

# Didáctica de la Geometría descriptiva orientada a la motivación de los estudiantes de secundaria

Trabajo final de master

Autor: Héctor Ibáñez Gual

Tutor: Antonio Beltrán Felip

Curso 2017-2018

#### **AGRADECIMIENTOS:**

Este trabajo final de master es el resultado de un año de estudio y dedicación. Durante el cual tengo que agradecer a mi familia el tiempo que les he dejado de dedicar. A Yolanda, el epicentro sobre el que gira mi existencia, que me animó a emprender esta aventura, gracias por su ayuda y comprensión. A Mateo, la alegría de la casa, con el que he pasado el mejor año y medio de mi vida. A su hermanito que viene de camino, que nos llena de ilusión.

No puedo olvidarme de los compañeros del master, porque entre nosotros se ha creado un clima de amistad y de cooperación que espero que perdure en el tiempo. A los profesores por su cercanía y por su consejo. Finalmente, un agradecimiento especial a mi tutor, Antonio, le reconozco el esfuerzo por hacer lo difícil más fácil.

## RESUMEN

El presente trabajo final de máster (TFM) es consecuencia de la experiencia adquirida durante la estancia de prácticas en el IES Francesc Ribalta, en una clase reducida de 11 alumnos de 2º de ESO, donde se impartió la Unidad Didáctica de “Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos”. Tras observar la falta de interés en la materia por parte de un porcentaje importante del alumnado, me pregunté la manera de motivarlos, de modo que disfrutaran de un campo tan práctico y cercano como la Geometría.

Con este TFM se pretende ofrecer una MEJORA EDUCATIVA (primera tipología descrita en el artículo 4 de la “Normativa de Trabajos Finales de Máster de la Universidad Jaume I”, de julio de 2012 y modificada en 2014) para la Geometría de los primeros cursos de secundaria.

En primer lugar, en el presente TFM, se definen las competencias clave para el aprendizaje de la Geometría, y se analizan los resultados de las pruebas realizadas a nivel mundial y nacional, las cuales indican que más de un 20% de los alumnos no alcanzan las competencias mínimas exigidas.

En segundo lugar, se detallan los resultados obtenidos en el grupo de estudio de 2º de ESO. Con dichos resultados, y a través de una evaluación formativa, se identifican las causas del bajo rendimiento observado. La falta de conocimientos previos, la gran diversidad en las aulas, la escasa motivación,... hacen necesario una metodología de aprendizaje en la que el estudiante se sienta protagonista.

En tercer lugar, se exponen las propuestas de mejora de la Unidad Didáctica. Éstas son el resultado de la investigación realizada en el campo de la Geometría. Se plantean unos contenidos relacionados con el entorno cercano al alumnado, con una utilidad visible en su vida cotidiana, con la aplicación racional de las nuevas tecnologías,... Pero siempre con la atención puesta en el alumno.

Finalmente, se realiza una reflexión sobre la importancia de las actividades manipulativas y del trabajo en equipo, como base para asentar los conocimientos y como fase previa a la abstracción y la formalización de las matemáticas.

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	7
2. ESTADO DE LA CUESTIÓN .....	9
2.1. Sobre la competencia matemática y la Geometría .....	9
2.2. Sobre el nivel de competencia geométrica en la ESO .....	10
2.3. Sobre el cambio en la forma de enseñar .....	13
3. ESTUDIO DE PARTIDA .....	14
3.1. Objetivos iniciales .....	14
3.2. Resultados obtenidos .....	14
4. EVALUACIÓN FORMATIVA .....	17
4.1. Motivación del alumnado y del docente .....	18
4.2. Diversidad en el aula .....	18
4.3. Falta de preparación del alumnado .....	19
4.4. Metodología en el aula de Geometría .....	19
5. PROPUESTAS DE MEJORA EN LA GEOMETRIA DE 2ºESO .....	20
5.1. Evaluación previa del alumnado .....	21
5.2. Preparación para la unidad didáctica .....	24
5.3. Tutorización particularizada mediante encuestas SCORM .....	25
5.4. Trabajo cooperativo .....	28
5.5. Experiencia manipulativa .....	30
5.6. Softwares de Geometría dinámica .....	32
5.7. Aplicaciones de futuro .....	33
5.8. Recursos lúdicos alternativos .....	34
5.9. Trabajo de campo. Creación enunciados .....	37
5.10. Evaluación entre iguales .....	39
5.11. Sistema de evaluación continua .....	40
6. CONCLUSIONES .....	42
7. BIBLIOGRAFIA .....	44
ANEXOS .....	45
ANEXO I. Examen final de contenidos .....	45
ANEXO II. Encuesta de satisfacción .....	46
ANEXO III. Test evaluación inicial Geometría 2ºESO .....	47

ANEXO IV. Evaluación orientada al aprendizaje. Rúbrica de actividad entre iguales .....	49
ANEXO V. Rúbrica de evaluación.....	50

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

<i>Gráfico 1. Resultados evaluación matemáticas en Baleares</i> .....	11
<i>Gráfico 2. Resultados evaluación matemáticas en Cataluña</i> .....	11
<i>Gráfico 3. Nivel competencia bajo de 2ºESO matemáticas en Baleares (%)</i> .....	12
<i>Gráfico 4. Nivel competencia bajo de 4ºESO matemáticas en Cataluña (%)</i> .....	12
<i>Gráfico 5. Resultados examen final de la unidad de Geometría</i> .....	14
<i>Gráfico 6. Resultados cuestionario final sobre la metodología</i> .....	15
<i>Gráfico 7. Resultados cuestionario final. Autoevaluación</i> .....	16
<i>Gráfico 8. Resultados evaluación inicial. Respuestas acertadas</i> .....	22
<i>Gráfico 9. Resultados evaluación inicial. Respuestas acertadas</i> .....	22
<i>Gráfico 10 Resultados evaluación inicial. Preferencias respecto a la metodología.</i> .....	23
<i>Gráfico 11 Resultados evaluación inicial. Reacción ante las dificultades.</i> .....	23
<i>Gráfico 12 Resultados evaluación inicial. Reacción ante enunciados de problemas.</i> ....	24
<i>Gráfico 13 Resultados evaluación inicial. Percepción de la Geometría.</i> .....	24
<i>Tabla 1. Propuestas de mejora en Geometría de 2ºESO después de una evaluación formativa</i> .....	21
<i>Tabla 2. Plantilla hoja de cálculo para conversión de unidades</i> .....	25
<i>Tabla 3. Etapas de aprendizaje con Geogebra</i> .....	32
<i>Tabla 4. Esquema de evaluación del grupo para estudiantes (Heathfield, 2003, p. 166)</i> .....	40
<i>Tabla 5. Reparto evaluación continua de la unidad.</i> .....	41
<i>Imagen 1. Dedución áreas polígonos con Geogebra</i> <a href="http://olmo.pntic.mec.es/dmas0008/areaspoligonos/index.html">http://olmo.pntic.mec.es/dmas0008/areaspoligonos/index.html</a> .....	25
<i>Imagen 2. Menú inicial página web de contenidos de la unidad, creado con eXeLearning</i> .....	26
<i>Imagen 3. Ejemplo de cuestionario multi-elección SCORM</i> .....	27
<i>Imagen 4. Sistema de evaluación mediante cuestionario SCORM</i> .....	27
<i>Imagen 5. Planta octogonal del Fadrí.</i> .....	29
<i>Imagen 6. Demostración volumen pirámide</i> .....	29
<i>Imagen 7. Aplicación principio de Cavalieri para determinar el volumen de la esfera</i> ..	30
<i>Imagen 8. Cálculos para deducir el volumen de la esfera.</i> .....	30
<i>Imagen 9. Desarrollos planos poliedros regulares.</i> .....	31
<i>Imagen 10. Demostración del volumen de la esfera con impresora 3D.</i> <a href="https://www.thingiverse.com/thing:262335">https://www.thingiverse.com/thing:262335</a> .....	33
<i>Imagen 11. Construcción de un icosaedro con impresora 3D.</i> <a href="https://www.thingiverse.com/thing:440950">https://www.thingiverse.com/thing:440950</a> .....	33
<i>Imagen 12. Aproximación a los cuerpos de revolución.</i> <a href="https://www.thingiverse.com/thing:306052">https://www.thingiverse.com/thing:306052</a> .....	34

<i>Imagen 13. Fotograma película “Planilandia” (2017)</i>	<i>Imagen 14. Ilustración libro “Planilandia” sobre la visión en un mundo de una dimensión .....</i>	35
<i>Imagen 15. Ilustración libro “Planilandia” sobre el reconocimiento entre individuos ...</i>		35
<i>Imagen 16. Ilustración libro “Planilandia” sobre el movimiento de una esfera sobre el plano. ....</i>		35
<i>Imagen 17. Day and Night. M.C.Escher (1938) .....</i>		36
<i>Imagen 18. Waterfall. M.C.Escher (1961) .....</i>		36
<i>Imagen 19. Belvedere. M.C.Escher (1958).....</i>		37
<i>Imagen 20. Macetero en el patio del instituto .....</i>		38
<i>Imagen 21. Diferentes tipos de columnas, en el patio y en las escaleras del instituto .</i>		39
<i>Imagen 22. Vaso de plástico de la cafetería.....</i>		39

## 1. INTRODUCCIÓN

Su idioma es el Whatsapp. Su vida, un diario que escriben en redes sociales. Su conexión con el mundo es a través de aplicaciones como Instagram. Tienen entre 12 y 15 años y forman parte de la generación 3.0. Estos nativos digitales son globales, inquietos y sobre todo, impacientes. Nacidos en una era en la que todo parece ir más rápido y donde las cosas pasan instantáneamente, la información la tienen al alcance de la mano y disponible en todo momento. Internet les ha acostumbrado a la inmediatez.

Esa búsqueda por parte del adolescente de los resultados fáciles choca frontalmente con un mundo diferente cuando entra en el aula de matemáticas, que por definición es la ciencia que estudia las propiedades de los entes abstractos (números, figuras geométricas,...) así como las relaciones que se establecen entre ellos. Por medio de la deducción, las matemáticas establecen reglas que convierten elementos sencillos en teoremas mucho más complejos.

Este choque, que enfrenta al alumnado con el reto de la deducción por no ser inmediata, origina una falta de predisposición de una parte importante de ellos a aprender matemáticas, se escuda en la percepción que es una asignatura demasiado difícil, que no entiende. El enunciado de un problema le resulta incomprensible. El planteamiento y la resolución de ejercicios, imposible. Y junto con la poca predisposición a cometer errores, se origina una falta grave de actitud orientada al mínimo esfuerzo que, a su vez, se traduce en una escasa atención en clase, una desgana a la hora de hacer ejercicios y una dedicación mínima al estudio.

Ya en los años 80, en el llamado Informe Cockcroft, se afirmaba que “las matemáticas son una asignatura difícil de enseñar y de aprender” (Cockcroft, 1982, punto 228).

Sin embargo, cuando hablamos de la Geometría, hablamos de una rama de las matemáticas con gran presencia en el entorno que nos rodea, aplicable directamente a contextos familiares para el alumnado (diseño, arquitectura, videojuegos,..). Se miden constantemente longitudes, áreas y volúmenes, se construyen maquetas y planos a escala, se fomenta el sentido espacial y se construyen figuras tridimensionales. En definitiva, se realizan razonamientos visuales y se estimula la creatividad y la imaginación. La Geometría es tan importante que abarca prácticamente una tercera parte de los contenidos clave de las matemáticas de secundaria y cabría esperar que fuese la parte más atractiva para el alumnado por su alto grado de visualización. La Geometría debería ser una puerta de entrada fundamental para introducir el pensamiento deductivo, imprescindible para otras muchas materias transversales.

Sin embargo, cuando se observan los resultados, obtenidos tanto en pruebas internacionales como en nacionales, se comprueba que la Geometría es una de las ramas que más dificultades ocasiona al alumnado.

En este trabajo final de master, a partir de una experiencia real con alumnos de 2º de ESO, se intentará justificar esta situación y proponer un cambio en la forma de dar los contenidos para hacerlos más atractivos.

## 2. ESTADO DE LA CUESTIÓN

### **2.1. Sobre la competencia matemática y la Geometría**

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, la competencia matemática se entiende como la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas.

La competencia matemática engloba los siguientes aspectos:

- Pensar, modelar y razonar.
- Plantear y resolver problemas.
- Representar entidades matemáticas.
- Utilizar los símbolos matemáticos.
- Comunicarse con las matemáticas y sobre las matemáticas.

En el mismo Real Decreto se afirma que las matemáticas contribuyen de manera especial a desarrollar el pensamiento y razonamiento lógico-deductivo y algorítmico, a entrenar la habilidad de observación e interpretación de los fenómenos, además de favorecer la creatividad o el pensamiento geométrico-espacial.

De esa habilidad de observación e interpretación de los fenómenos, se entiende que el aprendizaje de la Geometría no se limita al conocimiento del currículo, sino que el enfoque por competencias remarca las destrezas que el alumnado es capaz de hacer con esos conocimientos. De ahí se fomenta el espíritu emprendedor, la capacidad de comunicarse, el uso de tecnologías digitales y la educación cívica.

Para lograr estos objetivos, podemos trabajar desde el ámbito de cuatro dimensiones (Burgués, 2013):

1. Resolución de problemas. Es la dimensión más global. George Pólya (Pólya, 1945) estudió los pasos a seguir: comprensión y análisis del problema, configuración de un plan o estrategia, la ejecución de dicho plan y, finalmente, el razonamiento del resultado obtenido.
2. Razonamientos y pruebas. Una vez obtenidos los resultados es necesario vincularlos a las afirmaciones matemáticas, pasando al plano de lo abstracto y de los símbolos, para hacer deducciones generales.
3. Conexiones. Buscar las relaciones con otros campos de las matemáticas o de otros ámbitos ayuda al alumno a dar valor y utilidad a los conocimientos aprendidos.
4. Comunicación y representación. Mediante el trabajo colectivo, el alumno se da cuenta de otras estrategias para resolver problemas y se familiariza con el

lenguaje matemático con el fin de hacerse entender, de compartir y construir conocimiento.

## 2.2. Sobre el nivel de competencia geométrica en la ESO

Las pruebas PISA realizadas a nivel mundial en el año 2012, centradas en las matemáticas, establece que el 23% de los alumnos de los países de la OCDE no posee un dominio básico de la competencia matemática.

Además, del informe PISA del año 2012, se extraen resultados en cuatro ramas de las matemáticas.

- cambio y relaciones (482 puntos)
- espacio y forma (477 puntos)
- cantidad (491 puntos)
- incertidumbre y datos (487 puntos)

Dentro de estas cuatro grandes áreas, la Geometría está englobada en la rama de “espacio y forma”, junto con la visión espacial y la medición, y donde se recurre al Álgebra cuando es necesario como herramienta transversal.

Si se comparan las puntuaciones de las ramas, se observa que la Geometría es la más floja de todas (477 puntos), lo que contrasta con la definición que se ha dado de que la Geometría es la parte más intuitiva y próxima al alumnado.

Estos resultados de la prueba internacional concuerdan con las evaluaciones de diagnóstico que llevan realizando en los últimos años las comunidades autónomas. Prueba de ello son las evaluaciones efectuadas periódicamente en Baleares a los alumnos de 2ºESO (IAQSE, s.f.), y anualmente en Cataluña a los alumnos de 4ºESO (Generalitat de Catalunya. Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu, s.f.).

En Baleares, las medias de puntuación de las matemáticas son las más bajas de todas las competencias evaluadas, por debajo casi siempre del 50% de valoración. Particularmente, la Geometría está entre las ramas menor valoradas (véase *Gráfico 1*).

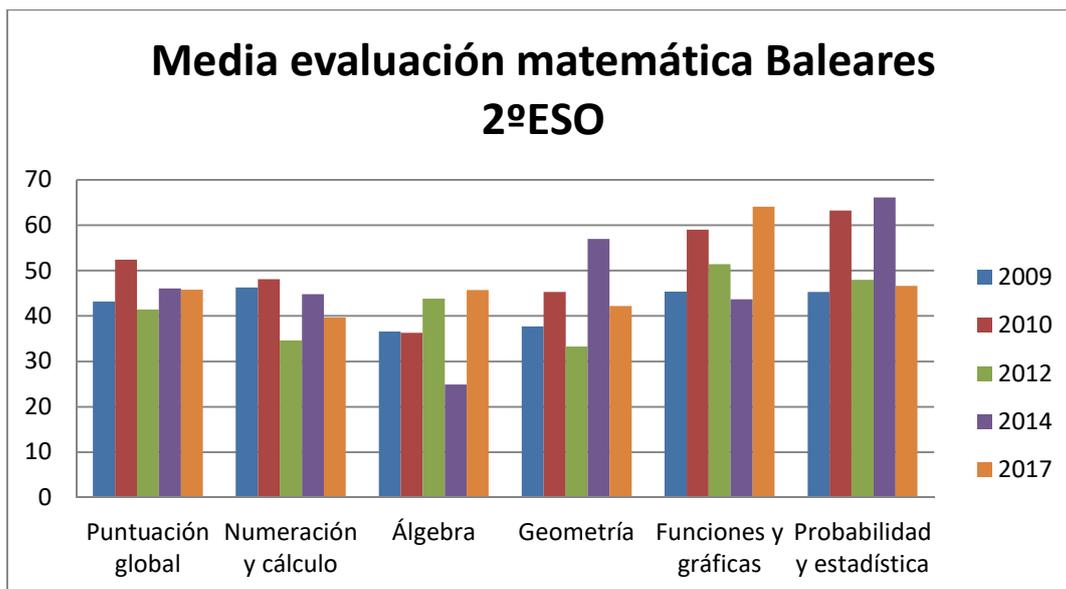


Gráfico 1. Resultados evaluación matemáticas en Baleares

En las evaluaciones realizadas en Cataluña se observa más claro como la Geometría es la rama de las matemáticas que más dificultades origina al alumnado, las puntuaciones en las pruebas son las más bajas con diferencia, a excepción del año 2017 donde se ha apreciado una mejora considerable (véase Gráfico 2).

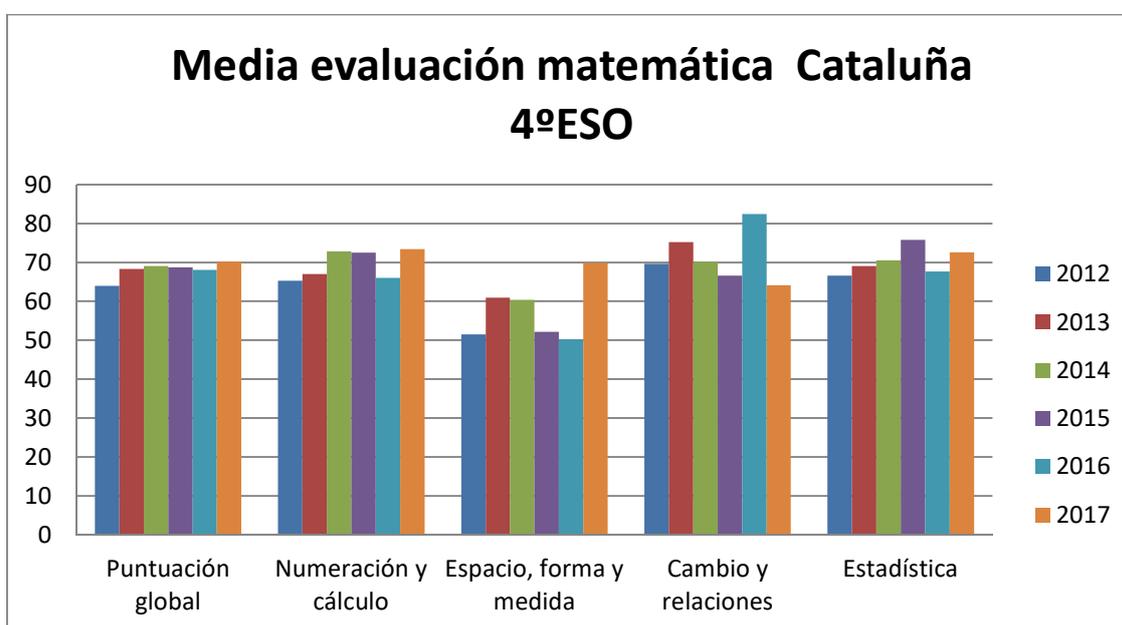
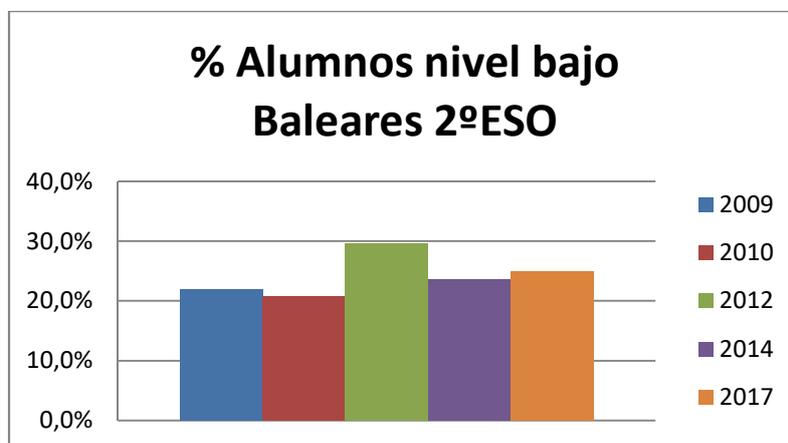


Gráfico 2. Resultados evaluación matemáticas en Cataluña

En cuanto a la tendencia en los datos de las pruebas, en el informe PISA entre los años 2003 y 2012 se mantienen los malos resultados, con fracasos superiores al 20%. Este dato indica que en una década no hemos sido capaces de dar una solución a esta tendencia.

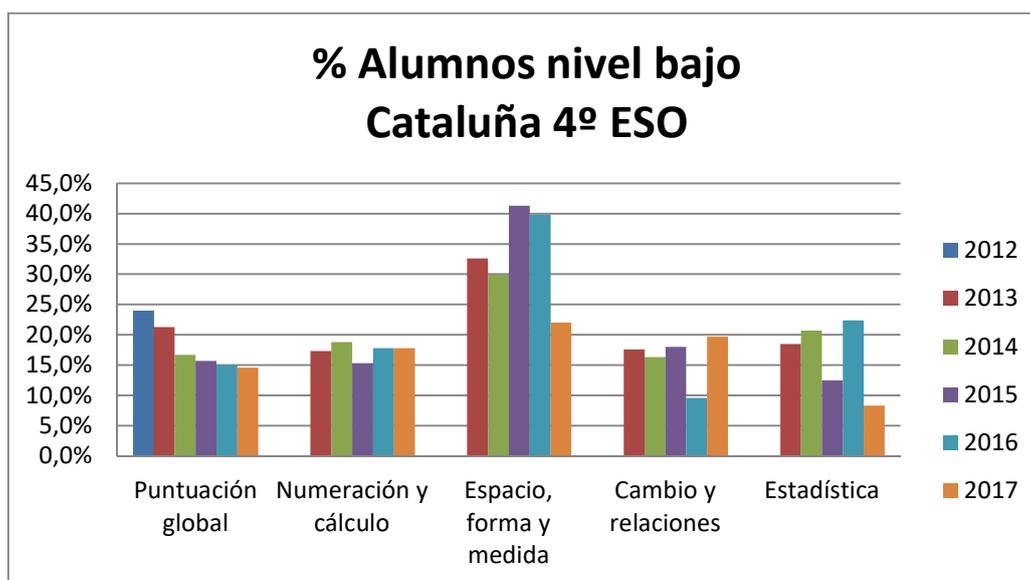
Lo mismo ocurre en las pruebas a los alumnos de 2º ESO en Baleares, donde los últimos años incluso ha aumentado un poco el fracaso en la asignatura. La prueba realizada en el curso 2016-2017 indica que un 25% de los alumnos no alcanzan el mínimo de competencia en matemáticas (véase *Gráfico 3*).



*Gráfico 3 . Nivel competencia bajo de 2ºESO matemáticas en Baleares (%)*

Sin embargo, en Cataluña sí que se observa una tendencia a reducir el fracaso en competencia matemática. En la prueba realizada en el año 2012, el número de alumnos de 4º ESO con competencia baja en matemáticas fue del 24%, mientras que en el año 2017 sólo el 15% no alcanzan el mínimo.

En dichos informes también se detalla cada año el porcentaje de alumnos que no alcanzan los mínimos, separado por especialidad. Y aunque el peor resultado se lo sigue llevando la Geometría con un 22% de fracaso, está lejos de los resultados, mucho más elevados, de los años anteriores (véase *Gráfico 4*).



*Gráfico 4. Nivel competencia bajo de 4ºESO matemáticas en Cataluña (%)*

### 2.3. Sobre el cambio en la forma de enseñar

Si se ha conseguido revertir la tendencia en Cataluña no es por casualidad. La actitud proactiva de la comunidad docente en esta región ha resultado ser clave en el cambio detectado. La constancia en las pruebas de evaluación, el reto de establecer objetivos a medio plazo (fracaso inferior al 15% para 2018), y la implementación de planes de acción, tales como:

- Publicación de guías de orientación para los docentes  
<http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/orientacionsgeometria>
- Creación de foros de debate y de bancos de recursos compartidos.  
<http://xtec.gencat.cat/ca/recursos/matematiques/geometria/>
- Divulgación y formación del programa “Geogebra” como software de Geometría dinámica. Incluso su incorporación en los contenidos de las oposiciones de profesorado para 2018.
- ...

Debido al peso tan importante de la Geometría en la competencia matemática, la Generalitat de Catalunya, tras observar los resultados de la primera prueba realizada en 2012, publicó en junio de ese mismo año, un documento titulado “Orientaciones para la mejora del aprendizaje de la Geometría”, la última actualización del cual data de 2015 (Aubanell, 2015).

Estas orientaciones van dirigidas a cambiar la forma de introducir la Geometría en el aula, y serán uno de los puntos de apoyo para el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster. Dichas directrices son acciones destinadas al cambio de metodología, para centrarla en el aprendizaje del alumnado y no tanto en los contenidos. El alumno pasa a ser el protagonista de su propio aprendizaje. De esta forma, la adquisición de contenidos se realiza de una forma más efectiva y profunda. El nuevo docente estimula técnicas de pensamiento y aprendizaje que da autonomía a los alumnos y les permite incidir en la observación del entorno que les rodea. Observan, analizan, investigan, explican,... dónde, cuándo, qué, quién, porqué, para qué, cómo,...

### 3. ESTUDIO DE PARTIDA

En este estudio se ha escogido una clase reducida de 11 alumnos de 2º ESO del IES Francesc Ribalta y se les ha impartido clase durante 14 sesiones de 55 minutos. A continuación detallaremos los resultados obtenidos, y a partir de ahí analizaremos las conclusiones y aplicaremos una evaluación formativa para mejorar la unidad didáctica.

#### 3.1. Objetivos iniciales

Los objetivos específicos que se han pretendido alcanzar en estas sesiones son:

- Fomentar el autoaprendizaje a través de la motivación por aprender.
- Participar activamente en la discusión y consenso para llegar a conclusiones en grupo.
- Potenciar el trabajo en equipo.
- Reconocer, dibujar i describir las figuras y los cuerpos elementales. Ejercitar la visión espacial del alumnado en contextos cotidianos familiares.
- Utilizar las técnicas necesarias en un contexto de resolución de problemas geométricos.

#### 3.2. Resultados obtenidos

Después de 12 sesiones, utilizando diferentes metodologías que se detallaran después en el apartado 6 de esta memoria, se realiza un examen final de contenidos ([véase Anexo I. Examen final](#)), donde el 55% del alumnado no supera la prueba (véase [Gráfico 5](#)).

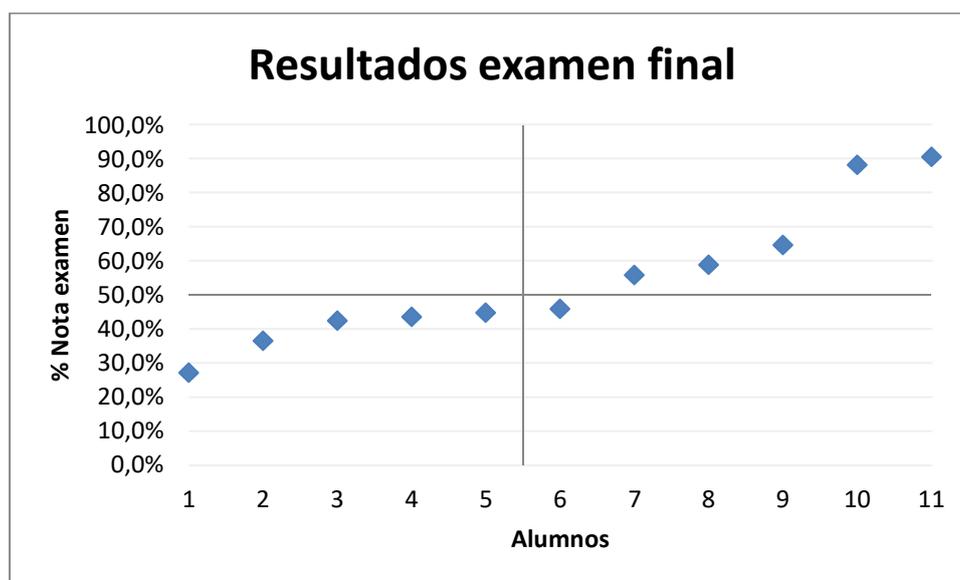


Gráfico 5. Resultados examen final de la unidad de Geometría

Además de la calificación de los alumnos, del examen final se analizan las respuestas y se extraen las siguientes conclusiones:

- La gran mayoría domina el cambio de unidades
- No tienen claro el concepto de poliedro regular. Sólo un alumno ha respondido bien.
- Saben dibujar el desarrollo plano de figuras sencillas.
- Conocen las fórmulas geométricas. Pero muchos sólo saben aplicarlas si se les piden directamente.
- La mayoría no sabe enfrentarse al enunciado de un problema

Finalmente, en la última sesión, tras haber repartido los exámenes corregidos y haber resuelto los problemas entre todos, se pasa una encuesta de satisfacción ([ver Anexo II. Encuesta de satisfacción](#)).

La primera parte de la encuesta busca conocer su opinión sobre el trascurso de las clases y sobre el contenido impartido, por tanto se busca valorar el papel del docente. En los resultados, cabe resaltar, por un lado la baja percepción de utilidad que han visto en la materia impartida, un 63%, así como el escaso interés que muestran por la Geometría, un 68%, tal vez porque los contenidos no han cumplido tampoco sus expectativas, un 57%. Por otro lado, la participación en clase la consideran aceptable, 71%, y los medios utilizados parecen haber sido los adecuados, 89% (véase *Gráfico 6*).

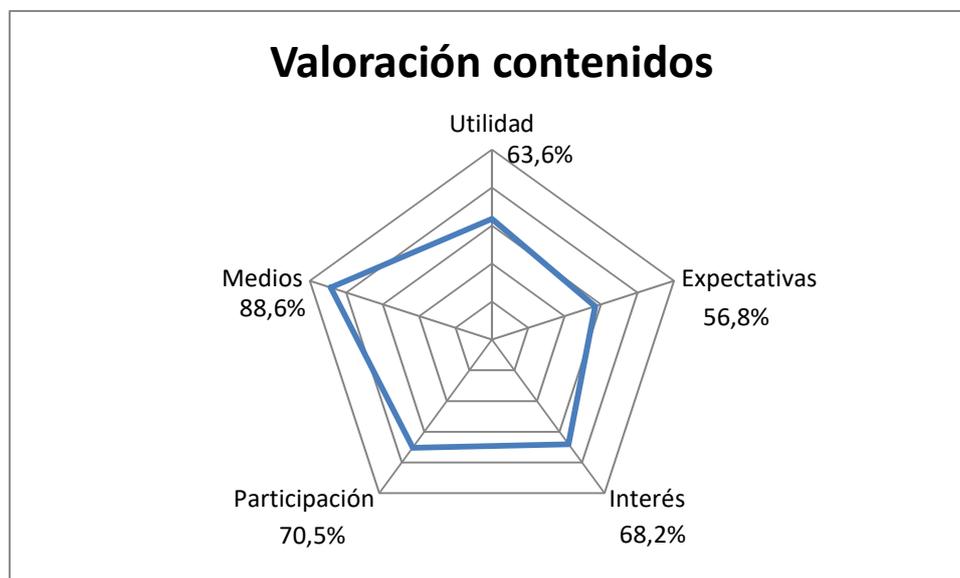


Gráfico 6. Resultados cuestionario final sobre la metodología

La segunda parte de la encuesta va dirigida a que reflexionen sobre su papel en el aprendizaje, en definitiva, es una auto-evaluación. En ella se les pregunta si están de acuerdo con la calificación obtenida, el 93,2% la considera justa y el 82,5% cree aceptables los requisitos exigidos.

Si tenemos en cuenta que el 55% no ha alcanzado la nota mínima, la resignación por haber obtenido esa calificación no se entiende a no ser que el alumno esté desmotivado o resignado frente a la asignatura.

De hecho, consideran que se han aplicado lo suficiente, aunque los resultados no acompañen. Así, el grado de satisfacción con el tiempo de estudio dedicado alcanza el 84,1%, al trabajo en casa (ejercicios y tareas) le asignan un nivel del 70,5%. Finalmente, a la atención en clase su percepción alcanza un 65,9% de grado de satisfacción (véase Gráfico 7).

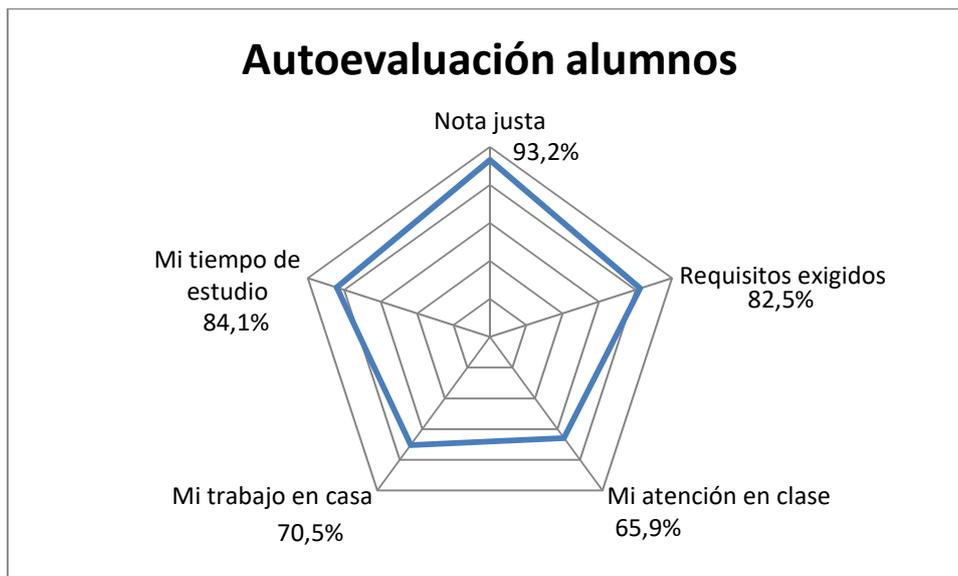


Gráfico 7. Resultados cuestionario final. Autoevaluación

Pero además del examen final y de la encuesta de satisfacción, no se puede olvidar el seguimiento llevado a cabo por el docente a cada alumno durante el transcurso de la unidad. De este seguimiento, realizado con fichas de observación diarias individualizadas, se puede resaltar:

- El 64% del alumnado tiene una actitud muy buena en clase, presta atención y participa. Sólo el 19% presta poco interés por las clases. Son respetuosos con el docente y con sus compañeros.
- La iniciativa en clase es más bien escasa, sólo el 28% participa activamente en la resolución de problemas en clase, el resto se deja llevar y espera a que les den la solución. La aplicación de otros contenidos transversales a la lección de Geometría es muy escasa.
- El 40% del alumnado no ha realizado ningún deber enviado para casa. Sólo el 30% ha realizado más de la mitad de los ejercicios propuestos.

El resultado es que el docente debe emplear mucho tiempo en repasar conceptos que a priori ya se conocen, o realizando las tareas que deberían hacer los alumnos.

## **4. EVALUACIÓN FORMATIVA**

La evaluación es una parte integral del proceso educativo. Las evaluaciones más evidentes son sumativas, es decir, van midiendo mediante controles y exámenes lo que los alumnos han aprendido para calificarles, mediante notas, los conocimientos adquiridos. La evaluación formativa, por el contrario, consiste en evaluar el progreso y los conocimientos del alumno de forma frecuente e interactiva. De esta manera los maestros pueden ajustar sus programas para satisfacer mejor sus necesidades educativas.

Por eso, la evaluación formativa es el resultado de un profundo análisis del docente, derivado de la experiencia transcurrida. Los datos objetivos recopilados tras una evaluación inicial, el seguimiento de los progresos por medio de una evaluación continua y finalmente los resultados de la evaluación final.

La evaluación formativa le da información al profesor sobre varios aspectos del programa de estudio entre los que citamos los siguientes:

1. Los objetivos en que los alumnos encuentran mayores facilidades y dificultades.
2. Los contenidos de la unidad evaluada donde se presentan más fallos y errores en relación con los diferentes tipos de objetivos.
3. Las actividades, los medios, la motivación, los materiales y recursos. Realizando un análisis de esta información se pueden recoger pistas para darse cuenta donde están los puntos fuertes y los fallos del proceso y tomar las decisiones adecuadas para reformular o realizar una nueva programación.

Esta percepción del docente es de gran importancia complementarla con la del alumnado, mediante la evaluación entre iguales y la auto-evaluación.

El estudio tiene que servir para analizar si se han cumplido los objetivos planteados, y de no ser así, es preciso hacer los cambios oportunos en la unidad didáctica. Gracias al diagnóstico realizado es posible analizar los temas considerados que se deben modificar, para eso es necesario un trabajo de investigación y búsqueda de recursos en la bibliografía que traten de resolver estos obstáculos. En nuestro caso, vamos a profundizar sobre las siguientes problemáticas:

1. Motivación del alumnado
2. Diversidad en las aulas
3. Falta de preparación previa del alumnado
4. Tipos de metodologías en el aula de Geometría

#### 4.1. Motivación del alumnado y del docente

Uno de los retos de la enseñanza actual es la de poner el centro de atención en el alumnado, en contra de la visión clásica que ha existido siempre de una educación centrada en el currículum, donde lo más importante era la figura del docente.

La actitud del alumno es “la combinación de conceptos, información y emociones que da lugar a una predisposición para responder favorable o desfavorablemente a personas, grupos, tareas o ideas” (Kanfer, 1990). Una actitud positiva se traduce en motivación, en ganas de aprender para conseguir metas u objetivos a través de los medios o instrumentos adecuados.

El tipo de meta buscada condicionará la manera de afrontar el trabajo por parte del alumno y por tanto el proceso de aprendizaje (González Cabanach et al., 1996):

- El alumnado motivado por aprender centra la atención en la búsqueda de estrategias para la resolución de problemas. Ante un desafío tiende a buscar caminos alternativos como oportunidades para adquirir destrezas.
- El alumnado preocupado por las notas tiende a buscar el resultado con el menor esfuerzo posible, mediante la memorización o estratagemas estudiadas.
- El alumnado que busca subir la autoestima ante los demás se enfrenta a los problemas únicamente si cree que puede tener éxito, sin embargo se frustra rápidamente ante cualquier atisbo de fracaso.
- El alumnado que se ha acostumbrado a fracasar suelen creer que se debe a su falta de competencia y prefieren evitar cualquier tipo de tarea.

Según Joan Vaello (2011), todos los alumnos contribuyen a formar el clima de clase, marcan el ritmo de trabajo y la convivencia. Una clase con mayor peso de alumnado desmotivado inclinará la balanza hacia conductas no deseadas del grupo.

El profesor ha de asumir su papel para potenciar la motivación positiva, abriendo un canal de comunicación rápida y sincera con sus alumnos.

#### 4.2. Diversidad en el aula

La escuela se empeña en ejercer una educación homogeneizadora para lograr una efectividad en base a la rentabilidad de los recursos disponibles. Estos procesos pueden originar situaciones de discriminación de los colectivos más vulnerables (discapacitados, inmigrantes, minorías étnicas, personas con pocos recursos, personas con dificultades en el aprendizaje,...)

Las agrupaciones por rendimiento académico, los grupos de refuerzo o la expulsión de alumnos conflictivos, son medidas para favorecer el transcurso tranquilo de las clases. Pero, por contra, suponen una sentencia definitiva para los excluidos, que los aleja de estímulos y de modelos apropiados.

Para la UNESCO (2006) la inclusión implica cambios y modificaciones en el contenido, los enfoques, las estructuras y las estrategias, con una visión común que cubra a todos los niños del rango apropiado de edad y una convicción de que es responsabilidad del sistema ordinario educar a todos los niños.

### **4.3. Falta de preparación del alumnado**

A menudo el alumnado llega a la ESO con ciertas carencias de base, por ejemplo en comprensión lectora, entender los enunciados de los problemas es uno de los mayores retos a los que se enfrentan. Esto, unido a una falta de visión espacial hace que sean incapaces de percibir y detectar el planteamiento inicial del problema, particularmente en Geometría.

Esto se traduce en una falta de autonomía y de criterio propio que es necesario desarrollar. El miedo, la pereza, la costumbre... hacen al individuo totalmente dependiente.

Cada época y cada sociedad tiene sus formas de ignorancia correspondientes. La nuestra, en general, ya no es una sociedad condenada a la ausencia de conocimientos, sino más bien ahogada en conocimientos que no pueden ser digeridos ni elaborados en contextos que les den sentido.

### **4.4. Metodología en el aula de Geometría**

En la ESO se dedica mucho tiempo a asentar el dominio del cálculo con expresiones aritméticas (enteros, decimales, fracciones) o algebraicas. Esto es debido a su importancia y a su carácter transversal en todos los campos de las matemáticas. La tradición matemática da más importancia al Cálculo que a la Geometría o a la Estadística porque les da mayor recorrido en otras asignaturas o en carreras universitarias.

Así, los demás bloques se quedan relegados al final de curso, y muchas veces se dan de forma rápida y precipitada.

Además, a la Geometría se le da un enfoque algebraico, con la aplicación directa de fórmulas para el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Dicho enfoque eclipsa la posibilidad de realizar exploraciones y argumentaciones. Se pasa directamente a la abstracción de la Geometría sin desarrollar las intuiciones necesarias para visualizar las figuras en el espacio. Se pierde la componente imaginativa y constructiva.

Aunque la Geometría da muchas oportunidades de experimentar sobre la realidad que nos rodea, aún se utilizan pocos objetos manipulables y programas informáticos.

## 5. PROPUESTAS DE MEJORA EN LA GEOMETRIA DE 2ºESO

A continuación, se proponen una serie de mejoras destinadas a aumentar la implicación del alumnado, conseguir llamar su atención y promover el interés en la Geometría.

La siguiente tabla muestra la metodología utilizada junto con las nuevas propuestas (véase *Tabla 1*).

METODOLOGÍA INICIAL	MEJORA PROPUESTA
<u>Evaluación previa</u>	
<u>Adaptación curricular</u> Refuerzo en conversión de unidades Refuerzo en cálculo de áreas	
<u>Seguimiento. Evaluación continua</u>	<u>Seguimiento + Actuación</u> Tutorización particularizada Plataforma MOODLE Encuestas SCORM
<u>Experiencia manipulativa</u> Construcción poliedros regulares	
<u>Software de Geometría dinámica</u> Geogebra como recurso didáctico	<u>Software de Geometría dinámica</u> Geogebra como herramienta trabajo Geometría en impresoras 3D
<u>Recursos didácticos alternativos</u> Cortometraje película Planilandia Litografías de M.C.Escher	
<u>Actividades colaborativas</u> Resolución enunciados de problemas El principio de Cavalieri. Deducción volumen cono y esfera	
<u>Trabajo de campo.</u> Identificación y medida de figuras geométricas	<u>Trabajo de campo.</u> Identificación y medida Creación de enunciados

	<u>Evaluación entre iguales</u>
<u>Encuesta de satisfacción</u>	
<u>Autoevaluación</u>	
<u>Evaluación formativa</u>	

Tabla 1. Propuestas de mejora en Geometría de 2ºESO después de una evaluación formativa

En los apartados siguientes se explicaran las metodologías empleadas en cada etapa, con las mejoras implementadas.

### 5.1. Evaluación previa del alumnado

Para que el aprendizaje sea efectivo, según las teorías del constructivismo de Vigotsky (Vigotsky, 1978), la acción debe estar cerca de la “Zona de Desarrollo Próximo”, es decir, en función de los conocimientos que ya tiene el alumno, y con la ayuda pertinente, es capaz de progresar dentro de un campo de acción limitado.

Planteamos una prueba inicial a los alumnos consistente en dos apartados. El primero para saber los conocimientos de Geometría que tienen antes de empezar la lección, y el segundo es una encuesta sobre la forma de afrontar las clases de matemáticas. ([Véase Anexo III. Test evaluación inicial](#))

La primera de las partes del test hace referencia a los conocimientos del alumnado en Geometría. En ella se detecta que cometen errores en la conversión de unidades, que no acaban de dominar ciertos conceptos, como el de paralelogramo, ya que no ubican ni el trapecio ni el rombo. El concepto de área y perímetro lo tienen claro en ejemplos sencillos como en un rectángulo, aunque muchos dudan al poner las unidades. Finalmente la Geometría del círculo no la dominan ya que pocos saben las fórmulas para obtener el área y el perímetro (véase *Gráfico 8*).

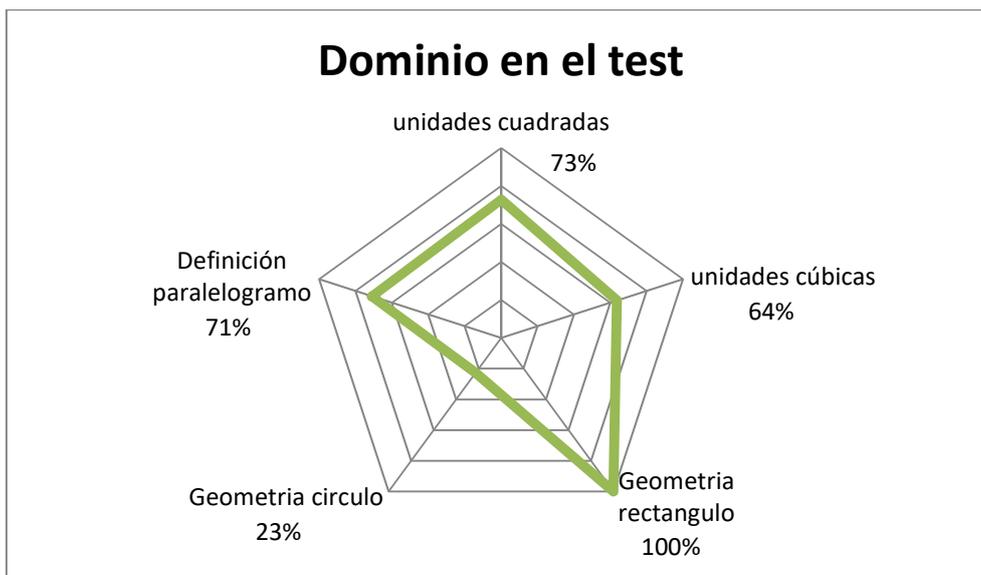


Gráfico 8. Resultados evaluación inicial. Respuestas acertadas

Los resultados de la encuesta obtenidos en la segunda parte del test, los podemos resumir a continuación:

- El 64% del alumnado prefiere una clase en la que se les de autonomía frente al 36% que prefieren que les dirijan y les marquen los pasos a realizar (véase Gráfico 9).

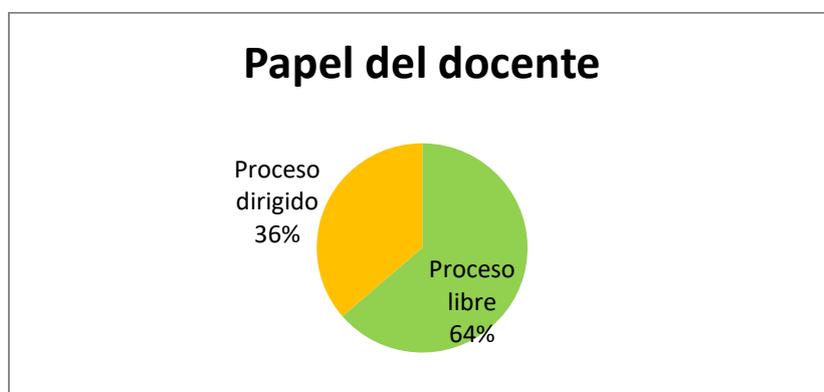


Gráfico 9. Resultados evaluación inicial. Respuestas acertadas

- Un 55% prefieren clases participativas, con debates y argumentaciones colectivas. Un 27% se inclinan por clases prácticas y manipulativas. Mientras que solo un 18% quieren una metodología más individual (véase Gráfico 10).

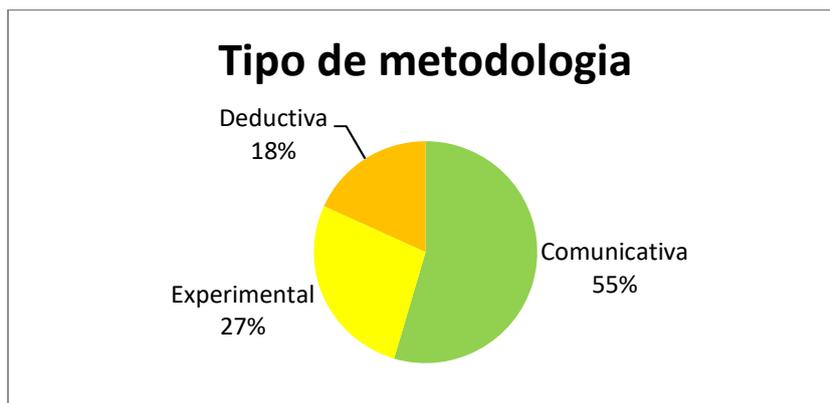


Gráfico 10 Resultados evaluación inicial. Preferencias respecto a la metodología.

- Un 90% afirma que ante un problema insiste sobre los errores cometidos, revisando los procesos y operaciones. En cambio, el 10% prefiere abandonar y pedir ayuda (véase Gráfico 11).

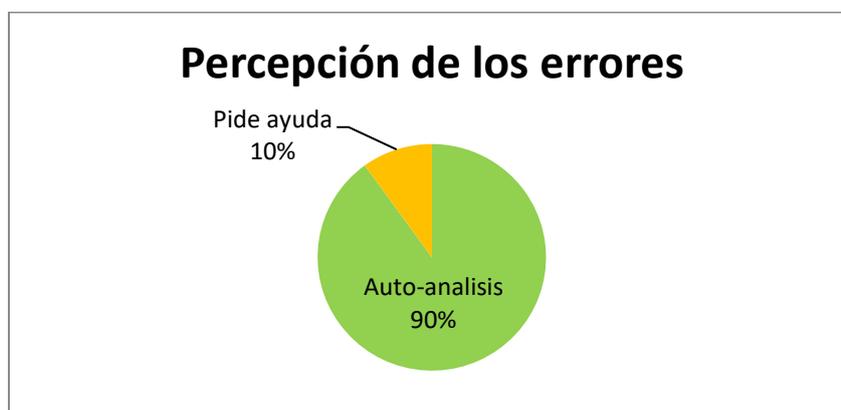


Gráfico 11 Resultados evaluación inicial. Reacción ante las dificultades.

- Sobre la resolución de problemas; el 36% tiene dificultades con la comprensión del enunciado. El 100% no tiene confianza en cómo plantear la situación inicial. El 36% tiene problemas con la elección de las técnicas a utilizar. El 9% ve difícil el cálculo y las operaciones. Finalmente, el 9% no tiene claro cómo comprobar o analizar el resultado obtenido (véase Gráfico 12).

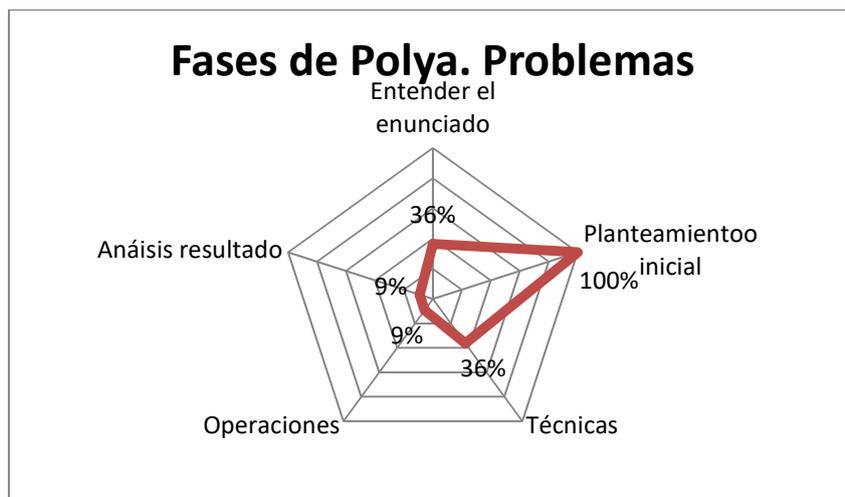


Gráfico 12 Resultados evaluación inicial. Reacción ante enunciados de problemas.

- Sobre la importancia de la Geometría: el 69% la ve útil para su vida diaria, el 84% cree en su utilidad para los estudios y el 82% para el trabajo futuro (véase Gráfico 13).

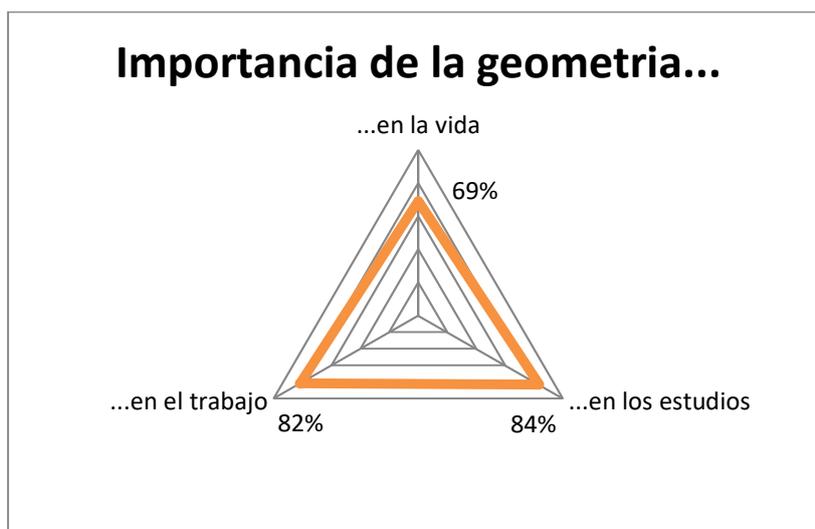


Gráfico 13 Resultados evaluación inicial. Percepción de la Geometría.

## 5.2. Preparación para la unidad didáctica

Con los resultados obtenidos en la evaluación inicial se precisa ajustar los contenidos para reforzar la base de conocimientos. Se detecta un punto débil en la conversión de unidades y en la Geometría plana de algún polígono. Por eso, la primera decisión es la de reforzar estos contenidos.

Ejemplo 1: Creación de plantilla en hoja de cálculo para convertir unidades lineales, cuadradas o cúbicas (véase Tabla 2), donde se pueden colocar los números en formato

incomplejo y desplazar la coma para cambiar de magnitud. También es útil para pasar de forma incompleja a compleja y viceversa o para hacer cálculos.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
km <sup>2</sup>	hm <sup>2</sup>	dam <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	dm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>
km <sup>3</sup>	hm <sup>3</sup>	dam <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	dm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	mm <sup>3</sup>

$\overline{\text{KI}}$     $\overline{\text{H}}$     $\overline{\text{dal}}$    **litro**    $\overline{\text{c}}$     $\overline{\text{m}}$

Tabla 2. Plantilla hoja de cálculo para conversión de unidades

Ejemplo 2: Visualización del cálculo de áreas mediante Geogebra:

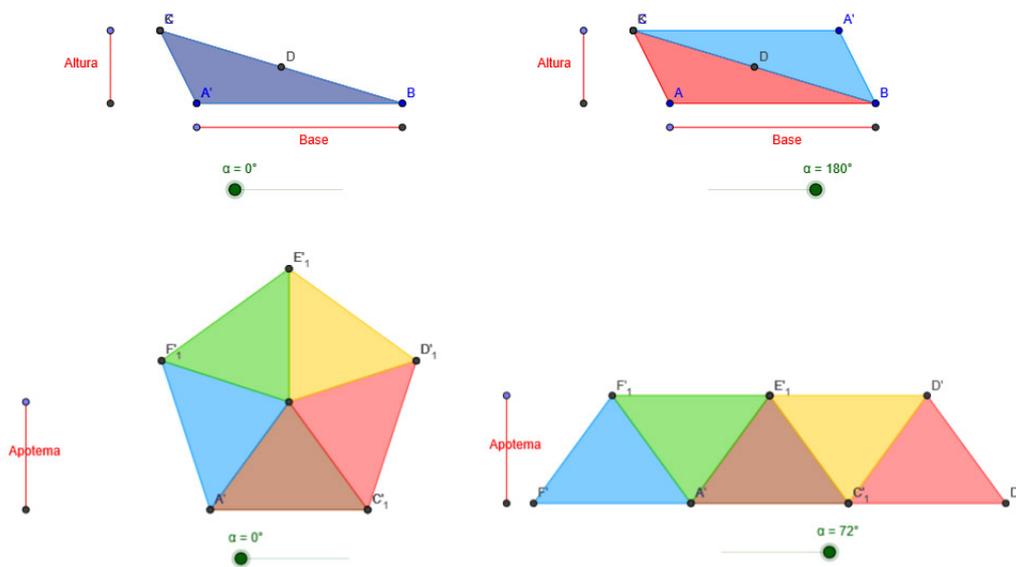


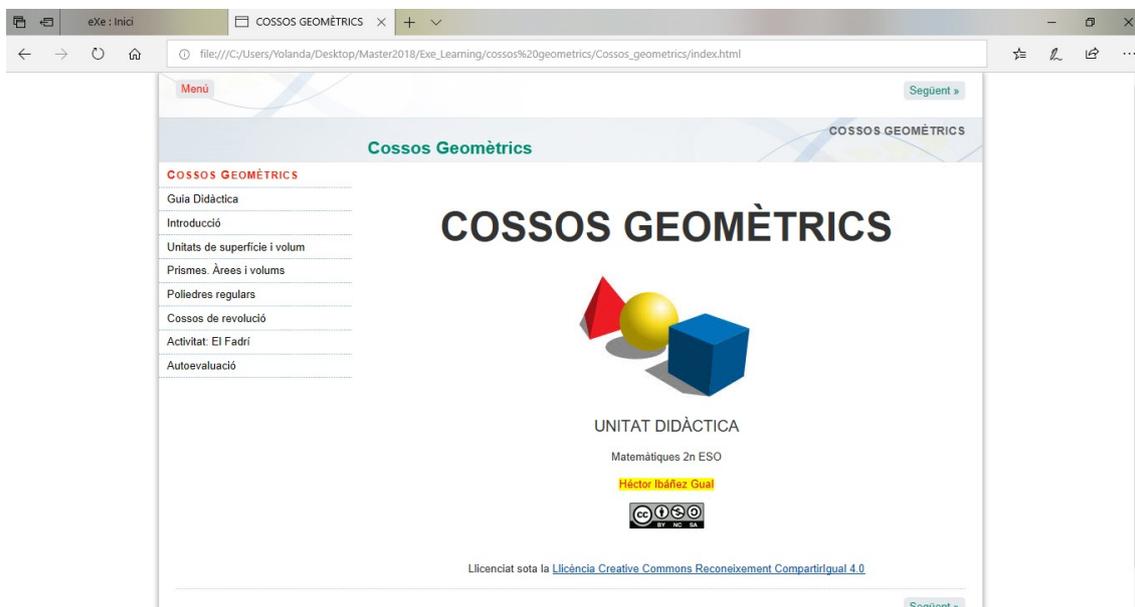
Imagen 1. Deducción áreas polígonos con Geogebra

<http://olmo.pntic.mec.es/dmas0008/areaspolygonos/index.html>

### 5.3. Tutorización particularizada mediante encuestas SCORM

Con este sistema se pretende que el alumnado gestione su velocidad de aprendizaje, realizando tareas en casa a través de plataformas virtuales como MOODLE, sistema basado en contenidos ubicados en un servidor web disponible para la comunidad educativa. Además, ofrece otras múltiples opciones, como la formación de foros, talleres, enlaces a otras páginas web,... En definitiva MOODLE cumple los requisitos que Clarenc (2013) establece para los entornos virtuales educativos: interactividad, flexibilidad, rapidez, estandarización, usabilidad, funcionalidad, ubicuidad, gran poder de persuasión y accesibilidad.

No hace falta ser un experto para crear contenidos educativos. Existen herramientas de código abierto, como el eXeLearning, que es un editor de recursos fácilmente exportables a cualquier navegador o plataforma virtual como MOODLE (véase *Imagen 2*).



*Imagen 2. Menú inicial página web de contenidos de la unidad, creado con eXeLearning*

En un curso de MOODLE podemos añadir diferentes tipos de actividades, y SCORM es una de ellas. Particularmente SCORM (del inglés “Sharable Content Object Reference Model”) es un formato de empaquetado de contenidos didácticos digitales en los que al contenido se adjunta otro fichero, llamado manifiesto, donde queda reflejado el orden y secuencia que se debe seguir para lograr un objetivo.

Los cuestionarios SCORM son preguntas de tipo test. Sólo es posible una respuesta correcta de entre las cuatro disponibles. Puede ser la solución al enunciado de un problema o una pregunta más teórica.

Estos cuestionarios se pueden organizar para que se revelen al alumnado a medida que vaya avanzando en su aprendizaje. Además, el docente es capaz de observar el progreso de sus alumnos en tiempo real y recibir información del trabajo realizado por sí mismos. Es posible controlar si han superado las pruebas, el número de intentos o la frecuencia de estudio (véase *Imagen 3*).

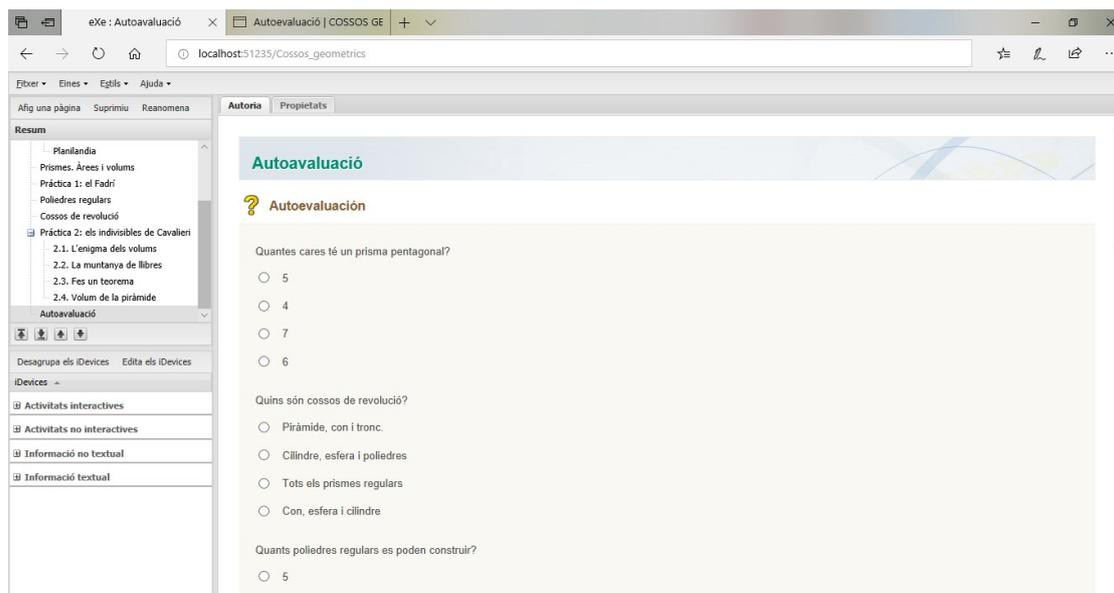


Imagen 3. Ejemplo de cuestionario multi-elección SCORM.

El número de intentos para resolver los cuestionarios es ilimitado. Para superar la asignatura es requisito indispensable haber realizado todas las encuestas SCORM, que se consideraran superadas si se aciertan correctamente más del 60% de las preguntas (véase *Imagen 4*)

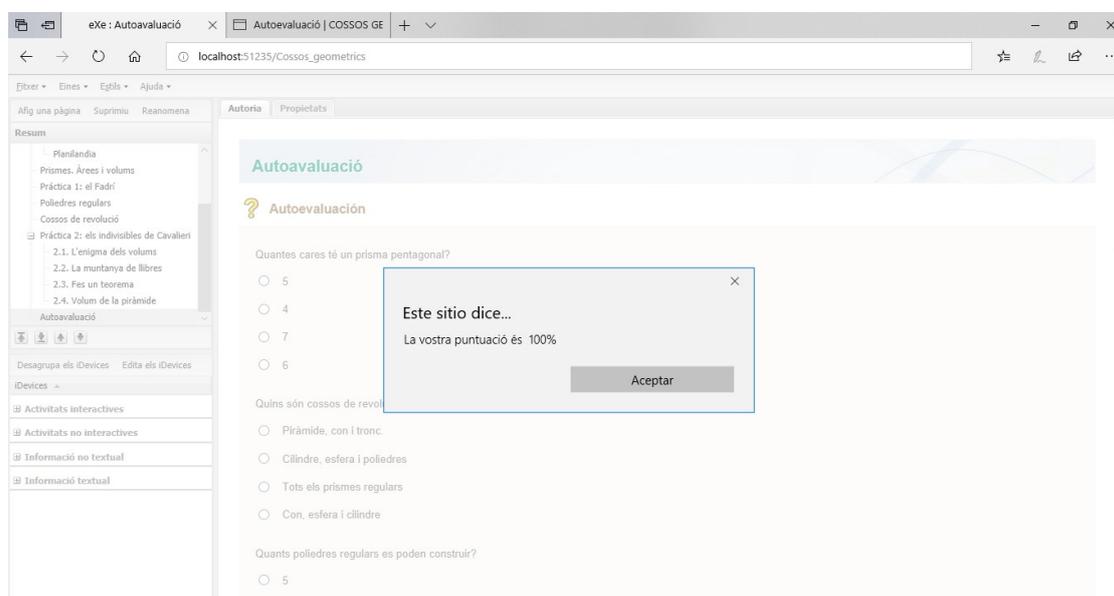


Imagen 4. Sistema de evaluación mediante cuestionario SCORM

El objetivo de esta herramienta únicamente es que repasen los contenidos de clase, a su ritmo, y que tengan material suplementario de apoyo con los contenidos que se han dado en clase o con enlaces a páginas web, para los que quieran profundizar más en la materia.

Se puede visualizar la actividad, en formato página web, en la dirección:

<https://didactica-motivacion2018-moodle.000webhostapp.com/>

#### 5.4. Trabajo cooperativo.

Con el trabajo en equipo se pretende que todos los componentes aborden una misma tarea con el objetivo que todos dominen la lección y ayuden a sus compañeros en el aprendizaje. Desde un punto de vista cognitivo mejora el rendimiento de los alumnos. Desde el punto de vista social, establece relaciones positivas y potencia el control de impulsos agresivos.

Como ya se ha comentado en el apartado 4.3, uno de los mayores problemas del alumnado en matemáticas en general, y en Geometría en particular, es que no entienden el enunciado de los problemas, son incapaces de proponer un planteamiento de partida o simplemente se confunden con facilidad por no prestar el cuidado y la atención necesarios. Utilizando esta técnica para la resolución de problemas, se establece un vínculo entre los componentes del grupo que permite aportar ideas para el planteamiento inicial del problema, buscar argumentaciones para convencer al resto y experimentar técnicas de resolución diferentes. El intercambio de hipótesis y deducciones favorece la adquisición de competencias. Todos ganan, los que van atrasados aprenden de los que van más adelantados y estos, a su vez, refuerzan sus argumentaciones.

Finalmente el resultado obtenido es el fruto de esa cooperación y una satisfacción personal de haber participado en el logro del objetivo común.

- Actividad cooperativa 1:

Se plantea a los alumnos un ejercicio para el cálculo de superficies y volúmenes, con el aliciente de ser una construcción arquitectónica muy famosa en la ciudad y por eso muy cercana a ellos:

Situado en el centro de Castellón, el Fadrí es una torre campanario de planta octogonal muy peculiar por estar separada de la iglesia. La altura del campanario es 58 m y el cuadrado que envuelve al octógono tiene un lado de 10,51 m.

1. Para las fiestas de la Magdalena se quiere cubrir los laterales con unas banderas. ¿Cuánta superficie se debe cubrir?
2. En China quieren hacer una réplica exacta del campanario. Calcula las toneladas de piedra que les hará falta si estiman que el 30% del volumen total es piedra, con densidad de  $4,6 \text{ g/cm}^3$ .

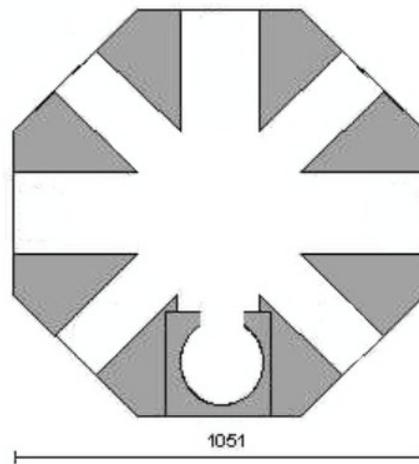


Imagen 5. Planta octogonal del Fadri.

- Actividad cooperativa 2:

A partir del principio de Cavalieri, deducir que un prisma se puede dividir en tres pirámides del mismo volumen. Para eso se les da a los alumnos una plantilla con tres prismas, y como pista se les dibuja la primera pirámide. En grupo deben sacar las otras dos pirámides y justificar que tienen el mismo volumen.

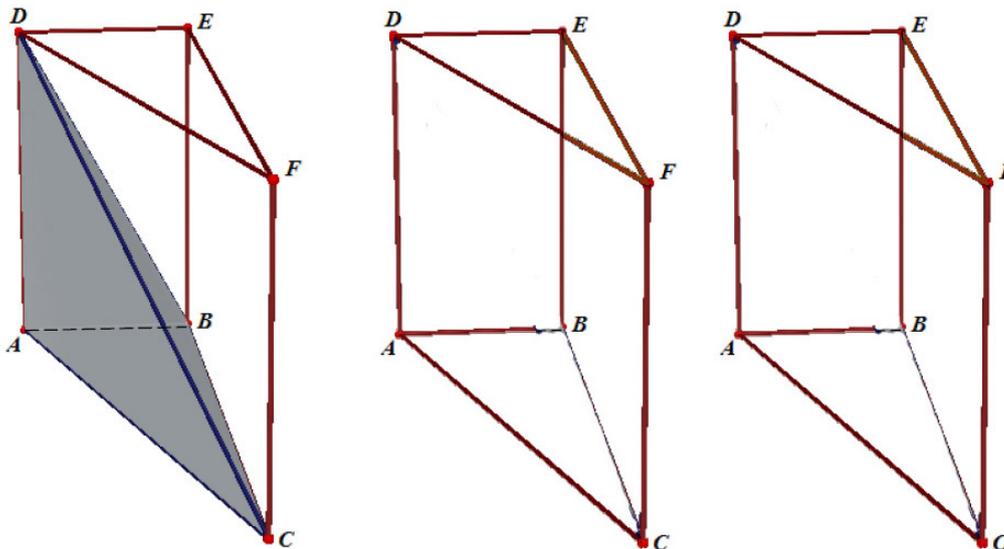


Imagen 6. Demostración volumen pirámide

Una vez extraída la deducción se extrapola al cono, mediante la visualización de un video en el que se llena un cilindro con tres conos de agua.

<https://www.youtube.com/watch?v=laITouNHQkg>

- Actividad cooperativa 3:

A partir del principio de Cavalieri, demostrar que el volumen del cono más el de la semiesfera da el volumen del cilindro. Conocido el volumen del cono, se deducirá el volumen de la esfera.

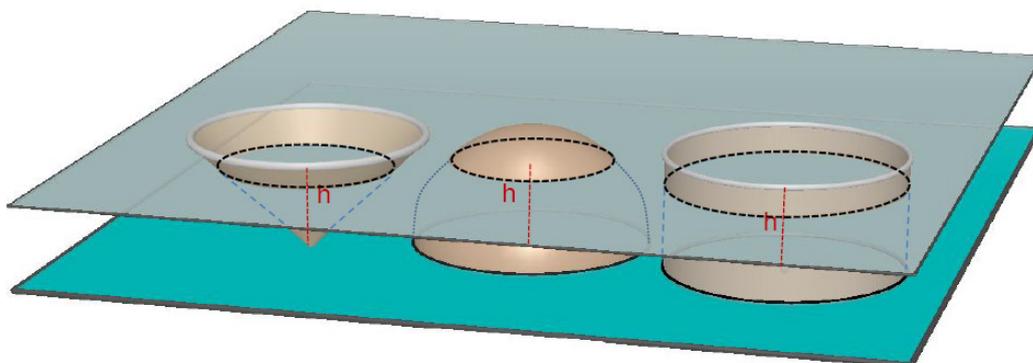


Imagen 7. Aplicación principio de Cavalieri para determinar el volumen de la esfera

Para eso hay que calcular el área de cada circunferencia resultante del corte de cada figura con el mismo plano horizontal. En grupo, tienen que aplicar técnicas de resolución de problemas como el teorema de Pitágoras y el de Tales (ver Imagen 8).

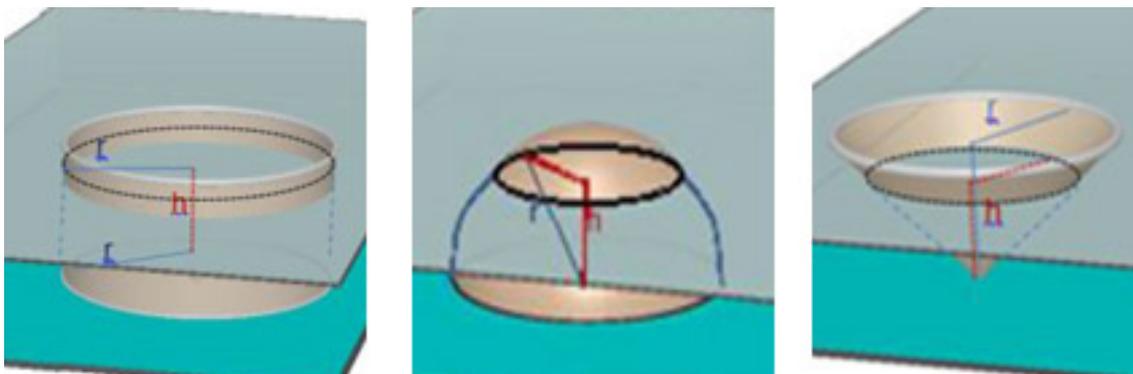


Imagen 8. Cálculos para deducir el volumen de la esfera.

### 5.5. Experiencia manipulativa

Algunos investigadores como Alsina (2004), apuntan como una de las mayores causas de la falta de interés del alumnado, y de los malos resultados, al escaso uso de materiales didácticos dentro de la clase.

La experimentación adecuada para cada edad y nivel de conocimientos, fomenta la curiosidad del alumnado hacia el descubrimiento, lo que le lleva al razonamiento y por tanto a un aprendizaje sólido y significativo.

La Geometría da mucho juego para confeccionar material manipulativo, el cual permite al alumnado visualizar el objeto de estudio y analizarlo con detenimiento, para poder extraer conclusiones de una manera autónoma y eficaz.

Así, un desarrollo plano de un poliedro puede ser un esquema muy complicado de entender. Pero simplemente teniendo las plantillas delante, el alumnado puede manipularlas y desarrollar su visión espacial, construyendo las figuras.

De este modo, se pueden presentar los poliedros regulares con sus desarrollos planos, recortados en cartulinas, para que al montarlos les aparezcan las figuras. De esta manera, para cada poliedro regular se puede contar el número de aristas, caras y vértices; relacionarlos con el Teorema de Euler ( $\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$ ); visualizar el número de caras totales; la forma geométrica que tienen; estudiar el número de caras que confluyen en un vértice; deducir si es posible construir más de cinco poliedros regulares... Incluso se les puede marcar unas dimensiones para que calculen el área total, practicando técnicas de resolución de problemas como el Teorema de Pitágoras o la resolución de ecuaciones de una incógnita (véase Imagen 9).

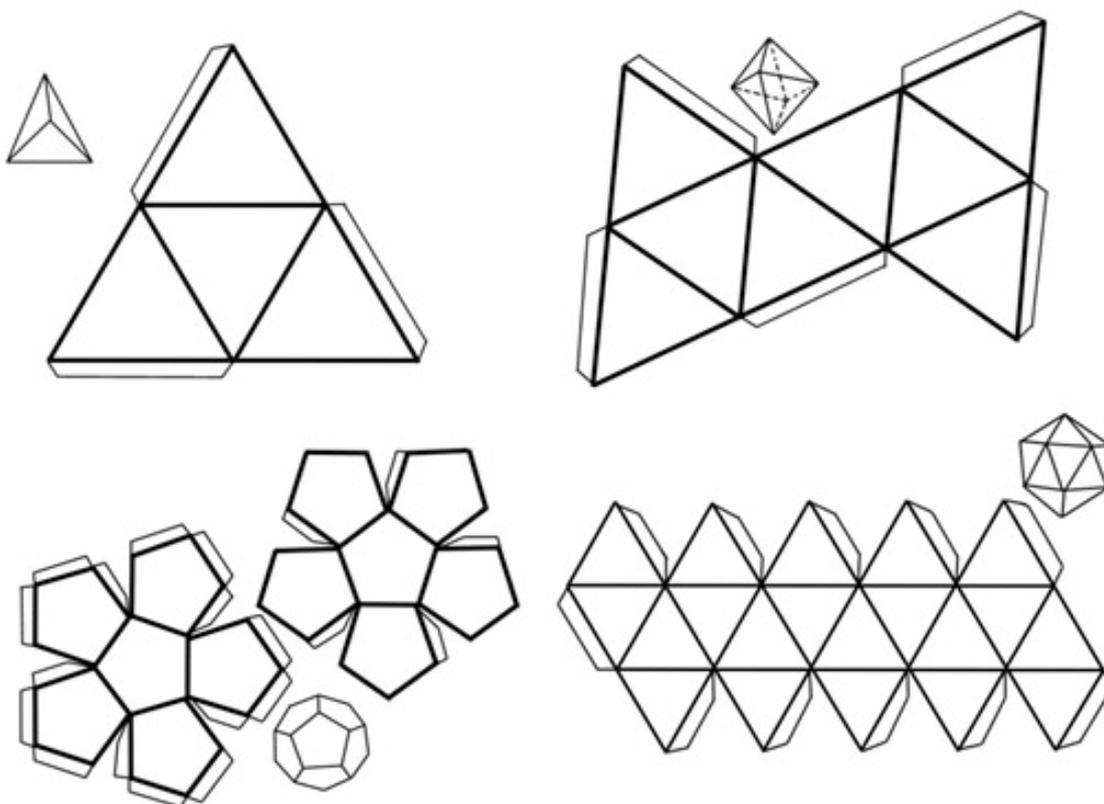


Imagen 9. Desarrollos planos poliedros regulares.

El papel del docente es el de dirigir a los grupos hacia el objetivo deseado, resolviendo dudas y aportando comentarios educativos curiosos. Por ejemplo, los poliedros regulares también son llamados sólidos platónicos, y se les atribuía propiedades

místicas. Cualquier aportación de esta manera lúdica consolida aún más la atención del alumno y despierta su interés en el campo estudiado.

## 5.6. Softwares de Geometría dinámica

Estos programas informáticos ofrecen imágenes interactivas de elementos geométricos en dos o tres dimensiones. A partir de una serie de elementos básicos (puntos, rectas, curvas,..) podemos construir nuevos objetos y relacionarlos entre sí, de tal forma que se mantengan las proporciones. De esta forma el alumno es capaz de manipular las imágenes para observar que las condiciones estudiadas mantienen unas reglas establecidas.

Uno de esos programas es el Geogebra, que se ha convertido en una herramienta imprescindible para la didáctica de la Geometría por su gran potencial de trabajo, con una interfaz muy simple, y por tratarse de un software libre en proceso constante de mejora.

Geogebra ha demostrado ser muy útil como medio didáctico del docente ya que existen infinidad de documentos libres disponibles para poder ser usados en clase. Estos documentos, además, pueden ser manipulados por los alumnos en un aula de informática. El último paso sería el de la creación de contenidos por parte del alumnado, aplicando los conocimientos adquiridos y comprobando que se cumplen las relaciones buscadas (véase *Tabla 3*).

GEOGEBRA		
1ª etapa Observación	2ª etapa Manipulación	3ª etapa Creación de contenidos

*Tabla 3. Etapas de aprendizaje con Geogebra*

Prácticamente, cualquier concepto geométrico se puede encontrar en Geogebra para su divulgación. A continuación se detalla un listado de enlaces a páginas web útiles para la unidad didáctica:

- Formación metro cúbico: <https://www.geogebra.org/m/yDfseap4>
- Teorema de Pitágoras: <https://www.geogebra.org/m/tC5RjCTg>
- Desarrollo plano de poliedros, superficies y volúmenes:  
<https://www.geogebra.org/m/KvpWakcm>
- Principio de Cavalieri: <https://www.geogebra.org/m/ptVCr8rH>
- Cuerpos de revolución: <https://www.geogebra.org/m/dhKDWkUB>

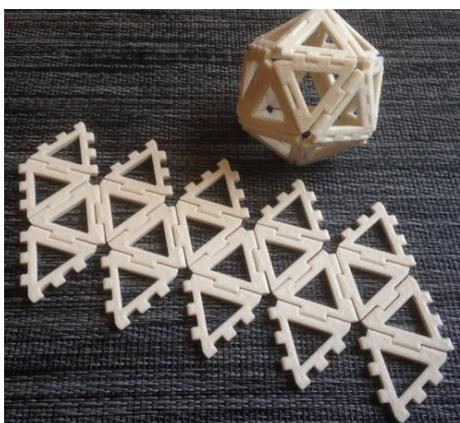
A partir de estas demostraciones, se puede pedir a los alumnos que experimenten con el Geogebra, que construyan figuras, que generen los desarrollos planos y que hagan mediciones de longitudes, áreas y volúmenes.

## 5.7. Aplicaciones de futuro

A la hora de pensar en aplicaciones tecnológicas de futuro en las que el alumnado puede sentir más interés, se puede pensar en aplicar la Geometría a la impresión 3D. El Geogebra abre la posibilidad de exportar imágenes a otros programas de tratamiento de imágenes en tres dimensiones, como el Tinkercad. A partir de ahí las aplicaciones de cuerpos geométricos a la impresión 3D sólo tiene como límite la imaginación del alumnado, desde la construcción de rompecabezas tridimensionales, maquetas, figuras fractales,...

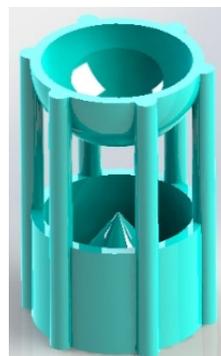
Esta metodología puede estar condicionada por la falta de una impresora 3D, pero comienzan a ser comunes tanto en los centros educativos como en las casas, por ser cada vez más asequibles económicamente y por la aparición de softwares libres. De hecho en el informe Horizon del año 2017 (Freeman, A., Becker, S. A., & Cummins, M., 2017) se describen las seis tecnologías emergentes, y una de ellas es la impresión 3D, que tendrán un impacto significativo en la educación primaria y secundaria de los próximos cinco años (2017-2021).

En la red se pueden encontrar multitud de actividades destinadas a fomentar la visión de la Geometría de los alumnos (véanse de *Imagen 11* a *Imagen 12*)



*Imagen 11. Construcción de un icosaedro con impresora 3D.*

<https://www.thingiverse.com/thing:440950>



*Imagen 10. Demostración del volumen de la esfera con impresora 3D.*

<https://www.thingiverse.com/thing:262335>



Imagen 12. Aproximación a los cuerpos de revolución.

<https://www.thingiverse.com/thing:306052>

Se pueden encontrar más actividades en la página de la Generalitat de Catalunya.  
<http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/impressio-3d-i-matematiques>

## 5.8. Recursos lúdicos alternativos

El docente ha de ser capaz de interpretar cual es el ambiente de trabajo en clase ya que es difícil mantener la atención durante los 55 minutos. Las causas pueden ser múltiples: el contenido de la materia es denso, el alumnado ha tenido un día duro, es la última hora de clase del viernes y están pensando en el fin de semana, es primera hora del lunes y están dormidos, o simplemente se ha quedado un hueco pequeño libre que hay que rellenar. Pues bien, a presentación de materiales atractivos para ellos hace posible que sigan manteniendo su atención y a la vez que sigan aprendiendo y adquiriendo competencias.

Un video corto, unas imágenes sugerentes o algún pequeño juego de entretenimiento puede ser el punto de partida para mantener su atención y realizar así razonamientos de manera amena.

- Visualización del tráiler de la película “Planilandia” (2007), un mundo en el que las formas irregulares son consideradas monstruosas y el estatus social lo marca el número de lados, siendo los círculos la clase dirigente. Basada en el libro de Edwin A.Abbott, puede ser el punto de partida para incitarles a leer, pero más allá de eso, anima a pensar sobre razones geométricas, sobre el mundo visto únicamente desde un plano, ¿se pueden imaginar cómo sería una esfera si sólo tuviéramos dos dimensiones?,...



Imagen 13. Fotograma película "Planilandia" (2017)

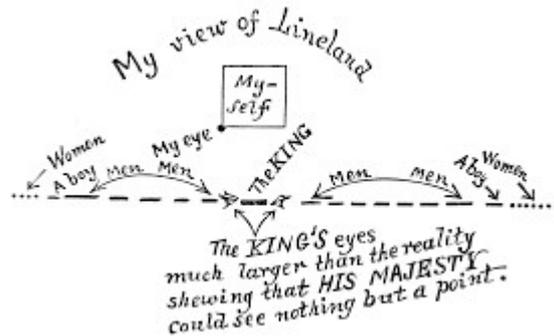


Imagen 14. Ilustración libro "Planilandia" sobre la visión en un mundo de una dimensión

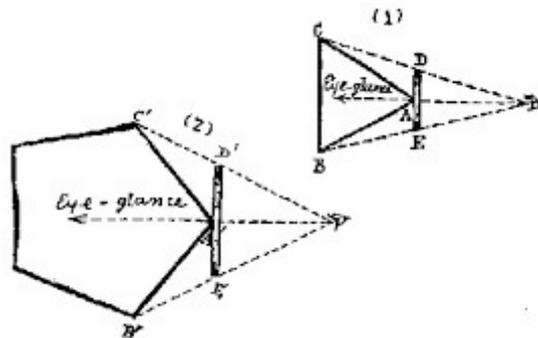


Imagen 15. Ilustración libro "Planilandia" sobre el reconocimiento entre individuos

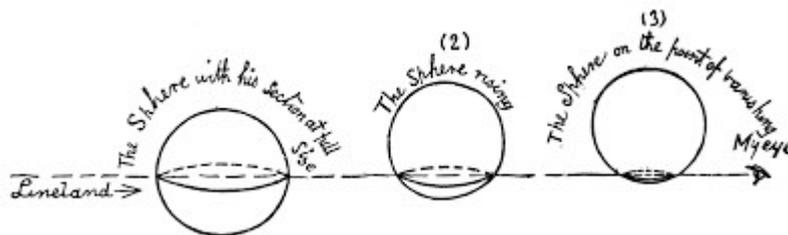


Imagen 16. Ilustración libro "Planilandia" sobre el movimiento de una esfera sobre el plano.

- Ilustraciones geométricas. Las litografías de M.C.Escher, artista neerlandés (1898-1972), consisten en figuras imposibles, dimensiones imaginarias y teselados creativos. Son famosas las escaleras que no se sabe dónde empiezan, los efectos visuales, los dibujos que parece que salen del papel y, en definitiva, todo tipo de construcciones inverosímiles. Estos dibujos llaman la atención enseguida y fascinan de tal manera que impulsan a analizar cada rincón buscando las paradojas y los imposibles. Fomenta la visión espacial y la construcción de figuras geométricas.

Ejemplo 1: Waterfall (1961), el agua cae en cascada sobre una noria y se recoge en una acequia que debería seguir pendiente abajo pero que sin embargo aparece otra vez en lo alto de la cascada.

Ejemplo 2: Day and night (1938), dos campos de cultivos simétricos que se convierten en aves blancas y negras. Dominio perfecto de la partición regular de la superficie.

Ejemplo 3: Belvedere (1958), los ángulos de la construcción que determinan la perspectiva se entrecruzan entre sí, destrozando la esencia de la realidad. El truco se ve reflejado en un pequeño cubo en manos de un hombre sentado. Además, las rejas, aun teniendo una perspectiva correcta, serían imposibles de construir.



Imagen 18. Waterfall. M.C.Escher (1961)

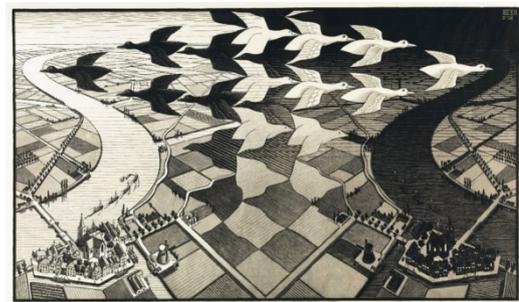


Imagen 17. Day and Night. M.C.Escher (1938)

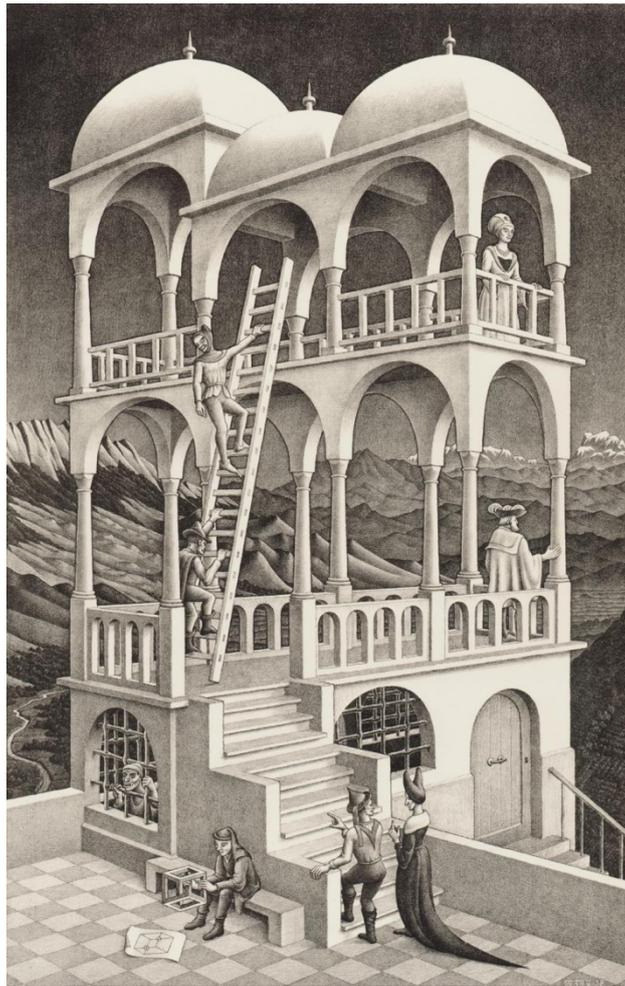


Imagen 19. Belvedere. M.C.Escher (1958)

### 5.9. Trabajo de campo. Creación enunciados

La aplicación de los conocimientos geométricos en el entorno más cercano del alumnado es un estímulo de motivación importante, puesto que se muestra la utilidad práctica de sus conocimientos. Así pues, cualquier rincón de la ciudad es una fuente constante de ejemplos geométricos que se pueden medir y cubicar, sólo se necesita incentivar al alumnado a identificar estas figuras.

Más cercano aún, una salida al patio del instituto es una excusa perfecta para fomentar la creatividad entre el alumnado, darle libertad para descubrir e identificar figuras geométricas y de razonar las medidas que necesita tomar para calcular el área y el volumen. Plasmar esa realidad en el papel se convierte en un reto que les ayuda a mejorar su visión espacial.

Finalmente, el alumnado puede generar los enunciados de un problema a partir de los datos que ha medido directamente, plantear el problema al resto de la clase y explicar el procedimiento empleado para su resolución. Según Brousseau (2000), el alumno no

acaba de asimilar los conocimientos hasta que no es capaz de plantear sus propios enunciados, sólo así da a entender que sabe aplicar correctamente los conceptos.

Se pueden ilustrar multitud de ejemplos de figuras geométricas cercanas. Así, un macetero cilíndrico (véase *Imagen 20*) es un ejemplo perfecto para desarrollar el razonamiento del alumnado al tener que calcular el volumen del anillo exterior, restando el interior, separar la parte de la base que es un cilindro completo,... y puede extender el interés hacia el cálculo de otros asuntos relacionados, como estimar los kilos de tierra necesarios para llenar el macetero, o el peso total en el caso de tener que buscar una grúa para desplazarlo.



*Imagen 20. Macetero en el patio del instituto*

Las columnas de los pasillos (véase *Imagen 21*) también son ejemplos claros para medir figuras geométricas simples o compuestas. Se puede determinar el número de ladrillos necesarios para construirla, el volumen de hormigón o el coste que tendría pintarlos.



*Imagen 21. Diferentes tipos de columnas, en el patio y en las escaleras del instituto*

Incluso un vaso de la cafetería (véase *Imagen 22*) puede servir para calcular área y volumen de un tronco de cono.



*Imagen 22. Vaso de plástico de la cafetería*

### **5.10. Evaluación entre iguales.**

La evaluación orientada al aprendizaje pone la atención en el uso de estrategias de evaluación que promueven y maximizan las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes, en contraposición a la certificación o validación de los conocimientos a través de la evaluación sumativa (Keppell et ál., 2006). La evaluación entre iguales y la autoevaluación, principalmente, son técnicas utilizadas con este fin.

Falchikov (2001) concibe la evaluación entre iguales como la que los estudiantes realizan del trabajo o de los logros de sus compañeros utilizando para ello criterios relevantes. Brew (2003) cita que la evaluación entre iguales implica que los estudiantes hagan juicios y comentarios sobre el trabajo de los otros.

Estos juicios se pueden realizar en cada sesión de trabajo cooperativo, de tal forma que no sólo se valore el resultado final, sino que también se tenga en cuenta el proceso llevado para conseguir esos resultados, la contribución al grupo vista por los propios compañeros (véase *Tabla 4*).

CATEGORIAS	ESTUDIANTES				
	1	2	3	n	Promedio
Aportación de ideas para el tema					
Material de investigación, análisis y preparación para el tema					
Contribución a los procesos cooperativos del grupo					
Apoyo y motivación					
Contribución práctica al resultado final (escritura, presentación, materiales,...)					
Total para cada estudiante					<i>Promedio total</i>

*Tabla 4.* Esquema de evaluación del grupo para estudiantes (Heathfield, 2003, p. 166)

Otra forma de que se evalúen entre ellos es analizándose mutuamente el trabajo individual. Así, si se ha pedido a los alumnos que salgan al patio, identifiquen figuras geométricas, tomen medidas y realicen sus propios enunciados, podemos utilizar estos enunciados para que los resuelva otro alumno. Finalmente el problema vuelve al autor, quien tiene que evaluar el proceso.

La interacción entre alumnos les supondrá un aprendizaje significativo, del que aprenderán las dos partes. El que resuelve el ejercicio valorará si el enunciado está bien redactado. El que corrige, a su vez, se enfrentará al reto de juzgar el trabajo de su compañero y le servirá para detectar puntos de mejora útiles para su experiencia propia. El resultado es una interacción en la que las dos partes ganan.

En los apéndices se detalla una rúbrica de evaluación como guía para corregir los ejercicios por parte del alumnado ([véase Anexo IV. Evaluación orientada al aprendizaje](#))

### 5.11. Sistema de evaluación continua

Si se deja la valoración del alumnado para el examen final de la lección, no es posible diagnosticar si su evolución ha sido la correcta, la reacción siempre llegará tarde porque no se recibe ningún feed-back que permita dirigir el proceso de aprendizaje. Además, para que el alumnado se involucre es importante que se vea recompensado

por su esfuerzo. Así pues, la evaluación ha de ser continua. Se han de valorar aspectos diferentes a los de adquisición únicamente de conocimientos. Las competencias se pueden distinguir por: su actitud en clase, su participación activa, el esfuerzo a la hora de resolver problemas, su progresión, el apoyo a sus compañeros, el interés mostrado...

Por eso, en nuestro caso se ha dado un valor al examen final del 70% del total, y el resto se ha ido repartiendo en múltiples tareas. Es importante que ellos sean conocedores de qué y cómo se les va a evaluar para que tengan el control de la situación. Todas estas acciones reciben una valoración en el momento de realizarse y por eso el alumno es consciente de su evolución: la redacción de los apuntes de clase en una libreta, la ejecución de los ejercicios enviados para hacer en casa, la actitud en clase, la participación en debates, la cooperación entre compañeros o el resultado de varios ejercicios manipulativos (véase Tabla 5). Todas son importantes, puesto que son el camino para llegar a los objetivos marcados.

	% Nota
Examen final	70%
Ejercicios cooperativos en clase	15%
Libreta de apuntes / ejercicios	10%
Actitud en clase	5%

Tabla 5. Reparto evaluación continua de la unidad.

Para que el alumno sea conocedor de cómo se le evalúa, es importante que tenga una rúbrica en la que se pueda guiar, en dicha rúbrica se pone en valor las acciones del alumnado sin por ello coaccionar su imaginación y su creatividad ([véase Anexo V. Rúbrica de evaluación](#)).

## **6. CONCLUSIONES**

Las pruebas realizadas en el grupo de estudio han reflejado un bajo rendimiento de los alumnos en el aula de Geometría por un elevado porcentaje que no ha alcanzado el nivel mínimo en dicha competencia. Datos que corroboran las pruebas oficiales, tanto a nivel nacional como internacional.

Pero lo peor es la resignación que he detectado en los alumnos que no alcanzan los objetivos. La percepción que tienen ellos mismos que han hecho lo correcto aun sacando malos resultados denota una desidia por la asignatura y por sus contenidos. Y, aunque posiblemente esta actitud venga de cursos anteriores, mi responsabilidad como docente es la de desarrollar metodologías inclusivas que devuelvan la ilusión a los alumnos desmotivados y a la vez que no interrumpan el avance de los que siguen el ritmo marcado. El papel del profesor es hacer atractiva la enseñanza, provocando la curiosidad en el estudiante, animándolo a reflexionar en un clima adecuado de clase que promueva el intercambio de ideas sin miedo a exponerse a hacer el ridículo. El alumno debe ser el protagonista de su propio aprendizaje, y de esta forma la adquisición de contenidos se realiza de una forma más efectiva y profunda. En definitiva, el alumnado solo aprende si quiere aprender.

Considero fundamental la implicación de la comunidad docente en el resultado final. Sin embargo, tampoco creo que exista una fórmula mágica para atraer el interés del alumno. No existe una actividad estrella infalible ante el fracaso. Más bien, la clave la encuentro en el sistema de evaluación, que debe ser; inicial, continua y formativa. De esta forma el alumno siente cercano al docente, recibe respuestas inmediatas a sus acciones y por eso se hace consciente de su progreso.

Bajo mi punto de vista, el trabajo en equipo y las actividades manipulativas, aplicados en entornos cercanos a su vida cotidiana y de la manera más transversal posible, provocan un aprendizaje entre iguales, más valorado por ellos por ser un conocimiento fruto de su razonamiento, desde su perspectiva y en un lenguaje que entienden mejor.

Las nuevas tecnologías (TIC) amplían el abanico de posibilidades a la hora de introducir una lección, visualizar nuevos procedimientos e incluso crear materiales por ellos mismos que corroboren los enunciados aprendidos. Es importante que el docente se mantenga actualizado y sea conocedor de los nuevos avances tecnológicos.

Finalmente, pienso que la Geometría cumple todos los requisitos para poder aplicar esta nueva metodología de trabajo. Captando el interés del alumnado en esta disciplina se conseguirá expandirlo también a la resolución de problemas de otras disciplinas menos visuales y más abstractas. Merece la pena invertir la dedicación y los recursos destinados a contribuir a reducir el fracaso en competencia matemática de

los últimos años. Parece que el camino está marcado, aunque no es fácil, pero los resultados seguro que serán satisfactorios.

## 7. BIBLIOGRAFIA

- [1] Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos. Para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea.
- [2] Aubanell, A. (2015). *Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria*. Quaderns d'avaluació, 31(31), 63-137.
- [3] Brew, A. (2003). *La autoevaluación y la evaluación por compañeros*. En S. Brown y A. Glasner. (Eds.), *Evaluar en la universidad. Problemas y nuevos enfoques* (179-189). Madrid: Narcea
- [4] Brousseau, Guy. (2000) *Educación y Didáctica de las Matemáticas*. Educación Matemática. Vol. 12 No. 1 Abril, pp. 5-38
- [5] Burgués, C., & Sarramona, J. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament.
- [6] Clarenc, C. A. (2013, October). *Instrumento de evaluación y selección de sistemas de gestión de aprendizaje y otros materiales digitales. Medición y ponderación de LMS y CLMS, recursos educativos digitales y herramientas o sitios de la WEB 3.0*. In Congreso Virtual Mundial de E-Learning, Grupo GEIPITE.
- [7] Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HM Stationery Office.
- [8] Falchikov, N.(2001). *Learning Together: Peer Tutoring in Higher Education*. Londres: Routledge Falmer.
- [9] Freeman, A., Becker, S. A., & Cummins, M. (2017). *NMC/CoSN Horizon Report: 2017 K. The New Media Consortium*.
- [10] Generalitat de Catalunya. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (s.f.). *Avaluacions de quart d'ESO*. Recuperado de .  
[http://csda.gencat.cat/ca/arees\\_d\\_actuacio/avaluacions-consell/avaluacio-quart-eso/](http://csda.gencat.cat/ca/arees_d_actuacio/avaluacions-consell/avaluacio-quart-eso/)
- [11] González Cabanach, R., Valle, A., Núñez, J.C., González-Pienda, J.A., González-Pumariega, S. y García, M. (1998): *Evaluación de la motivación académica a través de las "metas" y los "estilos motivacionales"*. V Congreso de Evaluación Psicológica. Málaga.
- [12] Heathfield, M. (2003). *Evaluación en grupo para fomentar un aprendizaje de calidad*. En S. Brown y A. Glasner (Eds.), *Evaluar en la universidad. Problemas y nuevos enfoques* (155-166). Madrid: Narcea.
- [13] IAQSE. (s.f.). *Avaluacions diagnòstic*. Recuperado de:  
<http://iaqse.caib.es/cat/avaluacions/diagnostic/diagnostic.html>
- [14] Kanfer, R. (1990). *Motivation theory and industrial and organizational psychology*. *Handbook of industrial and organizational psychology*, 1(2), 75-130.
- [15] Keppell, M., Au, E., Ma, A. y Chan, C. (2006). *Peer Learning and Learning-Oriented Assessment in Technology-Enhanced Environments*. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 31 (4), 453-464.
- [16] Moliner, O (2013). *Educación inclusiva*. Universitat Jaume I. Col·lecció Sapientia 83
- [17] Palmero Cantero, F., Gómez Íñiguez, C., Guerrero Rodríguez, C., & Carpi Ballester, A. (2010). *Manual de prácticas de motivación y emoción*. Universitat Jaume I.
- [18] Pólya, George (1945). *"How to Solve It"*, Princeton
- [19] *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*.
- [20] UNESCO (2006). *Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad*
- [21] Vaello, J. (2011). *Cómo dar clase a los que no quieren* (Vol. 280). Graó.
- [22] Vygotsky, Lev S (1978), *Pensamiento y lenguaje*, Madrid: Paidós

## ANEXOS

### **ANEXO I. Examen final de contenidos**

1. Expresa en litros. (0,6 puntos)

75,025 hm<sup>3</sup>

0,000317 dam<sup>3</sup> + 590.000 mm<sup>3</sup>

1.523 ml

2. Una pirámide cuadrangular regular, ¿es un poliedro regular? Razona la respuesta. (0,6 puntos)

3. Dibuja el desarrollo plano de:

Un prisma triangular (0,4 puntos)

Una pirámide pentagonal (0,4 puntos)

4. ¿Cuál es el precio de una caja cerrada que mide 0,6 m x 0,5 m x 0,4 m si la madera cuesta a razón de 18 €/m<sup>2</sup>? (2 puntos)

5. En un depósito cónico, abierto por arriba, de 6 metros de diámetro y 4 metros de generatriz se ha detectado una fuga i es necesario impermeabilizarlo.

a) Calcula la superficie a tratar.(1 punto)

b) Una vez reparado se vierten 400 litros de agua por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse? (2 puntos)

6. Calcula la superficie i el volumen de una pelota esférica de 5 cm de radio. (1,5 puntos)

## ANEXO II. Encuesta de satisfacción

Valora las conclusiones de las clases en una escala de 1 a 4, dónde 1 indica la puntuación más baja y 4 la más alta.

### ACTIVIDAD FORMATIVA

1. Los contenidos me han parecido útiles	1	2	3
2. Los contenidos se han adaptado a mis expectativas	1	2	3
3. El docente ha conseguido mantener mi interés	1	2	3
4. El docente ha favorecido la participación en clase	1	2	3
5. Medios pedagógicos (ordenadores, cañón, pizarra, etc.)	1	2	3

### EVALUACIÓN GLOBAL

6. La nota obtenida la considero justa	1	2	3
7. Los requisitos exigidos han sido proporcionales los contenidos de la lección	1	2	3

### AUTOEVALUACIÓN

Considero buena...			
8. ...mi atención en clase	1	2	3
9. ...mi dedicación en casa (ejercicios y trabajos)	1	2	3
10... el tiempo que he dedicado al estudio	1	2	3

### COMENTARIOS

--

### ANEXO III. Test evaluación inicial Geometría 2ºESO

ESCOJE LA RESPUESTA QUE TE DEFINA MEJOR

Me gustan los trabajos donde puedo plasmar mis ideas y utilizar la imaginación.	
Me gustan los trabajos dirigidos, con las pautas bien marcadas.	

Se me dan mejor las tareas donde tengo que leer, observar, pensar,...	
Se me dan mejor las tareas donde tengo que hablar, escuchar,...	
Se me dan mejor las tareas donde tengo que experimentar, manipular,...	

Si un problema no me sale, insisto otra vez, y analizo mis errores	
Abandono los problemas que no me salen. Ya me lo explicará alguien.	

A la hora de resolver un problema, ¿dónde tienes más dificultades? (puedes marcar varias)				
Entender el enunciado	Representar o plantear la situación inicial	Elegir las técnicas a utilizar	Hacer las operaciones	Comprobar la solución

Indica las horas semanales que le dedicas a las matemáticas en casa	
Indica las horas semanales que le dedicas a las matemáticas en la academia (si vas)	

¿Qué importancia le das a la Geometría...	1	2	3	4	5
	nula		media		alta
...en tu vida cotidiana?					
...en tus estudios?					
...en tu carrera profesional?					

1. Completa:

$$0,001 \text{ hm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$$

$$21 \text{ dam}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

$$0,034 \text{ km}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dam}^2$$

2. Transforma en metros cúbicos las siguientes cantidades:

$$0,025 \text{ hm}^3$$

$$58000 \text{ l}$$

$$15\ 000 \text{ dm}^3$$

3. Una habitación rectangular mide 5 m de largo, por 3 m de ancho. Calcula su área y el su perímetro.

4. Escribe la fórmula para:

Perímetro de una circunferencia de radio r:

Área de una circunferencia de radio r:

5. ¿Cuáles de las siguientes figuras son paralelogramos?

- Cuadrado
- Trapecio
- Rectángulo
- Rombo
- Octógono

### ANEXO IV. Evaluación orientada al aprendizaje. Rúbrica de actividad entre iguales

	Bien	Regular	Mal
Planteamiento	<p>Comprende el enunciado del problema y extrae la información necesaria para resolverlo.</p> <p>Muestra los datos y las incógnitas de manera visual.</p>	<p>Comprende el enunciado del problema pero comete algún error al plantearlo.</p> <p>No muestra de manera ordenada el esquema inicial.</p>	<p>No Comprende el enunciado del problema y extrae la información necesaria para resolverlo. No hace un planteamiento adecuado a la solución del problema.</p>
Presentación	<p>Explica de forma clara y concisa los procedimientos y los resultados geométricos, con textos o dibujos.</p> <p>Guarda un orden y se facilita la comprensión.</p>	<p>Explica el procedimiento pero no sigue un orden claro que permita la comprensión del ejercicio.</p>	<p>No guarda orden, los cálculos y los resultados están mezclados y no se comprende el camino para resolver el problema.</p>
Técnica	<p>Elige el procedimiento más adecuado y simple para la resolución del problema</p>	<p>No utiliza los procedimientos más adecuados para la resolución de problemas.</p>	<p>No sabe qué método aplicar para solucionar el problema</p>
Resolución	<p>La solución es la correcta, los cálculos están bien hechos.</p> <p>La solución se resalta y se visualiza fácilmente.</p>	<p>Aunque el proceso es correcto el resultado es erróneo. Se cometen fallos de cálculo.</p> <p>La solución es correcta pero no está resaltada.</p>	<p>La solución no es correcta o no se ha dado ninguna, El método para llegar a ella tampoco es correcto.</p>

### ANEXO V. Rúbrica de evaluación

	Bien	Regular	Mal
Comunicación Lingüística	Explica de forma clara y concisa los procedimientos y los resultados geométricos. Comprende los enunciados de los problemas y extrae la información necesaria para resolverlos.	Tiene dudas al exponer los procedimientos y los resultados geométricos. Comprende los enunciados de los problemas, comete algún error cuando extrae la información necesaria.	No sabe explicarse y no comprende los enunciados de los problemas.
Competencia Digital	Utilita Internet para reforzar y avanzar en su aprendizaje. Incorpora información en sus apuntes i lo comenta con los demás.	Utilita Internet para practicar lo que se ha dado en clase. Hace lo que se le pide.	No se preocupa en buscar más información a Internet. No realiza ninguna tarea.
Aprende a aprender	Valora los conocimientos geométricos adquiridos como medio para resolver problemas. Elige el procedimiento más adecuado. Es consciente de las carencias en los conocimientos adquiridos en esta unidad.	Valora los conocimientos geométricos adquiridos como medio para resolver problemas. No utiliza los procedimientos más adecuados para la resolución de problemas. No manifiesta iniciativa más allá de la que se da en clase.	No tiene ninguna iniciativa y no muestra interés por los contenidos dados en la unidad.
Trabajo	Da muestras de una lectura de los materiales y demuestra adquisición de contenidos. Entrega las actividades.	Da muestras de una lectura de los materiales pero no demuestra adquisición de contenidos. No realiza la totalidad de las tareas.	Da muestras de no haber leído los materiales ni haber adquirido conocimientos. No realiza las tareas.
Interacción en grupo	Participa activamente y con regularidad. Sus intervenciones son correctas y oportunas.	Participación irregular. Sus intervenciones son escasas y aportan poco al intercambio de ideas.	Participación insuficiente. Sus intervenciones son pobres y no respeta el turno de palabra de sus compañeros.