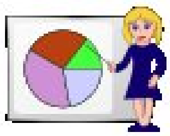
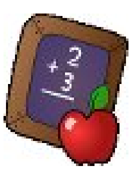
2. Nociones básicas de probabilidad



Definición

Un **experimento aleatorio** es un experimento o fenómeno que puede ser repetido bajo las mismas condiciones iniciales y que al hacerlo presenta las siguientes características:

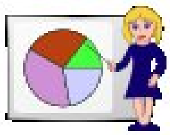
- Antes de realizar cada prueba, el resultado no puede saberse con certeza.
- Se sabe el conjunto de resultados posibles.
- Al hacer series largas de pruebas se presenta cierta regularidad en la frecuencia de resultados obtenidos.



Ejemplos

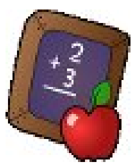
Para que te hagas una idea, te ponemos algunos ejemplos de experimentos aleatorios:

- Tirar dos dados varias veces (pongamos 5) y anotar la suma de los puntos que indican.
- Tirar una moneda varias veces (pongamos 7) y anotar el número de cruces obtenidas.
- En una empresa de bombillas seleccionar una de ellas y dejarla encendida 100 horas anotando si se funde o no.
- Registrar en un hospital el peso de los bebés que nacen.



Definición

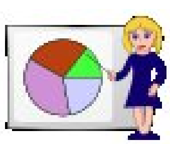
Al realizar un experimento aleatorio pueden obtenerse diferentes **resultados**. El conjunto de todos los resultados posibles se llama **espacio muestral** asociado al experimento. Este conjunto suele representarse con la letra griega omega mayúscula Ω.



Ejemplos

Volviendo a los ejemplos anteriores, los espacios muestrales correspondientes son:

- $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$
- $\Omega = \{CCCCCCC, CCCCCCX, \ldots, XXXXXXX\}$, donde C quiere decir que ha salido cara y X que ha salido cruz.
- $\Omega = \{\text{encendida}, \text{fundida}\}$.
- Ω es el conjunto de los números reales positivos, podemos convenir que su medida estará en un intervalo real, por ejemplo $\Omega = [20, 99]$, donde los valores están en cm.



Definición

Los espacios muestrales pueden ser de dos tipos:

- **Finitos.** Es decir el número de elementos del espacio muestral se puede contar.
- **Infinitos.** El número de elementos del espacio muestral no se puede contar.

Observación

Está claro que en los ejemplos anteriores, sólo es infinito el último espacio muestral.

Definición

Consideremos ahora un experimento aleatorio que denotamos E cuyo espacio muestral es Ω. Se llama **suceso** S de un experimento aleatorio E a un subconjunto de Ω. Es decir, hecho el experimento E nos preguntamos si "algo"S relacionado con ese experimento ha podido ocurrir. Ese "algo"será un posible suceso. Los sucesos los dividimos en diferentes tipos:

- Suceso **simple o elemental.** S tiene sólo un elemento.
- Suceso **compuesto.** S tiene más de un elemento.
- Suceso **seguro.** $S = \Omega$. Estos sucesos siempre suceden.
- Suceso **imposible.** $S = \emptyset$. Estos sucesos no ocurren nunca.

Ejemplo

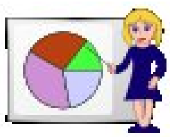
Vamos a considerar el experimento aleatorio E que consiste en "tirar una moneda varias veces (pongamos 7) y anotar el número de cruces obtenidas".

Recordar que el espacio muestral el $\Omega = \{CCCCCCC, CCCCCCX, \ldots, XXXXXXX\}$.

Aparte de los casos $S = \Omega$, suceso seguro y $S = \emptyset$ suceso imposible, podemos considerar muchos mas sucesos.

Por ejemplo $S = \{CCCCCCC\}$. Este suceso ocurre cuando al tirar la moneda siete veces siempre sale cara y es un suceso elemental.

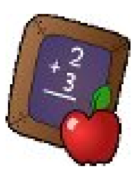
Otro caso sería $S = \{CCCCCCC, CCCCXXX, XXXXXXX\}$. ¿Cuando ocurre este suceso? Ocurre cuando al tirar la moneda salen siete caras, siete cruces o las cuatro primeras veces sale cara y las tres restantes cruz.



Definición

Los sucesos son pues subconjuntos S del espacio muestral Ω, es decir indican cosas que pueden ocurrir al realizar un experimento aleatorio. Al ser subconjuntos pueden hacerse operaciones de conjunto entre ellos para dar lugar a otros sucesos. Partiendo de dos sucesos S y S' veamos cuales son las posibilidades:

- Suceso **disyunción o unión.** Se representa por $S \cup S'$ y ocurre cuando pasa al menos uno de ellos, S o S'.
- Suceso **conjunción o intersección.** Se representa por $S \cap S'$ y ocurre cuando pasan a la vez S y S'.
- Suceso **diferencia.** Se representa $S - S'$ y ocurre sólo cuando pasa S pero no S'.
- Suceso **contrario o complementario.** Se representa S^c y coincide con $\Omega - S$. Este suceso ocurre sólo si S no ocurre. En ocasiones también se representa $\overline{S}$ en lugar de S^c.
- Suceso **disyunción exclusiva.** Se representa $S \triangle S'$ y es $(S - S') \cup (S' - S)$. Este suceso ocurre si y solo si pasa o bien S o bien S' pero no ambos.



Ejemplos

Ahora vamos a considerar el experimento aleatorio E que consiste en "tirar una moneda **tres** veces y anotar el número de cruces obtenidas". Está claro que

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}.$$

Consideremos $S = \{CCC, CCX, XXX\}$ y $S' = \{CCC, XXC, XXX\}$. Es decir pasa S si salen tres caras, dos caras y una cruz (en ese orden) o tres cruces. ¿Que ha de pasar para que salga S'?.

El suceso disyunción $S \cup S'$ será $\{CCC, CCX, XXC, XXX\}$. Es decir o tres caras o tres cruces o dos caras y una cruz (en ese orden) o dos cruces y una cara (en ese orden).

El suceso conjunción $S \cap S'$ será $\{CCC, XXX\}$, pues está en ambos conjuntos S y S'.

El suceso diferencia $S - S'$ será simple e igual a $\{CCX\}$ que está en S pero no en S'.

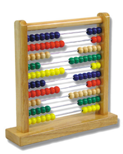
Con respecto al suceso contrario, se tiene $S^c = \{CXC, CXX, XCC, XCX, XXC\}$, es decir los de Ω salvo los de S.

Finamente el suceso disyunción exclusiva $S \triangle S'$ es $\{CCX, XXC\}$.

Propiedades

Las operaciones $\cup$, $\cap$ y ^{c}, llamadas disyunción, conjunción y complementario, satisfacen algunas buenas propiedades que puedes ver a continuación. Aquí, P, Q, R son sucesos.

- **Distributiva unión-intersección** $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$.
- **Distributiva intersección-unión** $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$.
- **Diferencia** $P - Q = P \cap Q^c$.
- **Leyes de DeMorgan**
  - $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$.
  - $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$



Ejercicios

Ejercicio 1. Tienes un dado común con seis caras y las coloreas del modo siguiente: de color azul la cara 1, de color morado las caras 2 y 3 y de color negro las caras 4,5 y 6. Al tirar el dado, sólo tienes en cuenta el color que sale. Se pide:

1. Indica el espacio muestral.
2. Determina todos los sucesos posibles.
3. ¿Cuál es el suceso contrario a salir negro?
4. ¿Cuales son todos los sucesos posibles que incluyen salir morado?

Solución:

1. El espacio muestral contiene tres elementos asociados a los colores posibles **A**zul, **M**orado, **N**egro. Luego es $\Omega = \{A, M, N\}$.
2. Los sucesos posibles son los subconjuntos de Ω; como Ω tiene tres elementos, el número de subconjuntos es $2^3 = 8$. La solución es

$$\{\emptyset, \{A\}, \{M\}, \{N\}, \{A, M\}, \{A, N\}, \{M, N\}, \Omega\}.$$

3. El suceso contrario a ser negro que representamos $\{N\}^c$, es $\Omega - \{N\}$ y por lo tanto es $\{A, M\}$.

4. Serán todos los subconjuntos de Ω que contengan a M, por lo tanto $\{M\}$, $\{A, M\}$, $\{M, N\}$ y el total Ω (que es $\{A, M, N\}$.

Ejercicio 2. Tienes un dominó y se supone que sus fichas están "boca abajo". Realizas el experimento aleatorio que consiste en dar la vuelta al azar a una ficha y sumar los puntos que tiene. Escibiremos s_i el suceso que consiste en destapar una ficha y que sus puntos sumen i. Se pide:

1. ¿Cuantas fichas tiene un dominó? ¿Cuanto pueden sumar sus fichas?
2. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento anterior? ¿Cuantos sucesos puedes considerar en el experimento anterior?
3. Explica el sentido de los sucesos: s_0 y $s_5 \cup s_{10}$.
4. Explica qué significa $(s_6 \cup s_{12})^c$ y quién es.

Solución:

1. Un dominó tiene dos partes con puntos que van desde 0 hasta 6. Tiene 7+6+5+4+3+2+1 fichas pues si empezamos contando las parejas de la blanca 0 puntos tenemos 7, pero al contar las parejas de 1 solo hay seis pues la pareja con blanca ya ha sido contada, reiterando se llega a la operación anterior. En definitiva hay 28 fichas. Cada ficha puede sumar desde 0 "blanca doble"hasta 12, el "seis doble".

2. Está claro pues que $\Omega = \{s_0, s_1, \ldots, s_{12}\}$. Y el número de subconjuntos de Ω que es el número de sucesos será 2^{13} ya que Ω tiene 13 elementos.

3. s_0 es el suceso consistente en que al destapar la ficha sume o puntos. Es decir que destapemos la "blanca doble". El suceso $s_5 \cup s_{10}$ indica que al destapar la ficha sume o bien 5 puntos o bien 6 puntos. Por ejemplo ese suceso sucedería cuando sacamos una ficha $(1, 4)$ o una $(3, 3)$ o $(1, 5)$, etc.

4. El suceso $(s_6 \cup s_{12})^c$ es el contrario a $(s_6 \cup s_{12})$ y quiere decir que al destapar la ficha, sus puntos no suman ni 6 ni 12. Sería el suceso $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}\}$.

Ejercicio 3. Considera el experimento aleatorio E que consiste en tirar una moneda 3 veces. Supón que P y Q los sucesos siguientes $P = \{CCX, CXX, XCC\}$, $Q = \{CCX, CXX, CCC, XXX\}$ y $R = \{CCX, CXX, XCX\}$. Comprueba que para dichos sucesos se cumplen:

1. La propiedad distributiva unión-intersección.
2. La primera ley de DeMorgan para P y Q.
3. La segunda ley de DeMorgan para P y Q.

Solución:

1. Se trata de probar que $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$. Ahora $Q \cap R = \{CCX, CXX\}$ y $P \cup (Q \cap R) = \{CCX, CXX, XCC\}$. Por otra parte, $P \cup Q = \{CCX, CXX, XCC, CCC, XXX\}$ y $P \cup R = \{CCX, CXX, XCC, XCX\}$, con lo que $(P \cup Q) \cap (P \cup R) = \{CCX, CXX, XCC\}$.

2. Se trata ahora de comprobar que $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$. Pero $P \cap Q = \{CCX, CXX\}$ y $(P \cap Q)^c = \{CCC, CXC, XCC, XCX, XXC, XXX\}$.

   Por otra parte $P^c = \{CCC, CXC, XCX, XXC, XXX\}$ y $Q^c = \{CXC, XCC, XCX, XXC\}$ y, finalmente, $P^c \cup Q^c = \{CCC, CXC, XCC, XCX, XXC, XXX\}$, lo que concluye la comprobación.

3. Aquí hay que probar $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$, como $P \cup Q = \{CCX, CXX, XCC, CCC, XXX\}$ el resultado que hemos de comprobar es que $(P \cup Q)^c = \{CXC, XCX, XXC\}$. Compruébalo tú mismo/a.