} = \frac{1}{1+i\frac{1}{10}} = \frac{1}{1+0,1i}, \text{ cuyo módulo (respuesta en frecuencia) es: } |H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+(RC)^2\omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{1}{10})\omega^2}}.$$

Por otra parte, la respuesta en impulso es del circuito RC es:

$$h(t) = CT\mathcal{F}^{-1}(\hat{H}(\omega)) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t) = 10e^{-10t}u(t).$$

EJEMPLO 2.22. Como las señales de traza ADS-B emitidas por los aviones se emiten por 1.090Mhz, para fabricar un hipotético filtro RC paso alto a tal efecto, supondremos que queremos que la atenuación para señales de frecuencia menor que 880Mhz, la señal está atenuada solamente a 1db. Entonces su frecuencia de corte vendrá a ser: $f_c = \frac{\nu}{10^{\frac{db}{20}}} = \frac{880}{10^{-\frac{31}{20}}} = 987,37Mhz$.

Entonces, por una parte, escogiendo el valor $C = 10pF$, tenemos que $R = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-12} \cdot 987 \cdot 10^6} = 161\Omega$.

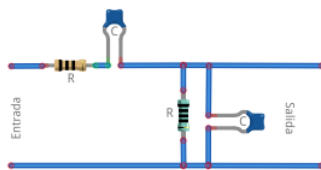
Podemos ver también cuál sería la atenuación de la frecuencia de interés: $1090 \cdot 10^6 = \frac{987,37}{10^{-\frac{db}{20}}} \rightarrow 10^{-\frac{db}{20}} = \frac{987,37 \cdot 10^6}{1090 \cdot 10^6} = 0,9058 \rightarrow \frac{-db}{20} = \frac{\log(0,9058)}{\log(10)} = -0,042 \rightarrow db = 0,85$ de atenuación.

No obstante, este razonamiento tiene dos importantes impedimentos para su puesta en práctica, ya que, por una parte, existen otras magnitudes como la calidad del filtro, que en el caso RC el valor del condensador no debe estar por debajo de los nanofaradios porque desestabilizarían su función (factor Q), y por otra parte, si se cogen valores del condensador 100 veces superior (escala de nanofaradios), los valores de la resistencia adquieren un valor muy bajo, lo que las hace tecnológicamente imposibles de realizar.

OBSERVACIÓN 2.23. Debido a este razonamiento, este tipo de filtros generalmente se utilizan en baja frecuencia, por debajo de los 3MHz.

2.2.3. Filtros pasa banda. Entendido como una extensión del concepto de filtro pasa-banda ideal, resulta en primera instancia evidente que en frecuencias en las que el filtro sea construible y aplicable, un filtro pasa-banda puede entenderse como una combinación de un filtro paso bajo cuya frecuencia de corte situada en la frecuencia más alta que se desee que deje pasar el filtro, y un filtro paso alto con frecuencia de corte situada en la frecuencia más baja de las que se desea que el filtro no atenue.

EJEMPLO 2.24. Un ejemplo de filtro pasa banda con dos células RC:



En este caso, las respuestas vendrían determinadas por la composición de las funciones de respuestas según la disposición de los filtros. Este concepto, el de anidación de filtros, recibe el nombre de orden de filtros.

EJEMPLO 2.25. En la mayoría de emplazamientos, la franja frecuencial de FM *broadcast* concentra niveles de energía comparativamente enormes respecto de otras bandas, por lo que en este tipo de situaciones conviene un filtrado físico previa digitalización. Existen diversas formas de

abordar este problema, por ejemplo mediante el uso de un filtro rechaza banda centrado en los 98MHz, de modo que minimice el impacto de estas estaciones en otras bandas en recepción.

En este caso, encadenar dos células RC, una paso alto y otra paso bajo no es viable, pues si fijamos un valor más pequeño para el condensador, por ejemplo de 10pF, se tiene que: $R = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \text{pf} \cdot 85 \text{Mhz}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 85 \cdot 10^6} = 187,24\Omega \cong 180\Omega$, ofreciendo una alta distorsión, y si fijamos el condensador en la escala de nanofaradios la resistencia será casi nula, valores tecnológicamente imposibles por la propia tolerancia de la resistencia. Esta razón, ilustrada también en el ejemplo 2.22., es la que nos lleva a plantearnos la necesidad de introducir los filtros RCL.

AFIRMACIÓN 2.26. Al igual que la franja FM constituye un foco de problemas en la recepción en otras bandas, existen otras franjas en HF y UHF que también concentran niveles importantes de energía, con lo que en lugar de usar filtros rechaza banda, situados en cascada que mermarían la calidad de la señal recibida al no ser ideales, se suelen usar un juego conmutado de filtros pasa-banda basados en una configuración electrónica RCL que sí ofrece valores cuyos cálculos son asumibles tecnológicamente.

2.2.4. Filtros RCL.

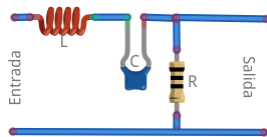
DEFINICIÓN 2.27. Dada una señal $x \in S_V$ con $x(t) = \cos(2\pi\nu t + \phi)$, que pasa por un circuito con amplitud $A_0x(t)$, si llamamos a la tensión entre los extremos del mismo $v_0x(t)$, definimos *impedancia* como $Z = \frac{I_0}{A_0} e^{i\phi}$.

OBSERVACIÓN 2.28. Llamamos impedancia a la oposición que se presenta al paso de corriente un circuito al aplicársele una tensión, que puede ser vista como una señal unitonal con cierta amplitud y fase. Por tanto, cada componente del circuito presentará una cierta oposición de modo que podemos considerar, para el caso que nos ocupa, la oposición presentada por una resistencia, condensador o bobina.

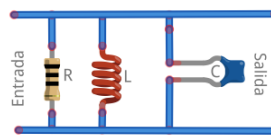
DEFINICIÓN 2.29. Un circuito RCL está formado por una resistencia, una bobina y un condensador.

EJEMPLO 2.30. Estos elementos pueden estar dispuestos en diferentes configuraciones:

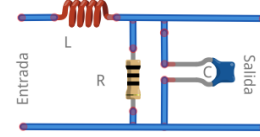
RLC con dos elementos en serie:



RCL en paralelo



RCL Mixtas.



DEFINICIÓN 2.31. Llamamos función de transferencia al cociente entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada de un sistema RCL.

AFIRMACIÓN 2.32. Con el objetivo de modelizar el comportamiento de este tipo de circuitos, necesitaremos saber como se comporta el voltaje en cada uno de los componentes, para ello necesitaremos de las fórmulas:

Voltaje resistencia	Voltaje bobina	Voltaje condensador
$V_r(t) = Ri(t)$	$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$V_c(t) = V(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau$

En donde R es el valor de la resistencia medido en Ohmios, L es el valor de la inductancia medido en Henrios y C la capacidad del condensador medido en Faradios.

TEOREMA 2.33. *Análisis de los filtros RCL en serie.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos pues un filtro RCL, con salida en el condensador. De modo que, por la ley de Kirchoff, tenemos que la suma del voltaje en cada rama es igual a la suma de todos los voltajes, con lo que

$$V_r + V_l + V_c = V(t).$$

Sustituyendo los valores por sus expresiones, tenemos

$$(2.2.2) \quad RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + V(0) + \frac{1}{c} \int_0^t I(\tau) d\tau = V_{entrada}(t).$$

A partir de aquí, distinguimos diversos casos:

Caso 1: Considerando que el elemento de salida del circuito es el condensador,

tenemos que como $V_c(t) = V(0) + \frac{1}{c} \int_0^t I(\tau) d\tau$, su derivada es $I(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt}$.

Si sustituimos ahora en la expresión (2.2.2.), tenemos que

$$RC \frac{dV_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2 V_c}{dt^2} V_c = V_{entrada}.$$

Además, al intervenir únicamente el tiempo, podemos expresarlo como: $(LC) V_c'' + (RC) V_c' + V_c = V_{entrada}$.

Tomando ahora transformadas en esta expresión tenemos que

$$\widehat{V}(\omega) = LC \left[\omega^2 \widehat{V}_c(\omega) - sV_c(0) - \dot{V}_c(0) \right] + RC \left[\omega \widehat{V}_c(\omega) - V_c(0) \right] + \widehat{V}_c(\omega).$$

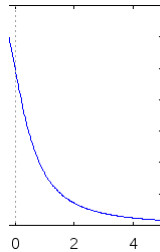
Y suponiendo condiciones iniciales nulas, concluimos que

$$\widehat{V}(\omega) = LC \left[\omega^2 \widehat{V}_c(\omega) \right] + RC \left[\omega \widehat{V}_c(\omega) \right] + \widehat{V}_c(\omega) = (LC\omega^2 + RC\omega + 1) \widehat{V}_c(\omega).$$

Tomando el cociente entre el voltaje de salida y el de entrada obtenemos que la función de transferencia es

$$\frac{v_c}{v_{entrada}} = \frac{1}{LCx^2 + RCx + 1}.$$

Además, su gráfica tiene el aspecto:

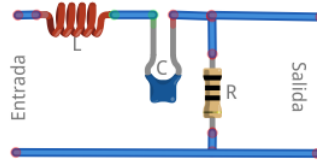


Con lo que estamos ante un filtro de tipo paso bajo.

De hecho, hay distintos casos de acuerdo al discriminante $\Delta = R^2C^2 - 4LC = C^2(R^2 - 4\frac{L}{C})$ de modo que denotando $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y llamándolo frecuencia angular, y $\alpha = \frac{R}{2L}$ denominándolo atenuación, se tiene la ecuación del sistema:

$$\frac{\delta^2}{\delta t^2} I(t) + 2\alpha \frac{\delta}{\delta t} I(t) + \omega_0^2 I(t) = 0.$$

Caso 2: Supongamos que el elemento de salida es la resistencia.



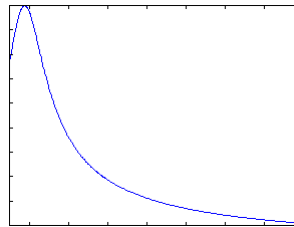
Tenemos que como $V_r(t) = Ri(t)$, con lo que directamente tenemos: $i(t) = \frac{V_r}{R}$. Si sustituimos ahora en la expresión (2.2.2.)

$$V_r + \frac{L}{R} \frac{dV_r}{dt} + V(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t V_r d\tau = V_{entrada}(t)$$

Con lo que desarrollándolo, realizando la transformada y calculando el cociente, tenemos

$$\frac{v_r}{v_{entrada}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Además, su gráfica tiene el aspecto:



Con lo que estamos ante un filtro de tipo pasa banda, cuya frecuencia de resonancia es: $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. □

OBSERVACIÓN 2.34. De igual modo, para una salida por la bobina, la tensión de salida se aproximará a cero para frecuencias bajas, con lo que se trata de un filtro paso alto.

AFIRMACIÓN 2.35. Llamamos configuración del filtro a las diferentes topologías (serie o paralelo) de los componentes, junto con el orden de distribución de los mismos.

EJEMPLO 2.36. Calcula los valores RCL para un filtro paso bajo, con frecuencia central 125MHz.

En este caso, tenemos que considerar la configuración serie paso bajo, con lo que su función de transferencia es: $\frac{v_c}{v_{entrada}} = \frac{1}{LCx^2 + RCx + 1}$. y su frecuencia central $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. De este modo, tomando $\omega_0 = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{125}{2\pi}$, tenemos que, eligiendo por ejemplo $R=100\Omega$, podemos aproximar a valores comerciales, tomando $L = \sqrt{\frac{1}{\frac{125}{2\pi} C}}$.

DEFINICIÓN 2.37. Llamamos frecuencia de resonancia para un circuito RLC en serie (paralelo) a la frecuencia para la cual la suma de ambas impedancias se anula (es infinita), es decir, que la tensión entre ambos componentes es opuesta (es equivalente a un circuito abierto).

Cabe finalmente señalar que estos filtros, de uso común dentro del campo de SDR forman una extensa familia cuyo estudio excede del propósito de este trabajo. No obstante, resulta tan usual el uso de filtros físicos que incluso se suele utilizar filtros comerciales pasa banda como el RBP-140, que filtra señales fuera del rango 130Mhz-150Mhz lo que lo hace útil para mejorar la recepción

en la banda de 2m o satélites meteorológicos. Ejemplos reales de filtros aplicados a la mejora en recepción de SDR mediante selección de bandas pueden consultarse en la referencia [14].

2.3. Otros filtros.

Existen otros filtros que no encajan exactamente dentro de la clasificación por regiones de frecuencias que se ven afectadas. No obstante, al requerir de su uso a la hora de la demodulación I/Q indicaremos sus propiedades básicas.

2.3.1. Filtros integrales.

DEFINICIÓN 2.38. Llamamos filtro integral a aquel que responde a la salida como $g' = f$.

En este caso, tenemos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x}$. De este modo, resulta sencillo ver que si g es una primitiva de f , y nos limitamos a señales causales, entonces está determinado por una señal causal. Así, $g(t) = \int_{-\infty}^t f(s)ds$, que puede ser escrito en términos de la función de Heaviside $g = u * f$, de modo que esta convolución tiene por respuesta en impulso la función unidad.

2.3.2. Filtros diferenciales.

DEFINICIÓN 2.39. Llamamos filtro diferencial a aquel que responde a la salida $g = f'$.

En este caso se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)} = x$, con el grado de $P(x)$ mayor que el de $Q(x)$.

La respuesta en impulso en este caso es $h = \delta'$, con lo que $h=u$ y $g = u * f$.

Referencias principales:

[GW, OW, 9].

Modulación clásica.

Del conjunto de señales $\mathcal{AP}(\mathbb{R})$, consideraremos el subconjunto de las señales sinusoidales unitonales $S_\nu = \{y(t) : y(t) = A \cos(2\pi\nu t + \phi) ; A, \phi, \nu \in \mathbb{R}^+\}$, de modo que cada $y(t) \in S_\nu \subseteq \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ sea la representación matemática de la onda en función del tiempo t , en un punto determinado del espacio. Como los elementos de S_ν poseen una expresión común, podemos hacer referencia a una señal particular mediante sus parámetros, de modo que dada la señal $x \in S_\nu$ podemos denotarla mediante $x_{A,\phi} \in S_\nu$.

Sabemos además, que *para una cierta tolerancia* $\epsilon > 0$, una señal $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ es aproximable mediante $y_\epsilon(t) \in \mathcal{Trig}(\mathbb{R})$; es decir, que la señal $x(t)$ es aproximable por una combinación lineal de señales sinusoidales unitonales $y_\epsilon(t) = \sum x_{m_i}(t) = \sum A_i \cos(2\pi\nu_i t + \phi_i)$, en donde cada sumando $x_{m_i}(t) \in S_\nu$ tiene por parámetros: A_i , *amplitud en pico de la onda* y se mide en voltios; ν_i que se llama *frecuencia*, e indica cuantas oscilaciones se producen en un segundo (y se mide en Hz); ϕ_i se llama *fase inicial*, y sitúa la posición inicial de la onda medida en radianes. Además, utilizaremos las magnitudes: ω_i *velocidad angular* (o *pulsación* en contexto eléctrico), con $\omega_i = \frac{\nu_i}{2\pi}$; y el número de segundos necesarios para una oscilación completa llamado *período*, y denotado por $T_i = \frac{1}{\nu_i}$.

3.1. Modulación: elementos básicos.

DEFINICIÓN 3.1. Diremos que M es un operador modulador si para cada señal x_m de su dominio, devuelve otra señal X_m generada que cumpla las condiciones necesarias de tipo técnico que permita una emisión como se describió en el apartado 0.1

$$M : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ x_m & \rightsquigarrow & X_m \end{array} .$$

AFIRMACIÓN 3.2. A X_m la llamamos señal modulada, y es la que es susceptible de ser emitida o irradiada al medio, tras ser convenientemente tratada para ser volcada a la antena.

DEFINICIÓN 3.3. Llamaremos señal moduladora a aquella que contiene la información a transmitir ya sea audio o cualquier tipo de contenido como datos, y la denotaremos por x_m .

EJEMPLO 3.4. De este modo, en el caso analógico, podemos considerar que lo que queremos transmitir es una onda audible diapason ($\nu_m = 440Hz$) unitonal, la cual hemos convertido de onda acústica a señal electromagnética. En este caso $x_m \in S_\nu$ y su expresión sería la siguiente función trigonométrica:

$$x_m(t) = A \cos(2\pi\nu t) = A \cos(880\pi t).$$

OBSERVACIÓN 3.5. En la práctica, las ondas moduladoras no son tan simples, ya que:

1. En el contexto acústico, la señal en realidad está formada por distintas frecuencias presentes al mismo tiempo, resonando a su vez en frecuencias superiores llamadas *armónicos*, con lo que la complejidad de estas ondas (y por tanto de su expresión matemática) aumenta. Sin embargo, se siguen pudiendo expresar como suma de señales sinusoidales; esto en parte es lo que llamamos *principio de superposición*, es decir, que la expresión de dos o más ondas sinusoidales superpuestas en el tiempo se formaliza mediante la suma de las expresiones de sus señales unitonales simples con sus respectivos parámetros A_i y ν_i , obteniendo un elemento de $\mathcal{T}rig(\mathbb{R})$.
2. Además, como en general todo el mensaje acústico contiene variaciones en las frecuencias (y armónicos) que lo forman, si se considera también la evolución del mensaje en el tiempo, la expresión general aún se complica más.
3. En el caso en el que la señal sea digital, $x(t)$ será una sucesión de elementos de $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, de la forma $\{x_m\}_t := x_m[t] = \delta_x$.

DEFINICIÓN 3.6. De la primera observación deducimos que será necesario trabajar con señales del conjunto

$$S_{\leq \delta} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_i(t) : x_i \in S_{\nu}, |\nu| \leq \delta \right\}$$

cuyos elementos llamaremos polinomios trigonométricos con ancho de banda δ .

Por otra parte, una de las razones que justifican el uso del operador modulación está relacionado con el hecho de trabajar con señales de mucha más alta frecuencia que la audible, con lo que una posibilidad de definición del operador modulación pasa por, fijada una señal de alta frecuencia de S_{ν} , alterar alguno de sus parámetros modo que se consiga incluir los valores instantáneos de x_m .

DEFINICIÓN 3.7. Llamamos señal portadora, y la indicaremos por $x_p \in S_{\nu_p}$, a la señal a la que le variaremos alguno de sus parámetros según el valor de x_m en función del tiempo mediante el operador modulación. Podremos considerar por tanto que bajo estas premisas el operador necesita como mínimo conocer qué parámetro se variará de la señal portadora, y en qué frecuencia oscila ésta. De este modo definimos el operador modulación como

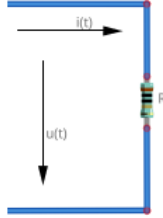
$$M_{\nu_p}^Y : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ x_m & \rightsquigarrow & X_m \end{array} .$$

En el contexto descrito, y en cualquiera de las bandas, podemos considerar cuatro casos dependiendo del carácter de las señales que forman la señal a emitir:

- portadora analógica y señal moduladora analógica.
- portadora analógica y señal moduladora digital.
- portadora digital y señal moduladora digital (modulación de pulsos).
- portadora digital y señal moduladora analógica (modulación delta).

En este capítulo nos limitaremos a la definición y análisis de algunos operadores de modulación en el caso particular de modulación con portadora analógica.

DEFINICIÓN 3.8. En un circuito llamamos *potencia* al producto del voltaje por la corriente $P_c = U \cdot I$, donde la diferencia de potencial (o voltaje) se mide en voltios y la intensidad en amperios.



Si R es la resistencia del circuito medida en ohmios, de la ley de Ohm, tenemos que $P_c = u(t)i(t) = Ri^2(t)$, con lo que la potencia por unidad de resistencia es: $p(t) = \frac{p_c(t)}{R} = i^2(t)$.

DEFINICIÓN 3.9. Llamamos energía disipada por unidad de resistencia a: $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T i^2(t) dt$ y potencia media a: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i^2(t) dt$.

PROPOSICIÓN 3.10. La potencia media de una señal unitonal es $\frac{A^2}{2}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t) \in S_\nu$, entonces tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \phi) \right) dt = \frac{A^2}{2}.$$

□

OBSERVACIÓN 3.11. Para ser de utilidad en la comunicación, el operador $M_{x_p}^Y$ debe incluir cierta “inyectividad”, en el sentido que se debe de cumplir las condiciones tanto físicas como matemáticas para que pueda recuperarse la señal moduladora desde la señal en la que se incluye la señal modulada captada por la antena.

DEFINICIÓN 3.12. Llamamos operador demodulador y lo denotamos por $(M_{\nu_p}^Y)^{-1}$ a:

$$\begin{array}{ccc} (M_{\nu_p}^Y)^{-1} : S \subset \mathcal{AP}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \\ X_m & \rightsquigarrow & x_m \end{array}$$

de modo que se cumple: $(M_{\nu_p}^Y)^{-1} (M_{\nu_p}^Y) (x_m) = x_m$.

AFIRMACIÓN 3.13. El proceso por el cual se propaga la onda emitida del emisor al receptor, genera una distorsión entre la propia señal emitida y la recibida, ya que por ejemplo, recordemos que a medida que se propaga una onda se produce una pérdida de energía que llamaremos *atenuación*, o puede suceder también que la señal recibida haya sido perturbada por otras señales.

DEFINICIÓN 3.14. Llamaremos transmisión de la señal x_m , con ancho de banda δ mediante la modulación Y en la frecuencia ν_p , a la terna $(X_m, M_{x_p}^Y, S_{\leq \delta})$, donde $X_m = M_{x_p}^Y(x_m)$. Elegimos esta terna como representante de la transmisión, porque el receptor a la señal que realmente tiene acceso es a X_m , conociendo parámetros relativos a x_p (como mínimo su frecuencia), y estableciendo un ancho de banda δ también conocido (o supuesto según el tipo de transmisión).

OBSERVACIÓN 3.15. De este modo, dada una transmisión, diremos que su operador modulador es inyectivo si puede recuperarse una señal x'_m , de modo que $X_m = M_{x_p}^Y(x'_m)$, conociendo únicamente ν_p y su ancho de banda δ , con lo que el receptor asumirá que $x_m = x'_m$.

En otras palabras, se nos plantea la idea de que restringiendo suficientemente el dominio e imagen del operador modulación podemos prever matemáticamente su inyectividad real asegurando así la existencia de $(M_{\nu_p}^{tipo})^{-1} : \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \rightarrow S$, definiéndolo mediante composición de los operadores necesarios para llegar a generar dicha x'_m .

$$\boxed{x_m} \longrightarrow \boxed{M_{\nu_p}^{tipo}} \xrightarrow[X_m]{\text{Emisión}} \boxed{(X_m, M_{\nu_p}^{tipo}, S_{\leq \delta})} \xrightarrow[X'_m]{\text{Emisión}} \boxed{(M_{\nu_p}^{tipo})^{-1}} \xrightarrow{\text{Mensaje}} \boxed{x'_m}$$

.....Emisión..... Propagación..... Recepción.....

AFIRMACIÓN 3.16. Como veremos, en el mejor de los casos, la existencia del operador inverso que garantice que $x_m = x'_m$ es meramente teórica, ya que por una parte existen *razones físicas* como las mencionadas referentes a la recepción en el caso analógico; por lo que en la práctica, lo que se buscará es la obtención de la señal X'_m tan similar a X_m como sea posible, de forma que tras aplicar el operador demodulación x'_m , se aproxime lo máximo posible a x_m . Para ello se intentarán subsanar aquellos aspectos físicos que permitan un margen de mejora, como por ejemplo, aumentar la potencia de la emisión o seleccionar otra banda que permita mejores condiciones en la transcepción. Diremos cuando estos inconvenientes físicos no están presentes, que la señal modulada se *recibe correctamente*, y de modo ideal; lo representaremos matemáticamente como en el contexto modulación-demodulación se cumplió que $X'_m = X_m$ y $x'_m = x_m$.

Por otra parte, cabe indicar que la onda recibida por la antena $A_m \in S$, aún no es X'_m , sino que abarca todo un rango de frecuencias en el que estará incluida la de la portadora de interés. Las etapas descritas en el capítulo 0 de los receptores, previas a la demodulación, incluirían un filtro inicial que elimina frecuencias ajenas a la banda de recepción y un filtro de sintonía de tipo pasa banda estrecho que devuelve únicamente el rango de frecuencias centrado en ν_p , con radio δ . De modo que se trata de, en la medida de lo posible, minimizar $|X'_m - X_m|$.

Además, cabe señalar que los fenómenos físicos no son los únicos que intervienen a la hora de asegurar una inyectividad en la modulación, ya que por otra parte, como probaremos, para cada operador definido, existen otros aspectos que garanticen su inversibilidad como serían la *eficiencia de modulación* y la correcta elección de frecuencias entre x_p y x_m , para el tipo de modulador analógico elegido.

Por lo que respecta a las emisiones digitales, al margen de las posibles interferencias físicas, se suman, además, otras consideraciones y otras herramientas para asegurar que el código recibido se aproxima lo máximo a los posibles mensajes de los que pueda estar formada la transmisión, y para ello se usan conceptos como la distancia de Hamming, etc., pudiéndose así implementar sistemas automáticos de detección y en ciertos casos, autocorrección de errores en recepción.

Dada la gran variedad de tipos de modulación, restringiremos el estudio a la modulación en amplitud y frecuencia por lo que respecta a las modulaciones de señales analógicas, indicando posteriormente cómo se amplía dicho estudio a la modulación de señales digitales.

3.2. Señales moduladas en amplitud.

La modulación en amplitud (AM) es la más antigua en su uso, probablemente por la simplicidad de su descripción e implementación electrónica tanto en su emisión como en recepción, aunque la señal recibida no sea muy nítida y no requiera de un ancho de banda relevante. No obstante, este tipo de modulación posee importantes inconvenientes, como que la onda propagada es muy susceptible a la estática y al ruido radioeléctrico.

3.2.1. MODULACIÓN AM. Desde el punto de vista estrictamente matemático, dada una señal portadora $x_p \in S_{\nu_p}$, su operador modulación en amplitud asociado se define como el operador *producto de señales*:

$$\mathcal{M}_{x_p}^{AM} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ x_m & \longrightarrow & X_m(t) = x_m(t) \cdot x_p(t) \end{array} .$$

Esta definición presenta cierta problemática a la hora de abordar detalles técnicos que garanticen la inyectividad del operador, ya que entre otras cosas, el proceso de recuperación de señal requiere de la composición de la señal recibida con otra cercana a su frecuencia generada en el receptor, de modo que, no hay garantía alguna de que la fase del emisor y del receptor sean la misma, es decir, se requiere de un sincronismo entre emisor y receptor. Con el objetivo de superar estos inconvenientes, en la práctica definiremos un operador de modulación de amplitud alternativo, denotado por M^{AMa} , de modo que varíe la amplitud de la onda portadora conjugándola con la onda de señal de información y considerando como punto de equilibrio de la señal moduladora el valor A_p .

DEFINICIÓN 3.17. Dadas $x_m(t) \in S$, $x_p(t) \in S_{\nu}$ definimos el operador modulación en amplitud asíncrono como el que genera la siguiente señal modulada:

$$M_{\nu}^{AMa}(x_m(t)) = (A_p + x_m(t)) \cos(2\pi\nu_p t) = X_m(t).$$

PROPOSICIÓN 3.18. Dada una señal modulada en AMa, se cumple: $X_m(t) = x_p(1 + \frac{1}{A_p}x_m)$.

DEMOSTRACIÓN.

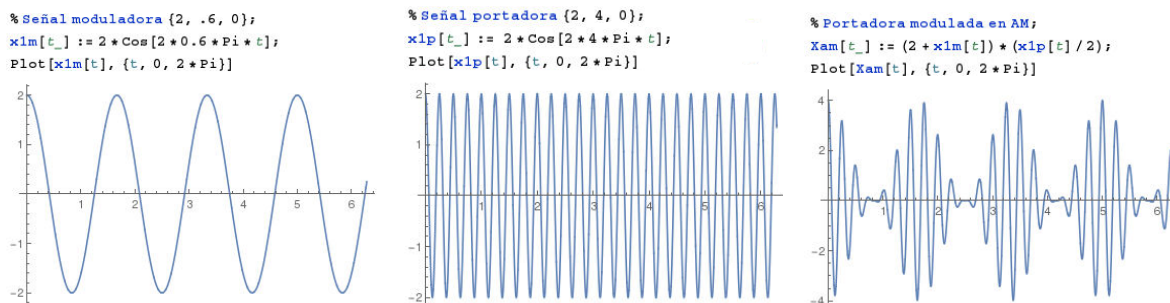
$$\begin{aligned} M_{\nu_p}^{aAM}(x_m(t)) &= X_m(t) = (A_p + x_m(t)) \cos(2\pi\nu_p t) \\ &= A_p \cos(2\pi\nu_p t) + x_m(t) \cos(2\pi\nu_p t) = \\ &= x_p(t) + \frac{x_p(t)}{A_p} x_m(t) = x_p(1 + \frac{1}{A_p} x_m). \end{aligned}$$

□

Por tanto, bajo este tipo de modulación, podemos representar el proceso por el que se produjo una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{aAM}, S_{\leq\delta})$ con el esquema:

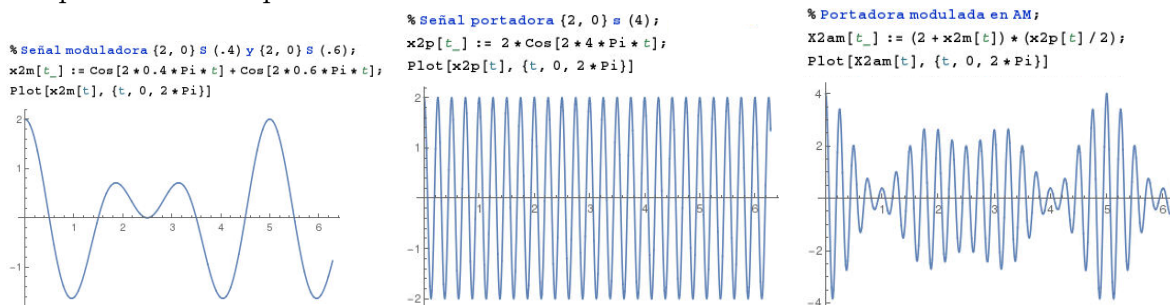
$$\begin{array}{ccc} x_m & \rightarrow & \boxed{M_{\nu_p}^{aAM}} \rightarrow X_m = x_p(1 + \frac{1}{A_p}x_m). \\ & & \uparrow \\ & & x_p \end{array}$$

EJEMPLO 3.19. : **(Modelo 1)**. Veamos en el siguiente ejemplo cómo una portadora¹ $x_m = 2 \cos(2\pi 0,6t)$, es modulada mediante una señal sinusoidal pura de parámetros $x_m = 2 \cos(2\pi 4t)$.



EJEMPLO 3.20. **(Modelo 2)**. Consideremos ahora que la señal moduladora está formada por dos tonos de parámetros $x_{m_1} = 2 \cos(2\pi 0,6t)$ y $x_{m_2} = 2 \cos(2\pi 0,4t)$. Con la portadora $x_p = 2 \cos(2\pi 4t)$.

Por el principio de superposición, se tiene que x_m es la suma de las dos señales moduladoras, con lo que se obtiene que:



DEFINICIÓN 3.21. Sea una señal periódica $y(t)$, atendiendo en parte a lo anteriormente descrito, definimos los siguientes parámetros y factores asociados:

- Valor medio: media algebraica de los valores instantáneos de un periodo, $V_m\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$.
- Valor eficaz: es la media cuadrática de los valores instantáneos de un período, $V_e\{x(t)\} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x(t))^2 dt}$.
- Definimos el factor de forma como el cociente entre el valor eficaz y el valor medio.
- El factor de amplitud (o de cresta de onda) al cociente entre el valor de cresta máximo y el valor eficaz.

OBSERVACIÓN 3.22. El valor medio es 0 para las señales con semiperíodos simétricos con lo que para salvar la dificultad, el cálculo se realiza sobre la mitad de cada período.

PROPOSICIÓN 3.23. Dado $y \in S_\nu$, la razón entre el valor medio y el eficaz es constante (y vale $\sqrt{2}$).

DEMOSTRACIÓN. $V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (y(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (A \cos(\omega t))^2 dt} = \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \text{Sen}^2(\omega t)}{2} dt} =$

¹Notar que para facilitar la ejemplificación visual en los ejemplos, se considera una señal portadora ν_p no muy elevada comparada con la realmente usada en el contexto radiofónico.

$$= \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \left(\frac{\omega t}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{4} \right)_0^{2\pi}} = V_m \sqrt{\frac{2\pi}{4\pi}} = V_m \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_m = V_e \sqrt{2}. \quad \square$$

3.2.2. ASPECTOS DE LA SEÑAL X_m . Dada una señal con una única componente espectral, es decir, sinusoidal unitonal $x_m \in S_\nu$, se tiene que $M_{\nu_p}^{AMa}(x_m) = X_m$ no es unitonal. Es decir, que la señal generada por el operador modulación contiene más componentes espectrales que la señal modulada.

TEOREMA 3.24. *El operador modulación $M_{\nu_p}^{AM}$ operando sobre una señal moduladora $x_m \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, genera una señal X_m que tiene por transformada de Fourier*

$$\hat{X}_m(\omega) = \frac{1}{2} \left[\hat{X}_m(\omega - \omega_p) + \hat{X}_m(\omega + \omega_p) \right].$$

DEMOSTRACIÓN. $\hat{X}_m(\omega) = \mathcal{F}(M_{\nu_p}^{AM}(x_m(t)))(\omega) = \mathcal{F}(x_m(t) \cdot x_p(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x_m(t))(\omega) * (\pi\delta(\omega - \omega_p) + \pi\delta(\omega + \omega_p)) =$
 $= \frac{1}{2} \mathcal{F}(x_m(t))(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2} \mathcal{F}(x_m(t))(\omega + \omega_p) = \frac{1}{2} \left[\hat{X}_m(\omega_p - \omega) + \hat{X}_m(\omega_p + \omega) \right]. \quad \square$

TEOREMA 3.25. *En una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{AMa}, \mathcal{AP}(\mathbb{R}))$ en la que se moduló una señal casi periódica arbitraria, se cumple*

$$\widehat{X}_m(\omega) = \hat{x}_p(\omega) + \frac{1}{2} \hat{x}_p(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2} \hat{x}_p(\omega + \omega_p).$$

DEMOSTRACIÓN. Usaremos que $\widehat{\cos(2\pi\nu_p t)}(\omega) = \frac{1}{2} (\delta(\omega - \nu_p) + \delta(\omega + \nu_p))$, por el ejemplo 1.59., se tiene que dada $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $(u * \delta(\omega - \alpha))(\omega) = u(\omega - \alpha)$.

Por otra parte, por la definición 2.16., tenemos que $x_m = x_p(t) + x_m(t)\cos(2\pi\nu_p t)$, con lo cual tenemos que:

$$\widehat{X}_m(\omega) = \hat{x}_p(\omega) + \widehat{x_m(t)\cos(2\pi\nu_p t)}(\omega) = \hat{x}_p(\omega) + \frac{1}{2} \widehat{x_m(t)}(\omega) * (\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)) = \hat{x}_p(\omega) + \frac{1}{2} \widehat{x_m(t)}(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2} \widehat{x_m(t)}(\omega + \omega_p). \quad \square$$

TEOREMA 3.26. *Dada la transmisión en la que $x_m \in S_{\nu_m}$, entonces X_m se puede expresar como combinación lineal de los elementos de la base $\{\cos(2\pi\nu_p t), \cos(2\pi(\nu_p - \nu_m)t), \cos(2\pi(\nu_p + \nu_m)t)\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Considerando la expresión de la señal modulada y operando tras extraer factor común A_p , se tiene:

$$\begin{aligned} X_m(t) &= A_p \left(1 + \frac{A_m}{A_p} \cos(2\pi\nu_m t) \right) \cos(2\pi\nu_p t) \stackrel{\mu = \frac{A_m}{A_p}}{=} A_p (1 + \mu \cos(2\pi\nu_m t)) \cos(2\pi\nu_p t) = \\ &= (A_p + A_p \mu \cos(2\pi\nu_m t)) \cos(2\pi\nu_p t) = A_p \cos(2\pi\nu_p t) + A_p \mu \cos(2\pi\nu_m t) \cos(2\pi\nu_p t) = \\ &= A_p \cos(2\pi\nu_p t) + \frac{A_p \mu}{2} \cos(2\pi(\nu_p - \nu_m)t) + \frac{A_p \mu}{2} \cos(2\pi(\nu_p + \nu_m)t). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

□

²Donde μ es el índice de modulación, y además hemos usado la identidad $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$.

AFIRMACIÓN 3.27. Como vemos, la primera componente no tiene información, solamente es una senoide en la frecuencia de la portadora, no obstante, las otras dos sí que incluyen como parámetro la señal moduladora.

DEFINICIÓN 3.28. Las dos últimas componentes de la fórmula 3.2.1., se llaman banda lateral inferior y banda lateral superior, respectivamente. Como vemos, la información de la señal moduladora está contenida en las bandas laterales en este tipo de modulación.

COROLARIO 3.29. *El operador de modulación en amplitud sobre S_{ν_p} suma a la frecuencia de la señal portadora otras dos señales, aumentando así las componentes en frecuencia de X_m , por tanto X_m no es unitonal.*

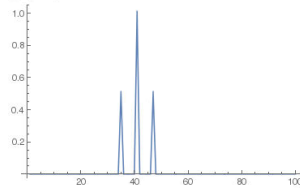
Por el teorema anterior, se tiene que al modular una señal de S_{ν} , en realidad obtenemos tres señales de S_{ν} :

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \nu_p - \nu_m & \nu_p & \nu_p + \nu_m \end{array}$$

EJEMPLO 3.30. Si consideramos la expresión del modelo 1 bajo esta visión, $x_m = (2, 0) \in S_{6,6}$, $x_p = (2, 0) \in S_4$, con lo que tenemos que al modularla, como $\mu = 1$, tenemos:

$$M_{\nu_p}^{AMa}(x_m(t)) = 2\text{Cos}(2\pi 8t) + \frac{2}{2}\text{Cos}(2\pi(8 - 1'2)t) + \frac{2}{2}\text{Cos}(2\pi(8 + 1'2)t).^3$$

```
nn = 1000; sr = 100; dt = 1 / sr; df = sr / nn;
data = Table[N[{t, Xam[t]}], {t, 0, dt (nn - 1), dt}];
ft = Fourier[data[[All, 2]], FourierParameters -> {-1, 1}];
ListLinePlot[Abs /@ Table[ft[[k]], {k, 1, 100}], PlotRange -> All]
```



COROLARIO 3.31. *Dada una señal moduladora x_m formada por la suma de n señales unitonales, entonces $X_{\nu_p}^{AMa}(x_m) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ tiene $2n + 1$ componentes frecuenciales.*

DEMOSTRACIÓN. Por lo anteriormente descrito en el teorema 3.26., podemos concluir que al aumentar inductivamente el número de componentes de las que está formado el polinomio trigonométrico que representa la señal moduladora, la señal modulada estará formada por $2n$ señales de S_{ν} que contengan información de la señal moduladora, y de la señal portadora en sí. En otras palabras, $2n+1$. \square

AFIRMACIÓN 3.32. Aunque estos argumentos están basados en el concepto de señal moduladora unitonal, podemos extender el concepto al caso de funciones moduladoras casi periódicas considerando el siguiente resultado.

EJEMPLO 3.33. Si consideramos la expresión del modelo 2, tenemos que la señal moduladora está formada por un polinomio trigonométrico de dos sumandos, con lo que en este caso la señal modulada, podrá expresarse como una suma de 5 señales:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \nu_p - \nu_{m_1} & \nu_p - \nu_{m_2} & \nu_p & \nu_p + \nu_{m_2} & \nu_p + \nu_{m_1} \end{array}$$

³Donde $M_{\nu_p}^{AMa}(x_m(t))$ es la modulación del modelo 1, nn es el número de puntos y sr el paso.

TEOREMA 3.34. *Dada una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{AMa}, S_{\leq\delta})$, siempre se cumple que $\delta = 2\max |\nu_{m_i}|$.*

DEMOSTRACIÓN. Por las condiciones de la transmisión, se tiene que si $X_m = \sum A_{m_i} \text{Cos}(2\pi\nu_{m_i}t) = M_{\nu_p}^{aAM}(x_m)$. Con lo que por el corolario 3.31, vemos que las señales que forman la imagen del operador modulación, toman un rango comprendido en el intervalo $[\nu_p - \nu_{m_{max}}, \nu_p + \nu_{m_{max}}]$, cuya medida es $2\nu_{m_{max}}$. \square

COROLARIO 3.35. *Una señal de voz humana, modulada en AM, ocupa un ancho de banda máximo de 10KHz.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que el ancho de banda determinado es el doble que el máximo de la señal moduladora, y la voz humana alcanza un valor máximo de 5.000Hz, el ancho de banda de una señal modulada en AM es de 10Khz. \square

EJEMPLO 3.36. Veamos si es posible dos emisiones simultáneas de fonía en banda aérea en 130.5MHz y 130.6MHz, con recepción en un punto donde hay intersección de las ondas.

Por lo anteriormente visto, podemos concluir que para que dos emisiones en AM, puedan realizarse sin interferir, su diferencia ha de ser mayor que 20Khz, y como $130,6 - 130,5 = 0,1\text{Mhz} = 100\text{KHz} > 10\text{KHz}$, dichas emisiones son factibles.

EJEMPLO 3.37. Veamos cuantos canales podemos disponer para un aeródromo en el que se ha asignado el rango de frecuencias comprendido en el intervalo $[117, 117.5)$ MHz.

Basta con realizar el cociente $\frac{(117,5-117)\text{Mhz}}{10\text{KHz}} = \frac{0,5\text{Mhz}}{10\text{KHz}} = \frac{500000}{10000} = 50$ Canales.

3.3. Demodulación de la onda portadora.

3.3.1. Método con portadora compleja. Recordemos que una señal es exponencial compleja si se puede escribir de la forma $Ae^{i(2\pi\nu t - \phi)}$, donde A es la amplitud de la señal, ν es su frecuencia y ϕ es el ángulo de fase. Por comodidad, en la descripción argumental, supondremos que $\phi = 0$ e $A = 1$, y que la señal modulada no está sobremodulada.

DEFINICIÓN 3.38. En este contexto, dada una señal moduladora $x_m \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, y una señal portadora exponencial compleja X_p , podemos extender la definición del dominio del operador modulación en amplitud para incluir el caso que la portadora sea exponencial compleja de igual modo que en la definición de M^{AM} :

$$\mathcal{M}_{\nu_p}^{AMc} : \begin{array}{ccc} \mathcal{AP}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \\ x_m & \longrightarrow & X_m(t) = x_m(t) \cdot e^{2\pi i\nu_p t} \end{array}$$

OBSERVACIÓN 3.39. El operador modulación en amplitud complejo tiene claramente inversa por la derecha, precomponiendo por $\mathcal{M}_{-\nu_p}^{AMc}$, se tiene que

$$\left(\mathcal{M}_{-\nu_p}^{AMc} \left(\mathcal{M}_{\nu_p}^{AMc} \right) \right) (x_m) = x_m.$$

Así, el espectro de la señal modulada es simplemente la de entrada desplazada en frecuencia, de acuerdo con la frecuencia de la portadora.

TEOREMA 3.40. *Demodulación en AM con portadora compleja. Dada una transmisión con portadora compleja $(X_m, M_{\nu_p}^{AMc}, S_{\leq\delta})$, $x_m = X_m(x_p)^{-1}$. Es decir $\left(M_{\nu_p}^{AMc}(X_m) \right)^{-1} = X_m e^{-i\omega t}$.*

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que

$$X_m X_p^{-1} = x_m(t) X_p X_p^{-1} = x_m e^{i\omega t} (e^{i\omega t})^{-1} = x_m e^{i\omega t} e^{-i\omega t} = x_m(t).$$

□

TEOREMA 3.41. *La señal modulada puede expresarse de la forma: $X_m = x_m(t)\cos(\omega_p t) + ix_m(t)\sen(\omega_p t)$.*

DEMOSTRACIÓN. La señal portadora es una exponencial compleja, y de la aplicación de la fórmula de Euler sobre la imagen del operador modulación obtenemos

$$\begin{aligned} X_m(t) &= M_{\nu_p}^{AMc} = x_m(t) X_p = x_m(t) e^{i(\omega_p t - \phi)} = x_m(\cos(\omega_p t) + i\sen(\omega_p t)) = \\ &= (x_m(t)\cos(\omega_p t)) + i(x_m(t)\sen(\omega_p t)). \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 3.42. Desde el punto de vista frecuencial, el proceso de modulación en AM genera que el operador $M_{\nu_p}^{AMc}$ tenga inversa por la derecha siempre que $c - \omega_p + \delta < c + \omega_p - \delta < \omega_p$. Para definir esta inversa necesitamos de un filtro pasa banda.

AFIRMACIÓN 3.43. En la práctica suele aplicarse la traslación antes que el filtrado, y como trasladar $-\nu_p Hz$ en el dominio de frecuencia es equivalente a multiplicar por $e^{i2\pi\nu_p t}$ en el dominio del tiempo, suele modularse otra vez con x_p .

COROLARIO 3.44. *El sistema que describe una demodulación en AM en el dominio de frecuencia contiene las componentes frecuenciales de la señal moduladora.*

DEMOSTRACIÓN. Debido a la afirmación anterior, tenemos que en el dominio temporal se da el siguiente sistema en toda la transmisión:

$$x_m \longrightarrow \boxed{M_{\nu_p}^{AM}} \longrightarrow x_m \cos(2\pi\nu_p t) \longrightarrow \boxed{M_{\nu_p}^{AM}} \longrightarrow x_m \cos^2(2\pi\nu_p t).$$

Por tanto, en el dominio frecuencial, el sistema queda:

$$\widehat{x}_m \longrightarrow \boxed{M_{\nu_p}^{AM}} \longrightarrow \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)) * \widehat{x}_m \longrightarrow \boxed{M_{\nu_p}^{AM}} \longrightarrow \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p))^2 * \widehat{x}_m.$$

Pero esta salida del sistema se puede reescribir como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} (\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)) * (\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)) * \widehat{x}_m = \\ &= \frac{1}{4} \widehat{x}_m(\omega + 2\nu_p) + \frac{1}{2} \widehat{x}_m(\omega) + \frac{1}{4} \widehat{x}_m(\omega - 2\nu_p). \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 3.45. El análisis del resultado, en este caso, es similar al anteriormete descrito y válido si ambas fases son iguales (sin pérdida de generalidad, tomamos $\phi = 0$ en la señal portadora en emisor y receptor). Tenemos además que, como el espectro de la señal portadora es: $\widehat{X}_p(\omega) = \pi (\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p))$, se tienen las mismas propiedades descritas del operador modulación con portadora real. El problema del hecho de suponer que ambas fases son iguales, (o en otras palabras, que estén sincronizadas) es que no tiene por qué suceder pudiéndose llegar a producir un desfase de 180° , de ahí la necesidad de introducir el concepto de modulación asíncrona.

3.3.2. Demodulación de AMa. Dada una señal $y(t) = \sum a_j e^{2\pi i \nu_j t} \in S_{\leq \delta}$, de modo que $y(t) > 0, \forall t > 0$ y $\delta \ll \nu_p$, entonces los máximos de $y(t) \cos(2\pi \nu_p t)$ se parecen mucho a $y(t)$, dado que comparativamente el valor de $y(t)$ en un intervalo de longitud $\frac{1}{\nu_p}$, es casi constante, con lo que el resultado es casi similar a interpolar $y(t)$ en los puntos $\frac{1}{\nu_p}$ porque como ν_p es muy grande, están muy cercanos.

DEFINICIÓN 3.46. Llamamos envolvente $e(t)$ de una señal X_m , a cualquier curva que pase por los máximos de $x(t)$.

En el caso que $x_m \in S_{\nu_m}$, definimos los siguientes parámetros:

- k_a , que se llama constante de sensibilidad de amplitud del modulador y su valor es $k_a = \frac{1}{A_p}$.
- $\mu = k_a A_m$, lo llamamos índice de modulación y es la razón entre las amplitudes de las señales moduladora y portadora $\left(\frac{A_m}{A_p}\right)$.

AFIRMACIÓN 3.47. Para la definición de los parámetros asociados a este tipo de modulación, convendrá reescribir la expresión de X_m de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M_{x_p}^{AMa}(x_m(t)) &= (A_p + x_m(t)) \text{Cos}(2\pi \nu_p t) = A_p(1 + \mu \cos(2\pi \nu_m t)) \text{Cos}(2\pi \nu_p t) = \\ &= x_p(t) (1 + \mu \cos(2\pi \nu_m t)) = x_p(t) \left(1 + \frac{x_m(t)}{A_p}\right). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.48. El índice de modulación μ también se suele expresar como porcentaje y, en el contexto electrónico, indica cuanto varía el voltaje de la señal portadora al ser modulada mediante el operador $M_{\nu_p}^{tipo}$ por la señal moduladora.

En este sentido, se ha de intentar evitar que el índice de modulación supere el 100% ya que, como seguidamente veremos, se rompería la inyectividad del operador modulador, disminuyendo sustancialmente la calidad en recepción, es decir, haciendo aumentar $|X'_m - X_m|$. Este fenómeno recibe el nombre de sobremodulación de la portadora.

PROPOSICIÓN 3.49. (Condición para la no existencia de sobremodulación). Dada una transmisión de parámetros $(X_m, X_{x_p}^{AMa}, \delta)$ se puede recuperar la señal x_m , si la envolvente $e(t) := A_p(1 + k_a x_m(t))$ de $X_{\nu_p}^{AMa}$ es positiva, i.e. $e(t) > 0, \forall t > 0$.

Demostración. Primeramente, cabe señalar que $e(t)$ es una envolvente, ya que como la frecuencia ν_p es alta respecto a $x_m(t)$, los máximos de $X_m(t)$ recorren la curva $A_p + x_m$. Como

$$X_{\nu_p}^{AMa} = A_p(1 + \mu \cos(2\pi \nu_m t)) \cos(2\pi \nu_p t)$$

se tiene que

$$X_{\nu_p}^{AMa} = A_p(1 + k_a A_m \cos(2\pi \nu_m t)) \cos(2\pi \nu_p t) = A_p(1 + k_a x_m(t)) \cos(2\pi \nu_p t) = e(t) \cos(2\pi \nu_p t).$$

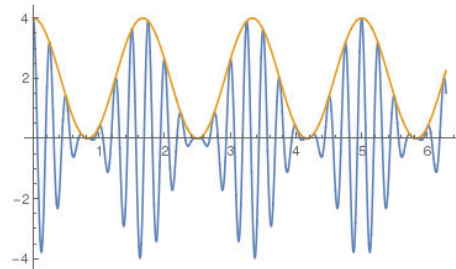
Si $e(t) > 0$ se mantiene el signo de la imagen marcado por la portadora, y en caso contrario, es cuando se entiende que se da el fenómeno de sobremodulación.

OBSERVACIÓN 3.50. De hecho la definición de AMa, utilizando la suma $A_p + x_m(t)$, se asegura que $A_p + x_m(t) > 0$ siempre que $|x_m(t)| \leq A_m$.

EJEMPLO 3.51. Veamos como se comporta la envolvente en los dos modelos.

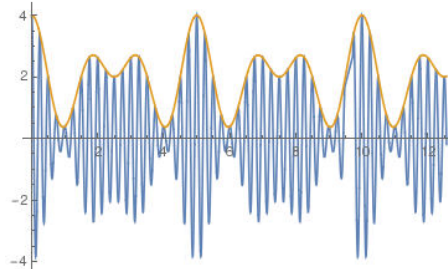
Primer modelo:

```
xenv[t_] := 2 * (1 + 0.5 * x1m[t]);
Plot[{Xam[t], xenv[t]}, {t, 0, 2 * Pi}]
```



Segundo modelo:

```
xenv[t_] := 2 * (1 + 0.5 * x2m[t]);
Plot[{X2am[t], xenv[t]}, {t, 0, 4 * Pi}]
```



PROPOSICIÓN 3.52. Si $\mu > 1$, $e(t)$ es una envolvente de x_m .

DEMOSTRACIÓN. Por construcción, si el índice de modulación es menor que 1, siempre se cumple que $e(t) > 0$, al igual del hecho de que pasa por todos los máximos de $X_m(t)$. \square

PROPOSICIÓN 3.53. En el contexto citado anteriormente, X_t está sobremodulada si $\mu > 1$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\mu > 1$, tenemos que como $\mu = k_a A_m$, tenemos que la envolvente $e(t) = A_p(1 + k_a x_m(t)) = A_p(1 + \frac{\mu}{A_m} x_m(t)) = A_p(1 + \mu \text{sen}(2\pi\nu t))$, cuyo signo depende del segundo factor. Como $\mu > 1$, se tiene que $\exists t/1 + \mu \cos(2\pi\nu t) < 0$, es decir, que sobremodula la señal de acuerdo a la anterior proposición. \square

EJEMPLO 3.54. Veamos si son correctas las condiciones para la modulación de una transmisión $(X_m, X_{\nu_p}^{AMa}, S_{\leq\delta})$, con señal portadora de 1.5Mhz (y amplitud de 2V), y señal moduladora sinusoidal unitonal de 500Hz (amplitud de 1V). Para ello, bastará con calcular los valores eficaces de las amplitudes y la pulsación asociada a la frecuencia.

$$M_{1,5Mhz}^{aAM}(x_m(t)) = M_{1,5Mhz}^{aAM}(\text{Cos}(2\pi 500t)) = (2,83 + 1,41\text{Cos}(10^3\pi t))\text{Cos}(10^6 3\pi t) = 2,83(1 + 0,5\text{Cos}(10^3\pi t))\text{Cos}(10^6 3\pi t).$$

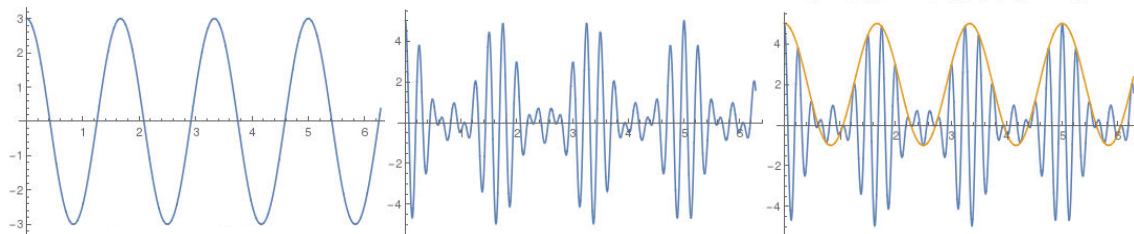
El índice de modulación sería $\mu = 0,5$, con lo que vemos que por ser menor que 1, la señal original será recuperable. Además, también se puede decir que el índice de modulación es del 50 %.

EJEMPLO 3.55. Fijémonos que tanto en el primer como en el segundo modelo no estan sobremoduladas, dado que la envolvente siempre es positiva, consideremos una variación del primer ejemplo en el que la amplitud de la señal moduladora sea de 3, en este caso tendremos:

```
% Señal moduladora (2, .6, 0);
x1m[t_] := 3 * Cos[2 * 0.6 * Pi * t];
Plot[x1m[t], {t, 0, 2 * Pi}]

% Portadora modulada en AM;
Xam[t_] := (2 + x1m[t]) * (x1p[t] / 2);
Plot[Xam[t], {t, 0, 2 * Pi}]

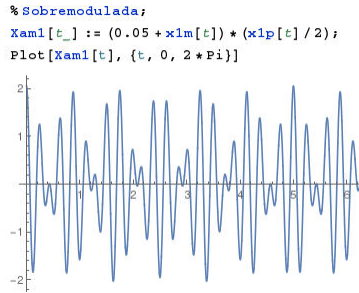
Xenv[t_] := 2 * (1 + 0.5 * x1m[t]);
Plot[{Xam[t], Xenv[t]}, {t, 0, 2 * Pi}]
```



Numéricamente, podemos observar que $\mu = \frac{3}{2} = 1,5 > 1$, con lo que la señal está sobremodulada.

Por otra parte, en el primer modelo $\mu = \frac{2}{2} = 1$; y en el segundo, como ambas señales modificadoras tienen de amplitud 1, la amplitud total será de como máximo 2, con lo que también podemos decir que hay una modulación del 100%, y por tanto, aunque está al límite, en ambos modelos no hay sobremodulación.

EJEMPLO 3.56. Si consideramos ahora que la portadora posee una amplitud de 0.1v, obtenemos que la señal moduladora obtenida mediante el operador M^{AMa} , es:



Como vemos, la señal pierde su carácter oscilatorio completo, produciéndose algunas oscilaciones que rebotan en el eje, impidiendo obtener el cambio de signo que marca la cresta de la onda, lo que implica la existencia de intervalos en los que no hay oscilación en la señal portadora, es decir, es como si no existiera, lo que imposibilita la demodulación en esos tramos. Observamos que en este caso $\mu = \frac{2}{0.5} = 4 > 1$, la señal está sobremodulada.

DEFINICIÓN 3.57. Definimos el operador potencia $S_\alpha : \mathcal{T}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ de modo que $s_\alpha(p) = p^\alpha$.

PROPOSICIÓN 3.58. Dada una señal $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, con ancho de banda δ , si consideramos el siguiente sistema:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{M_{\nu_p}^{aAM} x(t)} \xrightarrow{X_m} \boxed{s_2(X_m)} \longrightarrow \boxed{H_\delta(\omega)} \longrightarrow \boxed{S_{\frac{1}{2}}} y(t)$$

se cumple que $y(t)$ es proporcional a $x(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Mediante este sistema obtenemos:

$X_m^2(t) = A_p^2(1 + k_a x_m(t))^2 \cos^2(2\pi\nu_p t) = \frac{A_p^2(1+k_a x_m(t))^2}{2} + \frac{A_p^2(1+k_a x_m(t))^2}{2} \cos(2\pi\nu_p t)$, de modo que aplicando el filtro $H_{\omega_0}(\omega)$, nos queda únicamente el primer sumando. dado que el segundo tiene una frecuencia muy superior, pero si tomamos la raíz al primer sumando nos queda:

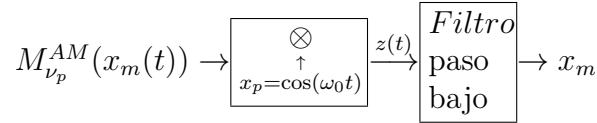
$$\sqrt{\frac{A_p^2(1+k_a x_m(t))^2}{2}} = \frac{A_p(1+k_a x_m(t))}{\sqrt{2}} = \frac{e(t)}{\sqrt{2}} = Y(t), \text{ que es siempre positivo cuando } \mu < 1.$$

Como vemos, el denominador es la razón para el valor eficaz frente al valor medio. Además, el numerador es una combinación afín de la señal moduladora, con lo que llegados a este punto se tiene que $x_m = \frac{\sqrt{2}Y(t) - A_p}{k_a} = \frac{e(t) - A_p}{k_a}$, así hemos obtenido una combinación afín de la señal moduladora. \square

COROLARIO 3.59. Si $x_m(t) = A_m \cos(2\pi\nu_m t)$, la demodulación perfecta de una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{AM}, S_{\leq \delta})$, es posible siempre que ν_p sea mayor que el ancho de banda de x_m .

LEMA 3.60. Receptor de conversión directa. Con el siguiente sistema:

$$\frac{1}{4} \cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$$



Se cumple $\mathcal{F}^{-1}(H(\hat{z}(\omega)) = x_m(t)$.

DEMOSTRACIÓN. En visión frecuencial, anteriormente ya vimos que

$$\mathcal{F}(x_{AM}(t))(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(x_p(t))(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(x_p(t))(\omega + \omega_0)$$

y en cuanto a la vuelta a la banda base, se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{z}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}x_m(\omega) * (\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)) = \\ &= \frac{1}{2}x_m(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}x_m(\omega + \omega_0) = \frac{1}{4}x_m(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{2}x_m(\omega) + \frac{1}{4}x_m(\omega + 2\omega_0). \end{aligned}$$

Ahora podemos recuperar la señal moduladora con un filtro paso bajo eliminando las dos bandas laterales $x_m(\omega \pm 2\omega_0)$. Con lo que $H(\hat{z}(\omega)) = \hat{x}_m(t)$, así que $\mathcal{F}^{-1}(H(\hat{z}(\omega)) = x_m(t)$. \square

EJEMPLO 3.61. Recreemos el proceso de demodulación de una señal recibida $X_m = (2 + \cos(2'4\pi t) \cos(16\pi t))$, de una transmisión $(X_m, M_s^{AMa}, S_{1,2})$.

1. El primer paso será aplicar el operador s^2 a la señal recibida. Con ello obtenemos: $s_2(X_m) = X_m \cdot X_m = \cos^2(2'4\pi t) \cdot \cos^2(16\pi t) + 4\cos(2'4\pi t) \cdot \cos^2(16\pi t) + 4\cos^2(16\pi t)$.
2. Calculamos su transformada: $\hat{s}_2(X_m) = \cos^2(2'4\pi t) \cdot \cos^2(16\pi t) + 4\cos(2'4\pi t) \cdot \cos^2(16\pi t) + 4\cos^2(16\pi t) = \cos^2(2'4\pi t)\cos^2(16\pi t) + 4\cos(2'4\pi t) \cdot (1 - \sin^2(16\pi t)) + 4\cos^2(16\pi t) = \cos^2(2'4\pi t)\cos^2(16\pi t) + 4\cos(2'4\pi t) - 4\cos(2'4\pi t)\sin^2(16\pi t) + 4\cos^2(16\pi t) = \cos^2(2'4\pi t) * \cos^2(16\pi t) + 4\cos(2'4\pi t) - 4\cos(2'4\pi t) * \sin^2(16\pi t) + 4\cos^2(16\pi t)$.
3. Aplicando el filtro paso bajo, filtrando las componentes espectrales fuera del ancho de banda de la señal moduladora, se tiene que: $H_\delta(\omega) = 4\pi(2'4\pi - \omega)$.
4. Volviendo la señal al dominio del tiempo obtenemos: $\check{H}_\delta(t) = \frac{4\pi}{2\pi}\cos^2(2'4\pi t)$.
5. Con lo cual, se tiene finalmente que la señal moduladora original era: $x_m = \sqrt{2}s_{\frac{1}{2}}(\check{H}_\delta(t)) = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos(2'4\pi) = 2\cos(2'4\pi) = 2\cos(2\pi 1'2t)$.

EJEMPLO 3.62. De igual modo, si se recibiese una señal bitonal como en el modelo 2 de los ejemplos, su señal filtrada estaría formada únicamente por las dos componentes de la señal moduladora.

3.4. Modulaciones angulares.

Este tipo de modulación pertenece a un grupo en el que el objetivo es la variación del argumento de la función trigonométrica de la portadora. Así, en estos modos de modulación, lo que podrá ser alterado será la frecuencia ν_p o la fase para conseguir incluir en la señal portadora la señal moduladora.

3.4.1. Modulación. El proceso de modulación en frecuencia consiste en que a la señal portadora se le altera su frecuencia mediante pequeños incrementos en la misma (que llamaremos frecuencia central), y cuya medida de dichos incrementos dependerán del valor de los parámetros de la señal moduladora que contiene la información.

DEFINICIÓN 3.63. Dadas $x_p \in S_\nu$ y $x_m \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, definimos la señal modulada angularmente como la parte real de la señal portadora: $Re \left[A_p e^{i2\pi\nu_p t + \phi_0} \right]$.

Llamamos pulsación instantánea a $\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$, que representa la velocidad angular en radianes por segundo, con lo que dividiendo por 2π obtenemos la frecuencia instantánea. Así, dada una señal portadora $A_p \cos(2\pi\nu_p t)$, si el parámetro que varía es la fase relativa $\phi(t)$, definimos el operador modulación angular como

$$M_{x_p}^\phi : \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \\ x_m \longrightarrow A_p \cos(2\pi\nu_p t + \phi(t)) \end{array}$$

y si lo que varía es la frecuencia, tendremos el operador

$$M_{x_p}^{FM} : \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \\ x_m \longrightarrow A_p \cos(2\pi(\nu_p + \nu_m x_m(t))t + \phi_0) \end{array}$$

el cual podemos reescribir como

$$M_{x_p}^{FM\nu_d} : \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{R}) \\ x_m \longrightarrow A_p \cos(2\pi t(\nu_p + \nu_d \int x_m) + \phi_0) \end{array} .$$

TEOREMA 3.64. De una transmisión $(X_m, M_{x_p}^{FM\nu_d}, S_{\nu_m})$, con $x_p(t) = A_p \cos(2\pi\nu_p t)$, sabemos que

$$X_m(t) = A_p \cos(2\pi\nu_p t + \beta \sin(2\pi\nu_m t)), \text{ con } \beta = \frac{\nu_d}{\nu_m}.$$

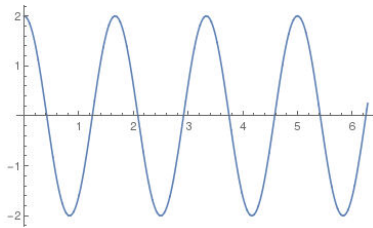
DEMOSTRACIÓN. Si consideramos $x_m \in S_\nu$, como es una modulación de frecuencia, podemos despreciar la fase inicial y considerar la amplitud unitaria, luego sin pérdida de generalidad tenemos que $x_m = \cos(2\pi\nu_m t)$.

Así, $M_{\nu_p}^{FM}(x(t)) = A_p \left(\cos(2\pi\nu_p t + 2\pi\nu_d \int \cos(2\pi\nu_m \tau) d\tau) \right) = A_p \cos \left(2\pi\nu_p t + \frac{2\pi\nu_d}{2\pi\nu_m} \sin(2\pi\nu_m t) \right)$, con lo que haciendo el cambio de variables $\beta = \frac{\nu_d}{\nu_m}$ obtenemos la expresión indicada. \square

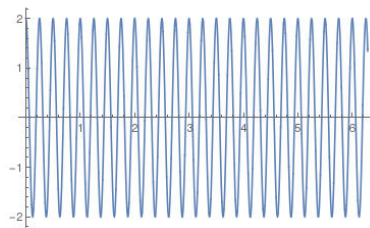
DEFINICIÓN 3.65. Llamaremos índice de modulación a $\beta = \frac{\nu_d}{\nu_m}$.

EJEMPLO 3.66. Veamos como se modularía el “modelo 1” en frecuencia:

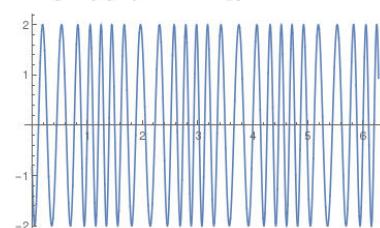
```
% Señal moduladora {2, .6, 0};
x1m[t_] := 2 * Cos[2 * 0.6 * Pi * t];
Plot[x1m[t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



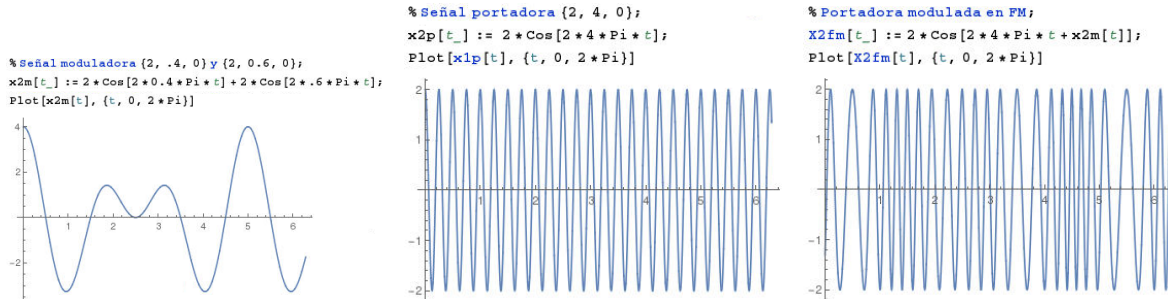
```
% Señal portadora {2, 4, 0};
x1p[t_] := 2 * Cos[2 * 4 * Pi * t];
Plot[x1p[t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



```
% Portadora modulada en FM;
Xfm[t_] := 2 * (Cos[2 * 4 * Pi * t + x1m[t]]);
Plot[Xfm[t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



EJEMPLO 3.67. Veamos como se modularía el “modelo 2” en frecuencia:



EJEMPLO 3.68. Veamos cómo calcular la ecuación de una señal portadora de 1.5Mhz y amplitud de 2V que es modulada en FM por una onda sinusoidal de 500Hz y amplitud de 1V. Para ello, basta calcular los valores eficaces de las amplitudes y la pulsación asociada a la frecuencia.

En este caso tendríamos: $M_{\nu_p}^{FM}(t) = 2'83 \text{Sen}(3\pi \cdot 10^6 + m \text{Sen}(\pi 10^3 t))$.

3.4.2. Aspectos de la señal en FM.

OBSERVACIÓN 3.69. Fijémonos en que

$A_p \cos\left(2\pi\nu_p t + \frac{2\pi\nu_d}{2\pi\nu_m} \text{sen}(2\pi\nu_m t)\right) = A_p \cos\left(2\pi\nu_p t + \frac{2\pi\nu_d}{2\pi\nu_m} \text{sen}(2\pi\nu_m t)\right) = A_p \text{Re}\left(e^{2i\pi\nu_p t} e^{i\phi(t)}\right)$,
siendo $\phi(t) = \beta \text{sen}(2\pi\nu_m t)$.

DEFINICIÓN 3.70. Llamamos integral de Bessel de orden k a: $J_k(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\beta \sin(t)} e^{-ikt} dt$.

PROPOSICIÓN 3.71. Se cumple $e^{i\beta \sin(2\pi\nu_m t)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(\beta) e^{2\pi i k \nu_m t}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t)$ periódica de frecuencia (fundamental) ν , su serie de Fourier es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k \nu t}$$

donde $a_k = \frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-2\pi i k \nu t} dt$. De modo que tomando $\nu = \nu_m$ en $e^{i\phi(t)}$ tenemos que la serie de Fourier es

$$e^{i\phi(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k \nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-2\pi i k \nu t} dt \right) e^{2\pi i k \nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi i \nu_m t} e^{-2\pi i k \omega t} dt \right) e^{2\pi i k \nu}.$$

Realizando el cambio de variable $u = 2\pi\nu_m t$, tenemos el resultado deseado, con convergencia asegurada por ser la función continua y derivable

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(\beta) e^{2\pi i k \nu_m t}.$$

□

TEOREMA 3.72. Para una señal portadora $x_p = A_p \cos(2\pi\nu_p t)$ y una señal unitonal $x_m(t) = \cos(2\pi\nu_m t)$ se tiene que

$$X_m(t) = M_{x_p}^{FM\nu_d}(x_m(t)) = A_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(\beta) \cos[2\pi(\nu_p + n\nu_m)t].$$

DEMOSTRACIÓN. Como hemos dicho, tenemos que: $M_{x_p}^{FM} \Big|_{S_\nu} (x_m) = A_p \operatorname{Re} (e^{i\omega_p t} e^{i\phi(t)}) =$
 $= A_p \operatorname{Re} \left(e^{i\omega_p t} \sum_n A_n e^{in\omega_m t} \right) = A_p \operatorname{Re} \left(e^{i\omega_p t} \sum_n J_n(\beta) e^{in\omega_m t} \right) = A_p \sum_n J_n(\beta) \cos((\omega_c + n\omega_m)t) =$
 $= A_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(\beta) \cos[2\pi(\nu_p + n\nu_m)t].$ \square

AFIRMACIÓN 3.73. Esto plantea un problema, ya que es una suma de infinitos términos, concluimos que el número de componentes de los que está formado el espectro frecuencial de una señal modulada en FM, es infinito, aunque la potencia de cada una de ellas sea menor a medida que aumenta n , dado que $J_n(\beta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, disminuye el índice de modulación $J_n(\beta) \xrightarrow[n > 0]{\beta \rightarrow 0} 0$. Esta propiedad asintótica indica que la señal es casi periódica, y justifica que basta con el uso para la demodulación solamente de un intervalo centrado en la frecuencia portadora, de modo que si se cumple

$$x_m(t) \simeq A_p (J_{-1}(\beta) \cos[2\pi(\nu_p - \nu_m)t] + J_0(\beta) \cos[2\pi\nu_p t] + J_1(\beta) \cos[2\pi(\nu_p + \nu_m)t])$$

entonces:

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & -\nu_p - \nu_m & & -\nu_p & & \nu_p + \nu_m & \\ \hline & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \nu_p - \nu_m & & \nu_p & & \nu_p + \nu_m & \end{array}$$

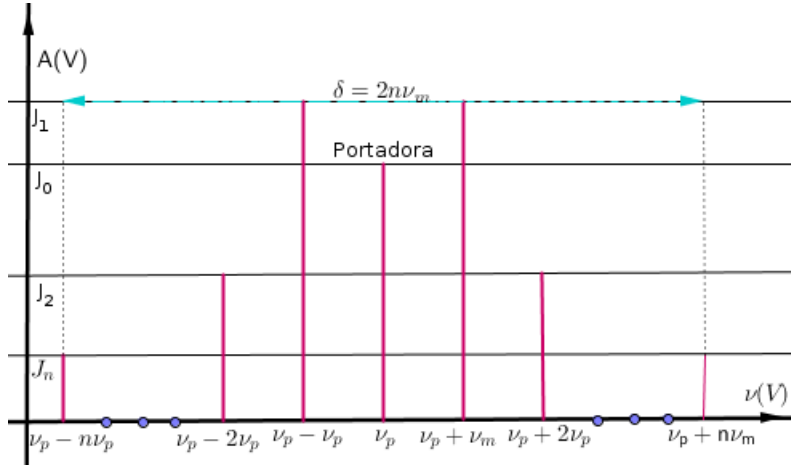
con lo que se obtiene un camino para obtener x_m a partir de \widehat{X}_m .

OBSERVACIÓN 3.74. Por otra parte,

- si $\beta \ll 1$, los únicos coeficientes $J_n(\beta)$ significativos son $n=0$ y $n=1$, con lo que a efectos prácticos, el ancho de banda que consideraremos para una transmisión en FM será de $\delta = 2\nu_m$, es decir, el doble de la frecuencia del tono modulador. Esta modalidad de transmisión recibe el nombre de frecuencia modulada de banda angosta o estrecha (NFM), cuyo espectro será, a grandes rasgos, similar al modulado en AM.
- Sea ahora $\beta > 1$, en este caso, se tendrá que coger un número de componentes espectrales, a ambos lados del centro fijado en la portadora, de modo que su aportación en potencia sea lo suficientemente significativa como para poder reconstruir la señal moduladora. Suele usarse el criterio numérico de tomar como cota el valor M , de modo que $|J_M(\beta)| < 0,01$ y $|J_{M+1}(\beta)| > 0,01$. De este modo, se tomarán M parejas de componentes espectrales significativas, lo que conduce a un ancho de banda de $\delta = 2M\nu_m$.

No obstante, se puede hallar una relación entre M y β considerando la expresión $M(\beta) = \beta + \alpha$, con $\alpha \in (1,2)$, con lo que el ancho de banda se puede expresar como

$$\delta = 2(\beta + \alpha)\nu_m = 2\left(\frac{\nu_d}{\nu_m}\nu_m + \alpha\nu_m\right) = 2(\nu_d + \alpha\nu_m).$$



EJEMPLO 3.75. Veamos como calcular el ancho de banda de una transmisión comercial de FM, si $\nu_d = 75\text{KHz}$ y $\nu_m = 25\text{KHz}$.

Como $\beta = \frac{\nu_d}{\nu_m} = \frac{75}{25} = 3$, se tiene que para $a = 1$ tenemos $\delta = 2(\beta + \alpha)\nu_m = 2 \cdot 4 \cdot 25 = 200\text{KHz}$.

3.4.3. Demodulación en FM de la onda portadora. Dada una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{FM}, \delta)$, el concepto de demodulación de una señal FM implicará la obtención de una señal x'_m , de modo que $M_{\nu_p}^{FM}(x'_m)$ sea aproximadamente igual a X_m . Para la obtención de la señal x'_m , la implementación usual electrónica del demodulador suele usar un método llamado *bucle de sincronización de fase*⁵, no obstante, sólo trataremos de otro método, llamado *discriminador frecuencial por ser el que* posteriormente se ajusta al definido de forma paralela en el contexto SDR.

Llamaremos discriminador de frecuencia o detector de pendiente, a un circuito cuya ganancia varía linealmente en función de la frecuencia. La idea es transformar una señal de FM en una señal de AM de forma que posteriormente la señal resultante se demodule según lo especificado en la sección anterior.

DEFINICIÓN 3.76. Dadas $x_m, x'_m \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, definimos el operador

$$DP : \{M_{\nu_p}^{FM}(x_m)\} \longrightarrow \{M_{\nu_p}^{AM}(x'_m)\}$$

que asocia la señal modulada a otra señal definida como

$$X_{fa}(t) = \frac{dX_m(t)}{dt} x_p(t).$$

OBSERVACIÓN 3.77. Esta señal es un producto de una señal portadora por una cierta moduladora, es decir, que podemos considerarla como una señal modulada en AM.

DEFINICIÓN 3.78. Dada una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{FM}, \delta)$ podemos demodularla mediante:

$$x_m = \left(M_{\nu_p}^{AM}\right)^{-1} (X_{fa}(X_m)).$$

⁵Circuito de sincronización de fase o demodulador PLL. Es un sistema de retroalimentación negativa que consta de tres componentes principales: un multiplicador, un filtro de paso y un oscilador controlado por voltaje (VCO), es decir, un generador de onda senoidal cuya frecuencia este determinada por un voltaje de entrada aplicado a él desde una fuente externa que fuerza la sintonía.

3.5. Modulaciones digitales.

Tal y como se comentó, en el caso de señal portadora analógica existen dos posibilidades, que la moduladora sea también analógica (tratada en el apartado anterior con distintos ejemplos de modo de modulación), y que la señal moduladora sea digital, que tendrá (aparte de sus casos propios) su visión asociada de los modos de modulación ya descritos:

Análogica	Digital
AM (Modulación de amplitud)	ASK (Modulación por desplazamiento de amplitud)
FM (Modulación de frecuencia)	FSK (Modulación por desplazamiento de frecuencia)
PM (Modulación de fase)	PSK (Modulación por desplazamiento de fase)
L/U (Banda lateral única)	QAM (Modulación en amplitud en cuadratura)
SSD (Doble banda lateral)	QFM (Modulación en frecuencia en cuadratura)

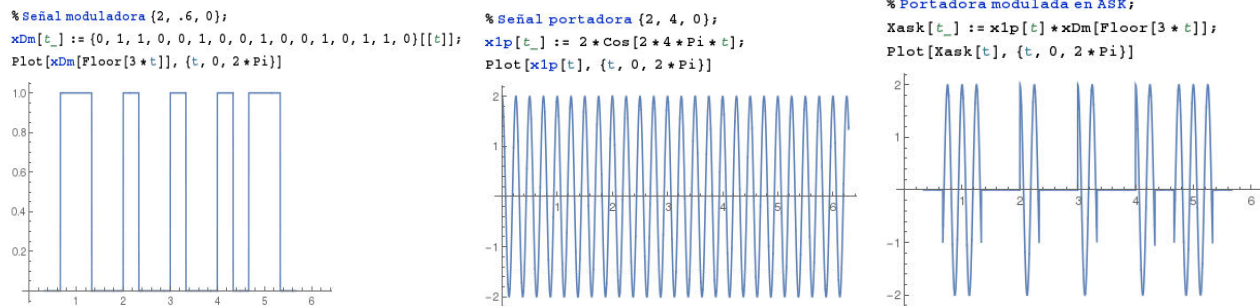
EJEMPLO 3.79. (*Modelo 3*). Podemos considerar la modulación ASK.

Así, en este caso, por ser digital x_m tenemos

$$x_m[t] \in \{0, 1\}$$

y que el valor de la portadora es $x_p(t) = A_p \cos(2\pi\nu_p t)$. Al ser modulación en amplitud, la formula será:

$$X_m = X_{\nu_p}^{aAM}(x_m[t]) = (A_p + x_m[t]) \cos(2\pi\nu_p t) = \begin{cases} v_p \cos(2\pi\nu_p t) & \text{Con señal } 1 \\ 0 & \text{Con señal } 0 \end{cases}$$



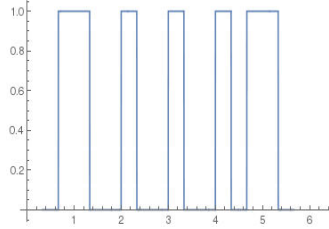
EJEMPLO 3.80. De igual modo, podemos considerar la misma señal digital (*Modelo 3*), y modularla en frecuencia, con lo que obtenemos:

$X_{\nu_p}^{FM}(x_m[t]) = A'_p \cos(2\pi\nu_p t + mX_m[t])$, en este caso, sucede que como $X_m(t)$ solamente puede valer 1 o 0, la expresión es equivalente a la señal de la portadora pura, en el caso que $X_m(t_i)$ sea un 0, o la señal portadora aumentada en m su frecuencia. Con lo cual, es equivalente a definirla como

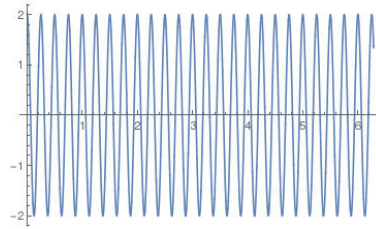
$$X_{FSK} = \begin{cases} v_p \cos(2\pi\nu_p t) & \text{Con señal } 0 \\ v_p \cos(2\pi(\nu_p + \epsilon)t) & \text{Con señal } 1 \end{cases}$$

Así, por ejemplo, si consideramos el sistema de modulación con $\nu_p = 8$, $\epsilon = 2$, se tiene:

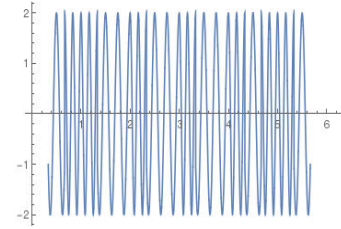
```
% Señal moduladora (2, .6, 0);
xDm[t_] := {0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0}[[t]];
Plot[xDm[Floor[3*t]], {t, 0, 2*Pi}]
```



```
% Señal portadora (2, 4, 0);
xlp[t_] := 2 * Cos[2*4*Pi*t];
Plot[xlp[t], {t, 0, 2*Pi}]
```



```
% Portadora modulada en FM;
Xfsm[t_] := 2 * Cos[2*(4 + 2*xDm[Floor[3*t]])*Pi*t];
Plot[Xfsm[t], {t, 0, 2*Pi}]
```



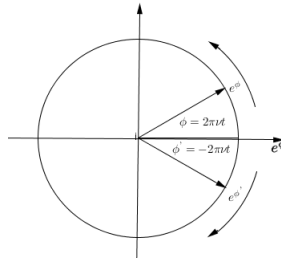
Referencias principales:

[GW, OW, R1, S1, S2, 4, 5, CC, R2, E1].

Señales en cuadratura. Modulación y demodulación.

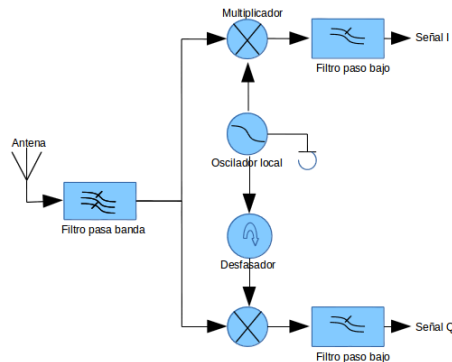
4.1. Elementos básicos.

Recordemos que cada elemento $x(t) = A\cos(2\pi\nu t)$ de S_ν admite una representación compleja como $A\cos(2\pi\nu t) = A\frac{e^{2\pi i\nu t} + e^{-2\pi i\nu t}}{2}$, por la fórmula de Euler. Por comodidad, en este desarrollo consideraremos $A=2$, con lo que cada señal unitonal, puede ser vista como suma de dos señales complejas $e^{2\pi i\nu t}$ y $e^{-2\pi i\nu t}$, a las cuales llamaremos señales en cuadratura y cuyas representaciones polares se comportan de modo que, mientras la primera gira en sentido antihorario con una frecuencia ν , la segunda gira en sentido horario con la misma frecuencia.



Consideremos $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + i = i$, y observemos que al multiplicar cualquier número complejo por $e^{i\frac{\pi}{2}}$ se tiene una rotación antihoraria respecto al origen complejo en la representación polar del mismo.

Recordemos que cuando hablamos del proceso de detección de la señal en cuadratura en el capítulo 0, consideramos un elemento físico que proveía de datos a unos algoritmos implementados por *software* que venían a sustituir mucha circuitería de la radio. Dicho circuito físico generaba a partir de la señal recibida X_m dos señales llamadas señales en cuadratura que denotábamos por $(I(t), Q(t))$. Estas señales debían de quedar en la zona del espectro en la que se hallaba la señal moduladora x_m , es decir, en la banda base.



OBSERVACIÓN 4.1. Operacionalmente, la señal de entrada, de frecuencia ν_p , se traslada a dos mezcladores iguales en paralelo, de manera que un oscilador genera una señal de frecuencia ν_{lo} que se inyecta al mezclador inferior (seno) para obtener la señal I. Además, una parte de la señal ν_{lo} se desfasa 90°, es decir, si $x_{lo} = \cos(\omega t)$, se genera una señal $x^\perp = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t)$ y se inyecta al mezclador superior (coseno) obteniéndose la señal Q.

Estas señales I(t) y Q(t) requieren ser filtradas, ya que la multiplicación en cuadratura es similar a la realizada para un demodulador AM convencional, con lo que al realizar los productos, el espectro se desplaza abajo y arriba de la frecuencia de la portadora, con lo que se requiere la eliminación de las frecuencias superiores al doble de la portadora.

4.1.1. Comportamiento en señales unitonales. Veamos primeramente como se obtuvo la señal I. Supongamos que el oscilador local genera una señal de pulsación ω_0 , que al inyectarse sobre el multiplicador junto con otra señal que supondremos unitonal de pulsación ω , tenemos que

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) \cos(\omega_0 t) &= \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) = \frac{e^{i(\omega+\omega_0)t}}{4} + \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{4} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}}{4} + \frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t}}{4} = \\ &= \frac{\cos((\omega_0 + \omega)t) + \cos((\omega - \omega_0)t)}{2}. \end{aligned}$$

Si ahora aplicamos un filtro paso bajo de modo que se filtre la señal de alta frecuencia aparecida, tenemos situada la señal recibida en banda base, de modo que nuestra señal queda: $I(t) = \frac{\cos((\omega-\omega_0)t)}{2}$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Al multiplicar una señal por $e^{i\frac{\pi}{2}}$ produce un desplazamiento de fase de 90 grados.*

DEMOSTRACIÓN. Bastará con probarlo para una señal de pulsación ω . En este caso se tiene que

$$\cos(\omega t) \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{i\omega t + i\frac{\pi}{2}} + e^{i\omega t - i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} + e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{2})}}{2} = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Es decir, se produjo un aumento de fase de 90 grados respecto a la señal original. \square

DEFINICIÓN 4.3. Dada una señal recibida $\cos(\omega t)$, definimos su señal en cuadratura como $Q(t) = \cos(\omega t) \cos(\omega_0 t) e^{i\frac{\pi}{2}}$.

PROPOSICIÓN 4.4. *$Q(t)$ e $I(t)$ están desfasadas 90°.*

DEMOSTRACIÓN. Si volvemos a multiplicar

$$\frac{\cos((\omega_0 + \omega)t) + \cos((\omega - \omega_0)t)}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos((\omega_0 + \omega)t + \frac{\pi}{2}) + \cos((\omega - \omega_0)t + \frac{\pi}{2})}{2}$$

con lo que al pasarla por el filtro paso bajo, obtenemos la señal $\frac{\cos((\omega-\omega_0)t + \frac{\pi}{2})}{2} = Q(t)$. \square

4.1.2. Comportamiento en señales casi periódicas reales.

DEFINICIÓN 4.5. Dada una señal de $\mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, definimos su señal analítica positiva o preenvolvente a la función de valor complejo $x_a(t) = x(t) + i\bar{x}(t)$.

OBSERVACIÓN 4.6. Dada $x(t) \in \mathcal{AP}_1(\mathbb{R})$, $x(t) = \alpha_0 + \sum \alpha_n e^{i\lambda_n t}$, para que sea real, debe de poder escribirse de la forma $x(t) = \alpha_0 + \sum_n \beta_i e^{i\lambda_n t} \alpha_0 + \sum_n \bar{\beta}_i e^{-i\lambda_n t}$, con $\lambda_n \geq 0$, y α_i , que es la semisuma de β_i y su conjugado.

PROPOSICIÓN 4.7. Dada una señal casi periódica $x(t)$, su preenvolvente es: $x_a(t) = \alpha_0 + \sum_n 2\alpha_n e^{i\lambda_n t}$.

DEMOSTRACIÓN. Dada $x(t) \simeq \alpha_0 + \sum_n \alpha_n e^{i\lambda_n t}$, como $x_a(t) = x(t) + i\bar{x}(t)$, tenemos que

$$x_a(t) = x(t) + i(-i\text{Sign}(x(t))x(t)) = \begin{cases} 2x(t) & x(t) > 0 \\ x(0) & x(t) = 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum_n 2\alpha_n e^{i\lambda_n t} & x(t) > 0 \\ \sum_n 2\alpha_n & x(t) = 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases} .$$

□

COROLARIO 4.8. Dada una señal casi periódica real, se cumple que: $\text{Re}(x_a(t)) = x(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ real, podemos aproximarla mediante $x(t) \simeq \alpha_0 + \sum_{j < N} \alpha_j e^{i\lambda_j t} + \sum_{j < N} \bar{\alpha}_j e^{-i\lambda_j t}$.

Por linealidad, realizaremos la prueba para una única componente frecuencial, de este modo, si $\alpha = a + bi$:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= (\alpha + \alpha e^{i\lambda t} + \bar{\alpha} e^{-i\lambda t}) + i(\overline{\alpha + \alpha e^{i\lambda t} + \bar{\alpha} e^{-i\lambda t}}) = \alpha + \alpha e^{i\lambda t} + \bar{\alpha} e^{-i\lambda t} + i\bar{\alpha} + i\bar{\alpha} e^{-i\lambda t} + i\alpha e^{i\lambda t} \\ &= (a + bi) + (a + bi)e^{i\lambda t} + (a - bi)e^{-i\lambda t} + i(a - bi) + i(a - bi)e^{-i\lambda t} + i(a + bi)e^{i\lambda t} = \\ &= a + bi + ae^{i\lambda t} + bie^{i\lambda t} + ae^{-i\lambda t} - bie^{-i\lambda t} + ia + b + iae^{-i\lambda t} + be^{-i\lambda t} + iae^{i\lambda t} - be^{i\lambda t}. \end{aligned}$$

Si eliminamos los términos complejos tenemos que

$$\begin{aligned} a + ae^{i\lambda t} + ae^{-i\lambda t} + b + be^{-i\lambda t} - be^{i\lambda t} &= a + b + ae^{i\lambda t} + ae^{-i\lambda t} + be^{-i\lambda t} - be^{i\lambda t} = \\ &= a + b + (a - b)e^{i\lambda t} + (a + b)e^{-i\lambda t} = \alpha_0 + ae^{i\lambda t} + be^{-i\lambda t} = x(t). \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 4.9. Dada una señal $x(t)$ con ancho de banda 2δ , centrada en la frecuencia ω_0 , llamamos envolvente compleja a $x_a(t)e^{-i\omega_0 t}$.

PROPOSICIÓN 4.10. La envolvente compleja de una señal actúa como un filtro paso bajo.

DEMOSTRACIÓN. Si x_a es una señal limitada en banda $\omega_0 - \delta < \omega < \omega_0 + \delta$, tenemos que

$$\hat{x}(\omega) = \hat{x}_a(\omega) * \delta(\omega + \omega_0) = \hat{x}_a(\omega + \omega_0),$$

$$\text{con } x_a(t)e^{i\omega_0 t} = \left(\alpha_0 + \sum_n 2\alpha_n e^{i\lambda_n t} \right) e^{-i\omega_0 t} = \alpha_0 e^{-i\omega_0 t} + 2 \sum \alpha_m e^{i(\lambda_n - \omega_0)t} .$$

□

DEFINICIÓN 4.11. Diremos que dos señales $(x_1(t), x_2(t))$, $x_i \in S_\nu$ forman un par de cuadratura si la segunda es igual a la primera con una diferencia de fase de 90 grados en el sentido descrito.

4.2. Demodulación de señales I/Q.

En esta sección justificaremos cómo el uso de las señales IQ simplifican los procesos de demodulación clásica descritos en el capítulo anterior, describiendo el método para conseguir a partir de una señal modulada correctamente recibida, la señal moduladora, acorde al tipo de modulación usado.

4.2.1. Demodulación AM desde señales I/Q. En el capítulo anterior, comentamos que una forma de obtener la señal modulada en amplitud, era el simple producto de la señal portadora por la moduladora, no obstante, este método tiene el problema de que la relación de fase entre la portadora del emisor y la señal generada en el receptor por el oscilador para devolver a la banda base, afecta al resultado de la señal demodulada. Una forma de solucionar el problema consistía en tomar el operador asíncrono de modulación de amplitud para mediante un detector de pico de onda en el receptor, se salvara el obstaculo de la falta de sincronía, pero esto disminuye el rendimiento del sistema.

Además, es importante obtener una señal a partir del par de cuadratura que mantenga una amplitud constante independientemente de la relación de fase entre emisor y receptor.

Recordemos que para una señal moduladora x_m y una señal portadora x_p , definíamos su modulación en AM como $M_\nu^{AM}(x_m) = x_m(t)\cos(2\pi\nu_p t)$, en donde podíamos despreciar la fase y considerarla nula.

OBSERVACIÓN 4.12. Aspecto formal de las señales I/Q de una señal modulada en AM.

La señal $I(t) = x_m(t)\cos(2\pi\nu_p t)\cos(2\pi\nu_p t + \alpha)$, donde no podemos despreciar α , dado que no tiene porqué darse una sincronía de fase entre la señal modulada y la generada por el oscilador en el receptor.

Por otra parte, $Q(t) = x_m\cos(2\pi\nu_p t)\sin(2\pi\nu_p t + \alpha)$.

PROPOSICIÓN 4.13. $\|(I, Q)\|_2 = x_m\sqrt{1 + \cos(2\pi\nu_p t)}$.

DEMOSTRACIÓN. Como x_m es un factor de $I(t)$ y de $Q(t)$, obviaremos su presencia en los cálculos.

Así, tenemos que, si consideramos $u = 2\pi\nu_p$ y $v = \alpha$, tenemos que:

`(TrigExpand[(Cos[u] * Cos[u + v])^2] + TrigExpand[(Cos[u] * Sin[u + v])^2])^(1/2)`

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\cos[u]^2}{2} - \frac{\sin[u]^2}{2}}$$

con lo que se tiene que

$$\begin{aligned} \|(I, Q)\|_2 &= \sqrt{I_d^2(t) + Q_d^2(t)} = \\ &= x_m \sqrt{\frac{1 + \cos^2(2\pi\nu_p t) - \sin^2(2\pi\nu_p t)}{2}} = \\ &= x_m \sqrt{1 + \cos(4\pi\nu_p t)} = x_m \sqrt{1 + \cos(2\pi\nu_p t)}. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 4.14. Observemos que no depende de la fase el resultado, por lo que podemos considerar que al usar las señales I/Q equivale a la presencia de sincronía de fase entre emisor y receptor.

TEOREMA 4.15. *Dada una señal modulada $M_{\nu}^{AM}(x_m) \in S$. Sean $I_d(t), Q_d(t)$ las demodulaciones de su señal en cuadratura, entonces $x_m = \|(I, Q)\|_2 = \sqrt{I_d^2(t) + Q_d^2(t)}$.*

Demostración. Por la proposición anterior, basta con considerar la aplicación de un filtro paso bajo, de modo que

$$\begin{aligned} \|(I, Q)\|_2 &= \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)} = x_m \sqrt{1 + \cos(4\pi\nu_p t)} = \sqrt{x_m^2 (1 + \cos(2\pi\nu_p t))} = \\ &= \sqrt{x_m^2(t) + x_m^2(t)\cos(2\pi\nu_p t)} \stackrel{LPF}{=} \sqrt{x^2(t)} = x_m(t). \end{aligned}$$

4.2.2. Demodulación FM desde señales I/Q.

Recordemos que para la generación de la señal modulada a partir de una señal moduladora x_m , el operador modulación en frecuencia se tiene:

$$(4.2.1) \quad X_m(t) = M_{\nu_p, \delta}^{FM}(x_m) = A_p \cos(2\pi\nu_p t + p(t)); \text{ con } p'(t) = k \cdot x_m.$$

PROPOSICIÓN 4.16. *Dada una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^Y, S_{\leq \delta})$, que se produjo con una señal portadora $x_p = A_p \cos(2\pi\nu_p t)$, al aplicársele una detección en cuadratura con frecuencia del oscilador ν_0 , dado $\phi = p(t) + 2\pi(\nu_p - \nu_0)$, el par IQ tiene la forma:*

$$I(t) = \frac{A_p}{2} \cos(\phi(t)), \quad Q(t) = \frac{A_p}{2} \sin(\phi(t)).$$

$$\begin{aligned} \text{DEMOSTRACIÓN. } A_p \cos(\omega_p t + p(t)) \cos(\omega_0 t) &= A_p \left(\frac{e^{i\omega_p t + p(t)} + e^{-i\omega_p t - p(t)}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) = \\ &= A_p \frac{e^{i(\omega_p + \omega_0)t + p(t)}}{4} + \frac{e^{i(\omega_p - \omega_0)t + p(t)}}{4} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega_p)t - p(t)}}{4} + \frac{e^{-i(\omega_p - \omega_0)t - p(t)}}{4} = \end{aligned}$$

y aplicando el filtro paso bajo, eliminamos las componentes frecuenciales superiores al doble de la señal moduladora obteniendo

$$\begin{aligned} &\stackrel{LPF}{=} A_p \frac{\cos((\omega_0 + \omega_p)t + p(t)) + \cos((\omega_p - \omega_0)t + p(t))}{4} = \frac{A_p}{2} \cos((\omega_p - \omega_0)t + p(t)) = \\ &= \frac{A_p}{2} \cos(2\pi(\nu_p - \nu_0) + p(t)) = \frac{A_p}{2} \cos(\phi). \end{aligned}$$

Por otra parte, como la señal $Q(t)$ está desfasada 90° , se tiene que

$$Q(t) = \frac{A_p}{2} \cos(\phi + \frac{\pi}{2}) = \frac{A_p}{2} \sin(-\phi) = \frac{A_p}{2} \sin(\phi).$$

□

AFIRMACIÓN 4.17. Por construcción, estas señales I/Q tienen su espectro centrado en $\nu_p - \nu_0$.

TEOREMA 4.18. *Dada una transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{FM}, S_{\leq \delta})$, si se realiza una señal aplicándose una detección en cuadratura sobre ν_p , se tiene que*

$$(4.2.2) \quad x_m(t) = \frac{1}{k} \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{I^2(t) + Q^2(t)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, tenemos la expresión del par de señales en cuadratura (que ya está en banda base) que podemos considerar componentes de la señal modulada en banda base, con lo que admite una visión compleja como

$$X_{fmb}(t) = I(t) + iQ(t) = \frac{A_p}{2} e^{i(2\pi(\nu_p - \nu_0)t + p(t))}.$$

Como estamos suponiendo que $\nu_0 = \nu_p$, $X_{fmb}(t) = \frac{A_p}{2} e^{ip(t)}$, que será en concreto la señal a demodular.

Por construcción, se tiene que $p(t) = \arctan\left(\frac{Q(t)}{I(t)}\right)$, de modo que si la derivamos obtenemos:

$$p'(t) = \frac{1}{1 + \frac{Q^2(t)}{I^2(t)}} \cdot \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{I(t)^2} = \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{I^2(t) + Q^2(t)}.$$

Por tanto, cruzando este resultado la fórmula (4.2.1.), tenemos que: $x_m(t) = \frac{1}{k} \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{I^2(t) + Q^2(t)}$. \square

Referencias principales:

[IH, K1, L1, NAN, VM, 1, 3, 5, 10, OW, ASM].

Conversión entre señal digital y analógica (DAC y ADC). Consecuencias.

Atendiendo al hecho de que una vez obtenidas las señales en cuadratura, éstas deben de acoplarse a un ordenador o microcontrolador que implemente los algoritmos que recreen la radio, las componentes $I(t)/Q(t)$ deben ser digitalizadas por qué evidentemente la señal recibida no tiene porqué ser una señal fácil de compactar en una fórmula, y además, esto implicaría que el receptor ya conocía el mensaje. Así, para conseguir trabajar con la señal recibida, ésta se tendrá que expresar como datos informatizables utilizando un proceso llamado *muestreo*, mediante el cual partiendo de las señales $I(t)$, $Q(t)$ únicamente se tomarán ciertos valores de cada una de ellas para ciertos valores temporales, formando una sucesión de valores de las señales que llamaremos muestra o discretización de la señal.

Una separación adecuada entre dos elementos de la sucesión será un requisito importante, y como este tipo de conjuntos discretos son densos en \mathbb{R} , en el caso de las funciones casi periódicas bajo la topología de Bohr, se suele usar un muestreo uniforme, es decir, equiespaciado en el tiempo.

5.1. Muestreo e interpolación.

Las siguientes definiciones y resultados pueden aplicarse a cada una de las señales que forman el par de cuadratura, razón por la cual trabajaremos con una señal genérica $x(t)$.

PROPOSICIÓN 5.1. Si consideramos $x[n] = e^{2\pi i \nu n}$, entonces $\hat{x}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \nu_n \\ 0 & \text{si } \omega \neq \nu_n \end{cases}$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

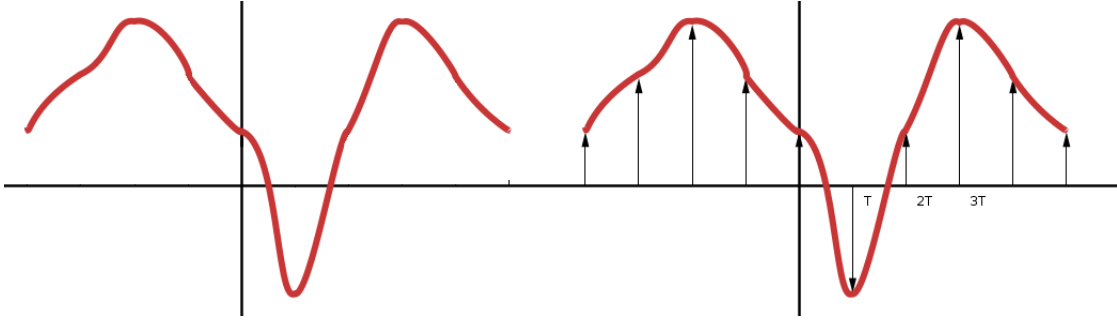
$$\hat{x}(\omega) = V_m [x[n]e^{-2\pi i n \omega}] = V_m [e^{2\pi i \nu n} e^{-2\pi i n \omega}] = V_m [e^{2\pi i n(\nu - \omega)}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \nu \\ 0 & \text{si } \omega \neq \nu \end{cases} \quad \square$$

OBSERVACIÓN 5.2. Las funciones $\hat{x}(\omega)$ son 1-periódicas, dado que $e^{-2\pi i n \omega} = e^{-2\pi i n(\omega+1)}$, ya que $n \in \mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 5.3. Dada la señal $x(t)$, definimos la señal digital $x_{d,T}[n] = \{x(Tn)\}_{n \in \mathbb{N}}$ como una sucesión que es una muestra uniforme de valores a frecuencia $\frac{1}{T}$, de modo que se ha conseguido convertir una señal analógica en una señal discretizada, y por tanto, expresable en el contexto digital. Por tanto, esta definición lleva implícita la existencia de un operador que asocia a una función, una sucesión de ciertos valores de su imagen.

$$\begin{aligned} ADC_T : \mathcal{AP}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ x(t) &\longrightarrow x_{d,T}[Tn] \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.4. La idea, por tanto, es seleccionar únicamente ciertos valores de la función que esten entre ellos a una distancia T :



PROPOSICIÓN 5.5. Si $x(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{2\pi i \nu_j t} \in \mathcal{T}rig(\mathbb{R})$, y $T > 0$, entonces $x_{d,T}[n] \in \mathcal{T}rig(\mathbb{Z})$. Si además el ancho de banda de $x(t)$ es ν_0 , con $2\nu_0 < \frac{1}{T}$, entonces

$$\widehat{x_{d,T}}(\nu) \cdot H_{\mathbb{I}_{\nu_0 T}} = \widehat{x}\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

donde $\mathbb{I}_{\nu_0 T}$ es el intervalo de longitud $\nu_0 T$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $\widehat{x_{d,T}}$ es la transformada de una función de $\mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ que es 1-periódica. Observemos, por otra parte, que $\widehat{x}\left(\frac{\nu}{T}\right) = 0$, si $\nu > \nu_0 T$.

Como $\widehat{x_{d,T}}(\nu T) = \widehat{x}(\nu)$, el coeficiente de ν_j en x se convierte en coeficiente de $\nu_j T$ y en el intervalo $\mathbb{I}_{\frac{\nu_0}{T}}$ solo podemos encontrar valores del período centrado en 0 de $\widehat{x_{d,T}}(\nu)$. El valor mínimo del período centrado en 1, será $1 - \nu_0 T$, pero como $2T\nu_0 < 1$, no habrá valores de este período en el intervalo $\mathbb{I}_{\nu_0 T}$. \square

OBSERVACIÓN 5.6. Por tanto, esto nos lleva a considerar que para que no haya pérdida de información en la señal muestreada, su frecuencia de muestreo ν_m debe ser como mínimo de $2\nu_0$.

En el contexto de las señales integrables, estas ideas dan lugar al teorema del muestreo de Shannon-Nyquist-Whittaker.

DEFINICIÓN 5.7. Decimos que una señal integrable $x(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ tiene el ancho de banda limitado a ω_0 , si considerando $\mathbb{I}_{\omega_0} = [-\omega_0, \omega_0]$ se tiene: $\text{supp}(\mathcal{F}(x(t))(\omega)) = \overline{\{\omega \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0\}} = \mathbb{I}_{\omega_0}$ ¹. Diremos, por tanto, que su ancho de banda es $\delta(\mathbb{I}_{\omega_0}) = 2\omega_0$.

TEOREMA 5.8. (DAC) Dada una señal $x \in S$ con energía finita, es decir, $x \in \mathcal{L}_2$, que esté limitada en banda por \mathbb{I}_{ω_0} , si x se muestrea a una frecuencia ν con $\nu \geq 2\nu_0$, x puede ser recuperada enteramente desde los valores $x_{d,T}(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{\nu}\right) \frac{\text{sinc}(\pi\nu(t - na))}{\pi\nu(t - na)}.$$

OBSERVACIÓN 5.9. En estas condiciones, cuando la frecuencia de muestreo es lo suficientemente elevada ($a \leq \frac{1}{2\nu_0}$), también se producen traslaciones que no se superponen del propio espectro debido a la periodicidad de la función, y que mediante el teorema, se aisló una copia central de dicho espectro con el fin de usarla para reconstruir la señal original.

¹Donde \mathcal{F} es la trasformada de Fourier en \mathcal{L}^2 , $\mathcal{F}(x(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2\pi i \omega t} dt$

COROLARIO 5.10. Definimos el operador $DAC_\nu : S \rightarrow \mathcal{L}^2$ que convierte señales discretas en continuas

$$x[n] \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \operatorname{sinc}(\nu(t-n))$$

TEOREMA 5.11. Dada una señal $x \in \mathcal{L}^2$ que esté limitada en banda por \mathbb{I}_{ω_0} , muestreada a una frecuencia mayor que $2\omega_0$, se tiene que $(ADC \circ DAC)(x(t)) = x(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $DAC(x(t)) = x(\frac{t}{\nu})$, utilizando 5.8 tenemos que $ADC[DAC(x(t))] = x[t]$. \square

AFIRMACIÓN 5.12. En el contexto de las funciones casi periódicas, al igual que en el caso de señales de duración finita, no se cumplen las condiciones de integrabilidad o de límite de banda.

TEOREMA 5.13. $\forall x(t) \in \mathcal{Trig}(\mathbb{R})$, se cumple el teorema de Shannon.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un polinomio trigonométrico $x(t) = \sum_{j=-n}^n a_j e^{2i\pi\lambda_j t} \in \mathcal{Trig}(\mathbb{R})$,

de modo que su transformada es $\hat{x}(\nu) = \sum_{j=-n}^n a_j \delta(\nu - \lambda_j)$. Como es lineal, será suficiente probarlo para uno de los sumandos, que supondremos con coeficiente unitario. De hecho, tomaremos $x(t) = e^{2\pi i \lambda t}$ y una frecuencia de muestreo de $w_m Hz$ (con período de muestreo $T_m = \frac{1}{w_m}$).

Como $1 > 2T_m\lambda$ estamos en las condiciones del teorema de Shannon.

Reemplazamos $x(t)$ por otra señal x_m que coincida con $x(t)$ en el intervalo $(\frac{-1}{2T_m}, \frac{1}{2T_m})$ pero que sea T -periódica (x era $\frac{1}{\lambda}$ -periódica). La nueva señal será continua y derivable en todo su dominio excepto como mucho, en los extremos del intervalo $(\frac{-k}{2T_m}, \frac{k}{2T_m})$.

Por otra parte, su transformada de Fourier es:

$$\hat{x}(kT_m) = I_m \int_{\frac{1}{2T_m}}^{\frac{1}{2T_m}} x(t) e^{2\pi i k T_m t} dt,$$

con lo que se tiene que

$$e^{2\pi i \lambda t} = x_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}(kT_m) e^{2\pi i k T_m t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Realizando el intercambio de variable $t = \lambda$, tenemos:

$$e^{2\pi i \lambda t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}(kT_m) e^{2\pi i k T_m \lambda}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

donde $e^{2\pi i k T_m}$ son los valores de la señal inicial en los puntos de muestreo. \square

COROLARIO 5.14. La frecuencia de muestreo debe ser por lo menos $\nu > \frac{1}{T} = 2\nu_0$ muestras por segundo (a esto se le llama frecuencia de Nyquist).

DEFINICIÓN 5.15. La distorsión en la señal producida por el muestreo por debajo de la frecuencia de Nyquist se llama *aliasing*.

OBSERVACIÓN 5.16. Un muestreo por cuadratura de la señal x_m la representa mejor que su discretización directa.

El tipo de muestreo de las señales $I[t]/Q[t]$ produce el doble de datos, dado que son dos componentes desfasadas de la misma señal, convenientemente alternadas, por tanto, como el teorema anterior indica que el ancho de banda de la señal muestreada es igual que la frecuencia de muestreo, al realizar un análisis espectral de un entorno de la frecuencia central muestreada, el radio de dicho entorno quedará determinado por la tasa de muestreo. Por consiguiente, es equivalente a producir una muestra al doble de frecuencia de muestreo.

AFIRMACIÓN. 5.16.1 Si muestreamos una función casi periódica X_m , tomando muestras aleatorias (en lugar de equiespaciadas) en intervalos disjuntos, puede demostrarse que con probabilidad 1 conservamos toda la información de X_m . Así, con este proceso podemos mejorar considerablemente la tasa de Nyquist, a costa de aumentar también el tamaño de los intervalos. Estos resultados pueden ser consultados en la referencia [FGG].

DEFINICIÓN 5.17. Llamaremos intervalo de *waterfall* al intervalo centrado en la frecuencia a muestrear y con radio la tasa de muestreo para cada una de las muestras tomadas.

Además, retomando el concepto de inyectividad del operador modulación, tenemos que en las condiciones del teorema del muestreo, se tiene además la posibilidad del visualizado de hipotéticas señales moduladas cercanas mediante la *waterfall*.

OBSERVACIÓN 5.18. El ancho de banda de la *waterfall* queda determinado por la tasa de muestreo de las señales de cuadratura, con lo que podemos asociar directamente ambos conceptos. De hecho, una visión que supere dicha tasa de muestreo simplemente produciría copias del espectro central (*aliasing*).

EJEMPLO 5.19. Así pues, para una frecuencia por defecto de 2.048.000Hz, se dispondrá de una ventana en frecuencia de 1Mhz a ambos lados de la frecuencia central, tras la obtención de las señales I/Q. Para implementar su procesado SDR, se requiere de un muestreo de las mismas en el dominio del tiempo. La elección de una correcta frecuencia de muestreo será necesaria para obtener un rango de frecuencias lo suficientemente amplio, ya no tanto para sintonizar y demodular una portadora, sino también para la visualización del espectro radioeléctrico adyacente.

EJEMPLO 5.20. En el caso contrario, si queremos muestrear la banda de 2m, nuestro ancho de banda será de 2Mhz, con lo que acorde al teorema del muestreo se necesitará de una tasa superior a 4Mhz, pero al trabajar con señales I/Q, esto equivale a 2MHz.

5.2. Operaciones con muestreo.

Por lo anteriormente definido y de cara a su uso a la hora de discretizar una señal, tan importante es la imagen operador ADC_ν , como el conocimiento de la propia frecuencia a la que ha sido muestreada ν . El objetivo será visualizar los proceso de reescalado de la muestra.

EJEMPLO 5.21. Podemos considerar la señal periódica que oscila entre 1 y 9, variando el valor cada décima de segundo, dos segundos.

$ADC_5 = [1, 3, 5, 7, 9, 7, 5, 3, 1, 3, 5, 7, 9, 7, 5, 3, 1, 3, 5, 7]$ es una señal de 4 segundos de duración, mientras que

$ADC_{10} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4]$ es una señal de 2 segundos de duración.

OBSERVACIÓN 5.22. Por tanto, el tamaño de la muestra dividida por la frecuencia de muestreo es el tiempo que se ha muestreado la señal.

DEFINICIÓN 5.23. Llamamos *diezmo* de una señal al hecho de reducir la frecuencia de muestreo de una muestra dada, mediante un operador R_n^0 .

La idea sería obtener una subsucesión de la muestra de forma equiespaciada. De ese modo, si la muestra está tomada a una frecuencia de muestreo de ν_m , el tomar la muestra diezmada a una frecuencia relativa de ν'_m toma unos valores de la muestra de forma que la nueva tasa de muestreo será de $\nu_m \cdot \nu'_m$.

EJEMPLO 5.24. De la señal de ejemplo, podemos tomar un diezmo reduciendo a la mitad el número de muestras obteniendo:

$R_2^0(ADC_{10}) = [1, 3, 5, 7, 9, 7, 5, 3, 1, 3]$, con lo que obtenemos ADC_5 , pero únicamente 2 segundos.

DEFINICIÓN 5.25. Llamamos interpolación $R_0^n(ADC_\nu)$ (*upsampling*) al hecho de aumentar la frecuencia de muestreo de una muestra dada. Existen para ello diversas técnicas.

5.2.1. Zero-padding. Esta técnica consiste en introducir ceros como nuevos valores de la muestra para aumentar su tamaño.

EJEMPLO 5.26. $R_0^2(ADC_{10}) = R_0^2[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4] =$
 $= [1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9, 0, 8, 0, 7, 0, 6, 0, 5, 0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0]$, con lo que obtenemos ADC_{20} , pero únicamente 2 segundos.

5.2.2. Interpolación. Mediante esta técnica se consigue que los valores incluidos en la muestra aumenten su tamaño, y para que sean valores interpolados entre sus extremos, consiguiendo una muestra más teóricamente fidedigna.

Esta técnica consiste en introducir ceros como nuevos valores de la muestra al aumentar su tamaño.

EJEMPLO 5.27. $R^2(ADC_{10}) = R^2[1, 3, 5, 7, 9, 7, 5, 3, 1, 3] =$
 $= [1, \frac{1+3}{2}, 3, \frac{3+5}{2}, 5, \frac{5+7}{2}, 7, \frac{7+9}{2}, 9, \frac{9+7}{2}, 7, \frac{7+5}{2}, 5, \frac{5+3}{2}, 3, \frac{3+1}{2}, 1, \frac{1+3}{2}, 3]$, con lo que obtenemos ADC_5 , pero únicamente 2 segundos. No obstante, esta señal se asemeja más a la original que la obtenida por *zero-padding*.

DEFINICIÓN 5.28. Definimos el operador de remuestreo racional R_m^n en el que se sube la frecuencia de muestreo y se baja la frecuencia de muestreo.

AFIRMACIÓN 5.29. Mediante un correcto proceso de interpolación, notar que conviene primero hacer el sobremuestreo y después el diezmo que al revés, de este modo nos aseguramos de que el diezmo contendrá elementos reales de la muestra y no interpolados.

DEFINICIÓN 5.30. El operador $R_m^n(ADC_\nu)$ convierte una señal de entrada a una frecuencia ν , en una frecuencia de salida $ADC_{\frac{n\nu}{m}}$.

5.3. Transformada discreta y muestreo pasa banda.

Tal y como vimos en el segundo capítulo, en muchas ocasiones (en los procesos de filtrado de componentes espectrales, en la generación de la *waterfall*, etc.) se requiere la obtención de la potencia de las componentes frecuenciales de una señal en el proceso de recepción, y para ello

utilizábamos la transformada de Fourier. Como el trabajo en SDR incluye la necesidad del uso de una señal muestreada, y sólo en un rango determinado de frecuencias para la generación de la *waterfall*, la tasa de Nyquist representa una cota de la frecuencia de muestreo que es mejorable en estos casos. En este apartado veremos como abordar estos aspectos.

5.3.1. Uso de la transformada discreta. En el caso de $x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, la transformada de Fourier la determinábamos mediante la media introducida por Bohr. No obstante, una vez muestreada la señal estos cálculos quedan sustituidos por la transformada discreta de Fourier, cuya implementación usada será el algoritmo FFT.

Así, en una señal digital periódica arbitraria (de periodo N), ésta queda determinada por N valores consecutivos $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$, de modo que su transformada discreta también solamente depende sólo de N términos, ya que únicamente las frecuencias $\frac{k}{N}Hz$, ($k \in \mathbb{Z}$) pueden aparecer $\hat{x}[0] = \hat{x}[N], \hat{x}[1] = \hat{x}[N+1], \dots$, de modo que las frecuencias $0Hz, \frac{1}{N}Hz, \dots, \frac{k}{N}Hz$ son las que contienen información.

En el caso del algoritmo FFT, será necesario establecer un número de puntos para el algoritmo. En una ventana frecuencial determinada, en la que pueden producirse transmisiones de un cierto ancho de banda δ , la longitud de la transformada debe ser mayor o igual que el número de canales que puede haber en el rango frecuencial de la ventana.

EJEMPLO 5.31. Veamos cómo calcular el número de puntos necesarios para aplicar la transformada rápida de Fourier si consideramos transmisiones de ancho de banda 12.5KHz en la banda de 2m.

Por lo visto, en el plan de bandas, el rango de frecuencias de radioafición es de 144-146MHz. Con lo que el número de canales va a ser $\frac{(146-144) \times 10^6}{12.5 \times 10^3} = 160$ posibles canales. De este modo, incluyendo el plegado de frecuencias, se necesitaría aplicar una FFT de 320 puntos para la detección de transmisiones. Como la potencia de dos más cercana es 512, esta sería la longitud necesaria.

5.3.2. Muestreo pasa banda. Recordemos que por el teorema del muestreo, dada una señal $x(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$, para conseguir una buena representación, dicha señal debe, por una parte, estar limitada en banda, es decir, que debe tener una frecuencia máxima; y por otra parte, la frecuencia de muestreo debe ser, como mínimo, el doble de dicha frecuencia.

No obstante, en el caso de las señales que no están centradas en cero, se puede reducir la tasa de Nyquist disminuyendo el coste computacional asociado al resto de procesos.

De este modo, recibida una señal continua de ancho de banda δ , y frecuencia central ν_0 , consideremos sus réplicas positivas y negativas, y llamemoslas, respectivamente Q y P. De este modo, dado un número m , se puede observar que en el rango de frecuencias del ancho de banda de trabajo se tiene que: $\nu_s = \frac{2\nu_0 - \delta}{m}$.

De modo que, en la frecuencia nula se tendrá la banda P a la derecha y Q a la izquierda, produciendo, además, solapamiento (*aliasing*) en el caso que no se cumpliera que $\nu'_s \leq \frac{2\nu_0 - \delta}{m}$, de forma que reduciendo ν'_s , el espacio entre las réplicas decrece; de modo que para $\nu'_s < \nu''_s$, se tiene que $\nu''_s \geq \frac{2\nu_0 + \delta}{m}$, de modo que obtenemos que el rango de elección de la frecuencia de muestreo, sin producirse *aliasing* es:

$$\frac{2\nu_0 - \delta}{m} \leq \nu_0 \leq \frac{2\nu_0 + \delta}{m}, m \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplos de aplicación de esta técnica pueden ser consultados en la referencia [OZ].

5.4. Muestreo I/Q y demodulación discreta.

Ya en la sección 3.2. obtuvimos las fórmulas a aplicar para la demodulación de la señal moduladora en una cierta transmisión, a partir de las señales I/Q, de modo que:

Modulación	Señal moduladora
Amplitud modulada	$x_m = \ (I, Q)\ _2 = \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)}$.
Frecuencia modulada	$\arctan \left(\frac{Q[n]I[n-1] - Q[n-1]I[n]}{I[n]I[n-1] + Q[n]Q[n-1]} \right)$

Supongamos que de una cierta transmisión $(X_m, M_{\nu_p}^{tipo}, \delta)$, mediante un proceso de detección en cuadratura, se obtuvieron sus señales respectivas en banda base $I(t), Q(t)$, de modo que bajo una tasa adecuada de muestreo acorde al ancho de banda de la señal modulada, se discretizaron obteniendo $I[t]$ y $Q[t]$.

PROPOSICIÓN 5.32. *El equivalente discreto al cálculo de la señal moduladora, desde las componentes I/Q de la señal modulada en AM es $x_m[n] = \sqrt{I^2[n] + Q^2[n]}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta con sustituir en la ecuación de obtención de la señal moduladora, modulada en AM las componentes en cuadratura discretas por las continuas. \square

PROPOSICIÓN 5.33. *Dada una señal $x(t)$, que fué muestreada con una frecuencia ν_0 y de la que se extrajo $x[n]$, para una frecuencia de muestreo lo suficientemente grande, se tiene que $x'(t) \approx x[n] - x[n-1]$.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una señal $x(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, podemos considerar su derivada $x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$, si esta señal se muestrea a una frecuencia ν_0 , se obtiene un conjunto de valores $x[n]$, de modo que la expresión $x[n+1] - x[n]$, reescribible como $x[n] - x[n-1] = \frac{x[n] - x[n-1]}{1}$, con lo que tomando la suficiente frecuencia $x'(t) \approx x[n] - x[n-1]$, es decir, para T lo suficientemente grande se tiene que $x((n-1)T) \approx \frac{x[nT] - x[(n-1)T]}{\frac{1}{T}}$. \square

DEFINICIÓN 5.34. La expresión $x[n+1] - x[n]$ la llamaremos equivalente discreto de la derivada de $x(t)$.

TEOREMA 5.35. *En el caso de la demodulación FM se tiene que*

$$(5.4.1) \quad p[n] - p[n-1] = \arctan \left(\frac{Q[n]I[n-1] - Q[n-1]I[n]}{I[n]I[n-1] + Q[n]Q[n-1]} \right)$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demodular la señal siguiendo el esquema propuesto en la proposición 4.18, con $\nu_0 = \nu_p$. De modo que, tomando $I(t) = \frac{A_p}{2} \cos(p(t)), Q(t) = \frac{A_p}{2} \sin(p(t))$, donde $p(t) = \arctan \left[\frac{Q(t)}{I(t)} \right]$, donde tomando $t = nT$, se obtiene $x_{fm} = I[n] + iQ[n] = \frac{A_p}{2} e^{ip[n]}$. Consideremos que

$$\begin{cases} x[n] = e^{ip[n]} \frac{A_p}{2} \\ x[n-1] = e^{ip[n-1]} \frac{A_p}{2} \end{cases} \text{ con lo que}$$

$$\begin{aligned} e^{i(p[n] - p[n-1])} &= \frac{x[n]}{x[n-1]} = \frac{(I[n] + iQ[n])(I[n-1] - iQ[n-1])}{I^2[n-1] + Q^2[n-1]} = \\ &= \frac{I[n]I[n-1] + Q[n]Q[n-1]}{I^2[n-1] + Q^2[n-1]} + i \frac{Q[n]I[n-1] - Q[n-1]I[n]}{I^2[n-1] + Q^2[n-1]}. \end{aligned}$$

Por tanto, $p[n] - p[n - 1] = \arctan \left(\frac{Q[n]I[n-1] - Q[n-1]I[n]}{I[n]I[n-1] + Q[n]Q[n-1]} \right)$. \square

OBSERVACIÓN 5.36. Como muchas veces $p[n] - p[n - 1]$ es muy pequeño, como $e^{i(p[n] - p[n-1])} = \cos(p[n] - p[n - 1]) + i \sin(p[n] - p[n - 1])$, sustituyendo el coseno y seno por sus infinitésimos² respectivamente, podemos obviar la arcotangente, con lo que tenemos que:

$$P[n] - P[n - 1] \simeq \frac{Q[n]I[n - 1] - Q[n - 1]I[n]}{I^2[n - 1] + Q^2[n - 1]}.$$

TEOREMA 5.37. *En el caso de la demodulación FM:*

$$P[n] - P[n - 1] \simeq \frac{Q[n]I[n - 1] - Q[n - 1]I[n]}{I[n]I[n - 1] + Q[n]Q[n - 1]}.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que en el contexto de la modulación FM, $x_m(t) = (1/k)p'(t)$ con lo que, al discretizar con T grande se tiene que

$$x_d[n - 1] = x_m((n - 1)T) = \frac{1}{k}p'((n - 1)T) \approx \frac{1}{k}T(p[n] - p[n - 1]).$$

Basta con considerar que por el teorema 4.18 se tiene que

$$P[n] - P[n - 1] = \arctan(P[n] - P[n - 1]) \underset{1}{\simeq} \tan \left(\arctan \left(\frac{Q[n]I[n - 1] - Q[n - 1]I[n]}{I^2[n - 1] + Q^2[n - 1]} \right) \right),$$

por tanto se tiene que

$$P[n] - P[n - 1] \simeq \frac{Q[n]I[n - 1] - Q[n - 1]I[n]}{I[n]I[n - 1] + Q[n]Q[n - 1]} = \frac{1}{k}x_m.$$

\square

Una extensión de este estudio, que excede del objetivo del presente trabajo, es la aplicación de estas fórmulas en el contexto de las modulaciones digitales descritas en la sección 3.5. Ejemplos de implementación de estas modulaciones pueden ser consultados en las referencias [15, 16].

5.5. Filtrado digital.

El filtrado digital ofrece técnicas cuyo objetivo es que al aplicarse a la señal digitalizada, atenúe las frecuencias deseadas de modo similar al que realizaría un filtro analógico sobre una señal analógica. Es utilizado en el contexto SDR una vez obtenidas y muestreadas las señales $I(t)$ y $Q(t)$ con distintos objetivos, entre los que destaca el filtrado de todas las señales fuera de la ventana de recepción, así como el filtro pasa banda estrecho que fije las señales I/Q sobre la frecuencia de la señal a sintonizar, y su uso como filtro paso bajo para eliminar frecuencias no audibles tras la demodulación de la señal y previo a la interpolación que generará la señal audible.

Similarmente a la definición de muestra, en la que se toma una sucesión de valores de la señal analógica, diremos que un filtro es un operador que convierte una sucesión en otra y que atendiendo al modo en el que se construye la sucesión imagen (o sucesión filtrada), definiremos

² $\cos(t) \sim 1; \sin(t) \sim t; \tan(t) \sim t$.

dos tipos de filtros digitales: los llamados filtros recursivos (IIR)³ y los filtros que no se definen mediante recurrencias (FIR)⁴.

5.5.1. Filtros recursivos (IIR). Están regidos por una recurrencia lineal. Así, por ejemplo la implementación de un filtro paso bajo, toma la forma:

Algoritmo 1 Ejemplo de filtro IIR.

EJERCICIO 5.38. Ejemplo de filtro paso bajo IIR.

// Devolvemos la muestra pasada por un filtro RC discreto con intervalo de tiempo dt, y constante temporal RC.

function lpass(real[0..n] x, real dt, real RC) : real [0..n];

var y:real[0..n];

var α :real ;

begin

$\alpha := dt / (RC + dt)$;

$y[0] := \alpha * x[0]$;

for i=1 to n do $y[i] := \alpha * x[i] + (1-\alpha) * y[i-1]$;

lpass:=y;

end;

PROPOSICIÓN 5.39. Dada $X[t] = e^{i\omega t}$, se tiene que $x_f[t] = \frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}u[t]$.

Demostración: en el caso que la señal sea una exponencial compleja, $X_f[t] = H[\omega]X[t] = H[\omega]e^{i\omega t}$, de donde deducimos que:

$H[\omega] = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}$, de modo que $h[n] = \alpha^n u[n]$, con lo que si calculamos la respuesta en escalón, esta es $x_f[t] = \frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}u[t]$.

OBSERVACIÓN 5.40. Este tipo de filtros, como vemos, tiene una duración de su respuesta en impulso infinita (de ahí IIR), y por tanto, se trata de un filtro paso bajo si $\alpha > 0$; y de un filtro paso alto si $\alpha < 0$. Además, el tamaño del filtro viene determinado por $|\alpha|$.

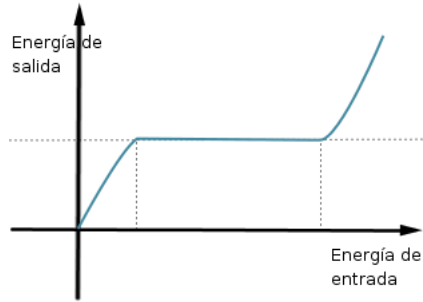
EJEMPLO 5.41. AGC. Control automático de ganancia.

Con el objetivo de equilibrar la potencia de la señal recibida, los sistemas de radio suelen implementar algoritmos para normalizar el nivel de la señal consiguiendo así una mejora en la recepción en AM analógica y disminuyendo la tasa de errores en señales digitales moduladas en amplitud.

La idea es que cuando el nivel de la señal de entrada es bajo, el AGC queda desactivado obteniendo una función lineal respecto la entrada, y entre el umbral inferior y el superior el AGC se activa manteniendo el nivel de salida en el nivel deseado, volviendo a la linealidad una vez superado el nivel superior.

³Infinite Impulse Response.

⁴Finite Impulse Response.



El objetivo será, por tanto, estimar la ganancia requerida para forzar una señal a tener energía unitaria. Así, trabajando muestra a muestra, debemos estimar el nivel de señal $e(t)$ para actualizar el coeficiente de ganancia, de modo que, aplicando este coeficiente a cada elemento de la muestra generamos otra muestra cuyo nivel de energía queda normalizado.

Así, dada una señal $x = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, tenemos que su energía es $e(x(t)) = \|x\|_2 = \sum \|x_k^2\|$. En la práctica, ajustaremos la ganancia respecto a la variación más pequeña en amplitud para evitar posteriores errores en la señal. De hecho, resulta contraproducente el cálculo de energía punto a punto en la muestra, de modo que ésta se estimará cada cierto número M de muestras.

En este caso, el bucle del filtro es un filtro paso bajo con función de transferencia, para $\alpha = \sqrt{\omega}$ es,

$$H_g(\omega) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}}.$$

Con el objetivo de recabar la energía unitaria, la ganancia ideal instantánea es la inversa de la energía estimada de la señal $g_k = \sqrt{\frac{1}{e_k}}$. De modo que, aplicada a la ganancia directa de la entrada, la señal es filtrada como $g_k = \alpha g_k + (1 - \alpha)g_{k-1}$.

EJEMPLO 5.42. *Squelch*.

La idea es usar parte del filtro AGC, ya que cuando en el filtro se detecte que el nivel de la señal es demasiado bajo, la salida del filtro de *squelch* anulará la señal de salida con el objetivo de cerrar el ruido blanco.

5.5.2. Filtros no recursivos (FIR). Un filtro FIR es un sistema causal discreto en el que cada valor de la muestra, se altera de acuerdo con el operador discreto, que cumple las condiciones de filtro, atendiendo también a un cierto número de valores $N-1$ anteriores de la muestra, que determinarán el orden del filtro.

DEFINICIÓN 5.43. Dada una señal $x(t) \in S$, un filtro FIR ofrecerá una señal de salida determinada por la convolución discreta $A[x[n]] = \sum_{i=0}^N b_i x[n - i]$, donde b_i es el valor de la respuesta en impulso en el tiempo, y al conjunto $\{b_i\}$ se les llama coeficientes del filtro.

OBSERVACIÓN 5.44. Consecuentemente, la respuesta en impulso de estos filtros viene determinada por la expresión:

$$h[n] = \sum_{i=0}^N b_i \delta[n - i] = \left\{ \begin{array}{ll} b_n & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}.$$

PROPOSICIÓN 5.45. (*Respuesta en frecuencia*). Se cumple: $H[\omega] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (e^{i\omega})^{-n}$.

DEMOSTRACIÓN. Si denotamos $H[\omega] = \widehat{h}[t]$, se tiene que la transformada de la convolución : $\widehat{x * h} = \widehat{x} \cdot \widehat{H}$, con lo que $y[n] = x[n] * h[n] = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{x} \cdot H)$, de modo que, la función H , vendrá determinada por los coeficientes de Fourier asociados, con lo que

$$H[\omega] = \sum_n h[n] (e^{i\omega})^{-n} = \sum_n b_n (e^{i\omega})^{-n}.$$

□

5.5.3. Filtros BIN. A la señal $X(t)$ recibida por la antena durante t segundos, le aplicamos un muestreo de periodo T o frecuencia $\nu_0 Hz$. De modo que esta señal queda convertida en una señal $A[n]$ formada por N términos, $A[0], A[1], \dots, A[N-1]$. Además, si $N = 2^M$, podremos manipularla más fácilmente usando el algoritmo rápido para la DFT, la FFT.

DEFINICIÓN 5.46. Dada una señal analógica $A[n]$ de N términos y muestreada a $\nu_0 Hz$, llamamos N-BIN a la transformada de A , que también consta de N términos:

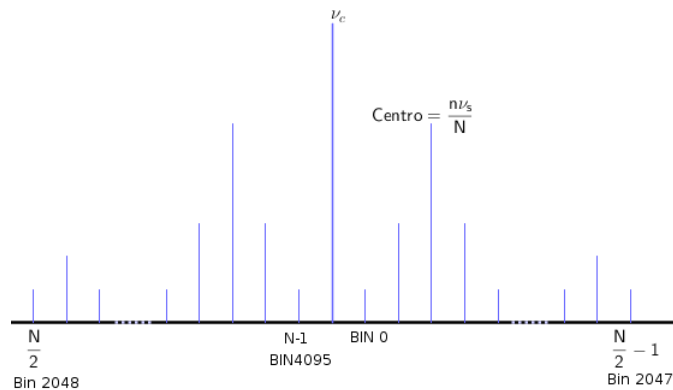
$$\left\{ \widehat{A}[0](frecuencia 0), \widehat{A}[1](frecuencia \frac{1}{NT} = \frac{\nu_0}{N}), \dots, \widehat{A}[N-1](frecuencia \frac{(N-1)\nu_0}{Nt}) \right\}.$$

OBSERVACIÓN 5.47. También podemos obtener $\widehat{A}[j]$ filtrando la señal original con un filtro pasa banda estrecho centrado en cada frecuencia $\frac{j\nu_0}{N}$, de ahí que a este proceso se le llame filtro BIN.

En términos de transformadas, al discretizarlas obtenemos $e^{-i\omega} \rightarrow e^{-\frac{i2\pi k}{N}}$, de modo que nuestro espectro continuo de frecuencias se transforma en N BINS. Así, para calcular el valor del BIN número t , tenemos que

$$BIN(t) = t \cdot \frac{frecuencia \quad muestreo}{Num. \quad Puntos \quad DFT} = t \frac{\nu_0}{N}$$

Así, dadas las señales I/Q , mediante el algoritmo FFT, podemos obtener sus descomposiciones en sus componentes espectrales:



Tenemos que ser conscientes que, por una parte, la sintonía induce un cierto ancho de banda, con lo que puede que involucre más o menos filtros BIN, y que por otra parte, el promedio cuadrático de los valores instantáneos de los filtros del ancho de banda, pueden determinar el corte en

el proceso, de modo que si la señal no supera un cierto nivel, no se demodula (concepto de *sqelch*).

Además, resulta simple operar sobre el vector de valores instantáneos de los filtros BIN, de modo que pueden fácilmente multiplicar por una constante o función de su valor, permitiendo mejorar la ganancia en las frecuencias afectadas por estos operadores.

Referencias principales:

[**G1, OW, OZ, BOU, BRE, CV, 6, 9**].

Capítulo 6

SDR: ejemplos prácticos de las etapas.

6.1. Muestreo.

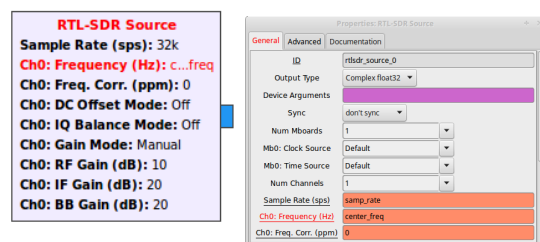
El dispositivo utilizado para la realización del muestreo en los ejemplos prácticos será un *doongle* con el *chipset* Realtek RTL2832 y sintonizador fitipower FC13 compatibles con la librería rtl-sdr.

6.1.1. Obtención física de los datos con RTLSDR. Uno de los programas utilizados para la obtención de un fichero de muestras reales del espacio radioeléctrico usando el *chipset* mencionado es el *rtl_sdr*, con el que obtendremos un registro de las señales I/Q muestreadas a la frecuencia de muestreo indicada, con la frecuencia central de sintonía deseada.

```
rtl_sdr, an I/Q recorder for RTL2832 based DVB-T receivers
Usage:  -f frequency_to_tune_to [Hz]
        [-s samplerate (default: 2048000 Hz)]
        [-d device_index (default: 0)]
        [-g gain (default: 0 for auto)]
        [-p ppm_error (default: 0)]
        [-b output_block_size (default: 16 * 16384)]
        [-n number_of_samples_to_read (default: 0, infinite)]
        [-S force_sync_output (default: async)]
        filename (a '-' dumps samples to stdout)
```

Como vemos, el programa dispone de otros parámetros que, a grandes rasgos, configuran los aspectos en los que interviene la parte electrónica. Nos será de interés configurar el número de muestras por segundo (-s) a tomar, la ganancia de la señal (-g) amplificada por el propio *hardware*, y la frecuencia central (-f) o *DC* a usar. Los demás parámetros no tienen relevancia desde el punto de vista de este estudio. Otro detalle a tener en cuenta es que dado que la frecuencia de muestreo determina el ancho de banda como vimos en 5.8, cabe la necesidad de ajustar la misma atendiendo a las necesidades reales del programa ya que, si simplemente se requiere de una muestra para su demodulación, el parámetro -s será mucho menor que si se busca la creación de una *waterfall* de alta calidad.

6.1.2. Obtención física de los datos con GNURadio. GNU-Radio es un paquete integrado de programación visual y modular orientado a la radio. Dispone de una colección de componentes que pueden encadenarse formando un esquema con el flujo de señal deseado. En particular, el componente *OsmoCOM source* provee al sistema descrito de las señales en cuadratura procedentes del receptor físico con la tasa de muestreo indicada, tomando también como dato la frecuencia central a la que se sintonizará el receptor.



6.1.3. Formato del archivo de salida. Durante el tiempo t (en segundos) en el que se mantiene en funcionamiento el programa con una frecuencia ν_s de muestreo, y una frecuencia central ν_p , se va generando un archivo cuyo contenido puede verse como un vector X_{IQ} de longitud $2\nu_s t$ bytes. Dicho vector X_{IQ} contiene además las componentes en cuadratura de la señal X_m recibida, cuyo ancho de banda, por lo anteriormente visto, determina la zona útil, en el sentido que es más fidedigno a lo que realmente sucede en ese intervalo radioeléctrico.

Por defecto, además, el archivo generado contiene alternadas las señales I/Q .

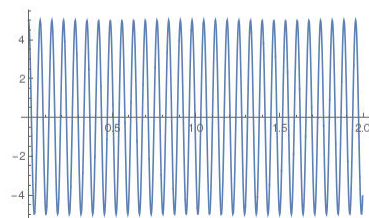
DEFINICIÓN 6.1. Un archivo secuencial de datos I/Q contendrá una sucesión $\{X_{IQ}\}_n$, en la que las componentes en cuadratura se determinan como: $I[n] := \{X_{IQ}\}_{2n}$, $Q[n] := \{X_{IQ}\}_{2n+1}$.

6.2. Principios de la generación de *la waterfall*.

6.2.1. Ejemplo de paso al dominio en frecuencia de una onda. Supongamos que se recibió una señal modulada que fué trasladada a banda base. Veamos como a partir de dicha señal moduladora en el dominio del tiempo, podemos obtener otra en el dominio de frecuencia. Para ello, generaremos una señal de ejemplo de 14Hz, a la cual le aplicaremos el análisis de Fourier¹.

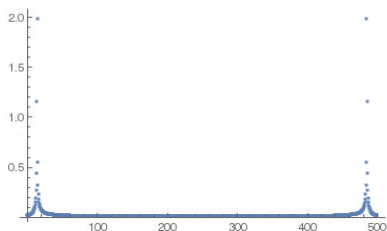
Definamos la señal primeramente de acuerdo con los siguientes parámetros:

```
nn = 1000; (*Número de puntos a considerar de la señal*)
sr = 500; (*Frecuencia de muestreo*)
dt = 1/sr; (*Incremento de tiempo*)
df = sr/nn; (*Incremento de frecuencia*)
f1 = 14.314; (*Frecuencia de la onda audible HZ*)
p = 1/f1; (*Periodo de la onda*)
a = 5; (*Amplitud de la onda*)
(*Generamos la muestra de la onda*)
data = Table[N[{t, a Cos[2 π f1 t]}], {t, 0, dt (nn - 1), dt}];
ListLinePlot[data]
```

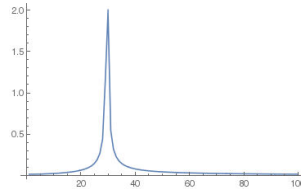


Al realizar la transformada obtenemos su espectro:

```
ft = Fourier[data[[All, 2]], FourierParameters -> {-1, -1}];
freqs = Table[(n - 1) sr / nn, {n, nn}];
ListPlot[Transpose[{freqs, Abs[ft]}], PlotRange -> All]
```



```
ListLinePlot[Abs /@ Table[ft[[*]], {*, 1, 100}], PlotRange -> All]
```



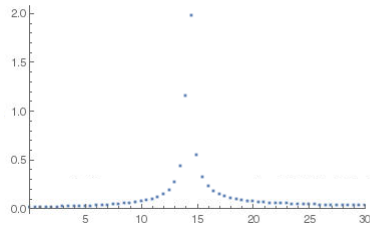
```
Abs /@ Table[ft[[*]], {*, 20, 40}]
```

```
{0.0641868, 0.0731551, 0.0844354, 0.099073, 0.118857, 0.147124, 0.190888,
0.267841, 0.439149, 1.15556, 1.97892, 0.543987, 0.318833, 0.227144,
0.177341, 0.146034, 0.124516, 0.108805, 0.0968206, 0.0873707, 0.0797231}
```

De forma que, cambiando el dominio de puntos de discretización a Hz tenemos centrado el máximo en la frecuencia:

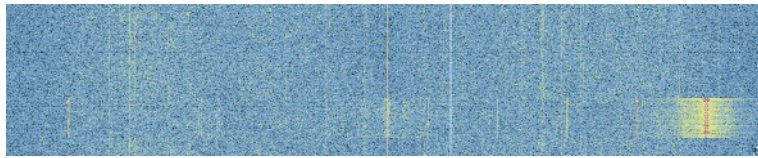
¹Notar que tomamos una frecuencia baja para facilitar la representación gráfica.

```
ListPlot[Transpose[{freqs, Abs[ft]}], PlotRange -> {{0, 30}, All}]
```



```
{data[[All, 2]].data[[All, 2]]/nn, ft.Conjugate[ft]}  
{12.5408, 0. + 0. i}
```

6.2.2. Función fila de asociación de registro de colores. Potencia de señal. La *waterfall* se puede definir formalmente como una sucesión de vectores $w_i(t)$, con tantas componentes como de BINS esté formada la ventana de discretización en frecuencia de la señal. A cada una de las componentes se le aplica una función de modo que tiende a un color determinado (rojo, azul, etc.) para cuando la potencia de recepción de la señal en la franja del espectro asociado a su respectivo BIN (según el apartado 5.5.3) tiene mayor valor absoluto.



Tenemos que considerar que, a parte de los conceptos definidos en 5.17 y 5.18, cabe considerar la frecuencia ν_{wf} en la que se genera cada $w_i(t)$, que llamaremos frecuencia de actualización de la cascada. En la figura vemos una evolución temporal de muestra cada 0.2 segundos.

Su implementación por *software* puede realizarse de diversos modos, como por ejemplo, las medias de los BINS para equilibrar el peso del impulso de estática o de intermodulación. Obviamente, a mayor frecuencia, mayor fidelidad con lo que está sucediendo realmente en el espacio radioeléctrico.

6.2.3. Obtención de la WF a partir de señales I/Q. Partiendo de las señales $I[n]$ y $Q[n]$, veremos cómo utilizarlas para conseguir crear una *WF* y demodular una onda portadora contenida en la muestra. Supondremos en los ejemplos prácticos que las señales en cuadratura son adquiridas del modo y en el formato en el que se mencionó en el apartado 6.1. Tomaremos en el experimento una muestra de 10 segundos de duración, a una frecuencia central de 96.1Mhz, con una ganancia de 40db, y un ratio muestreo de 2500000Hz.

```
$ rtl_sdr -f 96100000 -g 40 -s 2500000 -n 25000000 PruebaFM.dat  
Found 1 device(s):  
 0: Realtek, RTL2838UHIDIR, SN: 00000001  
  
Using device 0: Lifeview LV5TDeluxe  
Found Fitipower FC0013 tuner  
Exact sample rate is: 2500000.107620 Hz  
Sampling at 2500000 S/s.  
Tuned to 96100000 Hz.  
Tuner gain set to 19.70 dB.  
Reading samples in async mode...  
  
User cancel, exiting...
```

Una vez tomada la muestra, realizaremos la carga como una variable dentro de un entorno matemático como *octave* y la tratamos de acuerdo a su formato (descrito en 6.1.3). Así, primeramente, pasamos todos los valores de la muestra en bytes (es decir, del rango [0,255]), a un rango con signo [-127.5,127.5]:

```
octave:1> datos=fopen('PruebaFM.dat','rb');
octave:2> xiq=fread(datos,'uint8=>double');
octave:3> xiq=xiq-127.5;
octave:4> xiq=xiq(1:2:end) + i*xiq(2:2:end);
```

para poder tratarlo como una onda sinusoidal. Seguidamente separamos las componentes $I(t)$ y $Q(t)$, generando una variable:

$$x_{iq}[n] = I[n] + iQ[n].$$

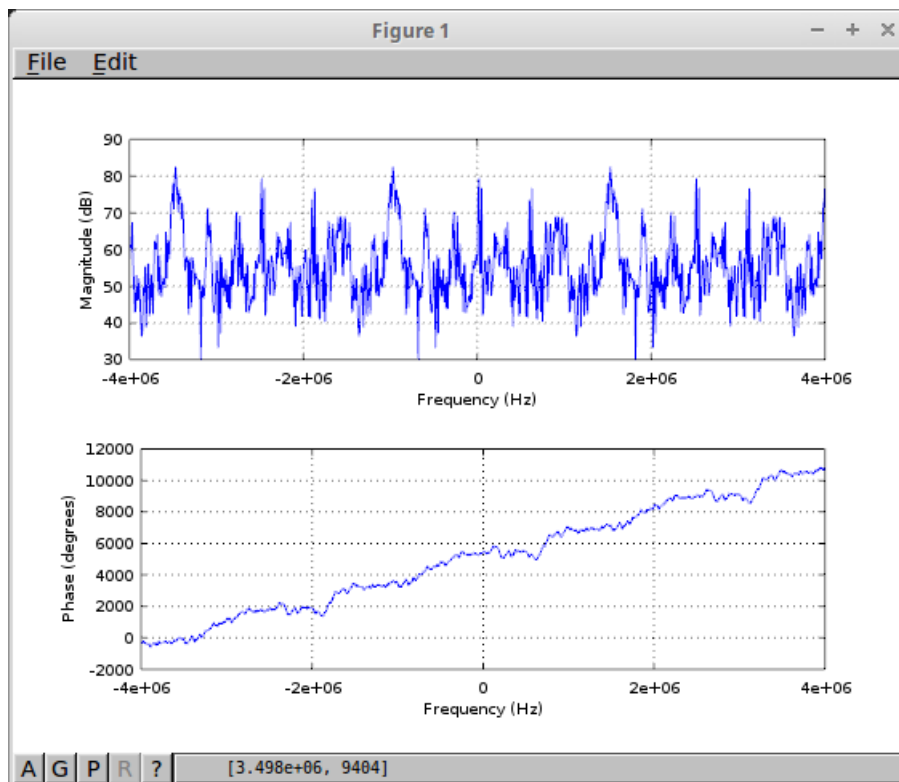
Es decir, obtenemos los vectores de la señal enfasada y en cuadratura muestreada anteriormente.

La función de *octave* *freqz*, permite representar la respuesta en frecuencia de un filtro, de modo que como:

$$\text{freqz}(\text{vector}, \text{númerodepuntos}, \text{rango}, \text{fin})$$

devuelve la frecuencia en los n puntos en el intervalo $[0, \nu_s]$, y atendiendo a que en el muestreo hay 2.500.000 muestras/segundo, es decir, que 0.002 de datos están contenidos en 5.000 muestras, podemos realizar una representación en frecuencia usando la función *freqz* del siguiente modo:

```
octave:5> freqz (xiq(1:5000),1,[-4E6:.01E6:4E6],2.5E6);
```



En cuanto el rango del diagrama de respuesta en frecuencia, vemos que se ha elegido un intervalo de $[-4,4]$ MHz para ver también el principio de *aliasing* mencionado en 5.15. Fijémonos, además que:

1.- Tenemos que el espectro está centrado en 0Hz, pero este “0” se corresponde con la frecuencia sobre la que se ha realizado el muestreo (96.1MHz).

2.- El espectro es periódico con período igual a la frecuencia de muestreo (2.5Mhz).

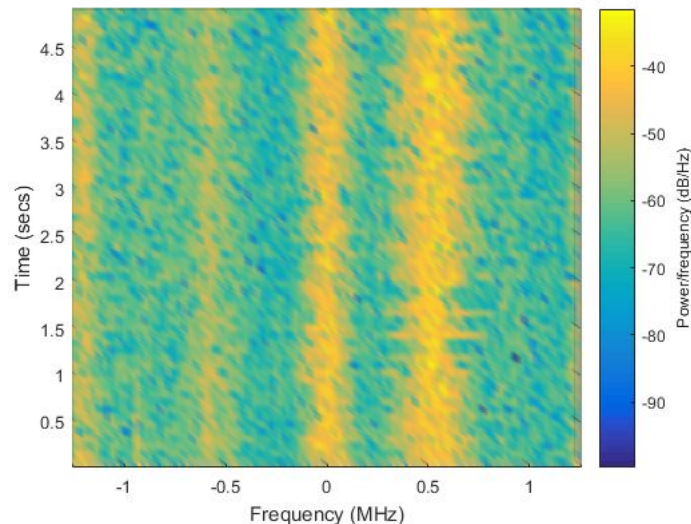
3.- Como vemos, fuera de los 2.5Mhz empiezan los alias en frecuencia dado que al estar centrada en 0, se tiene que a cada lado hay $\frac{2,5}{2} = 1,25$ MHz de visión real antes del alias tal y como se especifica en el teorema del muestreo.

4.- Cuando se muestrea una señal no compleja, tenemos que la parte negativa de frecuencia del espectro no aporta nueva información, dado que el espectro es simétrico sobre 0 en cada caso. No obstante, sabemos que estamos viendo el espectro de una señal compleja I/Q , con lo que el espectro generalmente no será simétrico, y además las frecuencias negativas contienen tanta información como las positivas, es decir, que duplican el total de información comparado con un simple muestreo real.

Este último gráfico es el que da pie a componer la función coloreado de línea para obtener cada x_i de la cascada en cada intervalo de tiempo determinado por la frecuencia de muestreo x_{WF} en tiempo real. Además, recogida la señal en un archivo como es el caso, este coloreado puede realizarse con el método indicado arriba o mediante la función espectrograma de Matlab. Veamos un ejemplo en el que la señal se dividió en secciones de tamaño 200.000, con 1.500 muestras de entre las secciones adyacentes y además, la frecuencia central se situó en el intervalo $DC_r \pm 1,25MHz$.

Así, una vez cargado el archivo, podemos realizar el espectrograma en Matlab, obteniendo mediante:

```
>>spectrogram(xiq,200000,1500,[-1.25E6:.02E6:1.25E6],2.5E6);
```



Es decir, una *waterfall* donde se aprecia claramente el canalaje y ancho de banda de distintas estaciones.

6.2.4. Componentes frecuenciales y cascada en GNURadio. Veamos los componentes principales que recrean estos aspectos bajo GNURadio:

- Como mencionamos en 6.1.2, el componente *RTL-SDR Source*, es el que alimenta al sistema de muestras, y entre sus parámetros básicos de interés, están la frecuencia de muestreo y la frecuencia central a la que se sintonizará el oscilador para obtener las señales en cuadratura. Así, por ejemplo, la configuración:

RTL-SDR Source	
Sample Rate (sps):	2M
Ch0: Frequency (Hz):	96.1M
Ch0: Freq. Corr. (ppm):	0
Ch0: DC Offset Mode:	Off
Ch0: IQ Balance Mode:	Off
Ch0: Gain Mode:	Manual
Ch0: RF Gain (dB):	10
Ch0: IF Gain (dB):	20
Ch0: BB Gain (dB):	20

alimentará al resto del sistema con un par de cuadratura muestreando a 2MHz, con una frecuencia central DC de 96.1MHz, es decir, dentro de la banda de *broadcasting* de FM.

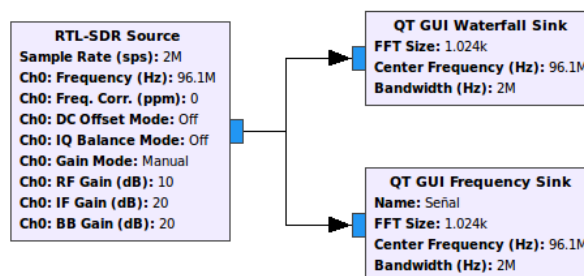
- El componente *QT GUI Waterfall Sink*, calcula los datos necesarios para obtener el espectrograma en tiempo real; entre sus parámetros destacan el tamaño de la ventana FFT (cuyo número de puntos es fácilmente calculable mediante un proceso similar al descrito en el anterior apartado 5.3.1), y el ancho de banda en hercios, que en este caso tiene que ser el mismo que la frecuencia a la que fué tomada la señal. El parámetro de frecuencia central se usa solamente como etiqueta del gráfico que generará:

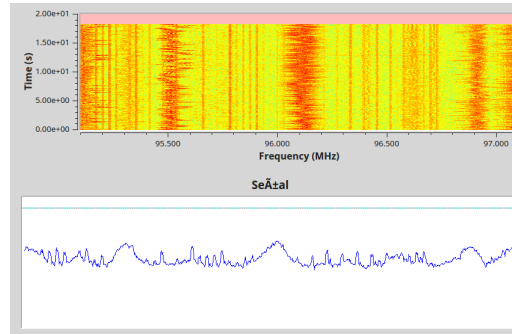
QT GUI Waterfall Sink	
FFT Size:	1.024k
Center Frequency (Hz):	96.1M
Bandwidth (Hz):	2M

- El componente *QT GUI Frequency Sink*, muestra cómo se comporta la señal de cuadratura en frecuencia; los parámetros se configuran de forma similar al componente *waterfall*:

QT GUI Frequency Sink	
Name:	Señal
FFT Size:	1.024k
Center Frequency (Hz):	96.1M
Bandwidth (Hz):	2M

Veamos cómo funciona el sistema definido por estos tres elementos:





6.3. Demodulación.

Veremos en esta sección como implementar la demodulación de una señal I/Q en Matlab/Octave.

EJEMPLO 6.2. Observemos primeramente como realizar una demodulación de una señal I/Q , de una transmisión en FM.

Recordemos que de la sección 3.4.1., la demodulación de una señal modulada en frecuencia, se sigue de la ecuación

$$X_{FM}(T) = \text{Cos} \left(\omega_c t + k \int x_m(t) dt \right).$$

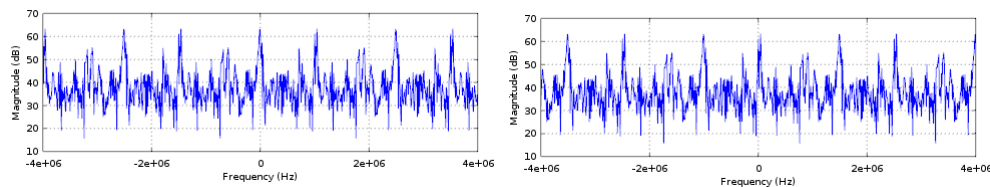
De modo que una vez obtenidas las señales I/Q , según el teorema 5.37, x_m puede recuperarse mediante

$$x_m \simeq \frac{Q[n]I[n-1] - Q[n-1]I[n]}{I^2[n-1] + Q^2[n-1]}.$$

Recrearemos nuestro objetivo demodulando una estación situada en la frecuencia 95.1MHz. Así, primeramente, necesitamos centrar los 95.1Mhz como 0Hz. Por conforme se tomó la muestra, los 0Hz hacen referencia a 95.1MHz, con lo que el desvío de la estación presente en 95.1MHz es de 1Mhz. Por tanto, necesitamos realizar un desplazamiento a la izquierda, que realizaremos multiplicando por una exponencial compleja:

```
xiq_desp=xiq.*transpose(exp(-j*2*pi*(-1E6)*[1:length(xiq)]/2.5E6));
freqz (xiq(1:5000),1,[-4E6:.01E6:4E6],2.5E6);
```

la gráfica de la señal desplazada, quedaría:



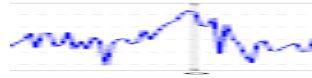
Mirándolo de cerca, vemos que no está perfectamente centrada en el 0 la estación sintonizada, pero esto se debe a ciertas imprecisiones en el VFO del *hardware* (que reciben el nombre de *hardware offset*); no obstante, resulta suficientemente irrelevante como para poder realizar nuestro trabajo sin mayor incidencia.

Tras esto, aplicamos un filtro paso bajo para mantener la portadora que estaba en 95.1, atenuando las otras estaciones, y para conseguirlo, usaremos la función *decimate* de Matlab, debido a que esta función centraliza dos tareas de teoría de la señal: realizar un submuestreo, e implementar

un filtro paso bajo². Así, introduciremos los parámetros con el objetivo de rebajar el muestreo en un factor de 8 (obteniendo $2.5\text{MHz}/8=312.5\text{KHz}$, que aunque es mayor que los 200KHz de ancho de banda calculado en el ejemplo 3.75, de una emisión FM comercial, cumple que la siguiente portadora de otra emisora queda filtrada al igual que las demás estaciones. Podemos ahora ver también el espectro de la señal centrada y filtrada con el comando `freqz`.

Así, tomando en el octave:

```
x iq_ desp_ d = decimate(x iq_ desp,8,'fir');
freqz(x iq_ desp_ d,1,.002*2.5E6/8,2.5/8);
```



Si el operador demodulación X_{FM} lo aplicamos a esta muestra tratada asumiendo que ocupa menos del 90% de ancho de banda, primeramente normalizaremos la señal y la descompondremos en sus partes reales e imaginarias (I/Q). También crearemos un filtro IIR diferenciador (discretización del descrito en 2.3.2), para obtener las Q_{n-1} y I_{n-1} en cada caso, con el objetivo de aplicar la fórmula 5.37.

```
x iq_ deriv=firls(30,[0 .9],[0 1],'differentiator');a
x iqnorm=y./abs(y);
I=real(x iqnorm);
Q=imag(x iqnorm);
xm=(I.*conv(q,x iq_ deriv)-(Q.*conv(I,x iq_ deriv,'same')))./(I.^2+Q.^2);
```

^afiltro FIR diferencial de orden 30

Con esto ya llegamos a obtener la señal demodulada:

```
freqz(xm,1,.05*2.5E6/8,2.5/8,0);
```



Finalmente, poniendo la señal en un rango de muestreo en el que trabaje la tarjeta de sonido, por ejemplo diezmando la señal, obtenemos una frecuencia de $312,5\text{KHz}/10 = 31,25\text{KHz}$, que es un rango aceptable para captar un canal de audio y mediante el comando `sound` de Matlab reproducimos la muestra:

```
df=decimate (xm,10,'fir');
sound(df,2.5E6/8/10);
```

EJEMPLO 6.3. Adaptación para la demodulación de señales I/Q generadas a partir de una señal recibida de una transmisión modulada en AM.

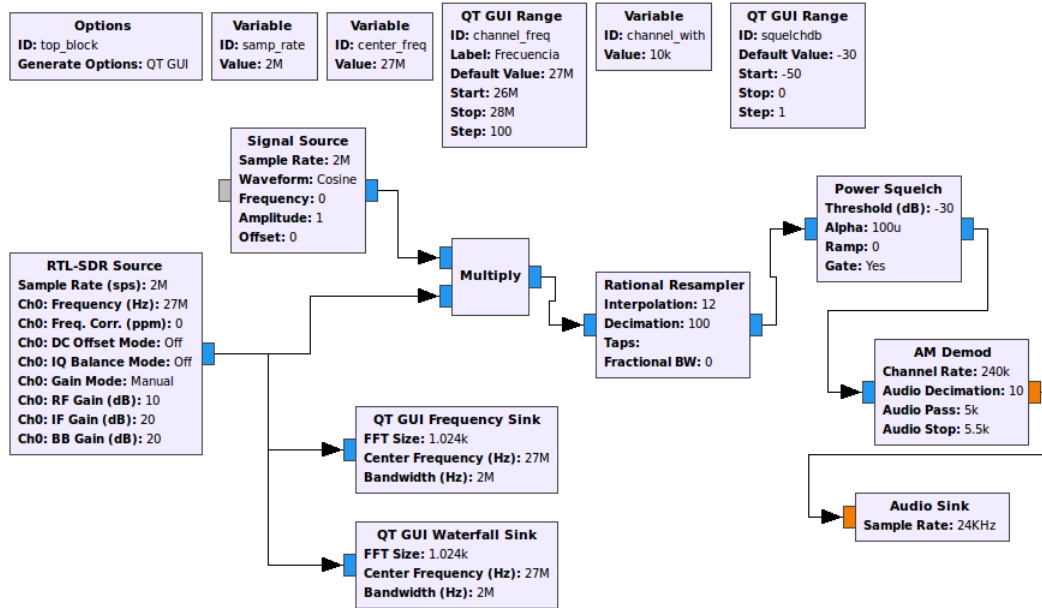
Recordemos que dadas las señales en cuadratura $I_a[t], Q_a[t]$, por las propiedades descritas en el capítulo 5, se tiene que $x_m^2 = I_a^2[t] + Q_a^2[t]$. Por tanto, basta recrear los pasos descritos en el apartado anterior con los parámetros adecuados.

²Por defecto en Matlab utiliza un filtro de orden 30.

6.4. Simulación completa con GNU-Radio.

Por la simplicidad que ofrece y con el objetivo de realizar una visión de la aplicación en el contexto de recepción SDR aplicando las principales ideas de este trabajo, ilustraremos en lo sucesivo ejemplos de una implementación SDR real usando GNU-Radio.

6.4.1. Esquema demodulador AM en banda ciudadana. Consideremos el siguiente esquema modular de GNU-Radio:



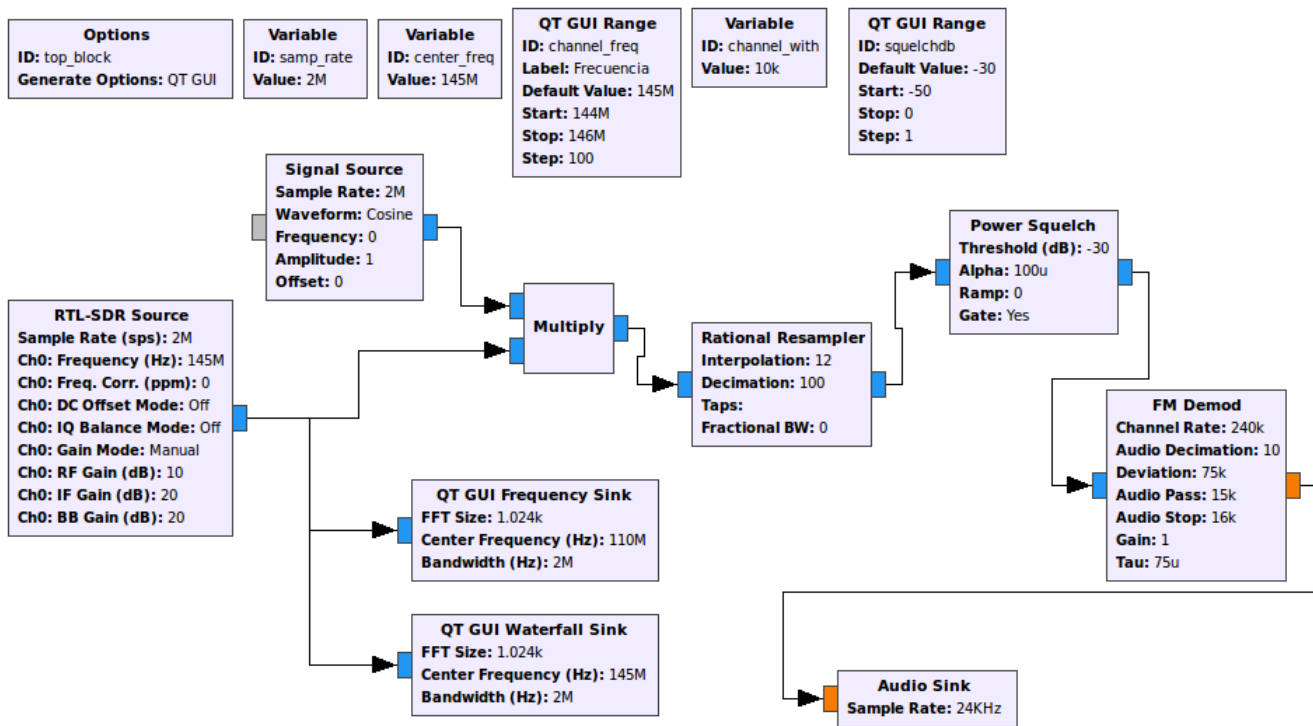
Este esquema recrea una demodulación de una señal emitida en AM en la banda ciudadana. Para ello, toma una muestra del receptor lo suficientemente buena como para copar desde 26MHz hasta 28MHz utilizando el teorema del muestreo. Tras ello se genera una señal sinusoidal al mismo ratio de muestreo y se multiplican ambas señales, realizando así un desplazamiento que sintonizará (desplazará al 0) el canal deseado. Tras esto, se realiza un diezmo racional para no saturar al demodulador, al que le entrará el flujo de muestras a 240KHz, realizando un filtro paso bajo de 5KHz (que aunque está por debajo del canalaje para voz en AM es suficiente para dejar pasar solamente las frecuencias de voz), además se realizará un diezmo literal en la salida de la señal demodulada para ajustar las muestras que vayan llegando a un parámetro admitido por la tarjeta de sonido, en este caso 24KHz.

Fijémonos además que el cálculo de todo el sistema es correcto, atendiendo a que 2MHz de frecuencia de muestreo se corresponden con una ventana de 2MHz de frecuencias sintonizables (por el teorema del muestreo en señales de cuadratura). El objetivo de todos los pasos es terminar con una señal de 24KHz, con lo que si nos fijamos en todos los remuestreos del sistema tenemos que partiendo de los $2MHz = 2 \times 10^6 MHz$ de la muestra:

$$2 \times 10^6 \frac{12}{100} \frac{1}{10} = 2000 \cdot 12 = 24000 = 24KHz.$$

6.4.2. Demodulador FM en banda de 2m y comercial.

- Esquema de un demodulador con *scquelch* NFM en la banda de 144MHz de radioafición:



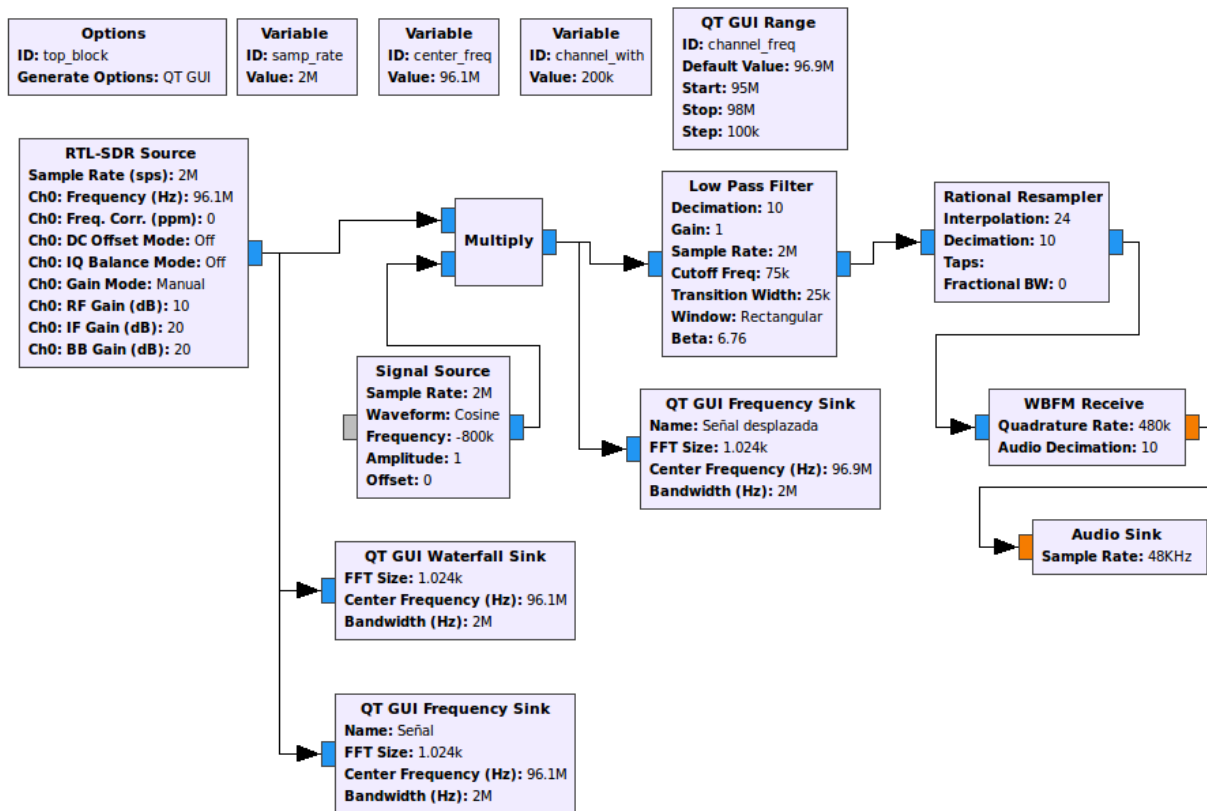
Este esquema recrea una demodulación de una señal emitida en FM en la banda de dos metros. Para ello, toma una muestra del receptor lo suficientemente buena como para copar desde 144MHz hasta 146MHz. Tras ello, se genera una señal sinusoidal al mismo ratio de muestreo, y se multiplican ambas realizando así un desplazamiento que sintonizará el canal deseado. Posteriormente, se realizará un diezmo racional y se someterá la señal a un control de potencia de modo que si no supera los -30dB no se volcará al demodulador, al cual le será entregado el flujo de muestras a 240KHz, realizandose además un filtro paso bajo de 12.5KHz para eliminar todas las frecuencias superiores a las del canal sintonizado.

Fijémonos, además, que el cálculo de todo el sistema es correcto, atendiendo a que 2MHz de frecuencia de muestreo se corresponden con una ventana de 2MHz de frecuencias sintonizables (por el teorema del muestreo en señales de cuadratura). El objetivo de todos los pasos es terminar con una señal de 24KHz, con lo que si nos fijamos en todos los remuestreos del sistema tenemos que partiendo de los $2MHz = 2 \times 10^6 MHz$ de la muestra:

$$2 \times 10^6 \frac{12}{100} \frac{1}{10} = 2000 \cdot 12 = 24000 = 24KHz.$$

- Esquema demodulador FM comercial.

Veamos un esquema de implementación en GNU-Radio de un demodulador de FM comercial, con entrada centrada en 96.1MHz y una frecuencia de muestreo de 2MHz:



Este esquema recrea una demodulación de una señal FM de la banda ancha. Para ello, toma una muestra del receptor lo suficientemente buena como para copar un par de megahercios, con una frecuencia central DC de 96.1MHz. Tras ello, se genera una señal sinusoidal (variable por una barra de deslizamiento) al mismo ratio de muestreo y se multiplican ambas realizando un desplazamiento que sintonizará el canal deseado según se configure la frecuencia generada. Seguidamente, se realiza un diezmo racional para no saturar al demodulador, al cual le entrará el flujo de muestras de 240KHz. Posteriormente, utilizando los parámetros calculados en en tercer capítulo, situaremos un filtro paso bajo, para tras ello hacer un diezmo literal en la salida de la señal demodulada para ajustar a un parámetro admitido por la tarjeta de sonido.

Fijémonos además que el cálculo de todo el sistema es correcto, atendiendo a que 2MHz de frecuencia de muestreo se corresponden con una ventana de 2MHz de frecuencias sintonizables (por el teorema del muestreo en señales de cuadratura). El objetivo de todos los pasos es terminar con una señal de alta calidad de 48KHz (también admitida por la tarjeta de sonido), con lo que si nos fijamos en todos los remuestreos del sistema tenemos que partiendo de los $2MHz = 2 \times 10^6 MHz$ de la muestra:

$$2 \times 10^6 \frac{24}{100} \frac{1}{10} = 2000 \cdot 242 = 48000 = 48KHz.$$

6.5. Transcepción SDR.

Vista la teoría y aplicaciones prácticas en la recepción SDR, para completar el proceso de transcepción solamente falta por indicar que, de forma simétrica, en el caso de la emisión, también se requiere de un *hardware* específico que sea capaz de irradiar la señal generada por *software* mediante una antena.

Se tratará, por tanto, de la implementación por *software* de un generador de onda y un operador modulación como el descrito en el capítulo 3, que genere la muestra de la señal que se desee emitir. El resto del proceso simplemente es la parte física que creará una activación de corriente en el intervalo descrito por la muestra de la señal modulada para generar la señal que irradiará la onda. Un ejemplo de estos pasos pueden hallarse en la referencia [13].

Referencias principales:

[AV, 6, 7, 11, 13, 1].

Bibliografía

Referencias bibliográficas.

- [AV] ARVIND, R.; VACHHANI, K.: *Experimental study on WBFM receiver using GNURadio and RTL-SDR*. N.U., Ahmedabad, India, 2015.
- [BRE] BRETHERTON, C.: *Lecture 7: The complex Fourier transform and the discrete Fourier transform (DFT)*. Winter 2015.
- [CC] CARLSON, B. CRILLY, P.: *Communication Systems: An introduction to Signals and Noise in Electrical communication*, 2009. Mc Graw Hill, NY, 2010.
- [C] COLLET, P.: *Sampling almost-periodic functions with random probes of finite density*. Proceedings of the Royal Society, Physical and Engineering Sciences 452 (1996), no. 1953, 2263–2277.
- [CO1] CORDUNEAU, C.: *Almost periodic functions*. John Wiley and Sons, N.Y., 1968.
- [CO2] CORDUNEAU, C.: *Almost periodic oscillations and waves*. Springer, N.Y., 2009.
- [FGG] FERRI, S.; GALINDO, J.; GÓMEZ, C.: *Sampling almost periodic and related functions*. Preprint 2017. Accesible en <https://arxiv.org/abs/1801.02564>
- [GW] GASQUET, C.; WOTOMSKI, P.: *Fourier analysis and applications*. Springer-Verlag, N.Y., 1999.
- [IH] IRELAND, S.; HARMAN, P.: *Watch your I&Q signals*. Radcom, January 2007.
- [NAN] NIUBÓ ALEMÁN, T.; APOLINAR REYNOSO, J.; NUÑEZ PÉREZ, J.: *Diseño e implementación de un modulador demodulador IQ en un DSP-FPGA*. Revista Aristas: Investigación básica y aplicada, ISSN 2007-9478, Vol. 3, Núm. 7, 2015.
- [OW] OPPENHEIM, A.; WILLISKY, A.; NAWAB, H.: *Signals and systems*. Prentice Hall, N.J., 1996.
- [OZ] ORTIZ, J.L.; ZAPARA, J.: *Uso del submuestreo para la detección de señales de la banda de dos metros por medio del aliasing en la aplicación de un scanner de alta velocidad*. AVANCES Investigación en Ingeniería, Vol. 12, 2015.
- [R1] RUÍZ VASALLO, F.: *Radio*. Ed. CEAC, España, 1986.
- [R2] RUÍZ VASALLO, F.: *Radiotransceptores: AM, FM, Estereo*. Ed. CEAC, España, 2005.
- [E1] SANCHIS, E.: *Fundamentos y electrónica de las comunicaciones*. Ed. Universitat de València, 2004.
- [ASM] YOUNGBLOOD, G.: *A Software-Defined Radio for the masses*. QEX, Jul/Aug 2002.

Otras referencias.

- [DEP] Análisis y síntesis de circuitos. Departamento de teoría de la señal y comunicaciones. Universidad de Alcalá.
- [W] WU, W.: *Fourier series and Fejér's theorem*. Berkeley, June 2004.
- [CV] CARLEN, E.; VILELA MENDES, R.: *Signal reconstruction by random sampling in chirp space*. *Nonlinear Dynamics* 56 (2009), no. 3, 223–229.
- [G1] GALINDO, J.: *Apuntes Teoría de la señal*. MMC, UJI, 2017-2018.
- [BOU] BOURKE, P.: *DFT/FFT. Fast Fourier transform*. June 1993.
- [K1] KIRKHORN, J.: *Introduction to IQ-demodulation of RF-data*. IFBT, NTNU, 1999.
- [L1] LYONS, Richard : *Quadrature Signals: Complex, But Not Complicated*. 2008
- [VM] VALKAMA, MIKKO. *Complex-Valued Signals and Systems-Basic principles and applications to radiocommunications and radio signal processing*. Dept. CE Tampere University of Technology.
- [S1] SÁNCHEZ CIUDAD, I.: *Apuntes Comunicación de datos*. EPCLM, 2009.
- [S2] SÁNCHEZ CIUDAD, I.: *Apuntes Comunicación de datos. Espectro y modulación*. 2009/2010.
- [1] http://aaronsher.com/wireless_com_SDR/RTL_SDR_AM_spectrum_demod.html
- [2] <https://web.stanford.edu/class/ee179/Notes.html>
- [3] Implementación de un demodulador de radio FM definido por Software. Ke Zhang. Gandía, 2016. UPV.

- [4] <https://www.allaboutcircuits.com/textbook/radio-frequency-analysis-design/radio-frequency-demodulation/how-to-demodulate-an-am-waveform/>
- [5] <https://modulacionesdigitalesqam.blogspot.com/p/segundo-capitulo.html>
- [6] <https://witestlab.poly.edu/blog/capture-and-decode-fm-radio/>
- [7] <https://hackaday.com/2016/06/30/tutorial-on-signal-processing-in-linux-with-octave/>
- [8] <http://campus.fi.uba.ar/course/view.php?id=252>
- [9] <http://liquidsdr.org/>
- [10] <https://www.allaboutcircuits.com/textbook/radio-frequency-analysis-design/radio-frequency-demodulation/understanding-i-q-signals-and-quadrature-modulation/>
- [11] Grear Scott Gadgets. Software Defined Radio with HackRF. <https://greatscottgadgets.com>, 2015. Michael Ossmann
- [12] <https://www.embedded.com/design/configurable-systems/4212086/DSP-Tricks-Frequency-demodulation-algorithms->
- [13] PIFM - <https://github.com/rm-hull/pifm> - Turning the Raspberry Pi Into an FM Transmitter
- [14] Filtros para SDR en SDRplay RSP R2P3. Datasheet http://www.sdrplay.com/docs/SDRplay_RSP_Schematics_r2p3.pdf
- [15] Recepción digital en 433 : https://github.com/merbanan/rtl_433
- [16] Recepción de fonía digital : <https://github.com/szechyjs/dsd>
- [TFM] Erratas y contenido adicional a este trabajo : <http://jisanchez.net/tfmsdr>

Cálculos e ilustraciones.

- wxMaxima
- Octave
- Mathematica
- Matlab
- Geogebra
- LibreOffice Draw
- Gimp
- Fritzing
- KiCad