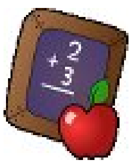
4. Probabilidad Condicionada: Teoremas de la Probabilidad Total y de Bayes

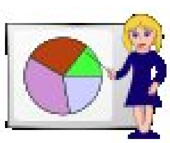
4.1. Probabilidad Condicionada

Vamos a estudiar como cambia la probabilidad de un suceso A cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso B.



Ejemplo

Lanzamos un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 2? Llamamos A al suceso "sale el el número 2", sea B el suceso "sale par". Es evidente que $P(A) = \frac{1}{6}$, mientras que si ya sabemos que ha sucedido B, la probabilidad de que salga 2 será ahora $\frac{1}{3}$. Por otro lado, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B es 0. A continuación, formalizaremos este concepto.



Definición

Llamamos **probabilidad condicional** de un suceso A condicionada a otro suceso B, a la probabilidad:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ .$$

Ejemplo

En el ejemplo anterior: $P(B) = 1/2$, $P(A \cap B) = 1/6$, $P(A \cap \overline{B}) = 0$. Así:

$$P(A/B) = \frac{1/6}{1/2} = 1/3 \text{ y } P(A/\overline{B}) = \frac{0}{1/2} = 0.$$

Observación

La probabilidad condicional $P(A/B)$ es una probabilidad, que una vez fijamos B, sólo afecta al suceso A y por tanto podemos aplicar todas las propiedades de las probabilidades (suceso contrario, unión de sucesos, etc.). Así, podemos calcular $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$ y el resto de propiedades análogas.

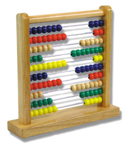
Propiedades

Leyes multiplicativas. De la definición de probabilidad condicional obtenemos

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

y también

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A).$$



Ejercicios

Ejercicio 1. Extraemos dos cartas de una baraja española de 40 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean de copas?

Solución:

Sean los sucesos $A =$"la primera carta es de copa" y $B =$"la segunda carta es de copas". Entonces la probabilidad pedida es

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

Ejercicio 2. Las leyes multiplicativas pueden generalizarse para la intersección de más de dos sucesos. Veámoslo con un ejercicio: Una urna contiene 5 bolas azules y 6 rojas. Extraemos tres bolas al azar. Halla la probabilidad de que las tres sean del mismo color.

Solución:

Para resolver el problema consideramos los sucesos $A =$"las tres bolas son azules", $R =$"las tres bolas son rojas" y $A_i =$ "la bola i-ésima es azul", $R_i =$ "la bola i-ésima es roja", $i = 1, 2, 3$.

Así, obtenemos $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ y $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$. Entonces:

$$P(A) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{33},$$

Análogamente,

$$P(R) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) \cdot P(R_3/(R_1 \cap R_2)) = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{33}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que los sucesos A y R son incompatibles, la probabilidad pedida es:

$$P(A \cup R) = P(A) + P(R) = \frac{2}{33} + \frac{4}{33} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}.$$

NOTA: La resolución de este ejercicio podrá resolverse sin tanto detalle una vez se haya introducido el concepto de independencia de sucesos (ver la página 31).

4.2. Teoremas de la Probabilidad Total y de Bayes

A cotinuación introduciremos dos resultados muy útiles en el cálculo de probabilidades: el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.
El teorema de la probabilidad total es útil para determinar la probabilidad de un suceso B en el que su probabilidad depende de otros sucesos que son incompatibles dos a dos y cubren todo el espacio muestral. Si en estas condiciones conocemos las probabilidades condicionadas podemos hallar la probabilidad de B.

Propiedad

Teorema de la Probabilidad Total. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ sucesos del espacio muestral Ω, incompatibles dos a dos, y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Entonces:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Ejercicio

Consideremos un proceso de fabricación de circuitos y supongamos que la probabilidad de que un circuito, expuesto a niveles altos de contaminación durante el proceso de fabricación, falle es 0.1. Si estáexpuesato a niveles medios 0.01 y a niveles bajos 0.001. En una producción el 20 % de los circuitos están expuestos a niveles altos de contaminación y el 30 % a niveles medioss. ¿Cuál es la probabilidad de que falle uno de estos circuitos?

Solución:

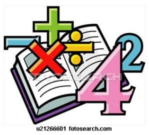
Sabemos que:

$$P(B/A_1) = 0.1,\ P(B/A_2) = 0.01,\ P(B/A_3) = 0.001$$
$$\text{y}\ \ P(A_1) = 0.2,\ P(B/A_2) = 0.3,\ P(A_3) = 0.5.$$

Así:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) = 0.0235\,.$$

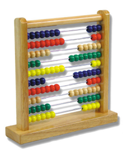
Si en la situación anterior queremos conocer la probabilidad condicional de algún A_k dado B, podemos aplicar el teorema de Bayes:



Propiedad

Teorema de de Bayes. En las mismas condiciones que en el Teorema de la probabilidad total, para cualquier k se verifica:

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)\cdot P(B/A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k)\cdot P(B/A_k)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+\cdots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)} .$$



Ejercicio

En un instituto hay tres grupos de segundo de bachillerato. En el grupo A hay 50 alumnos, de los cuales 10 han suspendido Matemáticas, en el grupo B han suspendido Matemáticas 15 alumnos de un total de 30 y en el C, han suspendido Matemáticas 5 alumnos de los 20 que tiene el grupo. Se selecciona un alumno al azar y resulta que ha suspendido Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea del grupo A?

Solución:

Llamamos:

$S =$"el alumno ha suspendido Matemáticas", $A =$"el alumno pertenece al grupo A", $B =$"el alumno pertenece al grupo B", $C =$"el alumno pertenece al grupo C".

Hemos de calcular $P(A/S)$.

Sabemos que

$$P(S/A) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}, \qquad P(S/B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \qquad P(S/C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4},$$

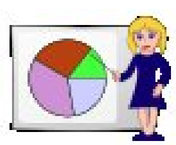
$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{30}{100} = \frac{1}{3}, \qquad P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(A/S) = \frac{P(A)\cdot P(S/A)}{P(A)\cdot P(S/A)+P(B)\cdot P(S/B)+P(C)\cdot P(S/C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

4.3. Independencia de sucesos.

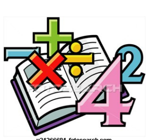
La definición de probabilidad condicional nos sirve como base para la definición de sucesos independientes. Supongamos que la realización o no del suceso B no tiene ningún efecto sobre la probabilidad del suceso A, en el sentido de que la probabilidad condicional $P(A/B) = P(A)$. Esta situación origina el concepto de independencia.



Definición

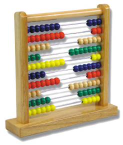
Si A y B son dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral Ω, decimos que el suceso A es **independiente** del suceso B si

$$P(A/B) = P(A).$$



Propiedad

Si A y B son independientes también lo son A y $\overline{B}$, $\overline{A}$ y B, $\overline{A}$ y $\overline{B}$.



Ejercicios

Ejercicio 1. En un taller hay tres máquinas, la primera se avería con probabilidad 0.04, la segunda con probabilidad 0.06, y la tercera con probabilidad 0.1. Sus averías son independientes. Calcula las probabilidades siguientes:

(a) De que se averíen las tres máquinas.

(b) De que sólo se averíe la segunda.

(c) De que sólo se averíe una máquina.

(d) De que se averíe alguna máquina.

Solución:

Si llamamos $A_i =$"la máquina i-ésima se avería", $i = 1, 2, 3$. Entonces,

$$P(A_1) = 0.04, P(A_2) = 0.06 \text{ y } P(A_3) = 0.1.$$

Así:

(a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.04 \cdot 0.06 \cdot 0.1 = 0.00024.$

(b) $P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0.96 \cdot 0.06 \cdot 0.9 = 0.05184.$

(c) $P(\ (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)\ ) =$
$P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) = 0.17592.$

(d) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$
$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$
$0.04 + 0.06 + 0.1 - 0.04 \cdot 0.06 - 0.04 \cdot 0.1 - 0.06 \cdot 0.1 + 0.00024 = 0.18784.$

Ejercicio 2. Nueva resolución del ejercicio 2 del apartado 4.1.

Consideramos los sucesos $B_1 =$"la primera bola es azul", $B_2 =$"la segunda bola es azul, una vez se ha extraído una bola azul", $B_3 =$"la tercera bola es azul, una vez se han extraído dos bolas azules" , $C_1 =$"la primera bola es roja", $C_2 =$"la segunda bola es roja, una vez se ha extraído una bola roja" y $C_3 =$"la tercera bola es roja, una vez se han extraído dos bolas rojas".

Todos los sucesos detallados son independientes; y además, $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ y $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ son disjuntos. Por tanto

$$P(A \cup R) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{11}.$$