UNIVERSITAT JAUME·I

Màster en Matemàtica Computacional

Treball Final de Màster

MODELS DE GESTIÓ D'INVENTARIS

ALUMNA: NOELIA RODA ADELL

TUTORA: MARIA VICTORIA IBÁÑEZ GUAL

Curs acadèmic 2016/2017

Agraïments

"El pilar més fort no és aquell que es cosntrueix amb ciment, sino el que es forma amb amor i delicadesa".
Allà on estigues, gràcies per mantindre'ns amb força.

Índice general

MODELS DE GESTIÓ D'INVENTARIS

ALUMNA: NOELIA RODA ADELL

TUTORA: MARIA VICTORIA IBÁÑEZ GUAL

8 de noviembre de 2017

Introducció

Una de les grans preocupacions del sector empresari és mantenir content al client. Per això, no sols s'ha de mimar el contacte personal amb aquest, sinó que s'ha de tenir un control estricte d'allò que estem venent, tant en qualitat com en quantitat. Des d'aquest punt de vista, les industries i empreses solen tenir un històric d'inventari per controlar el que es ven en tot moment, assegurant el funcionament continu i correcte del negoci. D'aquesta forma es pot preveure la demanda que tindrà un cert producte en funció del que s'ha venut en l'últim període de temps i es pot fer el corresponent proveïment per evitar l'incompliment del servei prestat.

Però, una gestió incorrecta de l'inventari pot suposar que l'empresa tinga costos addicionals o pèrdues importants. Si el nivell d'estoc és insuficient per a la demanda, el ritme diari de ventes pot sofrir greus interrupcions, afectant al nivell econòmic de l'empresa. No obstant, si aquest nivell és massa elevat, augmentarà els costos de manteniment i emmagatzematge. Per tant, és important determinar la quantitat exacta d'estoc que equilibra aquestes dues situacions.

Per formular i resoldre models d'inventaris que controlen l'estoc necessari, s'ha de tenir en compte la naturalesa de la demanda dels productes per unitat de temps, de forma que si es coneix amb certesa s'han de formular models d'inventaris deterministes però, en canvi, si aquesta demanda segueix una funció de probabilitat, s'han de formular models d'inventaris probabilístics.

El model fonamental per al control d'inventaris deterministes és el conegut com a **EOQ**, de l'anglès Economic Order Quantity. Aquest model calcula la quantitat òptima d'unitats a demanar per a què els costos totals d'inventari siguen mínims. Encara que aquest model està pensat per a minimitzar els costos de les comandes de productes, existeix una variant de l'EOQ per al càlcul dels costos de producció d'articles, conegut com a Economic Production Quantity (**EPQ**).

En aquest treball estudiarem els models d'inventaris deterministes, que ens permetran obtenir les quantitats necessàries d'estoc en un magatzem de forma que els costos totals d'inventari siguen mínims. Començarem amb els model d'EOQ bàsics per a propostes de compra, construint pas a pas el model fins a tenir formulat el mètode matemàtic complet. A partir de la fórmula matemàtica de l'EOQ, estudiarem diferents situacions de comades que es donen en la vida real, com són permetre estoc negatiu, permetre variacions en la quantitat de la comanda, poder fer entregues fóra de temps (retards), etc.

Una volta tinguem estudiat el model d'EOQ, veurem com podem generalitzar aquests models matemàtics per adaptar-los a models econòmics de gestió d'inventaris per a la producció d'articles, el que ens portarà als models EPQ.

Després d'estudiar aquests dos models d'inventaris deterministes, repassarem els casos en que es poden aplicar els mètodes d'EOQ i EPQ. Veurem com la regularitat exigida per aquests models no es pot garantir en la majoria de les situacions empresarials, el que ens portarà a plantejar un mètode diferent per a la planificació d'inventaris, el que es coneix com a sistemes de planificació de recursos materials (**MRP**).

El constant avanç en la tecnologia i la necessitat de les empreses de gestionar computacionalment el funcionament del negoci, han fomentat la necessitat de desenvolupar ferramentes competitives per gestionar l'administració total de les industries. Aquestes ferramentes aporten a les empreses solucions integrals per la gestió de la informació confiable, l'opció de tenir tota la informació en temps real i facilitar la presa correcta de decisions per part de tots els sectors que conformen una empresa actual. Totes aquestes funcionalitats es recullen en la implantació d'un ERP, de l'anglés Enterprise Resource Planning.

A grans trets, un ERP és un sistema que té com objectiu establir relacions d'informació entres totes les àrees d'una empresa, de forma que tota la informació flueix a través dels mòduls en temps real. En aquest sentit, una ordre de venta activa el procés de fabricació i aquest simultàniament envia la informació de l'estoc d'entrades a la logística del producte.

Durant la realització de pràctiques externes del Màster en Matemàtica Computacional en l'empresa Opentix S.L., he estat en contacte amb l'ERP Openbravo. Aquest software de codi obert permet gestionar de forma integral tots els departaments de la empresa, de forma que Openbravo ofereix solucions integrals per a la gestió de de compres i ventes, planificació de la producció, control estricte de la comptabilitat, recursos humans, etc.

La meua estada en l'empresa Opentix S.L. es va centrar en exercir les funcions de Consultoria amb el software Openbravo. Bàsicament, en consultoria realitzem dos tasques fonamentals: suport i gestió de projectes.

En consultoria, estem en contacte amb els clients ajudant-los en qualsevol incidència que pugen tenir. Aquesta part és la que es coneix com a suport. Quan les empreses que utilitzen Openbravo tenen qualsevol dubte o necessiten la nostra ajuda per a resoldre certes incidències, es posen en contacte amb els consultors perquè els proporcionem solucions. Aquesta presa de contacte sol fer-se via telefònica, on ens connectem als seus ordinadors i els expliquem in situ com realitzar correctament la gestió. En algunes ocasions, aquestes incidències necessiten ser supervisades pels programadors, ja que necessiten resoldre's des de la base de dades i per consola, de manera que els consultors ens reunim amb ells per explicar-los les incidències i ens coordinem per obtenir una solució.

Paral·lelament al servei de suport, es treballa conjuntament gestionant projectes d'empreses que comencen a treballar amb Openbravo. En el meu cas, vaig passar a formar part del projecte Espacio Orgánico, una empresa del sector de l'alimentació, restauració i oci de Madrid que està començant a treballar amb Openbravo. En aquest projecte adaptem el nostre ERP a la forma de treballar de l'empresa, fent possible que el client continue amb la seua forma habitual de gestió de l'empresa però amb els avantatges dels nostres serveis.

Per entrellaçar els models teòrics d'inventaris que hem introduït anteriorment amb els sistemes d'ERP, en l'última part d'aquest treball veurem un cas pràctic de models d'inventaris implementats amb Openbravo. Com hem introduït, per planificar els inventaris s'ha de tenir en compte les exigències pròpies de les empreses, de forma que en la majoria dels casos la dependència de la demanda ens portarà a utilitzar sistemes de planificació de recursos empresarials, coneguts com MRP. Openbravo té implementat un mòdul de MRP que ajuda a les empreses a planificar tant la producció de materials com la planificació de compres en funció de la demanda dels productes. Utilitzant aquest mòdul de MRP, simularem el procés complet de planificar una ordre de producció, tenint en compte els nivells d'estoc dels productes per evitar el incompliment per part de l'empresa dels terminis d'entrega establerts.

CAPÍTOL 1.

Models teòrics d'inventaris

El control estricte i real dels inventaris és una de les tasques fonamentals per al correcte funcionament d'una empresa. Per aquest motiu, és interesant estudiar els models teòrics que ajuden a gestionar els inventaris, de forma que les empreses treballen en tot moment amb les quantitats correctes d'estoc, evitant quantitats per baix de la demanda però sense incrementar innecessàriament els costos de manteniments donats per quantitats massa elevades d'existències.

L'origen del problema dels inventaris consisteix en rebre i col·locar de forma periòdica les comandes que arriben en intervals de temps determinats. Ara bé, un bon model d'inventaris ha de seguir la següent política d'inventaris:

1.- En quin moment fer una comanda d'un producte: Quan demanar?

2.- Quina quantitat demanar: Quant demanar?

La resposta d'aquestes preguntes es basa en el problema de minimitzar el següent model de costos:

$$\begin{pmatrix} \text{Cost total} \\ \text{d'inventari} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cost de} \\ \text{compra} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Cost} \\ \text{d'organització} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Cost de} \\ \text{retenció} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Cost de falta} \\ \text{d'existències} \end{pmatrix}$$

Estudiem un a un el significat d'aquests costos:

- **Cost de compra**
  Aquest cost fa referència simplement al cost variable associat amb la compra d'una sola unitat. Generalment, aquest cost inclou els costos variables de mà d'obra, cos fix i el cost de la matèria prima associat amb la compra o producció d'una sola unitat. A més, si la comanda ve d'una font externa, s'inclouen els costos d'enviament.
- **Cost d'organització**
  La majoria dels costos associats a fer comandes o produir internament un producte no depenen de la quantitat de la comanda o de l'ordre de producció. Per exemple, el cost de comanda inclou el cost del treball d'administració i facturació associats amb la comanda o si un producte es produeix internament i no intervé cap font externa, el cost de la mà d'obra i el temps d'inactivitat per a preparar una màquina s'inclouen en aquests costos d'organització.
- **Cost de retenció**
  Aquest cost fa referència a les despeses econòmiques produïdes per mantenir una unitat de l'inventari durant un període determinat. Si suposem que el període es d'un any, el cos d'emmagatzematge s'expressa en euros per unitat per any (€/Ud/Any). En general, aquest cost sol incloure el cost

d'emmagatzematge, el cost d'assegurament, els impostos a l'inventari i el possible cost de descomposició, robatori o obsolescència. No obstant, sol ser comú que el cost de retenció incloga el cost d'oportunitat al invertir capital a l'inventari: suposem que una unitat d'un cert producte costa 100 € i que els beneficis de l'empresa per any són d'un 15 %, aleshores el cost anual de mantenir una unitat en el magatzem és de $100 \cdot 15\,\% = 15$€. En general, les empreses solen estimar que el cost anual de retenció gira al voltant d'un 20 % a un 40 % del cost unitari de compra.

- **Cost de falta d'existències**
  El cost faltant és la penalització econòmica que les empreses han d'assumir quan s'acaben les existències d'un cert producte. Quan la demanda d'un producte no es satisfà a temps, es diu que hi ha un esgotament o falta d'existències. Quan això passa, hi ha dues opcions des del punt de vista del client: acceptar l'entrega de la comanda en una data posterior independentment del retràs, el que es coneix com a **comandes pendents**, o no acceptar la demanda insatisfeta, el que comporta a **ventes perdudes**. Evidentment, les empreses busquen un posicionament intermedi d'aquestes dues situacions, de forma que es poden permetre puntualment entregar comandes amb retràs però evitant a tota costa la pèrdua de clientela. Açò comporta estudiar de forma concreta quina política d'inventari s'ha de seguir i obtindré així una estimació aproximada del que hauria de ser la política d'inventaris òptima per l'empresa.

El problema de minimitzar costos s'ha estudiat històricament per molts matemàtics i investigador, donant lloc a l'existència de molts models d'inventaris. Però el model fonamental per al control d'inventaris és el conegut com al model EOQ (de l'anglès *Economic Order Quantity*). Aquest mètode el va implementar l'enginyer Ford Whitman Harris en 1913 mentre treballava en Westinghouse Comporation[1], encara que l'article original en el que es presentava el model d'EOQ va estar sotmès a continues correccions. Posteriorment, el consultor R.H. Wilson va analitzar profundament la publicació de Harris i en 1914 va publicar el mètode que coneixem actualment com EOQ i que en molts llibres es sol nombrar com el Model de Wilson.

En aquest treball ens centrarem es estudiar detalladament el model d'EOQ, començant pel model bàsic i introduint model a model diferents suposicions de comandes que es donen en les empreses. En finalitzar el repàs per totes les suposicions de models de compra, estendrem el model d'EOQ al model del control d'inventaris per a una taxa finita de producció, donant lloc al model d'EPQ.

Ara be, per treballar amb models d'EOQ hem de tenir en compte certes suposicions que s'han de complir en qualsevol gestió d'inventari, tant de compra com de producció. Detallem a continuació aquestes suposicions:

- **Comanda repetitiva**
  El ritme de decisions de comandes es repeteix d'una forma regular en un cert interval de temps, pel que les comandes les podem considerar repetitives. En aquest sentit, quan les empreses veuen que l'inventari d'un cert producte està per baix de l'estoc mínim o, en cas de no tenir condicions d'estoc veuen que no queden existències, es fiquen en contacte de nou en el proveïdor per fer un nou encàrrec. Quan aquesta metodologia es fa de forma regular en períodes de temps constants, considerem que les comandes són repetitives.

- **Demanda constant**
  Suposarem que la demanda és sempre contant, amb una taxa coneguda. D'aquesta forma, si la demanda d'un cert producte es produeix amb una taxa de n unitats per any, aleshores la demanda del mateix producte durant un període de t mesos serà de $\frac{n \cdot t}{12}$.

- **Termini d'entrega constant**
  Suposem que l'entrega de les comandes s'efectua sempre amb un termini constant i conegut L, de forma que transcorreran exactament L períodes de temps entre el moment que efectuem la comanda i el moment en que arriba aquesta al magatzem.

[1]empresa dels EUA fundada per George Westinghouse en 1886.

- **Comandes continues**
  Segons el tipus de comanda que realitzem, tenim dos tipus diferents de models d'inventaris:
  1.- Models de revisió continua: en aquests tipus de models podem fer comandes en qualsevol moment, de forma que no s'efectuen revisions d'inventaris, sinó que les comandes s'efectuen segons el ritme de venta dels productes.
  2.- Models de revisió periòdica: es fan revisions d'inventari de forma periòdica, de forma que les comandes només es poden fer cada cert temps. Aquest tipus de models permeten que la demanda no siga constant, de forma que la demanda i comanda varien segons els períodes en que s'efectuen.

Com havíem explicat en la Introducció, podem diferenciar dos tipus de models d'inventaris: els deterministes i els probabilístics. En els models d'inventaris deterministes coneixem amb exactitud la demanda de cada producte. En canvi, els models d'inventari probabilístics es defineixen a partir d'una funció de probabilitat que marcarà la demanda del producte en cada instant de temps. En aquest treball ens centrarem únicament en l'estudi de models d'inventaris deterministes.

1.1. Models d'inventaris deterministes

Els models d'inventaris deterministes es poden classificar en dos grups segons el compliment de les exigències que acabem d'exposar. Els models deterministes estàtics es caracteritzen perquè la demanda en funció del temps sempre és contant i la revisió de l'inventari es pot fer de forma continua. Dins d'aquest grup estudiarem els models d'EOQ i la seva variant en producció, els models d'EPQ. Per altra part, tenim els models deterministes dinàmics que es diferencien dels estàtics perquè la demanda pot variar d'un període al següent i el nivell d'inventari es revisa de forma periòdica. En aquesta part estudiarem els models de MRP.

1.1.1. Models estàtics: Quantitat Econòmica de Comanda (EOQ)

Com acabem d'indicar, en els models d'inventaris estàtics la demanda per a qualsevol període de temps es pot suposar constant. Seguint aquesta norma fonamental, en aquesta secció anem a estudiar mètodes d'EOQ per a inventaris de propostes de compra i per a propostes de producció.

Començarem amb el model més simple d'inventaris d'EOQ per a propostes de compra. En aquest model veurem diferents variants segons si considerem que les comandes s'entreguen immediatament o permetem que el termini d'entrega siga diferent de cero. Amb aquest estudi, veurem com varia el model d'EOQ si es permet que es facen descomptes segons la quantitat que es demana o si es permeten retards en les comandes generades.

1.1.1.1. EOQ per a propostes de compres

El consum exigent i la gran competència del mercat obliga a les empreses a tenir un control estricte de les existències dels productes venuts per continuar amb la prosperitat de l'empresa. Aquest fet obliga al sector del comerç a fer previsions exactes del que es ven i l'estoc que es necessita per satisfer la demanda diària dels productes. Els models d'EOQ ajuden als empresaris a gestionar l'inventari dels productes que s'ofereixin alhora que es controla el cost que comporta el mantenir i aconseguir aquestes existències.

El model bàsic d'EOQ necessita considerar les següents suposicions:

1.- La demanda és determinista i la taxa és constant.
Definim D con el nombre d'unitats demandes per any, aleshores durant qualsevol període de temps de t anys la quantitat demanada ascendirà a Dt unitats.

2.- Per cada comanda de grandària q es produeix un cost d'organització K.
Aquest cost d'organització és addicional al cost pq de comprar (o produir en el cas dels mètodes EPQ) q unitats demandades, on p és el cost de comprar una unitat. En aquests models, es suposa que el cost p no depèn de la quantitat de la comanda.

3.- El temps d'espera de cada comanda és cero.
Aquesta suposició implica que cada comanda arriba al magatzem en el moment en que s'efectuen. En l'última variant del model aquesta suposició es relaxa i es permet que les comandes arriben en un termini de L unitats de temps.

4.- No es permet estoc negatiu.
Aquesta suposició implica que no es permet escassetat en l'inventari de l'empresa. Per tant, les comandes no podran arribar amb retràs.

5.- El cost de retenció per unitat i any és de h euros.
Aquest cost implica que si durant un any es manté emmagatzemada una unitat, el cost de manteniment serà h euros. Aleshores, si es mantenen I unitats durant T anys, el cost de retenció ascendirà a ITh euros.

A partir d'aquestes cinc suposicions, passem a definir el model d'EOQ que determinarà la política de comandes que minimitza la suma dels costos de comanda, costos de compra i costos de retenció. Per concretar, suposarem que la unitat de temps és un any.

Per començar, hem de tenir en compte que les comandes arriben instantàniament al magatzem pel que mai s'ha de fer una comanda quan el nivell d'inventari I siga estrictament positiu, ja que augmentar les existències quan $I > 0$ implica fer front a costos de retenció innecessaris. A més, si l'inventari s'esgota, és a dir, si $I = 0$ s'ha de fer una comanda per evitar que hi haja escassetat en l'inventari i així no violar les normes establertes anteriorment. Aquestes dues condicions en el nivell d'inventari impliquen que la política òptima per fer comandes és quan $I = 0$.

Considerem q la quantitat demanada quan $I = 0$, q^* el valor de q que minimitza el cost anual i TC(q) el cost anual de demanar q unitats cada volta que el nivell d'inventari siga cero, de forma que

$$\text{TC(q)} = \text{Cost anual de fer comandes} + \text{Cost anual de compra} + \text{Cost anual de retenció} \tag{1.1}$$

Ara bé, com que hem suposat que cada comanda conté q unitats de productes, haurem de fer $\frac{D}{q}$ comandes a l'any per a satisfer la demanda anual de D unitats. Per tant,

$$\frac{\text{Cost de fer la comanda}}{\text{Any}} = \left(\frac{\text{Cost de fer la comanda}}{\text{Comanda}}\right)\left(\frac{\text{Comandes}}{\text{Any}}\right) = \frac{KD}{q}$$

I com que hem suposat que p és el cost de compra per unitat de producte demanat i sempre es demanen D unitats per any, tenim que

$$\frac{\text{Cost de compra}}{\text{Any}} = \left(\frac{\text{Cost de compra}}{\text{Unitat}}\right)\left(\frac{\text{Unitats comprades}}{\text{Any}}\right) = pD$$

Per determinar el cost de retenció anual necessitem estudiar el comportament de I com una variable depenent del temps. Si suposem que en l'instant 0 arriba una comanda de q unitats i que la demanda és de D unitats per any, faran falta $\frac{q}{D}$ anys per a que l'inventari torne a estar a cero. A més, com que la demanda durant qualsevol període t és de Dt unitats i es ven en una taxa constant, podem calcular la pendent de la disminució del nivell d'inventari en qualsevol interval de temps com:

$$\text{Pendent} = \frac{\Delta\text{Comandes}}{\Delta\text{Inventari a cero}} = \frac{0-q}{q/D-0} = \frac{-qD}{q} = -D$$

Per tant, el nivell d'inventari al llarg de qualsevol període disminuirà amb pendent constant de -D.

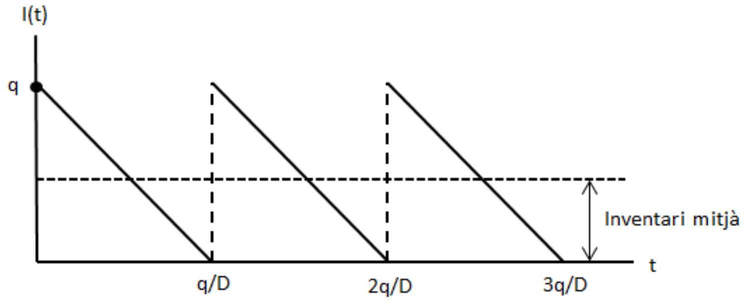


Figura 1.1: Comportament de I(t) en el model bàsic d'EOQ

La Figura 2.1 descriu el comportament d'aquesta pendent: quan l'inventari arriba a cero, es fa una comanda de q unitats que arriba immediatament, pel que el inventari augmenta novament a q unitats.

Definició 1. *A l'interval de temps comprés entre l'arribada d'una comanda i l'instant abans de que arriba la següent comanda es coneix com a* ***cicle****.*

Per tant, la Figura 2.1 simplement ens mostra que la política de demandes del model bàsic d'EOQ consisteix en cicles repetits de duració $\frac{q}{D}$. Això significa que cada any contindrà $\frac{1}{\frac{q}{D}} = \frac{D}{q}$ cicles.

Mirant la Figura 2.1 novament, observem com l'inventari mitjà és simplement la meitat del nivell d'inventari màxim obtingut durant un cicle. Açò únicament es compleix per a models amb taxa de demanda constant on no es permet l'esgotament d'existències. Per tant, com el model bàsic d'EOQ compleix aquestes dues condicions, podem afirmar que el nivell mitjà d'inventari durant un cicle és de $\frac{q}{2}$ unitats.

Amb tot açò, podem determinar el cost de retenció anual de la forma

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Any}} = \left(\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Cicle}}\right)\left(\frac{\text{Cicles}}{\text{Any}}\right)$$

Amb la informació anterior, la primera component del cost es calcula com

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Cicle}} = \frac{q}{2}\left(\frac{q}{D}\right)h = \frac{q^2h}{2D}$$

Per tant, el cost de retenció anual és

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Any}} = \frac{q^2 h}{2D}\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{hq}{2}$$

Així doncs, a partir de la fórmula (1.1) i dels càlculs anteriors, el cost anual de demanar q unitats cada volta que $I = 0$ és

$$\text{TC(q)} = \frac{KD}{q} + pD + \frac{hq}{2}$$

Ara bé, com que volem determinar el valor de q que minimitza el cost total anual, necessitem calcular la derivada de TC(q) respecte la variable q i igualar-la a cero:

$$\text{TC'(q)} = \frac{d\ TC(g)}{d\ q} = \frac{-K(1/D)}{(q/D)^2} + \frac{h}{2} = -\frac{KD}{q^2} + \frac{h}{2} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{KD}{q^2} = \frac{h}{2} \ \Leftrightarrow \ q = \pm\sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Com que q representa la quantitat que es demana, no té sentit considerar el resultat negatiu. Per tant, l'únic valor que representa la quantitat d'inventari a demanar que minimitza els costos anuals és:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Per determinar que aquest valor q^* és el valor que busquem, calculem la segona derivada de TC(q) respecte q i estudiem si la funció és convexa o còncava:

$$\text{TC"(q)} = \frac{d^2\ TC(g)}{d\ q^2} = \frac{2qKD}{q^4} = \frac{2KD}{q^3}$$

I com que les variables que intervenen en el resultat anterior són totes positives per la suposició inicial dels models d'EOQ bàsics i, obviament, la quantitat a demanar serà sempre possitiva, tenim que

$$\text{TC"(q)} = \frac{2KD}{q^3} > 0, \qquad \forall q > 0$$

Per tant, com que la funció és convexa, podem concloure que la quantitat d'inventari que minimitza els costos totals, coneguda com l'EOQ[2], és:

$$\boxed{q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}}$$

Així, la política òptima d'inventari per a aquest model es pot resumir com:

"Fer una comanda de q^* unitats cada $\frac{q^*}{D}$ unitats de temps"

[2] Es coneix com EOQ al valor de q que minimitza els costos totals TC(q), és a dir, l'EOQ és exactament el valor q^*.

Observació 1. *Per concloure aquest apartat, a continuació detallem alguns apunts que s'han de tenir en compte:*

1.- L'EOQ no depèn del preu de compra unitari p, ja que la grandària de cada comanda no depèn d'aquest cost de compra unitari. Per tant, el cost de compra anual depèn únicament de q. En les variacions del model bàsic estudiarem com afecta la dependència del cost de compra per unitats.

2.- Com que hem obtingut que la quantitat òptima de comandes és q^* *unitats i un any conté* $\frac{D}{q^*}$ *cicles, s'han de fer a l'any* $\frac{D}{q^*}$ *comandes.*

3.- Per comprovar que la fórmula d'EOQ és raonable, estudiem breument com canvia q^* *si modifiquem certs paràmetres del resultat òptim:*

3.1. Si el cost d'organització K augmenta, augmenta el nombre d'unitats q^* *que s'han de demanar i , per tant, disminueix el nombre de comandes anuals* $\frac{D}{q^*}$.

3.2. Si el cost de retenció h augmenta, es redueix el nombre d'unitats a demanar q^**. A més, aquest augment afectaria al nivell mitjà d'inventari, que també es reduiria. Si ens fixem en l'equació de* q^**, observem com la relació entre els costos d'organització i els costos de retenció és el punt crític per determinar* q^**. Per exemple, si es duplica K i h,* q^* *no varia. A més, s'observa com* q^* *és proporcional a* $\sqrt{D}$*, pel que si es duplica la demanda,* q^* *augmentarà el doble.*

3.3. Si suposem mínima l'equació d'EOQ, és a dir, suposant $TC(q^*)$*, aleshores es verifica que*

$$\frac{Cost\ de\ retenci\acute{o}}{Any} = \frac{Cost\ de\ la\ comanda}{Any}$$

Ho provem:

$$\frac{Cost\ de\ retenci\acute{o}}{Any} = \frac{hq^*}{2} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{KDh}{2}}$$

$$\frac{Cost\ de\ la\ comanda}{Any} = \frac{KD}{q^*} = \frac{KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \sqrt{\frac{KDh}{2}}$$

Per tant,

$$\frac{Cost\ de\ retenci\acute{o}}{Any} = \sqrt{\frac{KDh}{2}} = \frac{Cost\ de\ la\ comanda}{Any} \qquad \square$$

En la Figura 2.2 observem el comportament dels costos de retenció i de comanda, de forma que veiem clarament les avantatges i els inconvenients de tenir un cost més elevat que l'altre. De la mateixa forma, observem com que efectivament el punt d'equilibri entre els costos es dona en el punt q^**, on tots els costos assoleixen el mínim.*

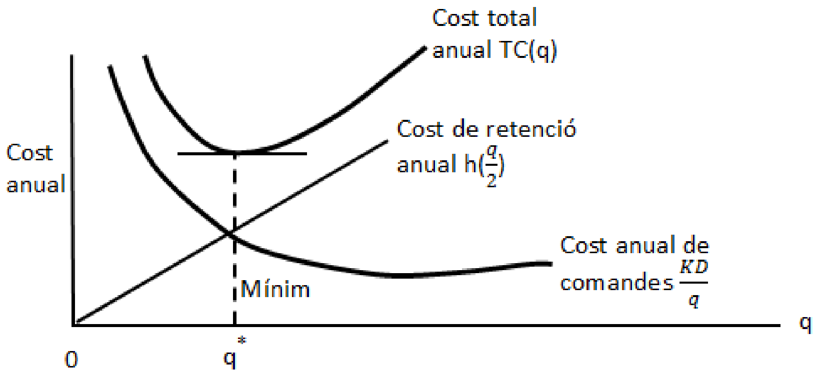


Figura 1.2: Avantatges i inconvenients entre el cost de retenció i el cost de comanda

Com hem vist al principi de la secció, el model bàsic d'EOQ ha de verificar suposicions massa estrictes per poder utilitzar-lo en les simulacions de la vida empresarial quotidiana. Per aquest motiu, en les següents línies exposarem breument dues variants del model bàsic d'EOQ on relaxem algunes d'aquestes suposicions.

Efecte d'un termini d'entrega distint de cero

En la vida empresarial, no es fan comandes en el moment en que l'inventari arriba a cero com hem vist abans, fonamentalment perquè en aquest cas les comandes no arriben al magatzem de forma immediata, sinó que es necessita un termini d'entrega, L, estrictament positiu. Aquesta nova variable diferent de cero no afecta als costos de retenció i comanda, pel que l'equació de l'EOQ del model bàsic encara minimitza els costos com hem vist anteriorment.

Ara be, amb aquestes condicions podem reduir encara més el cost de retenció canviant la política del moment de realitzar comandes. Per evitar que hi haja escassetat d'existències, cada comanda s'ha de fer quan el nivell d'inventari garantisca que quan arriben les comandes el nivell siga igual a cero però mai negatiu (per no violar la norma encara vigent de l'estoc no negatiu).

Definició 2. *El nivell d'inventari que ens indica que és el moment per fer una comanda s'anomena **punt de reposició**.*

Per determinar el punt de reposició del model bàsic d'EOQ, anem a diferenciar aquests dos casos:

Cas 1 El temps d'entrega L és menor a la longitud del cicle $\frac{q*}{D}$.

En aquest cas, la demanda durant el termini d'entrega mai excedirà l'EOQ, és a dir, $LD \leq EOQ$. Com que estem suposant que el nombre d'unitats demanades per any és constant i sempre igual a D, el punt de reposició es dona quan el nivell d'inventari és igual a LD i la comanda arriba L unitats de temps després. Si es compleixen aquestes condicions, quan arriba la comanda al magatzem el nivell d'inventari és exactament de LD-LD=0 unitats.

En la Figura 2.3 hem representat aquest cas, on el temps d'entrega L és exactament l'interval de temps comprés entre la col·locació i reordenació de les comandes.

Cas 2 El temps d'entrega L és estrictament major a la longitud del cicle $\frac{q*}{D}$.

Contràriament al cas primer, ara la demanda durant el termini d'entrega sempre excedirà l'EOQ, de forma que $LD > EOQ$. En aquest cas, no podem suposar que el nivell de reposició siga igual a LD, sinó que hem de definir el temps efectiu d'entrega de la següent forma:

$$L_e = L - n\frac{q^*}{D}$$

on n és el major enter menor que $\frac{L}{\frac{q^*}{D}}$, és a dir, $n \leq \left\lfloor \frac{L}{\frac{q^*}{D}} \right\rfloor$. Aquest resultat es justifica de la següent manera: després de n cicles de $\frac{q*}{D}$ unitats de temps cadascun l'estat de l'inventari és equivalent a l'interval de temps entre col·locar una comanda i rebre un altra que, efectivament, és L_e unitats de temps. Per tant, en aquest cas el punt de reposició coincidirà en L_eD unitats i la política òptima d'inventari del model es podrà renombrar com:

"Fer una comanda de q^* unitats sempre que la quantitat d'inventari siga menor que L_eD unitats"

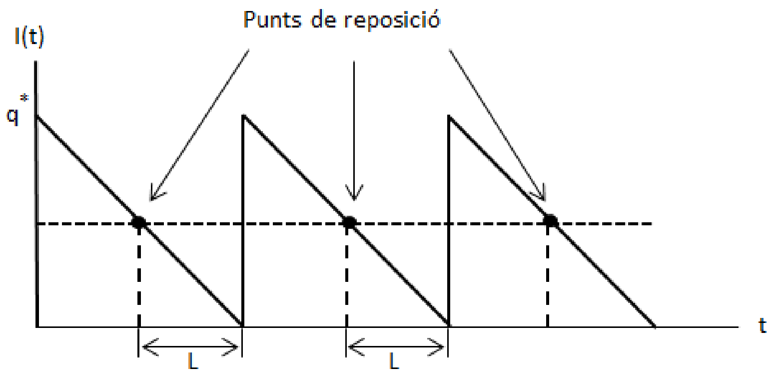


Figura 1.3: Punts de reposició amb temps d'entrega L unitats de temps

Política de comandes de potències de dos

Com hem vist, el model bàsic d'EOQ es pot adaptar als efectes de les comandes del dia a dia de les empreses. Un altre punt importar és determinar si es poden fer lots de productes diferents per a que les comandes arriben als magatzems de forma més compactada.

Suposem que una empresa demana tres productes diferents i les corresponents EOQ produeixen temps diferents entre comandes, de forma que els productes no arriben al magatzem el mateix dia. Si es pogueren sincronitzar els intervals de temps d'arribada de forma que les comandes de diferents productes arribaren el mateix dia, es podrien reduir els costos de coordinació.

En 1985, Roundy [5] va dissenyar un mètode per sincronitzar les comandes de diferents productes, de forma que es permet compactar les comandes. Aquest mètode es coneix com la Política de comandes de potències de dos. Estudiem a continuació el model.

Siga $q^* = \text{EOQ}$ la quantitat òptima de comandes i siga $t^* = \frac{q^*}{D}$ l'interval òptim de reposició per a un cert producte, de forma que t^* serà com a mínim un dia. Aleshore, per a algun $m \geq 0$, comú per a tots els productes de la comanda, s'ha de verificar que

$$2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$$

Aleshores:

- Si $t^* \leq \sqrt{2} \cdot 2^m$, demanar quantitats de reposició que corresponguen a intervals de reposició de 2^m dies.
- Si $t^* \geq \sqrt{2} \cdot 2^m$, demanar quantitats de reposició que corresponguen a intervals de reposició de 2^{m+1} dies.

Amb aquest mètode d'arrodoniment d'intervals de reposició propers a potències de 2, Roundy va demostrar que, encara que la suma dels costos fixos i de retenció s'incrementen fins a un 6 %, es garanteix que diferents productes arriben al mateix temps i açò permet disminuir en gran mesura els costos de coordinació. En la majoria de les circumstancies, aquesta política permetrà que la reducció dels costos de coordinació siga major que l'increment del 6 % dels costos totals, pel que el mètode de Roundy és una bona opció per millorar les polítiques de comandes de productes.

Una volta introduït el model, passem a donar un resultat ben formulat del mètode de Roundy.

Teorema 1. ***Política de comandes de potències de dos***

- *Si* $t^* \leq 2^m\sqrt{2}$*, aleshores la política de comandes de costos mínims de potència de dos és* $t = 2^m$*.*
- *Si* $t^* \geq 2^m\sqrt{2}$*, aleshores la política de comandes de costos mínims de potència de dos és* $t = 2^{m+1}$

En qualsevol cas, el cost total de la política òptima de comandes de potències de dos mai serà superior al cost total de l'EOQ més el $6\,\%$ *d'aquest cost.*

Demostració.

Siga q' una quantitat de comanda arbitrària. Definim el cost total per a aquesta quantitat com

$$\mathrm{TC}(q') = \frac{hq'}{2} + \frac{KD}{q'}$$

Ens interesa calcular la variació del cost respecte el cost òptim $\mathrm{TC}(q^*)$. Per fer-ho, calculem en primer lloc el cost òptim segons la definició que acabem de donar:

$$\mathrm{TC}(q^*) = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}} + \frac{KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2KDh} + \sqrt{\frac{KDh}{2}} = 2\sqrt{\frac{KDh}{2}} = \sqrt{2KDh}$$

Per tant, la variació dels costos es calcula de la forma:

$$\frac{\mathrm{TC}(q')}{\mathrm{TC}(q^*)} = \frac{\frac{hq'}{2} + \frac{KD}{q'}}{\sqrt{2KDh}} = \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h^2}{2KDh}} + \frac{1}{q'}\sqrt{\frac{K^2D^2}{2KDh}} = \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h^2}{2KDh}} + \frac{1}{2q'}\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \frac{q'}{2q^*} + \frac{q^*}{2q'} = \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{q^*} + \frac{q^*}{q'}\right)$$

Ara be, si definim $t := \frac{q}{D}$, l'expressió anterior queda de la forma:

$$\frac{\mathrm{TC}(t')}{\mathrm{TC}(t^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t'}{t^*} + \frac{t^*}{t'}\right)$$

I per la convexitat de TC(q), l'interval òptim de reposició de potència de dos ha de ser 2^m o 2^{m+1}. A partir de l'expressió anterior, 2^m serà l'interval òptim de reposició sii

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2^m}{t^*} + \frac{t^*}{2^m}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2^{m+1}}{t^*} + \frac{t^*}{2^{m+1}}\right)$$

I al mateix temps, aquesta desigualtat sols es compleix sii

$$\frac{t^*}{2^{m+1}} \leq \frac{2^m}{t^*} \;\Leftrightarrow\; t^* \leq \sqrt{2^m 2^m 2} \;\Leftrightarrow\; t^* \leq 2^m\sqrt{2}$$

Per tant, acabem de provar que si $t^* \leq 2^m\sqrt{2}$, aleshores la política de comandes de potències de dos que minimitza els costos es dona en $t = 2^m$. De forma anàloga, es prova que si $t^* \geq 2^m\sqrt{2}$, aleshores la política de comandes de potències de dos que minimitza els costos es produeix en $t = 2^{m+1}$.

Aquests dos resultats proven que la política òptima de potències de dos ha de considerar temps de reposició compresos en l'interval $\left[\frac{t^*}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}t^*\right]$.

De la variació de costos calculada anteriorment, podem obtindre que la diferència màxima entre el cost total per a la política de comandes de potència de dos i el costo total en t^* es donarà quan l'interval de reposició siga $\sqrt{2}t^*$ o $\frac{t^*}{\sqrt{2}}$. Ho comprovem:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{TC}(\sqrt{2}t^*)}{\mathrm{TC}(t^*)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}t^*}{t^*} + \frac{t^*}{\sqrt{2}t^*}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1'06 \\
\frac{\mathrm{TC}(\frac{t^*}{\sqrt{2}})}{\mathrm{TC}(t^*)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^*/\sqrt{2}}{t^*} + \frac{t^*}{t^*/\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right) = 1'06
\end{aligned}$$

Amb aquest resultat podem afirmar que la política de potència de dos no podrà causar un increment en el cost total superior al 6 %.

□

Fins al moment, hem estudiat el model d'EOQ aferrant-nos a les exigències que s'han exposat al principi de la secció. Però, com hem introduït, les exigències empresarials obliguen a suavitzar aquestes condicions per adaptar el model d'EOQ al control dels inventaris de les empreses.

En els següents apartats veurem com podem modificar el model bàsic d'EOQ per permetre que els proveïdors facin descomptes segons la quantitat comprada o permetre que les comandes arribem amb retard.

1.1.1.1.1. Model d'EOQ amb descomptes

En la secció anterior, hem suposat que el cost de compra anual no depèn de la quantitat d'unitats demanades en les comandes. Aquesta suposició ens ha permès ignorar el cost de compra anual quan es calculava la quantitat de comanda que minimitzava els costos totals.

No obstant, com acabem de comentar, en la vida real els proveïdors solen reduir el preu de compra unitari per a comandes que superen una certa quantitat. Per tant, si un proveïdor ens fa un descompte, el cost de compra anual dependrà de la quantitat de la comanda.

A més, com que el cost de retenció anual s'expressa com un percentatge del cost de compra per article, aquest cost de retenció també dependrà de la quantitat de la comanda. Per tant, el model bàsic d'EOQ presentat en la secció 1.1.1.1 per calcular la quantitat òptima de comanda ja no és vàlid. Presentem a continuació la variació d'aquest model per a comandes amb descomptes.

Siga q la quantitat demanada cada volta que es fa una comanda, aleshores el model general de descomptes que analitzarem es pot descriure de la següent forma:

$$\begin{gathered}
\text{Si } q < b_1, \text{ cada unitat del producte costa } p_1€ \\
\text{Si } b_1 \leq q < b_2, \text{ cada unitat del producte costa } p_2€ \\
\vdots \\
\text{Si } b_{k-2} \leq q < b_{k-1}, \text{ cada unitat del producte costa } p_{k-1}€ \\
\text{Si } b_{k-1} \leq q < b_k = \infty, \text{ cada unitat del producte costa } p_k€
\end{gathered}$$

on $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ són les quantitats on es produeix un canvi de preu per unitat de producte.

Definició 3. *Els punts $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ on es produeix un canvi de preu s'anomenen* ***punts de reducció pronunciada de preus****.*

Per sentit propi de descompte, com que les quantitats majors de comandes s'associen a preus menors, es verificarà que $p_k < p_{k-1} < \ldots < p_2 < p_1$.

Abans d'explicar com determinar la quantitat de comanda que minimitza els costos anuals totals, necessitem definir els següents conceptes:

Definició 4. ***Cost anual total***
Representem per $TC_i(q)$ com el cost total anual de comandes de q unitats a un preu de compra p_i. Aquest cost inclou el cost de retenció, compra i organització de les comandes.

Definició 5. ***Quantitat que minimitza el cost anual total***
Representem per EOQ_i a la quantitat de comanda, q, que minimitza el cost total anual si el cost de compra de la comanda és p_i. Aquesta quantitat haurà de verificar la següent propietat:

Proposició 1. *L'EOQ_i serà admissible si $b_{i-1} \leq EOQ_i < b_i$.*

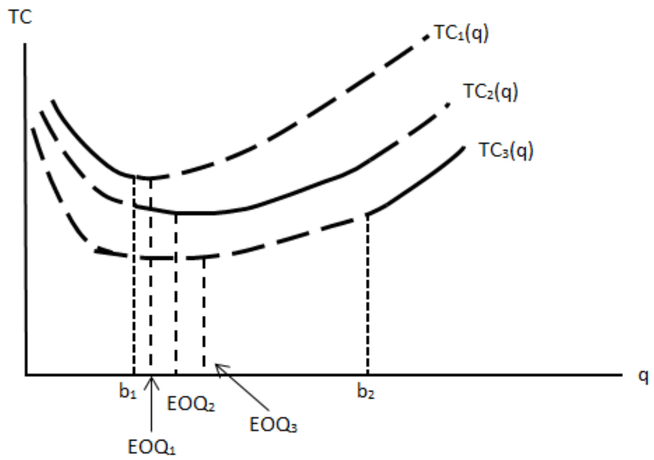
Definició 6. ***Cost anual real***
Representem per TC(q) al cost anual real si es demanen q productes cada volta que es fa una comanda. Aquest cost es determinarà mitjançant el preu p_i quan $b_{i-1} \leq q < b_i$.

Per concretar el sentit d'aquestes definicions, en la Figura 1.4 hem representat el comportament de cada variable. En ambdues figures, la part representada per línies contínues fa referència a la variable TC(q) i la part representada per línies discontínues representa el cost inassolible.

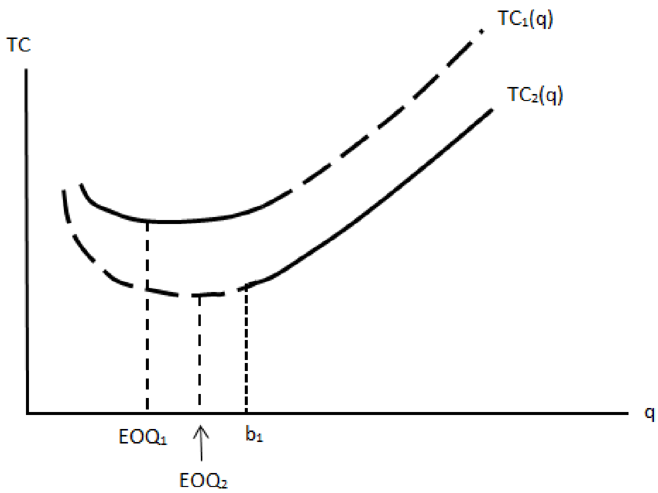
En la Figura 1.4 (a) observem que l'única EOQ admissible és l'EOQ_2, ja que verifica la condició $b_1 \leq EOQ_2 < b_2$ indicada en la Proposició 1. En canvi, les EOQ_1 i EOQ_3 no són admissibles per no verificar aquesta propietat.

En la Figura 1.4 (b) observem com per a valors $q < b_1$, el cost de TC_2(q) és inassolible, ja que el preu de compra dels productes no és p_2. En canvi, per als mateixos valors $q < b_1$, con que el preu de compra correspon a p_1, el cost total anual ve donat per la part contínua de TC_1(q).

En general, el valor de q que minimitza els costos anuals reals, TC(q), pot ser tant un punt d'equilibri (Figura 1.4 (b)) com algun valor EOQ_i (Figura 1.4 (a)).



(a) EOQ_2 minimitza a TC



(b) b_1 minimitza a TC

Figura 1.4: Il·lustracions de les definicions de TC_i(q) i EOQ_i

Per determinar el valor de q que minimitza el costo total, TC(q), a continuació detallem diferents observacions que ens seran útils per determinar aquest punt (que com hem indicat, pot ser tant un punt d'equilibri com un valor d'EOQ_i).

1.- Per a qualsevol valor de q, es verifica que

$$\text{TC}_k(q) < \text{TC}_{k-1}(q) < \ldots < \text{TC}_2(q) < \text{TC}_1(q)$$

Aquesta propietat és certa perquè, per a qualsevol quantitat q de comanda, TC_k(q) sempre tindrà els costos de retenció i compra més baixos, ja que el preu p_k correspon al preu disponible més baix. Seguint el mateix raonament, TC_1(q) tindrà les costos de retenció i compra més alts per ser p_1 el preu disponible més elevat. En la Figura 1.4 (a) observem que els costos seguixen aquest comportament: TC_3(q)<TC_2(q)<TC_3(q).

2.- Si EOQ_i és admissible, aleshores el cost mínim per a $b_{i-1} < q < b_i$ es dona quan q=EOQ_i (Figura 1.5 (a)). Si $EOQ_i < b_i$, aleshores el cost mínim per a $b_{i-1} < q < b_i$ ocorrerà quan q=b_{i-1} (Figura 1.5 (b)). Aquestes afirmacions es dedueixen del fet que TC_i(q) disminueix per a valors de q<EOQ_i i augmenta per a valors de q>EOQ_i.

3.- Si EOQ_i és admissible, aleshores TC(q) no es pot minimitzar a una quantitat de comanda per a la que el preu de compra per unitat siga major a p_i. Per tant, si EOQ_i és admissible, la quantitat de comanda òptima ocorrirà per al preu p_i, p_{i+1}, ..., o p_k.

Per comprovar que la observació 3.- és certa, suposem que existeix una EOQ_i que siga admissible. Ara bé, la pregunta que ens hem de fer és: perquè una quantitat de comanda associada a un preu $p_j > p_i$ no pot tenir un cost menor que EOQ_i? Anem contestar la pregunta amb el següent raonament.

Com que EOQ_i minimitza el cost anual total quan el preu és p_i però EOQ_j no minimitza aquest cost si el preu continua sent p_i (amb $i \neq j$), aleshores es verifica que

$$\mathrm{TC}_i(\mathrm{EOQ}_i) < \mathrm{TC}_i(\mathrm{EOQ}_j)$$

i com que $p_j > p_i$, també es verifica que

$$\mathrm{TC}_i(\mathrm{EOQ}_j) < \mathrm{TC}_j(\mathrm{EOQ}_j)$$

aleshores, d'aquestes dues expressions tenim que

$$\mathrm{TC}_i(\mathrm{EOQ}_i) < \mathrm{TC}_j(\mathrm{EOQ}_j)$$

i per definició de l'EOQ_j, sabem que $\forall q$

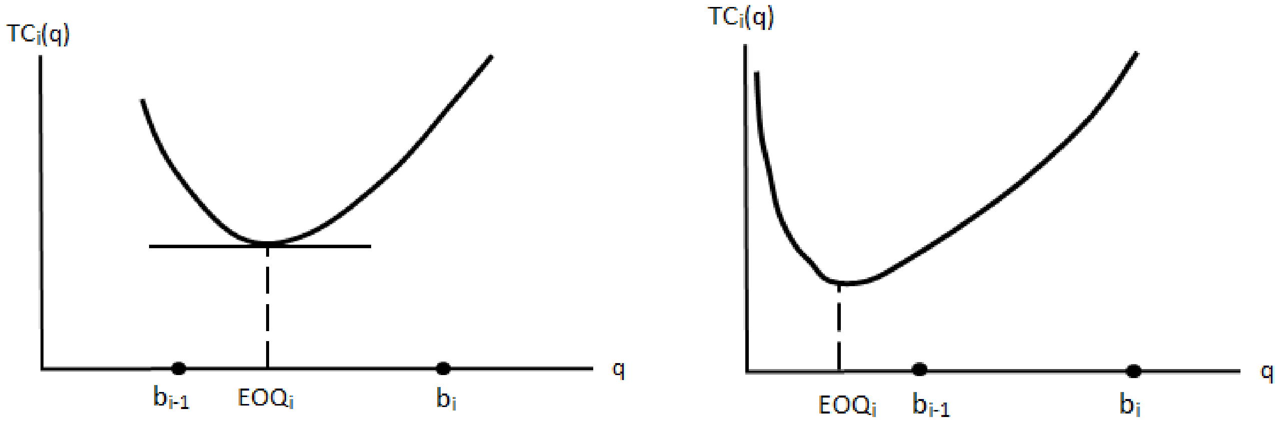
$$\mathrm{TC}_j(\mathrm{EOQ}_j) < \mathrm{TC}_j(\mathrm{q}$$

per tant, d'aquestes expressions obtenim que

$$\mathrm{TC}_i(\mathrm{EOQ}_i) < \mathrm{TC}_j(\mathrm{EOQ}_j) \leq \mathrm{TC}_j(\mathrm{q})$$

i acabem de provar que és més econòmic demanar una quantitat EOQ_i a un preu p_i que demanar una quantitat qualsevol, q, a un preu superior p_j.

$\square$



(a) EOQ$_i$ minimitza a TC$_i$(q)

(b) b$_i - 1$ minimitza a TC$_i$(q)

Figura 1.5: Estudi dels valors de q que minimitzen a TC$_i$(q), per a $b_{i-1} \leq q < b_i$

Aquestes observacions ens permeten definir el següent mètode d'EOQ per determinar la quantitat òptima de comanda quan es permeten descomptes:

Algoritme per determinar la quantitat òptima de comanda amb descomptes

A partir del següent model general de descompte

$$\begin{gathered}
\text{Si } q < b_1, \text{ cada unitat del producte costa } p_1€ \\
\text{Si } b_1 \leq q < b_2, \text{ cada unitat del producte costa } p_2€ \\
\vdots \\
\text{Si } b_{k-2} \leq q < b_{k-1}, \text{ cada unitat del producte costa } p_{k-1}€ \\
\text{Si } b_{k-1} \leq q < b_k = \infty, \text{ cada unitat del producte costa } p_k€
\end{gathered}$$

i de les observacions que acabem de fer, seguim els següents passos:

$\boxed{\textbf{PAS 1}}$ Elegim el preu més baix p_k i calculem l'EOQ$_k$ emprant la formula descrita en el model bàsic d'EOQ

$$EOQ_k = q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Aleshores:

Si $b_{k-1} \leq EOQ_k < b_k \Rightarrow$ L'EOQ$_k$ és admissible i $q_k^* = EOQ_k$. FI ALGORITME.

Si $EOQ_k < b_{k-1} \Rightarrow q_k^* = b_{k-1}$. Continuem al Pas 2.

$\boxed{\textbf{PAS 2}}$ Elegim el segon preu més baix p_{k-1} i calculem l'EOQ$_{k-1}$. Aleshores:

Si $b_{k-2} \leq EOQ_{k-1} < b_{k-1} \Rightarrow$ L'EOQ$_{k-1}$ és admissible i $q_{k-1}^* = EOQ_{k-1}$. FI ALGORITME.

Si $EOQ_k < b_{k-1} \Rightarrow q_k^* = b_{k-1}$ Continuem al Pas 3.

PAS 3 Repetim els passos anteriors fins trobar una EOQ$_i$ admissible, on $q_i^* = EOQ_i$.
Aleshores, d'entre el conjunt de possibles solucions òptimes $\{q_k^*, q_{k-1}^*, \ldots, q_i^*\}$, el valor de q_j^*, $j = k, k-1, \ldots, i$ que minimitze el cost anual total $TC_j(q_j^*)$ serà el valor de la quantitat òptima de comanda que minimitza a TC(q).

A continuació, exposem l'ultima variant del model bàsic d'EOQ, les comandes amb retard.

1.1.1.1.2. Model d'EOQ amb comandes retardades

En moltes situacions de la vida real, la demanda dels productes no es satisfà a temps i es produeix escassetat en l'estoc d'aquests productes. Quan passa açò, automàticament es produeix un increment en els costos degut a pèrdues en el negoci, cost extra de fer comandes especials, pèrdues futures de renom comercial, etc. En aquest últim model, modificarem el model bàsic d'EOQ presentat en la secció 1.1.1.1 per permetre la possibilitat de rebre comandes amb retard, el que es coneix com desproveïment. Així doncs, passem a presentar el model.

Siga s el cost per falta d'una unitat durant un any i continuem considerant K,D i h com ho hem fet fins al moment. Com es pot suposar, la majoria de les voltes serà molt difícil determinar el valor exacte de s. Per simplificar-ho, suposem que la demanda dels productes és acumulativa i que no es perden ventes per retards en les comandes. Per determinar la política de comandes que minimitza els costos anuals, definim el següent paràmetre:

q-M = desproveïment màxim que es permet en la política de comandes

on q continua sent el nombre d'unitats demandades en cada comanda.

Si suposem que el termini d'entrega per a cada comanda és cero, l'empresa tindrà un dèficit de q-M unitats cada volta que es fa una comanda i, seguint amb la política del model bàsic d'EOQ, les comandes es faran exactament quan el nivell d'inventari de l'empresa siga M-q unitats. Per tant, el nivell màxim d'inventari en cada cicle serà de M-q+q = M unitats. Aquests comportaments els podem veure en l'evolució de l'inventari de la Figura 1.6. A més, en aquesta figura s'observa com el comportament de les comandes és cíclic, en el sentit que els períodes 0B i BD formen cicles com els descrits en el model bàsic d'EOQ.

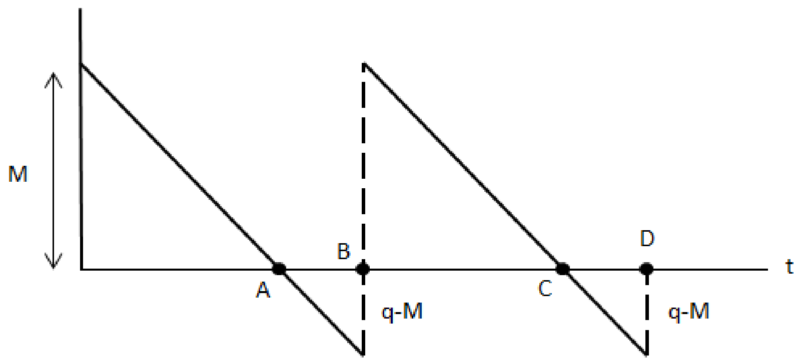


Figura 1.6: Evolució de l'inventari per al model d'EOQ amb comandes retardades

En aquest model, estem suposant novament que el cost de fer compres no influeix sobre la quantitat total demanada, q, ni sobre l'estoc màxim M. Per tant, els costos totals els minimitzaran quan determinem els valors de q i M que minimitzen a

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Any}} + \frac{\text{Cost per dèficit}}{\text{Any}} + \frac{\text{Cost de fer la comanda}}{\text{Any}}$$

Per determinar cadascun d'aquests costos, a continuació detallem pas a pas el càlcul de cada cost per separat. En el cas del cost anual de fer la comanda, com que els factors que intervenen són els mateixos que en el model bàsic d'EOQ, ja sabem que és

$$\frac{\text{Cost de fer la comanda}}{\text{Any}} = \frac{\text{Cost de fer la comanda}}{\text{Cicle}}\frac{\text{Cicle}}{\text{Any}} = \frac{KD}{q}$$

Per determinar el costs de retenció any, determinarem en primer lloc el cost de retenció per cicle. Per fer-ho, necessitem determinar la longitud dels segments de 0A i AB de la Figura 1.6. Ara be, com que el nivell d'inventari és cero cada volta que es venen les M unitats del producte i sabem que es demanen D unitats per any, el segment $\overline{0A} = \frac{M}{D}$. Com que 0B és un cicle, per la definició de cicle donada en la secció 1.1.1.1, determinem que $\overline{0B} = \frac{q}{D}$. Així, la longitud del segment AB és

$$\overline{AB} = \overline{0B} - \overline{0A} = \frac{q - M}{D}$$

on recordem que D es el nombre d'unitats demandaes durant un any. Per tant, tenint en compte que el nivell d'inventari mitjà entre l'instant 0 i A és $\frac{M}{2}$, el cost de retenció per cicle es calcula com

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Cicle}} = \text{Cost de retenció de l'instant 0 al A} = \frac{M}{2}\frac{M}{D}h = \frac{M^2h}{2D}$$

I com el nombre de cicles per any és de $\frac{D}{q}$, el cost de retenció anual és

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Any}} = \frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Cicle}}\frac{\text{Cicle}}{\text{Any}} = \frac{M^2h}{2D}\frac{D}{q} = \frac{M^2h}{2q}$$

Calculem de forma anàloga el cost anual de dèficit. Com passava amb el cost anterior, el cost de dèficit per cicle coincideix amb el cost de dèficit entre l'interval de temps AB. Com que estem suposant que la demanda és constant, el nivell de dèficit mitjà durant l'interval AB és simplement la meitat del dèficit màxim. Per tant, el nivell de dèficit mitjà en l'interval AB és $\frac{q-M}{D}$ i el cost de dèficit per cicle es calcula com

$$\frac{\text{Cost de dèficit}}{\text{Cicle}} = \frac{1}{2}(q - M)\frac{q - M}{D}s = \frac{(q - M)^2 s}{2D}$$

I com el nombre de cicles per any és de $\frac{D}{q}$, el cost de dèficit anual és

$$\frac{\text{Cost de dèficit}}{\text{Any}} = \frac{\text{Cost de dèficit}}{\text{Cicle}}\frac{\text{Cicle}}{\text{Any}} = \frac{(q - M)^2 s}{2D}\frac{D}{q} = \frac{(q - M)^2 s}{2q}$$

Així, el cost total anual de demanar q unitats amb estoc màxim permès de M unitats, TC(q,M), és

$$TC(q, M) = \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q} + \frac{KD}{q}$$

Ara be, el que ens interessa és determinar els valors de q i M que minimitzen a TC(q,M). Com que TC(q,M) és una funció convexa de q i M, el valor màxim es donarà en el punt on les parcials de TC(q,M) respecte q i M s'anul·len simultàniament. Derivant TC(q,M) i operant amb les parcials, s'obté que els valors de q i M que minimitzen al cost anual total TC(q,M) són:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD(h+s)}{hs}}$$

$$M^* = \sqrt{\frac{2KDs}{h(h+s)}}$$

Però, si recordem el valor òptim de q que minimitzava el cost total TC(q) en el mètode bàsic d'EOQ, $EOQ = q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$, podem reescriure els resultats anteriors com expressions en funció de EOQ de la forma:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD(h+s)}{hs}} = EOQ\left(\sqrt{\frac{h+s}{s}}\right)$$

$$M^* = \sqrt{\frac{2KDs}{h(h+s)}} = EOQ\left(\sqrt{\frac{s}{h+s}}\right)$$

Per tant, el dèficit d'estoc màxim es produirà en $q^* - M^*$ unitats. Observem que si s tendeix a l'infinit, q^* i M^* s'aproximen al valor òptim EOQ i el dèficit màxim tendirà a cero. Aquest comportament és raonable ja que si el cost s és molt gran, és raonable que el cost es convertisca en un cost prohibitiu i que la política òptima de comandes incorra en molts pocs desproveïments (si es que hi ha). En altres paraules, si el cost s és molt gran estem davant la situació del model bàsic d'EOQ on no es permeten desproveïments.

Amb aquest mètode acabem de presentar tots els models d'EOQ per a propostes de compres. Al llarg de la secció 1.1.1.1 hem vist com podem determinar la quantitat òptima de productes que les empreses han de demanar als proveïdors per a que la suma de tots els costos siga la menor possible. Així, hem vist com determinar les quantitats de comanda òptimes en models que, encara que són bàsics, presenten una gran rigidesa a l'hora d'aproximar les exigències a la vida empresarial real i hem aconseguit relaxar aquestes suposicions amb petites modificacions dels models per permetre que l'instant d'entrega dels productes no siga instantani o que el preu de compra dels productes tinga descomptes segons les quantitats que demanem. En la següent secció, veurem com podem modificar aquest model d'EOQ per a propostes de producció interna de les empreses, el que es coneix com a model d'EPQ.

1.1.1.2. EPQ per a propostes de producció

Com sabem, a banda del sector de la compra-venta d'articles, moltes empreses pertanyen al sector de la producció de bens materials, de forma que en lloc de comprar els productes a un proveïdor extern els produeixen internament. Per tant, com passava amb les compres, sorgix la necessitat de tenir l'estoc controlat per afavorir la demanda dels productes i al mateix temps evitar costos de manteniment i/o producció innecessaris. Per continuar amb el fil del treball, en aquesta secció adaptarem el model bàsic d'EOQ que hem vist en seccions anteriors a propostes de producció de taxa continua, el que es coneix com model d'EPQ de taxa continua.

Com en els casos anteriors, suposarem que la demanda és determinista i continua per a qualsevol període de temps. A més, també suposarem que no es permet dèficit d'estoc i que l'empresa pot produir bens a una taxa de r unitats per unitat de temps, és a dir, que durant qualsevol període de duració t l'empresa produirà rt unitats. Com en els models anterior, suposarem que la unitat de temps és un any. Amb aquestes suposicions, passem a definir el model d'EPQ de taxa continua.

Siguen

q	=	nombre d'unitats produïdes durant cada correguda de producció.
K	=	cost de posada en marxa de una correguda de producció.
		Aquest cost sol produir-se per temps ociosos durant l'inici o el final de la correguda de producció.
h	=	cost de retindre una unitat en l'inventari durant un any.
D	=	demanda anual del producte.

Abans d'introduir el model d'EPQ, estudiem el comportament de les corregudes de producció a partir de la Figura 1.7 on es descriu l'evolució de l'inventari en aquest model. Suposem que la correguda de producció comença en l'instant 0, que la taxa de producció és de r unitats per any i que la demanda ve donada per una taxa de D unitats per any. Com observem en la figura, l'inventari avança a una taxa de producció constant de r-D unitats per any (òbviament, $r \geq D$ per poder satisfer-se la demanda) fins arribar a l'instant $\frac{q}{r}$ on la producció està completada i s'han arribat a les q unitats produïdes. A partir d'aquest moment, l'inventari comença a disminuir a una taxa constant de D unitats per any fins que en l'instant $\frac{q}{D}$ l'inventari és cero. A partir d'aquest punt, començaria una altra correguda de producció.

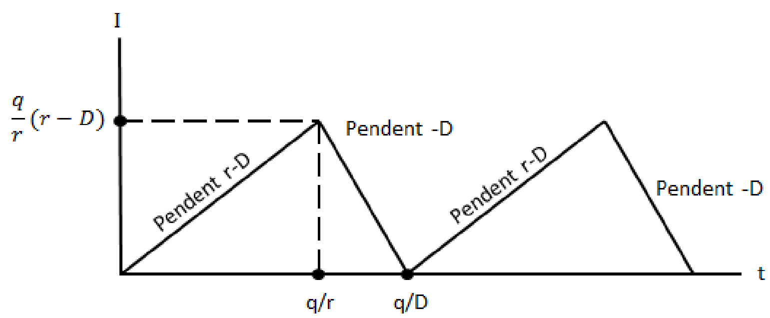


Figura 1.7: Variació de l'inventari per al model d'EPQ de taxa continua

Amb aquest aclariment, passem a descriure el model d'EPQ. Com haviem suposat amb els costos de compra del model bàsic d'EOQ, anem a suposar que els costos de producció per any són independents de la grandària de la correguda. Per tant, el que ens interessa és determinar el valor de q que minimitza a la suma

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Any}} + \frac{\text{Cost de preparació}}{\text{Any}}$$

Com que la demanda ve donada per una taxa constant, sabem que

$$\text{Nivell d'inventari mitjà} = \frac{1}{2}(\text{Nivell d'inventari màxim})$$

Ara be, en la Figura 1.7 observem que el nivell d'inventari màxim s'assolix en l'instant $\frac{q}{r}$ i com que entre cero i $\frac{q}{r}$ l'inventari augmenta a una taxa constant de r-D unitats per any, el nivell d'inventari en l'instant $\frac{q}{r}$ serà de $\frac{q}{r}(r-D)$ unitats. Aleshores,

$$\text{Nivell d'inventari mitjà} = \frac{q}{2r}(r-D)$$

i el cost de retenció anual serà

$$\frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Any}} = \text{h} \cdot (\text{Inventari mitjà}) \cdot \text{Any} = \frac{h(r-D)q}{2r}$$

Observem com el cost anual de retenció per al model d'EPQ coincideix amb el cost anual de retenció per al model bàsic d'EOQ quan el cost de retenció unitari és $h := \frac{h(r-D)}{r}$.

Per calcular el cost anual de preparació aprofitem el cost anual de fer una comanda que havíem calculat en el model bàsic d'EOQ, ja que aquests dos costos fan referència al mateix esforç segons estem comprant o produint. Per tant,

$$\frac{\text{Cost de preparació}}{\text{Any}} = \frac{\text{Cost de fer una comanda}}{\text{Any}} = \frac{KD}{q}$$

Així doncs, el cost total de produir q unitats és el següent:

$$\text{TC(q)} = \frac{\text{Cost de retenció}}{\text{Any}} + \frac{\text{Cost de preparació}}{\text{Any}} = \frac{h(r-D)q}{2r} + \frac{KD}{q}$$

Aquest expressió mostra que el problema de minimitzar la suma total dels costos per al model d'EPQ és equivalent a resoldre un model d'EOQ amb cost de retenció $h := \frac{h(r-D)}{r}$. Recordem que el cost anual de demanar q unitats que vam obtindre en el model bàsic d'EOQ era

$$\text{TC(q)} = \frac{hq}{2} + pD + \frac{KD}{q}$$

Per tant, com que la quantitat òptima de comanda per al model d'EOQ era $q* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$, obtenim que la grandària òptima de correguda per al model d'EPQ de taxa continua és

$$q^* = \text{Grandària òptima de correguda} = \sqrt{\frac{2KD}{\frac{h(r-D)}{r}}} = \sqrt{\frac{2KDr}{h(r-D)}}$$

i, equivalentment als models de propostes de compra, s'ha d'executar $\frac{D}{q}$ corregudes a l'any per satisfer la demanda anual de D unitats. A partir del valor òptim q^* del model l'EOQ, podem reescriure el valor òptim anterior en funció de l'EOQ de la forma

$$q^* = \text{Grandària òptima de correguda} = \text{EOQ}\left(\sqrt{\frac{r}{r-D}}\right)$$

Observació 2. *Del resultat anterior observem que, a mesura que s'incrementa r, la taxa de producció augmente. Per tant, per a r grans, el model d'EPQ de taxa continua tendirà a la situació del model bàsic d'EOQ d'entrega immediata, ja que per a r gran la relació* $\frac{r}{r-D}$ *tendeix a 1. Per tant, el valor* q^* *de l'EPQ mostra que, quan fem créixer r, la grandària òptima de correguda per al model d'EPQ tendeix a la grandària òptima de compra per al model d'EOQ.*

Com hem vist fins al moment, tots els models d'EOQ, des del bàsics passant per totes les seues variants, partixen de la base de que la demanda és constant durant tot el període de temps considerant. Ara be, com sabem la demanda no sempre segueix el mateix patró, segons la temporada un mateix producte pot tenir demandes completament diferents. És per aquest motiu que necessitem definir algun algoritme que ens permeta determinar si la suposició de que la demanda és constant és raonable.

En 1998 Peterson y Silver van desenvolupar el següent mètode per determinar si la demanda es suficientment constant per aplicar els mètodes d'EOQ:

Suposem que durant n períodes de temps una certa empresa ha registrar demandes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ i, òbviament, suposem que coneixem amb suficient certesa les demandes futures per a que la demanda siga determinista. Realitzem els següents càlculs:

1.- Determinar l'estimació $\overline{d}$ de la demanda mitjana per període:

$$\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

2.- Determinar una estimació de la variància de la demanda σ_D^2 per període:

$$\sigma_D^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \overline{d}^2$$

3.- Determinar el coeficient de variabilitat de la demanda:

$$CV = \frac{\sigma_D^2}{\overline{d}^2}$$

A partir del valor del CV, es determina la següent regla de decisió:

- Si CV<0.20, la demanda és suficientment constant per utilitzar els models d'inventaris d'EOQ.
- Si CV>0.20, hi ha massa variabilitat de demanda entre períodes per utilitzar models d'EOQ. Alternativament, s'utilitza el mètode heurístic de Silver-Meal.

Quan les demandes dels n períodes considerats són iguals $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$, l'estimació de la variància serà cero, pel que el coeficient de variabilitat serà nul. Per tant, en aquest cas també es suposa que la demanda és suficientment regular per a utilitzar models d'EOQ.

Al llarg de tota la secció, hem suposat que les demandes durant diferents períodes son independents les unes de les altres. Aquesta suposició es requereix per poder aplicar, i en el nostre cas, estudiar models d'inventaris deterministes. Per tant, per treballar amb models d'EOQ necessitem que la demanda d'un cert període no ens dóna cap informació sobre la pròxima demanda. Ara be, aquestes suposicions no es poden complir en moltes situacions quotidianes de les empreses. Un cas d'aquest incompliment és la producció interna que produeix necessitats d'inventaris encadenades. Per exemple, si a data de 10 d'octubre es produeix una necessitat de produir 10 unitats d'un producte A però alhora cada unitat de A necessita 2 unitats del producte B i 3 del producte C i, una volta obtinguts aquests productes, fan falta 5 dies per assemblar una unitat del producte A, aleshores el fet de tenir una necessitat de 10 unitats de A a data de 10 d'octubre produeix una necessitat de 20 unitats de B i 30 unitats de C a data de 5 d'octubre. Aquesta dependència de demandes fa que s'haja de buscar alternatives als models d'EOQ, la rigidesa dels quals no permet resoldre aquestes situacions. Una de les solucions més recurrents és utilitzar models de planificació de recursos materials, més conegut com MRP.

1.1.2. Models dinàmics: Planificació de Recursos Materials (MRP)

En aquesta secció passem a estudiar els models d'inventaris dinàmics, que es diferencien dels models estàtics estudiats anteriorment per bàsicament dos motius: el nivell d'inventari es revisa de forma periòdica durant una quantitat finita de períodes iguals i la demanda per períodes es pot considerar dinàmica en el sentit que pot variar d'un període al següent (encara que continua sent una demanda determinista com en la resta dels casos estudiats).

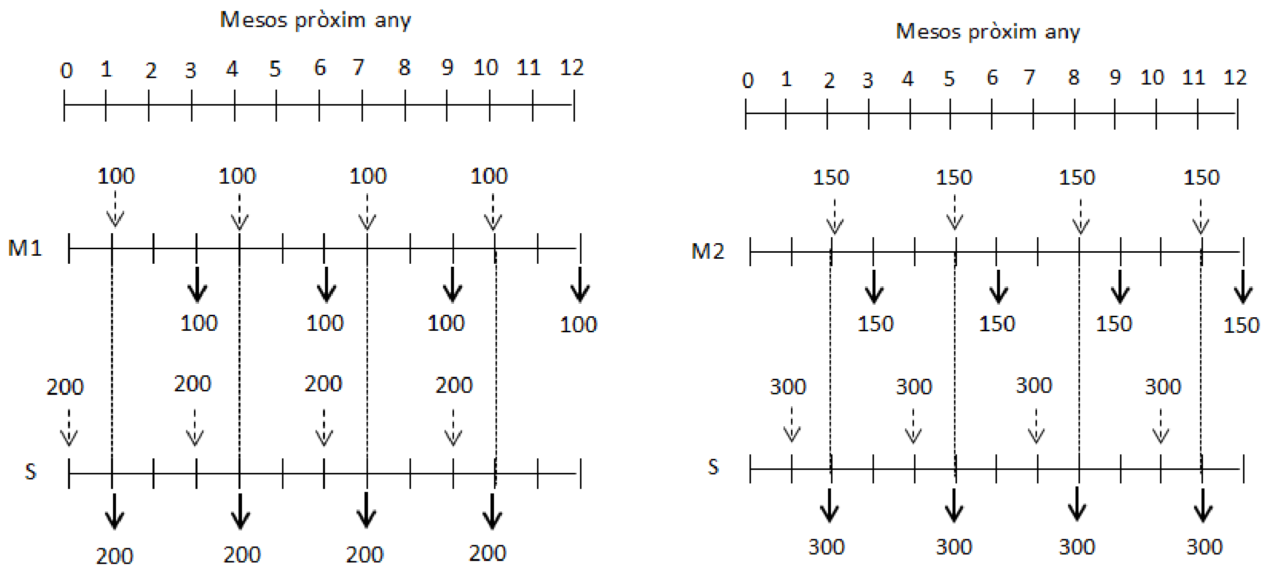
Per estudiar els models deterministes dinàmics ens centrarem en l'exemple de model més utilitzat i conegut en aquest sector, la planificació dels requeriments de materials (coneguda com MRP de l'anglès *Materials Requirement Planning*). Per entendre correctament el concepte de MRP, anem a introduir-lo mitjançant un exemple.

Suposem que la demanda trimestral, durant el pròxim any, de dos models M1 i M2 d'un producte, és de 100 i 150 unitats, respectivament, i suposem que les entregues per lots trimestrals es realitzen a final de cada trimestre. A més, per produir una unitat de M1 i una de M2 fan falta dos unitats de l'acoblament S per a cada model. Per últim, suposem que el temps d'entrega de la producció és de dos mesos per al model M1 i d'un mes per a M2, tenint en compte que el temps d'entrega de la producció de S és d'un mes.

La Figura 1.8 representa els calendaris de producció per als models M1 i M2 d'un cert producte, respectivament. Com podem observar en els diagrames de M1 i M2, la demanda trimestral dels dos models (indicada amb les fletxes en negreta) es produeix al final dels mesos 3, 6, 9 i 12, corresponents a les entregues al final de cada trimestre. A més, com que els mesos d'entrega de M1 i M2 són de dos i un mesos, respectivament, les fletxes discontinues ens indiquen els inicis proposats pel MRP per a cada lot de producció. Per a iniciar a temps la producció dels dos models M1 i M2, l'entrega de l'acoblament S ha de coincidir amb les fletxes discontinues dels dos models, és a dir, l'entrega de la matèria prima S arriba en l'instant just en que s'inicia la producció dels models M1 i M2 d'un cert producte. En els diagrames de S, aquesta entrega dels acoblaments s'indica amb les fletxes en negreta on, a banda d'indicar l'instant en que la matèria prima està completament produïda, s'indica la quantitat d'acoblament necessari per produir una unitat de M1 i M2 (en el model M1 es necessiten 200 unitats de S per satisfer la demanda de 100 unitats de M1 i en el model M2 es necessiten 300 unitats de S per satisfer la demanda de 150 unitats de M2). Com que es necessita un mes d'entrega per als acoblaments S, en el diagrama de S indiquem en fletxes discontinues l'inici programat de la producció de la matèria prima per a què arribe a temps a l'inici de la producció dels productes. Amb aquestes propostes del MRP de producció, observem com els diagrames M1, M2 i S estan connectats entre sí per la línia discontinua que ens indica que els temps d'entrega de S i inici de producció de M1 o M2 coincideixen i que, per tant, es pot dur a terme la producció dels dos models per satisfer a temps les demandes trimestrals del producte. Per últim, a partir d'aquests dos programes de producció, en la Figura 1.9 observem l'estratègia combinada de producció dels acoblaments S per satisfer la demanda conjunta dels dos models M1 i M2 d'un cert producte.

Amb aquest exemple s'il·lustra clarament l'essència del procés de MRP per a propostes de producció interna de les empreses. La demanda *variable*, però coneguda, de la matèria prima S és la característica que marca la necessitat de formular models en els quals la demanda de les quantitats de comandes ha de ser dinàmica. Així, els models d'inventaris de MRP determinen, donada una demanda coneguda i variable de S, la quantitat que s'ha de produir al inici de cada mes per a reduir al màxim els costos totals de producció i inventari.

En aquesta secció estudiarem aquests models de propostes de producció amb MRP diferenciant dos casos genèrics: la producció amb costos de preparació i sense preparació. Encara que aparentment sembla que aquest factor no pot condicionar en gran manera el model final de MRP, veurem com aquest detall en la preparació de la producció determinarà la complexitat del model de MRP per a la planificació de la producció interna d'una empresa.



(a) Producció per a M1 **(b)** Producció per a M2

Figura 1.8: Exemple de la demanda dinàmica dels models M1 i M2 de un producte generada per MRP

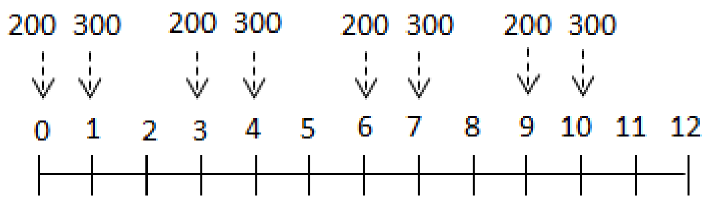


Figura 1.9: Necessitats de S combinades per als models anteriors M1 i M2 d'un cert producte generades per MRP

1.1.2.1. MRP sense costos de preparació

En aquest model considerem un planificació de la producció de n períodes iguals. Cadascun d'aquests períodes té una capacitat de producció limitada que pot incloure diferents nivells de producció, per exemple, temps normal de producció i temps extra. En certs moments, un període pot produir més quantitat que la que la demanda immediata del producte requereix, pel que el sobrant s'aparta per a períodes futurs. Aquest fet produirà un cost extra de manteniment que s'intentarà evitar sempre i quan siga possible. Notem que en aquests tipus de producció no necessitem fabricar la matèria prima ni es consideren temps de preparació de màquines.

El model de MRP sense costos de preparació necessita les següents suposicions:

1.- No s'incorren costos de preparació en ningun període.

2.- No es permet quantitat faltant de ningun producte.

3.- La funció del cost unitari de producció en qualsevol període és constant o té costos marginals creixents, és a dir, sempre serà una funció convexa.

4.- El cost unitari d'emmagatzematge en qualsevol període és constant.

La segona restricció obliga a que, si la producció i l'inventari del període actual no satisfan la demanda d'aquest període, aleshores no es pot completar la demanda dels períodes futurs. Aquest supòsit requerix que la quantitat acumulada de producció durant els períodes $1, 2, \ldots, i$ siga, al menys, igual a demanda acumulada durant aquests mateixos períodes.

En la Figura 1.10 hem representat la funció del cost unitari de producció amb màrgens creixents, on podem observar com la producció a temps normal i temps extra correspon a dos nivells diferents on els costos unitaris de producció durant el temps extra es major que durant la producció a temps normal. Aquesta funció ens insinua l'equilibri que s'ha de buscar entre la quantitat produïda i els costos associats a aquesta, de forma que la producció òptima es situaria entre el final del Nivell II i el Nivell III.

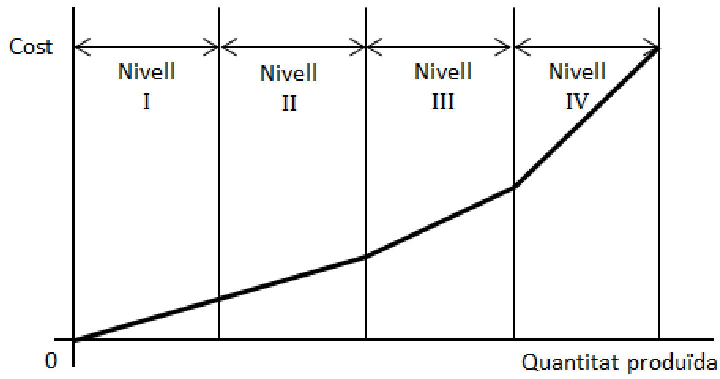


Figura 1.10: Funció convexa del cost unitari de producció

El model de MRP sense costos de preparació es pot formular com un problema de models de transport de n períodes amb kn fonts (fàbriques) i n destins, on k és la quantitat de nivells de producció per període (en el cas que hem exposat, si cada període utilitza un temps normal de producció i un temps extra, tindríem que k=2). Aquests models de transport són un cas especial de programació lineal, on l'objectiu és determinar el programa de transport que minimitza els costos tots de transport i que, al mateix temps, satisfaça els límits d'ofertes i demandes. En el nostre cas, la capacitat de producció de cadascuna de les kn fonts de nivells de producció proporcionen les quantitats d'oferta i les quantitats de demanda es considerem com la demanda en cada període. El cost unitari de "transport" d'una font a una destinació serà la suma dels costos de producció i emmagatzematge per unitat. Amb aquests símils al model de transport, la solució del problema determinarà les quantitats de producció amb cost mínim en cada nivell de producció.

En aquest treball no entrarem en obtenir la solució òptima del model de MRP sense costos de preparació, ja que hauríem d'aplicar tècniques de resolució de programació lineal que no segueixen el fil del treball (i que s'han vist en assignatures del màster). Alternativament, aquest model de transport es pot resoldre mitjançant els algoritmes de resolució que presentarem en el següent cas de models de MPR amb costos de preparació.

1.1.2.2. MRP amb costos de preparació

En el cas anterior hem estudiat com planificar propostes de producció sense tenir en compte costos addicionals de producció. Aquests costos poden vindre associats per diferents circumstàncies, com pot ser el cost de preparació per inicialitzar un lot de producció. Aquestos costos de producció no són un cas aïllat en el ritme diari de producció interna de les empreses, ja que segons els tipus de producte que produeixen poden necessitar configuracions diferents per les màquines o manteniments especials per condicionar les línies de producció.

En aquest tipus de model de MRP considerarem que cada volta que s'inicia un lot de producció s'incorre en costos de preparació. A més, com en el cas anterior, no es permetrà que hi haja quantitats faltants de productes. Amb aquestes condicions, definim els paràmetres del model per a un cert període i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Siguen

$$
\begin{aligned}
z_i &= \text{quantitat de la comanda en el període i.} \\
D_i &= \text{demanda per al període i.} \\
x_i &= \text{quantitat d'estoc a l'inici del període i.} \\
K_i &= \text{Cost de preparació en el període i.} \\
h_i &= \text{Cost unitari d'emmagatzematge d'inventari del període i al període i+1.}
\end{aligned}
$$

Definim la funció de costos de producció per al període i de la forma:

$$
C_i(z_i) = \begin{cases} 0 & z_i = 0 \\ K_i + c_i(z_i) & z_i > 0 \end{cases}
$$

on $c_i(z_i)$ és la funció del cost marginal de producció per a z_i. En la Figura 1.11 describim la situació de l'inventari per a cada variable en cadascun dels períodes $i = 1, 2, \ldots, n$.

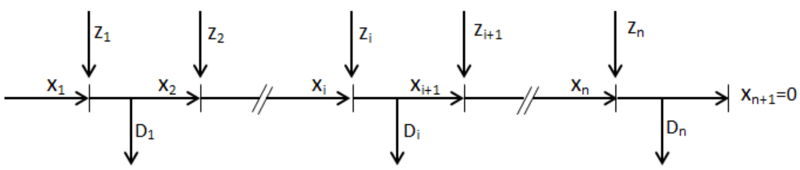


Figura 1.11: Elements del model dinàmic d'inventari MRP amb costos de preparació

Amb la definició d'aquestes variables i de la funció de costos totals, a continuació presentarem dos mètodes de solució per al model de MRP amb costos de preparació. En primer lloc, presentarem un algoritme general de programació dinàmica i la seua alternativa quan tinguen costos marginals. Una volta vistos aquests algoritmes, estudiarem un algoritme heurístic, l'heurística de Silver-Meal.

1.1.2.2.1. Algoritme de programació dinàmica general

Tenint present l'absència de faltants, el mètode d'inventari es basa en minimitzar la suma dels costos de producció i emmagatzematge per als n períodes. Per simplificar, suposem que el cost d'emmagatzematge per al període i es basa en l'inventari de final de període, on aquest inventari final es defineix de la forma:

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i$$

En l'equació recursiva anterior, l'inventari al final del període, x_{i+1}, representa *l'estat en l'etapa* i (o del període i). Com es veu en la Figura 1.11, aquest inventari al final del període és de la forma

$$0 \leq x_{i+1} \leq D_{i+1} + \cdots + D_n$$

A partir d'aquesta desigualtat notem que, en casos extrems, l'inventari sobrant de x_{i+1} satisfarà la demanda per als períodes restants.

L'algoritme de programació dinàmica es basa en trobar el cost mínim d'inventari, $f_i(x_{i+1})$, per als períodes $1, 2, \ldots, i$ a partir de l'inventari de final de període x_{i+1} i de l'equació recursiva següent:

$$\begin{aligned} f_1(x_2) &= \min_{0 \leq z_1 \leq D_1 + x_2} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\} \\ f_i(x_{i+1}) &= \min_{0 \leq z_i \leq D_i + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, \; i = 2, 3, \ldots, n \end{aligned}$$

Les quantitats òptimes de comanda, z_i^*, correspondran als valors de z_i corresponents als valors x_i obtinguts a partir del valor x_{i+1} i de l'equació recurrent d'inventari definida anteriorment.

Per aclarir conceptes, presentem a continuació un exemple molt simple de minimització de costos d'inventari on s'aplica l'algoritme de programació dinàmica que acabem de presentar.

Exemple 1. *La següent taula mostra les dades d'un cas d'inventari de tres períodes.*

Període i	Demanda D_i (unitats)	Cost de preparació K_i (€)	Cost d'emmagatzematge h_i (€)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

La demanda es presenta en unitats discretes i l'inventari inicial és $x_1 = 1$ unitat. El cost unitari de producció és de 10 € per a les 3 primeres unitats i de 20 € per cada unitat addicional, és a dir,

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10 z_i & 0 \leq z_i \leq 3 \\ 30 + 20(z_i - 3) & z_i \geq 4 \end{cases}$$

Amb aquestes dades i a partir dels càlculs que hem vist en l'algoritme d'inventaris anterior, anem a determinar la política òptima d'inventari:

Període 1: $D_1 = 3 - 1 = 2$, $0 \leq x_2 \leq 2 + 4 = 6$

		$C_1(z_1) + h_1x_2$							Solució òptima	
		$z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
x_2	h_1x_2	$C_1(z_1)=23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Com que l'inventari inicial és $x_1 = 1$ unitat, la demanda per al primer període és $D_1 = 3 - 1 = 2$. A més, el valor mínim de $z_1 = D_1 - x_1 = 3 - 2 = 1$. Detallem el càlcul per a z_1, la resta es calcula de forma anàloga:

Com que $0 \leq z_1 = 2 \leq 3$, el cost marginal unitari de producció és $c_1(z_1) = 10z_1 = 20$, i, a partir de la funció del cost de producció de l'algoritme, obtenim:

$$C_1(z_1) = K_1 + c_1(z_1) = 3 + 20 = 23$$

així, el mínim cost per a l'inventari en el període 1 en x_2 és:

$$f_1(x_2) = \text{mín}\{23\} = 23$$

i el valor z_1^* que minimitza el cost és $z_1^* = 2$

Període 2: $D_2 = 2$, $0 \leq x_3 \leq 4$

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$							Solució òptima	
		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_3	h_2x_3	$C_2(z_2)=0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + 55 = 55	17 + 34 = 51	27 + 23 = 50					50	2
1	3	3 + 76 =79	20 + 55 = 75	30 + 34 = 64	40 + 23 = 63				63	3
2	6	6 + 97 = 103	23 + 76 = 99	33 + 55 = 88	43 + 34 = 77	63 + 23 = 86			77	3
3	9	9 + 118 = 127	26 + 97 = 123	36 + 76 = 112	46 + 55 = 101	66 + 34 = 100	86 + 23 = 109		100	4
4	12	12 + 139 = 151	29 + 118 = 147	39 + 97 = 136	49 + 76 = 125	69 + 55 = 124	89 + 34 = 123	109 + 23 = 132	123	5

Per a $z_2 = 6$, el mínim cost per a l'inventari en el període 2 és:

$$f_2(x_3) = \text{mín}\{151, 147, 136, 125, 124, 123, 132\} = 123$$

i el valor z_2^* corresponent al cost mínim$f_2(x_3) = 123$ és $z_2^* = 5$.

Període 3: $D_3 = 4$, $x_4 = 0$

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$					Solució òptima	
		$z_3 = 0$	1	2	3	4		
x_4	h_3x_4	$C_3(z_3)=0$	16	26	36	46	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0 + 123 = 124	16 + 100 = 116	26 + 77 = 103	36 + 63 = 99	56 + 50 = 106	99	3

Tenint en compte la formula recurrent per a l'inventari final

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i$$

la solució òptima de producció per a cada període és la següent:

Període 3: $x_4 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{z_3^* = 3}$

Període 2: $x_3 = x_4 + D_3 - z_3 = 0 + 4 - 3 = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{z_2^* = 3}$

Període 1: $x_2 = x_3 + D_2 - z_2 = 1 + 2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{z_1^* = 2}$

Amb un cost total de producció igual $f_3(x_4) = 99$*€.*

Per tant, la política òptima d'inventari per a aquest problema és

"Produir 2 unitats durant el període 1 i 3 unitats durants els períodes 2 i 3 amb un cost de producció total de 99 €."

L'algoritme que acabem d'exposar ens proporciona la solució òptima al problema de determinar la quantitat necessària a produir per minimitzar costos, independentment de quina siga la funció de costos. No obstant, la naturalesa de l'algoritme obliga a que l'estat de l'inventari x_i i les quantitats de comanda z_i, en un cert període i, augmenten amb increments constants de una unitat. Per tant, per a quantitats elevades de comanda les taules abans representades podrien assolir una grandària extremadament gran, el que computacionalment seria massa pesat. Per evitar aquests inconvenients, a continuació mostrem una variant de l'algoritme anterior de programació dinàmica general.

Algoritme de programació dinàmica amb costos marginals constants o decreixents

L'algoritme de programació dinàmica amb costos marginals permet reduir el volum dels càlculs de l'algoritme de programació general, de forma que optimitza la solució per a problemes de producció amb quantitats elevades d'inventari.

En concret, en aquest algoritme es suposa que els costos unitaris de producció i d'emmagatzematge són funcions *còncaves* de la quantitat de producció i del nivell d'inventari, respectivament. Aquest cas presentat es sol donar quan la funció de costos unitaris és constant o quan es permeten descomptes per quantitats. Sota aquestes condicions, es pot provar que

1.- Donat un inventari inicial a cero ($x_1 = 0$), és òptim satisfer la demanda en qualsevol període i, tant si es produeix novament com si s'emmagatzema inventari per després repartir-lo, però mai amb les dues polítiques alhora. Amb aquesta condició, es donarà que $z_i x_i = 0$ per al període i on es satisfà la demanda. Per als casos on l'inventari és no nul ($x_1 > 0$), es poden anul·lar la quantitat de la demanda de les comandes, dels períodes successius, fins que s'esgote l'inventari.

2.- Si la quantitat òptima de producció per al període i és z_i, aquesta quantitat ha de ser cero o be satisfer la demanda d'un o més períodes posteriors.

Amb aquestes tècniques de resolució de l'algoritme de programació dinàmica, passem a veure els algoritmes heurístics del model de MRP amb costos de preparació. D'entre els models heurístic, a continuació estudiem el mètode heurístic de Silver-Meal.

1.1.2.2.2. Heurística de Silver-Meal

L'heurística de Silver-Meal només és vàlida per aquells models d'inventari on els costos unitaris de producció siguen constants i idèntics per a tots el períodes de la correguda de producció. Per aquest motiu, en el següent algoritme sols intervenen els costos de preparació i emmagatzematge.

L'objectiu de l'algoritme heurístic és minimitzar els costos associats a la preparació i emmagatzematge per períodes, identificant les demandes dels successius períodes futurs que es poden satisfer amb la demanda del període actual. Presentem a continuació l'algoritme de l'heurística de Silver-Meal.

Suposem que en el període i es produeix suficient inventari per satisfer la demanda dels períodes $i, i+1, \ldots, t$ amb $i \leq t$ i definim els costo associats de preparació i emmagatzematge per als períodes de i a t, TC(i,t), com:

$$TC(i,t) = \begin{cases} K_i & t = i \\ K_i + h_i D_{i+1} + (h_i + h_{i+1}) D_{i+2} + \cdots + (h_i + h_{i+1} + \cdots + h_{t-1}) D_t & t > i \end{cases}$$

De forma que la funció TC(i,t) sobté recursivament com:

$$\begin{aligned} TC(i,i) &= K_i, \quad t = i \\ TC(i,t) &= TC(i,t-1) + (h_i + h_{i+1} + \cdots + h_{t-1}) D_t, \quad t = i+1, i+2, \ldots, n \end{aligned}$$

A partir del cost TC(i,t), definim el cost associat per període, $TCU(i,t)$ (de l'anglés *total cost per unit time*) de la forma

$$TCU(i,t) = \frac{TC(i,t)}{t-i+1}$$

Aleshores, donat un període actual i, l'heurística de Silver-Meal determina el valor del període final t^* que minimitza a TCU(i,t). A partir del període òptim t^*, es determina la quantitat òptima a produir com $q^* = D_i + D_{i+1} + \cdots + D_t^*$. Mostrem a continuació l'algoritme:

PAS 0 $i = 1$

PAS 1 Determinar el valor t^* mínim local que satisfaça les dues condicions següents:

$$\begin{aligned} TCU(i, t^* - 1) \geq TCU(i, t^*) \\ TCU(i, t^* + 1) \geq TCU(i, t^*) \end{aligned}$$

Amb el t^* determinat, la quantitat òptima a produir en el període i per als períodes $i, i+1, \ldots, t^*$ és $q^* = D_i + D_{i+1} + \cdots + D_t^*$.

PAS 3 Igualar $i = t^* + 1$. Aleshores:

Si $i > n$, s'ha cobert tota la planificació de la producció per als n períodes. FI ALGORITME.
En cas contrari, repetir del PAS 1 al PAS 3.

Presentem a continuació un exemple simple de minimització de costos on s'aplica l'heurística de Silver-Meal.

Exemple 2. *Determinar la política òptima d'inventari per al següent cas de demanda:*

Període i	Demanda D_i (unitats)	Cost de preparació K_i (€)	Cost d'emmagatzematge h_i (€)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

El cost unitari de producció és 2 € per a tots els períodes.

Mostrem a continuació els càlculs per a cada iteració.

Siga $i = 1$.

Iteració 1: i = 1, K_1 = 20 €

Període t	D_t	TC(1,t)	TCU(1,t)
1	10	20 €	20/1 = 20 €
2	15	20 + 1 x 15 = 35 €	35/2 = 17.5 €
3	7	35 + (1 + 1) x 7 = 49 €	49/3 = 16.33 €
4	20	49 + (1 + 1 + 1) x 20 = 109 €	109/4 = 27.25€

La funció TC(1,t) es calcula de forma recursiva respecta a t. Per exemple, en el segon cas:

$$TC(1,2) = TC(1,1) + h_1 D_2 = 20 + 1 \cdot 15 = 35€$$

Observem en la taula com el mínim local es dona quan $t^* = 3$. *Per tant, s'haurà de produir* $q_1^* = 10 + 15 + 7 = 32$ *unitats en el període 1 per als períodes 1,2 i 3 amb un cost total associat de* 94 €.

Igualem $i = t^* + 1 = 4$.

Iteració 2: i = 4, K_4 = 18 €

Període t	D_t	TC(4,t)	TCU(4,t)
4	20	18 €	18/1 = 18 €
5	13	18 + 3 x 13 = 57 €	57/2 = 28.5 €

Els càlculs indiquen que $t^* = 4$, *pel que en el període 4 s'ha de produir* $q_4^* = 20$ *unitats per a aquest mateix període amb un cos total associat de* 18 €.

Igualem $i = t^* + 1 = 5$.

Iteració 3: i = 5, K_5 = 5 €

Període t	D_t	TC(5,t)	TCU(5,t)
5	13	5 €	5/1 = 5 €
6	25	5 + 1 x 25 = 30 €	30/2 = 15 €

El mínim es dona en $t^* = 5$*, pel que es requerix produir* $q_5^* = 13$ *unitats en el període 5 per al període 5 amb un cost associat de* 5 €.

Igualem $i = t^* + 1 = 6$*. Però com* $i = 6 = n$ *és l'últim període de la planificació, es detenim i de la taula obtenim que s'ha de produir* $q_6^* = 25$ *unitats en el període 6 per al mateix període. Com estem en la iteració i=6 i el període és t=6, el cost associat serà de* $TC(6,6) = K_6 = 50$ €.

Per tant, la política òptima d'inventari per a aquest problema és com es mostra en la taula següent:

Període	Unitats Produïdes	Cost total (€)
1	32	49 €
2	0	0 €
3	0	0 €
4	20	18 €
5	13	5 €
6	25	50 €
TOTAL	90 unitats	122 €

Al llarg del treball hem anat introduint diferents mètodes teòrics de gestió d'inventaris, començant pel models bàsics d'EOQ que exigien una rigidesa a l'hora de fer les suposicions i relaxant mètode a mètode aquestes suposicions fins arribar als mètodes d'EOQ adaptats a la gestió de la producció interna de les empreses. Hem vist que hi ha casos en que no és possible aplicar mètodes d'EOQ i com a alternativa hem presentat els mètodes de MRP per a la gestió de la producció.

Arribats a aquest punt, és el moment de lligar els models presentats en aquest treball amb les taxes realitzades durant l'estada de pràctiques externes en l'empresa Opentix S.L. En el següent capítol, veurem un cas pràctic de com funciona el mètode de MRP per a propostes de producció implementat amb el software de gestió empresarial utilitzat en Opentix, anomenat Openbravo.

CAPÍTOL 2.

Cas pràctic: MRP amb Openbravo

Inicialment, aquesta part del treball s'havia plantejat per presentar el mòdul de MRP per a propostes de compra implementat per al projecte d'Espacio Orgánico, una empresa del sector de l'alimentació, restauració i oci de Madrid que està començant a treballar amb Openbravo. No obstant, degut a exigències del client, aquest mòdul encara s'està implementat per adaptar el funcionament estàndard d'Openbravo de propostes de compra a la forma de treball d'Espacio Orgánico.

Com que no té sentit fer una simulació de propostes de compra amb dades no reals, ens anem a centrar en la implementació del mòdul de MRP per a la part de gestió d'inventaris en la producció interna de l'empresa ITM. Industrias Tomás Morcillo, ITM, és una empresa valenciana especialitzada en la fabricació per injecció de peces de plàstic i disseny de productes que treballa amb el software de gestió empresarial Openbravo. Degut a la producció interna, ITM utilitza el mòdul de MRP per controlar l'inventari de la matèria prima i de les noves peces i per planificar la producció d'aquests productes.

Abans de començar amb la simulació del procés de producció, és necessari introduir el funcionament de Openbravo per a llançar propostes de producció i així entendre millor el cas pràctic que exposarem a continuació. En la Figura 2.1 es descriuen breument les fases pel procés de producció. Com podem observar, abans de llançar qualsevol ordre de producció, és necessari realitzar configuracions inicials per indicar al programa el tipus de procés que es llaçarà, el tipus de màquines que s'utilitzaran, etc. Una volta fetes aquestes configuracions, ja es pot crear i executar l'ordre de producció.

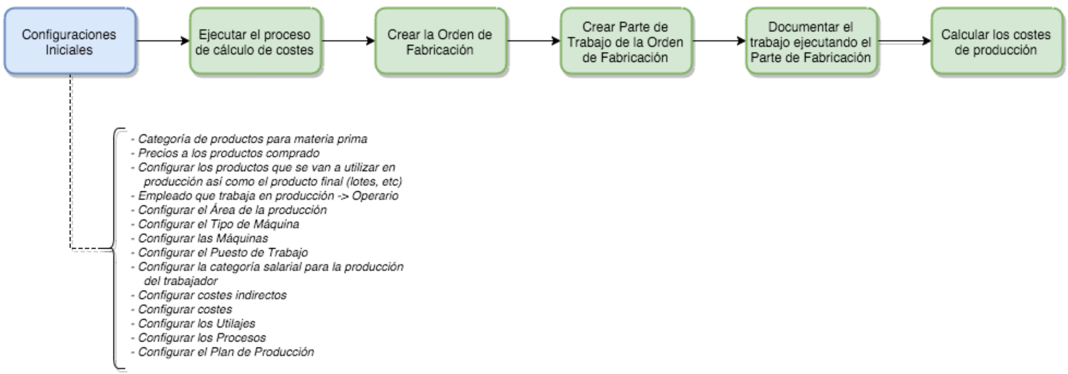


Figura 2.1: Fases del procés de producció mitjançant el software Openbravo

Com hem dit, ITM és una empresa dedicada a la producció de peces de plàstic per injecció. En aquesta simulació veurem el procés complet per produir suports de seients de carros de la compra, així, començarem amb la configuració del procés per definir els processos i màquines, d'entre altres, que intervendran i seguidament explicarem pas a pas els processos per llançar l'ordre de fabricació.

2.1. Configuració del procés de producció

Abans de començar a gestionar el procés de producció, es necessiten fer certes configuracions per indicar al programa el tipus de procés que anem a llançar, el tipus de màquines que s'utilitzaran, indicar les ferramentes que s'utilitzaran, etc. En la Figura 2.2 mostrem les diferents finestres disponibles en Openbravo per realitzar aquestes configuracions del procés de producció. A continuació, detallarem cadascuna.

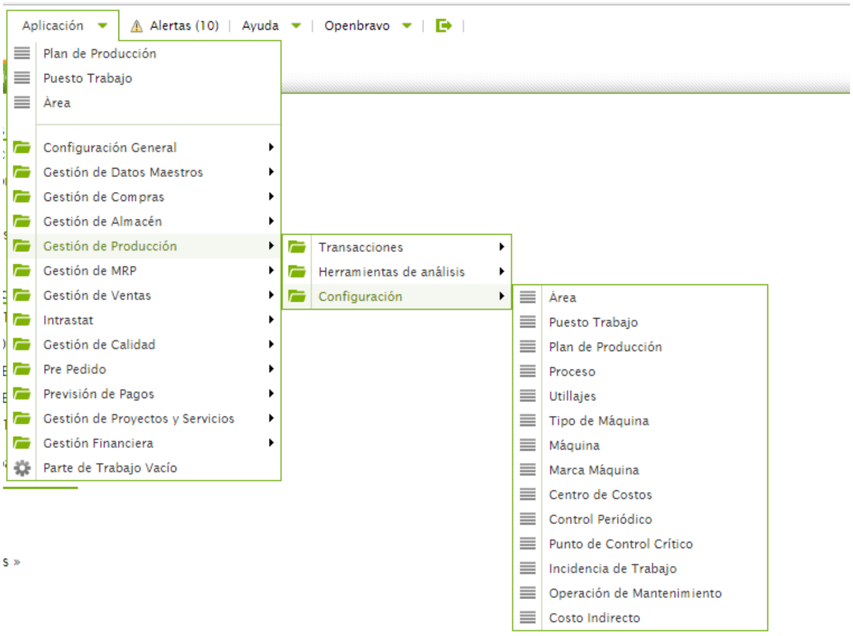


Figura 2.2: Finestres de configuracions del procés de producció disponibles en Openbravo

Configuració de l'àrea de producció

Per concretar la ubicació física del àrea de fabricació on s'està realitzant l'activitat de producció, en la següent finestra indiquem les diferents seccions o àrees de producció que disposa l'empresa. En el cas d'ITM, les activitats transcorren totes en la planta principal. Com que els processos es realitzen mitjançant la injecció, en la Figura 2.3 mostrem l'àrea creada.

Figura 2.3: Configuració de l'àrea de treball en el procés de producció

Configuració del tipus de màquines

Segons el producte que es vol fabricar, es necessiten un tipus de màquines en concret. En les Figures 2.4 i 2.5 mostrem com podem configurar aquests tipus de màquines segons el procés que volem llança. En el nostre cas, el tipus de màquina requerida per al procés serà la màquina de injecció de plàstic. A més, com que aquestes màquines requerixen un manteniment tant per conservar l'estat òptim del procés com per revisar la neteja d'aquesta, en aquesta mateixa finestra indicarem el tipus de manteniment que requereixen aquests tipus de màquines i la periodicitat requerida per realitzar aquest manteniment.

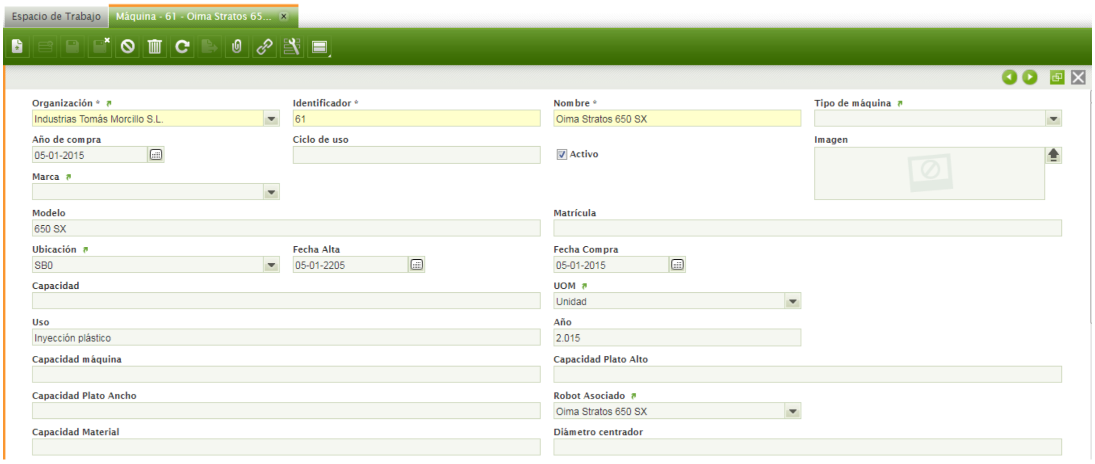
Figura 2.4: Configuració de tipus de màquines i del seu manteniment en el procés de producció

(a) Període de neteja (b) Període de revisió

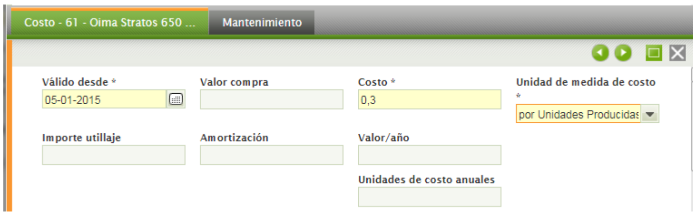
Figura 2.5: Configuració del manteniment de les màquines en el procés de producció

Configuració de les màquines

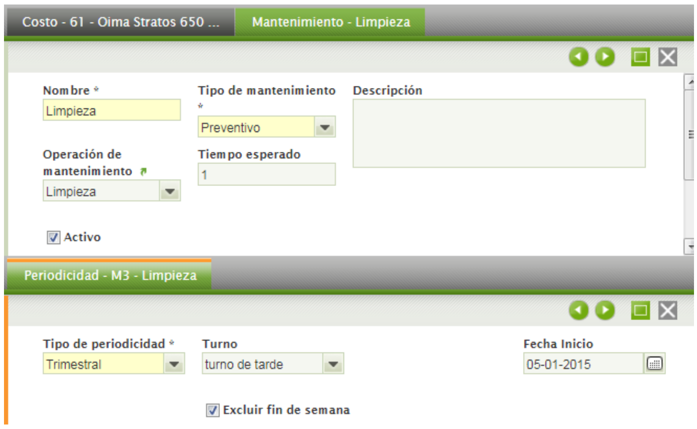
Una volta definit el tipus de màquina que intervé en el procés de producció, es defineix la màquina que fabricarà el nou producte. En el nostre cas, la màquina que intervindrà en el procés de fabricació és la OIMA Stratos 65o. Com podem veure en la Figura 2.6, en la finestra de la configuració de la màquina tenim tota la informació sobre les característiques d'aquesta. En les dos pestanyes inferiors, Cost i Manteniment, indicarem els costos associats a utilitzar la màquina i el tipus de manteniment que requereix aquesta. Com podem observar en la Figura 2.6, el cost de producció de la màquina és de 0.3 € per unitat produïda. Pel que fa al manteniment de la màquina, observem com tan sols necessita manteniment de neteja trimestralment.



(a) Propietats de la màquina



(b) Cost associat



(c) Manteniment de la màquina

Figura 2.6: Configuració de la màquina: propietats i cost associat

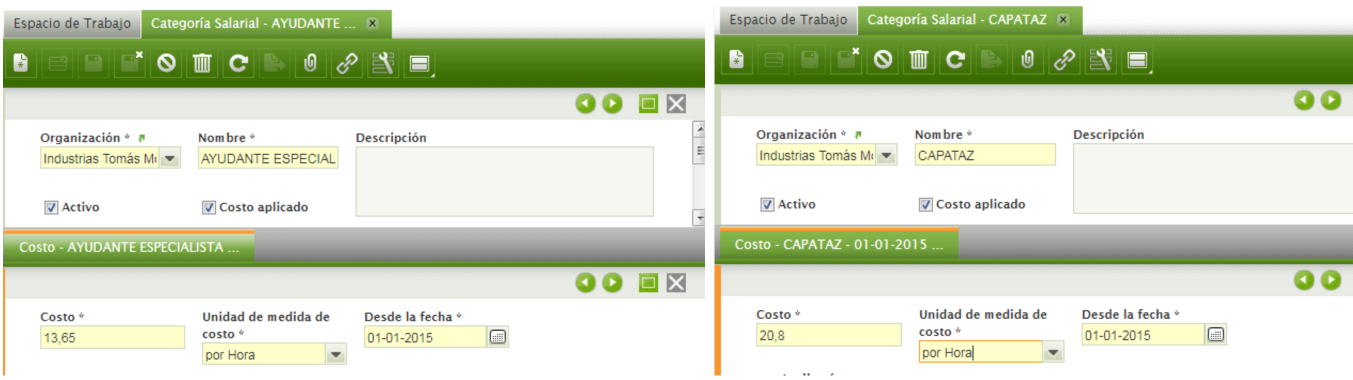
Configuració del lloc de treball

En aquesta finestra creem les màquines que s'utilitzen en un centre de treball. En el cas de la producció dels suports de seients, el centre de treball tan sols consta de la màquina que acabem de crear. Així, en la Figura 2.7 mostrem aquest centre de treball i la màquina associada.

Figura 2.7: Configuració del lloc de treball en el procés de producció

Configuració de la categoria salarial

Tot centre de producció necessita de persones físiques que controlen i regulen la producció dels materials. Per indicar al programa quin tipus d'ajuda necessita el procés i el salari associat a aquesta persona, en la finestra de Categoria Salarial crearem tantes entrades com categories de treballadors tinguem. Com observem en la Figura 2.8, en el cas d'ITM, per al procés de producció es necessiten tan sols dos tipus de treballadors: ajudants especialitzats i capatàs.



(a) Categoria salarial per als ajudants especialitzats **(b)** Categoria salarial per al capatàs

Figura 2.8: Configuració de les categories salarials segons el tipus de treballador requerit per al procés de producció

Configuració del centre de costos

Totes les operacions que es realitzen durant un procés de producció tenen un centre de costos definit i la quantitat de temps d'aquest centre de costos s'utilitza per determinar el cost total de la correguda de producció. Cada centre de costos compta amb els empleats que formen part del centre de costos definits, així com les màquines utilitzades en el centre de costos i els costos indirectes com l'electricitat. Basant-se en aquestes components, es defineixen centres de costos com mostrem en les Figures 2.9 i 2.10. En el nostre cas, per llançar el procés de producció dels suports de seients es necessita un capatàs per dirigir el procés i dos ajudants. En aquest cas, no s'indica els costos indirectes que poden intervindre en el procés.

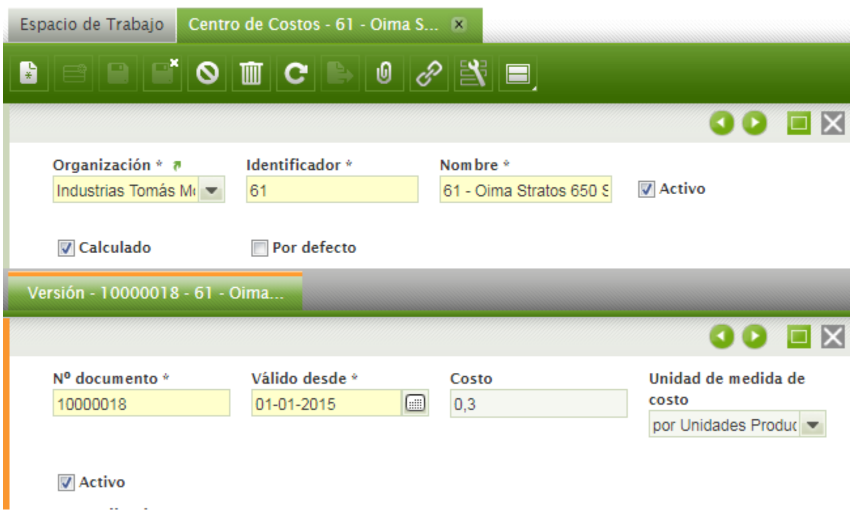
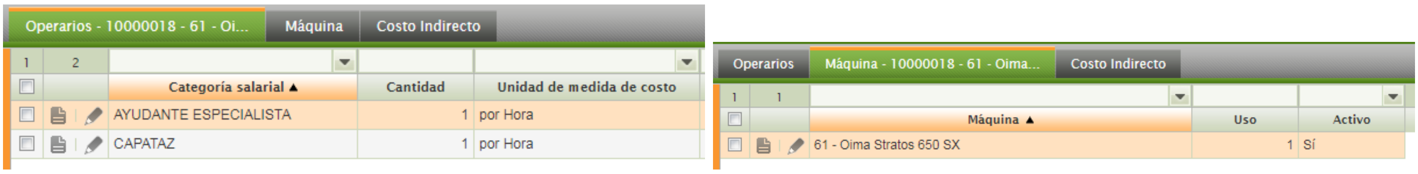


Figura 2.9: Configuració del centre de costos per al procés de producció



(a) Costos associats als operaris

(b) Costos associats a la màquina

Figura 2.10: Configuració del centre de costos per al procés de producció

Configuració de l'activitat de producció

Per llançar un plan de producció és necessari indicar les activitats o processos que es realitzaran durant la fabricació dels productes. Aquests processos es poden associar a un centre de costos o a un centre de treball. En el nostre cas, com podem veure en la Figura 2.11, hem relacionat l'activitat al centre de costos i de treball que hem creat anteriorment.

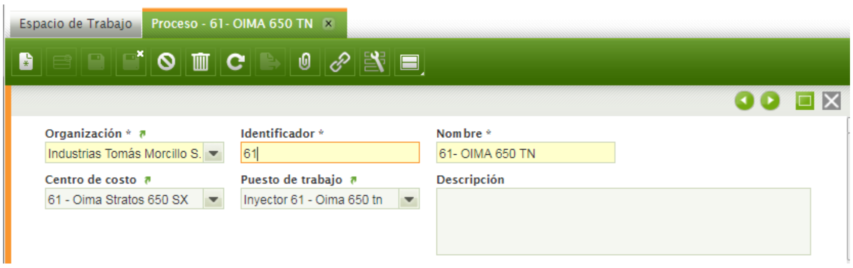


Figura 2.11: Configuració de l'activitat per al procés de producció

Configuració del pla de producció

Passem a l'última i més important configuració per al procés de producció. Tota gestió de producció ha de tenir un pla que determina els productes que es necessiten per fabricar el nou article així com el propi producte fabricat. A més, en aquest pla de producció també es concreten els passos que ha de seguir el procés de producció definit anteriorment per produir els nous productes. Per tant, aquest pla de producció recull tota la informació que es necessita per ordenar l'inici de la producció.

En la capçalera de la finestra (Figura 2.12) creem el pla de producció que volem llançar, en el nostre cas el pla es dirà com el producte que anem a crear: "SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS". En aquesta capçalera indicarem també el percentatge de variació que s'accepta a l'hora de produir (la desviació permesa respecte al 100 % de producció) i el motlle i versió del motlle que s'utilitza. Si marquem el check "Explotar fases" (com podem observar en la Figura 2.12), quan creem l'Ordre de fabricació es copiarà directament tota la informació de la finestra del pla de producció. Aquest check és molt útil quan els plans de producció requereixen moltes fases i productes.

En la pestanya inferior podem crear tantes versions del pla de producció com modificacions vulguem realitzar. Aquesta pestanya ens permet tenir diferents plans de producció segons intervals de temps i executar en cada moment el que més ens interessa. Com podem veure en la Figura 2.12, en la versió que hem creat el camp "Temps estimat" és cero. Aquest valor és cero per defecte i no es pot modificar fins que es creen les seqüències del pla de producció, on s'indica el temps estimat de cada seqüència. Quan guardem les seqüencies, automàticament el temps estimat de la versió s'actualitza amb la suma de tots els temps de les seqüències.

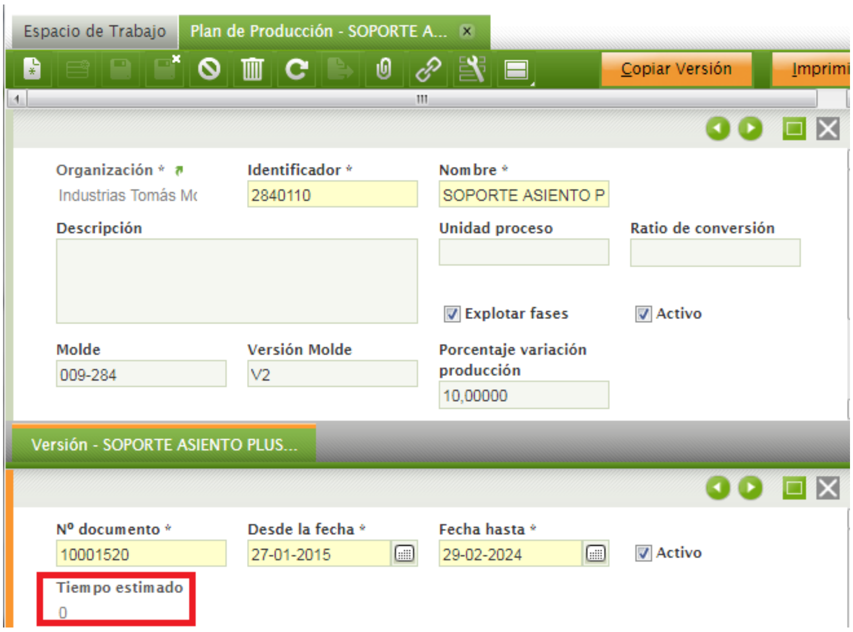


Figura 2.12: Configuració del pla de producció

En el nostre cas, el producte "SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS" tan sols requereix d'una seqüència o fase per fabricar-se. Com mostrem en la Figura 2.13, la fase d'injecció de la peça té previst un temps de 68,6 hores i està relacionada al procés que hem creat anteriorment. A més, aquest tipus de procés no requereix costos de preparació. Com podem observar en la Figura 2.13, una volta guardada la seqüència, en la pestanya de la versió s'ha actualitzat el temps total estimat del pla de producció.

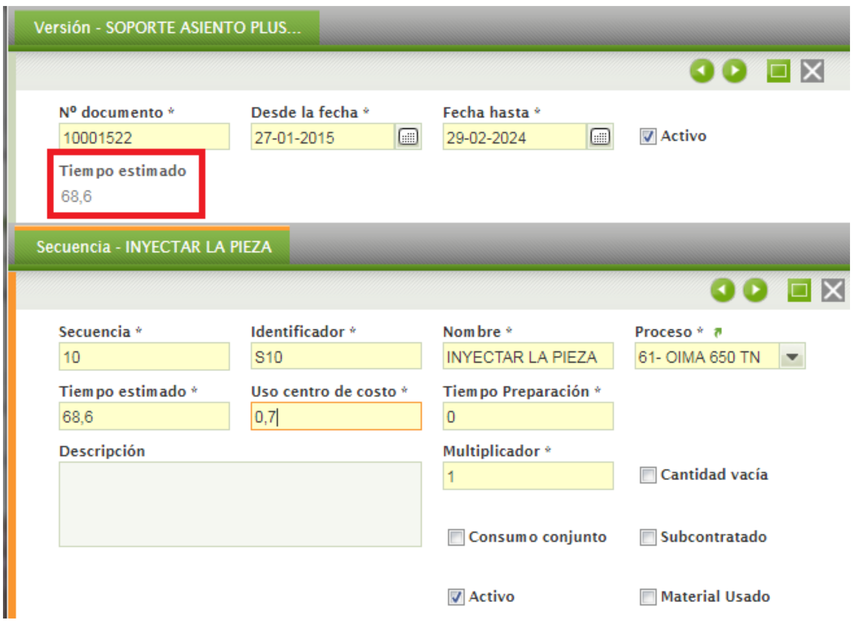


Figura 2.13: Configuració del pla de producció: definició de les seqüències necessàries

Després de definir les seqüències del pla de producció, hem d'indicar al programa quins productes s'utilitzaran com a matèria prima i quins es crearan nous. En la pestanya Productes creem tantes línies com productes intervenen en el procés. Aquells productes que siguen matèries primes, és a dir que s'utilitzen per a produir i que per tant resten estoc a l'inventari, pertanyen al tipus de producte P-. En canvi, el producte o productes que es creen nous pertanyeran al grup P+. Així, en la Figura 2.14 observem tots els productes que intervenen en el procés de fabricació, tant les matèries primes com el nou producte creat, i les quantitats d'estoc que es gasten per crear una unitat del producte nou.

Productos | Operarios | Màquinas | Costo indirecto

Línea	Producto ▲	Tipo de produc...	Cantidad	Unidad
10	C029 - COLORANTE GRIS OSC "SIN ANTIES	P-	0,02151	Kilogramo
20	ENVCA02 - CAJA CARTON 625X520X400 Nº2	P-	0,05000	Unidad
30	M006 - PP COPOLIMERO NATURAL	P-	0,72500	Unidad
40	SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS	P+	1,00000	Unidad

Figura 2.14: Configuració del pla de producció: definició dels productes i les quantitats

Notem que totes aquestes configuracions tan sols s'han de fer una volta, ja que Openbravo disposa de mecanismes automàtics que copien processos de producció. Una volta realitzades totes les configuracions inicials necessàries, passem a simular el procés de producció per al producte "SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS".

2.2. Procés de producció

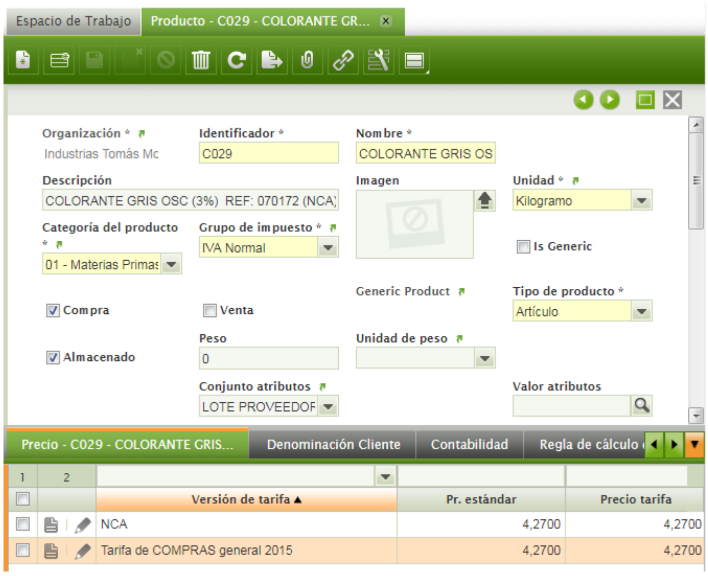
Una volta configurades totes les finestres d'Openbravo necessàries per llançar el procés de fabricació, passem a la part real de producció. Seguint el procés genèric d'Openbravo de la Figura 2.1, en primer lloc calcularem el cost estàndard del procés de fabricació i, amb aquests costos calculats, generarem l'ordre de fabricació del producte "SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS". Amb aquesta ordre, s'efectua per part dels operaris de l'empresa la producció física dels nous productes. Quan aquests productes estan completament fabricats, es passa a validar el part de fabricació, on es comprova si la producció s'ha efectuat correctament i la qualitat dels productes. Amb aquest part validat, únicament falta calcular els costos reals de la correguda de producció.

2.2.1. Càlcul de costos estàndards

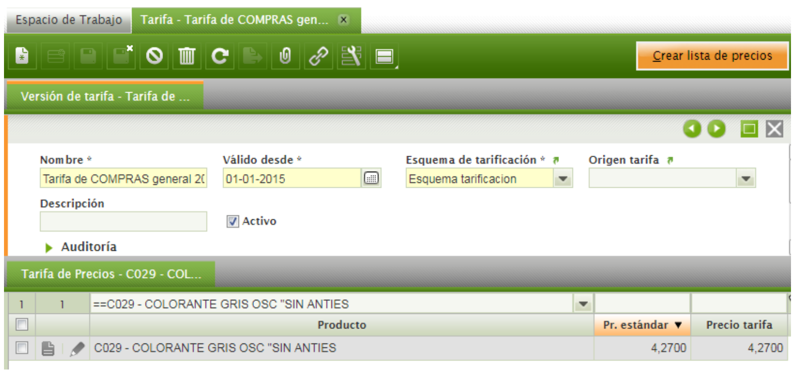
Una volta creat el pla de producció i haver indicat els costos de tots els processos, s'ha d'executar el càlcul dels costos estàndards per generar el cost teòric del procés. Aquest càlcul ens indicarà el cost aproximat de produir una unitat del producte SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS.

Tota la informació dels costos l'hem indicat en les següents finestres:

- En la finestra "Procés", hem associat la correguda de producció al centro de costos Oima Stratos 650 SX.
- En la finestra "Centre de Costos" hem proporcionat tota la informació sobre la quantitat de treballadors necessaris i l'us de la màquina que intervé en el procés.
- En la finestra "Pla de producció" hem definit les quantitats i costos de la matèria prima utilitzada en el procés de producció. Aquestos costos es calculen de la següent forma: per als productes de matèries primes (tipus de producte P-), s'agafa la tarifa de compra associada al producte que tinga marcat el check de valor predeterminat. En la Figura 2.15 (a) observem com el producte "COLORANTE GRIS OSC SIN ANTIES" té dues taris associades. No obstant, en la Figura 2.15 (b) observem que la tarifa "Tarifa de COMPRAS general" té marcat el check predeterminat, pel que el valor que es tindrà en compte per al càlcul de costos serà el preu d'aquesta tarifa.



(a) Tarifes associades al producte COLORANTE GRIS OSC SIN ANTIES



(b) Tarifa per al càlcul de costos

Figura 2.15: Càlcul de costos estàndards per a productes P-

Per calcular el cost estàndard de produir una unitat del producte P+ s'utilitza la següent formula:

$$
\begin{aligned}
\text{Cost per unitat} &= (\text{Cost del centre de Costos} + \text{Cost els operaris} + \text{Cost de les màquines} + \text{Costos indirectes}) + \\
&+ (\text{Quantitat P- x Cost P-})
\end{aligned}
$$

Quan es calculen els costos del Centre de Costos, les màquines, operaris i costos indirectes es multipliquen per diferents valors segons d'unitat de mesura que s'indica. A continuació detallem aquests càlculs:

- Si la unitat que s'utilitza és **per hora**, el cost es multiplica per l'us del centre de costos.
- Si la unitat que s'utilitza és **per unitat**, el cost es multiplica per la suma de les quantitats dels productes P+ de la seqüència del pla de producció.
- Si la unitat que s'utilitza és **per kilogram**, el cost es multiplica per la suma dels pesos dels productes P+ de la seqüència del pla de producció.

Per generar el cost estàndard del producte P+, ens dirigim a la finestra "Calcular cost estàndard" i indiquem el pla de producció i la data de referència a partir dels quals calcular els costos. En la Figura 2.16 mostrem aquesta finestra.

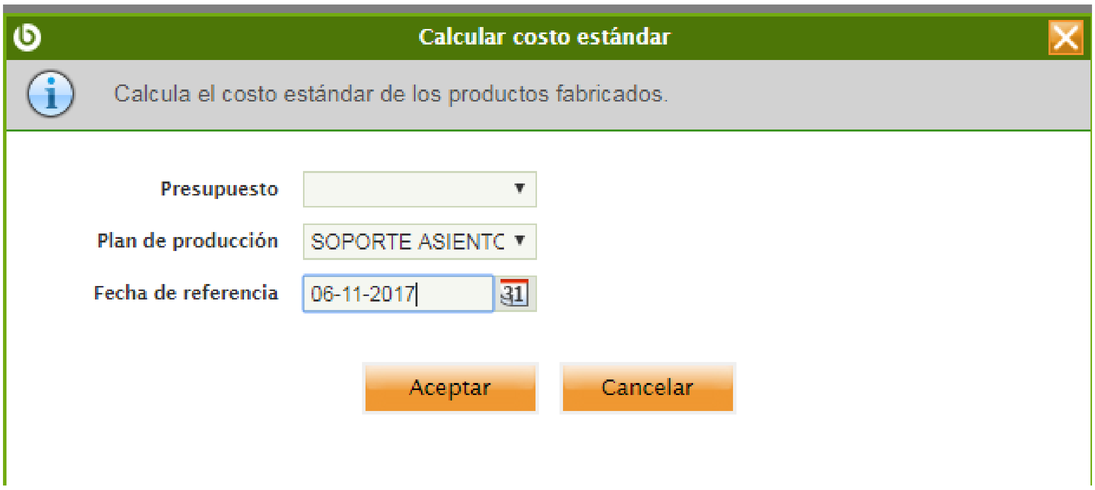


Figura 2.16: Càlcul del cost estàndard per al procés de producció d'injecció

Una volta acceptat el procés del càlcul del cost estàndard, ens dirigim a la finestra "Cost estàndard" i, seleccionant el pla de producció i la data de referència que hem indicat en el càlcul, obtenim un informe detallat de tots els processos i productes que intervenen en la producció així com les quantitats i costos associats. En la Figura 2.17 mostrem l'informe del cost estàndard per produir una unitat de P+.

Costo estándar

Plan de **SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS**

Versión **10001274**

Válido 27-01-2015 **Hast** 29-02-2024

Secuencia **INYECTAR LA PIEZA**

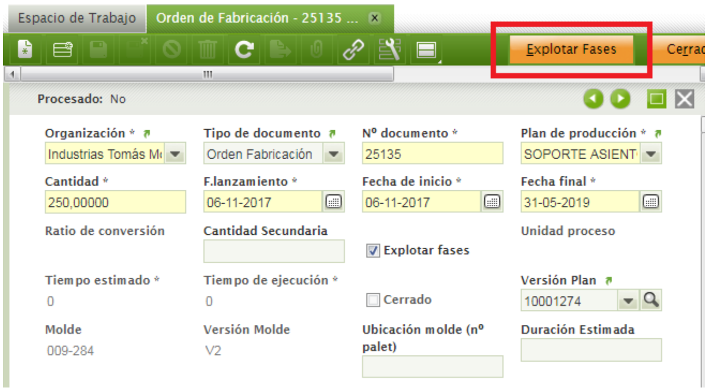
Resources	Quantity	Cost	Amount
M006 - PP COPOLIMERO NATURAL	0,72	1,01 €	0,74 €
ENVCA02 - CAJA CARTON 625X520X400 Nº2	0,05	1,52 €	0,08 €
C029 - COLORANTE GRIS OSC "SIN ANTIES	0,02	4,27 €	0,09 €
61 - Oima Stratos 650 SX	1,00	0,70 €	0,70 €
CAPATAZ	1,00	6,24 €	6,24 €
AYUDANTE ESPECIALISTA	1,00	4,10 €	4,10 €
61 - Oima Stratos 650 SX	1,00	0,66 €	0,66 €
		Sequence Total Cost:	**12,60 €**

Produced Product	Quantity	Cost	Amount
SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS	1,00	12,60 €	12,60 €
		Total:	**12,60 €**

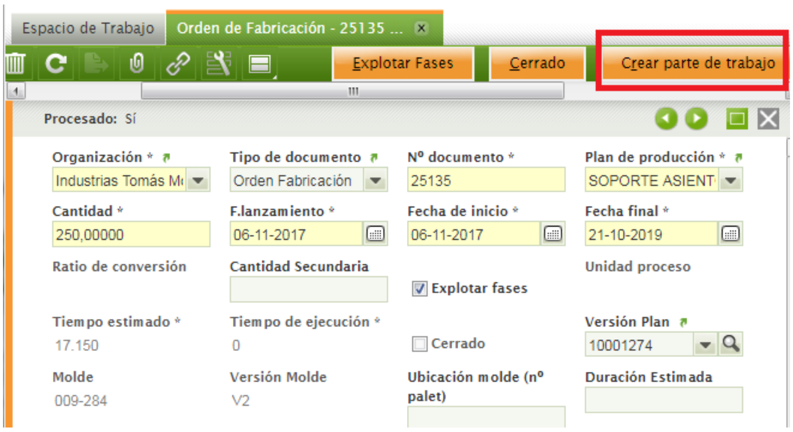
Figura 2.17: Càlcul del cost estàndard per al procés de producció d'injecció

2.2.2. Ordre de fabricació

Una volta calculats els costos teòrics de produir una unitat del producte SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS, passem a la crear les ordres per executar el pla de producció que acabem d'explicar. Una Ordre de Fabricació és un document on es detalla el procés del pla d'una comanda, indicant el nombre de voltes que s'executarà per satisfer els requisits de producció, les quantitats a produir i les dades de producció.



(a) Creació de l'Ordre de Fabricació



(b) Ordre de Fabricació després d'explotar fases

Figura 2.18: Ordre de fabricació per llançar el procés de producció

En la Figura 2.18 (a) mostrem l'ordre de producció per al producte SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS. Com podem observar, en l'ordre s'indica el pla de producció que hem creat anteriorment (on venen detallades les matèries primes i les quantitats necessàries, les màquines que intervenen, etc), la quantitat de productes que fabricarem i les dades de llançament i finalització del procés de producció. Notem que els camps Temps estimat i Temps d'execució estan a cero perquè s'actualitzen una volta llançada l'ordre. Així, una volta creada aquesta capçalera, amb el botó Explotar Fases (seleccionat amb un requadre roig en la Figura 2.18 (a)), es creen automàticament les fases de producció del pla de producció que indicat. En la Figura 2.18 (b) observem com, una volta explotades les fases, el temps d'estimació ens indica que l'estimació per al procés de producció és de 17,15 hores. En la Figura 2.19 mostrem les fases i els productes que havíem indicat en el pla de producció, generats a partir del botó Explotar Fases.

Figura 2.19: Fases i productes de l'ordre de fabricació

Una volta comprovada que tota la informació és correcta, és el moment de portar a cap la producció dels productes. En aquest moment els operaris configuren les màquines i seleccionen les quantitats d'estoc reservades per executar la producció.

Una volta la correguda de producció ha finalitzat, des d'aquesta mateix finestra es genera el part de treball des del botó Generar Part de Treball (requadre roig de la Figura 2.18 (b)), indicant l'hora i data d'inici i fi de la correguda.

2.2.3. Part de fabricació

Amb la correguda de la producció feta, és hora de comprovar si ha anat tot be o s'ha produït algun tipus d'incidència. A partir del Part de Treball que hem generat en l'ordre de fabricació, ens dirigim a la finestra Part de Fabricació. Des d'aquí, anem a validar el treball realitzat i a comprovar físicament que tots els productes s'han produït correctament (aquest pas seria equivalent al control de qualitat dels productes).

En el Part de Fabricació s'hauran creat tats parts com fases tenia el nostre pla de producció. En el nostre cas, com que l'única fase que tenia el nostre procés era la d'injecció de la peça, tans sols se'ns ha creat un part de fabricació. Aquesta forma de generar els parts afavoreix el control de cadascuna de les fases que completa una correguda de producció, de forma que ajuda a detectar els punts crítics del procés.

En la Figura 2.20 mostrem el part de fabricació que s'ha generat a partir de l'ordre de fabricació. Els camps Quantitat completada i Quantitat rebutjada es creen a zero, pel que és necessari modificar-los i indicar la quantitat verdadera que s'ha produït. En cas de que hi hagen productes en mala qualitat, s'indica la quantitat d'aquests productes en el camp Quantitat rebutjada. En el nostre cas, anem a suposar que la correguda de producció s'ha generat correctament, pel que s'ha produït 250 unitats del producte SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS i no hem rebutjat ninguna unitat.

En les pestanyes inferiors del Part de fabricació, podem indicar el motiu de la incidència (en cas de que s'hi produïsca alguna), adjuntar la factura de la subcontractació (si hem necessitat produir part del nostre producte a una altra empresa), etc.

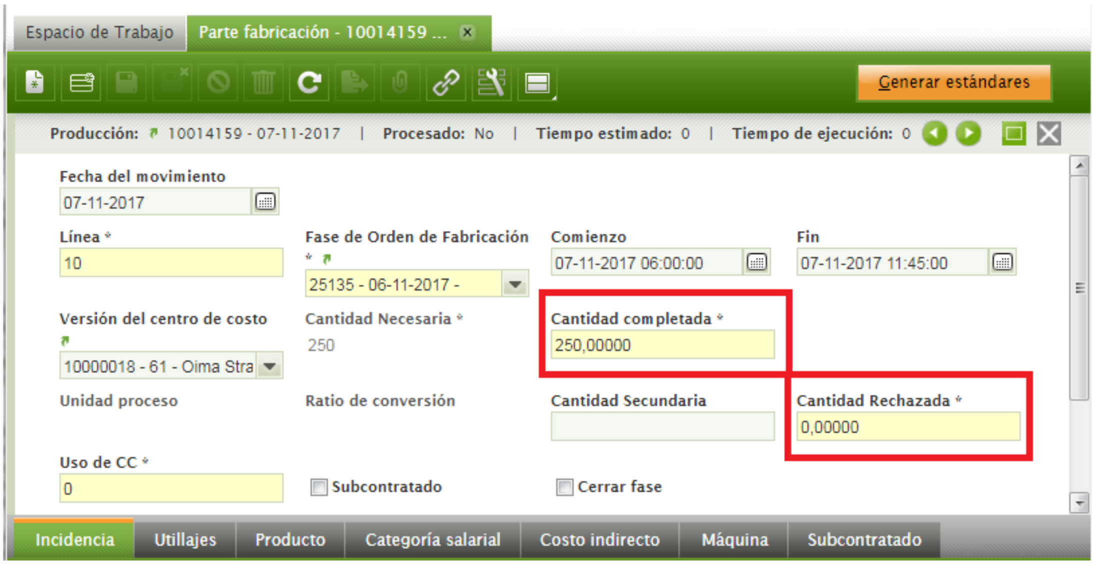


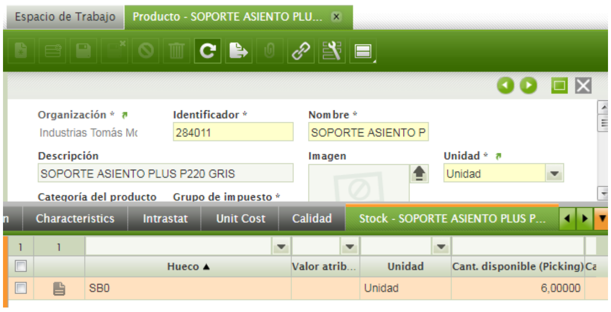
Figura 2.20: Part de fabricació després de completar la correguda de producció

Una volta complementat el part de fabricació, validem el part i creem les quantitats de productes que hem fabricat a partir del botó Generar estàndards (botó superior dret de la Figura 2.20). Una volta generats, en la pestanya inferior de productes apareixen les quantitats de producte que s'han creat, tant les unitats del producte nou com les unitats gastades de matèria prima. En la Figura 2.21 mostrem aquesta pestanya amb les quantitats dels productes creades, les quantitats rebutjades i l'espai del magatzem on es emmagatzemaran el productes.ç

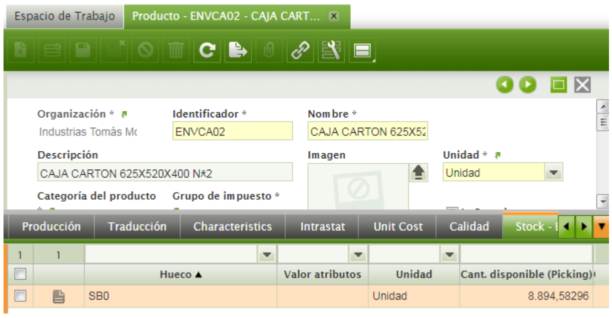
Producto	Tipo de pr...	Cantidad	Unidad	Cantidad Rechazada	Hueco
SOPORTE ASIENTO PLUS P22...	P+	250,00000	Unidad	0,00000	SB0
C029 - COLORANTE GRIS OSC...	P-	5,38000	Kilogramo	0,00000	SB0
ENVCA02 - CAJA CARTON 625...	P-	12,50000	Unidad	0,00000	SB0
M006 - PP COPOLIMERO NATU...	P-	181,25000	Unidad	0,00000	SB0

Figura 2.21: Resum dels productes que han intervingut en el procés de fabricació

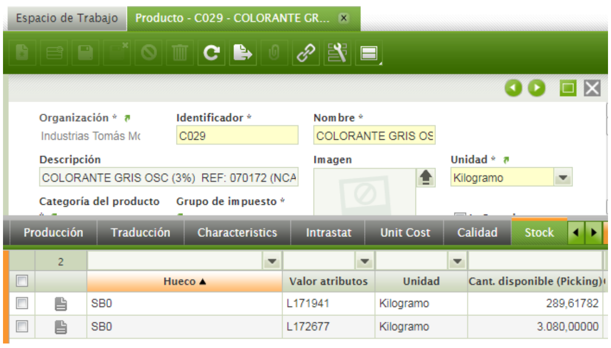
Comprovem que les quantitats que indica el programa corresponen amb les quantitats físiques que s'ha produït i, una volta verificat tot, validem el part de fabricació amb el botó Validar Part de Fabricació (botó superior dret de la Figura 2.21). Amb aquesta validació es llança un procés intern per actualitzar els estocs dels productes i calcular els costos mitjans. Abans de validar el part, mostrem en la Figura 2.22 els estocs dels quatre productes que intervenen en el procés (el producte creat i els tres productes de matèria prima) per comprovar a posteriori les modificacions de l'inventari.



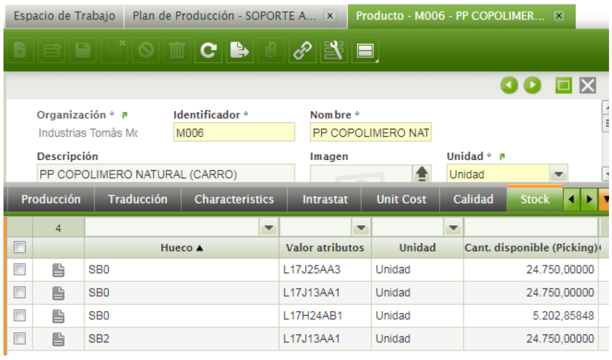
(a) Estoc inicial dels suports de seients



(b) Estoc inicial de les caixes

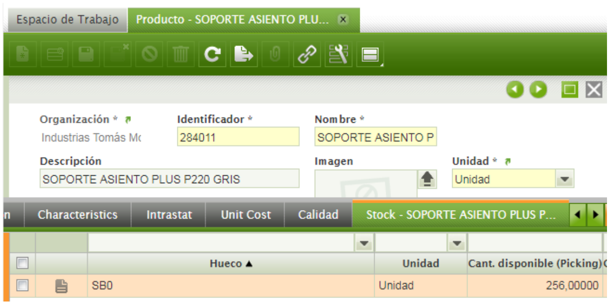


(c) Estoc inicial del colorant



(d) Estoc inicial del producte PP COPOLIMERO NATURAL

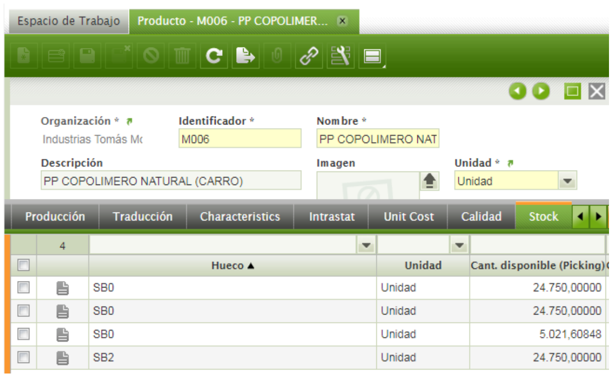
Figura 2.22: Estocs inicials dels productes que intervenen en el procés de producció



(a) Estoc final dels suports de seients

(b) Estoc final de les caixes

(c) Estoc final del colorant



(d) Estoc final del producte PP COPOLIMERO NATURAL

Figura 2.23: Estocs finals dels productes que intervenen en el procés de producció

Finalment, validem el part de fabricació amb el botó Validar Part de Treball. Automàticament, el part de treball es tanca (passa de l'estat Validat a l'estat Tancat) i es dona per finalitzat el procés de producció. Simultàniament, els estocs dels quatre productes s'actualitza segons les quantitats gastades, en el cas de les matèries primes, o les creades, en el cas del producte SOPORTE ASIENTO PLUS P220 GRIS. Mostrem en la Figura 2.23 els nous estocs.

Amb la comprovació del ajust de l'inventari després de llançar el procés de producció, només quedaria calcular el cost total de la correguda de producció. No obstant, l'empresa ITM no treballa amb el càlcul de costos totals de producció, pel que no té configurat les finestres necessàries per llançar aquest procés.

Conclusions

El constant procés de l'industria fa que els mecanismes de gestió empresarials evolucionen a un ritme gegantes, no sols per mantenir el control de les empreses si no per millorar i facilitar el treball diari d'aquestes. Però, aquests mecanismes no són instruments que han sorgit del nores, si no que han evolucionat a partir de la base els mètodes i models teòrics de gestió. En aquest sentit, els models de gestió d'inventaris han jugat i juguen un paper fonamental per al control i correcte funcionament de qualsevol tipus d'empresa. Sense un bon control instantani de l'estoc que disposem al magatzem es faria molt difícil afrontar la demanda i el ritme empresarial que els consumidors exigixen.

Durant aquest treball hem desenvolupat un estudi per diferents mètodes de gestió d'inventaris, centrant-nos en els models deterministes. Dins d'aquesta família de models, hem començat l'estudi amb els models de quantitat econòmica de comanda, més coneguts com a models d'EOQ. En primera instància hem vist com adaptar aquests models d'inventaris a la gestió de compres per satisfer la demanda dels consumidors. Començant pel model més bàsic i el més rígid en el sentit de les suposicions que requeria, hem construït pas a pas el model que ens permet minimitzar els costos totals de les compres i determinar el valor òptim de les comandes per aconseguir aquest mínim. Amb el mètode bàsic d'EOQ desenvolupat, hem anat relaxant les suposicions inicials i adaptant aquest model a diferents situacions que es donen en la gestió empresarial diària. Així, hem vist com el mètode d'EOQ permet que les comandes s'entreguen en terminis de temps no instantanis, gestionar els descomptes que els proveïdors fan a les empreses segons les quantitats de productes que compren o permetre que les comandes arriben amb uns certs temps de retard.

Encara que la gestió de compra-venta és un punt fonamental per al correcte funcionament de les empreses, hi ha altres factors que juguen un paper si més no important en la gestió empresarial. Parlem de les indústries del sector de la producció on, en lloc de gestionar les compres a proveïdors externs, s'encarreguen de la producció de matèries primes o productes acabats. Aquest tipus d'empreses també necessiten portar un control estricte de l'inventari, pel que en la segona part del primer capítol ens hem centrar en la gestió de propostes de producció mitjançant els models d'EOQ. Hem vist com podem adaptar els models d'EOQ de gestió de compres a la gestió de la producció, construint pas a pas les modificacions que el canvi de sector empresarial comporta.

Encara que el model d'EOQ s'adapta a diferents situacions de la vida quotidiana per a la gestió de compres i producció, no deixa de ser un model estàtic en el sentit que requerix una demanda constant durant el període de temps estudiat. Per aquest motiu, després d'estudiar els cassos on el model d'EOQ sí es pot utilitzar, hem introduït una alternativa als models estàtics: els models de planificació de recursos materials, més coneguts com MRP. En aquesta part del treball hem estudiat com gestionar la producció interna de les empreses suposant primer que no es necessiten costos de preparació i després que sí que es necessiten.

Com hem indicat al començament, el costant moviment empresarial obliga als sectors involucrats a evolucionar per continuar creixent. És per aquest motiu que, arribats a aquest punt, no ens serveixen els mètodes de gestió d'inventaris teòrics, si no que prenent-los com a base necessitem programaris de gestió empresarial que ens ajuden connectar tots els sectors de l'empresa per fer més fàcil el control d'aquesta. Aquest és un dels motius pels que actualment el software de gestió empresarial s'ha fet imprescindible per a empreses de xicotet i gran grandària. Una d'aquestes empreses és Opentix S.L., especialitzada en el software lliure Openbravo. En l'ultima part del treball hem exposat un cas pràctic de gestió de la producció amb Openbravo, simulant tot el flux de una correguda de producció portada a terme per la empresa valenciana Industrias Tomás Morcillo. Amb aquesta simulació s'ha vist com, a partir de la implementació dels models de gestió d'inventaris com els que hem vist, es poden controlar els nivells d'inventari de les empreses, evitant faltants i permetent controlar en tot moment l'estat del procés de producció.

Bibliografía

[1] Francisca Parra Guerrero, *Gestión de stocks*, ESIC Editorial, 2005

[2] Hamdy A. Taha, *Investigación de operaciones*, séptima edición, Person Educación, 2004.

[3] Nahmias Steven, *Análisis de la producción y las operaciones*, Vol. 57, McGraw-Hill Interamericana, 2007.

[4] Software ERP Openbravo, `http://openbravo.com/`

[5] Wayne L. Winston i Jeffrey B Goldberg, *Investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos*, cuarta edición, Thomson, 2005.