www.sapientia.uji.es | 138

Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació

Sergio Macario Vives

UNIVERSITAT JAUME I

Col·lecció «Sapientia», núm. 138

EXERCICIS RESOLTS I COMENTATS DE FONAMENTS MATEMÀTICS APLICATS A L'EDIFICACIÓ

Sergio Macario Vives

DEPARTAMENT: Matemàtiques

■ Codi d'assignatura ED0902 FONAMENTS MATEMÀTICS APLICATS A L'EDIFICACIÓ

UNIVERSITAT JAUME I

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Correcció lingüística: Servei de Llengües i Terminologia, Universitat Jaume I

Col·lecció Sapientia 138
www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2018

ISBN: 978-84-17429-26-3
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

Aquest llibre, de contingut científic, ha estat avaluat per persones expertes externes a la Universitat Jaume I, mitjançant el mètode denominat revisió per iguals, doble cec.

ÍNDEX

5 Càlcul diferencial

6 Aplicacions del càlcul diferencial

7 Càlcul integral

8 Aplicacions de la integral definida

Bibliografia

Pròleg

Aquest text és indicat, en un principi, per a l'alumnat de primer curs dels estudis d'Arquitectura Tècnica; tot i que, pel seu contingut, pot emprar-se en altres estudis de ciències i tecnologia. En aquest sentit, el text recull la matèria objecte d'estudi en l'assignatura Fonaments Matemàtics de l'Arquitectura Tècnica que s'imparteix al primer semestre de primer curs del grau en Arquitectura Tècnica de la Universitat Jaume I. El text consisteix en una col·lecció d'exercicis resolts sobre alguns temes, de caràcter bàsic, de les matemàtiques que s'imparteixen a les branques de tecnologia i arquitectura. Per fixar la notació emprada als exercicis, s'inclou també un resum teòric de la matèria juntament amb exemples que poden ajudar a entendre millor els conceptes. Per aquest motiu, també poden fer-se servir com apunts de classe.

Com el text ha estat dissenyat per al seu ús en dispositius electrònics (amb visor PDF), s'ha triat un codi de colors per tal de facilitar-ne la consulta i poder accedir-hi amb major rapidesa al contingut desitjat (definició, exemple, teorema, comentari, exercici, etc.). Amb aquesta finalitat, els exemples i exercicis, així com les definicions i teoremes, també s'han emmarcat, per assenyalar el principi i la fi de l'activitat respectiva. També hauria de ser possible la navegació per dintre del document mitjançant els enllaços proporcionats al text (referències, fórmules, etcètera).

A continuació, es descriu breument cadascun dels capítols en què s'ha dividit el text. Aquesta selecció de continguts no és, òbviament, exhaustiva. D'una banda, la duració del curs on s'imparteix, un semestre amb seixanta hores de classe presencial, limita la quantitat i la profunditat en què s'han d'explicar els continguts. D'altra banda, en el cas concret dels estudis a la Universitat Jaume I, la participació de l'assignatura en un programa transversal de primer curs amb la metodologia d'aprenentatge basat en problemes (vegeu l'article [5]) on l'estudiantat ha de fer un estudi real sobre una construcció tradicional, fa que s'hagi donat més importància a uns temes que a altres (per exemple, el càlcul diferencial i integral davant els temes clàssics de l'àlgebra lineal).

El primer capítol recull els conceptes bàsics sobre operacions amb vectors (al pla i a l'espai). Permet de fixar la notació que s'emprarà, sobretot, al capítol següent: rectes i plans. A més a més, enllaça amb l'assignatura de Física, on es fa un ús intensiu d'aquests conceptes.

El segon capítol és un recordatori simplificat d'alguns conceptes que l'alumnat hauria de saber sobre la geometria afí i euclídea. Però no aborda amb profunditat tots els conceptes; sinó que intenta familiaritzar-los amb les equacions de rectes i plans i donar-los fluïdesa amb el seu ús.

El tercer capítol introdueix les transformacions geomètriques al pla, que servirà, a banda de treballar les matrius, per entendre millor els desplaçaments de les còniques de la seva posició estàndar. Les còniques s'estudien al quart capítol. Malauradament, no es pot completar l'estudi de les còniques amb les còniques rodades perquè caldria introduir-hi la diagonalització de matrius i, en conseqüència, alguns conceptes d'espais vectorials, els quals s'han deixat fora per la limitació temporal comentada.

El capítol cinquè fa referència als conceptes del càlcul diferencial en diverses variables. A vegades es fa referència al concepte equivalent en el càlcul diferencial d'una variable (per exemple, la derivada, la recta tangent). S'han suprimit les referències a alguns dels teoremes clàssics. El capítol sisè tracta algunes de les aplicacions del càlcul diferencial. Principalment, taxes de creixement, tractament de l'error, màxims i mínims.

El capítol setè aborda la construcció de la integral de Riemann i la seva relació amb la integral indefinida. Es veuen alguns mètodes de càlcul de primitives. El capítol vuitè tracta les aplicacions de la integral al càlcul d'àrees i, principalment, càlcul de volums pel mètode de les seccions transversals d'àrea coneguda. L'èmfasi en aquest mètode ve motivat, precisament, per la seva utilització en amidaments reals de volums en l'estudi de construccions tradicionals (vegeu l'exercici 8.5.9).

Cada capítol acaba, a més a més, amb una col·lecció d'exercicis resolts i comentats. Aquests comentaris, fàcilment distingibles al llarg del text, pretenen posar èmfasi en alguns aspectes en què cal parar atenció en la resolució de l'exercici, sigui per destacar-ne algun pas important o per incidir en el raonament d'on se'n dedueix el resultat. També s'han incorporat, al llarg dels capítols, exercicis resolts amb un programari de càlcul numèric i simbòlic (s'ha triat, per fer-los, el programari lliure wxMaxima). Es poden distingir fàcilment pel color verd que els emmarca. L'objectiu d'aquest exercicis és fer palesa la utilitat de les ferramentes informàtiques actuals per facilitar la tasca d'aprofundir en el coneixement dels conceptes i idees que s'han de treballar. D'aquesta manera, l'alumnat pot centrar-se en el plantejament de l'exercici i no tant en la resolució manual de les operacions involucrades.

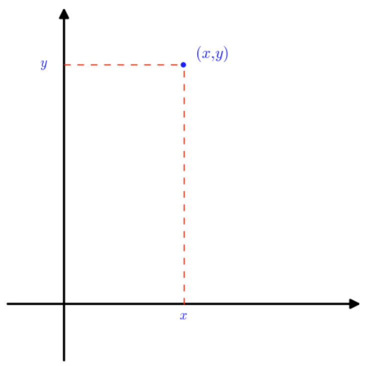
Finalment, cal afegir que aquest text ha estat realitzat dintre del programa per a l'elaboració i publicació de materials docents lliures de la Universitat Jaume I i ha gaudit d'una ajuda econòmica a càrrec del Vicerectorat de Campus, Infraestructures i Noves Tecnologies (projecte UJI VIRTUAL). A més, agrair l'àrbitre que ha revisat el text pels seus comentaris i observacions que l'han millorat substancialment. També agrair el Servei de llengües i Terminologia de la Universitat Jaume I per la seva acurada revisió.

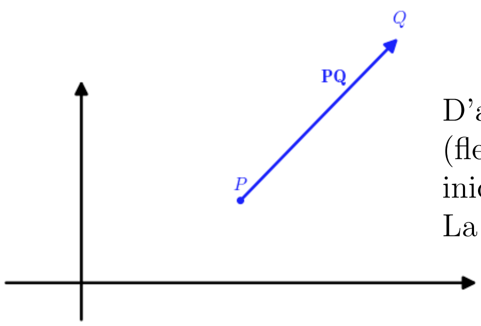
L'autor.
Castelló de la Plana, a 1 de setembre de 2018.

Vectors i matrius 1

1.1 Vectors

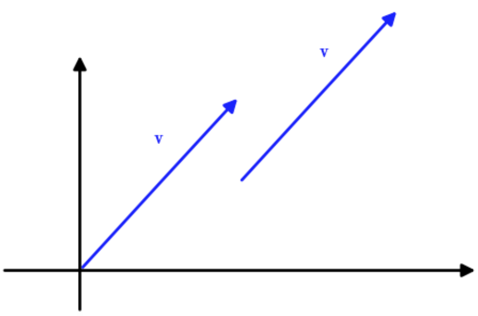
Al pla cartesià; és a dir, al pla amb un sistema de referència ortogonal, s'identifica cada punt amb una parella de coordenades (x, y) de la forma habitual.





D'altra banda, un vector és un segment orientat (fletxa). El vector **PQ** és el vector que té el punt inicial en el punt P i l'extrem final en el punt Q. La seva longitud es representa per $|\mathbf{PQ}|$.

Dos vectors són iguals si tenen la mateixa longitud i direcció. Per tant, un vector és independent del punt d'origen i extrem; és a dir, tal com indica la figura següent, el vector $\mathbf{v}$ és el mateix independentment d'on es trobi situat (té la mateixa longitud i apunta en la mateixa direcció i sentit).

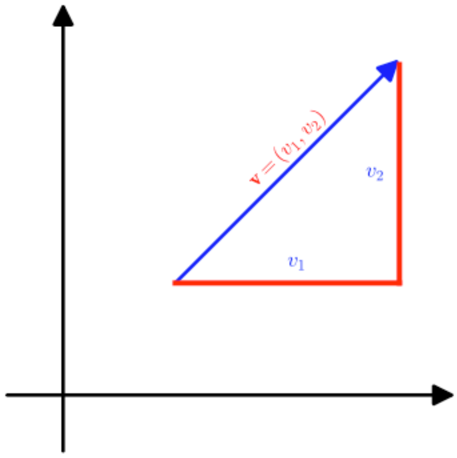


ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Qualsevol vector pot representar-se per una parella ordenada (v_1, v_2), com s'observa en la figura.
Qualsevol vector pot representar-se amb punt inicial l'origen de coordenades $O(0, 0)$ i extrem en un punt $Q(q_1, q_2)$ (el vector $\mathbf{OQ}$ s'anomena *vector de posició* del punt Q). En aquest cas, el vector $\mathbf{v} = \mathbf{OQ}$ es representa per les components

$$\mathbf{v} = (q_1, q_2)$$



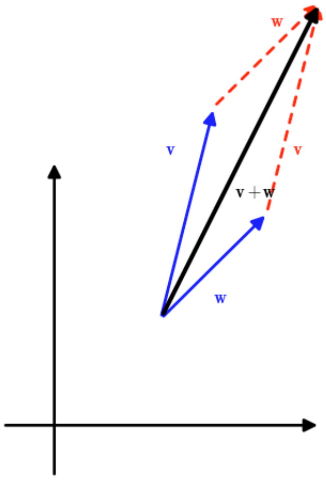
Llavors, un punt i un vector poden ser representats de la mateixa forma, per una parella ordenada, però conceptualment són coses ben distintes i cal aprendre a diferenciar-les.

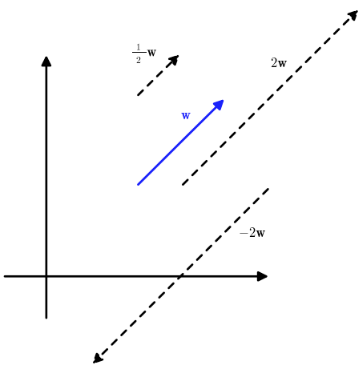
Els vectors es poden sumar, restar i multiplicar per un escalar.

Gràficament, la suma s'obté amb la regla del paral·lelogram.

Analíticament, la suma es realitza component a component

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

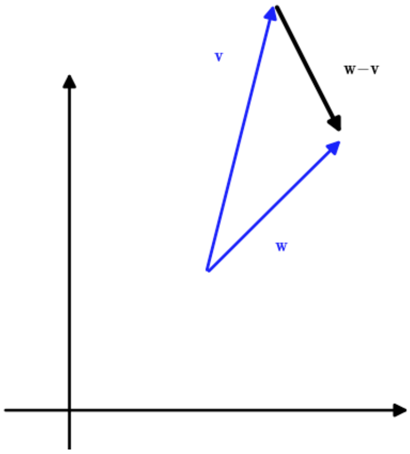




El producte per un escalar (nonmbre real) afecta sols la longitud però no n'altera la direcció. Si l'escalar és positiu, en manté el sentit i si és negatiu el canvia. Analíticament, es multiplica cada component per l'escalar $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot (v_1, v_2) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$$

La resta $\mathbf{w}-\mathbf{v}$ no és més que la suma a $\mathbf{w}$ de l'oposat $-\mathbf{v}$ i gràficament correspon a la diagonal indicada (pareu atenció al sentit del vector).



Exemple 1.1

La suma del vector $\mathbf{v} = (1, 2)$ i el vector $\mathbf{w} = (-2, 1)$ dóna com a resultat:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, 2) + (-2, 1) = (-1, 3)$$

El producte del vector $\mathbf{v} = (1, 2)$ per l'escalar $\lambda = 3$ dóna

$$3\mathbf{v} = 3(1, 2) = (3, 6)$$

Una combinació lineal dels vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots \mathbf{v}_n$, és una expresió de la forma

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots \lambda_n\mathbf{v}_n$$

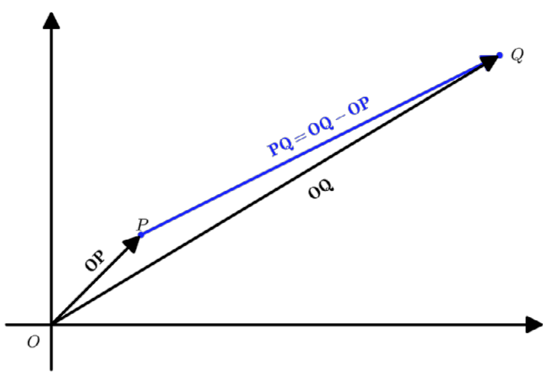
on λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_n$ són escalars.

Les combinacions lineals sortiran, entre d'altres, a l'estudi de matrius i determinants.

Si es considera un vector amb origen en $O(0, 0)$ i extrem $P(a, b)$, les seves components en el sistema cartesià de referència són, precisament, $\mathbf{OP} = (a, b)$. D'aquesta forma, qualsevol vector

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} - \mathbf{OP}$$

la qual cosa significa que el vector $\mathbf{PQ}$ pot calcular-se a partir de les coordenades dels punts P i Q.



Exemple 1.2

Si $P(1,2)$ i $Q(-1,1)$, llavors

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} - \mathbf{OP} = (-1,1) - (1,2) = (-2,-1)$$

Observeu que sembla que s'estan restant els punts Q i P; però en realitat aquesta operació no és possible, el que s'està restant són els vectors de posició (anomenats, també, radiovectors).

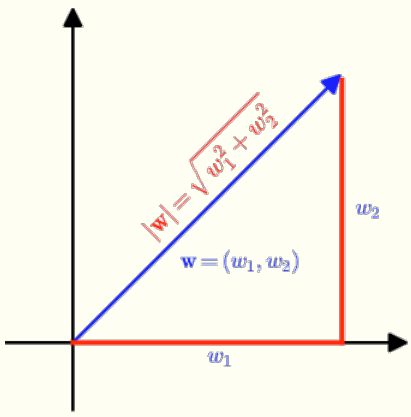
Tot allò que s'ha dit per a vectors de $\mathbb{R}^2$ es pot estendre a vectors de $\mathbb{R}^3$. Analíticament, sols és necessari afegir-hi una coordenada més.

Definició (Mòdul)

El mòdul d'un vector es defineix mitjançant la següent expressió:

- si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
- si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

La interpretació geomètrica del mòdul és senzilla: representa la seva longitud; com es pot veure a la figura següent, per al cas de dues variables.



Exemple 1.3

Si $\mathbf{v} = (1,2)$, llavors

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Si $\mathbf{w} = (-2, 3, 1)$, llavors

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

Algunes propietats del mòdul d'un vector, són

Propietats del mòdul

Siguin $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ vectors a $\mathbb{R}^n$ i α un escalar qualsevol. Es compleix:

1. $|\mathbf{u}| \geq 0$ i $|\mathbf{u}| = 0$ si, i només si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $|\alpha\mathbf{u}| = |\alpha||\mathbf{u}|$ (on $|\alpha|$ és el valor absolut de α)
3. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (desigualtat triangular)

Un *vector unitari* és aquell el mòdul o longitud del qual val 1. Observeu que, donat un vector no nul $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, sempre és possible obtenir un altre vector $\mathbf{u}$ unitari amb la mateixa direcció i sentit que $\mathbf{v}$; tan sols cal prendre $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Exemple 1.4

El vector $\mathbf{w} = (0, -3/5, 4/5)$ és unitari, atès que

$$|w| = \sqrt{0^2 + (-3/5)^2 + (4/5)^2} = 1$$

D'altra banda, el vector $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ no és unitari, atès que

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \neq 1$$

Finalment, el vector $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$ serà un vector unitari amb la mateixa direcció i sentit que $\mathbf{v}$.

Els vectors unitaris *estàndards* o *canònics* són els vectors unitaris en la direcció dels eixos coordenats. Qualsevol vector pot escriure's com a combinació lineal dels vectors unitaris canònics; per exemple, a $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0); \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0); \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

i el vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pot expressar-se de la forma següent:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

El concepte de mòdul d'un vector permet d'introduir un altre concepte important: la *distància* entre dos punts.

Definició (Distància)

Donats dos punts P i Q de $\mathbb{R}^3$, es defineix la distància entre tots dos com:

$$d(P, Q) := |\mathbf{PQ}| = |\mathbf{QP}|$$

Exemple 1.5

La distància entre els punts $P(1, 2, 3)$ i $Q(2, -1, 4)$ és:

$$d(P, Q) = |\mathbf{QP}| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-(-1))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

1.2 Producte escalar

Definició (Producte escalar)

Donats dos vectors del pla $\mathbb{R}^2$ o de l'espai $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$, es defineix el producte escalar de tots dos, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, de la manera següent:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos(\alpha)$$

sent α l'angle entre tots dos vectors (angle menor o igual que 180°).

Si es treballa amb un sistema de referència cartesià, aleshores, el producte escalar es pot calcular mitjançant les coordenades dels vectors. Per exemple, en el cas de $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Cal notar que el producte escalar de dos vectors dóna com a resultat un nombre real.

Exemple 1.6

Si $\mathbf{v} = (1, 2)$ i $\mathbf{w} = (2, -1)$, el producte escalar

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (1, 2) \cdot (2, -1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$$

Observeu que l'ordre del producte no importa; és a dir, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$.

Les propietats més rellevants d'aquest producte escalar són

Propietats del producte escalar

Siguin els vectors $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ i sigui α un escalar (nombre real) qualsevol. Es compleix:

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
3. $(\alpha\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\alpha(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot(\alpha\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$
5. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ si, i sols si, $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ (és a dir, el vector nul $\mathbf{u}=(0,0,0)$)

El producte escalar pot utilitzar-se per calcular l'angle entre dos vectors; com es veu al exemple següent.

Exemple 1.7

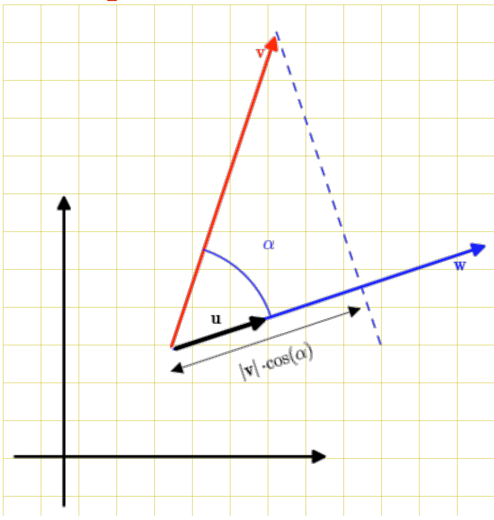
Es pretén calcular l'angle θ que formen entre ells els vectors $\mathbf{v}=(1,2,3)$ i $\mathbf{w}=(2,-1,4)$. De la fórmula del producte escalar s'obté

$$\cos(\theta)=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}=\frac{2-2+12}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\approx 0.69985$$

Per tant $\theta\approx\arccos(0.69985)\approx 0.7956\ rad$.

La interpretació geomètrica del producte escalar es pot trobar a l'exemple següent.

Exemple 1.8



Es desitja descompondre el vector $\mathbf{v}$ en la suma d'un vector paral·lel a w, $\mathbf{v}_p$, i un vector perpendicular a w, $\mathbf{v}_n$. Es comença trobant $\mathbf{v}_p$. La seva direcció la dona el mateix vector $\mathbf{w}$. Sols falta trobar la seva longitud. Però a la vista de l'esquema gràfic, la seva longitud ve donada per $|\mathbf{v}|\cos(\alpha)$ que resulta ser (llevat del signe) el producte escalar $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$, sent $\mathbf{u}$ un vector unitari en la direcció de $\mathbf{w}$.

Per exemple, si $\mathbf{v} = (1,2)$ i $\mathbf{w} = (1,1)$, l'angle α ve definit per

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$$

Així, $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. I, llavors, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\cdot(1,2) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, d'on

$$\mathbf{v}_p = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

i, en conseqüència, com ha de ser $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_n$, resulta

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p = (1,2) - \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Si el producte escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ fos negatiu, voldria dir que l'angle α és major de 90°. En aquest cas, el vector unitari $\mathbf{u}$ hauria d'apuntar en direcció contrària. És a dir, el signe menys del producte escalar s'utilitzaria per canviar l'orientació del vector unitari $\mathbf{u}$. Per tant, en qualsevol cas, el vector $\mathbf{v}_p$ sempre es pot calcular mitjançant la fórmula:

$$\boxed{\mathbf{v}_p = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u}}$$

sent $\mathbf{u}$ un vector unitari en la direcció de $\mathbf{w}$. Equivalentment, es pot emprar la fórmula (que resulta d'escriure $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$):

$$\boxed{\mathbf{v}_p = \frac{(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{w}|^2}\,\mathbf{w}}$$

1.3 Vectors ortogonals

Si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, aleshores l'angle que formen els dos vectors és $\frac{\pi}{2}$ $(\cos(\theta) = 0)$; és a dir, les direccions dels dos vectors són perpendiculars. El concepte següent generalitza a $\mathbb{R}^3$ (i a espais de dimensió superior) aquesta idea de perpendicularitat.

Definició (Vectors ortogonals)

Donats $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ dos vectors , es diu que són ortogonals (perpendiculars) entre ells quan es compleix:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

Observeu que, segons la definició, el vector $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ és ortogonal a tot vector de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 1.9

Si se sap que els vectors $\mathbf{v} = (2, -1, 4)$ i $\mathbf{w} = (0, 3, m)$ són ortogonals, quant ha de valdre m?

Per ser ortogonals, ha de ser $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$; és a dir,

$$2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot m = 0$$

i aïllant s'obté $m = 3/4$.

- En el cas de dues coordenades, l'obtenció d'un vector ortogonal a un vector donat prèviament és senzilla de calcular: si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, llavors

$$\mathbf{w} = (-v_2, v_1) \quad \text{és ortogonal a } \mathbf{v}.$$

- En el cas de vectors de $\mathbb{R}^3$, hi ha més d'una direcció perpendicular (de fet hi ha tot un pla) i es veurà al tema següent com calcular-lo.
- D'altra banda, tant al pla $\mathbb{R}^2$ com a l'espai $\mathbb{R}^3$, dos vectors són paral·lels si, i sols si, les seves coordenades són proporcionals.

1.4 Matrius

El llenguatge que permet desenvolupar la teoria de l'àlgebra lineal el formen la teoria de matrius i determinants. Un bon coneixement d'aquests conceptes permetrà de facilitar tots els càlculs que són requerits en els temes posteriors.

Definició (Matriu)

Una matriu real d'ordre $m \times n$ és un conjunt ordenat de $m \cdot n$ nombres reals disposats en un quadre de m files i n columnes; és a dir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$

(L'índex ij denota precisament quina posició ocupa l'element a_{ij} a la matriu).

Usualment, s'utilitzaran les primeres lletres majúscules de l'abecedari per representar les matrius, A, B, $\ldots$; i la corresponent lletra minúscula per representar els elements; $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], \ldots$

El conjunt de totes les matrius d'ordre $m \times n$ es representarà per $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; i així la frase "A és una matriu real d'ordre $m \times n$" s'expressarà, abreujadament, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Dues matrius són iguals si són iguals els elements que ocupen la mateixa posició (i, per tant, han de tenir el mateix ordre).

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ s'anomena

- vector fila de A a $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$
- vector columna de A a $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Tipus de matrius

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,

- Si $m = 1$, A es diu matriu fila
- Si $n = 1$, A es diu matriu columna
- Si $m = n$, A es diu matriu quadrada (i s'escriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)
- Si $p = \min\{m, n\}$, els elements $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}\}$ formen la *diagonal principal* de A
- A es diu triangular superior si els elements per sota de la diagonal principal són nuls, i.e., si $a_{ij} = 0$ quan $i > j$
- A es diu triangular inferior si els elements per sobre de la diagonal principal són nuls, i.e., si $a_{ij} = 0$ quan $i < j$
- A es diu diagonal si A és quadrada i els elements fora de la diagonal principal són nuls, i.e., si $a_{ij} = 0$ quan $i \neq j$
- Si $A = [a_{ij}]$ s'anomenarà transposada de A a la matriu $A^t = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ on $b_{ij} = a_{ji}$
- A es diu simètrica si $A^t = A$
- A es diu antisimètrica si $A^t = -A$
- S'anomenarà matriu identitat d'ordre n, I_n, a la matriu diagonal la diagonal principal de la qual són 1.

Exemple 1.10

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, la seva matriu transposada és

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transposar una matriu equival a canviar files per columnes

Operacions amb matrius

Siguin $A = [a_{ij}]$, $\quad B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Es defineix

- $A + B = [c_{ij}]$, on $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (suma component a component)
- $\lambda{\cdot}A = [c_{ij}]$, on $c_{ij} = \lambda{\cdot}a_{ij}$ (producte d'un escalar per cada component)

Si ara $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ i $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ es defineix $A \cdot B = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$, on

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

(producte escalar del vector fila A_i pel vector columna B^j)

Exemple 1.11

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.12

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; s'observa que es pot realitzar el producte

$$B_{2\times 2} \cdot A_{2\times 3}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Segons la fórmula del producte de matrius, en multiplicar una fila de la matriu B per una columna de la matriu A, s'obtindrà el corresponent element de la matriu producte $B \cdot A$. Per exemple, en multiplicar la primera fila de B per la primera columna de la matriu A s'obtindrà l'element c_{11} de la matriu producte:

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

$$1\cdot 1 \;+\; (-1)\cdot 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & -3 & -3 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

L'element c_{12} s'obtindrà en multiplicar la primera fila de B per la segona columna de A:

$$1\cdot 2 \;+\; (-1)\cdot 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \boxed{-3} & -3 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

i així successivament.

Observeu que sols es poden sumar matrius del mateix ordre, però es poden multiplicar matrius d'ordres diferents. Ara bé, per poder multiplicar-les, han de complir, respecte de l'ordre, la regla:

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$$

El producte té algunes particularitats:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$, en general.
- $A \cdot I = A$, per a qualsevol matriu A.
- $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow \quad A = 0 \;\vee B = 0$.

Definició (Matriu inversa)

Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diu *regular* o *invertible* si

$$\exists\; B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\;/\;\; A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Si tal matriu B existeix és única i rep el nom de *matriu inversa* de A i es denotarà per $B = A^{-1}$

El càlcul de la matriu inversa, quan existeix, es veurà a la següent secció.

1.5 Determinants

Definició (Determinant)

A tota matriu quadrada A se li associa un número (de $\mathbb{R}$) anomenat el determinant de A, que es representarà per $det(A)$ o $|A|$ i que ve definit, recursivament, de la següent forma:

Si $A = (a)_{1\times 1}$ definim $det(A) = a$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$ es defineix $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Per a matrius d'ordre superior a 2 s'utilitza el **desenvolupament de Laplace**: si $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es defineix

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad j \in \{1, 2, ..., n\}$$

on Δ_{ij} és el determinant de la matriu que queda en eliminar de A la fila i–èsima i la columna j–èsima.

Aquest desenvolupament és independent de quina fila es triï per fer-lo (i també es pot fer per columnes).

Per a determinants d'ordre 3 hi ha una fórmula, anomenada la *regla de Sarrus*, que permet de calcular-lo directament. Es veu, a continuació, amb un exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 225 - 225 = 0 \quad \text{(els càlculs es detallen a sota)}$$

Primerament es multipliquen les diagonals en sentit de la diagonal principal (color blau) i després les diagonals en sentit contrari (color roig). S'indica a l'exemple cadascun dels productes que formen els sumands implicats.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Per la seva rapidesa en calcular determinants 3×3, és convenient practicar aquesta metodologia fins assolir fluïdesa en la seva utilització.

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix} = \Big[\ \overbrace{1\cdot5\cdot9}^{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}} + \overbrace{4\cdot8\cdot3}^{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}} + \overbrace{2\cdot6\cdot7}^{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}}\ \Big]$$

$$- \Big[\ \underbrace{3\cdot5\cdot7}_{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}} + \underbrace{6\cdot8\cdot1}_{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}} + \underbrace{2\cdot4\cdot9}_{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}}\ \Big]$$

$$= 225 - 225 = 0$$

Exemple 1.13

Per a determinants 2×2, n'hi ha prou d'emprar la definició:

Determinant 2×2

$$\begin{vmatrix}1&3\\-1&2\end{vmatrix} = 1\cdot2-(-1)\cdot3 = 2+3 = 5$$

Per a determinants 3×3, es pot utilitzar l'anomenada *Regla de Sarrus*:

Determinant 3×3

$$\begin{vmatrix}1&3&-1\\1&1&1\\0&-1&2\end{vmatrix} = [1\cdot1\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)+3\cdot1\cdot0]$$

$$-[0\cdot1\cdot(-1)+1\cdot(-1)\cdot1+1\cdot3\cdot2]$$

$$= [2+1+0]-[0-1-6] = 10$$

Per a determinants d'ordre 4×4 o superior, cal utilitzar el desenvolupament de Laplace. A l'exemple següent, s'utilitza a la primera fila (que conté dos zeros) i es redueix a calcular dos determinants 3×3:

Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Determinant 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= ([-1-1+2]-[1+2+1])$$
$$+(-2)([2-3+2]-[-1+4+3])$$
$$= -4-2(1-6) = 6$$

A continuació s'enumeren les propietats més rellevants dels determinants.

Propietats dels determinants

- $det(A^t) = det(A)$

  Per aquesta raó, allò que ara es dirà per a files també és vàlid per a columnes:

- Si en una matriu A es permuten dues files entre si, el determinant d'aquesta nova matriu és $-det(A)$.

- Si en una matriu A es multiplica una fila per un element $\lambda \in \mathbb{R}$, el determinant d'aquesta nova matriu és $\lambda \cdot det(A)$

- El determinant d'una matriu és nul si, i solament si, les seues files són linealment dependents.

- Si en una matriu A es canvia una fila per ella mateixa més una combinació lineal d'altres files, el determinant de la nova matriu és igual a $det(A)$

- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

- A és invertible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$, i en aquest cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (adj\ A^t)$$

  on $adj(A^t)$ és la matriu que resulta en canviar en A^t cada element a_{ij} per $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$; essent Δ_{ij} el determinant que resulta d'eliminar de la matriu A^t la fila i i la columna j. La matriu $adj(A^t)$ rep el nom de *matriu adjunta* de A^t i cada element $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ rep el nom d'*adjunt* a l'element a_{ij} de A^t.

Exemple 1.14

Per a una matriu 2×2, resulta senzill calcular la matriu inversa, si en té.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Com $det(A) = -2 \neq 0$, llavors existeix inversa A^{-1}. Es calcula en primer lloc la matriu transposada:

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

i, a continuació, es calculen els adjunts (elements de la matriu adjunta):

$(-1)^{1+1}\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \qquad (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$(-1)^{2+1}\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -3 \qquad (-1)^{2+2}\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1$

i ja es pot escriure la matriu inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6 Producte vectorial

Definició (Producte vectorial)

Donats dos vectors de $\mathbb{R}^3$, amb un sistema de referència cartesià,

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \quad \text{i} \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$$

es defineix el producte vectorial:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$$

- El producte vectorial es defineix sols per a vectors de $\mathbb{R}^3$.
- El producte vectorial de dos vectors és, de nou, un vector que, a més, resulta ser ortogonal a cadascun dels vectors del producte.

- Una forma de calcular el producte vectorial, sense necessitat de recordar la definició anterior, és utilitzant el determinant:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exemple 1.15

Si $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ i $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$, llavors

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-2)\mathbf{i}-(1+2)\mathbf{j}+(1-1)\mathbf{k} = -3\mathbf{i}-3\mathbf{j} = (-3, -3, 0)$$

i, es pot comprovar que, efectivament, és perpendicular a $\mathbf{v}$ i a $\mathbf{w}$.

Propietats del producte vectorial

- $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = -(\mathbf{w}\times\mathbf{v})$
- $(\alpha\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{v}\times(\alpha\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$
- $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$
- $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ (són paral·lels)

1.7 Exercicis resolts

Exercici 1.7.1 Donats els vectors $\mathbf{v} = (2, -3, 5)$ i $\mathbf{w} = (2, 1, -1)$, calculeu (a) $\mathbf{v}+2\mathbf{w}$; (b) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$; (c) $|\mathbf{v}+\mathbf{w}|$; (d) $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

Solució:

(a) $\mathbf{v}+2\mathbf{w} = (2, -3, 5) + 2(2, 1, -1) = (2, -3, 5) + (4, 2, -2) = (6, -1, 3)$.

(b) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (2,-3,5)\cdot(2,1,-1) = 2\cdot 2+(-3)\cdot 1+5\cdot(-1) = 4-3-5 = -4.$

(c) $|\mathbf{v}+\mathbf{w}| = |(2,-3,5)+(2,1,-1)| = |(4,-2,4)| = \sqrt{4^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{20}.$

(d) $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{(2,-3,5)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{38}}, -\dfrac{3}{\sqrt{38}}, \dfrac{5}{\sqrt{38}}\right).$

Exercici 1.7.2 Calculeu l'angle entre els vectors següents:

a) $\mathbf{v} = (1,0)$ i $\mathbf{w} = (1,1)$;

b) $\mathbf{v} = (1,0,2)$ i $\mathbf{w} = (0,1,1)$;

c) $\mathbf{v} = (1,1,2)$ i $\mathbf{w} = (-1,1,-1)$.

Solució: En tots ells n'hi ha prou d'aplicar la fórmula

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}}$$

a) $\cos(\alpha) = \dfrac{(1,0)\cdot(1,1)}{|(1,0)|\,|(1,1)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$
d'on $\alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}\,rad.$

b) $\cos(\alpha) = \dfrac{(1,0,2)\cdot(0,1,1)}{|(1,0,2)|\,|(0,1,1)|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}\,\sqrt{2}},$
d'on $\alpha \approx 0.8861\,rad.$

c) $\cos(\alpha) = \dfrac{(1,1,2)\cdot(-1,1,-1)}{|(1,1,2)|\,|(-1,1,-1)|} = \dfrac{-2}{\sqrt{6}\,\sqrt{3}},$
d'on $\alpha \approx 2.0617\,rad.$

Recordeu que $\cos(\alpha) > 0$ vol dir que l'angle és inferior a $90° = \dfrac{\pi}{2}\,rad$. Mentre que $\cos(\alpha) < 0$ implica que l'angle és superior a $90° = \dfrac{\pi}{2}\,rad$. ($\pi/2 \approx 1.5708$).

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3

Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Exercici 1.7.3 Siguin els vectors $\mathbf{v} = (1, 2)$ i $\mathbf{w} = (-2, \alpha)$. Determineu el valor del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ en cadascún dels casos següents

1. $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ són perpendiculars.
2. $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ són paral·lels.
3. $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ formen angle de 30°.
4. $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ tenen el mateix mòdul.

Hi ha algun valor de α que faci que es compleixin simultàniament dues o més de les condicions anteriors?

Solució:

1. En ser perpendiculars, el seu producte escalar ha de valdre 0; és a dir,
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (1, 2) \cdot (-2, \alpha) = -2 + 2\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 1.$$
2. En ser paral·lels, les seves coordenades han de ser proporcionals, llavors
$$\frac{1}{-2} = \frac{2}{\alpha} \;\Rightarrow\; \alpha = -4.$$
3. En formar angle de 30°, s'ha de complir
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(30°)$$
és a dir,
$$-2 + 2\alpha = \sqrt{5}\,\sqrt{4 + \alpha^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}\,\sqrt{4 + \alpha^2}}{2}$$
d'on, elevant al quadrat tots dos termes,
$$(-2 + 2\alpha)^2 = \frac{15(4 + \alpha^2)}{4}$$
i, operant,
$$4(4 + 4\alpha^2 - 8\alpha) = 15(4 + \alpha^2)$$
$$16 + 16\alpha^2 - 32\alpha = 60 + 15\alpha^2$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

s'arriba a l'equació de segon grau

$$\alpha^2 - 32\alpha - 44 = 0$$

que admet les solucions $\alpha = 16 \pm 10\sqrt{3}$. La solució $\alpha = 16 - 10\sqrt{3}$ no és vàlida atès que, en aquest cas, el producte escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -2 + 2\alpha$ és negatiu i no compliria:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(30°) > 0$$

Per tant, l'única solució vàlida és $\alpha = 16 + 10\sqrt{3}$.

Recorda que, quan en una equació s'eleven al quadrat tots dos termes, s'hi poden afegir solucions que no hi eren inicialment. Per tant, s'ha de comprovar que les solucions obtingudes verifiquen l'equació inicial.

4. En tenir el mateix mòdul, a partir de l'equació

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| \;\Rightarrow\; \sqrt{5} = \sqrt{4 + \alpha^2},$$

elevant al quadrat tots dos termes,

$$5 = 4 + \alpha^2$$

d'on s'obtenen les solucions $\alpha = \pm 1$, que són ambdues vàlides.

En cas de ser $\alpha = 1$, s'acompleixen simultàniament (1) i (4); és a dir, els dos vectors són perpendiculars i tenen el mateix mòdul.

Exercici 1.7.4 Donat els vectors $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$ i $\mathbf{w} = (3, 1, 1)$

(a) Calculeu l'angle entre ambdós vectors.

(b) Suposant tots dos vectors amb punt d'origen en el $O(0, 0, 0)$, calculeu la projecció ortogonal del vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{w}$.

Solució:

(a) N'hi ha prou d'aplicar la fórmula:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}}$$

d'on l'angle α és el definit per

$$\cos(\alpha) = \frac{3 + 1 - 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{11}}$$

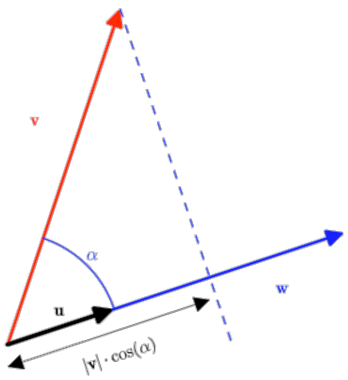
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

(b) Es pot aplicar la fórmula de l'Exemple 1.8 de la pàgina 14:

$$\boxed{\mathbf{v}_p = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\ \mathbf{u}}$$

o es pot deduir de l'esquema gràfic:



En ser $\cos(\alpha) > 0$ (apartat (a)), l'angle α ha de ser menor de 90° i l'esquema gràfic mostrat és acurat. Així, la direcció de $\mathbf{v}_p$ és la de $\mathbf{w}$; és a dir, $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{(3,1,1)}{\sqrt{11}}$. D'altra banda la seva longitud ve determinada per

$$|\mathbf{v}| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{11}}$$

i així,

$$\mathbf{v}_p = |\mathbf{v}_p|\mathbf{u} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{11}} \cdot \frac{(3,1,1)}{\sqrt{11}} = \frac{3}{11}(3,1,1)$$

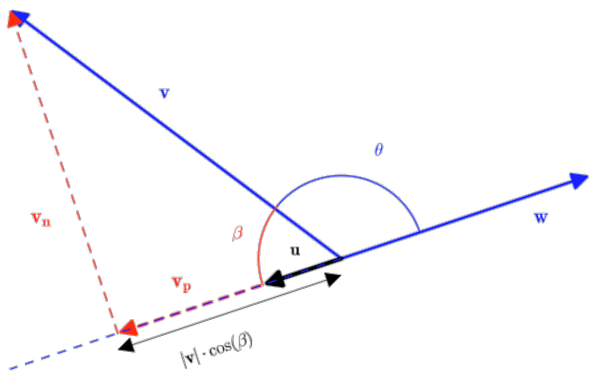
Exercici 1.7.5 Expresseu el vector $\mathbf{v}$ com suma d'un vector paral·lel a $\mathbf{w}$ més un vector perpendicular a $\mathbf{w}$, essent $\mathbf{v} = (1,-2,3)$ i $\mathbf{w} = (1,3,-2)$.

Solució: N'hi ha prou amb calcular el vector paral·lel a $\mathbf{w}$. Es comença calculant l'angle θ entre tots dos vectors. Aplicant la fórmula

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}}$$

s'obté

$$\cos(\theta) = \frac{1-6-6}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} = -\frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{11}{14}$$



Ara, en ser $\cos(\theta) < 0$, l'angle ha de ser major de 90° i l'esquema gràfic mostrat és acurat. Així, la direcció de $\mathbf{v}_p$ és la de $-\mathbf{w}$; és a dir,

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = -\frac{(1,3,-2)}{\sqrt{14}}$$

D'altra banda, la seva longitud ve determinada per

$$|\mathbf{v}|\cdot\cos(\beta) = -|\mathbf{v}|\cdot\cos(\theta) = \sqrt{14}\cdot\frac{11}{14}$$

i així, $\quad \mathbf{v}_p = \sqrt{14}\cdot\frac{11}{14}\cdot\frac{(-1,-3,2)}{\sqrt{14}} = \frac{11}{14}(-1,-3,2)$

Finalment, com ha de ser $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_n$, es calcula

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p = (1,1,-1) - \frac{3}{11}(3,1,1) = (\frac{2}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{14}{11})$$

Exercici 1.7.6 Calculeu la matriu inversa, si en té, de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: Com que $det(A) = -1-2 = -3 \neq 0$, llavors existeix inversa A^{-1}. Per calcular-la, n'hi ha prou d'aplicar la fórmula

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\cdot adj\ (A^t)}$$

Es calcula, primerament, la matriu transposada de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Ara, es calculen els adjunts (elements de la matriu adjunta):

$$(-1)^{1+1}\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$(-1)^{2+1}\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad (-1)^{2+2}\Delta_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

i ja es pot escriure la matriu inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercici 1.7.7 Calculeu la matriu inversa, si en té, de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solució: Primerament es calcula el determinant de A per garantir que n'existeix inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$- [0 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1)] = 5 - (-1) = 6 \neq 0$$

llavors existeix inversa A^{-1}. Per calcular-la, n'hi ha prou d'aplicar la fórmula

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj\ (A^t)}$$

Es calcula, primer, la matriu transposada de A

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ara, es calculen els adjunts (elements de la matriu adjunta). En aquest cas, cada adjunt és un determinant 2×2, per exemple

$$(-1)^{1+1}\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Es procedeix de forma similar per a la resta de la primera fila.

$$(-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad (-1)^{1+3}\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Ara, per a la segona fila,

$$(-1)^{2+1}\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad (-1)^{2+2}\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(-1)^{2+3}\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

I per a la tercera fila,

$$(-1)^{3+1}\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad (-1)^{3+2}\Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$(-1)^{3+3}\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Així, la matriu adjunta seria $adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ i ja es pot escriure la matriu inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercici 1.7.8 Calculeu el valor del paràmetre a perquè $det(A) = 0$ on

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 2 & -1 \\ 2 & 2-a & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: Es calcula, doncs, el determinant de la matriu A

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-a & 2 & -1 \\ 2 & 2-a & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= (1-a)(2-a)0 + 2(-1)(-1) + 2(-1)(-1) \\ &- [(-1)(2-a)(-1) + (-1)(-1)(1-a) + 2\cdot 2\cdot 0] \\ &= 4 - (2-a) - (1-a) = 1 + 2a = 0 \end{aligned}$$

d'on $a = -\frac{1}{2}$.

Exercici 1.7.9 Calculeu la matriu X que verifica $XA - 2B = C^t$, essent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Solució: Es tracta d'aïllar X de l'equació matricial donada:

$$XA - 2B = C^t \;\Rightarrow\; XA = 2B + C^t$$

Ara, per aïllar X es multipliquen tots dos costats per A^{-1} (que existeix perquè $det(A) \neq 0$). Pareu atenció que s'ha de multiplicar per la dreta, atesa la posició de la matriu A en el terme XA.

$$XA = 2B + C^t \;\Rightarrow\; X\underbrace{AA^{-1}}_{I} = (2B + C^t)A^{-1} \Rightarrow \underbrace{XI}_{X} = (2B + C^t)A^{-1}$$

per la qual cosa s'arriba a

$$X = (2B + C^t)A^{-1}$$

i l'únic que resta ara és calcular la matriu de la part dreta de l'equació. D'una banda,

$$2B + C^t = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

D'altra banda, es calcula A^{-1} mitjançant la fórmula

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj\ (A^t)}$$

En primer lloc, el determinant de A és $det(A) = -1 \neq 0$ que garanteix l'existència de matriu inversa. Ara la matriu transposada de A és

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i la matriu adjunta d'aquesta $adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalment, en aplicar la fórmula de la matriu inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ara ja es pot calcular la matriu X demanada:

$$X = (2B + C^t)A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercici 1.7.10 Calculeu el producte vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ i el mòdul $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$ dels vectors $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ i $\mathbf{w} = (1, 1, -2)$.

Solució: Es calcula, en primer lloc, el producte vectorial emprant el determinant que s'indica a continuació.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\
&= (1, 3, 2)
\end{aligned}
$$

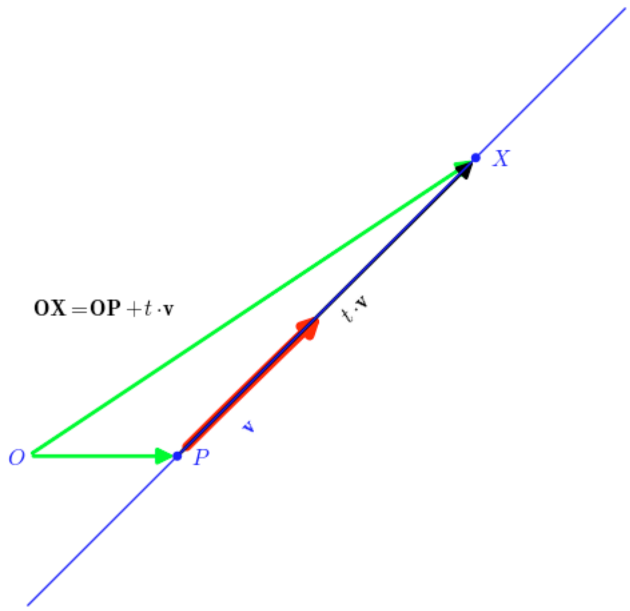
Tot i ser un determinant 3×3, resulta més pràctic emprar el desenvolupament de Laplace per la primera fila, en comptes d'emprar la regla de Sarrus. Així,

$$
\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}
$$

Ara, el mòdul és $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |(1, 3, 2)| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

Rectes i plans 2

2.1 Equacions d'una recta al pla



De manera intuïtiva, sembla clar que dos punts del pla $\mathbb{R}^2$ determinen de manera unívoca una recta r (la que passa per tots dos). Una recta en el pla també pot ser determinada per un punt de pas i un vector que marqui la direcció de la recta (vector director). Com es veurà a continuació, les equacions d'una recta r poden prendre diferents expressions equivalents.

Equació vectorial.
Donats un punt $P(p_1, p_2)$ de la recta r i el vector director $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, qualsevol altre punt $X(x, y)$ de la recta r verificarà l'equació:

$$\boxed{X = P + t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Equacions paramètriques.

L'equació vectorial es pot reescriure com segueix:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t \cdot (v_1, v_2) \quad \Rightarrow \; (x, y) = (p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2)$$

expressió equivalent al sistema d'equacions següent:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{array}\right\} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

Equació contínua.

Aïllant el paràmetre t a les equacions anteriors, s'arriba a les equacions contínues de r:

$$\boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}}$$

sempre que $v_1 \neq 0 \neq v_2$. En cas que, per exemple, $v_1 = 0$, l'equació contínua es redueix a $x - p_1 = 0$ (recta vertical). Si $v_2 = 0$, l'equació contínua es redueix a $y - p_2 = 0$ (recta horitzontal).

Equació punt-pendent.

Aïllant el numerador $y - p_2$ de l'expressió anterior s'arriba a l'equació punt-pendent:

$$\boxed{y - p_2 = m \cdot (x - p_1)}$$

on $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ és el pendent de r.

Equació explícita.

També, aïllant la variable y s'arriba a l'equació explícita de la recta

$$\boxed{y = mx + n}$$

Cal recordar aquí que el pendent d'una recta m és igual també a $\tan(\alpha)$; sent α l'angle que forma la recta amb el semieix positiu de OX.

Equació general.

També és possible desenvolupar l'expressió contínua de la manera següent:

$$v_2 x - v_1 y - v_2 p_1 + v_1 p_2 = 0$$

De manera genèrica:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

on $A = v_2$, $B = -v_1$ i $C = -v_2 p_1 + v_1 p_2$.

Convé notar que donada una recta d'equació $Ax + By + C = 0$, el vector (A, B) és ortogonal a la recta.

Exemple 2.1

Sigui r la recta que passa pel punt $P(1, 2)$ i la direcció de la qual és donada pel vector $\mathbf{v} = (1, -2)$.

- Equació vectorial: $(x, y) = (1, 2) + k(1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$
- Equacions paramètriques: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + k \\ y = 2 - 2k \end{array}\right\} \quad k \in \mathbb{R}$
- Equació contínua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2}$
- Equació explícita: $y = -2x + 4$
- Equació general: $2x + y - 4 = 0$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

A l'exemple anterior s'ha vist que donat un punt i un vector és poden calcular les equacions de la recta que siguin necessàries. Es veu ara el cas contrari: donada una equació, es pot determinar un punt i un vector director.

Exemple 2.2

Sigui r la recta d'equació $y = 2x + 3$. Es desitja trobar un punt de la recta i un vector director.

En aquest cas, la forma més senzilla és trobar dos punts de la recta; és a dir, dos parelles de valors $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ que compleixen l'equació de la recta. Donant, per exemple, els valors $x = 0$ i $x = 1$ s'obté:

$$\begin{array}{lcccc} x = 0 & \xrightarrow{y=2x+3} & y = 3 & \longrightarrow & P(0,3) \\ x = 1 & \xrightarrow{y=2x+3} & y = 5 & \longrightarrow & Q(1,5) \end{array}$$

d'on es pot calcular el vector director $\mathbf{PQ} = (1,5) - (0,3) = (1,2)$. Així doncs, la recta r ve determinada pel punt $P(0,3)$ i el vector $\mathbf{v} = (1,2)$.

Una altra forma de trobar un punt i un vector director és calcular-ne les equacions paramètriques. En aquest exemple, com $y = 2x + 3$, anomenant $x = t$ (t serà el paràmetre real) i substituint a l'equació de la recta, s'obté

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t + 3 \end{array}\right\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

que proporciona el punt $P(0,3)$ i el vector director $\mathbf{v} = (1,2)$.

Recordeu que, en les equacions paramètriques, els coeficients del paràmetre t determinen les components del vector director $\mathbf{v}$; mentre que els termes independents són les coordenades del punt.

ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

2.2 Equacions d'un pla a l'espai

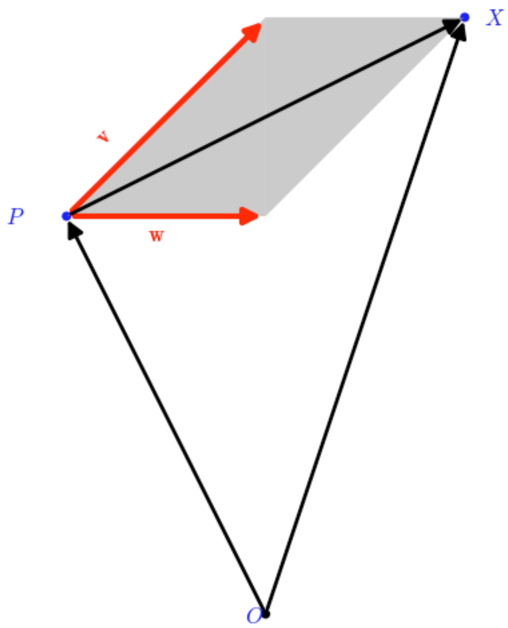
L'equació d'un pla π a l'espai $\mathbb{R}^3$ és determinada per un punt del pla, $P(p_1, p_2, p_3)$, i dos vectors no nuls i no proporcionals (és a dir, no paral·lels), $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. És possible considerar diferents expressions equivalents per a l'equació d'un pla a l'espai.

Equació vectorial.
La condició perquè el punt $X(x, y, z)$ pertanyi al pla és que el vector

$$\mathbf{PX} = \mathbf{OX} - \mathbf{OP}$$

sigui combinació lineal dels vectors $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Qualsevol altre punt $X(x, y, z)$ del pla π pot ser expressat en la forma següent

$$\boxed{X = P + t \cdot \mathbf{v} + s \cdot \mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}}$$



A partir de l'equació vectorial s'obtenen les

Equacions paramètriques.

$$\left.\begin{aligned} x &= p_1 + tv_1 + sw_1 \\ y &= p_2 + tv_2 + sw_2 \\ z &= p_3 + tv_3 + sw_3 \end{aligned}\right\} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Equació general.

Tenint en compte que els vectors **PX**, **v** i **w** són linealment dependents, ha de complir-se

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

d'on s'obté una expressió de la forma

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Exemple 2.3

Sigui π el pla que passa pel punt $P(1,2,3)$ i té per vectors directors $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ i $\mathbf{v} = (0,1,1)$. Llavors,

- Equació vectorial: $(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,0,-1) + s(0,1,1)$
- Equacions paramètriques: $\left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2+s \\ z &= 3-t+s \end{aligned}\right\} \quad t,s \in \mathbb{R}$
- Equació general: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z - 2 = 0$

A l'igual que el cas de la recta, convé saber com es pot treure un punt i dos vectors directors quan es coneix l'equació del pla.

Exemple 2.4

Sigui $\pi \equiv x - 2y + 3z = 4$. Es desitja trobar un punt del pla i dos vectors directors. N'hi ha prou a trobar-ne tres punts no alineats. S'aïlla la variable x de l'equació (per ser-hi la que té coeficient 1):

$$x = 2y - 3z + 4$$

i ara es donen valors a les variables y, z:

$$\begin{array}{llcl} y=0,\ z=1 & x=1 & \longrightarrow & P(1,0,1) \\ y=1,\ z=0 & x=6 & \longrightarrow & Q(6,1,0) \\ y=1,\ z=1 & x=3 & \longrightarrow & R(3,1,1) \end{array}$$

Finalment, és possible triar els vectors $\mathbf{PQ} = (5, 1, -1)$ i $\mathbf{PR} = (2, 1, 0)$ (perquè no són proporcionals). Així doncs, el pla π és determinat pel punt $P(1, 0, 1)$ i els vectors $\mathbf{v} = (5, 1, -1)$ i $\mathbf{w} = (2, 1, 0)$.

Convé observar que, donat un pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$, el vector (A, B, C) és ortogonal (perpendicular) al pla.

Exemple 2.5

Es desitja calcular l'equació del pla que passa pel punt $P(1, 0, -1)$ i és perpendicular al vector $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$. L'equació del pla serà de la forma

$$2x - y + 3z + D = 0$$

i com el punt P ha de pertanyer al pla, haurà de complir-se:

$$2 \cdot 1 - 0 + 3 \cdot (-1) + D = 0$$

és a dir, $D = 1$ i l'equació del pla és: $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Una altra forma, més ràpida, és tenir en compte que els vectors

$$\mathbf{PX} = (x - 1, y - 0, z + 1) \ \text{ i } \mathbf{n} = (2, -1, 3)$$

són perpendiculars i, llavors, s'ha de complir $\mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0$; és a dir,

$$2(x - 1) - (y - 0) + 3(z + 1) = 0$$

d'on, desfent els parèntesis, $2x - y + 3z + 1 = 0$.

2.3 Equacions d'una recta a l'espai

De manera similar a allò que esdevé a $\mathbb{R}^2$, tambe a l'espai $\mathbb{R}^3$ es poden considerar diverses expressions alternatives per a l'equació d'una recta r (la deducció d'aquestes expressions és anàloga al cas de $\mathbb{R}^2$).

Donat un punt $P(p_1, p_2, p_3)$ i un vector director $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, qualsevol altre punt $X(x, y, z)$ de la recta r verificarà: $X = P + t\mathbf{v}$, on $t \in \mathbb{R}$. D'aquesta manera, es poden treure les següents equacions:

Equació vectorial:

$$\boxed{(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3) \quad t \in \mathbb{R}}$$

Equacions paramètriques:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= p_1 + tv_1 \\ y &= p_2 + tv_2 \\ z &= p_3 + tv_3 \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}}$$

Equacions contínues:

$$\boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}}$$

sempre que $v_1 v_2 v_3 \neq 0$. Si, per exemple, $v_1 = 0$ i $v_2 v_3 \neq 0$, quedarien les equacions

$$x - p_1 = 0, \qquad \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

i, anàlogament, en la resta de casos.

Equació general:

Una recta a l'espai sempre ve determinada per la intersecció de dos plans; és a dir, l'equació general de la recta seria:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}}$$

Exemple 2.6

Sigui r la recta que passa pel punt $P(1, 2, 1)$ i la direcció de la qual és donada pel vector $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$.

- Equació vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(1, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$
- Equacions paramètriques: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 1 + 2k \end{array}\right\} \quad k \in \mathbb{R}$
- Equacions contínues: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$
- Equació general:

  A partir de les equacions contínues s'obté

$$-2x + 2 = y - 2 \quad \text{i} \quad 2y - 4 = -2z + 2$$

  Per tant,

$$\left.\begin{array}{r} -2x - y + 4 = 0 \\ 2y + 2z - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

De nou, donades les equacions d'una recta a l'espai, cal saber com es ot trobar un punt i un vector director. Aquest és el cas, dels tres estudiats, que, en general, requereix més feina.

Exemple 2.7

Sigui r la recta de la qual es coneixen les equacions

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=2 \\ x+2y+2z=4 \end{array}\right\}$$

En principi la idea és, com abans, trobar dos punts de la recta. Per facilitar la feina cal triangularitzar el sistema, eliminant una de les variables d'una de les equacions. Per exemple, multiplicant la primera equació per 2 i sumant-la amb la segona, s'elimina z:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y-2z=4 \\ x+2y+2z=4 \\ \hline 5x+4y \qquad =8 \end{array}\right\}$$

Així, es pot considerar el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x+\ \ y-z=2 \\ 5x+4y \qquad =8 \end{array}\right\}$$

i ara és suficient donar valor a x o a y. Per exemple,

$$x=0 \xrightarrow{5x+4y=8} y=2 \xrightarrow{2x+y-z=2} z=0 \quad P(0,2,0)$$

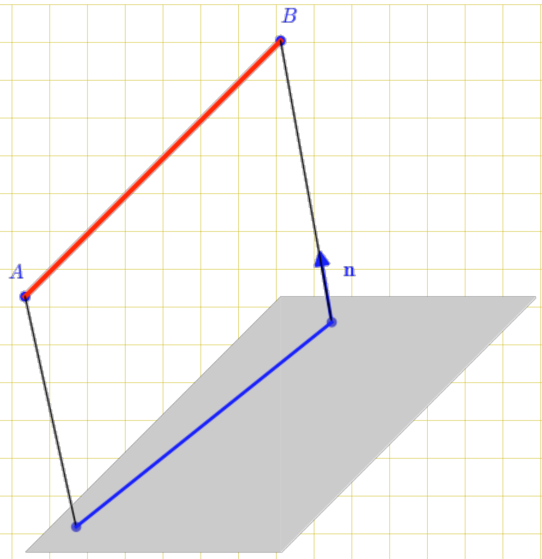
$$x=4 \xrightarrow{5x+4y=8} y=-3 \xrightarrow{2x+y-z=2} z=3 \quad Q(4,-3,3)$$

Així, es pot prendre com a vector director $\mathbf{PQ}=(4,-5,3)$ i la recta és determinada pel punt $P(0,2,0)$ i el vector $\mathbf{v}=(4,-5,3)$.

Es veu ara una aplicació del vector ortogonal a un pla, per obtenir projeccions ortogonals sobre el pla.

Exemple 2.8

Donats els punts $A(1,0,1)$, $B(-1,1,2)$ i el pla $\pi \equiv x+y+z=1$; es desitja trobar la projecció ortogonal del segment AB sobre el pla π i determinar-ne la longitud.



L'únic que cal trobar són les projeccions ortogonals dels punts A i B sobre el pla π. Es calculen, doncs, les rectes perpendiculars al pla π que passen per A i B, respectivament.

$$r_A = \begin{cases} A(1,0,1) \\ \mathbf{n} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$r_B = \begin{cases} B(-1,1,2) \\ \mathbf{n} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

La intersecció entre r_A i el pla π determina la projecció P sobre el pla:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-1=y \\ z-1=y \end{array}\right\} \Rightarrow P(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

Anàlogament, la intersecció entre r_B i el pla π determina la projecció Q sobre el pla:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+1=y-1 \\ z-2=y-1 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$$

Per tant, la projecció del segment d'extrems A i B sobre el pla π és el segment d'extrems $P(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $Q(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$. La seva longitud és

$$d(P,Q) = |(-2,1,1)| = \sqrt{6}$$

(el segment és paral·lel al pla, atès que la seva projecció té la mateixa longitud que el segment original)

2.4 Exercicis resolts

Exercici 2.4.1 Calculeu el pendent de les rectes següents i determineu l'angle que formen amb l'eix OX.

a) $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2}$

b) $r \equiv x - 2y = 3$

Solució:

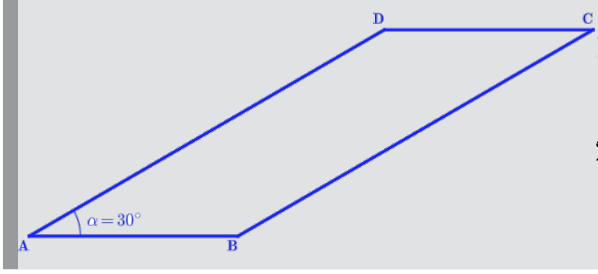
1. S'aïlla $y = -2x + 3$, d'on el pendent $m = -2$. L'angle ha de ser major de $90°$, en ser el pendent negatiu. Com $m = \tan(\alpha)$; es busca l'angle α amb $tan(\alpha) = -2$ que resulta ser

$$\alpha = \arctan(-2) \approx 2.0344\ rad.$$

2. S'aïlla $y = \frac{x-3}{2}$, d'on el pendent $m = \frac{1}{2}$.
   L'angle ha de ser menor de $90°$, en ser el pendent positiu. Es busca l'angle α amb $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$, que resulta ser $\alpha = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 0.4636\ rad.$.

En calcular $\arctan(-2)$ el resultat a la calculadora és $\arctan(-2) \approx -1.1072$. El motiu és que, quan l'arctangent és negatiu, el resultat mostrat correspon a un angle situat entre $-\frac{\pi}{2}$ i 0 (quart quadrant). Com que l'angle que interessa és el situat a l'interval $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ (segon quadrant), n'hi ha prou a passar aquest angle del quart quadrant al segon quadrant, sumant-li $\pi\ rad$. Així, l'angle demanat és, aproximadament, $-1.1072 + \pi \approx 2.0344\ rad$.

Exercici 2.4.2 Donat un paral·lelogram del qual es coneix el vèrtex $A(1, 1)$, l'angle al vèrtex A, $\alpha = 30°$ i que el segment AB és horitzontal.



1. Determineu l'equació de la recta AD.
2. Si se sap que el vèrtex $C(12, 5)$, determineu les coordenades del vèrtex D.

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3

Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Solució:

1. De la recta AD es coneix un punt $A(1,1)$ i el pendent

$$m = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

per la qual cosa pot escriure's l'equació punt-pendent de la recta:

$$y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

2. El vèrtex D és a la intersecció de les rectes AD i CD. La recta AD te l'equació descrita a l'apartat anterior. La recta CD és horitzontal i d'equació $y = 5$. Per tant, el punt D és la solució del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} y-1 & = & \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \\ y & = & 5 \end{array}\right\} \to 4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \to 4\sqrt{3}+1 = x$$

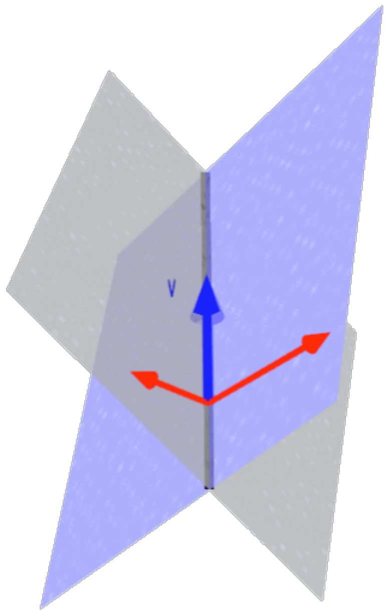
que resulta ser $D(1+4\sqrt{3}, 5)$.

Exercici 2.4.3 Calculeu el pla perpendicular a la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{array} \right.$$

que passa pel punt $P(1,1,1)$.

Solució: Sols es necessita trobar un vector director de la recta. Llavors, en comptes de treure dos punts, es pot trobar de manera més directa: calculant un vector perpendicular a cadascun dels plans que defineixen la recta, segons es veu a l'esquema següent



$$x - y + z = 2 \quad \to \quad \mathbf{n_1} = (1, -1, 1)$$
$$x + 2y + 2z = 4 \quad \to \quad \mathbf{n_2} = (1, 2, 2)$$

Cadascun d'aquests vectors és perpendicular a la recta r. Llavors, un vector perpendicular a ambdós serà un vector director de la recta r. Així,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

serà un vector director de la recta r i, per tant, el pla perpendicular a r el tindrà com a vector normal al pla. Finalment, en conèixer un punt $P(1,1,1)$ i un vector normal al pla $\mathbf{v} = (-4, -1, 3)$, es pot escriure l'equació:

$$-4(x-1) - (y-1) + 3(z-1) = 0, \qquad \text{d'on} \qquad -4x - y + 3z + 2 = 0$$

Exercici 2.4.4 Calculeu la recta paral·lela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

que passa pel punt $P(-1, 1, 2)$.

Solució: Les rectes paral·leles tenen el mateix vector director, per la qual cosa n'hi ha prou amb trobar un vector director de la recta r. Emprant la metodologia comentada a l'Exercici 2.4.3,

$$x + y - z = 1 \quad \to \quad \mathbf{n_1} = (1, 1, -1)$$
$$x - 2y - z = 2 \quad \to \quad \mathbf{n_2} = (1, -2, -1)$$

Cadascun d'aquests vectors és perpendicular a la recta r. Llavors, un vector perpendicular a ambdós serà un vector director de la recta r. Així,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$$

Ara, coneixent un punt de la recta $P(-1, 1, 2)$ i un vector director $\mathbf{v} = (-3, 0, -3)$, ja es poden escriure unes equacions de la recta, per exemple, les equacions contínues:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-3}$$

és a dir,

$$\left. \begin{array}{c} x + 1 = z - 2 \\ y = 1 \end{array} \right\}$$

Recordeu que, quan en les equacions contínues algun denominador és zero, cal eliminar-hi la fracció corresponent i substituir-la per l'equació formada en igualar el numerador a zero.

Exercici 2.4.5 Donada la recta $r \equiv x - 2y = 5$, calculeu un punt de la recta i un vector director. Calculeu, a més, l'equació de la recta que forma un angle de $30°$ amb aquesta i passa pel punt $P(1, 2)$.

(H: Hi ha dues solucions)

Solució: Per calcular un vector director es determinen dos punts de la recta, l'equació de la qual pot escriure's com: $x = 5 + 2y$.

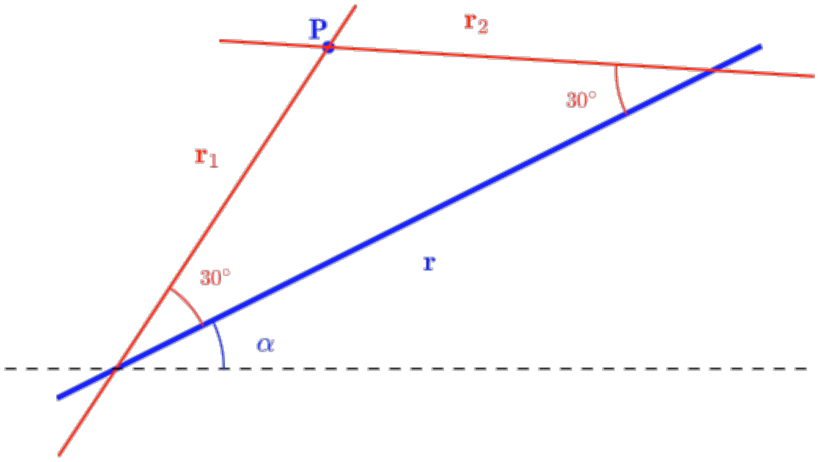
$y = 0 \longrightarrow x = 5 \longrightarrow P(5, 0)$

$y = -1 \longrightarrow x = 3 \longrightarrow Q(3, -1)$

d'on un vector director seria $\mathbf{PQ} = (2, 1)$.

Ara es determina l'angle de la recta amb l'eix OX. El pendent de la recta és, a partir del vector director, $m = \frac{1}{2}$, d'on l'angle α ha de complir $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ i, llavors, $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

Hi ha dues rectes que formen angle de 30° amb la recta r: les que formen un angle de $\alpha \pm 30°$ amb l'eix OX.



Llavors, aquestes rectes vindran donades per les condicions:

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,2) \\ m_1 = \tan(\alpha + 30°) \end{array} \right. \qquad r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,2) \\ m_2 = \tan(\alpha - 30°) \end{array} \right.$$

i, emprant la fórmula trigonomètrica $\tan(A+B) = \dfrac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A) \cdot \tan(B)}$, resulten les equacions punt-pendent següent:

$$r_1 \equiv y - 2 = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}(x-1) \qquad r_2 \equiv y - 2 = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}+1}(x-1)$$

Exercici 2.4.6 Donada la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 3x - y + z = 2 \end{array} \right.$$

calculeu un punt de la recta i un vector director. Calculeu, a més, l'equació del pla, π, perpendicular a r que passa pel punt $P(1,0,1)$ i determineu, a més, dos vectors directors del pla.

Solució: En aquest cas, s'emprarà l'ajuda d'un programari de càlcul simbòlic (*wxMaxima*) per resoldre l'exercici. D'aquesta forma, es pot centrar l'atenció en el plantejament de l'exercici; deixant les operacions de càlcul al programari. Això es farà, de tant en tant, al llarg d'aquest text.

Per calcular un punt i un vector director n'hi ha prou a resoldre el sistema i trobar-ne la solució paramètrica. Això és immediat amb wxMaxima:

```
linsolve([2*x+y+z=2,3*x-y+z=2],[x,y,z]);
```

$$\left[x=-\frac{2\%r1-4}{5},\ y=-\frac{\%r1-2}{5},\ z=\%r1\right]$$

és a dir, reescrivint el paràmetre $\%r1$ com λ, s'obtenen les equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& \frac{4}{5}-\frac{2\lambda}{5} \\ y &=& \frac{2}{5}-\frac{\lambda}{5} \\ z &=& \lambda \end{array}\right\} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

que són les equacions paramètriques de la recta; la qual cosa proporciona un punt $P(\frac{4}{5},\frac{2}{5},0)$ i un vector director $\mathbf{v}=(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},1)$.

Ara, el vector director de la recta, $\mathbf{v}$ és perpendicular al pla buscat, per la qual cosa, tenint en compte que passa pel punt $P(1,0,1)$, l'equació del pla serà:

$$-\frac{2}{5}(x-1)-\frac{1}{5}(y-0)+(z-1)=0 \ \Rightarrow\ -2x-y+5z-3=0$$

Per trobar dos vectors directors del pla, n'hi ha prou d'aplicar la metodologia de l'Exemple 2.4: aïllant una variable de l'equació

$$-2x-y+5z-3=0 \ \Rightarrow\ y=-2x+5z-3$$

i donant valor a x i z, es poden trobar dos punts:

$$\begin{array}{ccccc} x=0,\ z=1 & & y=2 & \longrightarrow & Q(0,2,1) \\ x=1,\ z=0 & & y=-5 & \longrightarrow & R(1,-5,0) \end{array}$$

i es pren, a més, el punt conegut $P(1,0,1)$ per formar els vectors directors del pla $\mathbf{PQ}=(-1,2,0)$ i $\mathbf{PR}=(0,-5,-1)$ (no són proporcionals).

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Exercici 2.4.7 A l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ es consideren les rectes r i s definides per

$$r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ \alpha x+y+z=0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} 2\alpha x+y+z=1 \\ \alpha x+y+z+2=0 \end{cases}$$

a) Trobeu α perquè r i s siguin perpendiculars.

b) Prenent $\alpha=2$, trobeu la projeccció ortogonal de la recta s sobre el pla

$$\pi \equiv \; x+y+z+2=0$$

c) Trobeu l'angle que formen la projecció anterior i la recta r (amb $\alpha=2$).

Solució:

1. Utilitzant *wxMaxima* es pot trobar, fàcilment, un punt i un vector director de cada recta resolent els respectius sitemes d'equacions (s'emprarà la lletra a per al paràmetre α) i interpretant les solucions paramètriques obtingudes:

```
linsolve([x+z=1,a*x+y+z=0],[x,y,z]);
```

$$[x=\%r1, y=-\%r1*a+\%r1-1, z=1-\%r1]$$

d'on els coeficients del paràmetre $\%r1$ proporcionen un vector director de la recta r: $\mathbf{v}=(1,-a+1,-1)$.

```
linsolve([2*a*x+y+z=1,a*x+y+z+2=0],[x,y,z]);
```

$$[x=3/a, y=-\%r2-5, z=\%r2]$$

d'on els coeficients del paràmetre $\%r2$ proporcionen un vector director de la recta s: $\mathbf{w}=(0,-1,1)$ (cal notar que $a\neq 0$; en cas contrari, els dos plans són paral·lels i no defineixen una recta).

Ara, perquè ambdues rectes siguin perpendiculars ha de ser $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$ i, així,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=(1,1-a,-1)\cdot(0,-1,1)=a-1-1=0$$

és a dir, $\alpha=2$.

2. La projecció ortogonal de s sobre el pla π serà una recta que pot obtenir-se amb la intersecció del pla π i el pla π' ortogonal a π i que conté la recta s. Així, aquest pla π' vindrà determinat per

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(3/2,-5,0), & \text{un punt de } s \\ \mathbf{w} = (0,-1,1), & \text{vector director de } s; \\ \mathbf{n} = (1,1,1), & \text{vector perpendicular a } \pi. \end{cases}$$

i l'equació d'aquest pla

$$\begin{vmatrix} x-3/2 & y+5 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que, en calcular-lo amb *wxMaxima* ens proporciona l'equació

$$z + y - 2x + 8 = 0$$

Així, la projecció ortogonal sol·licitada és la recta s' d'equació

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+2=0 \\ -2x+y+z+8=0 \end{aligned}\right\}$$

3. Per calcular l'angle α, n'hi ha prou amb emprar la fórmula

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}}$$

sent $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ vectors directors de les rectes r i s', repectivament. S'ha de calcular un vector director de la recta r', atès que el vector $\mathbf{v} = (1,-1,-1)$ es calculà a l'apartat (1). Per fer això, es pot resoldre el sistema de plans que determinen la recta s' (com s'ha fet abans) o, atès que sols es necessita un vector director, es pot emprar la metodologia de l'exercici 2.4.3, utilitzant *wxMaxima* per fer el càlcul del determinant corresponent.

```
A:matrix([i,j,k],[1,1,1],[-2,1,1]);
determinant(A);
```

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$3k - 3j$

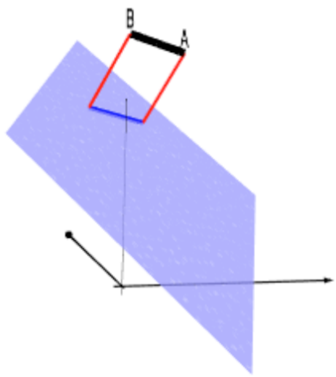
És a dir, el vector director de s' és $\mathbf{w} = (0,-3,3)$ i, així,

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{(1,-1,-1)\cdot(0,-3,3)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}} = 0$$

d'on l'angle $\alpha = \pi/2\ rad$.

Exercici 2.4.8 Calculeu la projecció ortogonal del segment amb extrems $A(1, 2, 1)$ i $B(2, 3, 3)$, sobre el pla $\pi \equiv x + z = 0$. Determineu, a més, l'angle que formen el segment AB i la seva projecció ortogonal calculada.

Solució: N'hi ha prou amb calcular la projeccció de cadascun dels punts A i B sobre el pla π, tal i com s'indica a la figura:



El vector ortogonal a π és $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$. Es calcula la recta ortogonal que passa per A:

$$r_A \equiv \begin{cases} A(1,2,1) \\ \mathbf{n} = (1,0,1) \end{cases}$$

de la qual, escrivint les equacions contínues,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} x - 1 &= z - 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

i la intersecció d'aquesta recta amb el pla π ens dona la projecció del punt A.

$$\left.\begin{array}{l} x-1 = z-1 \\ y = 2 \\ x+z = 0 \end{array}\right\} x = z = 0; \quad y = 2$$

és a dir, el punt $A'(0, 2, 0)$.

Es repeteix el raonament amb el punt B. Primerament es calcula la recta ortogonal a r que passa pel punt B.

$$r_B \equiv \begin{cases} B(2,3,3) \\ \mathbf{n} = (1,0,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow \begin{array}{c} x-2 = z-3 \\ y = 3 \end{array}$$

i la intersecció d'aquesta recta amb el pla π ens dona la projecció del punt B.

$$\left.\begin{array}{l} x-2 = z-3 \\ y = 3 \\ x+z = 0 \end{array}\right\} x = -\frac{1}{2}; \quad z = \frac{1}{2}; \quad y = 3$$

és a dir, el punt $B'(-\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2})$.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Per tant, la projecció del segment AB és el segment $A'B'$.

Ara, per calcular l'angle entre el segment AB i la seva projecció $A'B'$, n'hi ha prou amb calcular l'angle entre els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{A'B'}$. Utilitzant la fórmula de l'angle entre vectors

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{A'B'}}{|\mathbf{AB}| \cdot |\mathbf{A'B'}|,}$$

com $\mathbf{AB} = (1, 1, 2)$ i $\mathbf{A'B'} = (-\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2})$, llavors,

$$\cos(\alpha) = \frac{(1,1,2)\cdot(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}$$

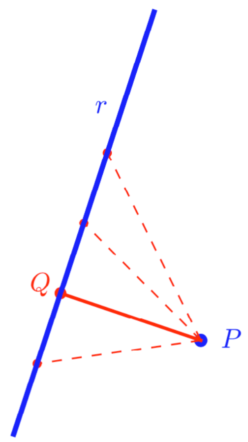
per la qual cosa l'angle és $\alpha = 60°$.

Exercici 2.4.9 Deduïu que la distància d'un punt $P(x_0, y_0)$ a una recta $r \equiv ax + by + c = 0$ ve donada per la fórmula

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Solució:

Si el punt P pertany a la recta r, la distància és nul·la i no s'ha de provar res. Si no és el cas, per trobar la distància de P a r, cal trobar el punt Q de la recta r que es troba més a prop de P; és a dir, la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r, tal com s'observa a la figura.



ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Es calcula, doncs, la recta perpendicular a r que passa per P. El vector perpendicular a r és $\mathbf{v} = (a, b)$ que serà un vector director de la recta buscada. Així,

$$r_\perp \equiv \begin{cases} P(x_0, y_0) \\ \mathbf{v} = (a, b) \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{array}\right\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

La intersecció d'aquesta recta $r_\perp$ amb la recta r proporciona el punt Q:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ ax + by + c = 0 \end{array}\right\} \quad a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0 \quad \Rightarrow t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

i, substituint en les dues primeres equacions:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 - a\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \\ y = y_0 - b\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \end{array}\right\} \quad \text{(coordenades del punt } Q\text{)}$$

i així,

$$\begin{aligned} d(P, r) = d(P, Q) = \\ &= \sqrt{(x_0 - a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} - x_0)^2 + (y_0 - b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} - y_0)^2} \\ &= \sqrt{(-a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2})^2 + (-b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2})^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Exercici 2.4.10 Trobeu la distància de l'origen a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3}$.

Solució: Es pot aplicar la fórmula

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

deduïda a l'Exercici 2.4.9. Tan sols es necessita, prèviament, trobar l'equació general de la recta r.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} \;\rightarrow\; -3x+3 = 2y+2 \;\rightarrow\; 3x+2y-1=0$$

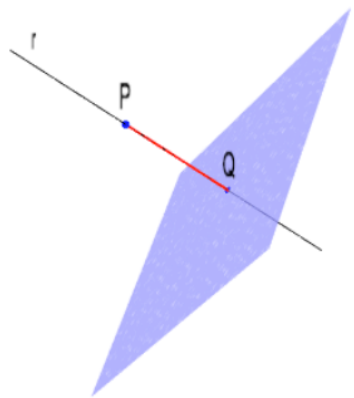
i, així,

$$d(O,r) = \frac{|3\cdot 0 + 2\cdot 0 - 1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\; u.l. \quad \text{(unitats de longitud o distància)}$$

Exercici 2.4.11 Deduïu que la distància d'un punt $P(x_0, y_0, z_0)$ a un pla $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ ve donada per la fórmula

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Solució:



Es tracta de calcular, de nou, la projecció ortogonal Q del punt P sobre el pla π i mesurar la longitud del vector $\mathbf{PQ}$. Els passos a seguir són: (1) calcular la recta r perpendicular a π que passa pel punt P; (2) calcular el punt d'intersecció de la recta anterior i el pla π (que serà el punt Q buscat); (3) calcular la longitud del vector $\mathbf{PQ}$.

S'emprarà *wxMaxima* per fer les operacions.

(1) Equacions de la recta r, perpendicular a π:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(x_0, y_0, z_0) \\ \mathbf{n} = (a,b,c) \end{array} \right. \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

(2) Intersecció de r i π: punt Q. Cal resoldre el sistema format per la recta i el pla:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Resolent el sistema amb *wxmaxima*, s'obté el punt Q:

```
sistema:[a*x+b*y+c*z+d=0, x=x0+a*t, y=y0+b*t,z=z0+c*t];
linsolve(sistema,[x,y,z,t]);
```

$$[x = -\frac{a*c*z0 + a*b*y0 - c^2*x0 - b^2*x0 + a*d}{c^2+b^2+a^2},$$

$$y = -\frac{b*c*z0 - c^2*y0 - a^2*y0 + a*b*x0 + b*d}{c^2+b^2+a^2},$$

$$z = -\frac{-b^2*z0 - a^2*z0 + c*(b*y0 + a*x0) + c*d}{c^2+b^2+a^2},$$

$$t = -\frac{c*z0 + b*y0 + a*x0 + d}{c^2+b^2+a^2}]$$

Agafant Q com els tres primers valors $[x, y, z]$ i restant el punt $[x_0, y_0, z_0]$, s'obtindrà el vector PQ, que després de simplificat pren la forma

$pq : [-(a*c*z0+a*b*y0+a^2*x0+a*d)/(c^2+b^2+a^2), -(b*c*z0+b^2*y0+a*b*x0+b*d)/(c^2+b^2+a^2), -(c^2*z0+b*c*y0+a*c*x0+c*d)/(c^2+b^2+a^2)]$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

(3) La longitud del vector **PQ**:

```
sqrt(pq[1]^2+pq[2]^2+pq[3]^2)$
factor(%);
```

$$\frac{|c*z0+b*y0+a*x0+d|}{\sqrt{c^2+b^2+a^2}}$$

que és la fórmula demanada.

Una forma alternativa de deduir la fórmula es pot trobar a [8] i [1]; on es fa servir el fet que, si Z es qualsevol punt del pla π, la projecció ortogonal del vector **PZ** sobre la recta r (que és precisament la distància demanada) pot calcular-se com

$$\frac{|\mathbf{PZ}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

que dóna lloc a la fórmula requerida.

ISBN: 978-84-17429-26-3

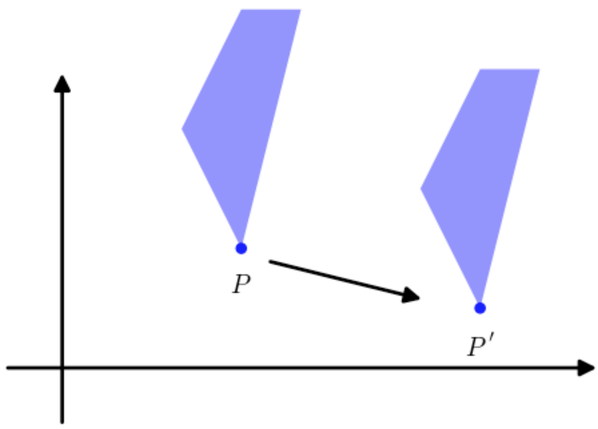
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Moviments 3

Les translacions i rotacions són transformacions geomètriques que desplacen objectes bidimensionals a través del pla i objectes tridimensionals a través de l'espai. En aquest tema s'estudiaran els moviments d'objectes bidimensionals. Per moure un objecte, es desplacen els punts característics de l'objecte: els vèrtexs d'un polígon, el centre d'un cercle, els extrems d'un segment, etc., i es reconstrueix l'objecte en la nova posició a partir d'aquests. Els moviments que s'estudiaran són les translacions (desplaçaments en línia recta), les rotacions (desplaçaments circulars), les simetries (desplaçament especular) i l'escalatge (augment o disminució de la mida de l'objecte).

3.1 Translació

Una translació és una transformació geomètrica que aplicada sobre un punt P, de coordenades (x, y), el desplaça, seguint una trajectòria recta indicada per un vector de translació $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, fins a convertir-se en el punt P' de coordenades (x', y').



ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Aixi, per traslladar un punt P a la nova posicio P', n'hi ha prou d'afegir les distàncies de translació, v_1 i v_2 a les coordenades del punt P, és a dir:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x' &= x + v_1 \\ y' &= y + v_2 \end{aligned}\right\}} \tag{3.1}$$

o, escrit en forma vectorial,

$$(x', y') = (x, y) + (v_1, v_2)$$

Emprant notació matricial, es pot expressar la translació d'un punt com a:

$$P' = P + V$$

on $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Exemple 3.1

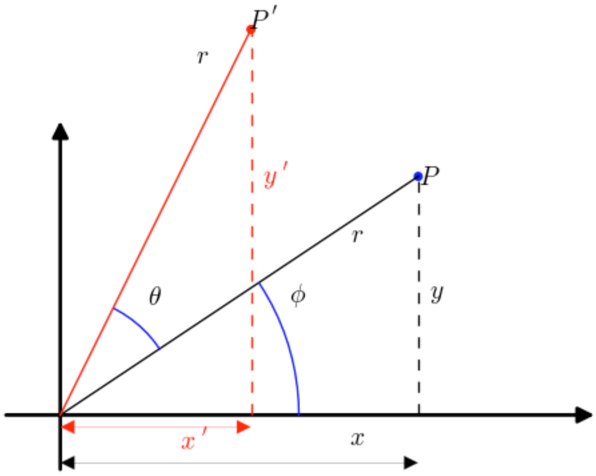
El resultat de traslladar el punt $P_1(5, 1)$ amb vector de translació $\mathbf{v} = (-2, 3)$ és el punt $P_2 = (5, 1) + (-2, 3) = (3, 4)$.

Per traslladar un objecte, n'hi ha prou d'aplicar les equacions de translació (3.1) als punts característics que el defineixen (per exemple, els vèrtexs d'un polígon). Atès que cada punt de l'objecte és traslladat en la mateixa direcció i a la mateixa distància, la translació és, doncs, una transformació que no deforma els objectes en moure'ls de la seva posició.

3.2 Rotació

Una rotació és una transformació geomètrica que aplicada sobre un punt P, de coordenades (x, y), el mou, seguint una trajectòria circular en el pla XY (que dependrà del centre de rotació $C(c_1, c_2)$ i de l'angle de rotació θ que hauran d'especificar-se), fins arribar al punt de destinació P' de coordenades (x', y').

La figura mostra les coordenades dels punts P i P', l'angle de rotació, θ, l'angle de posició inicial respecte a l'eix Y, ϕ, i també la distància r entre el punt P i l'origen de coordenades (distància que roman constant durant la rotació).



Rotació al voltant de l'origen de coordenades

Inicialment, se suposarà que el punt de rotació es l'origen de coordenades, és a dir, el punt $(0,0)$.

Emprant identitats trigonomètriques, és possible expressar les coordenades transformades, (x', y'), en funció dels angles θ i ϕ:

$$x' = r\cos(\phi+\theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta$$
$$y' = r\sin(\phi+\theta) = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta$$

D'altra banda, a partir de la mateixa figura s'observa també que:

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$

En substituir aquestes expressions en les equacions anteriors, s'obtenen les equacions de rotació d'un punt al voltant de l'origen de coordenades:

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} x' & = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' & = x\sin\theta + y\cos\theta \end{array}\right\}} \tag{3.2}$$

L'angle de rotació, θ, pot prendre valors reals tant positius com negatius. D'acord amb l'esquema presentat, quan θ és positiu, la rotació es produeix en direcció oposada al moviment de les agulles del rellotge (antihorari); al contrari, quan θ és negatiu, la rotació es produeix en el sentit de les agulles del rellotge (horari).

Utilitzant notació matricial, es pot descriure la rotació d'un punt al voltant de l'origen de coordenades com a:

$$P' = R \cdot P$$

on $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ és la matriu de rotació.

De manera anàloga al que passava amb les translacions, les rotacions també són transformacions que mouen els objectes sense deformar-los, atès que cadascun dels punts és rodat en un mateix angle θ.

Rotació al voltant d'un punt de rotació genèric

Les equacions anteriors ja no són vàlides quan el centre de rotació no és l'origen de coordenades. Quan es vulgui utilitzar un centre de rotació C_r diferent de l'origen de coordenades, cal fer els següents moviments:

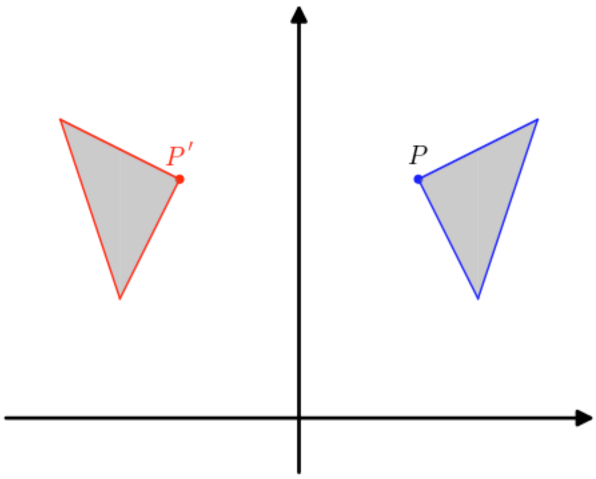
1. Aplicar una translació a l'objecte de forma que porti el centre de rotació a l'origen de coordenades.
2. Fer rodar l'objecte al voltant de l'origen de coordenades, fent servir les equacions ((3.2)).
3. Desfer la translació inicial, de manera que el centre de rotació torni a la seva posició original.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

3.3 Simetria

Aplicar a un punt P una simetria respecte d'una recta r és trobar un punt P' de manera que el segment PP' és ortogonal a la recta r i tots dos punts es troben a la mateixa distància de r.
La figura mostra una simetria respecte de l'eix OY. En aquest cas, la coordenada y dels punts P i P' roman constant i sols canvia el signe de la primera coordenada.



La simetria respecte de l'eix OX ve donada per les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x \\ y' = -y \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

La simetria respecte de l'eix OY ve donada per les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = y \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

i ambdues es poden representar matricialment de manera senzilla:

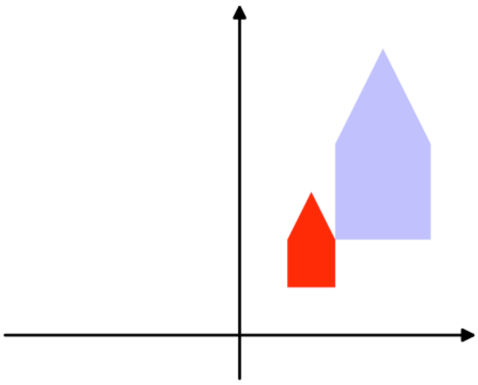
$$P' = S_{OX} \cdot P \quad \text{o} \quad P' = S_{OY} \cdot P$$

on $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\quad S_{OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad S_{OY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La simetria, aplicada a un objecte, no modifica les seves dimensions. Com abans, n'hi ha prou d'identificar els punts i elements que el defineixen i aplicar la simetria als punts, reconstruint després l'objecte amb els elements que l'identifiquen.

3.4 Escalatge

L'escalatge és una transformació geomètrica que aplicada sobre un punt P, de coordenades (x, y) (respecte d'un punt fix P_0 de coordenades (x_0, y_0) i factors d'escala s_x i s_y), el mou a un nou punt P' de coordenades (x', y'), obtingudes en multiplicar per sengles factors s_x i s_y les distàncies horitzontal, dx, i vertical, dy, entre P_0 i P.



Escalatge a partir de l'origen de coordenades

Inicialment, se suposarà que el punt fix és l'origen de coordenades, és a dir; el punt $(0, 0)$. En l'operació d'escalatge, el nou punt P' s'obte multiplicant les coordenades del punt inicial P pels anomenats factors d'escala s_x i s_y:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot s_x \\ y' &= y \cdot s_y \end{aligned}\right\}} \tag{3.5}$$

Així, el factor d'escala s_x desplaça el punt inicial P en la direcció de l'eix X, mentre que el s_y ho fa en la direcció de l'eix Y.

Emprant notació matricial, es pot descriure l'escalatge d'un punt a partir de l'origen de coordenades com a

$$P' = E \cdot P, \quad \text{on} \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

E és la matriu d'escalatge.

Els factors d'escala, s_x i s_y, poden prendre qualsevol valor positiu. Factors d'esca-

ISBN: 978-84-17429-26-3

Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

la superiors a 1 produeixen un allunyament, en la direcció horitzontal o vertical, segons el factor implicat, de P respecte a l'origen de coordenades. Al contrari, factors d'escala inferiors a 1 produeixen un apropament, en la direcció horitzontal o vertical, segons el cas, de P respecte a l'origen.

A diferència dels moviments anteriors, una transformació d'escalatge sí que deformarà l'objecte, atès que n'altera la mida. Aquesta deformació pot ser uniforme, quan $s_x = s_y$, o no uniforme, quan $s_x \neq s_y$. En el primer dels casos, encara que la mida de l'objecte s'altera, es mantindran les seves proporcions relatives.

En aplicar les equacions d'escalatge sobre els punts que defineixen un objecte, no tan sols es modifica la seva mida, sinó que també s'altera la seva posició respecte al punt fix.

Escalatge a partir d'un punt fix genèric

Les equacions anteriors ja no són vàlides quan el punt fix no és l'origen de coordenades. Quan es vol escalar un objecte utilitzant com a punt fix un punt P diferent de l'origen de coordenades, cal fer els següents moviments:

1. Aplicar una translació a l'objecte que porti el punt fix a l'origen de coordenades.
2. Escalar l'objecte a partir de l'origen de coordenades, fent servir les equacions ((3.5)).
3. Desfer la translació inicial, de manera que el punt fix torni a la seva posició original.

3.5 Representació matricial dels moviments

Una forma eficient de representar els moviments, a l'hora de fer càlculs, és mitjançant la utilització de matrius, de forma que la composició de moviments pot expressar-se amb un producte de matrius. Malauradament, no tots els moviments estudiats poden representar-se amb una matriu 2×2. Per exemple, la translació:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + v_x \\ y' &= y + v_y \end{aligned}\right\}$$

Però si s'afegeix una nova identitat

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + v_x \\ y' &= y + v_y \\ 1 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

es pot escriure matricialment com

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

S'anomenen coordenades homogènies del punt (x, y) a les coordenades $(x, y, 1)$. I així, treballant amb coordenades homogènies, és possible representar els moviments bidimensionals amb matrius 3×3:

- la *translació* de vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es representa per

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- la *rotació* d'angle θ (amb centre de gir en l'origen de coordenades) es representa per

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- la *simetria* respecte de l'eix OX es representa per

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- la *simetria* respecte de l'eix OY es representa per

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

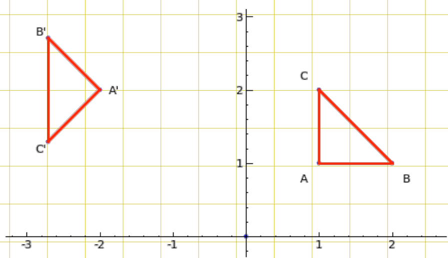
- l'*escalatge* de factors s_x i s_y (amb punt fix en l'origen) es representa per

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

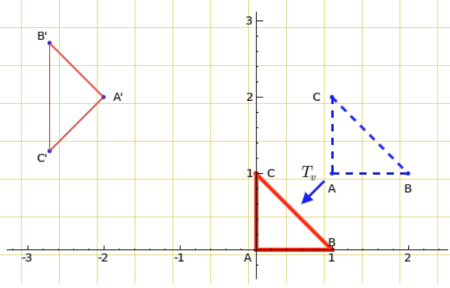
D'altra banda, a l'hora de compondre alguns d'aquests moviments per moure un objecte n'hi ha prou de multiplicar les respectives matrius seguint l'ordre indicat.

Exemple 3.2

Donat el triangle rectangle de la dreta amb vèrtexs $A(1,1)$, $B(2,1)$ i $C(1,2)$; expressa, matricialment, els moviments necessaris per traslladar-lo al triangle de l'esquerra amb vèrtex $A'(-2,2)$; de forma que la hipotenusa $B'C'$ quedi ara completament vertical. Indica, a més, la matriu d'escalatge necessària per triplicar-ne la mida original mantenint fix el punt A'.



Com que l'objecte ha de ser rodat, convé portar-lo prèviament a l'origen de coordenades. Com que es coneix la destinació final del punt A, aquest serà el vèrtex que es traslladarà a l'origen.



Es trasllada el punt A a l'origen mitjançant el vector de translació $(-1,-1)$. Matricialment:

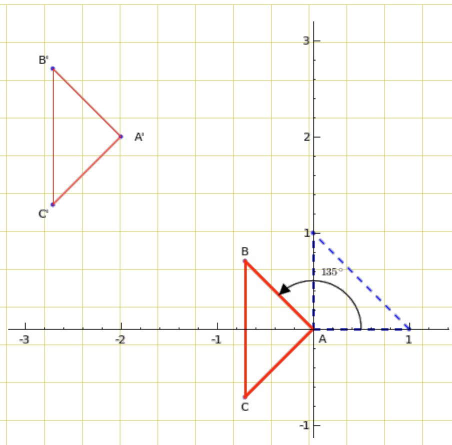
$$T_{A\to O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

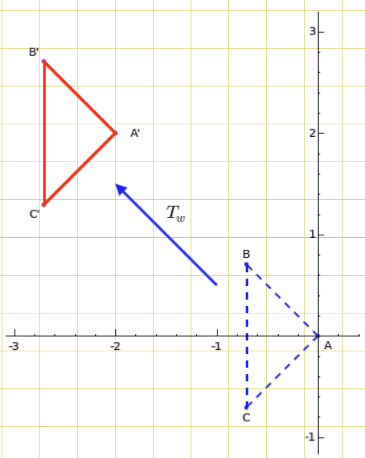
ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Ara, per situar el costat BC en vertical, es realitza un gir, en sentit antihorari de $135°$.
Matricialment:

$$R_{135^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(135^\circ) & -\sin(135^\circ) & 0 \\ \sin(135^\circ) & \cos(135^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Finalment, atès que el triangle ja es troba en la posició correcta, es traslla da des de l'origen al punt A' (vector de translació $(-2, 2)$).
Matricialment:

$$T_{O\to A'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, el moviment total pot expressar-se mitjançant el producte:

$$M = T_{O\to A'} \cdot R_{135^\circ} \cdot T_{A\to O}$$

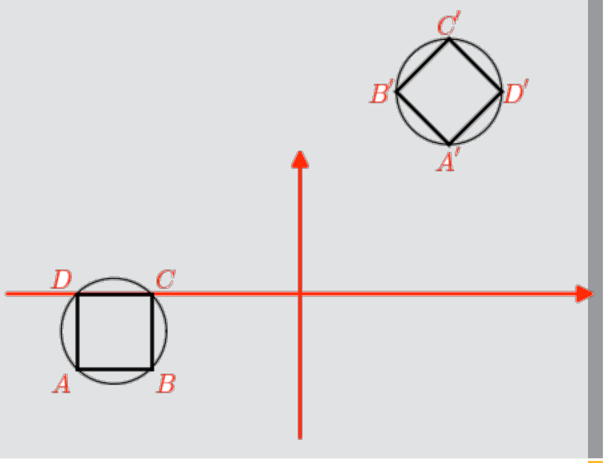
En escalar, per triplicar-ne la mida mantenint fix el punt A', la matriu resultant de moure el punt A' a l'origen, aplicar l'escalatge i retornar el punt A' al seu lloc original; és

$$E_{3\times} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.6 Exercicis resolts

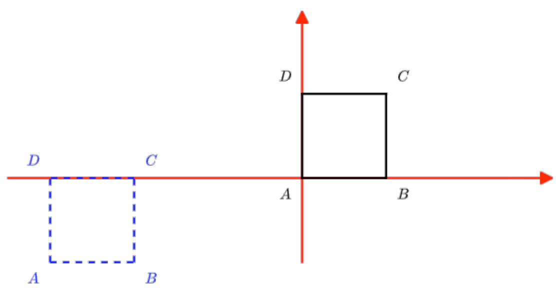
Exercici 3.6.1

Donat el quadrat de l'esquerra $ABCD$ amb coordenades dels vèrtexs $A(-3,-1)$, $B(-2,-1)$, $C(-2,0)$ i $D(-3,0)$; expresseu matricialment els moviments necessaris per transformar-lo en el quadrat de la dreta amb el vèrtex $A'(2,2)$ i el vèrtex C' alineat verticalment amb A'.



Solució:

Com que l'objecte ha de ser rodat, convé portar-lo, prèviament, a l'origen de coordenades. Com que es coneix la destinació final del punt A, aquest serà el vèrtex que es traslladarà a l'origen.



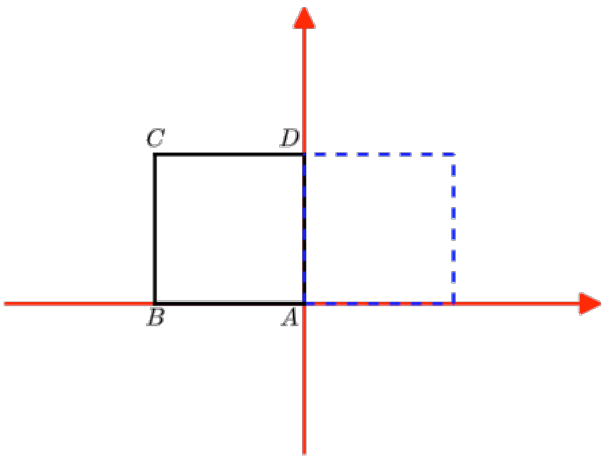
Llavors, es porta el vèrtex A a l'origen de coordenades amb una translació de vector $\mathbf{v} = (3,1)$. Matricialment,

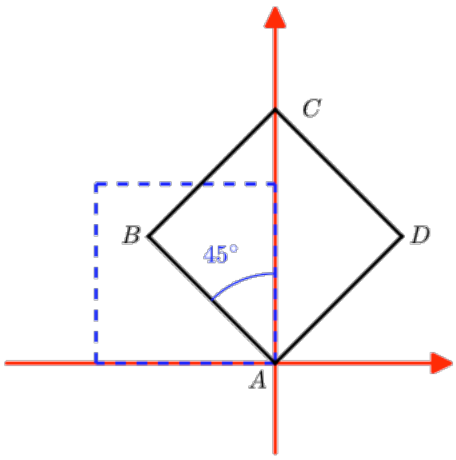
$$T_{A\to O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Donada la situació dels vèrtexs B i D s'efectua, ara, una simetria respecte de l'eix OY. Matricialment,

$$S_{OY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



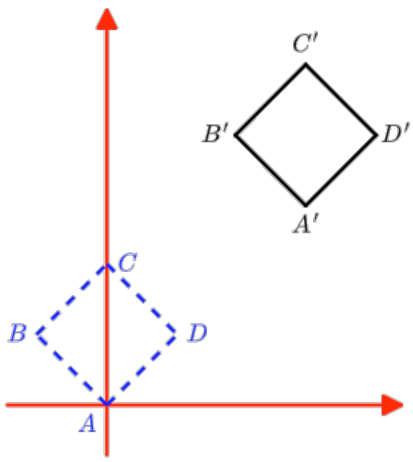


Ara es realitza un **gir** de 45° en sentit horari. Matricialment,

$$R = \begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) & 0 \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, es trasllada el punt A (situat en l'origen) al punt de destinació $A'(2,2)$ mitjançant una translació de vector $\mathbf{w} = (2,2)$. Matricialment,

$$T_{O \to A'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Per tant, el moviment total que ha de realitzar-se ve expressat pel producte de matrius:

$$M = T_{O\to A'} \cdot R \cdot S_{OY} \cdot T_{A\to O}$$

Observeu que les matrius que representen el moviment s'han d'escriure en ordre invers a com es realitza el moviment; és a dir, de dreta a esquerra (atès que els punts sobre els quals s'aplica es col·locarien a la dreta de la matriu resultant).

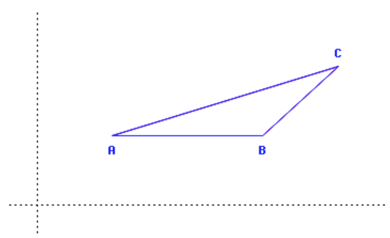
Exercici 3.6.2 Un triangle té un vèrtex $A(1,1)$ i el vèrtex B a la dreta de A. A més, el costat AB és horitzontal. El vèrtex C és situat més alt que B i més a la dreta de A

1. Expresseu, en forma matricial, els moviments necessaris perquè el costat AB quedi vertical, amb C a l'esquerra de B; A per dalt de B i amb coordenades $A(-2,1)$.

2. Si el punt B té coordenades $B(-2,-1)$ en la posició final, quines són les coordenades originals del punt B?

Solució:

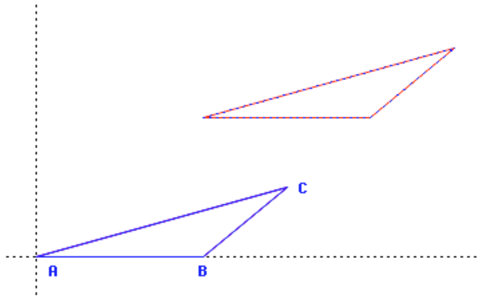
1. Posició original del triangle:



Com que l'objecte ha de ser rodat, convé portar-lo prèviament a l'origen de coordenades. Com que es coneix la destinació final del punt A, aquest serà el vèrtex que es traslladarà a l'origen.

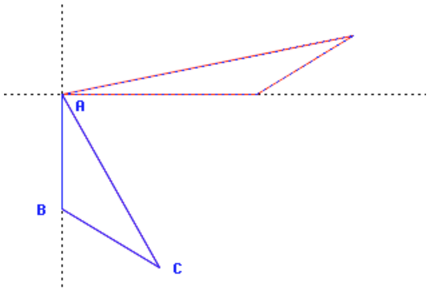
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138



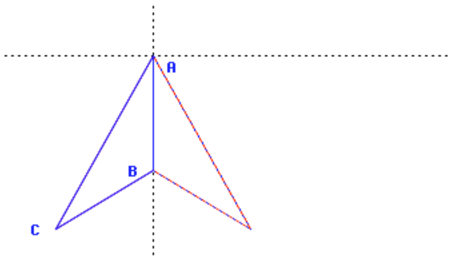
Translació de A a l'origen O, de vector $(-1,-1)$. Matricialment,

$$T_{A\to O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



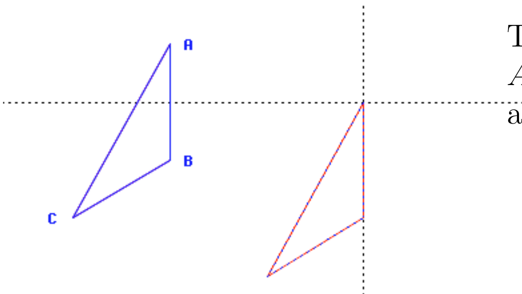
Rotació de centre l'origen O i angle $-90°$. Matricialment,

$$R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Simetria respecte de l'eix OY. Matricialment,

$$S_{OY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Translació de l'origen O al punt final $A'(-2,1)$, de vector $(-2,1)$. Matricialment,

$$T_{O\to A'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El moviment resultant pot expressar-se mitjançant el producte de matrius:

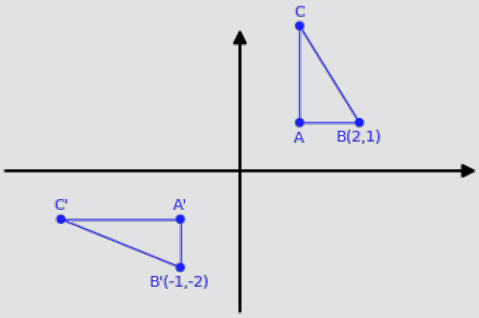
$$M = T_{O\to A'} \cdot S_{OY} \cdot R_{-90^\circ} \cdot T_{A\to O}$$

Recordeu la nota de l'exercici 3.6.1 per escriure correctament l'ordre en què s'expressen les matrius.

2. Tenint en compte que el punt B final és situat dues unitats per sota de A, i que els moviments emprats preserven les distàncies, el punt B inicial ha d'estar dues unitats a la dreta de A. Llavors, $B(1,3)$.

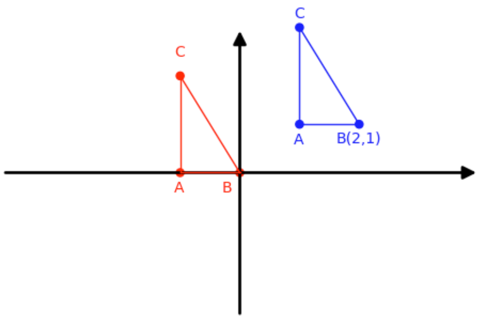
Exercici 3.6.3 Considereu el triangle rectangle de la dreta, amb vèrtex $B(2,1)$, angle recte en A i costat AB horitzontal.

Indiqueu matricialment els moviments necessaris per transformar-lo en el triangle de l'esquerra amb vèrtex $B'(-1,-2)$ i costat $A'B'$ vertical.



Solució:

Com que l'objecte ha de ser rodat, convé portar-lo prèviament a l'origen de coordenades. Com que es coneix la destinació final del punt B, aquest serà el vèrtex que es traslladarà a l'origen.

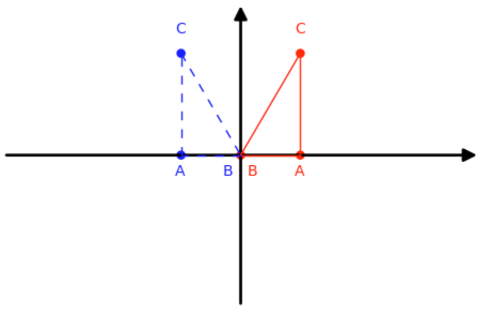


Es comença, doncs, desplaçant el vèrtex B a l'origen de coordenades amb una **translació** de vector $\mathbf{v} = (-2,-1)$, que matricialment s'expressa:

$$T_{B\to O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

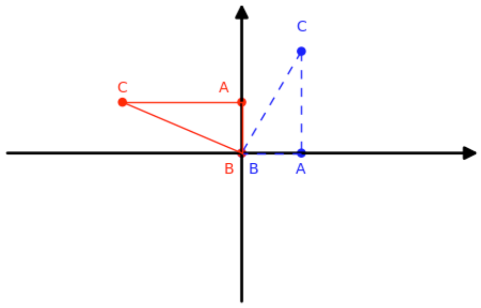
Donada la situació dels vèrtexs A i B s'efectua una **simetria** respecte de l'eix OY. Matricialment:

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

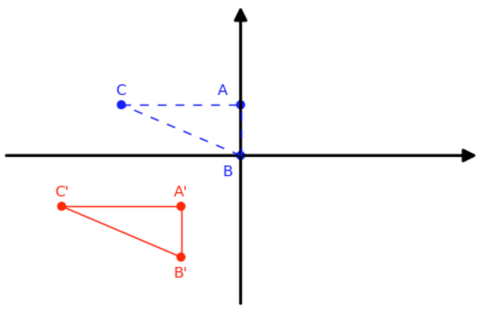


Ara, s'efectua un **gir** de 90° en sentit antihorari (centre de gir l'origen de coordenades): Matricialment:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, es trasllada el punt B (ara a l'origen) al punt de destinació $B'(-1,-2)$ mitjançant una **translació** de vector $\mathbf{w} = (-1,-2)$. Matricialment:

$$T_{O \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

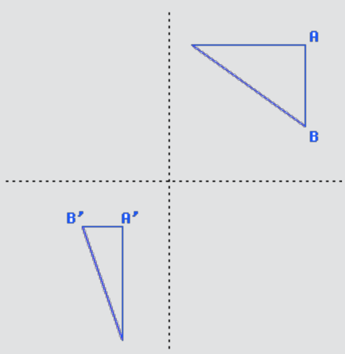


Per tant, el moviment total que s'ha de realitzar ve donat pel producte de matrius:

$$M = T_{O \to B'} \cdot R \cdot S_y \cdot T_{B \to O}$$

Exercici 3.6.4

Donat el triangle rectangle de la dreta, amb vèrtex $A(3,3)$, angle recte en A i costat AB vertical, indiqueu matricialment els moviments necessaris per transformar-lo en el triangle de l'esquerra amb vèrtex $A'(-1,-1)$, costat $A'B'$ horitzontal i de longitud la meitat del costat AB original (el costat AC no modifica la longitud). Expresseu el producte de matrius que representa el moviment global resultant (no cal multiplicar-les).



ISBN: 978-84-17429-26-3

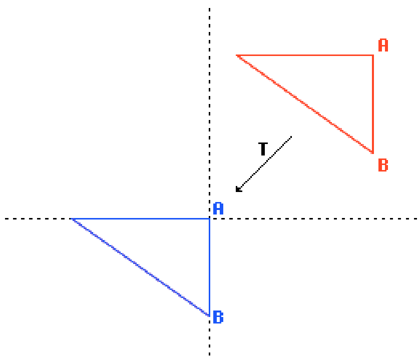
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Solució:

Com que l'objecte ha de ser rodat i escalat, convé portar-lo prèviament a l'origen de coordenades. Com que es coneix la destinació final del punt A, aquest serà el vèrtex que es traslladarà a l'origen.

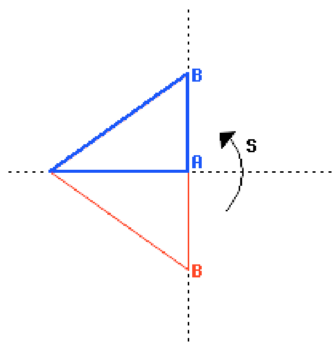
Es trasllada, doncs, el vèrtex A a l'origen de coordenades mitjançant una translació de vector $\mathbf{v} = (-3, -3)$, que matricialmente s'expressa:

$$T_{B\to O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



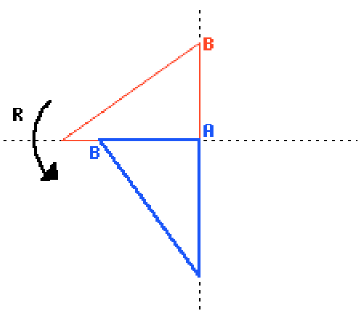
Donada la situació dels vèrtexs A i B s'efectua una simetria respecte de l'eix OX. Matricialment:

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



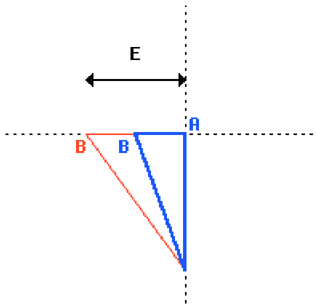
Ara, s'efectua una rotació de 90° en sentit antihorari (centre de gir l'origen de coordenades). Matricialment:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



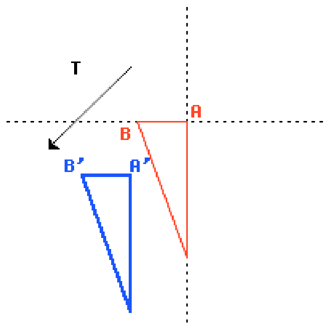
A continuació, s'aplica un escalatge amb factors d'escala $s_x = 1/2$ i $s_y = 1$ amb punt fix l'origen. Matricialment:

$$E = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Finalment, es trasllada el punt A (ara a l'origen) al punt de destinació $A'(-1,-1)$ mitjançant una translació de vector $\mathbf{w} = (-1,-1)$. Matricialment:

$$T_{O\to A'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Per tant, el moviment total que s'ha de realitzar ve donat pel producte de matrius:

$$M = T_{O\to A'} \cdot E \cdot R \cdot S_x \cdot T_{A\to O}$$

Recorda la nota de l'exercici 3.6.1 per escriure correctament l'ordre en què s'expressen les matrius.

(Nota: la solució presentada no és l'única possible)

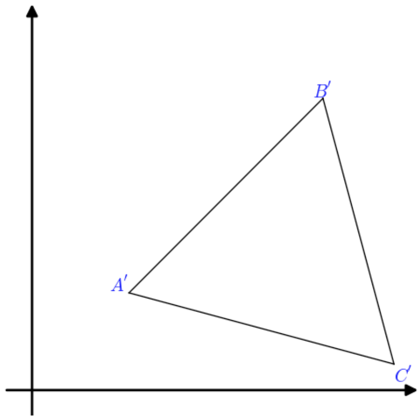
Exercici 3.6.5 Un triangle equilàter ha estat sotmès, amb l'ordre que s'indica, als moviments següents:

- translació de vector $\mathbf{v} = (-1, 2)$;
- gir d'angle $\pi/2$ *rad.* en sentit horari, amb centre de gir en $P(-1, 1)$.

Sabent que, després d'aquests moviments, el triangle té dos vèrtexs en els punts $A'(1,1)$ i $B'(3,3)$ i que el tercer vèrtex C' apunta cap a l'eix OX; calculeu les coordenades originals dels tres vèrtexs.

Solució:

A la figura es mostra la posició final del triangle segons l'enunciat de l'exercici.
En aquest cas, en conèixer els punts finals del triangle i voler trobar-ne els inicials, caldrà desfer els moviments indicats.



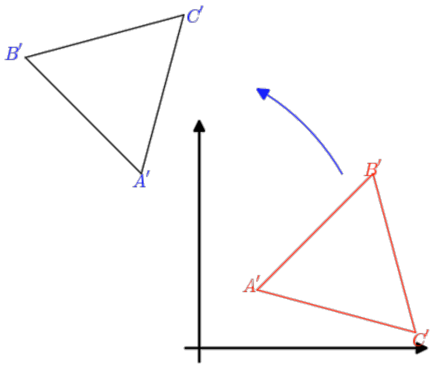
En desfer els moviments, s'ha de seguir l'ordre invers al realitzat; és a dir, el primer moviment que s'ha de desfer és el gir i a continuació la translació.

1. Per desfer el gir d'angle $\pi/2$ $rad.$ en sentit horari, amb centre de gir en $P(-1,1)$ caldrà efectuar gir d'angle $\pi/2$ $rad.$ en sentit antihorari, amb centre de gir en $P(-1,1)$. En no ser el centre de gir l'origen de coordenades, aquest moviment ve expressat per tres matrius: translació del centre de gir a l'origen, rotació i translació de cap nou al centre de gir original.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

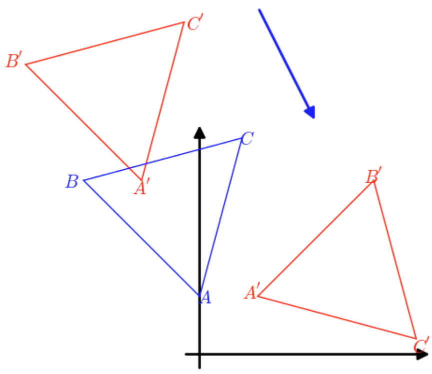
que, en multiplicar-les, resulta ser la matriu

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2. Per desfer la translació de vector $\mathbf{v} = (-1, 2)$; cal efectuar una translació de vector $\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (1, -2)$;

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Per tant, la matriu M que desfa el moviment és:

$$M = T \cdot G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara es pot emprar aquesta matriu M per calcular els vèrtexs originals:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

és a dir, els vèrtexs originals del triangle són $A(0, 1)$ i $B(-2, 3)$.

Sols resta calcular-ne el vèrtex C. Es poden utilitzar els dos vèrtexs trobats A i B, o bé calcular el vèrtex C' a partir de A' i B' i aplicar-li el moviment M per trobar C.

S'emprarà aquesta segona opció, atès que al triangle final es coneix, per l'enunciat de l'exercici, la posició de C' (a banda que és millor treballar amb dades conegudes en comptes de dades calculades).

Per trobar C' cal exigir la condició que el triangle és equilàter.

$$d(A', B') = d(A', C') = d(B', C')$$

Com $d(A', B') = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}$, s'obté, anomenant $C'(x, y)$,

$$d(A', C') = \sqrt{8} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \;\Rightarrow\; 8 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

y

$$d(B', C') = \sqrt{8} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} \;\Rightarrow\; 8 = (x-3)^2 + (y-3)^2$$

d'on, resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x^2 - 2x + y^2 - 2y & = & 6 \\ x^2 - 6x + y^2 - 6y & = & -10 \end{array}\right\}$$

Restant ambdues equacions s'obté $4x + 4y = 16$, és a dir, $y = 4 - x$, i substituint-la en la primera equació

$$x^2 - 2x + (4-x)^2 - 2(4-x) = 6$$

que es redueix a

$$2x^2 - 8x + 2 = 0$$

les arrels de la qual són $x = 2 \pm \sqrt{3}$; que proporciona els punts

$$C'(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}) \quad \text{o} \quad C'(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$$

i, tenint en compte la posició de C', el resultat correcte és

$$C'(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$$

Finalment, doncs, el vèrtex C original ve expressat per

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

és a dir, $C(-1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

Exercici 3.6.6 Un triangle, que té un vèrtex al punt $A(1,1)$ i un altre vèrtex al $B(3,1)$, ha estat sotmès als moviments següents: una rotació de centre A i angle de gir $-\frac{\pi}{2}\,rad.$ i, a continuació, una translació que porta el nou vèrtex C' (obtingut després del gir) a l'origen de coordenadas. Sabent que, després d'aquests moviments, el vèrtex B ha quedat situat al punt $B''(-1,-3)$, calculeu les coordenadas del vèrtex C en el triangle original. És un triangle rectangle?

Solució: Es calcula, en primer lloc, la matriu que proporciona el gir de centre A i angle $-\frac{\pi}{2}\,rad.$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin -\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordeu que les rotacions amb centre de gir diferent de l'origen de coordenades venen expressades pel producte de tres matrius.

Amb aquesta matriu es pot situar el nou punt B':

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

per la qual cosa $B'(1,-1)$. Ara, el següent moviment trasllada aquest punt B' a $B''(-1,-3)$ i es pot esbrinar el vector de translació aplicat: $\mathbf{v} = (-1,-3) - (1,-1) = (-2,-2)$. Així que el vértex C' ha de ser

$$C' = (0,0) - (-2,-2) = (2,2).$$

El vector $\mathbf{v}$ de translació ha de complir que $B'' = B' + \mathbf{v}$ d'on $\mathbf{v} = (-2,-2)$. D'altra banda, la translació porta el vector C' a $C''(0,0)$. Llavors també s'ha de complir $C'' = C' + \mathbf{v}$, d'on surt que $C'(2,2)$.

Finalment, n'hi ha prou de desfer el gir inicial per situar el vèrtex C. En aquest cas, per no tornar a calcular una matriu, desfent el moviment, es pot utilitzar la matriu R calculada. Es raona que, anomenant $C(x, y)$, s'ha de complir que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'on s'obtenen les equacions:

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ -x+2 & = & 2 \end{array}\right\}$$

la solució de les quals porta al punt $C(0, 2)$.

Com que el costat AB és horitzontal i el vértex C no es troba situat verticalment damunt de A ni B (no coincideixen les coordenades x dels punts), en cas de ser un triangle rectangle l'angle recte ha de ser el situat en el vèrtex C. Però, si aquest fos el cas, els vectors **CA** i **CB** haurien de ser perpendiculars. Com

$$\mathbf{CA} = (1, 1) - (0, 2) = (1, -1) \quad \text{i} \quad \mathbf{CB} = (3, 1) - (0, 2) = (3, -1)$$

i el producte escalar

$$\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB} = (1, -1) \cdot (3, -1) = 3 + 1 = 4 \neq 0;$$

es conclou que el triangle no és rectangle.

Exercici 3.6.7 Un triangle rectangle ha estat sotmès als següents moviments:

- Translació de vector $\mathbf{v} = (-1, 1)$
- Rotació d'angle $\theta = \pi$ i centre l'origen.
- Simetria respecte de l'eix OX.
- Escalatge amb factors d'escala $s_x = s_y = 1/2$ i punt fix l'origen.

quedant situat al final en una posició amb vèrtex $A'(-1, -1)$. Quines són les coordenades del punt A original?

Solució: Anomenant (a,b) les coordenades del punt A original, s'ha de complir que

$$M\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

sent M la matriu del moviment total, d'on

$$\begin{bmatrix}a\\b\\1\end{bmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

i la matriu M és el producte de matrius:

$$M=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\pi)&\sin(\pi)&0\\-\sin(\pi)&\cos(\pi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ara, emprant el wxMaxima es pot fer fàcilment tant el producte de matrius, per calcular M, com la inversa M^{-1}. Així,

$$M=\begin{pmatrix}-1/2&0&1/2\\0&1/2&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{i}\qquad M^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

i, finalment,

$$\begin{bmatrix}a\\b\\1\end{bmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}$$

per la qual cosa les coordenades del punt original són $A(3,-3)$.

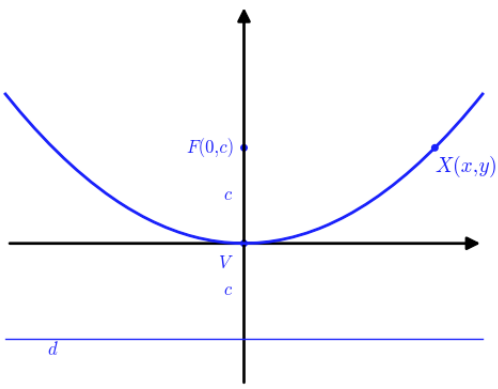
Còniques 4

Una cònica és una corba obtinguda en tallar un con per un pla. Segons la inclinació del pla, es determinen diversos tipus de còniques. En aquest tema s'estudiaran les còniques des del punt de vista del lloc geomètric que les defineixen (la característica geomètrica que compleixen els punts de la cònica).

4.1 Paràbola

Una paràbola es defineix com el conjunt de punts (x, y) la distància dels quals a un punt fixat $F(x_0, y_0)$, anomenat *focus*, és igual a la distància a una recta fixada, anomenada *directriu*.

Qualsevol paràbola pot ser rodada i traslladada de forma que la directriu és a una distància c de l'eix OX i el focus és sobre l'eix OY al punt $F(0, c)$ $(c > 0)$. En aquesta posició, anomenada *posició estàndard*, l'origen de coordenades pertany a la paràbola.



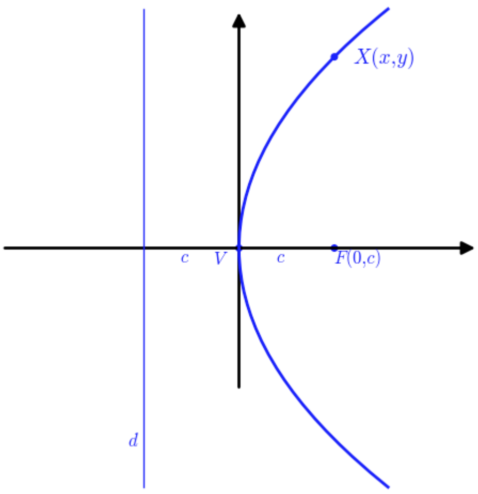
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

estàndard
$$d(X,P) = d(X,d)$$
Això vol dir,
$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = y + c$$
d'on, elevant al quadrat tots dos costats,
$$(y+c)^2 = (\sqrt{x^2 + (y-c)^2})^2 = x^2 + (y-c)^2$$
i, desfent els parèntesis,
$$y^2 + 2cy + c^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$
d'on s'obté, finalment,
$$\boxed{4cy = x^2}$$
Aquesta equació es coneix com equació canònica o estàndard de la paràbola. Els elements geomètrics que la caracteritzen són:

- vèrtex: $O(0,0)$;
- focus: $F(0,c)$;
- eix: recta $x = 0$ (eix OY);
- directriu: $y = -c$

Observeu que tot és vàlid igualment si $c < 0$; és a dir, quan el focus és sobre el semieix negatiu.



L'altra posició estàndard és la mostrada a la figura, en què la directriu és a una distància c de l'eix OY i el focus és a l'eix OX sobre el punt $F(c,0)$ $(c > 0)$. L'equació estàndard és
$$\boxed{4cx = y^2}$$

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

i els elements geomètrics que la caracteritzen són:

- vèrtex: $O(0,0)$;
- focus: $F(c,0)$ $(c>0)$;
- eix: recta $y=0$ (eix OX);
- directriu: $x=-c$

I, com abans, tot és vàlid també si $c<0$.

Quan la paràbola és en posició estàndard, n'hi ha prou de determinar el paràmetre c per conèixer tots els elements geomètrics.

Exemple 4.1

Per determinar els elements geomètrics de la paràbola $y=-4x^2$, s'ha d'expressar en forma estàndard $4cy=x^2$; per tant,

$$-\frac{1}{4}y=x^2$$

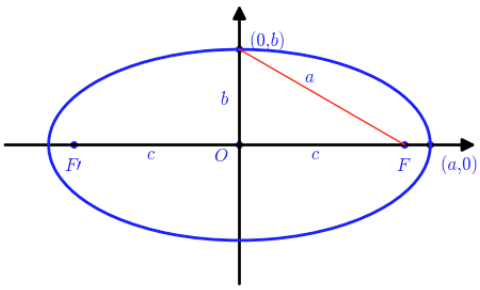
d'on es dedueix que $4c=-\frac{1}{4}$ i, llavors, $c=-\frac{1}{16}$.

Així doncs, els elements geomètrics són:

- vèrtex: $O(0,0)$;
- focus: $F(0,-\frac{1}{16})$;
- eix: recta $x=0$ (eix OY);
- directriu: $y=\frac{1}{16}$

4.2 El·lipse

Una el·lipse es defineix com el conjunt de punts (x, y) que compleixen que la suma de les distàncies a dos punts prefixats F i F', anomenats *focus*, és constant.
En la posició estàndard, representada en la figura, els focus són situats sobre l'eix OX i equidistants de l'origen; és a dir, $F(c, 0)$ i $F'(-c, 0)$ $(c > 0)$.



Llavors, la definició diu que

$$d(P, F) + d(P, F') = k, \quad k > 0$$

Es pot suposar que $k = 2a$ i, llavors,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

d'on

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$4a^2 + (x+c)^2 - (x-c)^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Simplificant i reiterant el procés per eliminar-ne l'arrel

$$4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(4a^2 + 4cx)^2 = (4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$16a^4 + 16c^2x^2 + 32a^2cx = 16a^2(x^2 + c^2 + 2xc + y^2)$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

que pot escriure's

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

i dividint pel terme de l'esquerra queda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Anomenant, $b^2 = a^2 - c^2$ (que és sempre positiu) queda, finalment, l'equació estàndard de l'el·lipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Els elements geomètrics que la caracteritzen són:

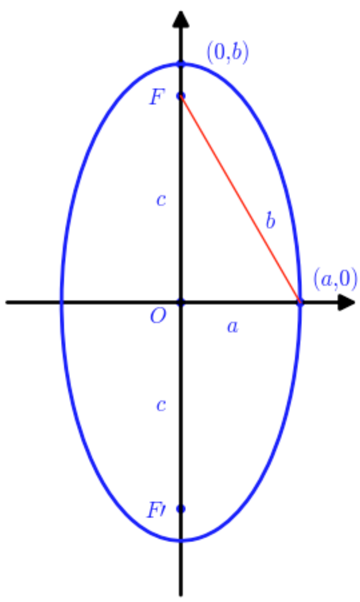
- centre: $O(0,0)$;
- focus: $(\pm c, 0)$;
- vèrtexs: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$;
- eix major: recta $y = 0$ (eix OX), amb longitud $2a$;
- eix menor: recta $x = 0$ (eix OY), amb longitud $2b$;

L'altra posició estàndard s'obté d'intercanviar els papers de x i y. A la figura següent la teniu representada juntament amb els valors característics, a, b, c.
L'equació estàndard d'aquesta posició és

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on ara $b > a$ i $b^2 - a^2 = c^2$.
Els elements geomètrics que la caracteritzen són:

- centre: $O(0,0)$;
- focus: $(0, \pm c)$;
- vèrtexs: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$;
- eix major: recta $x = 0$ (eix OY), amb longitud $2b$;
- eix menor: recta $y = 0$ (eix OX), amb longitud $2a$;



Per distingir una posició estàndard respecte de l'altra, cal fixar-se en quin denominador és més gran. Si el denominador de x^2, a l'equació estàndard, és major que el denominador de y^2; vol dir que l'eix major és a l'eix OX. Si, per contra, el denominador de y^2, a l'equació estàndard, és major que el denominador de x^2; vol dir que l'eix major és a l'eix OY.

Quan l'el·lipse és en posició estàndard, n'hi ha prou de determinar els paràmetres a, b i c per conèixer tots els elements geomètrics.

Exemple 4.2

Per trobar els elements geomètrics de l'el·lipse $8x^2 + 2y^2 = 2$, es comença dividint per 2 l'equació i s'obté:

$$4x^2 + y^2 = 1$$

que pot expressar-se

$$\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

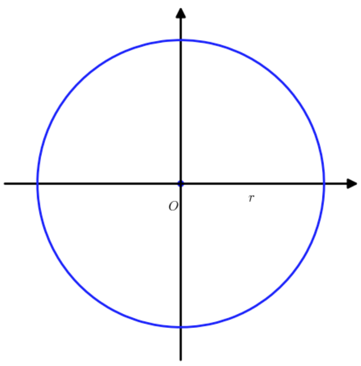
D'aquí es treuen els valors característics:

$$a^2 = \frac{1}{4}, \quad b^2 = 1, \quad c^2 = b^2 - a^2 = \frac{3}{4}.$$

Llavors, els elements geomètrics serien

- centre: $O(0,0)$;
- focus: $(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$;
- vèrtexs: $(\pm\frac{1}{4}, 0)$, $(0, \pm 1)$;
- eix major: recta $x = 0$ (eix OY), amb longitud $2b = 2$;
- eix menor: recta $y = 0$ (eix OX), amb longitud $2a = \frac{1}{2}$;

4.3 Circumferència



La circumferència és una cas particular de l'el·lipse quan els dos focus coincideixen en un punt comú C anomenat el *centre* de la circumferència. Així, la circumferència es pot definir com el conjunt de punts que disten d'un punt fix C una distància constant r.

A la posició estàndard, el centre es troba a l'origen de coordenades $O(0,0)$ i, llavors, un punt $X(x,y)$ és a la circumferència si

$$d(X,C) = r$$

que es tradueix en

$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

d'on s'obté l'equació en forma estàndard:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

amb els elements geomètrics:

- centre $O(0,0)$;
- radi r.

D'altra banda, quan el centre es troba en un punt $C(c_1,c_2)$, l'equació queda

$$\boxed{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2}$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

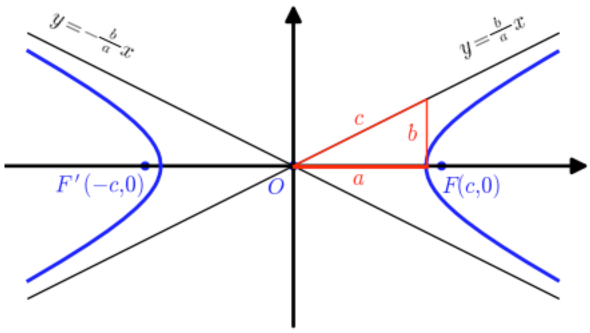
Exemple 4.3

L'equació de la circumferència de centre $O(0,0)$ i radi 3 és

$$x^2 + y^2 = 9$$

4.4 Hipèrbola

Una hipèrbola es defineix com el conjunt de punts $X(x,y)$ que compleixen que la diferència de les distàncies a dos punts prefixats F i F', anomenats *focus*, és constant.
En la posició estàndard, respresentada en la figura, els focus són situats sobre l'eix OX i equidistants de l'origen; és a dir, $F(c,0)$ i $F'(-c,0)$ $(c > 0)$.



Llavors, la definició diu que

$$d(P,F) - d(P,F') = k,$$

Es pot suposar que $k = 2a$ i, llavors,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a, \quad a > 0$$

d'on

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (\pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 - 4a^2 - (x+c)^2 = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\pm(4a^2 + 4cx) = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

i, elevant de nou al quadrat,

$$(4a^2 + 4cx)^2 = (4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$
$$16a^4 + 16c^2x^2 + 32a^2cx = 16a^2(x^2 + c^2 + 2xc + y^2)$$
$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

que pot escriure's

$$a^2(c^2 - a^2) = (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2$$

i, dividint pel terme de l'esquerra, queda

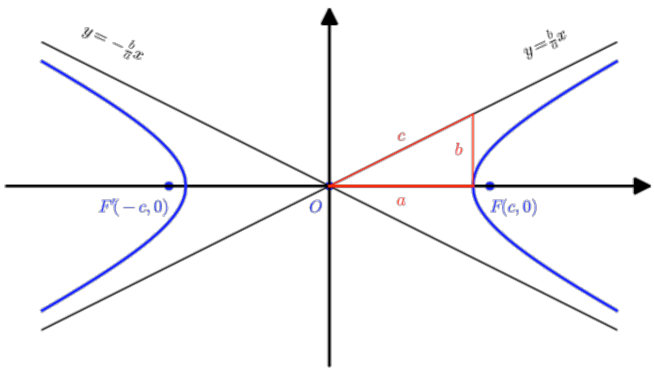
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Anomenant, $b^2 = c^2 - a^2$ (que és sempre positiu) queda, finalment, l'equació estàndard de la hipèrbola:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

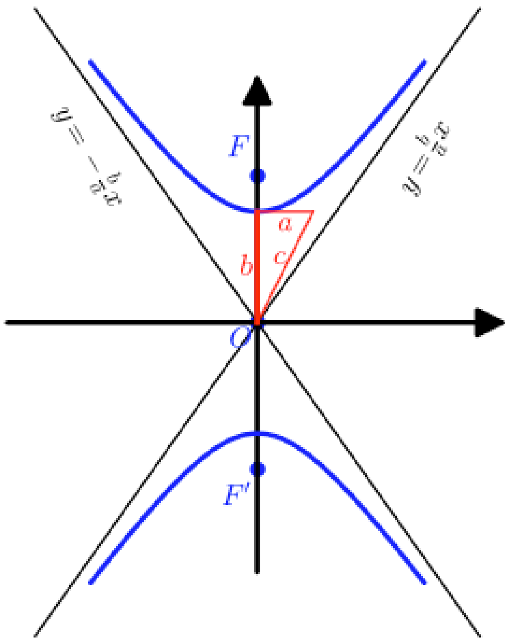
Els elements geomètrics que la caracteritzen són:

- centre $O(0,0)$;
- focus: $(\pm c, 0)$;
- vèrtexs: $(\pm a, 0)$;
- eix transversal: recta $y = 0$ (eix OX), amb longitud $2a$;
- asímptotes $y = \pm\frac{b}{a}x$.



ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138



L'altra posició estàndard s'obté d'intercanviar els papers de x i y. A la figura la teniu representada juntament amb els valors característics, a, b, c.
En aquest cas, l'equació estàndard és

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$$

Els elements geomètrics que la caracteritzen són:

- centre $O(0,0)$;
- focus: $(0, \pm c)$;
- vèrtexs: $(0, \pm b)$;
- eix transversal: recta $x = 0$ (eix OY), amb longitud $2b$;
- asímptotes $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Cal notar que la diferència entre una posició estàndard i l'altra es distingeix per quin és el terme (x^2 o y^2) que té el signe negatiu. En particular, els focus es troben sobre l'eix OX si el terme x^2 és positiu a l'equació estàndard i, en aquest cas, l'eix és una recta horitzontal. Anàlogament, els focus es troben sobre l'eix OY si el terme y^2 és positiu a l'equació estàndard i, en aquest cas, l'eix és una recta vertical.

Quan la hipèrbola és en posició estàndard, n'hi ha prou de determinar els paràmetres a, b i c per conèixer tots els elements geomètrics.

Exemple 4.4

Considereu la hipèrbola $\frac{y^2 - x^2}{4} = 1$. Per trobar els elements geomètrics característics s'ha d'expressar l'equació de la hipèrbola en forma estàndard, i s'obtenen d'aquesta forma els paràmetres a, b i c.

En aquest cas, n'hi ha prou de separar la fracció de la forma $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1$, d'on resulta senzill identificar els paràmetres característics:

$$a = 2; \quad b = 2; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Llavors, els elements geomètrics que la caracteritzen són

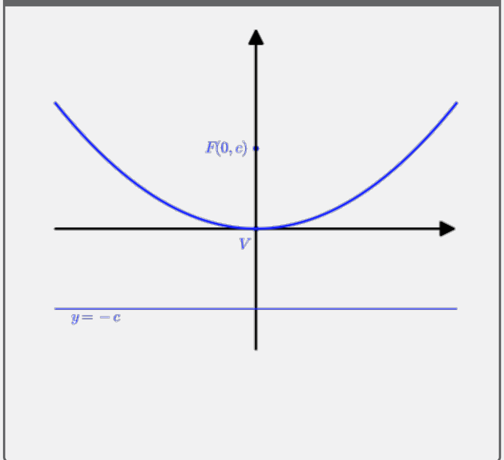
- centre $O(0,0)$
- focus: $(0, \pm 2\sqrt{2})$;
- vèrtexs: $(0, \pm 2)$;
- eix transversal: recta $x = 0$ (eix OY), amb longitud $2a = 4$;
- assímptotes $y = \pm \dfrac{a}{b} x = \pm x$.

A continuació, es resumeixen les diverses equacions estàndard de les còniques estudiades:

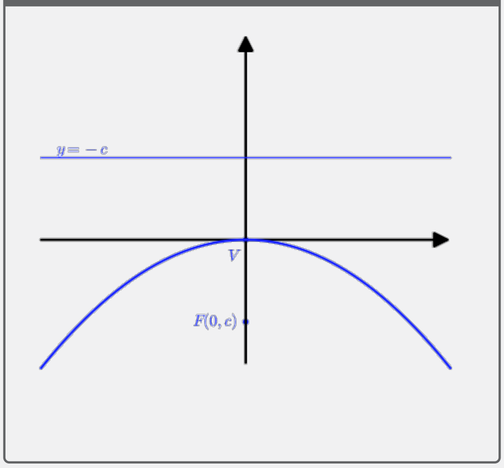
Paràbola $4cy = x^2$

- vèrtex: $O(0,0)$;
- focus: $F(0,c)$;
- eix: recta $x = 0$ (eix OY);
- directriu: $y = -c$

$c > 0$



$c < 0$



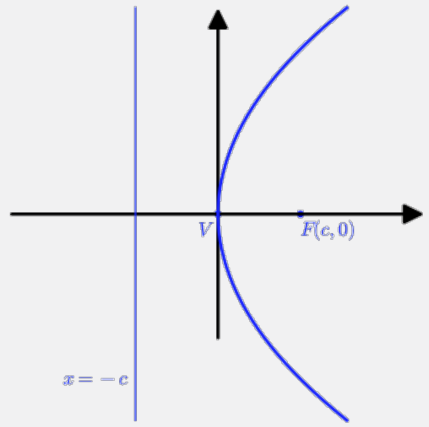
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

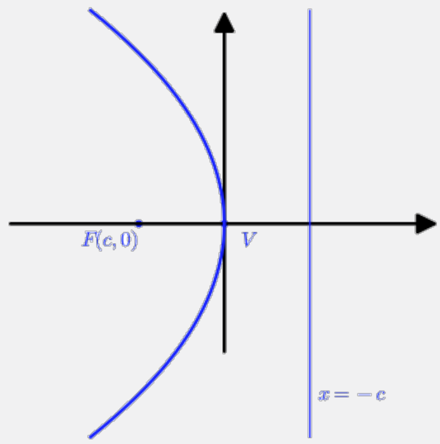
Paràbola $4cx = y^2$

- vèrtex: $O(0,0)$;
- focus: $F(c,0)$;
- eix: recta $y = 0$ (eix OX);
- directriu: $x = -c$

$c > 0$

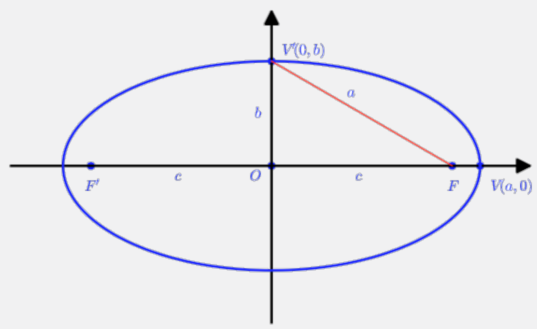


$c < 0$



El·lipse $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b, \qquad c^2 = a^2 - b^2$

- centre: $O(0,0)$;
- focus: $F(\pm c, 0)$;
- vèrtexs: $V(\pm a, 0)$; $V'(0, \pm b)$
- eix major: recta $y = 0$ (eix OX) amb longitud $2a$;
- eix menor: recta $x = 0$ (eix OY) amb longitud $2b$;

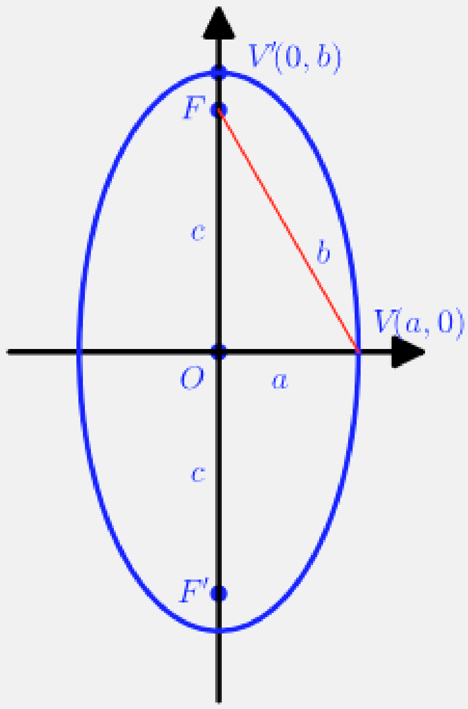


ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

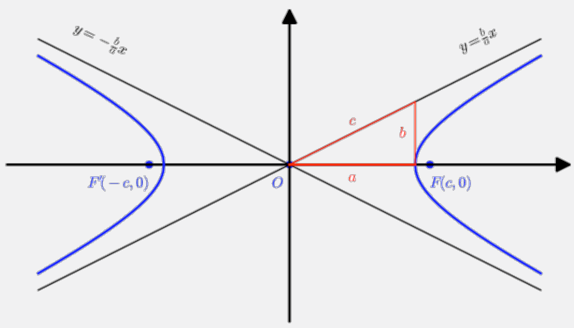
El·lipse $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad a<b, \qquad c^2=b^2-a^2$

- centre: $O(0,0)$;
- focus: $F(0,\pm c)$;
- vèrtexs: $V(\pm a,0)$; $V'(0,\pm b)$
- eix major: recta $x=0$ (eix OY) amb longitud $2b$;
- eix menor: recta $y=0$ (eix OX) amb longitud $2a$;



Hipèrbola $\quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \qquad c^2=a^2+b^2$

- centre $O(0,0)$
- vèrtexs: $(\pm a,0)$;
- focus: $(\pm c,0)$;
- eix transversal: recta $y=0$ (eix OX), amb longitud $2a$;
- assímptotes: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

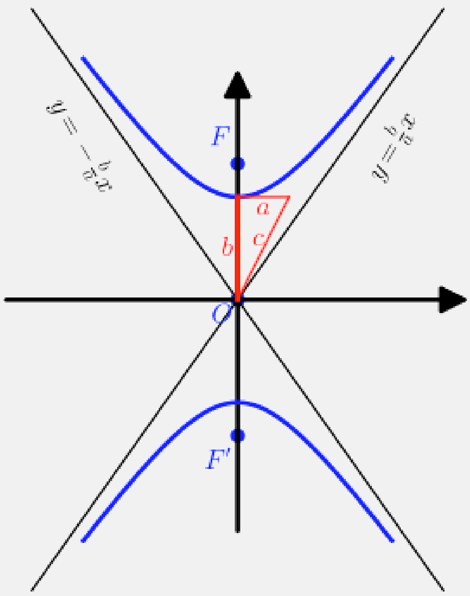


ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Hipèrbola $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2$

- centre $O(0,0)$
- vèrtexs: $(0, \pm b)$;
- focus: $(0, \pm c)$;
- eix transversal: recta $x = 0$ (eix OY), amb longitud $2b$;
- asímptotes: $y = \pm \frac{b}{a}x$.



4.5 Còniques en posició no estàndard

Les còniques que no es troben en posició estàndard venen donades per una equació de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Si $C \neq 0$ la cònica ha sofert una rotació. Si $D \neq 0$ o $E \neq 0$ la cònica ha estat traslladada.

No totes les equacions d'aquesta forma representen una cònica real en incloure, també, les anomenades còniques degenerades i les imaginàries. En aquest text s'estudiaran sols les còniques traslladades no rodades.

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Exemple 4.5

Donada la cònica definida per l'equació

$$x^2 + 2x + 2y^2 + 2y = 2$$

es desitja determinar-ne el tipus i trobar-ne els elements geomètrics característics.

La idea és reduir l'equació anterior a una suma (o resta, en el cas de les hipèrboles) de quadrats (eliminant els termes x i y). Aquest procediment es coneix com *completació de quadrats*:

Per saber quina quantitat s'ha d'afegir a l'expressió x^2+2x per transformar-la en un quadrat, es considera

$$x^2 \boxed{+2}\, x$$

$$\boxed{+2 : 2 = +1}$$

$$(x \boxed{+1})^2 = x^2 + 2x + 1$$

per tant, cal afegir $+1$ a l'expressió inicial.

Per esbrinar quina quantitat s'ha d'afegir a l'expressió $2y^2 + 2y$ per transformar-la en un quadrat, cal deixar fora del quadrat el coeficient 2 i, per tant,

$$2y^2 \boxed{+2}\, y$$

$$\boxed{+2 : 2 = +1} \downarrow \boxed{+1 : 2 = +1/2}$$

$$2(y \boxed{+\tfrac{1}{2}})^2 = 2y^2 + 2y + 1/2$$

per tant, cal afegir $+\frac{1}{2}$ a l'expressió inicial.

Llavors l'equació inicial pot escriure's

$$(x^2 + 2x + 1) + 2y^2 + 2y + \frac{1}{2} = 2 + 1 + \frac{1}{2};$$

és a dir,

$$(x+1)^2 + 2(y + \frac{1}{2})^2 = \frac{7}{2}$$

i, dividint per $7/2$,

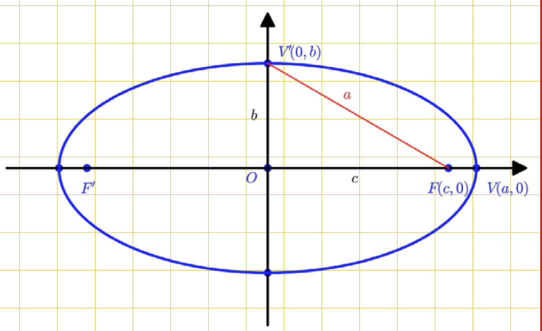
$$\frac{(x+1)^2}{7/2} + \frac{(y+1/2)^2}{7/4} = 1$$

i, amb la translació $x' = x + 1$ i $y' = y + 1/2$ queda en la forma estàndard:

$$\frac{x'^2}{7/2} + \frac{y'^2}{7/4} = 1$$

per la qual cosa la cònica és una el·lipse amb $a = \sqrt{7/2}$, $b = \sqrt{7}/2$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}/2$, on els elements geomètrics serien:

- centre $(0, 0)$;
- vèrtexs $(\pm\sqrt{7/2}, 0)$; $(0, \pm\sqrt{7}/2)$;
- focus $(\pm\sqrt{7}/2, 0)$;
- eix major sobre la recta $y' = 0$ (eix OX') amb longitud $2a = \sqrt{14}$;
- eix menor sobre la recta $x' = 0$ (eix OY') amb longitud $2b = \sqrt{7}$.



Ara, desfent la translació, $x = x' - 1$ i $y = y' - 1/2$ i, per tant, de vector $(-1, -1/2)$, es poden recuperar els elements geomètrics de l'el·lipse original.

- centre $(-1, -1/2)$;
- vèrtexs:

  $(-1\pm\sqrt{\frac{7}{2}}, -\frac{1}{2})$; $(-1, -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2})$;
- focus $(-1 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2})$;
- eix major horitzontal sobre la recta $y = -1/2$ amb longitud $2a = \sqrt{14}$;
- eix menor vertical sobre la recta $x = -1$ amb longitud $2b = \sqrt{7}$;

Per moure els punts n'hi ha prou d'afegir-los el vector de translació: per exemple, els focus

$$(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}, 0) + (-1, -\frac{1}{2}) = (-1\pm\frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2})$$

Per moure les rectes, s'empren les equacions de la translació canviant y' per $y+1/2$ i x' per $x+1$ als eixos. Així, per exemple, a l'eix menor

$$x' = 0 \;\Rightarrow\; x + 1 = 0$$

Exemple 4.6

Donada l'equació $x^2 - 2x - 2y^2 - 4y = 0$, es desitja determinar quin tipus de cònica és, així com els elements geomètrics característics.

Com a l'exemple anterior, es necessiten afegir determinades quantitats per poder completar els quadrats

Per saber quina quantitat s'ha d'afegir a l'expressió x^2-2x per transformar-la en un quadrat, es considera

$$x^2 \boxed{-2}\, x$$

$\boxed{\text{-2 : 2= -1}} \downarrow$

$$(x \boxed{-1})^2 = x^2 - 2x+1$$

per tant, cal afegir $+1$ a l'expressió inicial.

Per saber quina quantitat s'ha d'afegir a l'expressió $-2y^2-4y$ per transformar-la en un quadrat, cal deixar fora del quadrat el coeficient -2 i, per tant,

$$-2y^2 \boxed{-4}\, y$$

$\boxed{\text{-4 : 2= -2}} \downarrow \boxed{\text{-2 : (-2)= +1}}$

$$-2(y \boxed{+1})^2 = -2y^2 - 4y-2$$

per tant, cal afegir -2 a l'expressió inicial.

Així, en afegir les quantitats necessàries, l'equació inicial pot escriure's:

$$x^2 - 2x+1 - 2y^2 - 4y-2 = 0+1-2;$$

és a dir,

$$(x-1)^2 - 2(y+1)^2 = -1$$

i, canviant el signe

$$2(y+1)^2 - (x-1)^2 = 1$$

i, amb la translació

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{array}\right\} \quad (\text{vector } (-1, 1)),$$

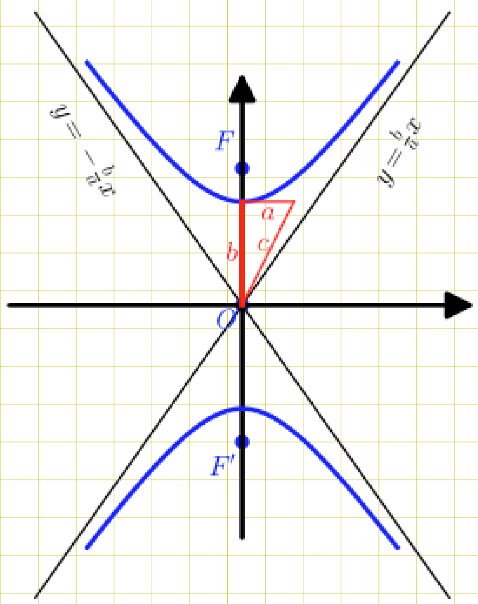
queda en la forma estàndard:

$$\frac{y'^2}{1/2} - \frac{x'^2}{1} = 1$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

on $a=1$, $b=\sqrt{1/2}$ i $c=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{3/2}$; per la qual cosa la cònica és una hipèrbola en la posició estàndard indicada a la figura.



Per tant, els elements geomètrics serien:

- centre $(0,0)$;
- vèrtexs $(0,\pm\sqrt{1/2})$;
- focus $(0,\pm\sqrt{3/2})$
- eix transversal sobre la recta $x'=0$ (eix OY') amb longitud $2\sqrt{1/2}=\sqrt{2}$;
- asímptotes $y'=\pm\sqrt{1/2}x'$.

Ara, desfent la translació: $x=x'+1$ e $y=y'-1$ (per tant, de vector $(1,-1)$); es poden escriure els elements geomètrics de la hipèrbola original:

- centre $(1,-1)$;
- vèrtexs $(1,-1\pm\sqrt{1/2})$;
- focus $(1,-1\pm\sqrt{3/2})$;
- eix transversal sobre la recta $x=1$ amb longitud $\sqrt{2}$;
- asímptotes:

$$y+1=\pm\sqrt{1/2}(x-1).$$

Cal notar, en aquest últim pas, que per moure els punts n'hi ha prou d'afegir-los el vector de translació: per exemple, els vèrtexs

$$V=(0,\pm\sqrt{1/2})+(1,-1)=(1,-1\pm\sqrt{1/2}).$$

Mentre que, per moure les rectes, s'empren les equacions de la translació: a l'eix i a les asímptotes es canvia y' per $y+1$ i x' per $x-1$. Així, per exemple,

$$y'=\pm\sqrt{1/2}x' \ \Rightarrow\ y+1=\pm\sqrt{1/2}(x-1)$$

4.6 Exercicis resolts

Exercici 4.6.1 Calculeu els elements geomètrics de la cònica

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 4y = 1$$

Solució: El primer pas és afegir-hi les quantitats necessàries per completar els quadrats, de forma que desapareguin els termes x i y:

Per saber quines quantitats s'han d'afegir a l'expressió $x^2 + 2x$ i a l'expressió $2y^2 - 4y$ per transformar-les en quadrats, consulta l'Exemple 4.5 o l'Exemple 4.6 anteriors.

$$x^2 + 2x + 1 + 2y^2 - 4y + 2 = 1 + 1 + 2$$

que pot escriure's

$$(x+1)^2 + 2(y-1)^2 = 4.$$

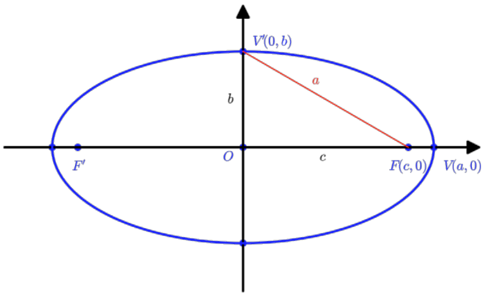
En efectuar el canvi

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{array}\right\}$$

queda l'equació en forma estàndard

$$x'^2 + 2y'^2 = 4 \;\Rightarrow\; \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1$$

que correspon a una el·lipse, amb $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ i $c = \sqrt{2}$, en la posició estàndard indicada a la figura.



Per tant, els elements geomètrics són:

- centre $O(0,0)$;
- focus $F(\pm\sqrt{2},0)$;
- vèrtexs $V(\pm 2,0)$, $V'(0,\pm\sqrt{2})$;
- eix major sobre l'eix OX $(y'=0)$ amb longitud 4;
- eix menor sobre l'eix OY $(x'=0)$ amb longitud $2\sqrt{2}$.

En desfer la translació per tornar a la posició original, s'aplica una translació de vector $(-1,1)$ i s'obté:

- Focus $F(-1\pm\sqrt{2},1)$.
- Centre $C(-1,1)$.
- Vèrtex $V(-1\pm 2,1)$, $V'(-1,1\pm\sqrt{2})$.
- Eix major sobre la recta $y-1=0$ amb longitud 4.
  Eix menor sobre la recta $x+1=0$ amb longitud $2\sqrt{2}$.

Exercici 4.6.2 Determineu el tipus i els elements geomètrics de la cònica definida per

$$x^2+4x+16y-76=0$$

Solució: Per començar, es completa el quadrat afegint la quantitat necessària:

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

$$x^2 + 4x + 4 + 16y = 76 + 4$$

que pot escriure's

$$(x+2)^2 = -16y + 80$$

i també

$$(x+2)^2 = -16(y-5)$$

Per saber quina quantitat s'ha d'afegir a l'expressió $x^2 + 4x$ per transformar-la en un quadrat, consulteu l'Exemple 4.5 o l'Exemple 4.6.

la qual, en efectuar la translació

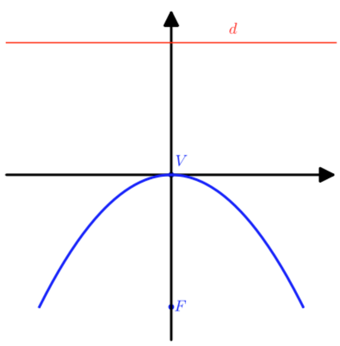
$$\left.\begin{array}{l} x' = x + 2 \\ y' = y - 5 \end{array}\right\} \quad \text{(de vector } (2, -5)),$$

queda de la forma estàndard $x'^2 = -16y'$ que correspon a una paràbola de la forma $x^2 = 4cy$. Llavors,

$$4c = -16 \quad \Rightarrow \quad c = -4$$

i així, els elements geomètrics són

- vèrtex: $O(0,0)$;
- focus: $F(0,-4)$;
- eix: recta $x' = 0$ (eix OY');
- directriu: $y' = 4$



En desfer la translació:

- vèrtex: $O(-2,5)$;
- focus: $F(-2,1)$;
- eix: recta $x + 2 = 0$;
- directriu: $y - 5 = 4$

Recordeu que, per desfer la translació, n'hi ha prou d'afegir el vector $(-2,5)$ als punts i canviar $x' = x+2$ i $y' = y-5$ a l'eix i la directriu.

Exercici 4.6.3 Donada la cònica $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$, determineu el tipus i els elements geomètrics característics.

Solució: Completant quadrats:

$$(x^2 + 2x+1) + 2(y^2 - 2y+1) = 0+1+2;$$

és a dir,

$$(x+1)^2 + 2(y-1)^2 = 3$$

i, dividint per 3,

$$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{3/2} = 1$$

Amb la translació $x' = x+1$ i $y' = y-1$ (de vector $(1,-1)$) queda en la forma canònica:

$$\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{3/2} = 1$$

per la qual cosa la cònica és una el·lipse amb

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{3/2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3/2}.$$

Llavors, els elements geomètrics, en posició estàndard, són:

- centre $(0,0)$;
- vèrtexs $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3/2})$;
- focus $(\pm\sqrt{3/2}, 0)$;
- eix mayor sobre la recta $y' = 0$, amb longitud $2\sqrt{3}$;
- eix menor sobre la recta $x' = 0$, amb longitud $2\sqrt{3/2} = \sqrt{6}$;

Desfent la translació, $x = x' - 1$ e $y = y' + 1$ (per tant, de vector $(-1,1)$), l'el·lipse original té els elements geomètrics:

- centre $(-1, 1)$;
- vèrtexs $(-1 \pm \sqrt{3}, 1)$, $(-1, 1 \pm \sqrt{3/2})$;
- focus $(-1 \pm \sqrt{3/2}, 1)$;
- eix major sobre la recta $y - 1 = 0$, amb longitud $2\sqrt{3}$;
- eje menor sobre la recta $x + 1 = 0$, amb longitud $\sqrt{6}$;

Exercici 4.6.4 Se sap que una el·lipse té un focus en el punt $F(1,2)$ i el centre en el punt $C(2,3)$.

1. Determineu les equacions de les rectes que contenen els eixos major i menor, respectivament.

2. Determineu, raonadament, en quin angle seria necessari girar l'el·lipse perquè l'eix major quedi situat sobre la recta $y = 3x + 8$.

3. Si l'el·lipse es gira en un angle de $30°$, en sentit horari, amb centre de gir el focus F, determineu, raonadament, l'equació de la recta on quedarà situat l'eix major.

Solució:

1. L'eix major és el que conté els focus i el centre, per tant, n'hi ha prou amb trobar la recta que passa pels punts $F(1,2)$ i $C(2,3)$: un vector director seria el vector $\mathbf{FC} = (1,1)$ i, llavors,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow y = x + 1$$

La recta $y = x + 1$ conté l'eix major. L'eix menor és perpendicular a aquest i passa pel centre. Llavors, un vector director en serà un de perpendicular a $(1,1)$; per exemple, $\mathbf{v} = (-1,1)$. Així, la recta vindrà determinada pel punt $C(2,3)$ i el vector $\mathbf{v} = (-1,1)$; és a dir,

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow y = -x + 5$$

2. L'eix major es troba sobre la recta $y = x + 1$ (amb vector director $\mathbf{v} = (1,1)$) i un vector director de la recta $y = 3x + 8$ seria $\mathbf{w} = (1,3)$. L'angle α entre tos dos vectors és

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

d'on s'hauria d'efectuar un gir d'angle $\alpha \approx 26.56°$ en sentit antihorari.

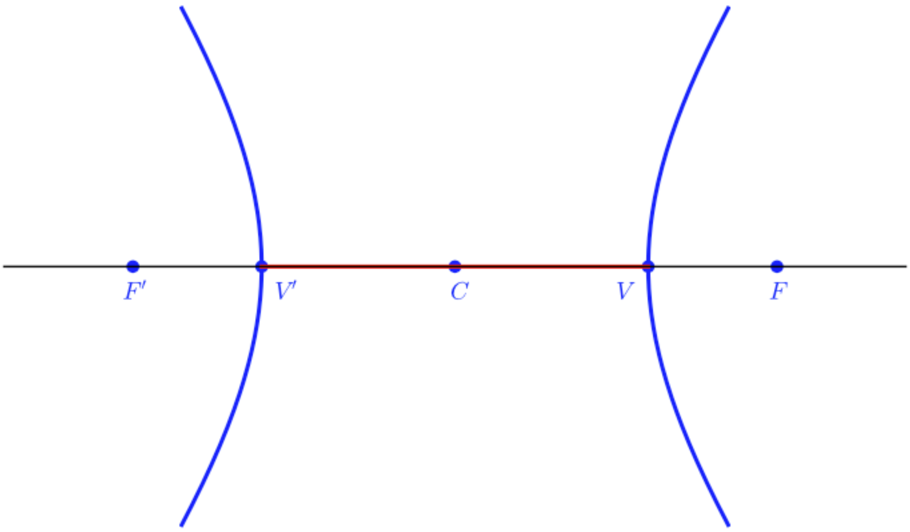
3. L'angle que forma l'eix major amb l'eix OX és de $45°$ (recta $y = x+1$). Per tant, en girar $30°$, en sentit horari, l'angle del nou eix major amb l'eix OX serà de $15°$. Per tant, el pendent d'aquesta nova recta serà $m = \tan(15°)$. A més, passa pel focus $F(1,2)$, atès que aquest punt, en ser el centre de gir, queda fix. Aleshores l'equació de la recta és

$$y - 2 = \tan(15°)(x - 1), \quad \text{(equació punt-pendent)}$$

Exercici 4.6.5 Trobeu l'equació de la hipèrbola amb focus en $(5, 1)$ i $(-5, 1)$ i eix transversal de longitud 6.

Solució: N'hi ha prou amb trobar el valor dels paràmetres a i b de l'equació canònica i les coordenades del centre $C(c_1, c_2)$.

Com tots dos focus són a la recta horitzontal $y = 1$, la posició de la hipèrbola serà:



i l'equació canònica serà de la forma:

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} - \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

sent $C(c_1, c_2)$ el centre de la hipèrbola.

Ara, el centre és el punt mitjà entre els focus $C = \dfrac{F + F'}{2} = (0, 1)$ i així, el valor del paràmetre $c = 5$. D'altra banda, com l'eix transversal es troba sobre la recta $y = 1$, que és horitzontal, ha de ser $2a = 6$, és a dir, $a = 3$.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Finalment, $a^2 + b^2 = c^2$, d'on $b = 4$. Així, la cònica té per equació:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

Exercici 4.6.6 Donada l'equació $x^2 - y^2 + 2x - 4y = 4$. Determineu el tipus de cònica que representa i els elements geomètrics.

Solució: Per començar, s'afegeixen les quantitats necessàries per completar els quadrats:

$$x^2 + 2x{+1} - y^2 - 4y{-4} = 4{+1}{-4}$$

que pot escriure's

$$(x+1)^2 - (y+2)^2 = 1$$

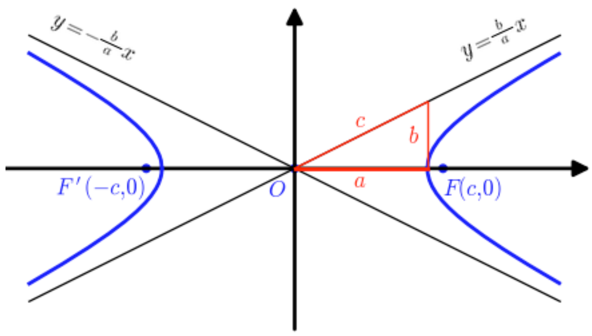
En efectuar el canvi

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{array}\right\}$$

(translació de vector $(1, 2)$) queda l'equació en forma estándard

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

que correspon a una hipèrbola, amb paràmetres $a = 1$, $b = 1$ i $c = \sqrt{2}$, d'acord amb la figura següent i, per tant, els elements geomètrics són:



- Centre $C(0, 0)$.
- Focus $F(\pm\sqrt{2}, 0)$.
- Vèrtexs $V(\pm 1, 0)$.
- Eix transversal sobre la recta $y' = 0$ (eix OX') amb longitud 2.
- Asímptotes: $y' = \pm x'$.

En desfer la translació per tornar a la posició original (aplicant, llavors, una translació de vector $(-1, -2)$), s'obtenen els elements:

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

- Centre $C(-1,-2)$.
- Focus $F(-1\pm\sqrt{2},-2)$.
- Vèrtexs $V(-1\pm 1,-2)$.
- Eix transversal sobre la recta $y+2=0$ amb longitud 2.
- Asímptotes: $y+2=\pm(x+1)$.

Recordeu que, per desfer la translació, n'hi ha prou d'afegir el vector $(-1,-2)$ als punts i canviar $x'=x+1$ i $y'=y+2$ a l'eix i les asímptotes.

Exercici 4.6.7 Una elipse té els vèrtexs de l'eix major en els punts $A(1,1)$ i $B(3,3)$.

1. Si un dels focus es troba al punt $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$, quina longitud té l'eix menor?
2. Calculeu l'equació de la recta que conté l'eix major i el seu pendent.
3. Expresseu, en forma matricial, el moviments necessaris perquè l'eix menor quedi en posició vertical, amb el vèrtex A en el punt $A'(0,1)$ i el vèrtex B' situat a l'esquerra de A'.

Solució: (1) La longitud de l'eix major és la distància entre els dos vèrtexs, per tant,

$$2a=d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}\ \Rightarrow a=\sqrt{2}$$

D'altra banda, és clar que el centre està en el punt mitjà $C(2,2)$, per la qual cosa la distància del focus al centre és

$$c=d(F,C)=\sqrt{(2-\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2(2-\sqrt{2})^2}$$

Ara la longitud de l'eix menor $2b$, ve donada per la relació:

$$a^2=b^2+c^2$$

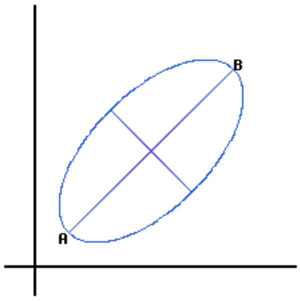
d'on

$$2=b^2+2(2-\sqrt{2})^2$$

i aïllant $b^2=2-2(4-4\sqrt{2}+2)=8\sqrt{2}-10$; és a dir,

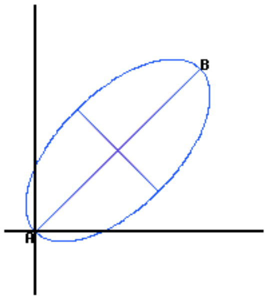
$$b=\sqrt{8\sqrt{2}-10}.$$

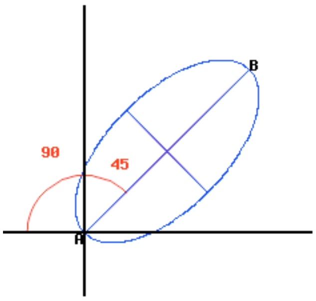
(2) La recta ve deteminada per dos punts $A(1,1)$ i $B(3,3)$; per la qual cosa, l'equació de la recta és $y = x$. El pendent d'aquesta recta és $m = 1$ (angle de 45° respecte de l'eix OX).



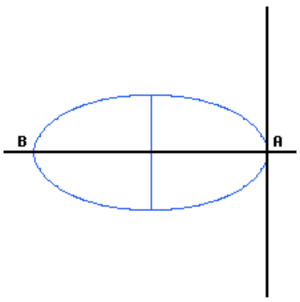
(3) Per començar, es desplaça el vèrtex A a l'origen de coordenades: **translació** de vector $\mathbf{v} = (-1, -1)$, que matricialment s'expressa:

$$T_{A\to O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Perquè l'eix menor quedi vertical, l'eix major ha de quedar en horitzontal, i s'aprofita per girar-la de forma que els vèrtexs quedin en la posició demanada. S'efectua, per tant, un **gir** de centre l'origen i angle 135°.
Matricialment:

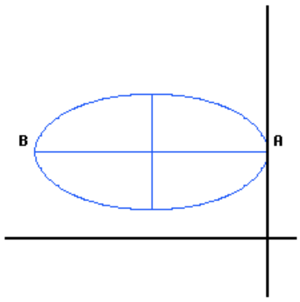


$$R = \begin{pmatrix} \cos(135°) & -\sin(135°) & 0 \\ \sin(135°) & \cos(135°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Finalment, es traslladà el punt A (ara a l'origen) al punt de destinació $A'(0,1)$ mitjançant una **translació** de vector $\mathbf{w} = (0,1)$. Matricialment:



$$T_{O\to A'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

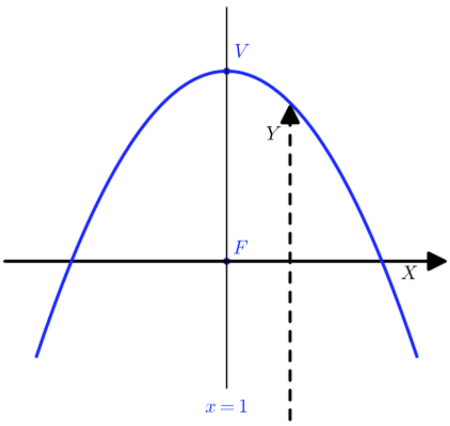
Per tant, el moviment total que s'ha de realitzar ve donat pel producte de matrius:

$$M = T_{O\to A'} \cdot R \cdot T_{A\to O}$$

(Nota: la solució presentada no és l'única possible)

Exercici 4.6.8 Trobeu l'equació de la paràbola amb vèrtex en $(-1,3)$ i focus en $(-1,0)$.

Solució:



Com que el vèrtex i el focus estan ambdós sobre la recta $x = -1$ i el vèrtex queda per damunt del focus, la posició de la paràbola és la indicada a la figura.

Llavors, en ser el vèrtex el punt $V(-1,3)$, la seva equació serà de la forma

$$-4c(y-3) = (x+1)^2 \quad (c > 0)$$

La distància del focus al vèrtex és el valor del paràmetre c. Llavors,

$$c = d(F,V) = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (0-3)^2} = 3$$

i, finalment, l'equació buscada serà

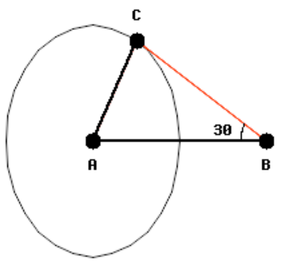
$$-12(y-3) = (x+1)^2$$

Exercici 4.6.9 Un dispositiu està format per una vareta fixa, en posició horitzontal, amb extrems A i B i una vareta mòbil amb extrems A i C. L'extrem B té coordenades $(3,1)$; l'extrem A és fix i situat a l'esquerra de B. L'extrem C es mou descrivint una circumferència de centre A i radi 1.

1. Determineu l'equació de la recta BC quan aquesta forma un angle de $30°$ amb la recta AB (angle en el vèrtex B).

2. Determineu les coordenades del punt C en la posició de l'apartat anterior i sabent que $A(1,1)$.

Solució: Es representa gràficament la posició indicada:



1. De la recta BC es coneix un punt $B(3,1)$ i el pendent $m = \tan(150°) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, per la qual cosa es pot escriure l'equació punt-pendent de la recta:
$$y - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)$$

2. El punt C és sobre la recta BC i a la circumferència A de centre (1,1)

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3

Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

i radi 1; per tant, ha de complir les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} y-1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-3) \\ (x-1)^2+(y-1)^2=1 \end{array}\right\}$$

d'on, substituint en la segona equació,

$$(x-1)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)\right)^2=1$$

i, llavors,

$$\begin{aligned} (x-1)^2+\frac{1}{3}(x-3)^2=1 \;&\Rightarrow\; x^2-2x+1+\frac{1}{3}x^2-2x+3=1 \\ &\Rightarrow\; \frac{4}{3}x^2-4x+4=1 \end{aligned}$$

és a dir,

$$4x^2-12x+9=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; y=1+\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

Per tant, les coordenades de C són $\left(\dfrac{3}{2}, 1+\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right) \approx (1.5, 1.866)$

Exercici 4.6.10 Sigui una vareta rígida amb extrems $A(2,0)$ i $B(0,2)$. Considera una vareta elàstica amb un extrem fixat $C(1,-1)$ i l'altre extrem $D(x,y)$ recorrent la circumferència de centre $(1,-1)$ i radi 2. Calculeu en què punt D la vareta CD intersecta perpendicularment la vareta AB.

Solució: Els extrems A i B determinen un vector $\overline{AB}=(-2,2)$. Un vector perpendicular a aquest és $\mathbf{n}=(2,2)$. Aquest vector $\mathbf{n}$, juntament amb el punt C, determina una recta perpendicular a la vareta AB. La intersecció d'aquesta recta amb la circumferència proporciona el punt D buscat.

Recta perpendicular a AB que passa per C:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} C(1,-1) \\ \mathbf{n}=(2,2) \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2} \;\Rightarrow\; x-1=y+1$$

Circumferència de centre $(1, -1)$ i radi 2:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Intersecció entre la recta r i la circumferència:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-1 & = & y+1 \\ (x-1)^2+(y+1)^2 & = & 4 \end{array}\right\}$$

d'on, substituint la primera equació en la segona,

$$(x-1)^2 + (x-1)^2 = 4 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 = 2 \;\Rightarrow\; x = 1 \pm \sqrt{2}$$

que porporciona dos punts:

$$D(1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}), \quad \text{i } CD \text{ talla la vareta } AB$$

i

$$D(1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}), \quad \text{però } CD \text{ no talla la vareta } AB$$

Exercici 4.6.11 Trobeu el lloc geomètric dels punts del pla de forma que la suma de les distàncies a l'origen i al punt $(2, 3)$ sigui 1.

Solució: Es tracta d'una el·lipse amb focus en $O(0, 0)$ i $F(2, 3)$. S'ha de complir la condició

$$d(X, O) + d(X, F) = 1$$

on $X(x, y)$. Llavors,

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 1$$

Per desenvolupar aquesta expressió es pot utilitzar el programari *wxMaxima*. Es comença separant les dues arrels i elevant al quadrat cada terme:

```
A:sqrt(x^2+y^2);
B:1-sqrt((x-2)^2+(y-3)^2);
A^2-B^2=0); (millor que A^2 = B^2)
ratsimp(%);
```

$\sqrt{x^2+y^2}$

$1-\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

$x^2-(1-\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2})^2+y^2=0$

$2\sqrt{y^2-6\,y+x^2-4\,x+13}+6\,y+4\,x-14$

Es torna a aïllar l'arrel i s'eleva de nou al quadrat:

```
A:2*sqrt(y^2-6*y+x^2-4*x+13)$
B:6*y+4*x-14$
A^2-B^2=0)$ (millor que A^2 = B^2)
expand(%);
```

$-32y^2-48\,x\,y+144\,y-12\,x^2+96\,x-144=0$

per la qual cosa l'equació de la cònica ve donada com

$$-32y^2-48xy+144y-12x^2+96x-144=0$$

Càlcul diferencial 5

5.1 Camps escalars

Les funcions reals de diverses variables surten de manera natural en gran quantitat de problemes de la ciència, l'enginyeria, l'economia, etc. Per exemple,

Exemple 5.1

(1) La magnitud de la força gravitatòria exercida per un cos de massa M, situat a l'origen de coordenades, sobre un cos de massa m situat al punt (x, y, z) s'expressa mitjançant la funció (fórmula)

$$F(x, y, z) = \frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2}$$

(2) La desviació S al punt mitjà d'una biga rectangular quan està ancorada per ambdós costats i suporta una càrrega uniforme ve donada per

$$S(L, w, h) = \frac{CL^3}{wh^3}$$

on L és la longitud, w l'amplària, h l'alçària i C una constant.

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Definició (Camp escalar)

Sigui D un subconjunt de $\mathbb{R}^n$. Una funció f de D en $\mathbb{R}$ s'anomena un camp escalar o funció real de n variables. El conjunt D on és definida la funció s'anomena el *domini* de la funció i el conjunt d'imatges $\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ s'anomena *rang* de f. Aquest dos conjunts es denotaran per $dom(f)$ i $im(f)$, respectivament.

Si el domini d'una funció real no ve donat explícitament, s'entendrà que el domini és el conjunt de tots els punts per als quals la definició de f té sentit.

Exemple 5.2

(1) La magnitud de la força gravitatòria ve donada, d'acord amb l'exemple anterior, per

$$F(x, y, z) = \frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2}$$

i l'únic punt (x, y, z) que no pertany al domini és l'origen de coordenades $(0, 0, 0)$; per la qual cosa pot escriure's

$$dom(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

(2) El camp escalar $f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ ve definit sols per als punts (x) que compleixen la condició $4 - (x^2 + y^2) \geq 0$; és a dir,

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Es pot obtenir informació sobre el fenòmen descrit per una funció de diverses variables si s'altera una o més de les variables i es deixen fixes la resta. Es concretarà aquesta idea per a funcions de dues variables.

Definició (Secció transversal)

Per a una funció $f(x, y)$, la funció que s'obté en mantenir la variable x fixa i variant la variable y s'anomena *secció transversal* de f amb x fixa. Anàlogament, es defineix la *secció transversal* de f amb y fixa com a funció que s'obté en mantenir la variable y fixa i variant la variable x

Exemple 5.3

La secció transversal de la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$ per a $x = 2$ és, precisament,

$$f_{x=2}(y) = f(2, y) = 4 + y^2.$$

Per tant, és una funció de y, que representa, en aquest cas, una paràbola simètrica respecte de l'eix OX.

Una altra forma d'obtenir informació sobre una funció de n variables és mitjançant les anomenades *hipersuperfícies de nivell*. Si es considera un camp escalar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, una hipersuperfície de nivell s'obté mitjançant l'equació

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\,, \qquad c \in \operatorname{im}(f).$$

En el cas de funcions de dues variables, reben el nom de *corbes de nivell* i en el cas de funcions de tres variables *superfícies de nivell*.

Exemple 5.4

Per analitzar les corbes de nivell del camp escalar $z = x^2 + y^2$, s'han d'estudiar les corbes d'equació

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0\,.$$

S'ha considerat que $c \geq 0$ perquè és impossible que $x^2 + y^2$ sigui negatiu.

Les corbes de nivell són, doncs, circumferències centrades a l'origen de coordenades i de radi $\sqrt{c}$ si $c > 0$ (si $c = 0$, la corba es redueix a un punt: l'origen de coordenades).

Definició (Funció vectorial)

Una funció $\mathbf{f}\colon D \subseteq R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ amb $m > 1$ s'anomena *una funció vectorial de diverses variables*. Si $n = m > 1$, la funció es diu un *camp vectorial*.

Una funció vectorial $\mathbf{f}\colon D \subseteq R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ pot estudiar-se de forma natural mitjançant m camps escalars

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\colon D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\longrightarrow (\, f_1(\mathbf{x}),\, \ldots,\, f_n(\mathbf{x})\,) \end{aligned}$$

considerant únicament les components del vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Aquests camps escalars es diuen les *funcions components* de $\mathbf{f}$.

Exemple 5.5

Si es considera la funció vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida per

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y,\, \sin x,\, -x + e^2)$$

les funcions components de $\mathbf{f}$ són:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \ \ x^2 + y \\ f_2(x, y) &= \ \ \sin x \\ f_3(x, y) &= -x + e^2 \end{aligned}$$

5.2 Continuïtat

Definició (Funció contínua)

Siguin $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\mathbf{x}_0 \in D$. Es diu que f és contínua en $\mathbf{x}_0$ si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ /\ \text{si}\ \mathbf{x} \in D \ \wedge\ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$$

Si f és contínua en cada punt $\mathbf{x}_0 \in D$, es diu que f es contínua en D i s'escriurà, abreujadament, com $f \in \mathcal{C}(D)$

Una funció vectorial $\mathbf{f}\colon D \subseteq R^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és contínua en un punt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si totes les funcions components són contínues en $\mathbf{x}_0$.

Intuïtivament, una funció és contínua en un punt $\mathbf{x}_0$ si punts $\mathbf{x}$, pròxims a $\mathbf{x}_0$, tenen imatges $f(\mathbf{x})$ pròximes a $f(\mathbf{x_0})$.
La idea intuïtiva de proximitat és, precisament, que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) < \epsilon$, per a un $\epsilon > 0$.

Les funcions elementals matemàtiques són contínues al seu domini de definició. Això, juntament amb el fet que les operacions artimètiques i la composició de funcions contínues produeixen funcions contínues, permet de raonar la continuïtat de nombroses funcions.

Exemple 5.6

1. $f(x, y, z) = x^2yz - x^2 + y^3z^2 - 8$ és contínua en $\mathbb{R}^3$ per ser una funció polinòmica.
2. $f(x, y) = \log(1+x^2+y^2)$ és contínua en $\mathbb{R}^2$ per ser composició de funcions contínues (el logaritme i un polinomi).
3. $f(x, y) = \log\left(|x^2 - xy + \sin(xy) - \log(x + y)|\right)$ és contínua (al seu domini) per ser composició de funcions contínues.

5.3 Derivades parcials

La derivada d'una funció d'una variable, $y = f(x)$, es defineix com

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

De forma similar es pot definir una derivada d'una funció de dues variables, respecte de cadascuna de les seves variables.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Per evitar-hi problemes, al llarg de la resta d'aquest tema i als temes successius, s'entendrà que les definicions són vàlides per als punts interiors dels dominis. Un punt és interior si el punt mateix i els seus veïns hi són al domini.
Els veïns són els punts que es troben prop del punt donat, a l'igual que succeia a la nota de la pàgina 121; és a dir, els punts situats a una distància inferior a un certa quantitat $\epsilon > 0$.
Intuïtivament, vol dir que el punt d'estudi no és situat a la frontera; és a dir, sobre la línia que delimita el domini. Podeu consultar [7] per a més informació

Definició (Derivada parcial)

Si $z = f(x, y)$, es defineix la derivada parcial de z respecte de x com

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t}$$

i la derivada parcial respecte de y com

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t}$$

sempre que els respectius límits existeixin.

Com s'observa a la definició, en derivar respecte de x, la y roman fixa i a l'inrevés, quan es deriva respecte de y, la variable x roman fixa. És a dir, la derivada respecte de x correspon a la derivada ordinària de la secció transversal $f_y(x)$ per a y fixada. I la derivada respecte de y correspon a la derivada ordinària de la secció transversal $f_x(y)$ per a x fixada.

Llavors, a efectes pràctics, per derivar respecte d'una variable s'apliquen les regles de derivació usuals suposant que la resta de variables són constants.

Exemple 5.7

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, llavors

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 12x^2y^2 - 8x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 8x^3y + 6y^5$$

Les derivades parcials representen les taxes de variació (el pendent) de la funció $f(x, y)$ en les direccions dels eixos coordenats, com es veurà a continuació amb la interpretació geomètrica d'aquestes.

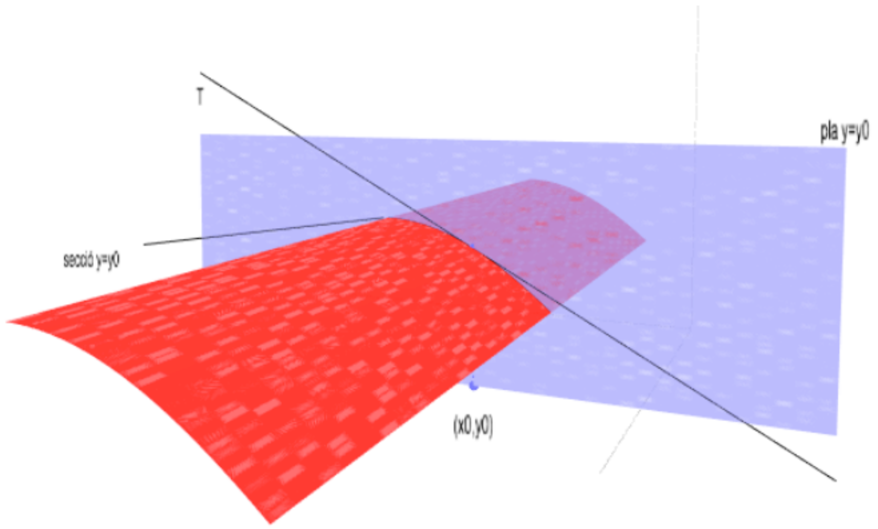


Figura 5.1: Interpretació geomètrica de la derivada parcial

Considereu una superficie $z = f(x, y)$ (Fig. 5.1), que ha estat tallada pel pla $y = y_0$ (paral·lel al pla coordenat XZ; és a dir, el pla vertical en la direcció paral·lela a l'eix OX), obtenint d'aquesta forma una corba sobre la superfície $z = f(x, y)$, que correspon a la secció transversal $z = f(x, y_0)$. Aquesta corba té una recta tangent (recta T al dibuix) amb pendent

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x\,=\,x_0}$$

que correspon, exactament, a la definició de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. De forma similar, la derivada de l'altra secció tansversal $\frac{d}{dy} f(x_0, y)\big|_{y\,=\,y_0}$ representa la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Resumint, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ representa el pendent (taxa de variació) de la funció $f(x, y)$ en la direcció de l'eix OX.
De forma anàloga, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ representa el pendent (taxa de variació) de la funció $f(x, y)$ en la direcció de l'eix OY.

Definició (Vector gradient)

Si una funció real de dues o tres variables admet derivades parcials, en un punt A, respecte de cadascuna de les seves variables, es pot definir el vector gradient:

$$\nabla f(A) = \text{grad}(f)\big|_{\text{A}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{\text{A}} \quad (\text{o grad}(f)\big|_{\text{A}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{\text{A}})$$

Exemple 5.8

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, llavors

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 12x^2y^2 - 8x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 8x^3y + 6y^5$$

i, en el punt $A(1, 0)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)} = 12x^2y^2 - 8x\Big|_{(1,0)} = -8, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0)} = 8x^3y + 6y^5\Big|_{(1,0)} = 0$$

d'on, $\nabla z(1, 0) = (-8, 0)$.

Cal adonar-se que el gradient defineix un camp vectorial. Si D és el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ en què existeixen les derivades parcials, llavors

$$\nabla f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Per aquesta raó, s'utilitzarà també la següent notació:

(1) $\nabla f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\,\mathbf{j}$, si f és un camp escalar de dos variables;

(2) $\nabla f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\,\mathbf{k}$, si f és un camp escalar de tres variables.

5.4 Funcions diferenciables

L'existència de derivades parcials no generalitza el concepte de derivabilitat a camps escalars; atès que sols reflecteix el comportament de la funció en algunes direccions particulars (les direccions dels eixos coordenats).

Definició (Funció diferenciable)

Un camp escalar $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n = 2, 3)$ es dirà diferenciable si existeix un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\cdot\mathbf{h} + \mathrm{o}(\mathbf{h})$$

on $\mathrm{o}(\mathbf{h})$ es una funció que verifica la condició

$$\lim_{\mathbf{h}\longrightarrow 0} \frac{\mathrm{o}(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0\,.$$

Propietats de les funcions diferenciables

1. Si f és un camp escalar diferenciable en $\mathbf{x}_0$, llavors el vector $\mathbf{y}$ és únic.
2. Si f és un camp escalar diferenciable en $\mathbf{x}_0$, llavors existeixen les derivades parcials de f en $\mathbf{x}_0$ i, a més, el vector $\mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.
3. Si f és un camp escalar diferenciable en $\mathbf{x}_0$, llavors f és continu en $\mathbf{x}_0$.
4. Si f és continu i admet derivades parcials contínues en un punt $\mathbf{x}_0$, llavors f és diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Si una funció f és diferenciable en un punt $\mathbf{x_0}$; l'aplicació de l'espai $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ definida per $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{h}$, rep el nom de *diferencial* de f en $\mathbf{x_0}$. Anomenant $\mathbf{h} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ i, tenint en compte que $\mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x_0})$, resulta

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n}$$

D'aquesta forma, la diferencial pot interpretar-se com la taxa de variació total d'una funció, respecte de cadascuna de les seves variables.

Exemple 5.9

La magnitud de la força gravitatòria entre dos cossos de masses M i m separats per una distància R, ve donada per la fórmula:

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2}$$

on G és la constant de gravitació universal. Si la massa d'un dels cossos, M, augmenta un 3% mentre que l'altra, m, augmenta un 2% i la distància, R, també augmenta un 3%; es desitja estimar el canvi en la força F.

Se sap que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial M} dM + \frac{\partial F}{\partial m} dm + \frac{\partial F}{\partial R} dR$$

on dM, dm i dR representen els canvis absoluts en les magnituds M, m i R, respectivament. Per les dades proporcionades, es coneixen els canvis relatius (percentatges); és a dir, dM/M, dm/m i dR/R., Així, divididint la igualtat anterior per F:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{F} &= \frac{\frac{\partial F}{\partial M}dM}{F} + \frac{\frac{\partial F}{\partial m}dm}{F} + \frac{\frac{\partial F}{\partial R}dR}{F} \\
&= \frac{\frac{Gm}{R^2}dM}{G\frac{M\cdot m}{R^2}} + \frac{\frac{GM}{R^2}dm}{G\frac{M\cdot m}{R^2}} + \frac{-\frac{2GMm}{R^3}dR}{G\frac{M\cdot m}{R^2}} \\
&= \frac{dM}{M} + \frac{dm}{m} - \frac{2dR}{R} = 0.03 + 0.02 - 0.03 = 0.02
\end{aligned}$$

Per la qual cosa, el canvi en F és del 2%.

5.5 Derivades parcials d'ordre superior

Definició (Derivada parcial segona)

Suposeu que la funció $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ admet derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ en cada punt de D. Es pot definir, llavors, una nova funció

$$\begin{array}{rccc}
\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \mathbf{x} & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})
\end{array}$$

Si aquesta nova funció admet derivada parcial respecte de x_j en $\mathbf{a}$, es diu que f admet derivada parcial segona respecte de x_i i x_j en $\mathbf{a}$; i s'escriu

$$f''_{x_i x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{a})$$

Pareu atenció a l'ordre d'escriptura de les variables. La notació $f''_{x_ix_j}$ indica que primerament s'ha de derivar f respecte de la variable x_i i després aquest resultat s'ha de derivar respecte de x_j. A l'altra notació, les mateixes operacions s'expressen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Exemple 5.10

Es considera la funció $f(x,y,z) = x^2y + xz + y^2z^2$. Llavors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + z \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy+z) = 2x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}(2xy+z) = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy+z) = 2y \end{cases}$$

De manera semblant es poden definir les derivades parcials terceres, quartes, etc.

Exemple 5.11

Considereu la funció $f(x,y,z) = x^2yz$. Llavors,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = 2x$$

En general, si se suposen definides les derivades parcials d'ordre p,

$$f^{(p)}_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_p}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(\mathbf{x})$$

es dirà que f és de classe $\mathcal{C}^p$ en D, i s'escriu $f \in \mathcal{C}^p(D)$, si f és contínua i admet derivades parcials contínues fins a l'ordre p

L'ordre de derivació és important, atès que, en general,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a})$$

Exemple 5.12

Per calcular les derivades segones creuades en $(0,0)$ de la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es comença calculant les derivades primeres

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-xy^4 - 4x^3y^2 + x^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i, llavors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((0,0)) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{-t^5}{t^4} - 0}{t} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}((0,0)) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{t^5}{t^4} - 0}{t} = 1$$

A continuació, es proporcionen condicions suficients per garantir la igualtat de les derivades creuades.

Teorema 5.1 (Schwartz)

Sigui f una funció real definida en un domini que conté una bola B centrada en $\mathbf{a}$. Suposa que: (1) existeixen i són contínues en B les derivades parcials $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$; (2) existeix la derivada segona $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ en B i és contínua en $\mathbf{a}$. Llavors, existeix $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$.

(Una bola centrada en $\mathbf{a}$ és el conjunt de punts que són a una distància de $\mathbf{a}$ inferior a una quantitat $r > 0$)

Afortunadament, la classe de funcions on sempre coincideixen les derivades creuades és força ampla. Per exemple, totes les funcions de classe $\mathcal{C}^2$ (funcions contínues que admeten derivades parcials primeres i segones contínues).

Definició (Matriu Hessiana)

Sigui f una funció real que admet derivades parcials segones en un punt $\mathbf{a}$. Es defineix la matriu hessiana en $\mathbf{a}$ com

$$\mathcal{H}_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Si f verifica el teorema de Schwartz 5.1, la matriu hessiana és simètrica. La matriu hessiana s'utilitza, entre d'altres, per estudiar els màxims i mínims d'una

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

funció de dues o més variables, com es veurà al capítol següent.

Exemple 5.13

Sigui la funció $f(x,y) = x^2y - 3x + 5y^2$. Es calculen, en primer lloc, les derivades parcials

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 10y$$

Ara, les derivades parcials de la primera expressió $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 3$ formaran la primera fila de la matriu hessiana i les derivades parcials de la segona expressió $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 10y$, en formaran la segona fila.

$$\boxed{2xy-3}\ \begin{cases} \xrightarrow{\partial x}\ 2y \\ \xrightarrow{\partial y}\ 2x \end{cases} \qquad\qquad H_f = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x^2+10y}\ \begin{cases} \xrightarrow{\partial x}\ 2x \\ \xrightarrow{\partial y}\ 10 \end{cases}$$

Pareu atenció a l'ordre en què s'escriuen els elements en la matriu hessiana

5.6 Pla tangent

Si una funció de dues variable $z = f(x,y)$ és diferenciable en un punt (x_0, y_0) llavors existeixen les rectes tangents a les dues seccions transversals; és a dir, a les corbes

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{array}\right\}$$

Aquestes dues rectes tangents determinen un pla i, en ser la superfície, $z = f(x,y)$

diferenciable en (x_0, y_0), aquest pla serà tangent a la superfície al punt (x_0, y_0, z_0).

Pot comprovar-se que l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0), si existeix, és

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0)} \tag{5.6}$$

Exemple 5.14

Assumint que existeix el pla tangent a la superfície

$$z = 2xy^3 - 5x^2$$

en el punt $(3, 2, 3)$; l'equació d'aquest pla es calcula a partir de

$$f'_x = 2y^3 - 10x \quad \Rightarrow \quad f'_x(3, 2) = -14$$

$$f'_y = 6xy^2 \quad \Rightarrow \quad f'_y(3, 2) = 72$$

d'on, substituint a la fórmula del pla tangent,

$$z - 3 = -14(x - 3) + 72(y - 2)$$

Hi ha superfícies que no venen donades per la gràfica d'una funció (per exemple, una esfera) però admeten pla tangent en cada punt de la superfície. En aquest cas, la superfície no ve donada explícitament com una funció de dues variables, sino implícitament per una equació de tres variables. Es pot, no obstant això, calcular l'equació del pla tangent a partir d'un resultat clàssic que estableix que el gradient d'una funció $F(x, y, z)$ és perpendicular a les superfícies de nivell $F(x, y, z) = k$ en cada punt d'aquestes.

Exemple 5.15

Es desitja trobar l'equació del pla tangent i de la recta normal a la superfície donada per l'equació $xy + yz + zx = 11$ en el punt $P(1, 2, 3)$.

En aquest cas, n'hi ha prou d'observar que la equació donada pot escriure's com $F(x,y,z) = 11$ per al camp escalar $F(x,y,z) = xy + yz + zx$.
Llavors, $\nabla F(1,2,3) = (5,4,3)$ ha de ser perpendicular a la superfície de nivell i, per tant, perpendicular al pla tangent a la superfície, d'on l'equació del pla tangent és

$$5(x-1) + 4(y-2) + 3(z-3) = 0\,,$$

Cal adonar-se que la superfície ve definida per una equació $xy + yz + zx = 11$. L'estratègia és expressar l'equació com una superfície de nivell d'una funció F.

que, simplificada, resulta ser $5x + 4y + 3z - 22 = 0$. L'equació de la recta normal (perpendicular al pla tangent) és:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3},$$

perquè passa pel punt $P(1,2,3)$ i té vector director $\mathbf{n} = (5,4,3)$.

Pot aplicar-se un resultat similar per calcular rectes tangents a corbes definides implícitament per equacions de la forma $F(x,y) = k$. De nou, el gradient de F és perpendicular a la corba de nivell en cadascun dels punts d'aquesta.

Cal recordar, així mateix, que si la corba ve definida per la gràfica d'una funció $y = f(x)$, llavors l'equació de la recta tangent a la corba en un punt (x_0, y_0) és

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Exemple 5.16

Es desitja trobar l'equació de la recta tangent i de la recta normal a la corba definida per l'equació $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$ en el punt $P(-2,0)$.

En aquest cas, n'hi ha prou d'observar que l'equació donada

$$x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$$

correspon a una corba de nivell (cota 0) per al camp escalar $f(x, y) = x^2 + 2x + 2y^2 - 4y$. Per tant, $\nabla f(-2, 0)$ ha de ser perpendicular a la corba de nivell i, en conseqüència, perpendicular a la recta tangent a la corba en P

Cal adonar-se que la corba ve definida per una equació $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$. L'estratègia és expressar l'equació com una superfície de nivell d'una funció $f(x, y)$.

Com

$$\mathbf{n} = \nabla f(-2, 0) = (2x + 2, 4y - 4)\big|_{(-2,0)} = (-2, -4)$$

l'equació de la recta tangent és

$$s \equiv \begin{cases} P(-2, 0) \\ \mathbf{n}_{\perp} = (4, -2) \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{4} = \frac{y}{-2} \Rightarrow y = \frac{x+2}{-2}$$

Ara, l'equació de la recta normal és

$$r \equiv \begin{cases} P(-2, 0) \\ \mathbf{n} = (2, 4) \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 2x + 4$$

5.7 Derivades direccionals

Es pot generalitzar la derivació parcial estenent la definició a direccions arbitràries (i no sols a direccions paral·leles a les dels eixos coordenats)

Definició (Derivada direccional)

Si $z = f(\mathbf{x})$ i $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ és un vector no nul i unitari, s'anomena derivada direccional de z en la direcció de $\mathbf{u}$

$$z'_{\mathbf{u}}((\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

sempre que el límit existeixi.

De forma similar a allò que esdevé a les derivades parcials, la derivada direccional representa la taxa de variació de la funció f en la direcció de $\mathbf{u}$.

Quan la funció f és diferenciable la derivada direccional pot calcular-se mitjançant la fórmula:

$$\boxed{f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}} \tag{5.7}$$

Exemple 5.17

Per calcular la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = xy + yz^2 + 3$ al punt $P(1,-1,0)$ en la direcció del vector $\mathbf{v} = (1,1,1)$, es calculen les derivades parcials:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y & &\to & \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,0) &= -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + z^2 & &\to & \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,0) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2yz & &\to & \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,0) &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, $\nabla f(P) = (-1,1,0)$. Ara es calcula un vector unitari en la direcció de $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

i, llavors,

$$f'_{\mathbf{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u} = (-1,1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = 0$$

Es pot emprar la fórmula (5.7) perquè la funció $f(x,y,z)$ és diferenciable. I se sap que és diferenciable perquè les derivades parcials són contínues,en ser funcions polinòmiques (propietat (4) de la pàgina 126).

5.8 Regla de la cadena

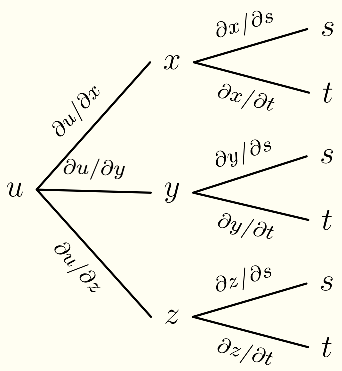
La anomenada *regla de la cadena* s'utilitza per derivar la composició de funcions. En general, es tracta de derivar (parcialment) un camp escalar que depèn de n variables, les quals, al seu torn, depenen d'unes altres m variables. Per exemple, si es considera una funció de tres variables $u = f(x,y,z)$ de forma que cada variable depèn d'altres dues variables, $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ i $z = z(s,t)$; és clar que la funció u depèn de les variables s i t, però no directament, sinó a través de les seves variables x, y i z. Llavors, per derivar u respecte de s i t, s'empraran les fórmules

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

on les derivades de f estan avaluades en $(x(s_0,t_0), y(s_0,t_0), z(s_0,t_0))$ i les derivades de x, y i z ho estan en (s_0,t_0).

Una forma de deduir la fórmula correcta a aplicar en cada cas és mitjançant la construcció del següent esquema:



L'arbre representa la relació entre les variables involucrades. Cada branca representa la derivada parcial corresponent. Per exemple, per arribar de u a s cal anar a x i després a s (producte de les dues branques $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}$) o bé (suma) anar a y i després a s ($\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$) o bé (suma) anar a z i després a s ($\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$); la qual cosa proporciona la fórmula:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Exemple 5.18

Es desitja determinar $\dfrac{df}{dt}$, mitjançant la regla de la cadena, sabent que

$$f(x,y) = x^2y^3; \quad x = t^3, \quad y = t^2$$

La funció f depèn de dues variables, x i y, les quals, al seu torn, depenen d'una altra variable t. Per tant, la funció f depèn de t, però no directament, sinó a través de les variables x i y. Llavors, per trobar la derivada de f respecte de t, cal aplicar la regla de la cadena. A partir de l'esquema següent es pot deduir la fórmula que cal aplicar.

ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & x \arrow[r, dash] & t \\ f \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & y \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Cal observar si la funció a derivar depèn d'una variable (i llavors és una derivada ordinària) o depèn de més d'una variable (i, llavors, és una derivada parcial) i escriure acuradament el símbol que la representa (df/dt, dx/dt, dy/dt però $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$).

Ara, en calcular les derivades que surten a la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \frac{dx}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$$

i reemplaçant-les-hi

$$\frac{df}{dt} = 2xy^3 \cdot 3t^2 + 3x^2y^2 \cdot 2t$$

i substituint també $x = t^3$ i $y = t^2$

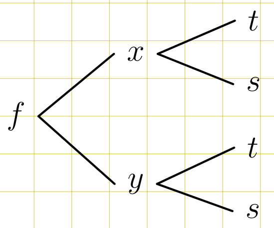
$$\frac{df}{dt} = 2xy^3 \cdot 3t^2 + 3x^2y^2 \cdot 2t = 2t^3t^6 \cdot 3t^2 + 3t^6t^4 \cdot 2t = 12t^{11}$$

En aquest exemple es podria haver substituït primerament les variables x i y pel seu valor, $x = t^3$ i $y = t^2$, a la funció f, obtenint $f(t) = (t^3)^2(t^2)^3 = t^{12}$ i, llavors, la seva derivada és $f'(t) = 12t^{11}$. Aquest procediment ha estat més ràpid perquè les funcions involucrades són molt simples, però en general no sempre serà així. Encara que es coneguin totes les funcions involucrades, pot passar que, en fer la composició de les funcions, surti una funció força complicada. En general, l'avantatge de la regla de la cadena és que en comptes de derivar una única funció es realitzen derivades més senzilles que s'ajunten després en una única expressió (veieu l'Exemple 5.19).

Exemple 5.19

Donada la funció $f(x,y) = \ln(x+y^2)$ on $x = t+s$ i $y = \ln(ts)$, es desitja calcular la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ en el punt $(t,s) = (1,1)$.

S'observa que la funció f depèn de dues variables, x i y, les quals, al seu torn, depenen d'altres dues, t i s. Per tant, la funció f depèn de t i s, però no directament, sinó a través de les variables x i y. Llavors, per trobar la derivada parcial de f respecte de t, cal aplicar la regla de la cadena. A partir de l'esquema següent es pot deduir la fórmula que cal aplicar.



$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ara, en calcular les derivades parcials involucrades en la fórmula anterior,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{s}{ts} = \frac{1}{t}$$

i reemplaçant-les-hi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{x+y^2} + \frac{2y}{x+y^2}\,\frac{1}{t}$$

En aquest cas, com que s'ha d'avaluar al punt $(t,s) = (1,1)$, no cal substituir els valors genèrics $x = t+s$ i $y = \ln(ts)$; sinó calcular-los prèviament i substituir-los-hi després

$$x = t+s \xrightarrow{t=1,s=1} x = 2$$

$$y = \ln(ts) \xrightarrow{t=1,s=1} y = \ln(1) = 0$$

i ara,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t,s)=(1,1)} = \left[\frac{1}{x+y^2} + \frac{2y}{x+y^2}\,\frac{1}{t}\right]\Bigg|_{\substack{t=1,\ s=1\\ x=2,\ y=0}} = \frac{1}{2}$$

En aquest exemple, si s'hagués substituït primer les variables x i y pel seu valor, $x = t+s$ i $y = \ln(ts)$, a la funció f, s'hagués obtingut la relació directa entre f i les variables t i s

$$f(t,s) = \ln(t + s + \ln^2(ts))$$

i, llavors, es podria calcular directament la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}$. Però, s'observa que la funció obtinguda ja no és tan simple i la seva derivada no és immediata. L'avantatge de la regla de la cadena, en aquest cas, és que en comptes de derivar una funció relativament complexa, es realitzen quatre derivades més senzilles que s'ajunten després en una única expressió.

5.9 Exercicis resolts

Exercici 5.9.1 Calculeu les derivades parcials del camp escalar $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

Solució: Com que la funció té dues variables, s'han de calcular dues derivades parcials: derivada respecte de la primera variable x i derivada respecte de la segona variable y. A més, com que no demana el càlcul en cap punt específic, s'entendrà que s'han de deixar en funció de x i de y.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2}$$

Observeu que, en derivar respecte de x, com que la variable x no hi és al denominador, no cal aplicar la regla del quocient. Simplement, el denominador es queda tal qual i es deriva sols el numerador. Per contra, en derivar respecte de y, aquesta si hi surt al denominador i, llavors, cal aplicar la regla del quocient.

Exercici 5.9.2 Calculeu el gradient del camp escalar $f(x,y)=\dfrac{2x}{x-y}$ en el punt $(3,1)$.

Solució: El vector gradient el formen les derivades parcials de la funció. Així,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2(x-y)-2x}{(x-y)^2}=\frac{-2y}{(x-y)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)=\frac{-2}{2^2}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2x(-1)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)=\frac{6}{2^2}=\frac{3}{2}$$

En tots dos casos, en derivar, s'ha d'emprar la regla del quocient, atès que tant la variable x com la variable y hi són al denominador.

I, llavors, $\nabla f(3,1)=(-1/2,3/2)$.

Exercici 5.9.3 El volum d'un dipòsit cilíndric es pot expressar, en funció del radi de la base r i de l'alçària del dipòsit h, com

$$V=\pi r^2 h$$

Si les dimensions d'un dipòsit són $r=50\ cm$ i $h=200\ cm$, quin seria el canvi en el volum quan s'incrementa el radi en $5\ cm$ i es disminueix l'alçària en $20\ cm$

Solució: El canvi en el volum davant de petits canvis dr i dh en les magnituds r i h, respectivament, es pot calcular a partir de la diferencial

$$dV=\frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial h}dh,$$

és a dir,

$$dV=2\pi rh\ dr+\pi r^2\ dh$$

Com que $r=50$; $h=200$; $dr=5$ i $dh=-20$, en substituir aquests valors a l'expressió anterior s'obté

$$dV=20000\pi\ dr+2500\pi\ dh=100000\pi-50000\pi=50000\pi\approx 157079.63\ cm^3;$$

per la qual cosa el volum augmentaria, aproximadament, en $157079.63\ cm^3$.

Exercici 5.9.4 El perfil d'una muntanya ve donat per la gràfica de la funció $h(x,y) = 10 - 2xy - x^2 - y^2$. Un escalador es troba situat al punt de coordenades $(1,1,6)$ i es mou en la direcció del vector $\mathbf{v} = (1,-2)$. Puja o baixa?

Solució: Allò que es vol esbrinar és si l'altura $h(x,y)$ creix o decreix i aquesta informació la proporciona el signe de la derivada. En aquest cas, en moure's en la direcció del vector $\mathbf{v} = (1,-2)$, interessa calcular el signe de la derivada direccional.

Es calcula, doncs, el gradient de la funció $h(x,y)$ al punt $P(1,1)$

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(1,1)} &= \left.-2y-2x\right|_{x=1,\ y=1} = -4 \\ \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{(1,1)} &= \left.-2x-2y\right|_{x=1,\ y=1} = -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla h(1,1) = (-4,-4)$$

i un vector unitari en la direcció de $\mathbf{v} = (1,-2)$,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Així, aplicant ara la fórmula (5.7),

$$\boxed{f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}$$

s'obté

$$h'_{\mathbf{u}}(1,1) = (-4,-4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} > 0$$

Recordeu que es pot aplicar la fórmula (5.7) perquè la funció h és diferenciable en el punt $(1,1)$. I se sap que és diferenciable perquè les derivades parcials són funcions contínues (propietat (4) de les funcions diferenciables de la pàgina 126).

és a dir, en ser la derivada positiva, la funció $h(x,y)$ creix i, llavors, l'escalador està pujant.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Exercici 5.9.5 Calculeu l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^{xy}$ en el punt $(1, 0, 1)$.

Solució: N'hi ha prou a emprar la fórmula

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,\, y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,\, y_0)} \cdot (y - y_0)}$$

Com que es tracta d'una superfície definida per la gràfica d'una funció diferenciable, es pot emprar la fórmula (5.6) de la pàgina 132.

En aquest cas, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ i $f(x_0, y_0) = 1$. Sols resta calcular les derivades parcials en el punt $(1, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{xy} + x\,\mathrm{e}^{xy}\,y = \mathrm{e}^{xy}(1 + xy) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \mathrm{e}^{0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\mathrm{e}^{xy}\,x = x^2\,\mathrm{e}^{xy} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = \mathrm{e}^{0} = 1$$

Observeu que, en derivar respecte de y, no cal aplicar la regla del producte, atès que la variable x actua com una constant i la variable y sols surt al factor e^{xy}.

Finalment, en substituir aquests valors a la fórmula, s'obté

$$z - 1 = 1(x - 1) + 1(y - 0) \;\Rightarrow\; x + y - z = 0$$

que és l'equació del pla tangent demanat.

Exercici 5.9.6 Determineu l'equació de la recta tangent a la cònica definida per

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 4y = 1$$

en el punt $(1, 1)$

Solució: Anomenant $F(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2x - 4y$, l'equació de la cònica representa una corba de nivell (cota 1) per a la funció F.

Així, emprant la metodologia de l'Exemple 5.16, n'hi ha prou amb calcular el gradient de F en P:

$\nabla F(x, y) = (2x + 2, 4y - 4)$,
d'on
$\mathbf{n} = \nabla F(1, 1) = (4, 0)$.

Aquest vector és perpendicular a la recta tangent. Per tant, un vector director de la recta tangent serà $\mathbf{v} = (0, -4)$; la qual cosa vol dir que la recta és vertical (en ser nul·la la primera component). Com que ha de passar pel punt $P(1, 1)$, la recta és vertical amb equació $x = 1$.

Es tracta d'una corba definida per una equació. No es pot emprar la fórmula de la pàgina 133. Però es pot calcular aplicant el mètode del gradient (Exemple 5.16).

Exercici 5.9.7 Calculeu l'equació del pla tangent a la gràfica de la superfície $z(x, y)$ definida per

$$x^2y + x^2z + yz^3 = 2$$

en el punt $P(1, 0, 2)$. Calculeu, a més, l'equació de la recta normal a la superfície.

Solució: Atès que la superfície ve donada per una equació de tres variables, s'utilitzarà el métode del gradient.

Sigui $F(x,y,z) = x^2y + x^2z + yz^3$. Llavors,

$$\nabla F(P) = (2xy+2xz, x^2+z^3, x^2+3yz^2)\big|_{x=1,\ y=0,\ z=2} = (4,9,1)$$

i ara, sabent que aquest vector és perpendicular al pla tangent, el pla ve determinat per

$$\left\{\begin{array}{r} P(1,0,2) \\ \mathbf{n} = (4,9,1) \end{array}\right.$$

i l'equació del pla ve donada per

$$4(x-1) + 9(y-0) + (z-2) = 0 \;\Rightarrow\; 4x + 9y + z - 6 = 0$$

Com que es tracta d'una superfície definida per una equació, no es pot emprar la fórmula de la pàgina 132. No obstant això, es pot utilitzar el mètode del gradient (Exemple 5.15).

La recta normal ha de passar pel punt $P(1,0,2)$ i té com a vector director $\mathbf{n} = (4,9,1)$ (perquè la recta ha de ser perpendicular al pla tangent). Les equacions de la recta normal són, llavors,

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{9} = \frac{z-2}{1}$$

Exercici 5.9.8 Donada la funció $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$, determineu, raonadament, l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció en el punt $P(-1,0,-1)$.

Solució: La fórmula que cal emprar és:

$$\boxed{z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)}$$

Com que es tracta d'una superfície definida per la gràfica d'una funció diferenciable, es pot emprar la fórmula de la pàgina 132.

En aquest cas, $(x_0,y_0,z_0) = (-1,0,-1)$, on $f(x_0,y_0) = z_0 = -1$.

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Per tant, calculant les derivades parcials de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(-1,0)} = 3x^2 + 3y\Big|_{(-1,0)} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(-1,0)} = 3x + 3y^2\Big|_{(-1,0)} = -3$$

Així, $\nabla f(-1,0) = (3,-3)$ i, llavors,

$$z+1 = (-3,3)\cdot(x+1,y) \;\Rightarrow z+1 = -3(x+1)+3y$$

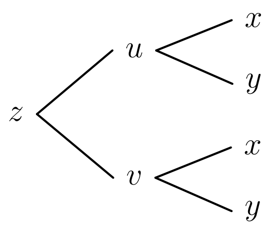
que pot reescriure's com $3x-3y+z+4=0$.

Exercici 5.9.9 Sigui $z = f(y/x, x/y)$ amb f una funció diferenciable. Calculeu el valor de l'expressió

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

Solució: La funció f depèn de dues variables, u i v, les quals, al seu torn, depenen d'altres dues x i y mitjançant les relacions: $u = y/x$ i $v = x/y$. Per tant, z depèn de x i y, però no directament, sinó per mitjà de les variables u i v; per la qual cosa, per derivar z respecte de x i de y, s'ha d'emprar la regla de la cadena.

Així, es considera l'esquema següent que permet d'escriure les fórmules escaients:



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Finalment, es poden calcular les derivades parcials de u i v respecte de x i de y (que són les funcions que es coneixen):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2}$$

i substituir-les a les fórmules anteriors. Així, doncs,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{-x}{y^2}$$

i, finalment, el valor de l'expressió demanada,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{x}z'_u + \frac{x}{y}z'_v + \frac{y}{x}z'_u + \frac{-x}{y}z'_v = 0$$

Exercici 5.9.10 Sigui $z = f(y/x)$, on f és una funció derivable. Calculeu el valor de l'expressió

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Solució:

S'escriu $s = y/x$ i, llavors, $z = f(s)$. Ara, aplicant la regla de la cadena,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df}{ds}\frac{-y}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{ds}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{df}{ds}\frac{1}{x}$$

Per fer les derivades segones s'ha de tenir en compte que $\frac{df}{ds}$ segueix depenent de la variable s i, llavors,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{ds}\right) = \frac{d^2f}{ds^2}\frac{\partial s}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{ds}\right) = \frac{d^2f}{ds^2}\frac{\partial s}{\partial y}$$

Així doncs,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{ds}\right)\frac{-y}{x^2} + \frac{df}{ds}\frac{2y}{x^3} = \frac{d^2f}{ds^2}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{-y}{x^2} + \frac{df}{ds}\frac{2y}{x^3}$$
$$= \frac{d^2f}{ds^2}\frac{-y}{x^2}\frac{-y}{x^2} + \frac{df}{ds}\frac{2y}{x^3} = \frac{y^2}{x^4}\frac{d^2f}{ds^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{df}{ds}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{ds}\right)\frac{1}{x} = \frac{d^2f}{ds^2}\frac{\partial s}{\partial y}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2f}{ds^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{ds}\right)\frac{1}{x} + \frac{df}{ds}\frac{-1}{x^2} = \frac{d^2f}{ds^2}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{1}{x} + \frac{df}{ds}\frac{-1}{x2}$$
$$= \frac{d^2f}{ds^2}\frac{-y}{x^2}\frac{1}{x} + \frac{df}{ds}\frac{-1}{x^2} = -\frac{y}{x^3}\frac{d^2f}{ds^2} - \frac{1}{x^2}\frac{df}{ds}$$

Finalment,

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\left[\frac{y^2}{x^4}\frac{d^2f}{ds^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{df}{ds}\right]$$
$$+ 2xy\left[-\frac{y}{x^3}\frac{d^2f}{ds^2} - \frac{1}{x^2}\frac{df}{ds}\right]$$
$$+ y^2\left[\frac{1}{x^2}\frac{d^2f}{ds^2}\right] = 0$$

Aplicacions del càlcul diferencial 6

El càlcul diferencial té nombroses aplicacions: propagació d'errors, aproximació de funcions, estudi de taxes de creixement, estudi de màxims i mínims, etc. En aquest tema se'n mostraran algunes.

6.1 Propagació d'errors

En mesurar una magnitud, els resultats obtinguts contenen errors propis dels mesuraments aproximats que es realitzen. Aquests errors es transmeten en realitzar operacions amb aquests mesuraments. L'objectiu aquí és acotar-ne l'error.

Si $\tilde{x}$ és un valor aproximat d'una quantitat x, s'anomenarà *error absolut* a la diferència

$$\epsilon(x) = x - \tilde{x}$$

Si $\epsilon(x) > 0$ l'aproximació és per defecte i si $\epsilon(x) < 0$ l'aproximació és per excés. L'*error relatiu* de x és definit per

$$\epsilon_r(x) = \frac{\epsilon(x)}{x} = \frac{x - \tilde{x}}{x}, \quad x \neq 0$$

Aquesta expressió sembla poc útil, atès que x és una quantitat desconeguda. Llavors, quan $\epsilon(x) \ll |\tilde{x}|$, sol emprar-se l'aproximació

$$\epsilon_r(x) \approx \frac{\epsilon(x)}{\tilde{x}}$$

En la pràctica, per la impossibilitat de conèixer el valor exacte de la magnitud, s'empren cotes d'aquests errors. Una *cota de l'error absolut* de x es un nombre real positiu M tal que

$$|\epsilon(x)| \leq M$$

De forma similar, una *cota de l'error relatiu* de x es un nombre real positiu N tal que

$$|\epsilon_r(x)| \leq N$$

En efectuar operacions amb dades que contenen errors, aquests es transmeten amb les operacions efectuades i al resultat final pot haver canviat l'error total. L'objectiu és conèixer com es transmeten els errors en aplicar a les dades (variables) una funció f.

Llavors, es suposa que es tenen n quantitats (dades obtingudes mitjançant amidaments, càlculs, etc.) agrupades en un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i les seves corresponents aproximacions $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$. Es suposa, a més a més, que f és una funció diferenciable de n variables. L'objectiu és conèixer com es transmeten els errors mitjançant la funció f.

L'error absolut que es produeix en actuar f sobre $\mathbf{x}$ ve donat per

$$\epsilon(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

i, aplicant el Teorema del Valor Mitjà,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)(x_i - \tilde{x}_i) \tag{6.8}$$

on $\xi = \mathbf{x} + \alpha(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$ i $\alpha \in (0, 1)$. Per la continuïtat de les derivades parcials, es pot admetre que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \approx \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\mathbf{x}}),\ 1 \leq i \leq n$$

i, calculant valors absoluts, s'obté una cota de l'error absolut:

$$\boxed{|\epsilon(f(\mathbf{x}))| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\mathbf{x}})\right| \cdot |\epsilon(x_i)|} \tag{6.9}$$

Exemple 6.1

El volum d'una piràmide de base quadrada, amb longitud d'aresta a, i d'alçària h és:

$$V = \frac{a^2 h}{3}$$

En amidar l'aresta de la base i l'alçària de la piràmide del Louvre, s'ha obtingut $a = 35.42 \pm 0.01\ m.$ i $h = 21.60 \pm 0.01\ m.$ Quin error màxim tindrà el càlcul del volum? Quant valdrà aquest volum?

Es coneixen les cotes dels errors absoluts ϵ_a i ϵ_h de les magnituds a i h, respectivament; és a dir,

$$|\epsilon_a| \leq 0.01; \qquad |\epsilon_h| \leq 0.01$$

d'on, aplicant la fórmula (6.9), l'error absolut del volum, ϵ_V vindrà acotat per

$$|\epsilon_V| \leq \left|\frac{\partial V}{\partial a}\right| \epsilon_a + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| |\epsilon_h|$$

i així,

$$|\epsilon_V| \leq \left|\frac{2ah}{3}\right| |\epsilon_a| + \left|\frac{a^2}{3}\right| |\epsilon_h|$$

El valor de l'aresta, escrit com $a = 35.42 \pm 0.01\ m.$, indica que s'ha amidat la longitud a amb un valor de 35.42 m i l'error màxim comès és de 0.01 $m.$ Aquest error màxim és, precisament, una cota de l'error absolut ϵ_a. El mateix raonament serveix per a la maginutd h.

i substituint els valors $a = 35.42$ i $h = 21.60$ es té que

$$|\epsilon_V| \leq 510.048 \cdot 0.01 + 418.192 \cdot 0.01 \approx 9.28\ m^3$$

El volum calculat seria de

$$V = \frac{a^2 h}{3} \approx 9032.95\ m^3$$

amb un error màxim de 9.28 m^3 i s'escriuria

$$V = 9032.95\ \pm 9.28\ m^3$$

Sovint es coneixen cotes dels errors relatius dels mesuraments, que permeten d'establir una cota de l'error relatiu en la magnitud calculada a partir d'aquestes.

Exemple 6.2

La força d'atracció gravitatòria entre dos cossos de masses M i m separades a una distància R, ve donada per la fórmula:

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2}$$

on G és la constant de gravitació universal. Si es considera que la masa d'un dels cossos (M) roman constant, estima l'error màxim en el càlcul de la força F quan m té un error màxim del 2% i la distància R del 3%.

Siguin ϵ_m, ϵ_R i ϵ_F els errors absoluts de les magnituds m, R i F, respectivament. Llavors,

$$\frac{|\epsilon_m|}{m} \leq 0.02 \quad \text{i} \quad \frac{|\epsilon_R|}{R} \leq 0.03$$

Així, aplicant la fórmula (6.9),

$$|\epsilon_F| \leq \left|\frac{\partial F}{\partial m}\right| |\epsilon_m| + \left|\frac{\partial F}{\partial R}\right| |\epsilon_R|$$

d'on

$$|\epsilon_F| \leq \left|\frac{GM}{R^2}\right| |\epsilon_m| + \left|\frac{-2GMm}{R^3}\right| |\epsilon_R|$$

i, dividint per $F = G\frac{Mm}{R^2}$,

$$\frac{|\epsilon_F|}{F} \leq \frac{|\epsilon_m|}{m} + 2\frac{|\epsilon_R|}{R} \leq 0.02 + 2 \cdot 0.03 = 0.08$$

Llavors, l'error màxim en F és del 8%.

6.2 Creixement i decreixement màxim

Quan la funció f és diferenciable la derivada direccional es pot calcular mitjançant la fórmula:

$$f'_{\mathbf{u}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u} = |\nabla f(x,y)| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos(\alpha)$$

sent α l'angle entre tots dos vectors. Com que el valor màxim que pot prendre

$\cos(\alpha)$ és 1 (quan tots dos vectors apunten en la mateixa direcció i sentit), aquesta fórmula ens diu que la derivada direccional és màxima en la direcció del gradient i el valor màxim és de $|\nabla f(x,y)|$; és a dir, la funció f creix al més ràpidament possible en la direcció del gradient de la funció en el punt (x,y). Anàlogament, amb el cas $\cos(\alpha) = -1$, s'obté que la funció f decreix al més ràpidament possible en la direcció de $-\nabla f(x,y)$.

Exemple 6.3

El Gran Teatre Nacional de Beijing, obra de l'arquitecte parisenc Paul Andreu, té forma de semi el·lipsoide, amb 212 m de llargària, 143 m d'amplària i 46 m d'alçària. És a dir, té la forma de la superfície d'equació:

$$z = 46\sqrt{1 - \frac{x^2}{106^2} - \frac{y^2}{71.5^2}}$$

on l'origen de coordenades és situat al centre de simetria. L'aigua de pluja que cau a la coberta el·lipsoïdal busca el camí per baixar al més ràpidament possible. Si una gota de pluja cau al punt $P(53, 14.3, 4.6\sqrt{71})$ de la superfície, en quina direcció es mourà?

Es tracta de calcular el pendent de màxim decreixement, és a dir, és un problema de derivada direccional màxima. Atès que es pretén baixar, la solució és la direcció de $-\nabla z(53, 14.1)$. Així doncs,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 46\frac{-x/106^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{106^2} - \frac{y^2}{71.5^2}}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(53, 14.3) \approx -0.2575$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 46\frac{-y/71.5^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{106^2} - \frac{y^2}{71.5^2}}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(53, 14.3) \approx -0.1527$$

Per tant, $\nabla z(53, 14.3) \approx (-0.2575, -0.1527)$ i la resposta buscada és que la gota de pluja es mourà en la direcció donada, aproximadament, pel vector $(0.2575, 0.1527)$ (on la coordenada x es mou al llarg de la figura i la coordenada y a l'ample).

6.3 Extrems lliures

La qüestió de determinar els màxims i mínims que assoleix una funció és de gran importància en molts problemes d'enginyeria. Quan el problema pot reduir-se a una variable, es coneixen mètodes per resoldre'l matemàticament: es busquen els valors que anul·len la derivada i es determina el comportament com a màxim o mínim segons el signe que pren la segona derivada. Quan el nombre de variables és major, es disposa també de criteris semblants que s'estudiaran en aquest capítol.

En aquesta secció s'estudiarà com s'han de calcular els valors extrems de camps escalars definits en un domini obert (que no inclou els punts frontera). Les definicions bàsiques són similars a les definicions de funcions reals de variable real.

Definició (Màxim i mínim local)

Sigui $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar i $\mathbf{x}_0$ un punt que pertany a una bola continguda en D. Es diu que f té un *màxim local* en $\mathbf{x}_0$ si

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$$

per a tot $\mathbf{x}$ pertanyent a una certa bola de centre $\mathbf{x}_0$ (vegeu la Fig. 6.2(a)).

Es diu que f té un *mínim local* en $\mathbf{x}_0$ si

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$$

per a tot $\mathbf{x}$ pertanyent a una certa bola de centre $\mathbf{x}_0$ (vegeu la Fig. 6.2(b)).

Com en el cas de les funcions reals de variable real, es parlarà de *valors extrems* per referir-se simultàniament als màxims locals i als mínims locals.

En el cas de funcions reals d'una variable real se sap que si la funció f té un extrem local en un punt x_0, llavors la derivada $f'(x_0) = 0$ o no n'existeix la derivada. Aquí es té un resultat similar.

Teorema 6.2 (Punts crítics)

Si un camp escalar f té un extrem local en $\mathbf{x}_0$, llavors $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ (quan f és diferenciable en $\mathbf{x}_0$) o $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ no existeix.

Els punts en què el gradient s'anul·la o no existeix s'anomenen *punts crítics*. Pel teorema anterior són els únics punts en què un camp escalar pot tenir un valor extrem (local). Els punts en què el gradient s'anul·la s'anomenen *punts estacionaris*. S'anomenaran *punts de sella* als punts estacionaris en què la funció no té un extrem local (vegeu la Fig. 6.2(c)).

Per poder donar un criteri de classificació de punts estacionaris com a màxim o mínim, es necessitarà, prèviament, establir una certa notació. Donada una matriu quadrada H,

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

s'anomenaran *menors principals dominants* de H els determinants següents:

$$D_1 = a_{11}, \ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, D_n = det(H)$$

Teorema 6.3 (Criteri de les derivades parcials segones)

Suposeu que f és una funció de classe $\mathcal{C}^2$ (funció contínua amb derivades parcials primeres i segones contínues) en una bola que conté el punt estacionari $\mathbf{x}_0$. Sigui H la matriu hessiana de la funció f en $\mathbf{x}_0$. Llavors,

1. *Si $D_j > 0$, per a tot $1 \leq j \leq n$, llavors f assoleix un mínim local en $\mathbf{x}_0$.*
2. *Si $D_j < 0$ quan j és senar i $D_j > 0$ quan j és parell, llavors f assoleix un màxim local en $\mathbf{x}_0$.*

En el cas particular de funcions de dues variables es pot afirmar un poc més.

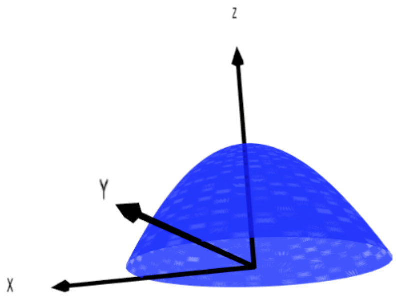
Teorema 6.4 (Extrems en dues variables)

Sigui una funció $f(x,y)$. En les condicions del teorema anterior,

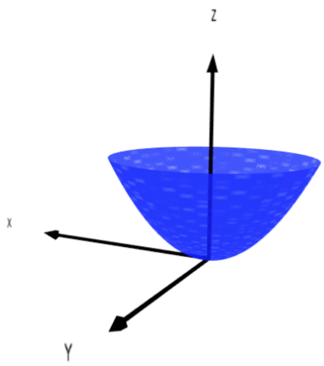
(a) si $D_1 < 0$ i $D_2 > 0$, la funció assoleix en el punt (x_0, y_0) un màxim local;

(b) si $D_1 > 0$ i $D_2 > 0$, la funció assoleix en el punt (x_0, y_0) un mínim local;

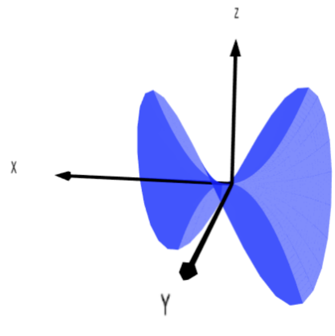
(c) si $D_2 < 0$, la funció presenta en el punt (x_0, y_0) un punt de sella.



(a) $D_1 < 0$, $D_2 > 0$



(b) $D_1 > 0$, $D_2 > 0$



(c) $D_2 < 0$

Figura 6.2: Tipus d'extrems: (a) màxim; (b) mínim; (c) punt de sella.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Exemple 6.4

Per estudiar els extrems locals del camp escalar donat per $z = x^5y + xy^5 + xy$, es comença calculant els punts crítics, els quals s'obtenen com a solució del sistema format en igualar les derivades parcials a zero.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = y(5x^4 + y^4 + 1) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = x(5y^4 + x^4 + 1) = 0 \end{cases}$$

Com que els factors $5x^4 + y^4 + 1$ i $5y^4 + x^4 + 1$ són sempre positius, es dedueix que l'única solució és el punt $(0,0)$, que és, doncs, l'únic punt crític de f.

Es calculen ara les derivades de segon ordre:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = 20x^3y\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 5x^4 + 5y^4 + 1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 20xy^3;$$

i, en avaluar-les al punt crític i formar-ne la matriu hessiana,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

resulta que $D_2 = -1 < 0$ i, d'acord amb el Teorema 6.4, z té un punt de sella en $(0,0)$ (vegeu la Fig. 6.3).

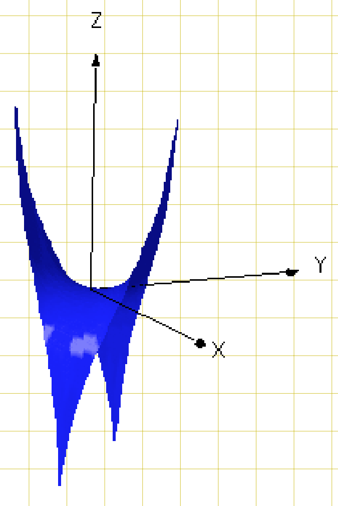


Figura 6.3: Gràfica de $z = x^5y + xy^5 + xy$.

6.4 Extrems condicionats

A la secció anterior s'han estudiat els extrems de funcions definides en un conjunt obert. No obstant, en molts problemes els extrems han de trobar-se quan les variables estan sotmeses a una sèrie de restriccions (i, llavors, el domini, ja no constitueix un conjunt obert).

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ amb D un domini obert de $\mathbb{R}^n$ i sigui $X \subset D$. Es considera la restricció

$$f\Big|_X : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \end{array}$$

és a dir, la funció f avaluada sols en els punts del subconjunt X. El problema de determinar els extrems locals de $f_{|X}$ s'anomena un problema d'*extrems condicionats*, al·ludint al fet que les variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ venen lligades per la condició de pertànyer a X. Per determinar condicions analítiques que garanteixin l'existència d'extrems condicionats, han d'imposar-se unes certes condicions de regularitat tant per a la funció f com per al conjunt X.

En aquesta secció s'estudiaran els extrems de funcions sotmeses a restriccions de la forma

$$X = \{\mathbf{x} \in D \ : \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

on $\mathbf{g}$ és una funció de classe C^p amb $m < n$ componentes; és a dir, un sistema de m equacions amb n incògnites, però sempre amb menor nombre d'equacions que d'incògnites.

Així, d'ara endavant, $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ serà una funció d'una certa classe C^p en D i X serà un conjunt d'aquesta forma.

Es distingeixen, doncs, dues possibilitats per al conjunt de restriccions X, segons es puguin aïllar o no, fàcilment, m variables del sistema en funció de les $n - m$ variables restants.

6.4.1 Mètode de reducció de variables

Es suposa, doncs, una funció de n variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de la qual es vol trobar els extrems de la funció f quan les variables $(x_1, \dots, x_n)$ estan lligades per un sistema de m equacions de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. El mètode consisteix a aïllar m variables en funció de les altres i substituir-les en la funció f, de manera que el problema es reduirà a un problema d'extrems lliures per a una funció de $n-m$ variables. Es veu, a continuació, amb un exemple.

Exemple 6.5

Una partícula de masa m és dintre d'una caixa de dimensions x, y, z i té l'energia d'estat

$$E(x, y, z) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

on k és una constant física. Si el volum de la caixa és de 8 dm^3, es desitgen trobar els valors de x, y, z que minimitzen l'energia d'estat.

Donat que el volum de la caixa és $xyz = 8$; es tracta de resoldre el problema d'extrems condicionats:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & E(x, y, z) = \dfrac{k^2}{8m}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}\right) \\ & \text{s.a } (\textit{sotmesa a}) \quad xyz = 8 \end{array}$$

De la restricció, pot aïllar-se, per exemple, la variable $z = \dfrac{8}{xy}$ i, substituint en la funció E, el problema es redueix a

$$\text{Min.} \quad E(x, y) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{x^2y^2}{64}\right)$$

Per tant, es redueix a un problema d'extrems lliures, en les variables x i y. Ara n'hi ha prou d'aplicar el procediment vist a la secció anterior.

(a) *Punts crítics.* Es resol el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} E'_x = \dfrac{k^2}{8m}\left(-\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2xy^2}{64}\right) = 0 \\ E'_y = \dfrac{k^2}{8m}\left(-\dfrac{2}{y^3} + \dfrac{2x^2y}{64}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{xy^2}{32} \\ \dfrac{2}{y^3} = \dfrac{x^2y}{32} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 64 = x^4y^2 \\ 64 = x^2y^4 \end{array}\right\}$$

Llavors, tenint en compte que x i y són les dimensions d'una caixa i han de ser ambdues positives,

$$x^4y^2 = x^2y^4 \;\Rightarrow\; x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; x = y$$

Substituint en la primera equació:

$$64 = x^6 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[6]{64} = 2$$

d'on s'obté el punt crític: $A(2,2)$.

(b) *Classificació.* Es calcula la matriu hessiana:

$$H = \frac{k^2}{8m}\begin{bmatrix} \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{y^2}{32} & \dfrac{xy}{16} \\ \dfrac{xy}{16} & \dfrac{6}{y^4} + \dfrac{x^2}{32} \end{bmatrix}$$

i, substituint els valors en el punt crític,

$$H = \frac{k^2}{8m}\begin{bmatrix} \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{32} & \dfrac{4}{16} \\ \dfrac{4}{16} & \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{32} \end{bmatrix} \Rightarrow H = \frac{k^2}{8m}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d'on,

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \frac{k^2}{8m}\cdot\frac{1}{2} > 0 \\ D_2 &= \left(\frac{k^2}{8m}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; E \text{ assoleix en } A(2,2) \text{ un mínim.}$$

Per tant, les dimensions que minimitzen l'energia d'estat són $x = y = z = 2\ dm$.

6.4.2 Mètode de multiplicadors de Lagrange

A l'apartat anterior s'ha vist que per trobar els extrems quan les variables són sotmeses a una restricció, s'utiliza el mètode d'aïllar una variable de l'equació;

substituir-la en la funció original i transformar-ne el problema en un problema d'extrems lliures amb una variable menys. No obstant això, aquest mètode no sempre és factible i, fins i tot, pot portar a no obtenir-ne totes les solucions possibles.

Per obviar aquestes dificultats, es veurà un altre mètode de calcular els extrems d'una funció, quan les variables són lligades per una restricció en forma d'una equació o d'un sistema d'equacions (però sempre amb un nombre d'equacions menor al de variables).

S'enuncia ara la condició necessària, coneguda com *mètode dels multiplicadors de Lagrange*

Teorema 6.5 (Condició necessària)

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *amb* D *un domini obert de* $\mathbb{R}^n$ *i* $f \in C^1(D)$. *Sigui* $X = \{\mathbf{x} \in D \ : \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, *amb* $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ *de classe* C^1 *i verificant que la matriu jacobiana de* $\mathbf{g}$ *en cada punt del conjunt* X *té rang màxim. Sigui* $\mathbf{x}_0 \in X$. *Si* $f_{|X}$ *té un extrem local en* $\mathbf{x}_0$, *llavors existeixen* m *escalars* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *de manera que el punt* $\mathbf{x}_0$ *és punt crític de la funció:*

$$L(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

Introduint els paràmetres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ com a variables addicionals en la funció L anterior, el problema de determinar els punts crítics de f que compleixen les restriccions, es redueix a determinar els punts crítics de la funció *lagrangiana*

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

S'enuncia ara la condició suficient per saber si un punt estacionari es màxim o mínim.

Teorema 6.6 (Clasificació dels punts crítics)

Sigui la funció $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *amb* D *un domini obert de* $\mathbb{R}^n$ *i* $f \in C^2(D)$. *Sigui* $X \subset D$ *com en el teorema anterior, on ara* $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ *de classe* C^2. *Suposeu determinats* m *escalars* λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m *de forma que el punt* $\mathbf{x}_0$

és punt crític de

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

Sigui Q la matriu expressada per blocs:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} H & J \\ \hline J^T & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

sent H la hessiana de $L(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}_0$ i J la jacobiana de $\mathbf{g}$ en $\mathbf{x}_0$. Sigui el polinomi en α de grau $n-m$

$$p(\alpha) = \left|\begin{array}{c|c} H - \alpha I_n & J \\ \hline J^T & \mathbf{0} \end{array}\right|$$

Llavors,

1. *Si totes les solucions de $p(\alpha) = 0$ són positives, $f_{|X}$ assoleix en $\mathbf{x}_0$ un mínim local estricte.*

2. *Si totes les solucions de $p(\alpha) = 0$ són negatives, $f_{|X}$ assoleix en $\mathbf{x}_0$ un màxim local estricte.*

Exemple 6.6

Es desitgen trobar els extrems de la funció $f(x, y) = x^2 y$, amb $y > 0$, que verifiquen

$$2x^2 + y^2 = 3$$

Es tracta d'un problema d'extrems condicionats. Com que sembla complicat aïllar una variable de l'equació $2x^2 + y^2 = 3$, el problema es resoldrà aplicant el mètode dels multiplicadors de Lagrange:

(a) *Punts crítics.* Es construeix la funció *Lagrangiana*

$$L(x, y, \lambda) = x^2 y + \lambda(2x^2 + y^2 - 3)$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

i es busquen els punts crítics:

$$\left.\begin{array}{rrl} L'_x = & 2xy + 4\lambda x = & 0 \\ L'_y = & x^2 + 2\lambda y = & 0 \\ L'_\lambda = & 2x^2 + y^2 - 3 = & 0 \end{array}\right\}$$

De la primera equació:

$$x(y + 2\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rr} x = & 0 \\ ó & \\ y = & -2\lambda \end{array}\right.$$

En el cas $x = 0$, substituint en la tercera equació surt

$$y^2 = 3 \ \Rightarrow y = \sqrt{3} \quad (\text{la solució } y = -\sqrt{3} \text{ no es considera atès que } y > 0)$$

i, en substituir aquest valor en la segona, resulta $\lambda = 0$. Així, en aquest cas, es troba el punt crític:

$$A(0, \sqrt{3}), \quad \lambda = 0$$

En el cas $y = -2\lambda$, substituint en la segona equació, s'obté:

$$x^2 - 4\lambda^2 = 0 \ \Rightarrow x^2 = 4\lambda^2$$

i, en substituir les dues condicions en la tercera equació, resulta

$$8\lambda^2 + 4\lambda^2 = 3 \ \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Com que ha de ser $y > 0$ i $y = -2\lambda$, sols pot ser vàlida la solució $\lambda = -\frac{1}{2}$ i, llavors, $y = 1$ i el valor de x és

$$x^2 = 4\lambda^2 = 1 \ \Rightarrow x = \pm 1$$

d'on es troben els punts crítics

$$\begin{array}{rl} B(1,1) & \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ C(-1,1) & \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

(b) *Classificació*. Per classificar els punts es calcula la matriu per blocs:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 2y+4\lambda & 2x & 4x \\ 2x & 2\lambda & 2y \\ \hline 4x & 2y & 0 \end{array}\right)$$

Aquesta matriu correspon exactament a la matriu hessiana de L com a funció de x, y i λ, separant en blocs les derivades respecte de x i y de les derivades respecte del multiplicador λ. Per exemple, la primera fila conté les derivades segones L''_{xx}, L''_{xy} i (separada) $L''_{x\lambda}$.

Per al punt $A(0, \sqrt{3})$, $\lambda = 0$

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ \hline 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{array}\right)$$

i, llavors,

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{3}-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 12(2\sqrt{3}-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{3} > 0$$

Per tant, la funció f assoleix en A un mínim, amb valor $f(0, \sqrt{3}) = 0$.

Per al punt $B(1, 1)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

i, llavors,

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 2 & 4 \\ 2 & -1-\alpha & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 - 16(-1-\alpha) + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{48}{5} < 0$$

Per tant, la funció f assoleix en B un màxim, amb valor $f(1, 1) = 1$.

Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Per al punt $C(-1,1)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

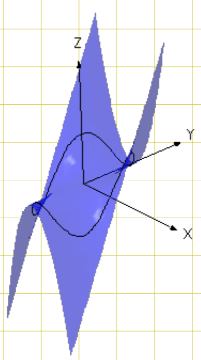
$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ \hline -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

i, llavors,

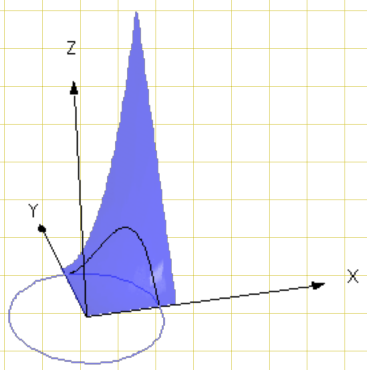
$$\begin{vmatrix} -\alpha & -2 & -4 \\ -2 & -1-\alpha & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 - 16(-1-\alpha) + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{48}{5} < 0$$

i, per tant, la funció f assoleix en C un màxim, amb valor $f(-1,1) = 1$.

Per acabar, s'explica gràficament el procés realitzat. En la Fig. 6.4(a) s'ha representat la superfície $z = x^2y$ i la corba sobre ella correspon a la imatge dels punts (x,y) del pla que compleixen la restricció $2x^2 + y^2 = 3$ (el·lipse). Per un major detall, en la Fig. 6.4(b) s'ha representat sols la part gràfica corresponent a l'octant positiu. L'el·lipse del pla XY és la restricció $2x^2 + y^2 = 3$ i la imatge dels seus punts dibuixen una corba sobre la gràfica de la funció $z = x^2y$.



(a) Gràfica completa



(b) Gràfica en l'octant positiu

Figura 6.4: Gràfica de $z = x^2y$

Finalment, en la Fig. 6.5, s'ha representat únicament la corba restricció, $f_{|X}$; és a dir, la funció f avaluada als punts de l'el·lipse $2x^2 + y^2 = 3$. S'han assenyalat els punts crítics que, com s'observa, corresponen a un mínim i dos màxims locals. En la Fig. 6.5 s'observen, a més, un altre màxim i dos mínims, corresponents a la regió $y < 0$, que ha estat exclosa de l'estudi.

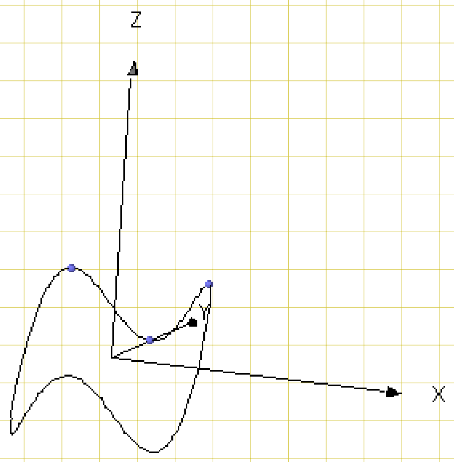


Figura 6.5: Extrems de la funció restringida

6.5 Exercicis resolts

Exercici 6.5.1 La hipotenusa d'un triangle rectangle amida $h = 15.4 \pm 0.1$ cm i un dels seus catets $c_1 = 6.8 \pm 0.1$ cm Amb quina exactitud pot calcular-se l'altre catet?

Solució: Es demana l'error màxim en calcular l'altre catet; és a dir, l'error màxim en calcular el catet c_2 emprant la fórmula

$$c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$$

En conèixer els errors màxims en amidar h i c_1, que són

$$|\epsilon_h| \leq 0.1 \quad \text{i} \quad |\epsilon_{c_1}| \leq 0.1,$$

n'hi ha prou d'aplicar la fórmula (6.9) la qual, adaptada a aquestes variables, s'escriu com

$$|\epsilon_{c_2}| = \left|\frac{\partial c_2}{\partial h}\right| \cdot |\epsilon_h| + \left|\frac{\partial c_2}{\partial c_1}\right| \cdot |\epsilon_{c_1}|$$

En calcular les derivades parcials,

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

$$\frac{\partial c_2}{\partial h}\Big|_{h\,=\,15.4,\,c_1\,=\,6.8} = \frac{h}{\sqrt{h^2-c_1^2}}\Big|_{h\,=\,15.4,\,c_1\,=\,6.8} \approx 1.11$$

i

$$\frac{\partial c_2}{\partial c_1}\Big|_{h\,=\,15.4,\,c_1\,=\,6.8} = \frac{-c_1}{\sqrt{h^2-c_1^2}}\Big|_{h\,=\,15.4,\,c_1\,=\,6.8} \approx -0.49$$

d'on

$$|\epsilon_{c_2}| \leq 1.11 \cdot 0.1 + 0.49 \cdot 0.1 \approx 0.16$$

És a dir, el segon catet es podria calcular amb un error que no supera els $0.16\ cm$.

Exercici 6.5.2 El període T d'oscil·lació d'un pèndol simple es calcula per la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

on L n'és la longitud i g és l'acceleració de la gravetat. Trobeu l'error que es comet en determinar T, si se sap que els errors en mesurar L i g no excedeixen d'un 3% i un 1%, respectivament.

Solució: De l'enunciat es dedueix que es coneixen cotes dels error relatius:

$$\frac{|\epsilon_L|}{L} \leq 0.03 \quad \text{i} \quad \frac{|\epsilon_g|}{g} \leq 0.01$$

D'altra banda, aplicant la fórmula (6.9), s'obté

$$|\epsilon_T| = \left|\frac{\partial T}{\partial L}\right| \cdot |\epsilon_L| + \left|\frac{\partial T}{\partial g}\right| \cdot |\epsilon_g|$$

i calculant les derivades parcials s'arriba a

$$|\epsilon_T| = \left|\frac{\pi}{\sqrt{Lg}}\right| \cdot |\epsilon_L| + \left|\frac{-\pi}{g}\sqrt{\frac{L}{g}}\right| \cdot |\epsilon_g|$$

Com que no es coneixen els valors de L i g, es divideix l'expressió anterior per $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ i així,

$$\frac{|\epsilon_T|}{T} = \left|\frac{\frac{\pi}{\sqrt{Lg}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}\right| \cdot |\epsilon_L| + \left|\frac{-\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{L}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}\right| \cdot |\epsilon_g|$$

$$= \frac{|\epsilon_L|}{2L} + \frac{|\epsilon_g|}{2g} \leq \frac{1}{2}\cdot 0.03 + \frac{1}{2}\cdot 0.01 = 0.02$$

Així, l'error màxim en la determinació del període T és d'un 2%.

Exercici 6.5.3 El moment d'inèrcia d'una vareta longitudinal, de masa m i longitud h, respecte a un eix que passi per un dels extrems, ve donada per la fórmula

$$I = m\frac{h^2}{3}$$

Determineu l'error màxim en el moment d'inèrcia quan $h = 4 \pm 0.1$ cm i $m = 3 \pm 0.1$ gr.

Solució: L'error màxim vindrà donat per una cota de l'error $|\epsilon_I|$. Com que es coneixen les cotes dels errors $|\epsilon_h| \leq 0.1$ i $|\epsilon_m| \leq 0.1$ i les mides de m i h; n'hi ha prou, doncs, d'aplicar la fórmula (6.9) que, adaptada a aquest cas, s'escriu com

$$|\epsilon_I| = \left|\frac{\partial I}{\partial h}\right| \cdot |\epsilon_h| + \left|\frac{\partial I}{\partial m}\right| \cdot |\epsilon_m|$$

Ara,

$$\frac{\partial I}{\partial h}\Big|_{\mathrm{h=4,\ m=3}} = \frac{2mh}{3}\Big|_{\mathrm{h=4,\ m=3}} = 8 \quad \text{i} \quad \frac{\partial I}{\partial m}\Big|_{\mathrm{h=4,\ m=3}} = \frac{h^2}{3}\Big|_{\mathrm{h=4,\ m=3}} = \frac{16}{3}$$

d'on

$$|\epsilon_I| \leq 8\cdot 0.1 + \frac{16}{3}\cdot 0.1 \approx 1.33\ gr\cdot cm^2$$

Exercici 6.5.4 Suposeu que la temperatura en un punt (x, y, z) ve donada per $T(x, y, z) = (2 - x - y)^3 + (3x + 2y - z + 1)^2$. En quina direcció s'hauria de moure, partint de l'origen, per refredar-se al més ràpidament possible? Calculeu, a més a més, la taxa de refredament màxim.

Solució: Es tracta d'un problema de derivades direccionals màximes (taxes màximes de variació). La direcció de màxim decreixement (refredament) és $-\nabla T(0, 0, 0)$ i la taxa màxima de variació és $|\nabla T(0, 0, 0)|$. Així doncs, es calcula el gradient de la funció en el punt $(0, 0, 0)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -3(2 - x - y)^2 + 6(3x + 2y - z + 1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -3(2 - x - y)^2 + 4(3x + 2y - z + 1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -2(3x + 2y - z + 1)$$

per la qual cosa

$$\nabla T(0, 0, 0) = (-6, -8, -2)$$

i, llavors, la direcció de refredament màxim és

$$-\nabla T(0, 0, 0) = (6, 8, 2)$$

i, a més, la taxa de refredament màxim és $|\nabla T(0, 0, 0)| = \sqrt{104}$.

Exercici 6.5.5 Donada la funció $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$, determineu, raonadament, els seus extrems.

Solució: Es tracta d'un problema d'extrems lliures (en no haver-hi cap restricció sobre les variables x, y). Per tant, s'han de trobar els punts crítics i després classificar-los amb la matriu hessiana.

(1) Punts crítics: són els que fan zero les derivades parcials. Llavors, s'ha de resoldre el sistema

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

$$\left.\begin{array}{rcl} f'_x = 3x^2 + 3y & = & 0 \\ f'_y = 3x + 3y^2 & = & 0 \end{array}\right\}$$

De la primera equació, $y = -x^2$ i substituint en la segona equació:

$$3x + 3(-x^2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x + x^4 = 0 \;\Rightarrow\; x(1 + x^3) = 0$$

d'on hi ha dues possibilitats: $x = 0$ o $1 + x^3 = 0$.

La forma usual de resoldre aquests sistemes no lineals és aïllar una variable d'una de les equacions i substituir-la a la resta d'equacions, fins arribar a una equació en una única variable que es pugui resoldre.

Prenent la primera, $x = 0$, com $y = -x^2$, queda el punt crític $A(0, 0)$.

De la segona, $1 + x^3 = 0$, que sols té una solució real $x = -1$ i, de nou, com que $y = -x^2$ resulta el punt crític $B(-1, -1)$.

(2) Classificació.

Es calcula la matriu hessiana (matriu de les derivades parcials segones):

$$H = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{bmatrix}$$

i s'avalua en cada punt crític. En el punt $A(0, 0)$ queda

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

i com que $D_2 = det(H) = -9 < 0$, el criteri de classificació (Teorema 6.4(c)) diu que la funció f presenta en aquest punt A un punt de sella.

En el punt $B(-1, -1)$ queda

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

i com $D_1 = -6 < 0$ i $D_2 = det(H) = 27 > 0$, el criteri de classificació (Teorema 6.4(a)) diu que la funció f assoleix en B un màxim local, amb valor $f(-1, -1) = 1$.

Exercici 6.5.6 Calculeu els extrems de la funció $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2$.

Solució: Es tracta d'un problema d'extrems lliures (en no haver-hi cap restricció sobre les variables x, y). Per tant, s'han de trobar els punts crítics i després classificar-los amb la matriu hessiana.

(1) Punts crítics: són els que fan zero les derivades parcials.

Llavors, s'ha de resoldre el sistema

$$\left.\begin{aligned} f'_x = 2x + 2y^2 &= 0 \\ f'_y = 4xy + 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De la segona equació, treient factor comú la variable y:

$$4y(x + 1) = 0$$

s'obtenen les solucions:

$$y = 0 \quad \text{o} \quad x = -1$$

En aquest cas, cal observar que, en una de les equacions, es pot treure factor comú i, llavors, es poden determinar ja valors de les variables que permet de substituir-les a la resta d'equacions.

Si $y = 0$, substituint en la primera equació: $2x = 0$, s'obté el punt crític $A(0, 0)$.

Si $x = -1$, substituint en la primera equació: $y^2 = 1$, s'obtenen els punts crítics $B(-1, 1)$ i $C(-1, -1)$.

(2) Classificació.

Es calcula la matriu hessiana (matriu de les derivades parcials segones):

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 4x + 4 \end{bmatrix}$$

i s'avalua en cada punt crític. En el punt $A(0, 0)$ queda

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

i com que $D_1 = 2 > 0$ i $D_2 = det(H) = 8 > 0$, el criteri de classificació (Teorema 6.4(b)) diu que la funció f presenta en aquest punt A un mínim local, amb valor $f(0,0) = 0$.

En el punt $B(-1,1)$ queda

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

i com que $D_2 = det(H) = -16 < 0$, el criteri de classificació (Teorema 6.4(c)) diu que la funció f presenta en aquest punt B un punt de sella.

En el punt $C(-1,-1)$ queda

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

i com que $D_2 = det(H) = -16 < 0$, el criteri de classificació (Teorema 6.4(c)) diu que la funció f presenta en aquest punt C un punt de sella.

Exercici 6.5.7 Trobeu els punts de la corba $x^2 - y^2 = 1$ que estan situats al més prop possible del punt $P(0,2)$. Calculeu aquesta distància mínima.

Solució:

S'ha de minimitzar la funció distància al punt $P(0,2)$:

$$d((x,y),(0,2)) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Com que el problema és equivalent a minimitzar el quadrat de la distància; per facilitar els càlculs, es buscarà el mínim de la funció $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$. A més, atès que el punt (x,y) ha de pertànyer a la corba, hi ha una restricció sobre les variables x i y: $x^2 - y^2 = 1$. Com que es tracta, doncs, d'un problema d'extrems amb restriccions, s'aplicarà el *mètode dels multiplicadors de Lagrange*.

(a) Punts crítics. Es construeix la funció *lagrangiana*:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + (y-2)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1)$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

i cal trobar els punts que anul·len les derivades parcials:

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2(y-2) - 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

De la primera equació: $2x(1+\lambda) = 0$ i, llavors, $x = 0$ o $\lambda = -1$.

En el primer cas, $x = 0$ redueix el sistema a

$$\left.\begin{array}{l} 2(y-2) - 2\lambda y = 0 \\ -y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

que no té solució.

En el segon cas, $\lambda = -1$, que transforma el sistema en

$$\left.\begin{array}{l} 2(y-2) + 2y = 0 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

i, de la primera equació, $y = 1$. D'on, $x^2 = 2$ i, per tant, $x = \pm\sqrt{2}$. Així es troben dos punts crítics:

$$A(\sqrt{2}, 1), \ \lambda = -1; \qquad \text{i} \qquad B(-\sqrt{2}, 1), \ \lambda = -1$$

(b) Clasificació. S'aplica el Teorema 6.6. Es construeix, doncs, la matriu per blocs

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 2+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2-2\lambda & -2y \\ \hline 2x & -2y & 0 \end{array}\right)$$

i s'avalua en cada punt crític. Al punt crític $A(\sqrt{2}, 1)$, $\lambda = -1$, dóna:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & -2 \\ \hline 2\sqrt{2} & -2 & 0 \end{array}\right)$$

i, llavors,

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4-\alpha & -2 \\ 2\sqrt{2} & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8(4-\alpha)+4\alpha = 12\alpha - 32 = 0$$

que dóna com a solució $\alpha = \frac{8}{3} > 0$ i f assoleix en A un mínim amb valor $f(A) = 3$.

Al punt crític $B(-\sqrt{2}, 1)$, $\lambda = -1$, la matriu Q s'escriu

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & -2 \\ \hline -2\sqrt{2} & -2 & 0 \end{array}\right)$$

i, llavors,

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 4-\alpha & -2 \\ -2\sqrt{2} & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8(4-\alpha)+4\alpha = 12\alpha - 32 = 0$$

que dóna com a solució $\alpha = \frac{8}{3} > 0$ i f assoleix en B un mínim amb valor $f(B) = 3$.

En qualsevol cas, la distància mínima de la corba al punt $(0, 2)$ resulta ser $\sqrt{3}$ unitats.

Exercici 6.5.8 Trobeu els màxims i mínims de la funció $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$ que verifiquen les condicions

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^2 \end{cases}$$

Solució: Es tracta, òbviament, d'un problema d'extrems condicionats. En aquest cas, vist que les restriccions ja tenen les dues variables y i z aïllades, s'emprarà el mètode de reducció de variables. Així, substiutint $y = x^2$ i $z = x^2$ en la funció $f(x, y, z)$ s'obté:

$$f(x) = x^2 + x^4 + (x^2 - 1)^2$$

i el problema es redueix a trobar els màxims i mínims d'aquesta funció d'una variable. Llavors, en fer $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = 2x + 4x^3 + 4x(x^2 - 1) = 8x^3 - 2x = x(8x^2 - 2) = 0$$

implica que $x = 0$ o $8x^2 - 2 = 0$; és a dir, es troben les solucions

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2}$$

El signe de la derivada segona en cadascun d'aquest punts determinarà el seu caràcter de màxim o mínim. Així,

$$f''(x) = 24x^2 - 2$$

i

$$\begin{array}{l} f''(0) = -2 \quad \Rightarrow \; f(x) \text{ assoleix un màxim en } x = 0 \\ f''(\frac{1}{2}) = 4 \quad \Rightarrow \; f(x) \text{ assoleix un mínim en } x = \frac{1}{2} \\ f''(-\frac{1}{2}) = 4 \quad \Rightarrow \; f(x) \text{ assoleix un mínim en } x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Traslladant aquesta informació al problema original i, tenint en compte que $y = x^2$ i $z = x^2$, es pot afirmar que la funció $f(x, y, z)$ assoleix

(1) un màxim en $P(0, 0, 0)$, amb valor $f(0, 0, 0) = 1$.

(2) un mínim en $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ amb valor $f(Q) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{14}{16}$.

(3) un mínim en $R\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ amb valor $f(R) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{14}{16}$.

Cal fer èmfasi que allò que és màxim o mínim és el valor de la funció. Aquest exercici mostra que el mateix valor mínim pot assolir-se en diversos punts.

Exercici 6.5.9 Trobeu els punts on s'assoleixen els valors màxims i mínims de la funció $f(x, y, z) = x + y + z$, sotmesa a les restriccions $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x - y - z = 1$.

Solució: Es tracta d'un problema d'extrems condicionats. Com que no és fàcil aïllar les variables de les restriccions es farà servir el mètode dels multiplicadors de Lagrange. A banda, s'emprarà el wxMaxima per fer alguns dels càlculs més pesats.

(1) Punts crítics. Es construeix la funció *lagrangiana*:

$$L(x, y, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \beta(x - y - z - 1)$$

i cal trobar els punts que anul·len les derivades parcials:

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = 1 + 2\lambda x + \beta = 0 \\ L'_y = 1 + 2\lambda y - \beta = 0 \\ L'_z = 1 + 2\lambda z - \beta = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ L'_\beta = x - y - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Les tres primeres equacions juntament amb la cinquena formen un sistema lineal en les variables x, y, z i b que es pot resoldre amb wxMaxima:

```
eq1:1+2*a*x+b=0;
eq2:1+2*a*y-b=0;
eq3:1+2*a*z-b=0;
eq4:x^2+y^2+z^2=1;
eq5:x-y-z=1;
solve([eq1,eq2,eq3,eq5],[x,y,z,b]);
```

$$[[x = \frac{a-2}{3*a}, y = -\frac{a+1}{3*a}, z = -\frac{a+1}{3*a}, b = -\frac{2*a-1}{3}]]$$

Cal observar que la solució proporcionada no és vàlida quan $a = 0$, però el paràmetre a (que correspon al multiplicador λ) no pot prendre aquest valor perquè, llavors, les dues primeres equacions serien incompatibles.

Ara, susbtituint els valors de x, y i z en la quarta equació s'obtenen les possibles solucions de a:

```
eq4mod:ev(eq4,x=(a-2)/(3*a),y=-(a+1)/(3*a),z=-(a+1)/(3*a));
solve(eq4mod,a);
```

$$\frac{(a-2)^2}{9*a^2}+\frac{2*(-a-1)^2}{9*a^2}=1$$

$$[a=-1, a=1]$$

Per tant, es tenen dos punts crítics (en substituir els valors de a en la solució obtinguda abans):

punt crític $A(1,0,0)$ amb $\lambda=-1$, $\beta=1$ i punt crític $B(-1/3,-2/3,-2/3)$ amb $\lambda=1$, $\beta=-1/3$.

(2) Classificació. A partir de la matriu per blocs

$$Q=\left(\begin{array}{ccc|cc} 2\lambda & 0 & 0 & 2x & 1 \\ 0 & 2\lambda & 0 & 2y & -1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 2z & -1 \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

S'avalua aquesta matriu Q en el punt crític i s'aplica el mètode descrit al Teorema 6.6. S'utilitza el programari wxMaxima per calcular els valors del paràmetre α que anul·len el determinant corresponent.

```
q:matrix([2*a-p,0,0,2*x,1],[0,2*a-p,0,2*y,-1],
[0,0,2*a-p,2*z,-1],
[2*x,2*y,2*z,0,0],[1,-1,-1,0,0]);
```

Es construeix la matriu Q genèrica, on s'ha introduït ja el paràmetre p (que fa el paper de α del Teorema 6.6) el signe del qual proporciona el caràcter del punt crític com a màxim o mínim.

```
qA:ev(q,x=1,y=0,z=0,a=-1)%
solve(determinant(qA)=0,p);
```

$[p = -2]$

Aquí s'ha avaluat la matriu Q en el punt crític $A(1, 0, 0)$ amb $a = -1$; i el valor del paràmetre p que anul·la el determinant és $p = -2$; per la qual cosa al punt A s'assoleix un màxim.

```
qB:ev(q,x=-1/3,y=-2/3,z=-2/3,a=1)%
solve(determinant(qB)=0,p);
```

$[p = 2]$

Aquí s'ha avaluat la matriu Q en el punt crític $B(-1/3, -2/3 - 2/3)$ amb $a = 1$; i el valor del paràmetre p que anul·la el determinant és $p = 2$; per la qual cosa s'assoleix un mínim al punt B.

Càlcul integral 7

El concepte d'integral definida surt per calcular l'àrea de regions planes acotades per línies corbes. Partint del fet que l'àrea del quadrat, de costats de longitud l, és igual a l^2, resulta senzill calcular l'àrea de qualsevol rectangle i, a més, pot calcular-se també l'àrea de qualsevol polígon si es divideix en triangles. Però, com es pot calcular l'àrea d'un cercle o d'una regió acotada per una paràbola? El Càlcul integral proporciona un mètode unificat i eficent per a la resolució d'aquest tipus de problemes.

7.1 Definicions bàsiques

El concepte bàsic és el de la integral. Intuïtivament, s'entendrà com una expresió per calcular l'àrea mitjançant un límit. Es considera una funció positiva i acotada $f(x)$ definida en un interval $[a, b]$. Es proposa mesurar l'àrea de la regió acotada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (en la pràctica, la funció f serà, gairebé sempre, contínua).

El mètode consisteix a reemplaçar la regió corbada que es vol mesurar, per recintes l'àrea dels quals sigui fàcil de calcular i que aproximen tant com es vulgui la regió.

Definició (Partició)

Una *partició* P d'un interval $[a, b]$ és un conjunt finit de punts $\{x_0, x_1..., x_n\}$ de l'interval, ordenats de forma creixent; és a dir,

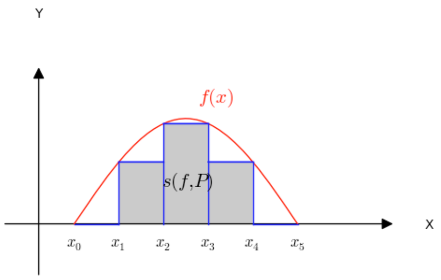
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Cadascun dels subintervals $[x_{j-1}, x_j]$, per a $j = 1, 2, ...n$, és un *subinterval de la partició*. Si la longitud d'aquests subintervals es representa per $\delta_j = x_j - x_{j-1}$, la longitud del major subinterval és

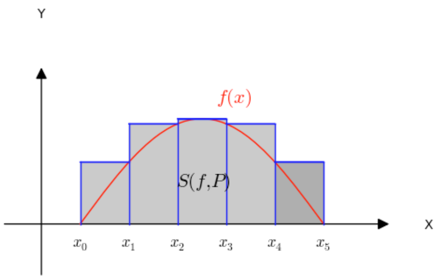
$$\delta(P) = \max\{\delta_j : 1 \leq j \leq n\},$$

i rep el nom de *norma* de la partició.

Es defineixen ara els recintes que aproximen l'àrea, superiorment i inferiorment.



(a) Suma inferior



(b) Suma superior

Figura 7.6: Sumes inferior i superior

A partir d'ara, es considerarà la funció $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que serà una funció acotada (no necessàriament positiva).

Definició (Suma superior i inferior)

Siguin M_j i m_j el suprem i l'ínfim, respectivament, dels valors de $f(x)$ a l'interval $[x_{j-1}, x_j]$. Es defineix

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j \delta_j \quad \text{(suma superior)}$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

i

$$s(f,P)=\sum_{j=1}^{n} m_j\delta_j \quad \text{(suma inferior)}$$

Llavors, la *suma superior* $S(f,P)$ és la suma de les àrees de n rectangles, de base $[x_{j-1},x_j]$ i altura M_j, respectivament. La suma d'aquestes àrees és major o igual que la de l'àrea R, continguda entre la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=a$, $x=b$, $y=0$. Análogament, la suma inferior $s(f,P)$ és menor o igual que l'àrea de R (vegeu la Fig. 7.6)

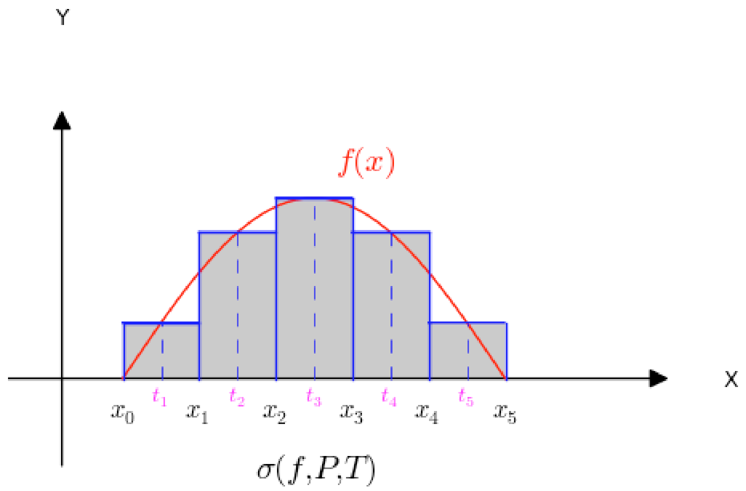


Figura 7.7: Una suma de Riemann

Definició (Suma de Riemann)

Si ara t_j és un valor arbitrari de l'interval $[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,...,n)$ i es pren el conjunt $T=\{t_1,...,t_n\}$, la *suma de Riemann*

$$\sigma(f,P,T)=\sum_{j=1}^{n} f(t_j)\delta_j$$

satisfà que

$$s(f,P)\le\sigma(f,P,T)\le S(f,P)$$

En la Fig. 7.7 s'ha construït aquesta suma, prenent com conjunt T els punts del mig de cada subinterval.

Si $f(x)$ és una funció *amb bones propietats* (per exemple, una funció contínua), les tres sumes anteriors tendeixen a un límit comú quan $\delta(P)$ tendeix a 0. Aquest límit, denotat per

$$\int_a^b f(x)dx$$

serà la integral de la funció f sobre l'interval $[a, b]$.

Definició (Funció integrable)

La funció f és integrable en el l'interval $[a, b]$ si, i sols si, existeix el límit dels valors

$$\sigma(f, P, T)$$

quan $\delta(P)$ tendeix a 0 i és independent de la tria del conjunt T.

Afortunadament, hi ha un bon nombre de funcions que són integrables.

Teorema 7.7 (Funcions integrables)

1. *Si f és contínua en $[a, b]$, llavors f és integrable en $[a, b]$.*
2. *Si f és monòtona en $[a, b]$ llavors f és integrable en $[a, b]$.*

Propietats de la integral definida

Donades dues funcions integrables f i g en $[a, b]$, es verifiquen les propietats següents:

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2. $\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
4. $f \leq g \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Per comoditat de notació, s'adopten els convenis següents:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

La definició d'integral no és pràctica a l'hora de calcular-ne alguna. El següent resultat proporcionarà una metodologia més adient per fer-ho.

Es diu que F és una *primitiva* de f en $[a,b]$ quan $F'(x) = f(x)$, per a tot $x \in [a,b]$.

Teorema 7.8 (Regla de Barrow)

Si f és integrable en $[a,b]$ i F és una primitiva de f en $[a,b]$, llavors

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

L'avaluació $F(b) - F(a)$ s'expressarà, sovint, de la forma $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

La regla de Barrow proporciona un procediment senzill per calcular la integral (definida) d'una funció quan es coneix una primitiva. És important, doncs, disposar de mètodes per trobar primitives d'una funció.

7.2 Integral indefinida

Si F i G són primitives de f, llavors $F - G$ és una constant. Per tant, el conjunt de totes les primitives de f està format per totes les funcions de la forma $F + k$, essent F qualsevol primitiva de f i k una constant arbitrària. Així, s'anomena *integral indefinida* de f a una primitiva genèrica de la funció f; és a dir, a una funció de la forma $F + k$ com abans. Es denotarà per

$$\int f(x)dx$$

Propietats de la integral indefinida

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$.
2. $\int \frac{d}{dx}f(x)dx = f(x) + k$.
3. $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

Integrals immediates

A continuació es llisten algunes integrals immediates (les que provenen de la derivació de les funcions elementals):

1. $\int c\,dx = cx$
2. $\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$, $r \neq -1$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x$
4. $\int \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x$
5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
6. $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$
7. $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$
8. $\int \tan(x)\,dx = -\ln(\cos x)$
9. $\int \cot(x)\,dx = \ln(\sin x)$
10. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$
11. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$
12. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$
13. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$
14. $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$

Exemple 7.1

Per calcular $I = \int (x^2 - 3x + 5)\ dx$, hi ha prou d'aplicar les propietats 3 i 4 de les integrals indefinides (pàgina 183). Així, separant-la en suma d'integrals i treient fora els escalars, queden integrals immediates del tipus 2 (potències).

$$I = \int x^2\ dx + \int -3x\ dx + \int 5\ dx = \int x^2\ dx - 3\int x\ dx + 5\int\ dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + k$$

A més, cal aprendre a manipular les integrals per transformar-les en immediates. Convé saber ara que, a partir de la llista d'integrals immediates, es pot crear una nova llista amb funcions compostes; per exemple

$$\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k,\ r \neq -1 \quad \longrightarrow \quad \int u(x)^r\ u'(x)\ dx = \frac{u(x)^{r+1}}{r+1} + k$$

és a dir, si es té una funció $u(x)$ en comptes de simplement la variable x, per poder aplicar la mateixa fórmula d'integració cal que aparegui la derivada de la funció u.

Llavors, es pot completar la taula anterior d'integrals immediates amb les integrals immediates compostes o es pot aprendre a calcular la fórmula composta quan es necessiti.

Exemple 7.2

Per resoldre la integral $I = \int (2x - 3)^5\ dx$, cal afegir la derivada del parèntesi $(2x - 3)$, per poder aplicar la fórmula de la potència:

$$\boxed{\int u(x)^r\ u'(x)\ dx = \frac{u(x)^{r+1}}{r+1} + k}$$

És a dir, cal afegir la constant 2 dintre de la integral i dividir fora per 2 (per no alterar-ne la funció).

ISBN: 978-84-17429-26-3

Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

$$I = \frac{1}{2}\int 2(2x-3)^5\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)^6}{6}+k$$

Noteu que es pot afegir la derivada perquè aquesta és una constant. No funciona quan cal afegir, multiplicant, la variable d'integració x (o expressions que la contenen).

Un altre exemple, ara amb una integral trigonomètrica.

Exemple 7.3

Per resoldre la integral

$$I = \int \cos(3x)dx,$$

cal afegir la derivada de l'argument del cosinus i aquesta derivada és 3, que, en ser constant, es pot afegir (i dividir fora per 3):

$$I = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x)+k$$

Com abans, es dedueix, en primer lloc, la fórmula que cal aplicar:

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+k,$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\int \cos(u(x))\,u'(x)\,dx = \sin(u(x))+k}$$

De vegades les transformacions requereixen una mica d'enginy:

Exemple 7.4

Per calcular la integral $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$, s'aplica la identitat fonamental:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

substituint el numerador 1 per la part esquerra de la identitat i separant la integral en dues que resulten ser immediates.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \tan x - \cot x + k$$

Exemple 7.5

Per calcular $I = \int \cos^2(x)dx$, s'aplica la fórmula trigonomètrica

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

i ja pot descompondre's en integrals immediates.

Dues fórmules trigonomètriques que cal recordar són:

$$\boxed{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

$$\boxed{\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$I = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int 1\ dx + \frac{1}{2\cdot 3}\int 2cos(2x)\ dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Exemple 7.6

Per calcular $I = \int \frac{2}{3+x^2}\ dx$; cal transformar-la en la de l'arctangent. En aquest cas, n'hi ha prou de dividir numerador i denominador per 3; per tal d'aconseguir expressar el denominador de la forma $1+u^2$.

Com abans, es dedueix, primerament, la fórmula que cal aplicar:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan(x) + k,$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\ dx = \arctan(u(x)) + k}$$

$$\int \frac{2}{3+x^2}\ dx = \int \frac{2/3}{1+x^2/3}\ dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\ dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\ dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Integració per parts i substitució

Una tècnica per resoldre algunes integrals consisteix en l'anomenada fórmula d'integració per parts que s'explica a continuació.

Teorema 7.9 (Integració per parts)

Siguin f i g funcions contínues en $[a,b]$ de manera que existeixen les derivades f', g', que són també contínues en $[a,b]$. Llavors,

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Si s'anomena $u = f(x)$, $v = g(x)$ i es prescindeix dels límits d'integració, llavors la fórmula anterior adopta la forma:

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

La fórmula d'integració per parts transforma la integral inicial en una altra que, potser, es pugui resoldre. Normalment, s'aplica quan hi ha un producte de funcions que no hi són relacionades (una no és la derivada de l'altra o la derivada de part de l'altra).

Exemple 7.7

Per calcular $I = \int x\,\mathrm{e}^x\;dx$, s'aplica la fórmula d'integració per parts

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

Prenent $u = x$ i $dv = \mathrm{e}^x\;dx$ en la fórmula d'integració per parts, s'obté

$$I = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\;dx = \left\{\begin{array}{lcl} u = x & \longrightarrow & du = dx \\ dv = \mathrm{e}^x\;dx & \longrightarrow & v = \int \mathrm{e}^x\;dx = \mathrm{e}^x \end{array}\right\}$$

$$= x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + k$$

Exemple 7.8

Per calcular $I = \int x \ln x \, dx$, s'aplica la fórmula d'integració per parts. Prenent $u = \ln(x)$ i $dv = x\,dx$ en la fórmula d'integració per parts, s'obté

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + k$$

Exemple 7.9

Per calcular $I = \int x^3 \sin x \, dx$, s'aplica la integració per parts diverses vegades, prenent sempre com a funció u la part polinòmica, fins eliminar-la.

$$\begin{aligned}
I &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2\,dx \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos(x) \end{array} \right\} = -x^3\cos(x) + \int 3x^2\cos(x)\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = 3x^2 \Rightarrow du = 6x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin(x) \end{array} \right\} = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - \int 6x\sin(x)\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = 6x \Rightarrow du = 6\,dx \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos(x) \end{array} \right\} \\
&= -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - \left(-6x\cos(x) + \int 6\cos(x)\,dx\right) \\
&= -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) + 6x\cos(x) - 6\sin(x) + k
\end{aligned}$$

Teorema 7.10 (Integració por substitució)

Sigui f una funció contínua en $[a,b]$ i sigui g una funció contínua de $[c,d]$ a $[a,b]$ tal que $g(c) = a$, $g(d) = b$ i existeix la derivada de g en $[c,d]$. Llavors, $(f \circ g)\cdot g'$ és integrable en $[c,d]$ i

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

Tot i que el teorema anterior és enunciat per a la integral definida, es pot aplicar també per a la integral indefinida. La forma usual d'aplicar-lo és canviar la variable fent $t = g(x)$ (la més comuna) o $x = g(t)$. La idea és transformar la integral inicial en una altra més senzilla.

Exemple 7.10

Per calcular $I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ es pot fer el canvi $t = e^x$ i així:

$$I = \int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}} = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ e^{2x} = (e^x)^2 = t^2 \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + k = \arctan(e^x) + k$$

En primer lloc convé observar que la integral no és immediata (la derivada del denominador no hi és al numerador). En segon lloc, convé recordar que $e^{ax} = (e^x)^a$.

Exemple 7.11

Per calcular $I = \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$ $(x \in [-1, 1])$; s'aplica el canvi $t = \arcsin x$ i la integral es transforma en

$$I = \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^3} dt$$

$$= \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{2} + k = -\frac{(\arcsin x)^{-2}}{2} + k$$

havent desfet el canvi a l'últim pas.

Ara, un exemple amb l'altre tipus de canvi de variable

Exemple 7.12

Per calcular $I = \int \sqrt{16 - x^2}\ dx$ $(x \in [-4, 4])$; s'aplica el canvi $x = 4\sin t$ $(t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$:

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x = 4\sin(t) \\ dx = 4\cos(t)\ dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{16 - 16\sin^2(t)} \cdot 4\cos(t) dt$$

$$= 16 \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t)\ dt = 16 \int \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t)\ dt$$

$$= \int \cos(t)\cos(t)\ dt = \int cos^2(t); dt = 16 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2}\ dt$$

$$= 8\left(t + \frac{sin(2t)}{2}\right) = 8t + 4\sin(2t) + k$$

Un error molt comú és pensar que sempre és

$$\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

Això sols és cert quan $\cos(t) > 0$, la qual cosa es compleix a aquest exemple en treballar a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Per desfer el canvi, $\sin(t) = \frac{x}{4}$ i, llavors, $\cos(t) = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$. Ara,

$$I = 8t + 4\sin(2t) = 8t + 8\sin t \cos t = 8 \arcsin \frac{x}{4} + 8\frac{x}{4}\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} + k$$

Integrals racionals

Les integrals racionals són les integrals de quocients de polinomis $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx$. Aquestes integrals sempre es poden resoldre. A continuació, es veuran els tipus bàsics. Després es presentarà un mètode per reduir les integrals racionals a una suma d'integrals d'aquests tipus bàsics.

Integrals de fraccions simples

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(|x-a|) + k.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + k \ (n \neq 1).$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + k.$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k.$

Com sempre, al llarg de tot aquest text, es treballa amb polinomis de coeficients reals. El mètode per resoldre una integral racional consisteix, a grans trets, en factoritzar el denominador, descompondre en suma de fraccions simples i integrar cadascuna d'aquestes d'acord amb la taula anterior. La viabilitat del mètode la proporcionen un parell de teroemes de l'àlgebra que permeten la factorització de qualsevol polinomi i la descomposició de qualsevol quocient de polinomis en suma de fraccions simples (vegeu, per exemple, [6]). Cal remarcar que, per poder fer la descomposició, la fracció ha de ser pròpia; és a dir, el grau del denominador ha de ser major que el grau del numerador.

Per motius de simplicitat, s'eliminarà de l'estudi el cas en què els denominadors admeten arrels complexes múltiples.

Exemple 7.13

La integral $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3x+2}\,dx$ correspon a una integral racional i la fracció és pròpia (grau del numerador menor que el grau del denominador). Així,

(1) Factoritzar el denominador

Es busquen les arrels del denominador:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \ \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = 2$$

i, llavors, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

(2) Descomposició en suma de fraccions simples

Com que totes dues arrels són reals, la descomposició és

$$\frac{2x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Per trobar les constants A i B, es realitza la suma de les fraccions simples, tenint en compte que el m.c.m. dels denominadors és el denominador $(x-1)(x-2)$. D'aquesta forma,

$$\frac{2x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{B(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

i, en tenir el mateix denominador, han de ser iguals els numeradors; d'on s'obté l'equació

$$2x = A(x-2) + B(x-1)$$

i, atès que ha de ser vàlida per a tot x, es poden donar dos valors a aquesta variable, obtenint un sistema de dues equacions amb dues incògnites A i B:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \ \Rightarrow 2 = -A \\ x=2 \ \Rightarrow 4 = B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-2 \\ B=4 \end{array}$$

per la qual cosa la descomposició pot escriure's

$$\frac{2x}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{4}{x-2}$$

(3) Integrar les fraccions simples

D'acord amb la descomposició anterior,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x-1)(x-2)}\,dx &= \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx \\ &= -2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 4\int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= -2\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + k \end{aligned}$$

7.3 Exercicis resolts

Exercici 7.3.1 Calculeu les integrals següents:

(a) $\int \frac{2}{1+3x}\,dx$

(b) $\int \frac{2x}{1+3x}\,dx$

Solució:

En ser una fracció de denominador un polinomi de grau 1, és immediata (correspon a un logaritme) i segons la fórmula:

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(|u(x)|) + k}$$

n'hi ha prou d'afegir al numerador la derivada del denominador; és a dir, la constant 3 (recordeu que cal dividir fora també per 3 per no alterar-ne la integral).

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+3x}\,dx &= 2\int \frac{1}{1+3x}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{3}{1+3x}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\ln(|1+3x|) + k\end{aligned}$$

Ara, en no ser una fracció pròpia, cal fer primer la divisió de polinomis:

$$\begin{array}{r|l} 2x & 1+3x \\ \cline{2-2} -2x-2/3 & 2/3 \\ \hline -2/3 & \end{array}$$

i així:

$$\frac{2x}{1+3x} = \frac{2}{3} + \frac{-2/3}{1+3x}$$

(b)

$$\int \frac{2x}{1+3x}\,dx = \int \left(\frac{2}{3} - \frac{2/3}{1+3x}\right)\,dx$$

Finalment, n'hi ha prou a separar les integrals, que són ambdues immediates,

$$\int \frac{2x}{1+3x}\,dx = \int \left(\frac{2}{3} - \frac{2/3}{1+3x}\right)\,dx = \int \frac{2}{3}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+3x}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3\cdot 3}\int \frac{3}{1+3x}\,dx = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\ln(|1+3x|) + k$$

Exercici 7.3.2 Calculeu les integrals següents:

(a) $\int \frac{2x}{1+3x^2}\,dx$

(b) $\int \frac{2}{1+3x^2}\,dx$

Solució:

S'observa que la derivada del denominador és $6x$ i, llavors, n'hi ha prou a multiplicar el numerador per 3 per aconseguir una integral del tipus:

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(|u(x)|) + k}$$

(Recordeu que en afegir un 3 al numerador s'ha de dividir fora per 3, per no alterar la integral)

(a)

$$\int \frac{2x}{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cdot 2x}{1+3x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln(1+3x^2) + k$$

La integral no és del tipus logaritme (perquè no es pot aconseguir, al numerador, la derivada del denominador). Però el denominador pot escriure's de la forma $1+u^2$ i correspondria a una integral del tipus:

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\,dx = \arctan(u(x)) + k}$$

Observeu que cal introduir el coeficient 3 dintre del quadrat i afegir després la derivada de $\sqrt{3}x$ al numerador.

(b)

$$\int \frac{2}{1+3x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) + k$$

Exercici 7.3.3 Calculeu les integrals següents:

a) $\int \sin(x)\cos(x)\ dx$

b) $\int \sin^2(x)\cos(x)\ dx$

Solució:

(a)

$$\int \sin(x)\cos(x)\ dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + k$$

S'observa que, a la integral, hi ha una funció $u = \sin(x)$ i la seva derivada $u' = \cos(x)$. Per tant, es tracta d'una integral del tipus

$$\boxed{\int u(x)^n \cdot u'(x)\ dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + k}$$

on $n = 1$.

(b)

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\ dx = \frac{\sin^3(x)}{3} + k$$

S'observa que, a la integral, hi ha una funció $u = \sin(x)$, elevada al quadrat, i la seva derivada $u' = \cos(x)$. Per tant, es tracta d'una integral del tipus

$$\boxed{\int u(x)^n \cdot u'(x)\ dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + k}$$

on $n = 2$.

Exercici 7.3.4 Calculeu la integral $\displaystyle\int \sin^3(2x)\ dx$

Solució:

S'observa que la integral no és, en principi, immediata; perquè hi ha una funció $u = \sin(x)$, elevada a 3, però no hi és la seva derivada.

$$\int \sin^3(2x)\,dx = \int \sin^2(2x)\sin(2x)\,dx$$
$$= \int (1-\cos^2(2x))\sin(2x)\,dx$$
$$= \underbrace{\int \sin(2x)\,dx}_{I_1}$$
$$- \underbrace{\int \cos^2(2x)\sin(2x)\,dx}_{I_2}$$

Es pot separar la potència inicial com producte de la forma $\sin^2(2x)\sin(2x)$ i aprofitar la identitat trigonomètrica:

$$\boxed{sin^2(2x)+\cos^2(2x)=1}$$

per expressar la integral de la forma descrita; separant-la en dues (I_1 i I_2) que seran immediates. Observa que el procediment descrit es pot fer perquè la potència inicial és senar (3).

A la integral I_1 hi ha una funció $\sin(u)$ i és suficient afegir la derivada $u'=2$ perquè sigui del tipus:

$$\boxed{\int u' sin(u)\,dx = -\cos(u)+k}$$

A la integral I_2 hi ha una funció $u=\cos(2x)$, elevada al quadrat, i la seva derivada és $u'=-2\sin(2x)$; per tant, és suficient afegir -2 a la integral (i dividir fora per -2), per aconseguir-ne una del tipus:

$$\boxed{\int u(x)^n\cdot u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}+k}$$

amb $n=2$.

Ara,

$$I_1 = \int \sin(2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 2\sin(2x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$I_2 = \int \cos^2(2x)\sin(2x)$$
$$= \frac{1}{-2}\int -2\sin(2x)\cos^2(2x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos^3(2x)}{3}$$

per la qual cosa

$$\int \sin^3(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{\cos^3(2x)}{6} + k$$

Exercici 7.3.5 Calculeu la integral $\int \sin^4(2x)\,dx$

Solució: S'observa que la integral no és, en principi, immediata; perquè hi ha una funció $u = \sin(x)$, elevada a 4, però no hi és la seva derivada $u' = 2\cos(2x)$.

$$\begin{aligned}\int \sin^4(2x)\,dx &= \int \sin^2(2x)\sin^2(2x)\,dx\\ &= \int \left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1-\cos(4x))^2\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(4x)+\cos^2(4x))\,dx\\ &= \underbrace{\frac{1}{4}\int dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{2}{4}\int \cos(4x)\,dx}_{I_2}\\ &+ \underbrace{\frac{1}{4}\int \cos^2(4x)\,dx}_{I_3}\end{aligned}$$

En ser una potència parella, no es pot emprar el mètode de l'exercici anterior. Però es pot expressar de la forma $\sin^2(2x)\sin^2(2x)$ i aprofitar la identitat trigonomètrica:

$$\boxed{sin^2(2x) = \frac{1-\cos(4x)}{2}}$$

per expressar la integral de la forma descrita; separant-la en tres (I_1, I_2 i I_3). Observeu que aquesta fórmula trigonomètrica permet de reduir un sinus quadrat a un cosinus simple i es pot aplicar reiteradament per anar disminuint la potència.

Ara,

$$I_1 = \frac{1}{4}\int dx = \frac{x}{4}$$

A la integral I_2 hi ha una funció $\cos(u)$ i és suficient afegir la derivada $u' = 4$ perquè sigui del tipus:

$$\boxed{\int u' \cos(u)\ dx = \sin(u) + k}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \cos(4x)\ dx = \frac{1}{2{\cdot}4}\int 4\cos(4x)\ dx = \frac{1}{8}\sin(4x)$$

A la integral I_3 hi ha una funció $\cos^2(4x)$ i cal aplicar la fórmula de l'angle meitat:

$$\boxed{cos^2(4x) = \frac{1+\cos(8x)}{2}}$$

per reduir la potència 2 a potència 1; la qual cosa permetrà de resoldre la integral, en obtenir-ne dues integrals senzilles: una integral d'una constant i una integral del tipus:

$$\boxed{\int u' \cos(u)\ dx = \sin(u) + k}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4}\int \cos^2(4x)\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(8x)}{2}\ dx \\ &= \frac{1}{8}\int 1\ dx + \frac{1}{8}\int \cos(8x)\ dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8{\cdot}8}\int 8\cos(8x)\ dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{1}{64}\sin(8x) \end{aligned}$$

Finalment,

$$\int \sin^4(2x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{64}\sin(8x) + k$$

Exercici 7.3.6 Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$

b) $\int \frac{3}{x^2-4}\,dx$

Solució:

a) En aquest cas, la integral és immediata perquè la derivada del denominador és $2x$ que és al numerador; correspon, doncs, a una integral del tipus:

$$\boxed{\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + k}$$

i així, $\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ln|x^2-1| + k$

b) La integral no és immediata perquè la derivada del denominador és $2x$ que no hi és al numerador. Com que és una fracció pròpia, caldrà factoritzar el denominador, descompondre en suma de fraccions simples i integrar cadascuna d'aquestes.

Factoritzar el denominador

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Per factoritzar un polinomi cal, en general, trobar les seves arrels. Però, si ens adonem que el polinomi és una diferència de quadrats es pot factoritzar força ràpid amb la coneguda fórmula:

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

és a dir, suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Descomposició en suma de fraccions simples

$$\underbrace{\frac{3}{(x+2)(x-2)}}_{m.c.m.} = \frac{A}{\underbrace{x+2}_{\text{hi manca } (x-2)}} + \frac{B}{\underbrace{x-2}_{\text{hi manca } (x+2)}}$$

d'on s'obté que $3 = A(x-2)+B(x+2)$ i, donant dos valors a x,

$$\begin{array}{rcl} x=2 & \longrightarrow & 3=4B \\ x=-2 & \longrightarrow & 3=-4A \end{array}$$

d'on $A=-3/4$ i $B=3/4$. Així,

$$\frac{3}{(x+2)(x-2)} = \frac{-3/4}{x+2} + \frac{3/4}{x-2}$$

Observeu que, en tenir el denominador grau 2, han de sortir dues constants indeterminades en fer la descomposició. A més, per trobar l'equació

$$3 = A(x-2) + B(x+2),$$

el raonament que cal fer és que el denominador original $(x+2)(x-2)$ és el mínim comú múltiple (m.c.m.) dels denominadors a la descomposició i llavors, la constant A s'ha de multiplicar per allò que manca al seu denominador per ser el m.c.m. (en aquest cas, $(x-2)$) i la constant B per allò que manca al seu denominador per ser el m.c.m. (en aquest cas $(x+2)$). Reviseu l'Exemple 7.13.

Integrar

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2-4}\,dx &= \int \frac{-3/4}{x+2}\,dx + \int \frac{3/4}{x-2}\,dx \\ &= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= -\frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + k = \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + k \end{aligned}$$

Exercici 7.3.7 Calculeu la integral $\int \frac{3}{x^2+2x+4}\,dx$

Solució: Es tracta d'una integral racional no immediata. Per tant, es procedeix amb els passos usuals

Factoritzar el denominador

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$\downarrow$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$
$$\downarrow$$

no hi ha solució real

Aquest polinomi de grau 2 no es pot expressar com producte de factors de grau 1 (en no tenir arrels reals). En conseqüència, aquesta ja és una fracció simple (en no haver-hi més factors al denominador) i la seva integral és del tipus arctangent:

$$\boxed{\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan(u) + k}$$

Integrar

$$\int \frac{3}{x^2+2x+4}\,dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx$$
$$= 3\int \frac{1/3}{\frac{(x+1)^2}{3}+1}\,dx$$
$$= \frac{3}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$$
$$= \sqrt{3}\int \frac{1/\sqrt{3}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$$
$$= \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Allò que cal fer és expressar el denominador com una suma de quadrats (de manera semblant a allò que es feia al tema de còniques):

$$x^2 \boxed{+2}\, x + 4$$
$$\boxed{+2 : 2 = +1}$$
$$(x \boxed{+1})^2 = x^2 + 2x + 1$$

per tant, en falten 3 per obtenir el 4 de l'expressió original. Així,

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$$

També es pot resoldre aplicant la fórmula

$$\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}$$

(recordeu que sols es pot aplicar si les arrels del polinomi són complexes ($b^2-4ac<0$).

En aquest cas:

$$\int \frac{3}{x^2+2x+4}\,dx = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+k$$

$$= \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{array}\right\} = 3\frac{2}{\sqrt{12}}\arctan\left(\frac{2x+2}{\sqrt{12}}\right)+k$$

que, en expressar $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ i simplificar, queda exactament igual al resultat trobat anteriorment.

Exercici 7.3.8 Calculeu la integral $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$.

Solució: És una integral racional pròpia no immediata. S'aplicarà el procediment usual.

(1) Factoritzar el denominador. En aquest cas, ja hi és. Té una arrel real doble $(x+1)^2$ i una arrel real simple $(x-1)$.

(2) Descomposició en suma de fraccions simples.

La descomposició és de la forma:

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-1)} = \overbrace{\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}}^{\text{pel factor } (x+1)^2} + \overbrace{\frac{C}{x-1}}^{\text{factor } (x-1)}$$

Fent la suma de les fraccions simples i igualant els numeradors, s'arriba a l'equació:

$$x^2+3 = A(x-1)(x+1)+B(x-1)+C(x+1)^2$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

i, donant tres valors a x,

$$\left.\begin{array}{lll} x=1 & \Rightarrow & 4=4C \\ x=-1 & \Rightarrow & 4=-2B \\ x=0 & \Rightarrow & 3=-A-B+C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C=1 \\ B=-2 \\ A=0 \end{array}$$

Així, la descomposició és

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

(3) Integrar les fraccions simples.

A partir de la descomposició anterior

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-1)}\,dx &= \int \frac{-2}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -2\int (x+1)^{-2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ln|x-1| + k \\ &= \frac{2}{x+1} + + \ln|x-1| + k \end{aligned}$$

Exercici 7.3.9 Calculeu la integral

$$\int \frac{3x^2+5x-6}{(x-1)^2(x-2)(x^2+4x+5)}\,dx$$

Solució: És una integral racional pròpia no immediata. S'hauria de seguir el procediment habitual: (1) factoritzar el denominador (que ja hi és); (2) descompondre en suma de fraccions simples i (3) integrar cada fracció simple.

No obstant això, sols s'indicarà quina seria la forma de la descomposició en suma fraccions simples i la integral es calcularà directament emprant el wxMaxima.

Atès que hi ha una arrel real doble $(x-1)^2$, una simple $(x-2)$ i una arrel complexa (x^2+4x+5), la descomposició que hauria de plantejar-se seria

$$\frac{3x^2+5x-6}{(x-1)^2*(x-2)*(x^2+4*x+5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+4x+5}$$

i la solució final:

```
f(x):=(3*x^2+5*x-6)/((x-1)^2*(x-2)*(x^2+4*x+5));
integrate(f(x),x);
```

$$\frac{203*\log(x^2+4*x+5)}{1700} - \frac{21*\mathrm{atan}((2*x+4)/2)}{850} - \frac{59*\log(x-1)}{50} + \frac{16*\log(x-2)}{17} + \frac{1}{5*x-5}$$

Aplicacions de la integral definida 8

La integral definida s'aplica al càlcul d'àrees, volums i longituds de corba.

8.1 Àrees de superfícies limitades per corbes

1. L'àrea limitada per la corba $y = f(x)$ (sent $f \geq 0$) i les rectes $x = a$, $x = b$, $y = 0$ és

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx} \tag{8.10a}$$

2. L'àrea limitada per les corbes $y = f(x)$, $y = g(x)$ (sent $f \geq g$) i les rectes $x = a$, $x = b$ és

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx} \tag{8.10b}$$

Exemple 8.1

Per calcular l'àrea de la regió S limitada per les rectes $x = 0$, $x = 2$ i les corbes $y = x(x - 2)$, $y = x/2$; es troba, en primer lloc, els punts de tall entre les gràfiques. És a dir, les solucions de l'equació:

$$x(x - 2) = x/2 \quad \Rightarrow \quad x(2x - 5) = 0$$

que són $x = 0$ i $x = 5/2$. En la Figura 8.8 s'ha representat la regió sol·licitada.

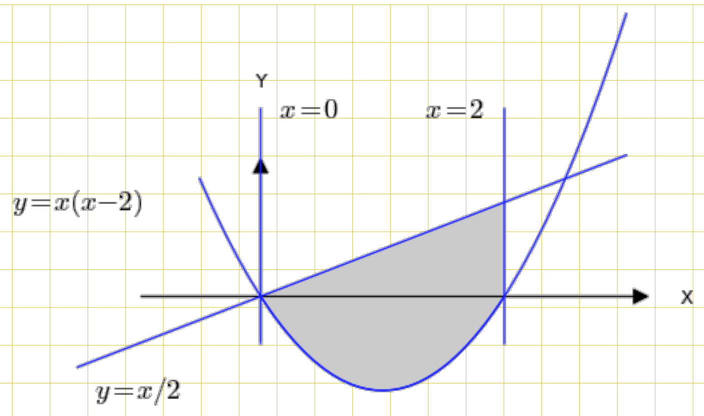


Figura 8.8: Àrea entre dos corbes

Com que el recinte està, a més, limitat per $x = 2$, l'àrea sol·licitada és

$$a(S) = \int_0^2 [\frac{x}{2} - (x^2 - 2x)]dx = \int_0^2 [\frac{5}{2}x - x^2]dx = \frac{7}{3}\, u^2$$

8.2 Longitud d'un arc de corba

1. Donada la corba definida per la gràfica de la funció $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, la seva longitud es calcula per la fórmula

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx} \tag{8.11a}$$

2. Si la corba ve expressada en forma paramètrica

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad t \in [a, b]$$

llavors, la seva longitud es calcula per

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt} \tag{8.11b}$$

3. Si la corba està a l'espai i té per equacions

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \quad t \in [a, b]$$

llavors, la seva longitud es calcula per

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt} \tag{8.11c}$$

Exemple 8.2

Es desitja calcular la longitud de l'arc de paràbola $y^2 = 2px$, des del vértex fins al punt $(1, \sqrt{2p})$.

Representant la corba en forma paramètrica s'obté

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = \ t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2p}$$

d'on, aplicant la fórmula (8.11b),

$$L = \int_0^{\sqrt{2p}} \sqrt{\frac{t^2}{p^2} + 1}\, dt = \int_0^{\sqrt{2p}} \frac{1}{p}\sqrt{t^2 + p^2}\, dt$$

Les corbes donades per $y = f(x)$ o $x = f(y)$, poden ser expressades fàcilment de forma paramètrica. Per exemple, fent que una de les variables faci el paper de paràmetre t (la variable no aïllada) i expressant l'altra variable en funció d'aquesta. En la que ens ocupa, s'escriu $y = t$ i, en aïllar x de la corba, resulta $x = \frac{y^2}{2p}$; d'on $x = \frac{t^2}{2p}$; que són les equacions paramètriques de la corba.
D'altra banda, el paràmetre $t = y$ recorre l'arc des del valor $y = 0$ (vèrtex $(0, 0)$) al valor $y = \sqrt{2p}$ (del punt $(1, \sqrt{2p})$).

Les integrals de la forma $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ es resolen amb un canvi de variable, emprant funcions hiperbòliques. Però, en aquest cas, s'emprarà la fórmula

$$\boxed{\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
L &= \left[\frac{t}{2p}\sqrt{t^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+p^2})\right]_{t=0}^{t=\sqrt{2p}} \\
&= \frac{\sqrt{2p}}{2p}\sqrt{2p+p^2}+\frac{p}{2}\ln(\sqrt{2p}+\sqrt{2p+p^2})-\frac{p}{2}\ln(p) \\
&= \frac{p}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{p^2+2p}+\sqrt{2p}}{p}\right)+\frac{\sqrt{p^2+2p}}{\sqrt{2p}}\ u.l.
\end{aligned}
$$

8.3 Àrea i volum d'una superfície de revolució

Es considera una corba definida per la gràfica de $y = f(x)$, sent $f \geq 0$, $x \in [a, b]$. Es gira al voltant de l'eix OX, donant una volta completa. Llavors, es genera un cos de revolució l'àrea lateral del qual és

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx} \tag{8.12a}$$

i el volum del qual és

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2\ dx} \tag{8.12b}$$

Exemple 8.3

El volum d'una esfera E de radi R, en ser un cos de revolució, resultarà ser

$$
\begin{aligned}
V(E) &= \pi \int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\ dx = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\ dx \\
&= \pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=-R}^{x=R}\ dx = \pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3-\frac{R^3}{3}\right)\right] \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}\ u^3
\end{aligned}
$$

Exemple 8.4

L'àrea d'una esfera E de radi R, pot obtenir-se per la rotació 2π radians de la gràfica de la corba $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$. Així, aplicant la fórmula de l'àrea d'una superficie de revolució i operant, resulta

$$\begin{aligned} a(E) &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{R^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 4\pi R^2\, u^2 \end{aligned}$$

8.4 Volums de secció transversal coneguda

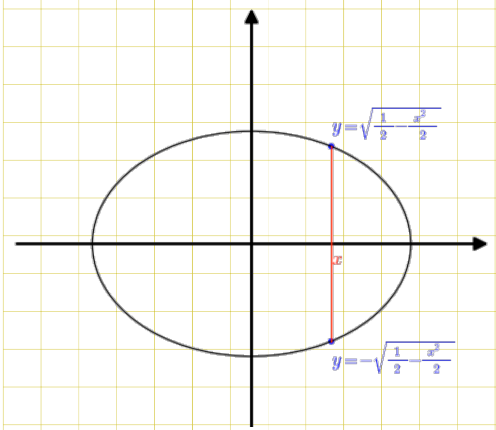
Considera un sòlid Ω que té una secció perpendicular, respecte d'un eix, d'àrea coneguda. S'identifica aquest eix amb l'eix OX entre els valors $x = a$ i $x = b$. Llavors, l'àrea de la secció transversal serà una funció de x, $A(x)$. Per tant, el volum del cos Ω pot calcular-se com

$$\boxed{v(\Omega) = \int_a^b A(x)\, dx} \tag{8.13}$$

Exemple 8.5

Un sòlid té una base plana formada pel recinte acotat limitat per l'el·lipse $x^2 + 2y^2 = 1$. Se sap que els talls transversals perpendiculars a l'eix OX són semicercles. Es desitja calcular el volum d'aquest sòlid. Com que la secció transversal és un semicercle i, atès que l'àrea d'un semicercle és $\dfrac{\pi r^2}{2}$, n'hi ha prou a calcular el radi r, que serà funció de x, en ser les seccions perpendiculars a l'eix OX.

En primer lloc, es dibuixa el recinte que forma la base del sòlid i un dels talls transversals

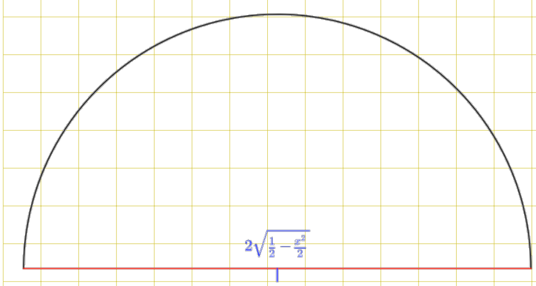


El primer pas per resoldre aquests tipus de problemes és trobar la longitud dels talls transversals sobre la base del sòlid (línia roja a la figura).

En efectuar el tall, tal com s'observa a la figura, s'obté la longitud del tall, en funció de x, mitjançant la diferència entre el valor de la y superior i el de la y inferior:

$$\mathrm{L}(x) = 2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}}$$

Ara, la figura situada al damunt de la línia anterior (tall transversal) és un semicercle i, llavors, la línia roja anterior correspon al diàmetre d'un semicercle; d'on el radi serà la meitat i, finalment, l'àrea de la secció transversal serà



$$r(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}}$$

$$A(x) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

d'on, aplicant la fórmula (8.13), el volum serà

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right) ; dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}\,u^3.
\end{aligned}
$$

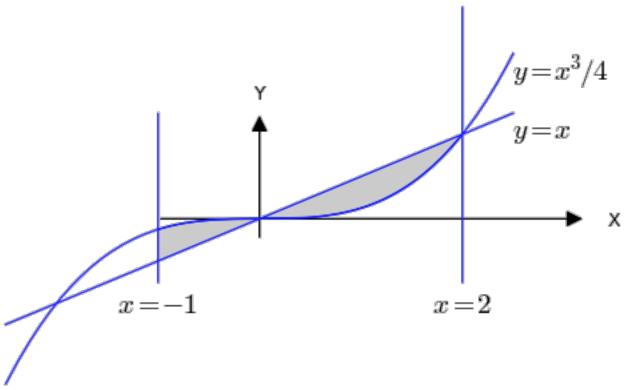
8.5 Exercicis resolts

Exercici 8.5.1 Calculeu l'àrea de la regió S limitada per les rectes $x=-1$, $x=2$ i les corbes $y=x$, $y=x^3/4$.

Solució: Es troben, en primer lloc, els punts de tall entre les gràfiques; plantejant, doncs, l'equació:

$$x = x^3/4 \quad \Rightarrow \quad x(x^2-4)=0$$

les solucions de la qual són $x=0$, $x=-2$ i $x=2$. En la figura següent s'ha representat la regió sol·licitada.



S'observa que hi ha dos recintes, on les gràfiques han intercanviat les posici-

ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

ons, així doncs, l'àrea sol·licitada és

$$a(S) = \int_{-1}^{0} [\frac{x^3}{4} - x]dx + \int_{0}^{2} [x - \frac{x^3}{4}]dx = \frac{23}{16}\ u^2$$

A l'hora de resoldre cadascuna de les anteriors integrals, cal observar que les funcions a integrar són iguals llevat que s'han restat de forma contrària (per mantenir l'ordre de 'corba de dalt' - 'corba a sota'), garantint, d'aquesta forma, que cada integral doni de resultat un valor positiu. Per aquest motiu, se sol plantejar, de vegades, cada integral per separat (sense canviar l'ordre de substracció) i després es sumen els valors absoluts de cadascuna d'aquestes.
En aquest exercici correspondria a fer:

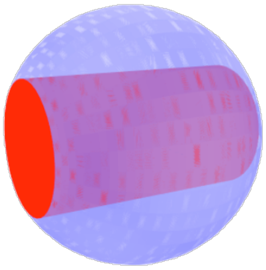
$$\int_{-1}^{0} [\frac{x^3}{4} - x]dx = \frac{7}{16}$$

$$\int_{0}^{2} [\frac{x^3}{4} - x]dx = -1$$

i $a(S) = |\frac{7}{16}| + |-1| = \frac{23}{16}\ u^2$.

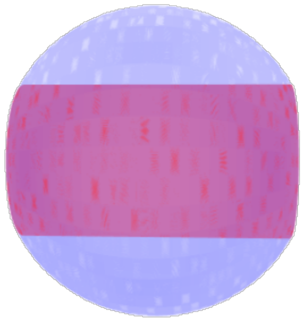
Exercici 8.5.2 Considereu un cos esfèric de radi 2. Calcula el volum de l'esfera que resta després de ser travessada per un objecte cilíndric de radi 1.

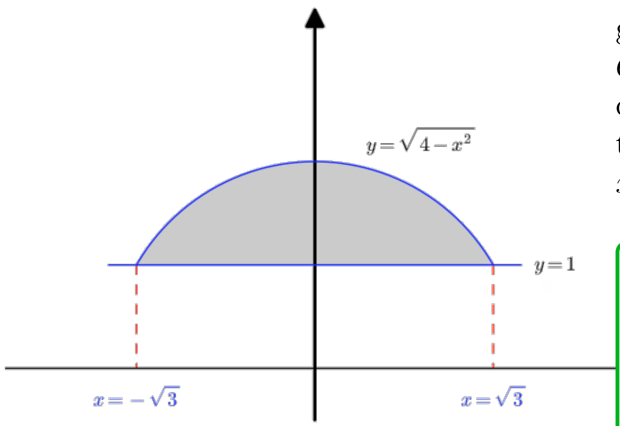
Solució:



Com que totes dues figures, l'esfera i el cilindre, són superfícies de revolució, el problema pot resoldre's fent servir aquesta tècnica.

En observar la figura de front, es veu que el volum a calcular s'obté en girar la regió situada entre dues corbes. La corba que genera el cilindre és la recta $y = 1$. La corba que genera l'esfera és la circumferència $x^2 + y^2 = 4$ (n'hi ha prou de girar la semicircumferència superior $y = \sqrt{4 - x^2}$).





Es pot veure que correspon a un volum de revolució obtingut en girar, al voltant de l'eix OX la regió situada entre les corbes $y = 1$ i $y = \sqrt{4 - x^2}$ entre les coordenades $x = -\sqrt{3}$ i $x = \sqrt{3}$.

Cal observar que les coordenades x s'obtenen en tallar les dues corbes. Així, quan $y = 1$, els punts de la corba $y = \sqrt{4 - x^2}$ que ho verifiquen són $x = \pm\sqrt{3}$.

Finalment, el volum demanat es calcula amb la diferència entre els volums generats per les dues corbes i així, aplicant a cadascuna la fórmula (8.12b),

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} ((\sqrt{4-x^2})^2)\ dx - \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 1^2\ dx \\
&= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} ((\sqrt{4-x^2})^2 - 1)\ dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\ dx \\
&= \pi \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-\sqrt{3}}^{x=\sqrt{3}} = \pi \left[\left(3\sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3}\right) - \left(-3\sqrt{3} - \frac{(-\sqrt{3})^3}{3}\right)\right] \\
&= \pi \left(6\sqrt{3} - \frac{2(\sqrt{3})^3}{3}\right) = \pi \left(6\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{3}\right) = 4\pi\sqrt{3}\ u^3
\end{aligned}
$$

Exercici 8.5.3 Trobeu l'àrea de la regió del pla limitada per la corba $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ i la paràbola $2y = x^2$.

Solució: En aquest exercici s'emprarà el wxMaxima per fer els càlculs. Primerament s'han de calcular els punts de tall entre les dues corbes. Es planteja doncs l'equació que resulta d'igualar les dues corbes

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}$$

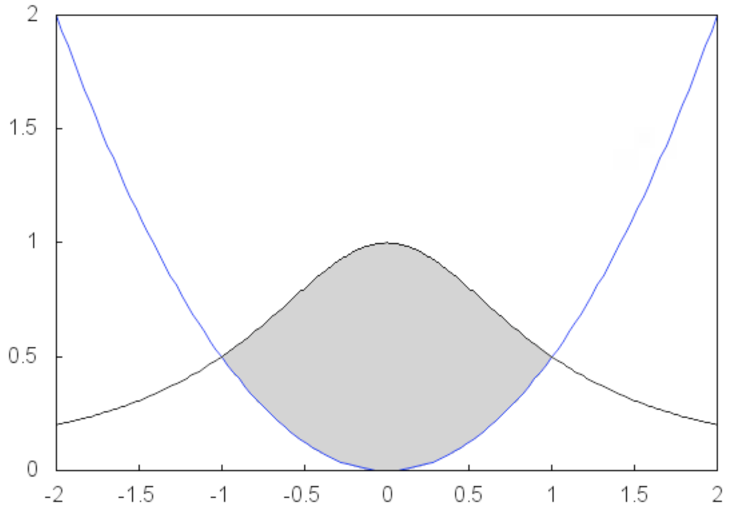
i es resol amb wxMaxima, per trobar-ne les solucions

```
solve(1/(1+x^2)=x^2/2,x)
```

$[x = -\sqrt{2} * \%i, x = \sqrt{2} * \%i, x = -1, x = 1]$

que té com a solucions reals $x = -1$ i $x = 1$. També es pot representar el recinte fent servir el wxMaxima.

```
wxdraw2d(
filled_func=x^2/2, fill_color=gray,
explicit(1/(1+x^2),x,-1,1), filled_func=false,
color=blue, explicit(x^2/2,x,-2,2),
color=black,explicit(1/(1+x^2),x,-2,2)
);
```



Com que la paràbola queda per davall, la integral a calcular serà:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) \, dx$$

i emprant, de nou, el wxMaxima

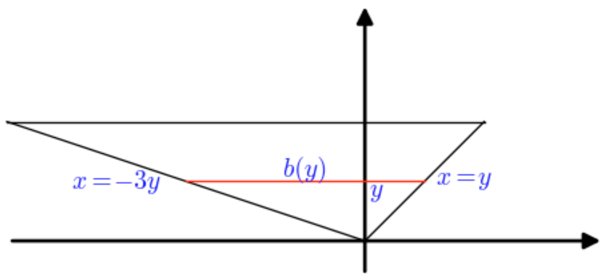
```
integrate(1/(1+x^2)-x^2/2,x,-1,1)
```

$\frac{3\pi-2}{6}$

Llavors, l'àrea sol·licitada és $A = \dfrac{3\pi - 2}{6} \; u^2$.

Exercici 8.5.4 Un sòlid té de base el triangle de vèrtexs $A(0,0)$, $B(1,1)$ i $C(-3,1)$. Sabent que els talls transversals perpendiculars a l'eix OY, són triangles equilàters, calculeu el volum d'aquest sòlid.

Solució:



Es dibuixa la base del sòlid i cal determinar la longitud del tall transversal (línia roja). Serà necessari, doncs, calcular les equacions de les rectes que formen els costats del triangle.

Per trobar les equacions de les rectes dels costats s'utilitza l'equació contínua de la recta que passa per dos punts:

$$\left.\begin{array}{r} A(0,0) \\ B(1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A(0,0) \\ \mathbf{AB}=(1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1} \Rightarrow x=y$$

$$\left.\begin{array}{r} A(0,0) \\ C(-3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A(0,0) \\ \mathbf{AB}=(-3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-0}{-3}=\frac{y-0}{1} \Rightarrow x=-3y$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

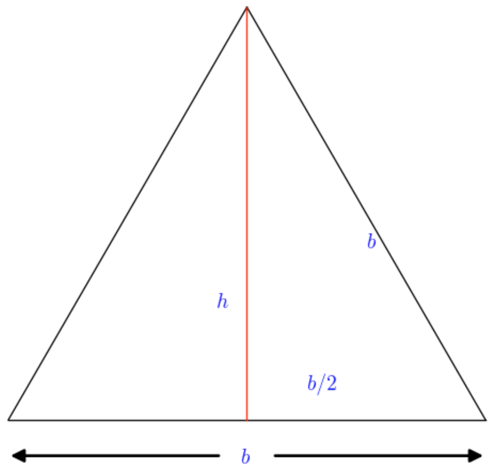
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Una vegada obtinguda la longitud del tall transversal, es considera quina figura és la que hi ha a sobre; en aquest cas, un triangle equilàter. Cal, ara, expressar l'àrea d'aquest triangle en funció de la longitud del tall transversal que s'ha calculat.

i, llavors, el tall transversal té longitud:

$$b(y) = \underbrace{y}_{x \text{ dreta}} - \underbrace{-3y}_{x \text{ esquerra}} = 4y$$

Aquesta longitud, $b(y) = 4y$, correspon, segons l'enunciat, a la base d'un triangle equilàter; del qual interessa calcular-ne l'àrea. Com que és un triangle equilàter es pot expressar l'àrea en funció de la longitud d'un costat.



Així, segons la figura, es pot expressar l'alçada h en funció de la base b:

$$h = \sqrt{b^2 - (b/2)^2} = \sqrt{\frac{3b^2}{4}} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

i, com que $b = 4y$, resulta que l'alçada del triangle val

$$h = \frac{4y\sqrt{3}}{2} = 2y\sqrt{3}$$

Finalment, l'àrea de la secció transversal és

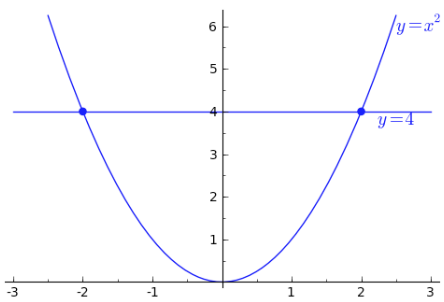
$$A(y) = \frac{b(y) \cdot h(y)}{2} = \frac{4y \cdot 2y\sqrt{3}}{2} = 4y^2\sqrt{3}$$

i n'hi ha prou d'aplicar la fórmula (8.13) per determinar el volum demanat

$$V = \int_0^1 4\sqrt{3}y^2\,dy = 4\sqrt{3}\int_0^1 y^2\,dy$$
$$= 4\sqrt{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,u^3$$

Exercici 8.5.5 Un sòlid té de base plana el recinte acotat limitat per la paràbola $y = x^2$ i la recta $y = 4$. Sabent que els talls transversals perpendiculars a l'eix OX són semicercles, calculeu el volum d'aquest sòlid.

Solució:

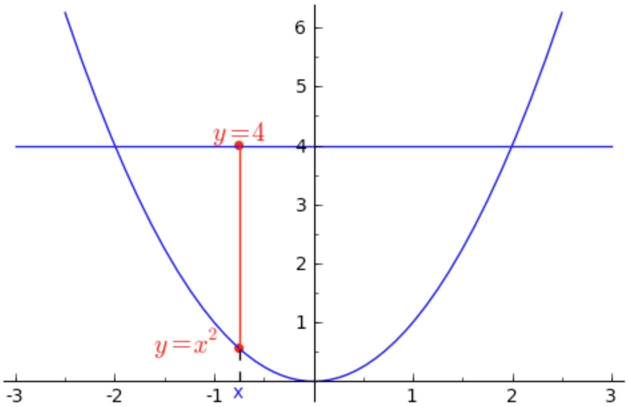


En primer lloc, es dibuixa el recinte que forma la base del sòlid: com que es tracta d'una paràbola i una recta, n'hi ha prou de calcular els punts de tall entre ambdues que proporcionen, a més, els límits d'integració:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\;\Rightarrow\; x = \pm 2$$

La secció transversal és un semicercle i, donat que l'àrea d'un semicercle és $A = \dfrac{\pi r^2}{2}$, s'haurà de calcular el radi r, que serà funció de x, en ser les seccions perpendiculars a l'eix OX. Una vegada calculada aquesta àrea, n'hi ha prou d'aplicar la fórmula (8.13):

$$V = \int_{-2}^{2} A(x)\,dx$$



Com sempre, s'ha de calcular la longitud d'un dels talls transversals (línia roja), expressant-la en funció de la coordenada x (en ser els talls perpendiculars a l'eix OX). Per fer això, cal determinar les coordenades y dels punts de la figura que corresponen a una coordenada x.

En efectuar el tall, tal com s'observa en la figura, s'obté la seva longitud, en funció de x

$$l(x) = \underbrace{4}_{y \text{ superior}} - \underbrace{x^2}_{y \text{ inferior}}$$

Aquesta longitud $l(x) = 4 - x^2$ correspon al diàmetre del semicercle que hi ha per damunt del tall i, llavors, el radi del semicercle serà $r(x) = 2 - x^2/2$, d'on

$$A(x) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(4 + \frac{x^4}{4} - 2x^2\right)$$

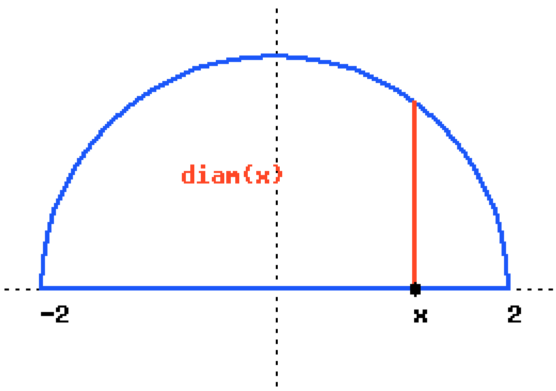
i el volum demanat serà

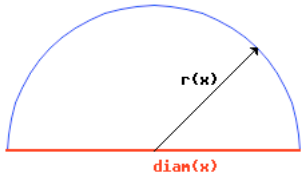
$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} \frac{\pi}{2}\left(4 + \frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\left(4 + \frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\, dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left[4x + \frac{x^5}{20} - 2\frac{x^3}{3}\right]_{x=-2}^{x=2} = \frac{\pi}{2}\left[8 + \frac{8}{5} - \frac{16}{3} - \left(-8 - \frac{8}{5} + \frac{16}{3}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\left[16 + \frac{16}{5} - \frac{32}{3}\right] = \frac{64\pi}{15}\ u^3 \end{aligned}$$

(cc) Sergio Macario Vives
ISBN: 978-84-17429-26-3
Exercicis resolts i comentats de Fonaments Matemàtics Aplicats a l'Edificació - UJI -
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Exercici 8.5.6 Un sòlid té de base plana el semicercle de centre l'origen de coordenades i radi 2, situat en el semipla positiu ($y \geq 0$). Sabent que els talls transversals perpendiculars a l'eix OX són semicercles, calculeu el volum d'aquest sòlid.

Solució: En primer lloc, es dibuixa el recinte que forma la base del sòlid.:





La secció transversal és un semicercle i, donat que l'àrea d'un semicercle és $\dfrac{\pi r^2}{2}$, s'haurà de calcular el radi r, que serà funció de x, en ser les seccions perpendiculars a l'eix OX.

En efectuar el tall, tal com s'observa en la figura, s'obté el diàmetre, en funció de x. D'aquí que

$$\operatorname{diam}(x) = \sqrt{4 - x^2} \;\Rightarrow r(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

i, llavors,

$$A(x) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4}(4 - x^2) = \frac{\pi}{8}(4 - x^2)$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

d'on,

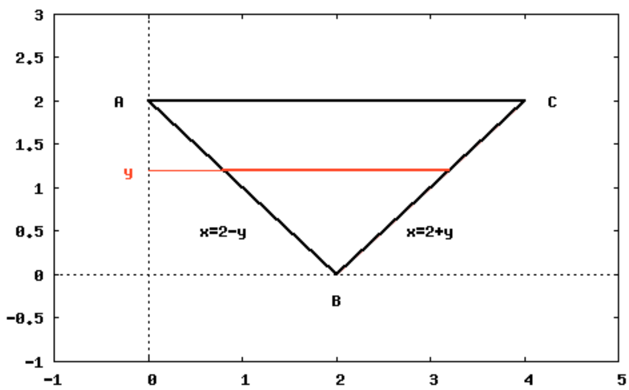
$$V = \int_{-2}^{2} \frac{\pi}{8}\left(4 - x^2\right)\ dx = \frac{\pi}{8}\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)\ dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-2}^{x=2} = \frac{\pi}{8}\left[8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[16 - \frac{16}{3}\right] = \frac{4\pi}{3}\ u^3$$

Exercici 8.5.7 Un sòlid té de base plana el triangle de vèrtexs $A(0,2)$, $B(2,0)$ i $C(4,2)$. Sabent que els talls transversals perpendiculars a l'eix OY són semicercles, calculeu el volum d'aquest sòlid.

Solució: En primer lloc, es dibuixa el recinte que forma la base del sòlid i es realitza el tall perpendicualr a l'eix OY. S'ha de calcular la longitud d'aquest tall i, llavors, caldrà esbrinar les equacions de les línies rectes que limiten el recinte.



Es necessita calcular les equacions de les rectes AB i BC.

$$AB \equiv \begin{cases} A(0,2) \\ \vec{AB} = (2,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow x = 2 - y$$

$$BC \equiv \begin{cases} B(2,0) \\ \vec{BC} = (2,2) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow x = 2 + y$$

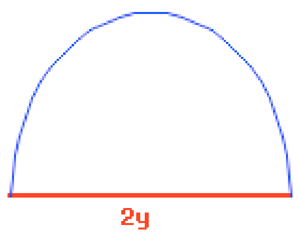
ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

En efectuar el tall, tal com s'observa en la figura, s'obté que la longitud del tall (línia roja) és

$$L = \underbrace{2+y}_{x \text{ dreta}} - \underbrace{(2-y)}_{x \text{ esquerra}} = 2y$$

La secció transversal és un semicercle i, donat que l'àrea d'un semicercle és $\frac{\pi r^2}{2}$, s'haurà de calcular el radi r, que serà funció de y, en ser les seccions perpendiculars a l'eix OY. La longitud del tall, calculada abans, correspon al diàmetre, que mesura $L = 2y$ i, llavors, el radi és $r(y) = y$.



L'àrea de la secció transversal (semicercle) serà

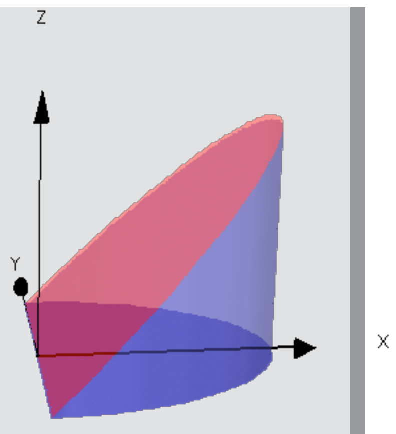
$$A(y) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi y^2}{2}$$

d'on, el volum demanat serà

$$V = \int_0^2 \frac{\pi y^2}{2}\, dy = \frac{\pi}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{2} = \frac{8\pi}{6}\, u^3$$

Exercici 8.5.8

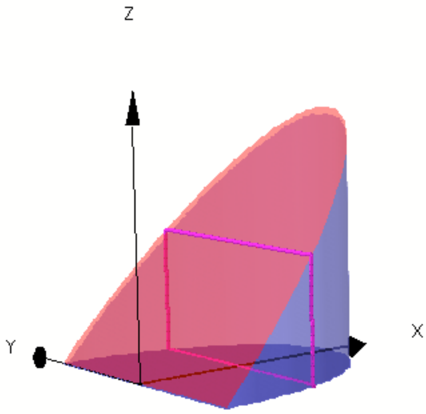
Una falca té la forma d'un cilindre circular de base el disc de radi 1 i centre $(0,0)$, tallat per tres plans: el pla XOY, el pla vertical que conté a l'eix OY i un altre, inclinat, formant un angle de 45° amb el pla XOY, tallant l'anterior a l'eix OY. Calculeu el volum de la falca mitjançant el mètode de seccions transversals.

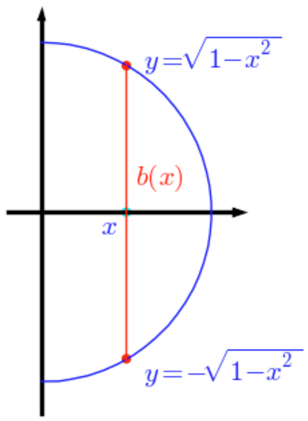


Solució: El problema pot resoldre's realitzant seccions transversals al llarg de l'eix OX o seccions transversals al llarg de l'eix OY.

Solució 1: Seccions transversals al llarg de l'eix OX:

Es consideren les seccions transversals a l'eix OX. Aquestes són rectangles la base dels quals es troba sobre el semidisc de la falca i l'alçada ve determinada pel pla inclinat; tal com s'observa a la figura.



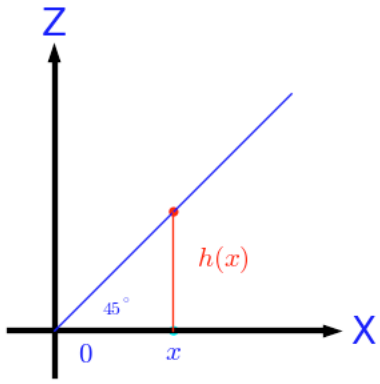


Llavors, es calcula la longitud del tall transversal, per a cada x entre 0 i 1. Tal com s'observa a la figura, la longitud d'aquest tall, que correspon a la base del rectangle, amida $b(x) = 2\sqrt{1-x^2}$; atès que la corba que limita la base del sólid és la circumferència $x^2 + y^2 = 1$.

Per calcular l'alçària del rectangle, en mirar la figura des de l'eix Y, s'obté que aquesta alçària $h(x)$ correspon a un catet del triangle rectangle format i, per tant,

$$\frac{h(x)}{x} = \tan(x) = 1,$$

d'on es dedueix que és $h(x) = x$.



Finalment, l'àrea del rectangle format en fer el tall transversal és

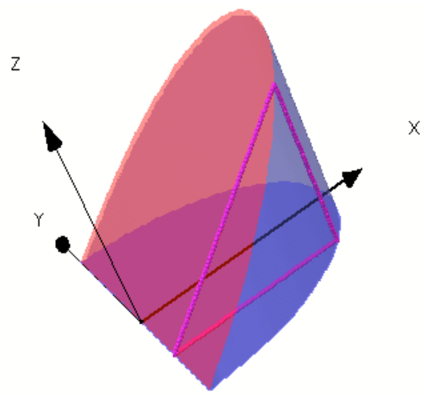
$$A(x) = b(x) \cdot h(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

i el volum del sólid serà

$$V = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 -2x(1-x^2)^{1/2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{x=0}^{x=1} = 2/3\ u^3.$$

Solució 2: Seccions transversals al llarg de l'eix OY:



Si ara els talls són perpendiculars a l'eix OY, la secció transversal correspon a un triangle rectangle; tal com s'observa a la figura.

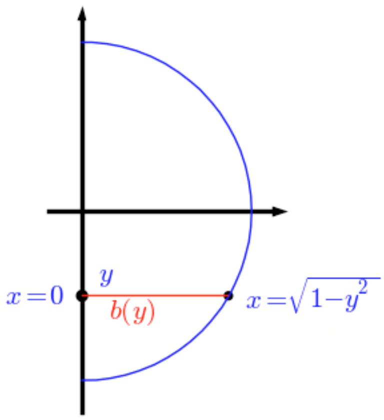
ISBN: 978-84-17429-26-3

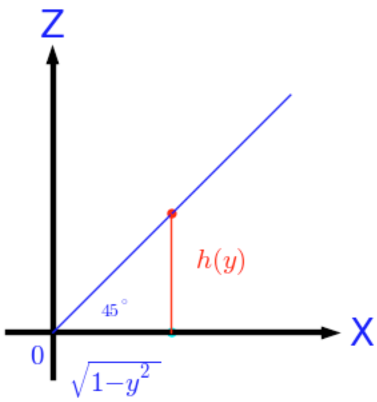
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

De nou, en mirar la figura des de dalt, per poder calcular la longitud del tall transversal, que serà ara funció de y; s'obté

$$b(y) = \sqrt{1-y^2}$$

que correspondrà a la base del triangle que forma la secció transversal.





L'alçària del triangle es pot deduir de la figura indicada, on el triangle dibuixat és exactament la secció transversal amb y fixada. Atès que el triangle format és rectangle i l'angle és de 45°, s'obté

$$\frac{h(y)}{\sqrt{1-y^2}} = \tan(45^\circ) = 1$$

d'on

$$h(y) = \sqrt{1-y^2}$$

Finalment,

$$A(y) = \frac{b(y)\cdot h(y)}{2} = \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-y^2}}{2} = \frac{1-y^2}{2}$$

i el volum demanat serà

$$V = \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2}\, dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-y^2)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1} = 1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3}) = 2/3\, u^3$$

ISBN: 978-84-17429-26-3

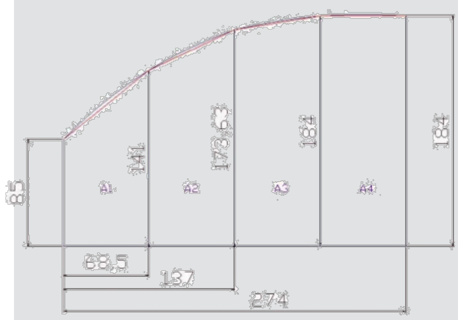
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138

Exercici 8.5.9 Es desitja calcular el volum del buit amb sostre corbat de la figura adjunta. Amb aquest motiu s'han fet amidaments d'algunes de les alcàries des del terra fins al sostre a intervals de 68.5 cm, i s'han obtingut les mesures següents

x	0	68.5	137	205.5	274
$h(x)$	85	141	173.63	184	184

Quin és el volum d'aquest buit si la profunditat és de 0.88 cm?

(La imatge i les dades corresponen al treball de l'equip format per Antonio Lecha Bayo, Nerea Tena Escrig, Javier Figueroa Redón i Vanesa Edo Escrig; realitzat el curs 2010/2011 per al projecte de pràctiques dirigides)



Solució: Atès que no es coneix la corba que delimita el perfil de l'escala, s'empraran els amidaments per aproximar aquesta corba. Fixant l'origen de coordenades a l'extrem inferior esquerre del buit de l'escala, l'eix x representarà la llargària del buit, l'eix y l'alcària i l'eix z la profunditat. Ara poden interpretar-se els amidaments com punts (x, y) de la corba que representa el perfil de l'escala i aproximar-la per interpolació lineal, per exemple, susbtituint, doncs, la corba desconeguda per una poligonal.

```
load(interpol)$
dades:[[0,85],[68.5,141],[137,173],[205.5,184],[274,184]]$
linearinterpol(dades)$
f(x):=%'';
```

$$\begin{aligned}\mathtt{f}(\mathtt{x}) := &(.8175182481751825 * \mathtt{x} + 85.0) * \mathtt{charfun2}(\mathtt{x}, -\infty, 68.5)\\ &+184.0 * \mathtt{charfun2}(\mathtt{x}, 205.5, \infty)\\ &+(.1605839416058394 * \mathtt{x} + 151.0) * \mathtt{charfun2}(\mathtt{x}, 137, 205.5)\\ &+(.4671532846715328 * \mathtt{x} + 109.0) * \mathtt{charfun2}(\mathtt{x}, 68.5, 137)\end{aligned}$$

En la funció $f(x)$ s'ha guardat la poligonal resultant de la interpolació. La integral d'aquesta funció al llarg de l'eix x (interval $[0, 274]$) proporciona l'àrea de la secció transversal (perpendicular a l'eix z situat com a profunditat del buit). En ser una funció a trossos, s'ha d'emprar un mètode numèric per calcular la integral.

```
romberg(f(x),x,0,274);
```

43326.2483418

Llavors,

$$A = \int_0^{274} f(x)\, dx \approx 43326.24834\ cm^2$$

Ara el volum del buit a sota de l'escala ve donat per

$$V = \int_0^{0.88} A\, dz = 0.88 \cdot 43326.24834 \approx 38127.0985\ cm^3;$$

Bibliografia

[1] Miguel Barreda Rochera, José A. López Ortí (2010): *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería. Parte I: Álgebra Lineal*. Universitat Jaume I. http://hdl.handle.net/10234/24302.

[2] Miguel Barreda Rochera, José A. López Ortí (2010): *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería. Parte II: Cálculo Diferencial e Integral*. Universitat Jaume I. http://hdl.handle.net/10234/24303.

[3] Juan J. Font, Salvador Hernández, Sergio Macario (2009): *Cálculo*. Universitat Jaume I. http://hdl.handle.net/10234/24184.

[4] Ángel A. Juan Pérez, Cristina Steegmann Pascual (2010): *Transformacions geomètriques. Translació, rotació i escalatge*. En *Àlgebra*. Universitat Oberta de Catalunya. http://hdl.handle.net/10609/49141.

[5] Joaquín A. Martínez Moya et al. (2015): *Integration of core subjects into Project-Based Learning*. En *INTED2015 Proceedings of the 9th International Technology, Education and Development Conference*. Madrid. IATED Academy.

[6] George F. Simmons (2002): *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill Interamericana. Madrid.

[7] George B. Thomas (1999): *Cálculo de varias variables*. Addison-Wesley Longman. México.

[8] María Purificación Vindel Cañas (2010): *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería*. Universitat Jaume I. http://hdl.handle.net/10234/24284.

[9] Dennis G. Zill (1987): *Cálculo con geometría analítica*. Iberoamérica, DL. México, D.F.

ISBN: 978-84-17429-26-3

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia138