ENGINYERIA INFORMÀTICA.

FONAMENTS MATEMÀTICS DE LA INFORMÀTICA.
Teoria i Problemes.

José M. Bernat

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

MATERIAL DOCENT

INTRODUCCIÓ

Aquest material docent és fruit d'uns anys de treball i de la insistència de l'alumnat per tenir uns apunts de l'assignatura. Els estudiants compraven a reprografia els apunts que prèviament entregava el professor.

El llibre consta de 11 temes. Els 6 primers corresponen a l'antiga matemàtica discreta. El tema 7è és de grafs. Els quatre últims són d'àlgebra. En cada tema hi ha problemes resolts i al final uns enunciats de problemes opcionals que cal que els estudiants intenten resoldre'ls.

La idea fonamental dels tres primers temes és comprendre correctament el significat de l'estructura d'Àlgebra de Boole.

El primer tema tracta de la lògica matemàtica. Aquesta estudia el raonament i l'argumentació, i estructura unes normes de raonar de tal manera que la seua vàlua no depén del contingut dels enunciats sinò sols de la seua forma. D'altra banda, la lògica ens dóna mitjants per distingir un raonament correcte d'un altre incorrecte. També s'estudien els axiomes, teoremes, classes de teoremes, classes de demostracions, etc. Cada vegada s'utilitza més la lògica en el modern món de les computadores i dels circuits electrònics (àlgebra dels commutadors), biologia, estadística, etc.

En el tema segon s'estudien les funcions lògiques. Aquestes són unes funcions que sols prenen valors 0 o 1 (fals o veritat). En aquest tema s'estudien els circuits lògics, formats per portes lògiques i per línies. S'analitzen i sintetitzen els circuits després d'estudiar les propietats de l'Àlgebra de Boole dels circuits i finalitza en la simplificació de les funcions booleanes utilitzant els mapes de Karnaugh i el mètode de Quine-McCluskey, entre altres.

El tercer tema es dedica als conjunts i operacions entre conjunts. Encara que tothom sàpiga intuïtivament què és un conjunt, en el tema es dóna una definició rigorosa de conjunt formulada per George Cantor, caracteritzant els conjunts per extensió o per comprensió. Ja que els conjunts, amb les seues lleis corresponents, tenen estructura d'Àlgebra de Boole, caldrà identificar les operacions entre conjunts amb les partícules connectives estudiades en el tema 1.

El quart tema estudia les relacions binàries entre conjunts. En les matemàtiques i en moltes activitats humanes, és necessari classificar i ordenar. Les relacions d'equivalència serveixen per classificar i cal utilitzar les classes d'equivalència per formar un altre conjunt anomenat conjunt quocient. Si a cada classe hi assignem un nom, aleshores les relacions d'equivalència ens serveixen per definir uns altres nous conceptes. També es parla de les aplicacions entre dos conjunts. En particularitzar el concepte de relació s'obté el de funció i en particularitzar el concepte de funció s'obté el d'aplicació. S'estudien les aplicacions injectives, suprajectives, bijectives i els homomorfismes i isomorfismes entre dos conjunts.

En el tema cinqué s'estudia la inducció, la recurrència lineal i la combinatòria: permutacions, variacions, combinacions, amb i sense repetició. Aquesta s'aborda de forma clàssica, i també utilitzant els conceptes dels temes tercer i quart.

En l'últim tema de discreta, es parla de les estructures algebraiques com són els grups, anells i cossos. El tema és important per a la comprensió de la matemàtica en sí mateix, per estudiar els conjunts numèrics i els quatre últims temes, i donar interpretacions geomètriques que ens ajuden en posar de manifest el caràcter unificador de la matemàtica moderna. També s'estudien les congruències, els sistemes de numeració, la divisibilitat i les equacions diofàntiques.

Dediquem el tema 7 per estudiar els grafs. La terminologia no està massa unificada ja que és un tema de recent creació. La importància del tema s'incrementa dia a dia per poder solucionar problemes pràctics com poden ser l'obtenir un arbre generador minimal o trobar un camí de longitud mínima entre dos vèrtexs.

El tema 8 estudia els espais vectorials. Peano, a finals del segle XX dóna la definició d'espai vectorial sobre el cos dels nombres reals. Immediatament es generalitza per a qualsevol cos. Cal tenir en compte que un vector no és tan sols un segment orientat. Un vector és un element d'un espai vectorial. Així veurem que una matriu, un nombre complexe, una successió, una funció polinòmica, són vectors.

De la definició de subespai vectorial, surgeix el concepte de sistema generador per poder caracteritzar tot l'espai a partir d'un nombre finit de vectors. Els conceptes de dependència i independència lineal ens serviran per trobar una base de l'espai vectorial, on totes les bases tenen el mateix nombre de vectors que serà la dimensió d'aquest espai.

Les matrius són fonamentals a l'hora de treballar amb grans conjunts d'informació d'una manera còmoda i operativa. En aquest tema es veurà l'isomorfisme entre matrius i aplicacions lineals. També s'estudia la matriu associada a una aplicació lineal i què li passa a aquesta matriu en canviar de base. Igualment s'estudien diverses classes de matrius. Els sistemes d'equacions lineals s'utilitzen en diversitat de situacions de la vida qüotidiana. El teorema de Rouché-Fröbenius ens servirà per discutir les possibles solucions del sistema. Per últim s'estudien diversos mètodes de resolució de sistemes, un d'ells és el mètode de Gauss.

En el tema 10 estudiem la diagonalització de matrius quadrades en tant en quant provenen d'endomorfismes entre espais vectorials. S'estudia el teorema de caracterització de les matrius diagonalitzables i per la qual cosa abans cal estudiar uns altres conceptes com vector propi o autovector i valor propi u autovalor d'un endomorfisme. També s'estudia el teorema de Cayley-Hamilton i una aplicació d'aquest per trobar la inversa d'una matriu regular.

Per últim estudiem les formes bilineals i les formes quadràtiques en el tema 11. S'estudia la diagonalització ortogonal per treballar en transformacions que conserven el producte escalar. Tambe s'estudia la forma polar associada a una forma quadràtica, se classifiquen les formes quadràtiques utilitzant diversos mètodes com ara el mètode de Jacobi, el mètode de les transformacions elementals (simetrització-diagonalització) i el mètode de Lagrange-Gauss. Aquest tema és important a l'hora d'estudiar en Geometria les còniques i les quàdriques i la seua classificació.

Aquest material correspon a una ampliació dels materials impresos des de l'any

2000. Al setembre de 2000 es va publicar el material "Matemàtica Discreta. Teoria i problemes E.T.I.G", de sis temes i 203 pàgines (n^o 102). L'any 2006 es va ampliar el material fins completar el temari de Fonaments Matemàtics de la Informàtica amb un total de 9 temes, sota el títol: "Fonaments Matemàtics de la Informàtica. Teoria i problemes (ETIG), de 425 pàgines (n^o 261).

Finalment vull agrair al Servei de Llengues i Terminologia de la Universitat Jaume I per la seua dedicació a la traducció al català d'aquest material docent.

Castelló, maig de 2010

Part I
TEMA 1: LÒGICA PROPOSICIONAL

1. PROPOSICIÓ LÒGICA

La lògica té una importància rellevant en el món de la informàtica (circuits) i en les matemàtiques (raonaments lògics).

Definició 1. ***Proposició lògica*** *és una frase de la qual es pot afirmar sense ambigüitat si és certa o falsa.*

Es representa per lletres minúscules: p,q,r,... No formen proposició les frases interrogatives ni les de manament.

Valor lògic, el representem per 0 quan la proposició és falsa i per 1 quan és vertadera.

Tipus de proposicions: Simples (o atòmiques) i **Compostes** (o moleculars).

Les proposicions simples són aquelles que no es poden descompondre en unes altres més senzilles. Les proposiciones compostes es poden descompondre en unes altres més simples. És més, les compostes estan formades per la unió de simples amb partícules connectives.

2. PARTÍCULES CONNECTIVES

Aquelles partícules que uneixen dues o més proposicions simples per a formar unes altres compostes

i) AND. CONJUNCIÓ. $p \wedge q$

Donades dues proposicions p, q es pot formar una altra proposició composta anomenada p i q tal que és certa quan ho siguen les dues.

ii) NOT. NEGACIÓ. $\neg p$

Donada la proposició p, formem una nova proposició anomenada no p tal que és falsa quan p siga vertadera i vertadera quan p siga falsa.

iii) OR. DISJUNCIÓ. $p \vee q$

Donades les proposicions p, q es pot formar una altra proposició composta anomenada p o q tal que és certa quan ho siga almenys una de les dues proposicions.

iv) OREX. (XOR). DISJUNCIÓ EXCLUSIVA. $p \triangle q$

Donades les proposicions p, q es pot formar una altra proposició composta anomenada o p o q tal que és certa quan ho és sols una de les dues proposicions.

v) CONDICIONAL. $p \rightarrow q$

Donades les proposicions p, q es pot formar una altra proposició composta anomenada condicional tal que sols és falsa quan l'antecedent (p) és cert i el conseqüent (q) és fals.

Es llegeix si p aleshores q. També se'n diu p condicional q.

Nota 1. *D'una proposició vertadera sols s'obtenen conclusions vertaderes. D'una proposició falsa es pot deduir qualsevol, certa o falsa.*

vi) NOREX. (XNOR). BICONDICIONAL. $p \leftrightarrow q$

Donades les proposicions p, q es pot formar una altra proposició composta anomenada bicondicional tal que sols és certa quan ambdues tinguen el mateix valor lògic.

Es llegeix p si i sols si q.

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \triangle q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1

Exercici 1. *Demostreu que* $\boxed{p \triangle q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)}$

Exercici 2. *Demostreu que* $\boxed{p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q}$ *És la regla d'inferència (C.D.) Condicional-Disjunció.*

Exercici 3. *Demostreu que* $\boxed{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$ *És la regla d'inferència (C.B.) Condicional-Bicondicional.*

Exercici 4. *Demostreu que* $\boxed{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)}$

Exercici 5. *Demostreu que* $\boxed{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \triangle q)}$ *És a dir* $NOREX \Leftrightarrow \neg(OREX)$

Solució a l'exercici 4. (Per taula de veritat)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1

3. CLASSIFICACIÓ DE LES PROPOSICIONS LÒGIQUES

Definició 2. *Una* ***fórmula lògica*** *és una unió de proposicions i connectors, on cada proposició pot tenir el valor 0 o 1.*

Definició 3. ***Fórmules lògiques equivalents*** *són les que tenen els mateixos valors lògics.*

Exercici 6. *Demostreu que* $\boxed{p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)}$

Exercici 7. *Demostreu que* $\boxed{p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)}$

Definició 4. ***Tautologia*** *és una fórmula lògica que sempre és certa.*
Exemple $p \vee \neg p$; $p \to p \vee q$

Definició 5. ***Contradicció*** *és una fórmula lògica que sempre és falsa.*
Exemple $p \wedge \neg p$; $p \wedge (\neg p \wedge q)$

Definició 6. ***Fórmula lògica indeterminada*** *és una fórmula lògica que pot ser certa o falsa.*
Exemple $p \to \neg q$

Definició 7. ***Implicació*** *és una condicional tautològica. És a dir si* $p \to q$ *és una tautologia, aleshores aquesta condicional s'anomena implicació i es representa per* $p \Rightarrow q$ *Es llegeix p implica q.*

Definició 8. ***Equivalència*** *és una bicondicional tautològica. És a dir si* $p \leftrightarrow q$ *és una tautologia, aleshores aquesta bicondicional se l'anomena equivalència i es representa per* $p \Leftrightarrow q$ *Es llegeix p equivalent a q.*

Definició 9. ***Fórmules lògiques universalment vàlides,*** *són aquelles en les quals la condicional o bicondicional són tautologies. Exemple, qualsevol regla d'inferència.*

4. ÀLGEBRA DE BOOLE DE LES PROPOSICIONS LÒGIQUES

Suposem $(\mathcal{P}, \vee, \wedge, \neg)$una quaterna d'elements on $\mathcal{P}$ és el conjunt de les proposicions lògiques.

Definició 10. ***Àlgebra de Boole*** *és tot reticle complementari i distributiu.*

Definició 11. ***Reticle*** *és aquella estructura matemàtica que compleix les propietats: associativa, commutativa, simplificativa i idempotent.*

Definició 12. ***Reticle complementari*** *quan compleix també la propietat complementària.*

Definició 13. ***Reticle complementari i distributiu*** *quan també compleix la propietat distributiva i aleshores aquest reticle se l'anomena Àlgebra de Boole.*

- ASSOCIATIVA
$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r \qquad \forall p, q, r \in \mathcal{P}$$
- COMMUTATIVA
$$p \vee q = q \vee p$$
$$p \wedge q = q \wedge p \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}$$

- SIMPLIFICATIVA (ABSORCIÓ) $(p \vee q) \wedge p = p$
  $(p \wedge q) \vee p = p \quad \forall p, q \in \mathcal{P}$
- IDEMPOTENT $p \vee p = p \quad p \wedge p = p \quad \forall p \in \mathcal{P}$
- COMPLEMENTARI $\forall p \in \mathcal{P} \quad \exists \neg p \in \mathcal{P} \quad / \; p \wedge \neg p = C \quad p \vee \neg p = T$ on C és la Contradicció i T la Tautologia.
- DISTRIBUTIVA $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \forall p, q, r \in \mathcal{P}$

Nota 2. *Totes aquestes propietats es poden demostrar utilitzant les taules de veritat. Aleshores la igualtat es tradueix en una equivalència.*

Nota 3. *A més a més també es pot demostrar que es verifiquen les Lleis de De Morgan.*

- LLEIS DE DEMORGAN $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
  $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \quad \forall p, q \in \mathcal{P}$

5. REGLES D'INFERÈNCIA

Definició 14. ***Regles d'inferència*** *són aquelles regles que permeten deduir una proposició (anomenada conclusió) a partir d'altres (anomenades premisses). Es representa per* $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow c$

1. PONENDO PONENS (**P.P.**) $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$. També $\boxed{\begin{array}{l} p_1 : p \to q \\ p_2 : p \\ c : q \end{array}}$
2. TOLLENDO TOLENS (**T.T.**) $[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$.
   També $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$
3. TOLLENDO PONENS(**T.P.**) $[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p \quad [(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$
4. CONDICIONAL-DISJUNCIÓ(**C.D.**) $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
5. CONDICIONAL-BICONDICIONAL(**C.B.**) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
6. ADJUNCIÓ(**A.**) $p, q \Rightarrow p \wedge q$
7. LLEI D'ADDICIÓ(**L.A.**) $p \Rightarrow p \vee q \quad q \Rightarrow p \vee q$
8. LLEI DE SUBSTITUCIÓ(**L.S.**) $[(p \wedge q) \wedge (p \leftrightarrow r)] \Rightarrow (r \wedge q)$
   $[(p \to q) \wedge (p \leftrightarrow r)] \Rightarrow (r \to q)$

9. SIMPLIFICACIÓ(**S.**) $p \wedge q \Rightarrow p$ $p \wedge q \Rightarrow q$
10. SIL·LOGISME HIPOTÈTIC(**S.H.**) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$
11. SIL·LOGISME DISJUNTIU(**S.D.**)$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$
12. DOBLE NEGACIÓ(**D.N.**) $p \Leftrightarrow \neg\neg p$
13. REGLA DE LA PREMISSA(**R.P.**). Una premissa es pot introduir en qualsevol punt de la deducció. (Aquesta regla s'utilitza quan la conclusió és una condicional o en la demostració per reducció a l'absurd, negant la hipòtesi).
14. REGLA CONDICIONAL(**R.C.**) $q \Rightarrow (p \to q)$

Definició 15. ***Raonament*** *és una successió de proposicions escrites de la manera següent:* $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to c$*, on les proposicions* $p_1, p_2, ..., p_n$ *s'anomenen premisses i la proposició* c *s'anomena conclusió.*

Definició 16. ***Raonament vàlid*** *és aquell en el qual la condicional* $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to c$ *és una tautologia. Qualsevol regla d'inferència és un raonament vàlid.*

Nota 4. *En un raonament vàlid, de vegades es diu que la conclusió és una conseqüència lògica de les premisses o bé que la conclusió es dedueix lògicament de les premisses.*

Exercici 8. *Deduïu lògicament la conclusió a partir de les premisses:*

$p_1: r \to (s \to q)$
$p_2: \neg p \vee r$
$p_3: s$
$c: p \to q$

Solució 1. Per regles d'inferència

1. p R.P.
2. $p \to r$ C.D.(p_2)
3. $(p \to r) \wedge p_1$ A.(2, p_1)
4. $p \to (s \to q)$ S.H.(3)
5. $[p \to (s \to q)] \wedge p$ A.(4,1)
6. $s \to q$ P.P.(5)

7. $(s \to q) \land s$ A.$(6, p_3)$

8. q P.P.(7)

Una altra manera de fer l'exercici:

1. p R.P.

2. $p \to r$ C.D.(p_2)

3. $p \land (p \to r)$ A.(1,2)

4. r P.P.(3)

5. $r \land [r \to (s \to q)]$ A.$(4, p_1)$

6. $s \to q$ P.P(5)

7. $(s \to q) \land s$ A.$(6, p_3)$

8. q P.P.(7)

Una altra manera de fer l'exercici:

1. p R.P.

2. $p \land (\neg p \lor r)$ A.$(1, p_2)$

3. r T.P.(2)

4. $s \to q$ P.P.$(3, p_1)$

5. q P.P.$(4, p_3)$

Solució 2. Per taules de veritat

p	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
r	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
s	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$s \to q$	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
$r \to (s \to q)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg p \lor r$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$p_1 \land p_2 \land p_3$	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$p \to q$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$[p_1 \land p_2 \land p_3] \to (p \to q)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Exercici 9. *Deduïu lògicament la conclusió a partir de les premisses:*

$$\boxed{\begin{array}{l} p_1: p \vee q \\ p_2: p \rightarrow \neg r \\ p_3: q \rightarrow s \\ c: \neg r \vee s \end{array}}$$

6. FUNCIONS PROPOSICIONALS

Definició 17. ***Funció proposicional*** *és una expressió que conté variables sobre conjunts tals que en substituir-les per elements es converteixen en proposicions.*

Exemple 1. $p(x) = \{x/x \geq 3, x \in \mathbb{N}\}$ *és una funció proposicional ja que és una expressió tal que en substituir la variable x per un element de* $\mathbb{N}$, *es converteix en una proposició.*

Exemple 2. $p(x,y,z) = \{(x,y,z)/x = y + z,\ \textit{sent}\ x,y,z \in \mathbb{Z}\}$

Exemple 3. $E = \{4, 8, 12, 16, 24\}$ $p(x) = \left\{x/x = \overset{\bullet}{2}\right\}$, $p(x)$ *és una funció proposicional ja que si* $a \in E, p(a)$ *és una proposició que podrà ser vertadera o falsa.*

Resum:

$\boxed{p(x), \text{ amb un conjunt} E \text{ és una f. proposicional o predicat; } p(a)/a \in E, \text{ és una proposició.}}$

7. QUANTIFICADORS

S'utilitzen per a simbolitzar alguns predicats que fan referència a tots o a alguns dels elements del conjunt universal E

- i)**Quantificador universal** $(\forall)$

Si tots els elements del conjunt E fan que $p(x)$passe a ser una proposició certa ho representarem per $\forall x \in E/p(x)$

Exemple 4. *La igualtat* $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, *és certa* $\forall x \in \mathbb{N}$

Exemple 5. *En l'exemple de la pregunta anterior* $p(x) \equiv x = \overset{\bullet}{2}$ *és certa* $\forall x \in E$

- ii)**Quantificador existencial** $(\exists)$

Si existeix algun element en E que fa que p(x) passe a ser una proposició certa ho representarem per $\exists x \in E/p(x)$ és certa quan $x = a$.

Exemple 6. *Si* $E = \{4, 8, 12, 16, 24\} / q(x) = \left\{x/x = \dot{3}\right\}$ *,aleshores* $\exists x_1 = 12$ *i* $\exists x_2 = 24/q(x)$ *és certa.*

Si existeix sols un element ho representarem per $\exists!$

Exemple 7. $\exists! x \in Z/2x + 1 = 3x + 2$

Quan són dos o més els quantificadors que s'utilitzen en una expressió cal tenir en compte l'ordre d'intervenció.

Exemple 8. *Si* Π *representa el conjunts dels punts del pla.*

És correcte: $\forall A \in \Pi, \forall B \in \Pi \Rightarrow \exists C \in \Pi / \overset{\triangle}{ABC}$ és equilàter.

És incorrecte: $\exists C \in \Pi / \forall A \in \Pi \wedge \forall B \in \Pi \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}$ és equilàter.

- iii)**Relacions entre quantificadors**

És fàcil comprovar que :
$\boxed{\neg [\forall x/p(x)] \Leftrightarrow (\exists x/\neg p(x)}$ i $\boxed{\neg [(\exists x/p(x))] \Leftrightarrow (\forall x/\neg p(x).}$ També

$\boxed{\forall x/p(x) \Leftrightarrow \neg \exists x/\neg p(x)}$ i $\boxed{\exists x/p(x) \Leftrightarrow \neg \forall x/\neg p(x).}$ Però

$$
\begin{array}{rl}
1) & \boxed{\forall x\, [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x/p(x)] \wedge [\forall x/q(x)]} \\
2) & \boxed{\exists x\, [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x/p(x)] \vee [\exists x/q(x)]} \\
3) & \boxed{\forall x\, [p(x) \vee q(x)] \Leftarrow [\forall x/p(x)] \vee [\forall x/q(x)]} \\
4) & \boxed{\exists x\, [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x/p(x)] \wedge [\exists x/q(x)]}
\end{array}
$$

Contraexemple de 3) Suposem $E = \mathbb{R}$ $p(x) = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 0\}$,$q(x) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$
Contraexemple de 4) Suposem $E = \mathbb{R}$ $p(x) = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\}$,$q(x) = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$

8. LA DEMOSTRACIÓ: TIPUS

Definició 18. ***Demostració*** *és el procés necessari per a obtenir la conclusió partint de les premisses.*

Per a construir una ciència o una teoria, són necessaris:

- Conceptes primitius o indefinibles: punt, element,...
- Conceptes definits: recta, paràbola,... Són les definicions.

  Enunciats:

  - **Axiomes:** S'assumeixen certs, per exemple $\emptyset$ és un conjunt. En geometria d'Euclides dues rectes paral·leles no es tallen.
  - **Teoremes** són proposicions de les qual s'estableix la seua validesa per mitjà de la demostració.

En matemàtiques, una implicació de la forma $H \Rightarrow T$, s'anomena teorema, on les premisses que constitueixen H són les hipòtesis i la conclusió T s'anomena tesi (el que es vol demostrar). Per mitjà del raonament i/o de les regles d'inferència i/o d'altres teoremes ja demostrats, caldrà demostrar que compleix la tesi, sempre que el sistema de les premisses siga **consistent o no contradictori**, és a dir que en la taula de veritat, totes les premisses que formen les hipòtesis no compten sols de zeros, ja que per contra $\emptyset \Rightarrow p\ \forall p$

$*$ **Tipus de teoremes**

$\boxed{Directe : H \Rightarrow T}$ H és suficient per a T; T és necessari per a H.
$\boxed{Recíproc : T \Rightarrow H}$
$\boxed{Contrari : \neg H \Rightarrow \neg T}$
$\boxed{Contrarecíproc : \neg T \Rightarrow \neg H}$

Nota 5. *Cal saber la distinció entre LEMA que és un teorema útil per a provar un altre teorema i COROL·LARI que és un teorema que es dedueix immediatament d'un teorema.*

Tipus de demostracions

1. Demostració directa.
   Es demostra la tesi T partint de la hipòtesi H, utilitzant les regles d'inferència.
2. Demostració per exemple o contraexemple.
   - Demostreu que és cert: Hi ha números primers majors que 200. Per exemple 211

* Demostreu que és fals: Tots els primers són senars (imparells). Contraexemple 2.

3. Demostració per reducció a l'absurd (R.A.)
   Aquesta demostració es basa en la regla d'inferència (T.T.). Consisteix a negar allò que volem demostrar que és la tesi. El procediment finalitza quan després d'un raonament lògic correcte s'arriba a negar la hipòtesi o a una contradicció.
   Així doncs, són equivalents els teoremes directe i contrarecíproc; els teoremes contrari i recíproc. És a dir:
   $\boxed{H \Rightarrow T \Leftrightarrow \urcorner T \Rightarrow \urcorner H}$ $\boxed{T \Rightarrow H \Leftrightarrow \urcorner H \Rightarrow \urcorner T}$

4. Demostració condicional.
   S'utilitza per a concloure una proposició de la forma $A \rightarrow B$. En la pràctica s'afirma A, la qual ve introduïda per la regla de la premissa (R.P.). El procés finalitza quan s'obté B.
   Aquesta demostració ve avalada per la regla condicional (R.C.), ja que si hem obtingut B, aquesta regla afirma que $B \Rightarrow A \rightarrow B$.

5. Demostració per inducció completa.
   S'indueix un resultat general a partir d'uns casos particulars. S'utilitza sobretot en el conjunt dels naturals.
   Es basa en el següent:
   $\boxed{\text{Donat } A \subseteq \mathbb{N}/\ i)0 \in A\ ii)x \in A \Rightarrow x+1 \in A} \Rightarrow \boxed{A = \mathbb{N}}$

Exercici 10. *Demostreu per inducció completa* $\forall n \in N - \{0\}$

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
3. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
4. $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$

$\boxed{\text{Solució de 3.}}$

Si n=1, $\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6}$ $\qquad \frac{1(1+3)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{4}{4.2.3} = \frac{1}{6}$ És cert.

Suposem que l'expressió és certa per a n=h (hipòtesi d'inducció)

$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{h(h+1)(h+2)} = \frac{h(h+3)}{4(h+1)(h+2)}$

Tesi: $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{h(h+1)(h+2)} + \frac{1}{(h+1)(h+2)(h+3)} = \frac{(h+1)(h+4)}{4(h+2)(h+3)}$

En efecte:

$Primer\ terme = \frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{h(h+1)(h+2)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)(h+3)} \underset{Hip.d'ind.}{=} \frac{h(h+3)}{4(h+1)(h+2)}+$
$\frac{1}{(h+1)(h+2)(h+3)} =$
$\frac{h(h+3)^2+4}{4(h+1)(h+2)(h+3)} = \frac{h(h^2+6h+9)+4}{4(h+1)(h+2)(h+3)} = \frac{h^3+6h^2+9h+4}{4(h+1)(h+2)(h+3)} = \frac{(h+1)^2(h+4)}{4(h+1)(h+2)(h+3)} = \frac{(h+1)(h+4)}{4(h+2)(h+3)} =$
Segon terme

$\boxed{\text{Solució de 4.}}$

Si n=1 $2 = 2(2^1 - 1)$. És cert.

Si n=h $2+4+8+16+\ldots+2^h = 2(2^h-1)$ (hipòtesi d'inducció)

Tesi: $2+4+8+16+\ldots+2^{h+1} = 2(2^{h+1}-1)$

En efecte:

$Primer\ terme = 2+4+8+16+\ldots+2^h+2^{h+1} \underset{Hip.d'ind.}{=} 2(2^h-1)+2^{h+1} =$
$2^{h+1}-2+2^{h+1} =$
$2.2^{h+1}-2 = 2.(2^{h+1}-1) = Segon\ terme.$

PROBLEMES TEMA 1 LÒGICA PROPOSICIONAL

1. Donades les proposicions: p: Robert és futbolista, q: Pere és ciclista. Expresseu simbòlicament les proposicions següents en funció de p, de q i dels connectors corresponents.

   i) Robert és futbolista i Pere és ciclista.

   ii) Robert no és futbolista.

   iii) Ni Pere és ciclista ni Robert futbolista.

   iv) Tan cert és que Per és ciclista com que Robert és futbolista.

   Sol.: i) $p \wedge q$ ii) $\neg p$ iii) $\neg q \wedge \neg p$ iv) $q \leftrightarrow p$

2. Demostreu les següents tautologies:

   i) $[(p \vee q) \wedge p] \Leftrightarrow p$.

   ii) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

   iii) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow p \longleftrightarrow q$.

   Sol.:

   i)

p	q	$p \vee q$	$[(p \vee q) \wedge p]$	$[(p \vee q) \wedge p] \leftrightarrow p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

   ii), iii) queden demostrades en l'utilitzar les taules de veritat.

3. Simplifiqueu l'expressió: $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \wedge q)$.

   Sol.: $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p) \vee \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \vee \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg q) \Leftrightarrow$ $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge q \Leftrightarrow T \wedge q \Leftrightarrow q$.

4. Demostreu que si p i q són dues proposicions equivalents i r una proposició qualsevol, cadascuna de les següents proposicions és una tautologia.

   i) $(r \rightarrow p) \Leftrightarrow (r \rightarrow q)$.

   ii) $(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)$.

   Sol.: Com per hipòtesi $p \Leftrightarrow q$, caldrà posar la taula de veritat amb p i q que tinguen els mateixos valors lògics.

p	q	r	$r \rightarrow p$	$r \rightarrow q$	$(r \rightarrow p) \leftrightarrow (r \rightarrow q)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

ii)

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \leftrightarrow (q \vee r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

5. Estudieu si són certes o falses les següents proposicions:

   i) És fals que la lluna és un formatge i que la neu és negra, o que Madrid és la capital d'Espanya.

   ii) Si Madrid és la capital de França, aleshores Napoleó fou rei d'Espanya.

   iii) Si hui és dimarts, despús-demà serà divendres o ahir no va eixir el sol.

   i) p: La Lluna és un formatge, q: La neu és negra, r: Madrid és la capital d'Espanya.

   Sol.:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
0	0	1	0	1

   La frase és certa (ja que al menys és cert que Madrid és la capital d'Espanya.)

   ii) p: Madrid és la capital de França, q̇: Naploéó fou rei d'Espanya.

p	q	$p \to q$
0	0	1

   La frase és certa ja que cap de les proposicions és certa.

   iii) p: Hui és dimarts, q: Despús-demà serà divendres, r: Ahir no va eixir el sol.

	p	q	r	$p \to (q \vee r)$	$q \vee r$
dimarts	1	0	0	0	0
dimecres	0	1	0	1	1
altre dia	0	0	0	1	0

   La frase no sempre és certa.

6. Trobeu la negació d'aquestes proposicions:

   i) Josep ha aprovat matemàtiques i Joan ha aprovat física.

   ii) Josep és violinista o Joan és jugador d'escacs.

   iii) Si plou, es banyen els carrers.

   Sol.:

   p: Josep ha aprovat matemàtiques, q: Joan ha aprovat física.

   i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$. Josep no ha aprovat matemàtiques o Joan no ha aprovat física.

   ii) p: Josep és violinista, q: Joan és jugador d'escacs. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. Ni Josep és violinista ni Joan és jugador d'escacs.

   iii) p: plou, q: es banyen els carrers. $\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$. Plou i no es banyen els carrers.

7. Demostreu per reducció a l'absurd la validesa dels següents raonaments:

i)
$p_1: \; p \to q$
$p_2: \; p \leftrightarrow \neg r$
$p_3: \; \neg q$
$c \; : \; r$

ii)
$p_1: \; (p \vee q) \vee r$
$p_2: \; \neg p \wedge \neg q$
$c \; : \; r$

iii)
$p_1: \; p \to q$
$p_2: \; t \to r \vee u$
$p_3: \; r \to \neg q$
$c \; : \; t \to (p \to u)$

Sol.: i) Primera forma de solucionar l'exercici:

1. $\neg r$	$R.P.$
2. $(p \to q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r)$	$A.(p_1, p_2)$
3. $\neg r \to q$	$L.S.(2)$
4. $(\neg r \to q) \wedge \neg q$	$A.(3, p_3)$
5. $\neg(\neg r)$	$T.T.(4)$
6. r	$D.N.(5)$
7. $r \wedge \neg r$	$A.(6,1)$
8. C	

Segona forma de solucionar l'exercici:

1. $\neg r$	$R.P.$
2. $(p \to \neg r) \wedge (\neg r \to p)$	$C.B.(p_2)$
3. $\neg r \to p$	$S.(2)$
4. $(\neg r \to p) \wedge (p \to q)$	$A.(3, p_1)$
5. $\neg r \to q$	$S.H.(4)$
6. $(\neg r \to q) \wedge \neg q$	$A.(5, p_3)$
7. $\neg(\neg r)$	$T.T.(6)$
8. r	$D.N.(7)$
9. $r \wedge \neg r$	$A.(8,1)$
10. C	

ii)

1. $\neg r$	$R.P.$
2. $[(p \vee q) \vee r] \wedge \neg r$	$A.(p_1, 1)$
3. $p \vee q$	$T.P.(2)$
4. $\neg p$	$S.(p_2)$
5. $(p \vee q) \wedge \neg p$	$A.(3,4)$
6. q	$T.P.(5)$
7. $\neg q$	$S.(p_2)$
8. $q \wedge \neg q$	$A(6,7)$
9. C	

iii) En negar la tesi obtindriem: $\neg [t \to (p \to u)] \Leftrightarrow \neg (\neg t \vee (\neg p \vee u)) \Leftrightarrow t \wedge p \wedge \neg u$.

1. $t \wedge p \wedge \neg u$	$R.P.$
2. t	$S.(1)$
3. $t \wedge (t \to r \vee u)$	$A.(2, p_2)$
4. $r \vee u$	$P.P.(3)$
5. p	$S.(1)$
6. $p \wedge (p \to q)$	$A(5, p_1)$
7. q	$P.P.(6)$
8. $q \wedge (r \to \neg q)$	$A(7, p_3)$
9. $\neg r$	$T.T.(8)$
10.$\neg u$	$S.(1)$
11.$(r \vee u) \wedge \neg u$	$A.(4, 10)$
12.r	$T.P.(11)$
13.$\neg r \wedge r$	$A : 9, 10)$

Ja hem aplegat a una contradicció.

8. Demostreu les conclusions a partir de les premisses:

i) $\begin{array}{ll} p_1 : & \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ p_2 : & s \to \neg q \\ p_3 : & \neg p \vee s \\ c \ : & \neg p \leftrightarrow q \end{array}$ ii) $\begin{array}{ll} p_1 : & p \wedge q \to s \\ p_2 : & s \wedge r \to t \\ p_3 : & u \to q \wedge r \\ p_4 : & \neg(\neg u \vee \neg p) \\ c \ : & t \end{array}$

Sol.: i) El que volem demostrar és una bicondicional. Utilitzant la regla d'inferència condicional bicondicional, caldrà demostrar que $(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$.

1. $\neg p$	$R.P.$
2. $p \vee q$	$D.N.\ i\ D.M.(p_1)$
3. $\neg p \wedge (p \vee q)$	$A.(1, 2)$
4. q	$T.P.(3)$

1. q	$R.P.$
2. $q \wedge (s \to \neg q)$	$A.(1, p_2)$
3. $\neg s$	$T.T.(2)$
4. $(\neg p \vee s) \wedge \neg s$	$A.(p_3, 3)$
5. $\neg p$	$T.P.(4)$

ii)

1. $u \wedge p$	$D.M.\ i\ D.N.(p_4)$
2. u	$S.(1)$
3. $u \wedge (u \to q \wedge r)$	$A.(2, p_3)$
4. $q \wedge r$	$P.P.(3)$
5. p	$S.(1)$
6. q	$S.(4)$
7. $p \wedge q$	$A.(5, 6)$
8. $(p \wedge q) \wedge [(p \wedge q) \to s)]$	$A.(7, p_1)$
9. s	$P.P.(8)$
10.r	$S.(4)$
11.$s \wedge r$	$A.(9, 10)$
12.$(s \wedge r) \wedge [(s \wedge r) \to t]$	$A.(11, p_2)$
13.t	$P.P.(12)$

9. Utilitzeu la reducció a l'absurd per a demostrar les conclusions de l'exercici anterior.

10. Obtingueu els predicats de primer ordre per a cadascuna de les frases següents i establiu-ne clarament cada element. En aquelles en què les conclusions s'obtenen lògicament de les premisses, trobeu una demostració formal.

    i) Si els llibres amb il·lustracions agraden als xiquets i els llibres sense il·lustracions els fan dormir, aleshores tots els llibres agraden als xiquets a menys que els facen dormir.

    ii) Si algunes vacances tenen dies de plutja i tots els dies de pultja són avorrits, aleshores algunes vacances són avorrides.

    Sol.:

    i) Siga $E = \{x \ / \ x \in llibres\}$, $p(x) =$ "x llibres amb il·lustracions", $q(x) =$ "x llibres que agraden als xiquets", $r(x) =$ "x llibres que els fan dormir".

    $p_1 : \ \forall x \quad p(x) \rightarrow q(x)$
    $p_2 : \ \forall x \quad \urcorner p(x) \rightarrow r(x)$
    $c \ : \ \forall x \quad r(x) \Delta q(x)$

    La conclusió resulta ser una disjunció exclusiva i es traduir en què tots els llibres, o agraden als xiquets i no els fan dormir, o no els agraden i els fan dormir. És a dir, $r(x)\Delta q(x) \Leftrightarrow (r(x) \wedge \urcorner q(x)) \vee (\urcorner r(x) \wedge q(x))$.

    Per a veure si la conclusió s'obté lògicament de les premisses caldrà veure que la condicional $p_1 \wedge p_2 \rightarrow c$ és una tautologia.

    En les dues premisses i en la conclusió s'observa que ocòrre per a tots els elements del conjunt referencial E. Aleshores podrem escriure:

    $p_1 : \quad p \rightarrow q$
    $p_2 : \quad \urcorner p \rightarrow r$
    $c \ : \quad r \Delta q$

p	q	r	$\urcorner p$	$\urcorner q$	$\urcorner r$	p_1	p_2	$r \wedge \urcorner q$	$\vee$	$\urcorner r \wedge q$	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \wedge p_2 \rightarrow c$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0

    Aleshores la conclusió no és consequència lògica de les premisses. No és possible demostrar la conclusió a partir de les premisses.

ii)Siga $E = \{x \ / \ x \in \text{dies}\}$, $p(x) =$ "x dies de vacances", $q(x) =$ "x dies de plutja", $r(x) =$ "x dies avorrides".

$p_1 : \ \exists x \quad p(x) \land q(x)$
$p_2 : \ \forall x \quad q(x) \to r(x)$
$c \ : \ \exists x \quad p(x) \land r(x)$

Per a veure si la conclusió s'obté lògicament de les premisses caldrà veure que la condicional $p_1 \land p_2 \to c$ és una tautologia.

Transformarem les anteriors premisses amb el següent:

$p_1 :$ Si $x = a \in E \quad p(a) \land q(a)$
$p_2 :$ $\forall x \in E$, en particular $\quad x = a, \ q(a) \to r(a)$
$c \ :$ Si $x = a \in E \quad p(a) \land r(a)$

En suprimir a, obtenim:

$p_1 : \quad p \land q$
$p_2 : \quad q \to r$
$c \ : \quad p \land r$

p	q	r	p_1	p_2	$p_1 \land p_2$	c	$p_1 \land p_2 \to c$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Així, doncs, la conclusió s'obté lògicament de les premisses. Demostració:

1. q $\quad S.(p_1)$
2. $(q \to r) \land q$ $\quad A.(p_2, 1)$
3. r $\quad P.P.(2)$
4. p $\quad S.(p_1)$
5. $p \land r$ $\quad A.(4, 3)$

11. Utilitzeu les funcions proposicionals següents per a obtenir els predicats corresponents: $x \in \{gossos\}$, $\ y \in \{gossers\}$, $z \in \{pobles\}$, $p(x, y) = x$ viu en z, $q(x, y) = x$ ha mossegat y.

i) Tots els pobles tenen un gosser que ha estat mossegat per tots els gossos del poble.

ii) Cap poble té un gosser que haja estat mossegat per tots els gossos del poble.

iii) Almenys un poble té un gosser que no ha estat mossegat per cap gos del poble.

Sol.:

i) $\forall z \quad \exists y \quad (p(y,z) \wedge \forall x \quad (p(x,y) \to q(x,y)))$.

ii) $\neg\exists z \quad \neg\exists y \quad (p(y,z) \wedge \forall x \quad (p(x,y) \to q(x,y))) \Leftrightarrow \forall z \quad \forall y \quad (p(y,z) \wedge \forall x \quad (\neg p(x,y) \vee q(x,y))$

iii) $\exists z \quad \exists y \quad (p(y,z) \wedge \neg\exists x \quad (p(x,y) \wedge q(x,y))) \Leftrightarrow \exists z \quad \exists y \quad (p(y,z) \wedge \forall x \quad \neg(p(x,y) \wedge q(x,y))) \Leftrightarrow$
$\exists z \quad \exists y \quad (p(y,z) \wedge \forall x \quad (\neg p(x,y) \vee \neg q(x,y)))$.

12. Demostreu les conclusions a partir de les premisses.

$$\text{i)}\ \begin{array}{ll} p_1: & \forall x\ p(x) \to q(x) \\ p_2: & \forall x\ s(x) \to r(x) \\ p_3: & \neg\exists x\ q(x) \wedge r(x) \\ c\ : & \forall x\ s(x) \to \neg p(x) \end{array} \qquad \text{ii)}\ \begin{array}{ll} p_1: & \forall x\ p(x) \to q(x) \\ p_2: & \forall x\ s(x) \to \neg r(x) \\ p_3: & \forall x\ \neg p(x) \to s(x) \\ c\ : & \forall x\ r(x) \to q(x) \end{array}$$

$$\text{iii)}\ \begin{array}{ll} p_1: & p(a) \\ p_2: & \neg\exists x\ \neg q(x) \wedge r(x) \\ p_3: & \neg\exists x\ q(x) \wedge p(x) \\ c\ : & \neg r(a) \end{array} \qquad \text{iv)}\ \begin{array}{ll} p_1: & \forall x\ \exists y\ p(x,y) \wedge s(x,y) \\ p_2: & \forall x\ \forall y\ \ p(x,y)) \to r(x,y) \\ c\ : & \forall x\ \exists y\ r(x,y) \wedge s(x,y) \end{array}$$

Sol.:

$$\text{i)}\ \begin{array}{ll} p_1: & \forall x\ p(x) \to q(x) \\ p_2: & \forall x\ s(x) \to r(x) \\ p_3: & \forall x\ \neg q(x) \vee \neg r(x) \\ c\ : & \forall x\ s(x) \to \neg p(x) \end{array}$$

Com que cadascuna de les premisses es verifica per a tots els elements del conjunt universal, podrem substituir per qualsevol element $a \in E$. Aleshores ens quedaria:

$$\begin{array}{ll} p_1: & p(a) \to q(a) \\ p_2: & s(a) \to r(a) \\ p_3: & \neg q(a) \vee \neg r(a) \\ c\ : & s(a) \to \neg p(a) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} p_1: & p \to q \\ p_2: & s \to r \\ p_3: & \neg q \vee \neg r \\ c\ : & s \to \neg p \end{array}$$

Cal veure la demostració:

1. s	*R.P.*
2. $s \wedge (\ s \to r)$	$A.(1, p_2)$
3. r	$P.P.(2)$
4. $(\neg q \vee \neg r) \wedge r$	$A.(p_3, 3)$
5. $\neg q$	$T.P.(4)$
6. $(p \to q) \wedge \neg q$	$A.(p_1, 5)$
7. $\neg p$	$T.T.(6)$

$$\text{iv)}\ \begin{array}{ll} p_1: & \forall x\ \exists y_x\ p(x,y_x) \wedge s(x,y_x) \\ p_2: & \forall x\ \forall y\ \ p(x,y)) \to r(x,y) \\ c\ : & \forall x\ \exists y_x\ r(x,y_x) \wedge s(x,y_x) \end{array} \quad \text{Si} \quad x = a \quad \begin{array}{ll} p_1: & \forall a\ \exists y_a\ p(a,y_a) \wedge s(a,y_a) \\ p_2: & \forall a\ \forall y\ \ p(a,y)) \to r(a,y) \\ c\ : & \forall a\ \exists y_a\ r(a,y_a) \wedge s(a,y_a) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} p_1: & p(a,y_a) \wedge s(a,y_a) \\ p_2: & \text{En particular}\ \ p(a,y_a)) \to r(a,y_a) \\ c\ : & r(a,y_a) \wedge s(a,y_a) \end{array}$$

La demostració:

1. $p(a, y_a)$	$S.(p_1)$
2. $p(a, y_a) \wedge (p(a, y_a)) \rightarrow r(a, y_a))$	$A.(1, p_1)$
3. $r(a, y_a)$	$P.P.(2)$
4. $s(a, y_a)$	$S.(p_1)$
5. $r(a, y_a) \wedge s(a, y_a)$	$A.(3, 4)$
6. $\forall x \;\; r(x, y_x) \wedge s(x, y_x)$	
7. $\forall x \; \exists y \; r(x, y) \wedge s(x, y)$	

13. Obtingueu els predicats de primer ordre corresponents a cadascuna de les següents premisses i conclusions. Estudieu en quins apartats la conclusió es dedueix lògicament de les premisses. En aquests cassos, obtingueu la demostració formal.

i)
p_1 : Totes les explicacions clares són satisfatòries.
p_2 : Algunes excuses no són satisfactòries.
c : Algunes excuses no són explicacions clares.

ii)
p_1 : Si el sospitós és l'assassí, estarà nerviós quan siga interrogat.
p_2 : El sospitós està nerviós durant l'interrogatori.
c : El sospitós és l'assassí.

iii)
p_1 : Algunes notícies falses no són verificades.
p_2 : Totes les notícies autoritzades són verificades.
c : Algunes notícies no autoritzades són falses.

iv)
p_1 : Si el sospitós té sang en les mans, és l'assassí.
p_2 : El sospitós no té sang en les mans.
c : El sospitós és innocent.

Sol.:

i) Siga $E = \{x \; / \; x \in \text{explicacions}\}$, $p(x) =$ "x explicacions clares", $q(x) =$ "x explicacions satisfatòries", $r(x) =$ "x excuses".

p_1 : $\forall x \quad p(x) \rightarrow q(x)$.
p_2 : $\exists x \quad r(x) \wedge \urcorner q(x)$.
c : $\exists x \quad r(x) \wedge \urcorner p(x)$.

Transformarem les anteriors premisses amb el següent:

p_1 : $\forall x \in E$, en particular $x = a$, $p(a) \rightarrow q(a)$.
p_2 : Si $x = a \in E \quad r(a) \wedge \urcorner q(a)$.
c : Si $x = a \in E \quad r(a) \wedge \urcorner p(a)$.

En suprimir a, obtenim:

p_1 : $p \rightarrow q$
p_2 : $r \wedge \urcorner q$ La taula de veritat per a demostrar la tautologia $p_1 \wedge p_2 \rightarrow c$
c : $r \wedge \urcorner p$
serà:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	c	$p_1 \wedge p_2 \to c$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1

Demostració formal:

1. r	$S.(p_2)$
2. $\neg q$	$S.(p_2)$
3. $(p \to q) \wedge \neg q$	$A.(p_1, 2)$
4. $\neg p$	$T.T.(3)$
5. $r \wedge \neg p$	$A.(1,4)$

ii) Siga $E = \{x \;/\; x \in \text{sospitosos}\}$, $p(x) =$ "x sospitós assassí", $q(x) =$ "x sospitós nerviós", $r(x) =$ "x sospitós interrogat".

$p_1: \quad \forall x \quad p(x) \to (r(x) \to q(x))$.
$p_2: \quad \exists x \quad q(x) \wedge r(x)$.
$c \;: \quad \exists x \quad p(x)$.

Transformarem les anteriors premisses amb el següent:

$p_1: \quad \forall x \in E$, en particular $\quad x = a, \quad p(a) \to (r(a) \to q(a))$.
$p_2: \quad$ Si $x = a \in E \quad q(a) \wedge r(a)$.
$c \;: \quad$ Si $x = a \in E \quad p(a)$.

En suprimir a, obtenim:

$p_1: \quad p \to (r \to q)$
$p_2: \quad q \wedge r$
$c \;: \quad p$

La taula de veritat per a demostrar la tautologia $p_1 \wedge p_2 \to c$ serà:

p	q	r	$r \to q$	p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \wedge p_2 \to c$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

No serà possible la demostració, ja que la conclusió no se dedueix lògicament de les premisses.

iii) Siga $E = \{x \ / \ x \in \text{notícies}\}$, $p(x) =$ "x notícies falses", $q(x) =$ "x notícies verificades", $r(x) =$ "x notícies autoritzades".

$p_1 : \ \exists x \ \ p(x) \wedge \neg q(x).$
$p_2 : \ \forall x \ \ r(x) \rightarrow q(x).$
$c \ : \ \exists x \ \ \neg r(x) \wedge p(x).$

iv) Siga $E = \{x \ / \ x \in \text{sospitosos}\}$, $p(x) =$ "x sospitós té sang", $q(x) =$ "x sospitós és l'assassí".

$p_1 : \ \forall x \ \ p(x) \rightarrow q(x).$
$p_2 : \ \exists x \ \ \neg p(x)$
$c \ : \ \exists x \ \ \neg q(x)$

La conclusió no és consequència lògica de les premisses.

14. Demostreu per inducció completa:

i) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

ii) $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ és divisible per 7 $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Sol.:

i) Si $n = 1$, $\quad 1 = 1^2$, $\qquad$ Si $n = 2$, $\quad 1 + 3 = 2^2$. També es verifica.

Suposem que es verifica per a $n = h$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2h-1) = h^2$ Aquesta igualtat es verifica per l'anomenada hipòtesi d'inducció.

Caldrà veure que la fòrmula és certa per a $n = h + 1$. És a dir, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2(h+1) - 1) = (h+1)^2$.

En efecte: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2(h+1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2h-1) + (2(h+1) - 1) = \underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2h-1)}_{h^2} + (2h+1) = h^2 + (2h+1) = (h+1)^2$.

ii) Si $n = 0$, $\quad 3^2 - 2 = 7$, divisible per 7.

Si $n = 1$, $\quad 3^4 - 2^2 = 77$, divisible per 7.

Suposem que per a $n = h$, també es verifica que $3^{2h+2} - 2^{h+1}$ és divisible per 7. És a dir, $3^{2h+2} - 2^{h+1} = \dot{7}$ (hipòtesi d'inducció).

Caldrà veure que la fòrmula és certa per a $n = h + 1$. És a dir, $3^{2(h+1)+2} - 2^{(h+1)+1} = \dot{7}$.

En efecte, $3^{2(h+1)+2} - 2^{(h+1)+1} = 3^{2h+4} - 2^{h+2} = 3^{2h+2}3^2 - 2^{h+1}2 = 3^{2h+2}(7 + 2) - 2^{h+1}2 = 7\ 3^{2h+2} + 2\ 3^{2h+2} - 2\ 2^{h+1} = 7\ 3^{2h+2} + 2\ \left(3^{2h+2} - \ 2^{h+1}\right) = \dot{7} + 2\ \dot{7} = \dot{7}$.

iii) Si $n=1$, $\quad 1^2=\dfrac{1.1.3}{3}$, $\qquad$ Si $n=2$, $\quad 1^2+3^2=\dfrac{2.3.5}{3}$

Suposem que es verifica per a $n=h$, $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2h-1)^2=\dfrac{h(2h-1)(2h+1)}{3}$

És a dir,$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2h-1)^2=\dfrac{h(2h-1)(2h+1)}{3}$ (hipòtesi d'inducció).

Caldrà veure que la fòrmula és certa per a $n=h+1$. És a dir, $1^2+3^2+5^2+\cdots+$ $(2(h+1)-1)^2=\dfrac{(h+1)\,(2(h+1)-1)\,(2(h+1)+1)}{3}=\dfrac{(h+1)\,(2h+1)\,(2h+3)}{3}$

En efecte, $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2(h+1)-1)^2=\underbrace{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2h-1)^2}_{hip.d'inducció}$

$$+\,(2(h+1)-1)^2=\frac{h(2h-1)(2h+1)}{3}+(2h+1)^2=\frac{h(2h-1)(2h+1)+3(2h+1)^2}{3}=$$
$$\frac{(2h+1)\,(h(2h-1)+3(2h+1))}{3}=\frac{(2h+1)\,(2h^2+5h+3)}{3}=\frac{(h+1)\,(2h+1)\,(2h+3)}{3}$$

15. Esbrineu la identitat d'aquests dos bessons.

Joan i Pere són dos bessons tan iguals que l'únic detall que es diferència és que, pel cap baix, hi ha un que mai no diu la veritat, tot i que no sabem qui.

Convocats per un amic amb el propòsit de descobrir la identitat d'ambdós, l'interrogatori es desenvolupa així:

-¿Que ets Joan, tu?, diu l'amic al primer bessó.

-Sí, soc jo, respon el bessó.

-¿Que ets Joan, tu?, pregunta l'amic al segon bessó.

Aleshores, el segon bessó respón sí o no, i l'amic sap amb certesa quin dels dos és Joan, i per tant, quin és Pere. Ho saps tu?.

Sol.:

Nota: Mai no diu la veritat vol dir que sempre diu la veritat (doble negació és afirmació).

Si Joan és el primer bessó, Joan diu la veritat i per tant

1^{er}	*bessó*	*Joan*	*veritat*	*Sí*
2^{on}	*bessó*	*Pere*	*mentida*	*Sí*

Si Pere és el primer bessó, Pere diu la mentida i per tant hi ha dos cassos possibles:

1^{er}	*bessó*	*Pere*	*mentida*	*Sí*	1^{er}	*bessó*	*Pere*	*mentida*	*Sí*
2^{on}	*bessó*	*Joan*	*veritat*	*Sí*	2^{on}	*bessó*	*Joan*	*mentida*	*No*

Com l'amic sap qui és qui, és perque el segon ha contestat No. Per la qual cosa la solució és:

1^{er}	*bessó*	*Pere*	*Sí*	Els dos bessons diuen mentida.
2^{on}	*bessó*	*Joan*	*No*	

16. Si Alicia no va veure a Marta en en cine, Marta estava en classe o Alicia diu mentida. Si Marta no estava en classe, aleshores Alicia no va veure a Marta en el cine i la classe no va ser pel matí. Si la classe fou pel matí, aleshores Marta no estava en classe o Alicia diu mentida. Alicia no va veure a Marta en el cine i Alicia no diu mentida.

    Expreseu aquestes proposicions i deduïu la conclusió "la classe no fou pel matí", si aquesta s'obté lògicament de les premisses.

    Sol.: p : "Alicia va veure a Marta en en cine", q : "Marta estava en classe", r : "Alicia diu mentida", s : "La classe fou pel matí".

    $p_1 : \; \neg p \to q \vee r$
    $p_2 : \; \neg q \to \neg p \wedge \neg s$
    $p_3 : \; s \to \neg q \vee r$ Demostració:
    $p_4 : \; \neg p \wedge \neg r$
    $c \; : \; \neg s$

    Aquests problemes sempre es poden demostrar de diverses formes:

    Primera forma:

1. $p \vee (q \vee r)$	$C.D.(p_1)$
2. $q \vee (\neg p \wedge \neg s)$	$C.D.(p_2)$
3. $\neg s \vee (\neg q \vee r)$	$C.D.(p_3)$
4. $\neg p$	$S.(p_4)$
5. $[p \vee (q \vee r)] \wedge \neg p$	$A.(1,4)$
6. $q \vee r$	$T.P.(5)$
7. $\neg r$	$S.(p_4)$
8. $(q \vee r) \wedge \neg r$	$A.(6,7)$
9. q	$T.P.(8)$
10. $[\neg s \vee (\neg q \vee r)] \wedge q$	$A.(3,9)$
11. $\neg s \vee r$	$T.P.(10)$
12. $(\neg s \vee r) \wedge \neg r$	$A.(11,7)$
13. $\neg s$	$T.P.(12)$

    Segona forma: Per reducció a l'absurd.

1. s	$R.P.$
2. $(s \rightarrow \neg q \vee r) \wedge s$	$A.(p_3, 1)$
3. $\neg q \vee r$	$T.P.(2)$
4. $\neg r$	$S.(p_4)$
5. $(\neg q \vee r) \wedge \neg r$	$A.(3, 4)$
6. $\neg q$	$T.P.(5)$
7. $(\neg q \rightarrow \neg p \wedge \neg s) \wedge \neg q$	$A\ .(p_2, 6)$
8. $\neg p \wedge \neg s$	$T.P.(7)$
9. $\neg p$	$S.(p_4)$
10. $(\neg p \rightarrow q \vee r) \wedge \neg p$	$A.(p_1, 9)$
11. $q \vee r$	$T.P.(10)$
12. $(q \vee r) \wedge \neg r$	$A.(11, 4)$
13. q	$T.P.(12)$
14. $\neg q \wedge q$	$A(6, 13)$
15. C	

17. Per a tractar diversos assumptes, es reuneixen un enginyer, un professor, un estudiant i un arquitecte, que són presentats com Mercé, Pau, Laia i Manel

Manel comenta amb l'enginyer sobre una possible construcció de vivendes. Pau conegué l'estudiant en una conferència. L'arquitecte i Manel són amics però no han estat mai junts en una conferència. Ni Mercé ni l'arquitecte coneixien a Laia abans de la reunió.

¿Saps tu dir qui és cadascú?.

	Mercé	Pau	Laia	Manel
Enginyer	*NO*	*NO*	*SI*	*NO*
Professor	*NO*	*NO*	*NO*	*SI*
Estudiant	*SI*	*NO*	*NO*	*NO*
Arquitecte	*NO*	*SI*	*NO*	*NO*

Sol.:

Com que Manel comenta amb l'enginyer, Manel no és l'enginyer. Com que Pau conegué l'estudiant, Pau no és l'estudiant. Com que Manel és amic de l'arquitecte, Manel no és l'arquitecte. L'arquitecte no són ni Merçé ni Laia ja que no es coneixien abans de la reunió. Aleshores, l'arquitecte és Pau. Per la qual cosa, Pau no és el professor ni l'enginyer. L'estudiant no és Manel, ja que Pau conegué l'estudiant en una conferència i Pau (arquitecte) i Manel, que són amics, mai havien estat junts en una conferència. Per la qual cosa Manel és el profesor. Merçé ni Laia son professores (és Manel).

Ja que ni Merçé ni Pau coneixien a Laia abans de la reunió i Pau conegué l'estudiant en una conferència, resulta que Laia no és l'estudiant.

Laia és l'enginyer, Manel el professor, Merçé l'estudiant i Pau l'arquitecte.

Part I
TEMA 2: FUNCIONS LÒGIQUES. CIRCUITS. MAPES DE KARNAUGH.

1. INTRODUCCIÓ

El procés de la informàtica binària que realitzen els computadors ve modelat mitjançant circuits lògics que estan compostos per les portes lògiques i per les línies.

L'anàlisi i síntesi dels circuits queden estudiades en les propietats de l'Àlgebra de Boole dels circuits. La simplificació de les funcions booleanes pels mètodes dels mapes de Karnaugh o de Quine-McCluskey facilita i economitza el disseny lògic en general.

2. ÀLGEBRA DE BOOLE DE LA COMMUTACIÓ

Suposem $B = \{0,1\}$.

Definim una operació binària $+$ o $\vee$ $\quad + : B \times B \to B$ tal que

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Definim una operació binària $\cdot$ o $\wedge$ $\quad \cdot : B \times B \to B$ tal que

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Definim una operació monària $-$ o complementació $- : B \to B$ tal que

−	0	1
	1	0

Aleshores es pot demostrar que $(B, +, \cdot, -)$ és una Àlgebra de Boole, anomenada Àlgebra de Boole de la Commutació. Aquesta Àlgebra de Boole és isomorfa a la de les proposicions lògiques $(P, \vee, \wedge, \neg)$.

3. TERMINOLOGIA

Definició 1. *Una variable x, s'anomena* **variable booleana** *si sols pren valors de B, sent $B = \{0,1\}$.*

Definició 2. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B \times B \times \ldots^{(n} \times B = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n), b_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$.*

Una funció $f : B^n \to B$, s'anomena **funció booleana** quan la seua imatge, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve definida per la composició de x_i o $\overline{x}_i$ $\quad 1 \leq i \leq n$ amb les lleis $+$ i $\cdot$

Per exemple $f : B^3 \to B \quad / \quad f(x, y, z) = xy + z$.

Per exemple $g : B^3 \to B \quad / \quad g(x, y, z) = xy + \overline{y}z + \overline{x}y\overline{z}$.

Nota 1. *Qualsevol funció booleana de n variables queda determinada avaluant la funció per a cada una de les 2^n possibilitats o mitjançant la taula de veritat.*

Exercici 1. *Trobeu la taula de veritat de la funció booleana* $f(x,y,z) = xy + z$.

x	y	z	xy	$xy+z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Aleshores $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz$.

Exercici 2. *Trobeu la taula de veritat de la funció booleana* $g : B^3 \to B$ *tal que* $g(x,y,z) = xy + \overline{y}z + \overline{x}y\overline{z}$.

Sol. En columna 01100111.

Definició 3. *A cada terme* x_i *o al seu complementari* $\overline{x}_i$, $1 \leq i \leq n$ *s'anomena* ***literal****. Així doncs, el literal està format per un sol element.*

Definició 4. *A cada terme de la forma* $y_1 y_2 ... y_n$, *on* y_i *és* x_i *o* $\overline{x}_i$, $1 \leq i \leq n$. *s'anomena* ***conjunció fonamental o monomi****. És a dir, monomi és un producte d'un o de diversos literals. Per exemple* $\overline{x}_1 x_2 x_3$, $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1 x_2$.

Definició 5. *Un* ***minterme*** *de* n *elements* $x_1, x_2, ..., x_n$ *és un monomi amb* n *literals obtinguts en escollir exactament un element de cada par* $(x_i, \overline{x}_i)$.

Per exemple si x_1, x_2, x_3 són tres elements, els 8 mintermes seran:
$x_1x_2x_3$, $x_1x_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_2x_3$, $\overline{x}_1x_2x_3$, $\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1\,\overline{x}_2x_3$, $x_1\overline{x}_2\,\overline{x}_3$, $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$.

Definició 6. *Una representació de* f *com a suma de mintermes s'anomena* ***forma normal disjuntiva*** *(f.n.d.). És a dir, la f.n.d.de* f *és una suma de productes* $(\sum\prod)$.

Nota 2. *Una mateixa funció booleana es pot representar per més d'una expressió algebraica.*

Exercici 3. *Suposeu* $f, g, h : B^2 \to B$ *tal que* $f(x,y) = xy + \overline{x}y$, $g(x,y) = (x + y)(\overline{x} + y)$, $h(x,y) = y$. *Podeu comprovar que aquestes tres expressions són idèntiques i per la qual cosa caldria parlar d'una sola funció.*

Definició 7. *A cada terme de la forma* $y_1 + y_2 + ... + y_n$, *on* y_i *és* x_i *o* $\overline{x}_i$, $1 \leq i \leq n$. *s'anomena* ***disjunció fonamental o monal****. És a dir, monal és una suma d'un o de diversos literals. Per exemple* $\overline{x}_1 + x_2 + x_3$, $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$, $\overline{x}_1 + x_2$.

Definició 8. *Un **maxterme** de n elements $x_1, x_2, ..., x_n$ és un monal amb n literals obtinguts en escollir exactament un element de cada par $(x_i, \overline{x}_i)$.*

Per exemple si x_1, x_2, x_3 són tres elements, els 8 maxtermes seran:
$x_1+x_2+x_3$, $x_1+x_2+\overline{x}_3$, $x_1+\overline{x}_2+x_3$, $\overline{x}_1+x_2+x_3$, $\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3$, $\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3$, $x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3$, $\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3$.

Observació: Si ens donen n elements $x_1, x_2, ..., x_n$ de $(B, +, \cdot, -)$ on $B = \{0, 1\}$, el nombre de mintermes i de maxtermes és el mateix i és igual a 2^n. Aquest nombre creix ràpidament amb n. A més a més el complementari d'un minterme és un maxterme i a l'inrevés.

Definició 9. *Una representació de f com a producte de maxtermes s'anomena **forma normal conjuntiva** (f.n.c.). És a dir, la f.n.c.de f és un producte de sumes $(\prod\sum)$.*

Exercici 4. *Trobeu la f.n.d. de $f : B^3 \to B$ tal que $f(x, y, z) = xy + \overline{x}z$.*

De moment el farem de dues maneres i després d'una tercera forma.

i) Per taules de veritat:

x	y	z	$\overline{x}$	xy	$\overline{x}z$	f
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

És a dir, $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$.
ii) Per la propietat complementària:
$f(x, y, z) = xy + \overline{x}z = xy1 + \overline{x}1z = xy(z + \overline{z}) + \overline{x}(y + \overline{y})z = xyz + xy\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,z.$

Nota 3. *Més endavant calcularem la f.n.d.pel mètode dels pesos i també trobarem la f.n.c.*

4. ÀLGEBRA DE BOOLE DE LES FUNCIONS BOOLEANES

Suposem $F = \{f/\ f : B^n \to B\ f$ és funció booleana$\}$, és a dir F el conjunt de les funcions booleanes sent $B = \{0, 1\}$.

Suposem $X = \{x/\ x$ és variable booleana$\} = \{x/\ x \in B\}$ el conjunt de les variables booleanes.

Es pot demostrar que F i X són dues Àlgebres de Boole.

Caldrà definir $+, \cdot, -$en F ja que en X ja estan definides.

Definim ,+ $\quad f+g : B^n \to B/(f+g)(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + g(x_1, x_2, ..., x_n)$ $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in B^n$.

Definim · $f \cdot g : B^n \to B/(f \cdot g)(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot g(x_1, x_2, ..., x_n)$ $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in B^n$.
Definim complementari de f i ho representem per $-$
$\overline{f} : B^n \to B \ / \ \overline{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(x_1, x_2, ..., x_n)} \ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in B^n$.
(El complementari de f és el complementari de la imatge).

PROPIETATS

Funcions booleanes		**Variables booleanes**
	1.Associativa	
$(f+g)+h = f+(g+h)$		$(x+y)+z = x+(y+z)$
$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$		$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
	2.Commutativa	
$f+g = g+f$		$x+y = y+x$
$f \cdot g = g \cdot f$		$x \cdot y = y \cdot x$
	3.Idempotent	
$f+f = f$		$x+x = x$
$f \cdot f = f$		$x \cdot x = x$
	4.Simplificativa(Absorció)	
$f+(f \cdot g) = f$		$x+(x \cdot y) = x$
$f \cdot (f+g) = f$		$x \cdot (x+y) = x$
	5.Complementària	
$f+\overline{f} = 1$		$x+\overline{x} = 1$
$f \cdot \overline{f} = 0$		$x \cdot \overline{x} = 0$
	6.Distributiva	
$f+(g \cdot h) = (f+g) \cdot (f+h)$		$x+(y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$
$f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$		$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Nota 4. *Per complir-se les propietats 1,2,3,4 és un reticle. Si a més a més compleix la propietat 5 és un reticle complementari. Si a més a més compleix la propietat 6 és un reticle complementari i distributiu, és a dir una Àlgebra de Boole.*

Altres propietats addicionals són:

7.Doble complement (Doble negació)

$\overline{\overline{f}} = f$ $\qquad\qquad$ $\overline{\overline{x}} = x$

8.De DeMorgan

$\overline{f+g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$ $\qquad\qquad$ $\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

$\overline{f \cdot g} = \overline{f} + \overline{g}$ $\qquad\qquad$ $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

9.Element neutre

$f+0=f$ $\qquad\qquad$ $x+0=x$

$f \cdot 1 = f$ $\qquad\qquad$ $x \cdot 1 = x$

10.Element absorbent

$f+1=1$ $\qquad\qquad$ $x+1=1$

$f \cdot 0 = 0$ $\qquad\qquad$ $x \cdot 0 = 0$

Nota 5. *0 és l'element neutre per a la llei + ; 1 és l'element neutre per a la llei ·*

Nota 6. *1 és l'element absorbent per a la llei + ; 0 és l'element absorbent per a la llei ·*

11.Teorema de Quine (Propietat de la redundància)

$$ax + \overline{a}y = ax + \overline{a}y + xy \qquad \forall a, x, y \in B.$$

És a dir, quan en una suma de productes booleans, un terme conté un cert valor a i un altre el factor $\overline{a}$, aleshores el producte de tots els factors continguts en els dos termes i distints de a i de $\overline{a}$ se pot afegir a la suma (o eliminar de la suma si ja apareix en ella).

Demostració: $ax + \overline{a}y + xy = ax + \overline{a}y + xy1 = ax + \overline{a}y + xy(a + \overline{a}) = ax + \overline{a}y + xya + xy\overline{a} \underset{Absorció}{=} ax + \overline{a}y$.

Per exemple 1) $xt + yt + \overline{x}y\overline{z} = xt + yt + \overline{x}y\overline{z} + ty\overline{z}$ 2) $b + \overline{b}a = b + \overline{b}a + a \underset{Absorció}{=} b + a$ 3) $a\overline{c} + \overline{b}c + a\overline{b} = a\overline{c} + \overline{b}c$.

Nota 7. *Més endavant eixirà aquest teorema quan estudiem el mètode dels consensos.*

Nota 8. *Totes aquestes propietats es poden demostrar utilitzant taules de veritat o a partir d'unes altres propietats.*

Exercici 5. *Demostreu la propietat distributiva:* $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.

1. Utilitzant unes propietats ja conegudes o demostrades anteriorment

   $(x+y)\cdot(x+z) \underset{Multiplicació}{=} x\cdot x+x\cdot z+y\cdot x+y\cdot z \underset{Idempotent}{=} x+x\cdot z+y\cdot x+y\cdot z \underset{Absorció}{=} x + yx + yz \underset{Absorció}{=} x + yz.$

   També $x + (y \cdot z) = x + yz \underset{Abs.}{=} xx + yz \underset{Abs.}{=} xx + xy + xz + yz \underset{Dist,Com.}{=} x(x + y) + z(x + y) \underset{Dist,Com.}{=} (x + y)(x + z).$

2. Per taules de veritat:

x	y	z	$x+y$	$x+z$	$(x+y)(x+z)$	yz	$x+yz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

   La columna 6 i la 8 són iguals.

Exercici 6. *Demostreu la propietat simplificativa:* $x + (x \cdot y) = x + xy = x$.

1. Utilitzant unes propietats ja conegudes o demostrades anteriorment

   $x + (x \cdot y) \underset{Neutre}{=} x \cdot 1 + xy \underset{Distributiva}{=} x \cdot (1 + y) \underset{Absorbent}{=} x \cdot 1 \underset{Neutre}{=} x.$

2. Per taules de veritat

x	y	xy	$x+xy$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

   La primera columna i l'última tenen els mateixos valors lògics.

5. MINTERME I MAXTERME. PROPIETATS

Més enrere hem vist les definicions de minterme i de maxterme. Utilitzarem una notació especial per als mintermes. Per exemple per a tres literals x, y, z,elements de B.

x	y	z	*minterme*	*Base2*	*Base10*	*minterme* (*notació*)
0	0	0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	000	0	m_0
0	0	1	$\overline{x}\,\overline{y}z$	001	1	m_1
0	1	0	$\overline{x}y\overline{z}$	010	2	m_2
0	1	1	$\overline{x}yz$	011	3	m_3
1	0	0	$x\overline{y}\,\overline{z}$	100	4	m_4
1	0	1	$x\overline{y}z$	101	5	m_5
1	1	0	$xy\overline{z}$	110	6	m_6
1	1	1	xyz	111	7	m_7

Cal assenyalar que en aquesta notació caldrà escriure els mintermes en ordre alfabètic o en ordre dels índex quan els literals són $x_1, x_2, ..., x_n$.

Suposem per exemple que a, b, c, d, e siguen elements de B. El terme $a+\overline{b}+c+d+\overline{e}$ correspon al maxterme 22, és a dir a M_{22} ja que $a+\overline{b}+c+d+\overline{e}$ representa 10110 que equival a $0+1.2+1.2^2+0.2^3+1.2^4=2+4+16=22$.

Proposició 1. *Si m_i i M_i són els mintermes i els maxtermes de $x_1, x_2, ..., x_n/\ 0 \leq i \leq 2^n-1$, aleshores $\overline{m_i} = M_j$ i $\overline{M_i} = m_j$ amb $j = 2^n-1-i$.*

La seua demostració resulta de l'aplicació de les lleis de De Morgan i del mètode utilitzat en la determinació dels índexs.

Per exemple $\overline{M_{22}} = m_9$ ja que $\overline{M_{22}} = \overline{a+\overline{b}+c+d+\overline{e}} \underset{Morgan}{\overset{D.N.}{=}} \overline{a}b\overline{c}\overline{d}e = m_9$.

Per exemple $\overline{\overline{x}y\overline{z}} = \overline{m_2} \underset{Morgan}{\overset{D.N.}{=}} x+\overline{y}+z = M_5$.

PROPIETATS.

1. *El producte de dos mintermes distints és igual a zero. (La suma de dos maxtermes distints és igual a la unitat).*

   Demostració: Si els dos mintermes són distints, aleshores existeix almenys un literal complementari dins del monomi i en aplicar la propietat complementària obtenim la igualtat a zero.

   (Si $xy\overline{z}$ és un monomi i $\overline{x}y\overline{z}$ l'altre, en multiplicar-los tenim $(xy\overline{z}) \cdot (\overline{x}y\overline{z}) = x\overline{x}y\overline{z} = 0$.)

2. *La suma de tots els mintermes és igual a la unitat. (El producte de tots els maxtermes és igual a zero).*

Demostració: Com que tota funció booleana intervenen n elements on cada monomi es diferència de l'anterior per tenir un element complementari, aplicarem successivament de dos en dos la propietat distributiva i després la complementària.

És a dir, si $f : B^3 \rightarrow B \Rightarrow \sum_{3} m(0,1,2,3,4,5,6,7) = 1$.

En efecte,

$$\sum_{3} m(0,1,2,3,4,5,6,7) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz \underset{Associativa}{=} (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z) + (\overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz) + (x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}z) + (xy\overline{z} + xyz) \underset{Distributiva}{=} \overline{x}\,\overline{y}(\overline{z} + z) + \overline{x}y(\overline{z} + z) + x\overline{y}(\overline{z} + z) + xy(\overline{z} + z) \overset{Complem.}{\underset{Neutre}{=}} \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y + x\overline{y} + xy = \overline{x}(\overline{y} + y) + x(\overline{y} + y) = \overline{x} + x = 1.$$

3. *En* $F = \{f / f : B^n \rightarrow B,\ f$ és funció booleana$\}$, *qualsevol element de* F *s'escriu de manera única com a suma de mintermes distints no nuls i com a producte de maxtermes distints entre si i distints de la unitat. (Per definició de* f*).*

Corol.lari 1. *Dues sumes de mintermes són iguals si i sols si els mintermes que no són comuns a les dues sumes valen zero.*

Per exemple $abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} = abc + \overline{a}bc \Leftrightarrow ab\overline{c} = a\overline{b}c = a\overline{b}\overline{c} = \overline{a}bc = 0$.

6. DETERMINACIÓ DE LES FORMES NORMALS

En primer lloc es determina la foma normal disjuntiva (f.n.d.) i després la forma normal conjuntiva (f.n.c.).

Exercici 7. *Donada la funció booleana* $f : B^3 \rightarrow B \ / \ f(x,y,z) = xy + \overline{x}z$, *trobeu la f.n.d.*

Ja hem vist dues maneres d'obtenir la f.n.d.(per taules de veritat, i per la prop. complementària). El mètode que ara veurem serà útil quan el nombre de variables de la funció siga gran.

Literals	x	y	z
Pesos	4	2	1

Monomi xy	x	y	z	Els quadrats indiquen que són fixos.
Pes	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	1	

Aquests requadres figuren necessàriament en totes les sumes. Apareixen les sumes 4+2, 4+2+1 i per la qual cosa els mintermes m_6, m_7.

Monomi $\overline{x}z$	x	y	z	Els pesos negatius no apareixen en cap suma. La
Pes	$\overset{no}{4}$	2	$\boxed{1}$	

resta pot aparèixer o no en cada suma. Es formen les sumes 1, 2+1, per la qual cosa els mintermes m_1, m_3.

En definitiva $f(x,y,z) = m_1 + m_3 + m_6 + m_7 = \sum_3 m(1,3,6,7) = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$.

Passem ara a calcular la forma normal conjuntiva.

Sabem que $f = \overline{\overline{f}}$. La forma normal disjuntiva de $\overline{f}$ és la suma de mintermes que no apareixen en f. És a dir $\overline{f}(x,y,z) = \sum_3 m(0,2,4,5)$. Com $\overline{\overline{f}} = f$, aleshores $\overline{\overline{f}}(x,y,z) = \overline{\sum_3 m(0,2,4,5)} = \overline{m_0 + m_2 + m_4 + m_5} = \overline{m_0}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_4}\cdot\overline{m_5} = M_7 M_5 M_3 M_2 = \prod_3 M(2,3,5,7) = (\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+y+z)(x+\overline{y}+z)(x+y+z) = f(x,y,z)$.

Nota 9. *Directament podríem treure la f.n.d. de f, encara que no és aconsellable. Caldrà trobar la taula de veritat de f i mirar els zeros per a després multiplicar els monals de manera que si la variable és un 1 la negarem i si fóra un 0 no la negarem.*

Exercici 8. *Donada la funció booleana $f : B^4 \to B \;/\; f(x,y,z,t) = yt + xt + xy\overline{z}$. Trobeu la f.n.d. i la f.n.c. de f. utilitzant el mètode dels pesos.*

(Com a exercici podem treure la f.n.d per taula de veritat i per la propietat complementària.)

Literal	x	y	z	t
Pes	8	4	2	1

Monomi yt	x	y	z	t
Pes	8	$\boxed{4}$	2	$\boxed{1}$

Les possibles sumes 4+1,4+1+2, 4+1+8, 4+1+2+8, i els mintermes m_5, m_7, m_{13}, m_{15}.

Monomi xt	x	y	z	t
Pes	$\boxed{8}$	4	2	$\boxed{1}$

Les possibles sumes 8+1,8+1+2, 8+1+4, 8+1+6, i els mintermes $m_9, m_{11}, m_{13}, m_{15}$.

Monomi $xy\overline{z}$	x	y	z	t
Pes	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\overset{no}{2}$	1

Les possibles sumes 8+4,8+4+1, i els mintermes m_{12}, m_{13}.

En definitiva la f.n.d. de f serà $f(x,y,z,t) = m_5 + m_7 + m_9 + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{15} = \sum_4 m(5,7,9,11,12,13,15) = \overline{x}y\overline{z}t + \overline{x}yzt + x\overline{y}\,\overline{z}t + x\overline{y}zt + xy\overline{z}\,\overline{t} + x\overline{y}zt + xyzt$.

Nota 10. *Quan cap dels literals és fix, cal afegir m_0.*

En calcular la f.n.c. de f obtindríem:

$\overline{f}(x,y,z,t) = \sum_4 m(0,1,2,3,4,6,8,10,14)$. Com $\overline{\overline{f}} = f$ aleshores $\overline{\overline{f}}(x,y,z,t) = \overline{\sum_4 m(0,1,2,3,4,6,8,10,14)} = \overline{m_0}\cdot\overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_3}\cdot\overline{m_4}\cdot\overline{m_6}\cdot\overline{m_8}\cdot\overline{m_{10}}\cdot\overline{m_{14}} = M_{15}\cdot M_{14}\cdot M_{13}\cdot M_{12}\cdot M_{11}\cdot M_9\cdot M_7\cdot M_5\cdot M_1 = \prod M(1,5,7,9,11,12,13,14,15) = (x+y+z+t)(x+y+z+\overline{t})(x+y+\overline{z}+t)(x+y+\overline{z}+\overline{t})(x+\overline{y}+z+t)(x+\overline{y}+\overline{z}+t)(\overline{x}+y+z+t)(\overline{x}+y+\overline{z}+t)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+t) = f(x,y,z,t)$.

6.1. DUAL I AUTODUAL D'UNA FUNCIÓ BOOLEANA.

Definició 10. *Suposem* $F = \{f/f : B^n \to B\ f$ *és funció booleana*$\}$, *i* $f \in F$. *Definim* ***dual de*** f *i ho representem per* f^*, *a la funció* $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$.

Per exemple, si $f(x,y) = \overline{x + \overline{xy}}$ aleshores $f^*(x,y) \underset{Def..f^*}{=} \overline{f(\overline{x},\overline{y})} \underset{Def..f}{=} \overline{\overline{\overline{x} + \overline{\overline{x}\,\overline{y}}}} \underset{Morgan.}{=}$
$\overline{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{\overline{x}\,\overline{y}}}} \underset{D.N.}{=} \overline{x \cdot \overline{x}\,\overline{y}} \underset{Morgan}{=} \overline{x \cdot \overline{x + y}}$.

Nota 11. *En la pràctica i per mitjà de les lleis de De Morgan, serà fàcil deduir la dual d'una funció booleana ja que és suficient substituir cada signe* $+$ *per* $\cdot$, *cada signe* $\cdot$ *per* $+$, *cada 0 per 1 i cada 1 per 0.*

En aquest exemple encara podríem haver simplificat més la funció dual i quedaria de la forma:
$f^*(x,y) = \overline{x \cdot \overline{x+y}} \underset{Morgan}{=} \overline{x} + \overline{\overline{x+y}} \underset{D.N.}{=} \overline{x} + (x+y) \underset{Associativa}{=} (\overline{x} + x) + y \underset{Complem.}{=}$
$1 + y \underset{Absorció}{=} 1$.

Proposició 2. $(f^*)^* = f$.

En efecte $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$.
$(f^*)^*(x_1, x_2, ..., x_n) \underset{Def.f^*}{=} \overline{f^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)} \underset{Def.f^*}{=} \overline{\overline{f(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, ..., \overline{\overline{x}}_n)}} \underset{D.N.}{=} f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definició 11. *Una funció boolena de* n *variables és* **autodual** *si és igual al seu dual. És a dir,* $f^* = f$.

Exemple 1. *La funció majoria (minoria) de tres variables és autodual.*

En efecte, per definició la funció $Maj(x,y,z)$ agafa el valor 1 si i sols si almenys dues de les variables valen 1. (La funció $Min(x,y,z)$ agafa el valor 1 si i sols si com a màxim una de les tres variables val 1).

Les taules de veritat serien:

x	y	z	$Maj(x,y,z)$	$Min(x,y,z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$Maj(x,y,z) = \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz \underset{T.Quine}{=} \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz + yz + xz + xy \underset{Absorció}{=} yz + xz + xy.$

$Maj^*(x,y,z) = (y+z)\cdot(x+z)\cdot(x+y) = (xy+xz+yz+zz)(x+y) = xy + xz + xyz + xz + xy + xyz + yz + yz \overset{Absorció}{\underset{Simpl.}{=}} xy + xz + yz = Maj(x,y,z).$

És evident que $Maj(x,y,z) = \overline{Min(x,y,z)}$.

Exercici 9. *Comproveu que* $Min(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z}$.

6.2. REGLES I TEOREMES SOBRE IGUALTATS. En l'Àlgebra de Boole $(B,+,\cdot,-)$, $B=\{0,1\}$ es compleixen les següents regles:

Regla 1. *És possible sumar o multiplicar un mateix terme als dos membres d'una igualtat.*

$a = b \Rightarrow a + c = b + c \qquad \forall a,b,c \in B$

$a = b \Rightarrow a\cdot c = b\cdot c \qquad \forall a,b,c \in B$

ja que $+$ i $\cdot$ són ll.c.i. en B.

El recíproc no és cert en l'Àlgebra de la no Commutació ni isomorfa :

$$a + c = b + c \overset{no}{\Rightarrow} a = b$$
$$a\cdot c = b\cdot c \overset{no}{\Rightarrow} a = b$$

Contraexemple, en l'Àlgebra de Boole de les parts d'un conjunt

$$A\cup C = B\cup C \overset{no}{\Rightarrow} A = B$$
$$A\cap C = B\cap C \overset{no}{\Rightarrow} A = B$$

Vegem la figura 1 a) i b)

En l'Àlgebra clàssica el recíproc sí que és cert (propietat simplificativa d'aquesta àlgebra):

$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c \qquad \forall a,b,c \in Z$

$a = b \Leftrightarrow a\cdot c = b\cdot c \qquad \forall a,b \in Z \quad c \in Z^*.$

Teorema 1. $a + c = b + c \wedge ac = bc \Rightarrow a = b \qquad \forall a,b,c \in B.$

Demostració: $(a+c)a \underset{Distributiva}{=} aa + ac \underset{Idempotent}{=} a + ac \underset{Absorció}{=} a.$

Per hipòtesi $a + c = b + c \wedge ac = bc$, aleshores $(a+c)a = (b+c)a = ba + ca = ba + ac = ba + bc = b(a+c) = b(b+c) = bb + bc = b + bc = b.$

Com $(a+c)a = a \wedge (a+c)a = b$, aleshores $a = b$.

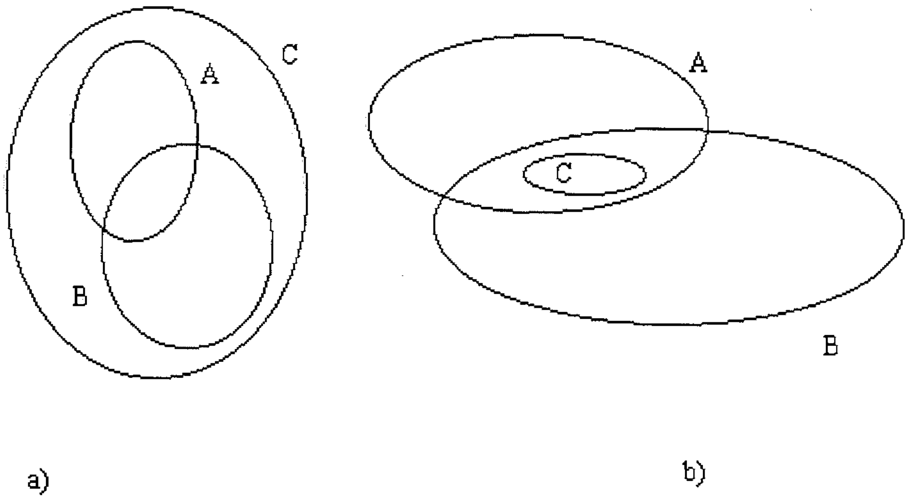


Figure 1:

Regla 2. *Dues igualtats es poden sumar o multiplicar membre a membre.*

És a dir $\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix} \Rightarrow a+c=b+d \qquad \begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix} \Rightarrow a\cdot c=b\cdot d$

ja que $+$ i $\cdot$ són lleis de composició interna en B.

Regla 3. Dos elements són iguals si i sols si els seus complementaris són iguals.

$a=b \Leftrightarrow \overline{a}=\overline{b}$.

ja que $-: B \to B \quad \forall x$ li correspon $\overline{x} \in B$ i $\overline{\overline{x}}=x \ \forall x \in B$.

Nota 12. *Contràriament al que ocorre en una àlgebra clàssica $a=0 \vee b=0$ no és equivalent a $ab=0$.*

Contraexemple. Veieu la figura 2. És a dir, $\exists A \neq \varnothing \wedge \exists B \neq \varnothing \ / \ A \cap B = \varnothing$.

Regla 4.

i) $ab=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0 \qquad \forall a,b \in B$.

En efecte:

$\rightarrow$) Per reducció a l'absurd:

Suposem que $a \neq 0 \wedge b \neq 0$,aleshores $a=1 \wedge b=1$. Per la qual cosa $ab=1$, en contradicció amb la hipòtesi.

$\leftarrow$)

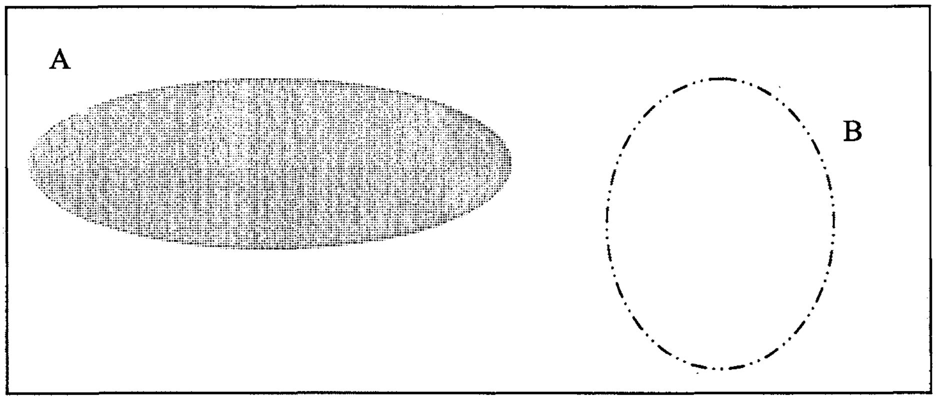


Figure 2:

Si $a = 0$,aleshores $ab = 0b = 0$

Si $b = 0$, aleshores $ab = a0 = 0$.

ii) $a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee b = 1 \qquad \forall a, b \in B$.
La demostració resulta evident per ser la dual de i)

Teorema 2. $\begin{array}{l} ab = 1 \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 1 \\ a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \end{array} \qquad \forall a, b \in B.$

En efecte:
$\rightarrow$) Si $ab = 1 \rightarrow \overline{a}ab = \overline{a}1 \wedge ab\overline{b} = 1\overline{b} \rightarrow 0 = \overline{a} \wedge 0 = \overline{b} \rightarrow 1 = a \wedge 1 = b$.
$\leftarrow$) Si $a = 1 \wedge b = 1 \rightarrow ab = 1 \cdot 1 = 1$.
La segona part del teorema és evident per ser el dual de la primera part.

7. CÀLCULS PRÀCTICS SOBRE IGUALTATS

♠Per a demostrar una igualtat booleana es pot determinar la f.n.d. de cada membre.

Exercici 10. *Demostreu:* $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \qquad \forall a, b, c \in B$.

És a dir, la partícula connectiva bicondicional ($\leftrightarrow$) compleix la propietat associativa.

En efecte: f.n.d. del primer terme serà: $(\overline{a}\,\overline{b}+ab) \leftrightarrow c = \overline{(\overline{a}\,\overline{b} + ab)}\,\overline{c} + (\overline{a}\,\overline{b}+ab)c = \overline{\overline{a}\,\overline{b}} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + abc = (a + b)(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + abc = a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + abc$.

La f.n.d. del segon terme serà: $a \leftrightarrow (\overline{b}\,\overline{c} + bc) = \overline{a}\ \overline{(\overline{b}\,\overline{c} + bc)} + a(\overline{b}\,\overline{c} + bc) = \overline{a}\,\overline{\overline{b}\,\overline{c}} \cdot \overline{bc} + a\overline{b}\,\overline{c} + abc = \overline{a}((b + c)(\overline{b} + \overline{c}) + a\overline{b}\,\overline{c} + abc = \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + a\overline{b}\,\overline{c} + abc$.

Per la qual cosa, en ser les dues formes normals disjuntives iguals, podem concloure que l'expressió anterior és certa.

♠Tota igualtat o sistema d'igualtats booleanes es poden escriure com una única igualtat, en la qual el primer terme és una f.n.d. i el segon terme és zero.

Exercici 11. *Donat el sistema d'igualtats, determineu una expressió equivalent*

$$\begin{array}{l} 1)\ a = \overline{b}c \\ 2)\ \overline{a} + ab\overline{c} = 1 \end{array} \quad \forall abc \in B.$$

Tenim les següents equivalències:
1) $a = \overline{b}c \to a(b+\overline{b})(c+\overline{c}) = (a+\overline{a})\overline{b}c$
2) $\overline{a} + ab\overline{c} = 1 \to \overline{a}(b+\overline{b})(c+\overline{c}) + ab\overline{c} = (a+\overline{a})(b+\overline{b})(c+\overline{c})$
1) $abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\,\overline{c} = a\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}c$
2) $\overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + ab\overline{c} = abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$
1) $abc = ab\overline{c} = a\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{b}c = 0$
2) $abc = a\overline{b}c = a\overline{b}\,\overline{c} = 0$
$abc + ab\overline{c} + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + a\overline{b}c = 0.$
És a dir, ens ha quedat una f.n.d igualada a zero.

Exercici 12. *Demostreu que:*

$$a + b = ab \Leftrightarrow a = b \quad \forall a, b \in B.$$

Nota 13. *Quan estudiem la teoria de conjunts podrem substituir aquests elements de B pels conjunts A i B i caldria demostrar que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.*

Primer terme: $a + b = ab \to a(b+\overline{b}) + b(a+\overline{a}) = ab \to ab + a\overline{b} + ba + b\overline{a} = ab \to ab + a\overline{b} + ab + b\overline{a} = ab \to ab + a\overline{b} + b\overline{a} = ab \to a\overline{b} = \overline{a}b = 0.$

Segon terme:
$a = b \to a(b+\overline{b}) = b(a+\overline{a}) \to ab + a\overline{b} = ba + b\overline{a} \to a\overline{b} = b\overline{a} = 0.$

Exercici 13. *Demostreu que:*

$$a \le b \Rightarrow ac \le bc \text{ sent } a, b, c \in B.$$

Definició 12. $a \le b \Leftrightarrow ab = a.$

$a \le b \Leftrightarrow ab = a \to ab(c+\overline{c}) = a(b+\overline{b})(c+\overline{c}) \Leftrightarrow abc + ab\overline{c} = abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\,\overline{c} \Leftrightarrow a\overline{b}c = a\overline{b}\,\overline{c} = 0.$

El segon terme seria:
$ac \le bc \underset{Def.}{\Leftrightarrow} (ac)(bc) = ac \Leftrightarrow abc = ac \Leftrightarrow abc = a(b+\overline{b})c \Leftrightarrow abc = abc + a\overline{b}c \Leftrightarrow a\overline{b}c = 0.$

En resum queda demostrada la desigualtat.

Nota 14. *La implicació recíproca és falsa.*

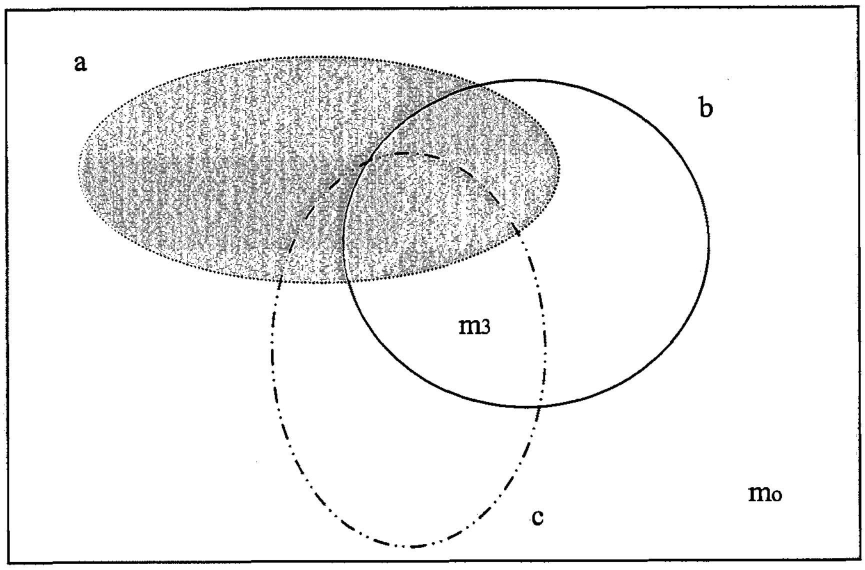


Figure 3:

8. SIMPLIFICACIÓ DE LES FUNCIONS BOOLEANES

Per una de les propietats dels mintermes, sabem que qualsevol funció booleana es pot posar en la forma normal disjuntiva, és a dir com a $\sum\prod$ (suma de productes).

Una expressió en $\sum\prod$ és simplificada quan: i) el nombre de monomis de la suma siga mínim ii) cada monomi de la suma continga el mínim possible de literals.

Estudiarem:

1.Mètodes gràfics: i)Diagrames d'Euler-Venn. ii)Mapes de Karnaugh.

2.Mètodes algebraics: i)De Quine-McCluskey. ii) Dels consensos.

8.1. Mètodes gràfics.

Diagrames d'Euler Venn. Aquests diagrames resulten útils fins tres variables booleanes. Cal representar l'expressió booleana mitjançant un diagrama de Venn i determinar gràficament una expressió simplificada.

Exercici 14. *Simplificar* $f(a,b,c) = ab + \overline{a}bc + a\overline{b} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Sol.: $f(a,b,c) = ab+\overline{a}bc+a\overline{b}+\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = (ab+a\overline{b})+ \underbrace{\overline{a}bc}_{m_3} + \underbrace{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}_{m_0}= a(b+\overline{b})+m_0+m_3 = a + m_0 + m_3$.

Cal veure la figura 3.

Simplificar $f(a,b,c) = a + \overline{a}bc + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Solució: $f(a,b,c) = a + bc + \overline{b}\,\overline{c}$.

Utilitzarem ben poc aquest mètode.

a\b	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

Figure 4:

Mapes de Karnaugh. Aquests diagrames resulten útiles fins cinc o sis variables booleanes. Foren introduïts per Vitch a l'any 1952 i modificats lleugerament l'any 1953 per Karnaugh.

Per a dues variables: (figura 4).

Tractarem de simplificar les funcions booleanes utilitzant la propietat $x\overline{y}+xy = x$. És a dir eliminarem el major nombre de literals. Per tot això els mintermes adjacents ocupen posicions físicament contigües, lateralment i no pas diagonalment.

També podrem utilitzar la propietat idempotent $x + x = x$ de manera que qualsevol terme es puga agafar més d'una vegada per a aconseguir la major simplificació possible.

En aquest cas poden fer-se associacions de $2^0 = 1$ mintermes, de $2^1 = 2$ mintermes, ó de $2^2 = 4$ mintermes.

Si associem 1 minterme no es redueix cap variable.

En associar 2 mintermes es redueix una variable.

En associar 4 mintermes es redueixen dues variables.

Exercici 15. *Simplifiqueu:* $f(a,b) = m_1 + m_2 = b\overline{a} + a\overline{b}$.

Exercici 16. *Simplifiqueu:* $g(a,b) = m_0 + m_1 + m_2$.

$g(a,b) = m_0+m_1+m_2 = \overline{a}\,\overline{b}+\overline{a}b+a\overline{b} = \overline{a}(\overline{b}+b)+a\overline{b} = \overline{a}+a\overline{b} = \overline{a}+a\overline{b}+\overline{b} = \overline{a}+\overline{b}$.

Per a tres variables: (figura 5).

Regla pràctica per a associar el grup d'uns:

i)S'agafen tots els uns, els quals no es poden combinar amb cap altre (uns "aïllats").

ii)Es formen grups de dos uns, els quals no poden formar grups de quatre.

iii)Es formen grups de quatre uns que no poden formar grups de vuit. Així successivament fins que es cobrisquen tots els uns del mapa.

a \ bc	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Figure 5:

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		

Figure 6:

Exercici 17. *Utilitzant els mapes de Karnaugh simplifiqueu* $f(a,b,c) = \overline{a}\,\overline{b}c+\overline{a}bc+a\overline{b}\,\overline{c}+a\overline{b}c$.

Sol: $\overline{a}c+a\overline{b}$ (figura 6).

Exercici 18. *Idem*$f(a,b,c) =\sum_3 m(0,2,3,4,5,6,7)$.

Sol 1: $a+b+\overline{b}\,\overline{c}$ (figura 7.) Sol 2: $a+\overline{a}\,\overline{c}+bc$ Sol 3: $a+b+\overline{c}$.

Exercici 19. *Idem*$f(a,b,c) =\sum_3 m(0,2,4,5,7)$.

Sol 1 $\overline{a}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{c}+ac$ Sol 2: $\overline{a}\,\overline{c}+a\overline{b}+ac$.

Exercici 20. *Idem* $f(a,b,c) = a+\overline{a}bc+\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

a \ bc	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1	1	1	1

Figure 7:

Sol: $f(a,b,c) = a + bc + \bar{b}\,\bar{c}$.

Exercici 21. *Idem* $f(a,b,c) = \sum_3 m(0,2,3,4,5,7)$.

Sol 1: $\bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c} + ac + bc$ Sol 2: $\bar{b}\,\bar{c} + ac + \bar{a}\,b$ Sol 3: $\bar{a}\,\bar{c} + a\bar{b} + bc$.

1. Totes les solucions són expressions irreductibles. Així, doncs, una expressió irreductible d'una funció booleana no és única.

2. La solució 1 és irreductible però no és mínima.

3. Les solucions 2 i 3 són irreductibles mínimes. Per la qual cosa les solucions mínimes tampoc són úniques.

Per a quatre variables: (figura 8).

Nota 15. *Cal tenir en compte que m_0 i m_2 són adjacents, com també tots els altres costats. (Es podria considerar el desenvolupament pla d'un cilindre).*

Exemple 2. *Forma correcta i incorrecta d'utilitzar un mapa de Karnaugh:*

Siga la funció booleana donada per: $f(a,b,c,d) = \sum_4 m(3,4,5,7,9,13,14,15)$.

Forma incorrecta (figura 9).

$f(a,b,c,d) = \bar{a}cd + \bar{a}b\bar{c} + abc + a\bar{c}d + bd$. Aquesta forma afegeix el terme bd el qual està format pels quatre uns centrals.

Forma correcta (figura 10).

ab \ cd	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Figure 8:

ab \ cd	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	
11		1	1	1
10		1		

Figure 9:

ab \ cd	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	
11		1	1	1
10		1		

Figure 10:

ab\cde	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

Figure 11:

$f(a,b,c,d) = \bar{a}cd + \bar{a}b\bar{c} + abc + a\bar{c}d.$

Nota 16. *Cal notar que, per a la utilització correcta dels mapes de Karnaugh, seguirem els següents passos:*

1. Comencem per combinar els termes en els quals existisca com a màxim una possibilitat de simplificació.
2. Comprovarem els quatre costats ja que poden contenir uns adjacents, encara que aquests apareixen aïllats.
3. En qualsevol simplificació obtindrem el major bloc possible d'uns adjacents per a obtenir un terme de producte minimal. (Sabem que els uns es poden utilitzar més d'una vegada, per la propietat idempotent).

Per a cinc variables: (figura 11).

1. En els mapes de cinc variables, tenim 2^5 quadrats. Cada minterme és adjacent als seus quatre "veïns" laterals i també ho és al minterme simètric respecte a l'eix de simetria vertical.
2. En els mapes de sis variables, tenim 2^6 quadrats. Cada minterme és adjacent als seus quatre "veïns" laterals i també ho és al minterme simètric respecte a l'eix de simetria vertical i horitzontal.
3. Utilitzarem altres mètodes de simplificació per a funcions booleanes de sis variables, ja que aquests mapes resulten ser enutjosos (engorrosos).

Per a sis variables: (figura 12).

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	m0	m1	m3	m2	m6	m7	m5	m4
001	m8	m9	m11	m10	m14	m15	m13	m12
011	m24	m25	m27	m26	m30	m31	m29	m28
010	m16	m17	m19	m18	m22	m23	m21	m20
110	m48	m49	m51	m50	m54	m55	m53	m52
111	m56	m57	m59	m58	m62	m63	m61	m60
101	m40	m41	m43	m42	m46	m47	m45	m44
100	m32	m33	m35	m34	m38	m39	m37	m36

Figure 12:

Exercici 22. $f(a,b,c,d,e) = \sum_5 m(0,2,4,6,9,11,13,15,17,21,25,27,29,31)$.

Exercici 23. $f(a,b,c,d,e) = \sum_5 m(1,3,5,9,10,11,12,13,14,15,18,19,21,23,25,$ $,26,27,28,29,30,31)$.

8.2. Mètodes algebraics. Introducció: En aquests mètodes caldrà, en primer lloc, simplificar la funció booleana utilitzant les regles del càlcul booleà, encara que aquestes simplificacions no constitueixen un mètode sistemàtic.

Exercici 24. *Simplifiqueu la funció boolena* $f(a,b,c,d) = \overline{a}(c+\overline{b+d}) + abc + ab\overline{c} + \overline{c}(a+\overline{b}\,\overline{d}) + \overline{a}cd$.

Sol.: $f(a,b,c,d) = \overline{a}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d} + abc + ab\overline{c} + a\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}cd = \overline{a}c + ab + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d} + a\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \underset{T.Quine}{=} \overline{a}c + ab + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d} + a\overline{c}$.

Exercici 25. *Simplifiqueu la funció boolena* $f(a,b,c,d) = abcd + abc\overline{d} + a\overline{b}cd + \overline{a}bcd + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b}cd$.

Sol.: $bc + cd$.

Mètode de Quine-McCluskey. Aquest mètode presenta dos avantatges: i) Es pot aplicar a qualsevol nombre de variables ii) És programable. L'inconvenient és que cal obtenir la forma normal disjuntiva de la funció booleana.

Una vegada hem obtingut la f.n.d. de f, utilitzarem la següent fórmula de simplificació:

$x\mu + \overline{x}\mu = (x+\overline{x})\mu = \mu$ on x és un literal i μ és un monomi (producte d'un o de diversos literals).

0000	X	00_0		No existeix		No existeix
0010	X	_000				
1000	X					
0011	X	001_	X			
0110	X	0_10	X			
1001	X	100_	X			
1100	X	1_00	X			
0111	X	0_11	X	0_1_		
1101	X	011_	X			
1110	X	_110	X	1_0_		
		1_01	X			
		11_0	X			
		110_	X			
1111	X	_111	X	_11_		
		11_1	X	11__		
		111_	X			
FASE 1		FASE 2		FASE 3		FASE 4

Figure 13:

Exercici 26. *Donada la funció booleana* $f : B^4 \to B \;/\; f(x,y,z,t) = xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}zt + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,z$*, simplifiqueu-la utilitzant el mètode de Quine-McCluskey. (figura 13).*

En primer lloc caldrà trobar la f.n.d. de f pels mètodes ja estudiats anteriorment. Podem comprovar que ve donada per:

$f(x,y,z,t) = xyzt + xyz\overline{t} + xy\overline{z}t + xy\,\overline{z}\,\overline{t} + x\overline{y}\,\overline{z}t + \overline{x}yzt + x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}yz\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}zt + \overline{x}\,\overline{y}z\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$.

FASE 1: Classifiquem els mintermes segons tiguen 0,1,2,3,o 4 literals sense negar (4,3,2,1,o 0 negats).

FASE 2: Sumarem mentalment cada minterme de la classe 0 amb cada minterme de la classe 1 i quan siga possible utilitzar la regla $x\mu + \overline{x}\mu = \mu$, eliminarem una variable, i posarem el resultat en la columna 2.

El símbol (_) substitueix la variable eliminada.

És necesari posar una creu als dos mintermes involucrats ja que desapareixen de l'expressió $\sum\prod$.

Igualment sumarem mentalment cada minterme de la classe 1 i 2 ; 2 i 3 ; 3 i 4.

FASE 3: Cal fer el mateix que en la fase anterior, però amb els monomis de tres literals en lloc dels mintermes. Escriurem en la columna 3 els monomis de dos literals obtinguts tot i assenyalant les creus adequades en la columna 2.

Quan un monomi de dos literals ja ha aparegut una vegada, no cal tornar a

	0000	0010	1000	0011	0110	1001	1100	0111	1101	1110	1111
A 11__							X		X	X	X
B 1_0_			X			X	X		X		
C 0_1_		X		X	X			X			
D _11_					X			X		X	X
E 00_0	X	X									
F _000	X		X								

Figure 14:

escriure'l, però cal assenyalar els monomis de tres literals corresponents.

Nota 17. *Els monomis que no queden assenyalats amb una creu són anomenats* ***implicants primers*** *de la funció booleana.*

Per la qual cosa $f(x,y,z,t) = xy + x\overline{z} + \overline{x}z + yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$.

Quadrícula de Mc-Cluskey. De vegades, si volem perfilar més encara, els implicants primers els podríem classificar en irrellevants i en neccessaris o fixos.

Expliquem a continuació la quadrícula de Mc-Cluskey, (figura 14), per a trobar la màxima simplificació de la funció booleana.

Horitzontalment posarem els termes de la funció i verticalment els implicants primers.

Creuarem les caselles que cobrisquen els implicants primers. Quan existisca una sola creu en les columnes, cal mirar l'implicant corresponent. Aquests implicants són els neccessaris o fixos i els altres els irrellevants.

Enquadrem els termes que ocupen els implicants neccessaris i ens adonem que cobreixen la franja des de 0010 fins 1101. Per a cobrir tota la funció es pot fer de quatre formes

$f(x,y,z,t)$ =(Els fixos més els altres)=1_0_+ 0_1_+ $A + E = x\overline{z} + \overline{x}z + xy + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}$
$f(x,y,z,t)$ =(Els fixos més els altres)=1_0_+ 0_1_+ $A + F = x\overline{z} + \overline{x}z + xy + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$
$f(x,y,z,t)$ =(Els fixos més els altres)=1_0_+ 0_1_+ $D + E = x\overline{z} + \overline{x}z + yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}$
$f(x,y,z,t)$ =(Els fixos més els altres)=1_0_+ 0_1_+ $D + F = x\overline{z} + \overline{x}z + yz + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$.

Mètode dels consensos. En el mètode anterior calia trobar la f.n.d. de la funció booleana. L'avantatge del mètode dels consensos està en què comencem a simplificar a partir de qualsevol $\sum\prod$ de la funció booleana. Teòricament és aplicable a qualsevol funció de qualsevol nombre de variables.

El mètode utilitza, per a simplificar la funció, el teorema de Quine (teorema de la redundància), de tal manera que si x és un literal i μ_1 i μ_2 són dos monomis que no contenen ni a x ni a $\overline{x}$, es verifica la igualtat:

$$\boxed{x\mu_1 + \overline{x}\mu_2 = x\mu_1 + \overline{x}\mu_2 + \mu_1\mu_2}$$

Nota 18. *El terme* $\mu_1\mu_2$ *s'anomena* ***consens*** *de* $x\mu_1$ *i* $\overline{x}\mu_2$

Aquest mètode consisteix en afegir de manera sistemàtica tots els consensos, eliminant els superflus per absorció.

Exercici 27. *Donada la funció booleana* $f : B^4 \to B \;/\; f(x,y,z,t) = xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}zt + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,z$ *, (la mateixa que l'exemple anterior), simplifiqueu* f *per aquest mètode.*

Variable x
Consensos de la funció primitiva: yzt, $\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$
$f(x,y,z,t) = xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}zt + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + yzt + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \underset{Absorció}{=} xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}zt + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$.

Variable y
Consensos de la funció obtinguda anteriorment: $x\overline{z}\,\overline{t}$, $\overline{x}z\overline{t}$, $\overline{x}z$
$f(x,y,z,t) = xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}zt + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}z\overline{t} + \overline{x}z \underset{Absorció}{=} xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$.

Variable z
Consensos de la funció obtinguda anteriorment: xy, $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}$
(Aquests termes ja figuren en l'anterior funció, per la qual cosa no cal introduir-los).

Variable t
Consensos de la funció obtinguda anteriorment: Cap
Conclusió: $f(x,y,z,t) = xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \underset{T.Quine.}{=} xy + yz + x\overline{z} + \overline{x}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}$

9. INTRODUCCIÓ A LES PORTES LÒGIQUES

Fins ara hem estudiat formes de representació de funcions booleanes (funcions lògiques). Ara considerarem el problema de la realització pràctica d'aquestes funcions mitjançant dispositius electrònics (implementació). Aquests dispositius electrònics reben el nom de portes lògiques (base constructiva de l'electrònica digital).

9.1. Conjunts funcionalment complets.

Definició 13. *Un conjunt d'operadors es diu* ***funcionalment complet*** *si i sols si qualsevol funció lògica es pot expressar mitjançant operadors d'aquest conjunt.*

Per exemple el conjunt $\{+,\cdot,-\}$ és clarament un conjunt funcionalment complet ja que compleix la definició. També els conjunts $\{+,-\}$ *i* $\{\cdot,-\}$ són conjunts funcionalment complets, ja que $xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{(\overline{x}+\overline{y})}$ i $x+y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$.

Nota 19. *Més endavant veurem que les portes NOR i NAND són funcionalment completes.*

Definició 14. *Una* ***porta lògica*** *és un circuit electrònic, que en les seues entrades rep un o més senyals digi-tals (0 o 1) i produeix un altre senyal d'exida, també digital i que és el resultat d'aplicar sobre les entrades alguna de les funcions lògiques elementals (igures 15 a 21).*

En altres paraules, les portes lògiques implementen les funcions lògiques elementals.

Proposició 3. *Les portes o operadors NAND i NOR són funcionalment complets. És a dir, demostrarem que qualsevol funció booleana es pot expressar sempre mitjançant algun d'aquests operadors.*

En efecte:
NOT en portes NAND seria $\overline{x} = \overline{xx}$
NOT en portes NOR seria $\overline{x} = \overline{x+x}$
AND en portes NOR seria $xy = \overline{\overline{\overline{x}\overline{y}}} = \overline{\overline{x}+\overline{y}}$
AND en portes NAND seria $xy = \overline{\overline{xy}}$
OR en portes NOR seria $x+y = \overline{\overline{x+y}}$
OR en portes NAND seria $x+y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$
NAND en portes NOR seria $\overline{xy} = \overline{x}+\overline{y} = \overline{\overline{\overline{x}+\overline{y}}}$
NAND en porte NAND coincidiria
NOR en portes NAND seria $\overline{x+y} = \overline{x}\,\overline{y} = \overline{\overline{\overline{x}\,\overline{y}}}$
NOR en portes NOR coincidiria
OREX en portes NAND seria $x\overline{y}+\overline{x}y = \overline{\overline{x\overline{y}+\overline{x}y}} = \overline{\overline{x\overline{y}}\quad\overline{\overline{x}y}}$
També $x\overline{y}+\overline{x}y = x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+\overline{y}y = x(\overline{x}+\overline{y})+(\overline{x}+\overline{y})y = (x+y)(\overline{x}+\overline{y}) = (\overline{\overline{x+y}})(\overline{\overline{\overline{x}+\overline{y}}}) = (\overline{\overline{x}\,\overline{y}})(\overline{x\,y}) = \overline{\overline{(\overline{\overline{x}\,\overline{y}})(\overline{x\,y})}}$
També $x\overline{y}+\overline{x}y = x(\overline{x}+\overline{y})+(\overline{x}+\overline{y})y = x(\overline{xy})+(\overline{xy})y = \overline{\overline{x(\overline{xy})+(\overline{xy})y}} = \overline{\overline{x(\overline{xy})}\;\overline{(\overline{xy})y}}$
OREX en portes NOR $x\overline{y}+\overline{x}y = \overline{\overline{x\overline{y}}}+\overline{\overline{\overline{x}y}} = \overline{\overline{x}+y}+\overline{x+\overline{y}} = \overline{\overline{\overline{\overline{x}+y}+\overline{x+\overline{y}}}}$
També $x\overline{y}+\overline{x}y = x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+\overline{y}y = x(\overline{x}+\overline{y})+(\overline{x}+\overline{y})y = (x+y)(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{\overline{(x+y)(\overline{x}+\overline{y})}} = \overline{\overline{(x+y)}+\overline{(\overline{x}+\overline{y})}}$
NOREX en portes NOR $\overline{x}\,\overline{y}+xy = \overline{\overline{\overline{x}\,\overline{y}}}+\overline{\overline{xy}} = \overline{x+y}+\overline{\overline{x}+\overline{y}} = \overline{\overline{\overline{x+y}+\overline{\overline{x}+\overline{y}}}}$
NOREX en portes NAND $\overline{x}\,\overline{y}+xy = \overline{\overline{\overline{x}\,\overline{y}+xy}} = \overline{\overline{\overline{x}\,\overline{y}}\quad\overline{xy}}$.

10. CIRCUIT O SISTEMA COMBINACIONAL

Definició 15. *Aquell sistema lògic, l'eixida del qual depén en tot moment sols dels valors adoptats per les variables d'entrada, s'anomena* ***sistema combinacional.***

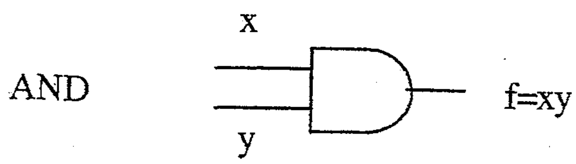


Figure 15:

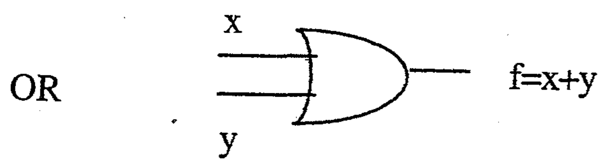


Figure 16:

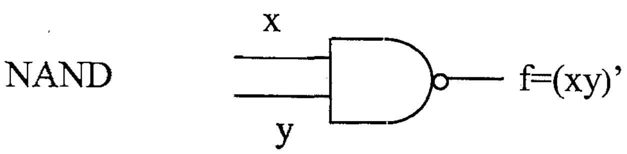


Figure 17:

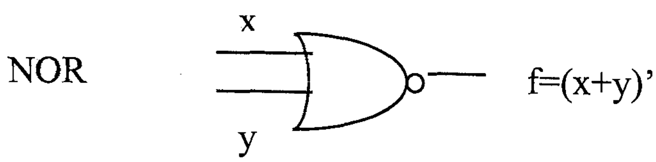


Figure 18:

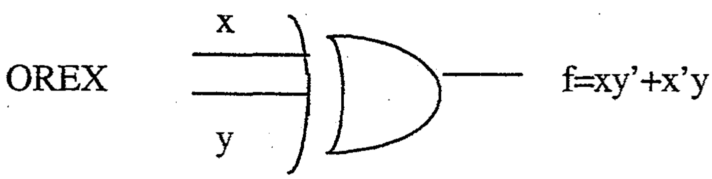


Figure 19:

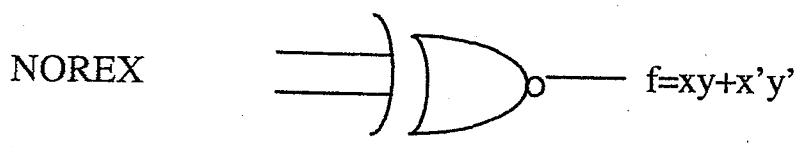


Figure 20:

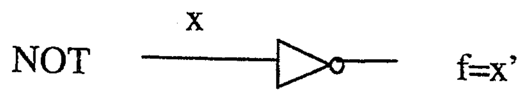


Figure 21:

En altres paraules, l'eixida d'un circuit combinacional en un instant donat, depén únicament i exclusivament de les entrades aplicades en aquest instant, però no de les que foren aplicades anteriorment.

Podriem dir que *un sistema combinacional és la realització física de les funcions lògiques* (funcions booleanes). Per la qual cosa es poden definir i caracteritzar de la mateixa manera que les funcions booleanes (equació algebraica, taules de veritat, representació en la f.n.d. o f.n.c., gràficament, mapes de Karnaugh o en esquema de les portes lògiques).

10.1. ANÀLISI DE CIRCUITS COMBINACIONALS. Un circuit combinacional s'analitza en determinar les eixides dels elements lògics que el constitueixen (portes lògiques normalment), partint de les variables d'entrada cap a les funcions d'eixida.(figura 22).

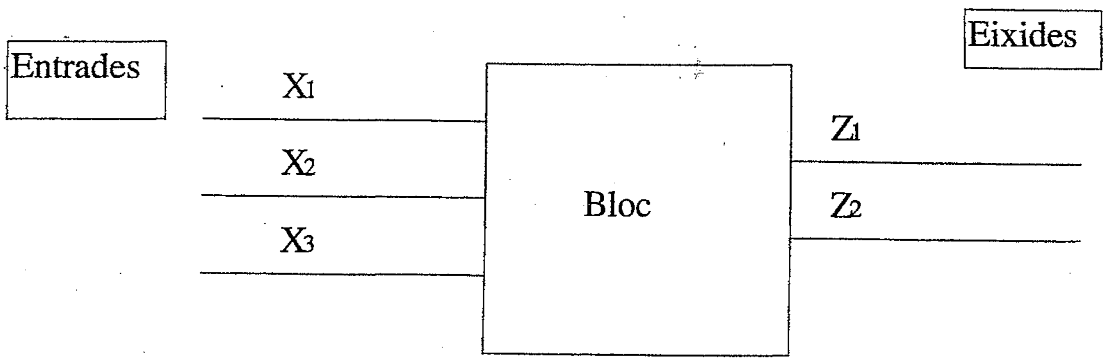


Figure 22:

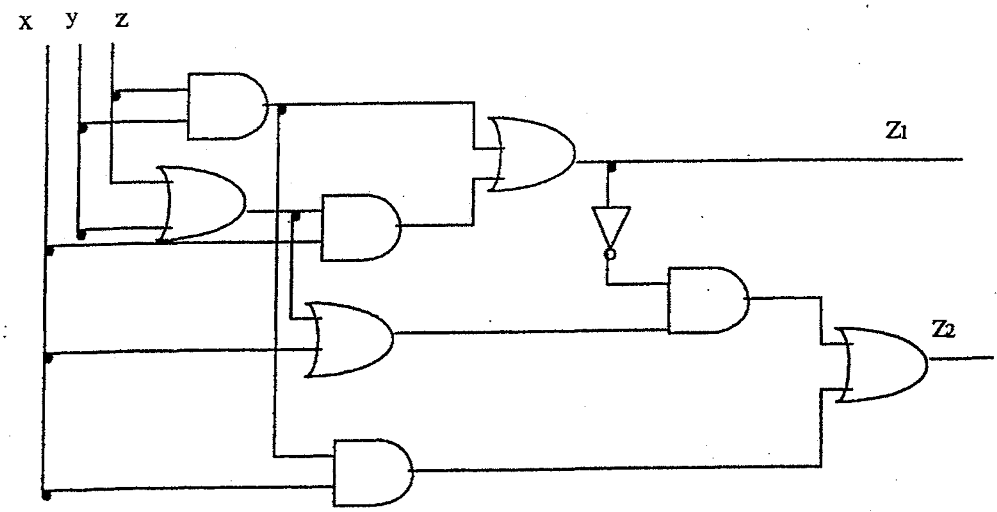


Figure 23:

En observar el sistema combinacional, (figura 23), les eixides seran:
$z_1 = yz + (y+z)x$ $\qquad$ $z_2 = (x+y+z)\overline{[yz+(y+z)x]} + xyz.$
Aquestes eixides són funcions booleanes, les quals podríem simplificar.
Sol.:$z_1 = \sum_3 m(3,5,6,7)$ $\qquad$ $z_2 = \sum_3 m(1,2,4,7).$

11. SÍNTESI O DISSENY DE CIRCUITS COMBINACIONALS

En general, per a dissenyar un circuit combinacional, llegirem les especificacions del problema i, a continuació, representarem per taules de veritat totes les combinacions possibles de les variables d'entrada i per cadascuna d'elles el seu valor d'eixida. Després simplificarem la funció i per últim la materialitzarem (implementarem) amb les portes lògiques.

Exercici 28. *Dissenyeu un circuit combinacional que genere a la funció booleana $f(x,y,z) = \sum_3 m(0,3,4,6,7)$, utilitzant les portes lògiques: i) AND, OR, i NOT ii) NAND iii) NOR.*

Sol.: i) AND, OR, i NOT
$f(x,y,z) = x\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z} + yz$ (per uns) (figura 24).
$f(x,y,z) = \overline{\overline{y}z}\ \overline{\overline{x}y\overline{z}} = (y+\overline{z})(x+\overline{y}+z)$ (per zeros) (figura 25).
i) Si optarem per la primera
Implementem el circuit: (figura 26).
ii) Si optarem per la segona utilitzaríem una porta de menys.
Implementem el circuit: (figura 27).

x \ yz	00	01	11	10
0	1		1	
1	1		1	1

Figure 24:

x \ yz	00	01	11	10
0		0		0
1		0		

Figure 25:

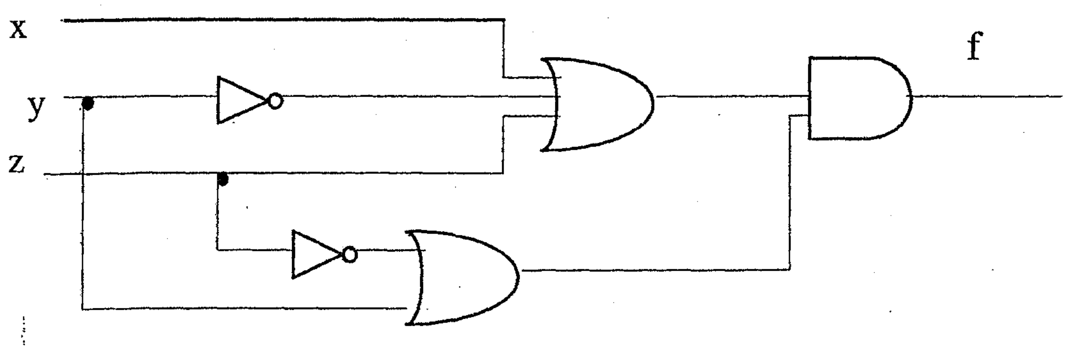


Figure 26:

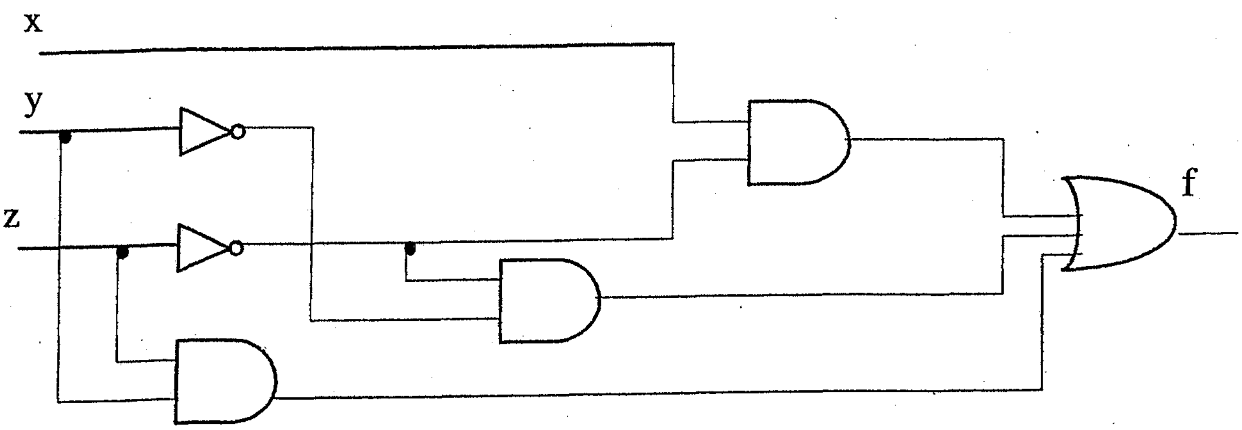


Figure 27:

ii) NAND

Cal recordar que les portes NAND són idònies per a implementar funcions lògiques en forma de suma de productes.

Aleshores $f(x,y,z) = \overline{\overline{x\overline{z}+\overline{y}\,\overline{z}+yz}} = \overline{\overline{x\overline{z}}\quad\overline{\overline{y}\,\overline{z}}\quad\overline{yz}}$ En implementar quedaria: (figura 28.)

iii) NOR

Cal recordar que les portes NOR són idònies per a implementar funcions lògiques en forma de producte de sumes.

Aleshores $f(x,y,z) = \overline{\overline{(y+\overline{z})\ (x+\overline{y}+z)}} = \overline{\overline{y+\overline{z}} + \overline{x+\overline{y}+z}}$ En implementar quedaria: (figura 29).

Exercici 29. *Simplifiqueu i implementeu utilitzant el menor nombre de portes NAND la funció booleana:*

$f(x,y,z,t) = \overline{x}t + yt + \overline{x}yzt + xy\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}yz\overline{t} + xzt + \overline{x}y\overline{z}t.$

Sol.: En primer lloc caldrà simplificar la funció utilitzant les propietats i el càlcul estudiat i després podrem utilitzar els mapes de Karnaugh.

$f(x,y,z,t) = \overline{x}t + yt + \overline{x}yzt + xy\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}yz\overline{t} + xzt + \overline{x}y\overline{z}t \underset{Absorció}{=} \overline{x}t + yt + xy\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}yz\overline{t} + xzt.$

Simplificant per uns: $f(x,y,z,t) = \overline{x}t + zt + xy\overline{z} + \overline{x}yz$ (figura30).

Simplificant per zeros: $f(x,y,z,t) = \overline{\overline{\overline{y}\,\overline{t}}\quad\overline{\overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t}}\quad\overline{x\overline{y}\,\overline{z}}\quad\overline{xz\overline{t}}} = (y+t)\ (x+z+t)\ (\overline{x}+y+z)\ (\overline{x}+\overline{z}+t)$ (figura 31).

Si es vol utilitzar les portes NAND sabem que el millor és la simplificació per uns.

$f(x,y,z,t) = \overline{x}t + zt + xy\overline{z} + \overline{x}yz = \overline{\overline{\overline{x}t + zt + xy\overline{z} + \overline{x}yz}} = \overline{\overline{\overline{x}t}\quad\overline{zt}\quad\overline{xy\overline{z}}\quad\overline{\overline{x}yz}}.$

En implementar quedaria: (figura 32).

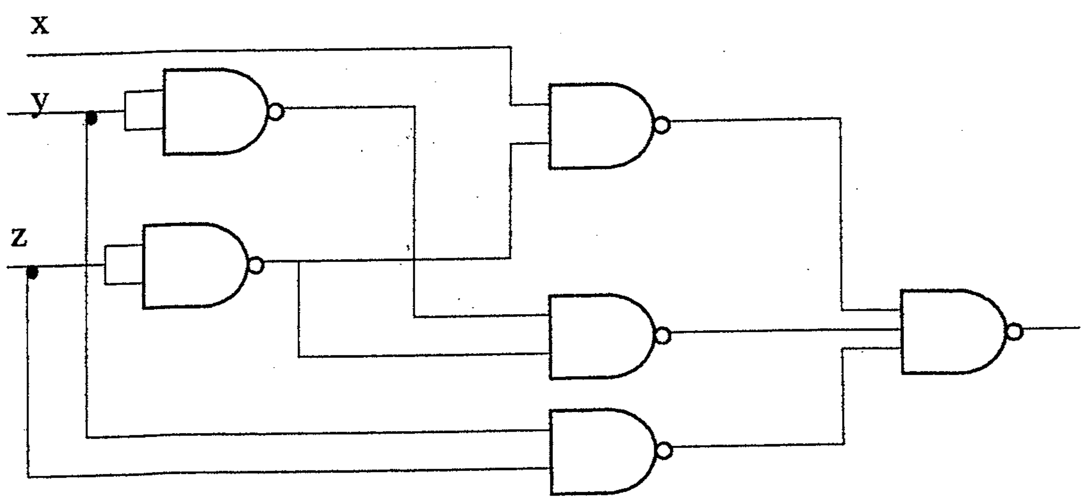


Figure 28:

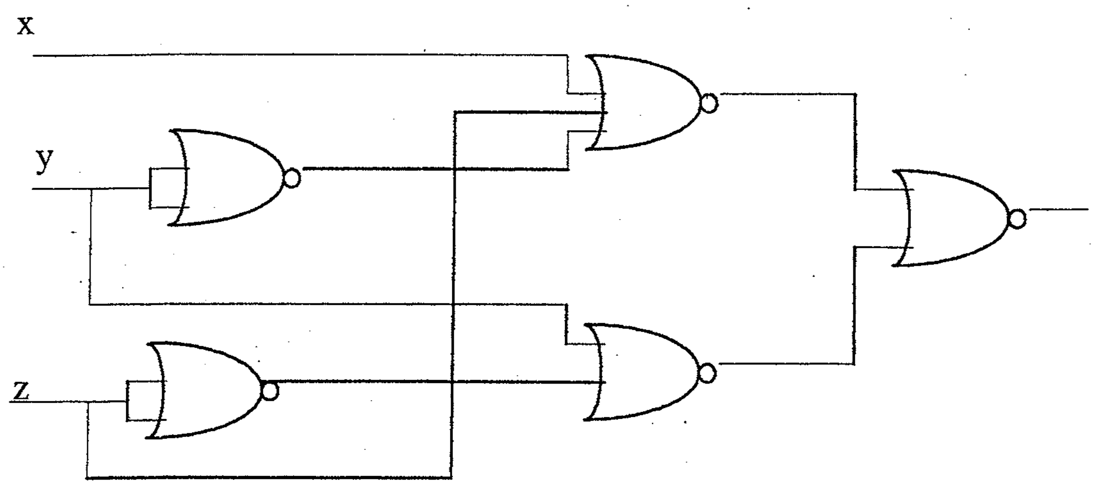


Figure 29:

xy \ zt	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	1
11	1	1	1	
10			1	

Figure 30:

xy \ zt	00	01	11	10
00	0			0
01	0			
11				0
10	0	0		0

Figure 31:

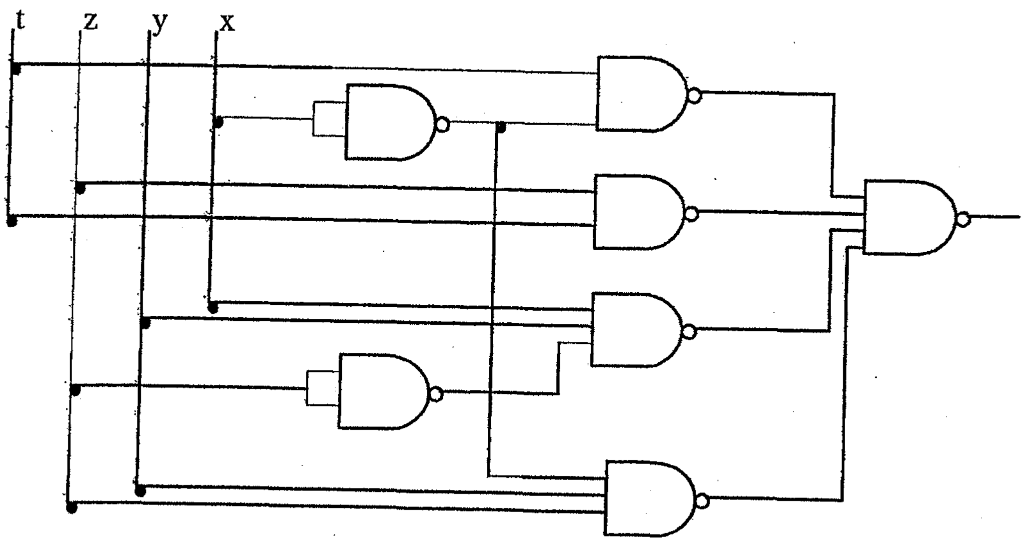


Figure 32:

12. FUNCIONS INCOMPLETAMENT DEFINIDES

Definició 16. *Una funció booleana és* ***incompletament definida*** *quan en la seua taula de veritat apareixen combinacions en les quals la funció no està definida.*

En els mapes de Karnaugh aquesta indeterminació apareix per ϕ i és considerada per 0 o per 1 segons convinga a l'hora de simplificar la funció.

Exercici 30. *Simplifiqueu la funció booleana*

$$f(x,y,z,t) = \sum_4 m(0,3,4,5,6,7,8,10) + \sum_\phi m(9,11,13,15).$$

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	
1		1	1	1

Figure Q:

PROBLEMES TEMA 2 FUNCIONS BOOLEANES

1. Simplifiqueu la funció booleana: $f : B^3 \to B \;/\; f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + x\overline{y}z + \overline{x}yz + xyz + xy\overline{z}$.

   Utilitzeu: i) els mapes de Karnaugh (figura 0). ii) el mètode de Quine-McCluskey.

   Sol.: i) $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + y\,z + xz + xy$. o $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + z + xy$.

   ii)

$FASE\,1$		$FASE\,2$		
000	X			
001	X	00_		
011	X			
101	X			
110	X	0_1	X	$\bar{\exists}$
		_01	X	
		_11	X	
111	X	1_1	X	_ _1
		11_		

2. Demostreu que les funcions f i g definides per:

   $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + xy + \overline{y}z \qquad g(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + xy + xz$ són iguals.

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	xy	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{y}z$	xz	f	g
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1

   També: $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + xy + \overline{y}z = \overline{x}\,\overline{y}(z+\overline{z}) + xy(z+\overline{z}) + (x+\overline{x})\overline{y}z = \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{yz} + xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{xy}z = \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{yz} + xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z$.

   $g(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + xy + xz = \overline{x}\,\overline{y}(z+\overline{z}) + xy(z+\overline{z}) + x(y+\overline{y})z = \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{yz} + xyz + xy\overline{z} + xyz + x\overline{y}z = \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{yz} + xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z$.

3. Si a, b, c, d, e són cinc elements d'un àlgebra de Boole B, calculeu la *f.n.d.* i la *f.n.c.* de les següents funcions:

   i) $f(a,b) = (a+b)\overline{\overline{a}b}$. ii) $f(a,b,c) = \overline{ab\overline{c} + \overline{a}b}$. iii) $f(a,b,c) = \overline{(a+b+c)\cdot(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})}$.

   iv) $f(a,b,c,d) = abcd + a\overline{d} + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{d}$. v) $f(a,b,c,d,e) = b\overline{c}d + \overline{a}\overline{d} + \overline{c}\,\overline{e} + ab\overline{c}d + \overline{a}$.

   Sol.: i) $f(a,b) = (a+b)\overline{\overline{a}b} = (a+b)(a+\overline{b}) = aa + a\overline{b} + ba + b\overline{b} = a + ab = a = a(b+\overline{b}) = ab + a\overline{b} = m_3 + m_2$.

Per la qual cosa la *f.n.d.* és $f(a,b) = \sum_2 m(2,3) = a\overline{b} + ab$.

$f(a,b) = (a+b)\overline{\overline{a}b} = (a+b)(a+\overline{b}) = M_3M_2 = \prod_2 M(2,3)$.

ii) $f(a,b,c) = \overline{ab\overline{c} + \overline{a}b} = \overline{ab\overline{c}} \cdot \overline{\overline{a}b} = (\overline{a}+\overline{b}+c)\cdot(a+\overline{b}) = (\overline{a}+\overline{b}+c)\cdot(a+\overline{b}+c\overline{c}) =$
$(\overline{a}+\overline{b}+c)\cdot(a+\overline{b}+c)\cdot(a+\overline{b}+\overline{c}) = \prod_3 M(1,4,5)$.

La *f.n.c.* de $\overline{f}$ és el producte dels maxtermes que no hi figuren en f. És a dir, $f(a,b,c) = \prod_3 M(0,2,3,6,7)$.

$\overline{\overline{f(a,b,c)}} = f(a,b,c) = \overline{M_0M_2M_3M_6M_7} = \overline{M_0} + \overline{M_2} + \overline{M_3} + \overline{M_6} + \overline{M_7} = m_7 +$
$m_5 + m_4 + m_1 + m_0 = abc + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$, que

correspon a la forma. normal disjuntiva de f.

iii) $f(a,b,c) = \sum_3 m(0,7)$, $\quad f(a,b,c) = \prod_3 M(1,2,3,4,5,6)$.

iv) $f(a,b,c,d) = \sum_4 m(8,9,10,12,13,14,15)$, $\quad f(a,b,c,d) = \prod_4 M(4,8,9,10,11,12,13,14,15)$.

v) $f(a,b,c,d,e) = b\overline{c}d + \overline{a}\overline{d} + \overline{c}\overline{e} + ab\overline{c}d + \overline{a}$.

Utilitze el mètode dels pesos:

Monomi $b\overline{c}d$: $\begin{array}{cccccc} \textit{Literals} & a & b & c & d & e \\ \textit{Pes} & 16 & \boxed{8} & \overline{4} & \boxed{2} & 1 \end{array} \rightarrow m_{10}, m_{11}, m_{26}, m_{27}$.

Monomi $\overline{a}\overline{d}$: $\begin{array}{cccccc} \textit{Literals} & a & b & c & d & e \\ \textit{Pes} & \overline{16} & 8 & 4 & \overline{2} & 1 \end{array} \rightarrow m_0, m_1, m_4, m_8, m_5, m_9, m_{12}, m_{13}$.

Monomi $\overline{c}\,\overline{e}$: $\begin{array}{cccccc} \textit{Literals} & a & b & c & d & e \\ \textit{Pes} & 16 & 8 & \overline{4} & 2 & \overline{1} \end{array} \rightarrow m_0, m_2, m_8, m_{16}, m_{10}, m_{18}, m_{24}, m_{26}$.

Monomi $ab\overline{c}d$: $\begin{array}{cccccc} \textit{Literals} & a & b & c & d & e \\ \textit{Pes} & \boxed{16} & \boxed{8} & \overline{4} & \boxed{2} & 1 \end{array} \rightarrow m_{26}, m_{27}$.

Monomi $\overline{a}$: $\begin{array}{cccccc} \textit{Literals} & a & b & c & d & e \\ \textit{Pes} & \overline{16} & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow m_0, m_1, m_2, m_4, m_8, m_3, m_5, m_9, m_6, m_{10},$
$, m_{12}, m_7, m_{11}, m_{14}, m_{13}, m_{15}$.

És a dir, $f(a,b,c,d,e) = \sum_5 m(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,24,26,27)$.

La forma normal disjuntiva de $\overline{f}$ és la suma de mintermes que no apareixen en f . És a dir: $\overline{f}(a,b,c,d,e) = \sum_5 m(17,19,20,21,22,23,25,28,29,30,31)$.

Com que $\overline{\overline{f}} = f$, $\overline{\overline{f}}(a,b,c,d,e) = \overline{\sum_5 m(17,19,20,21,22,23,25,28,29,30,31)} =$
$\overline{m_{17} + m_{19} + m_{20} + m_{21} + m_{22} + m_{23} + m_{25} + m_{28} + m_{29} + m_{30} + m_{31}} = \overline{m}_{17}\cdot$
$\overline{m}_{19}\cdot\overline{m}_{20}\cdot\overline{m}_{21}\cdot\overline{m}_{22}\cdot\overline{m}_{23}\cdot\overline{m}_{25}\cdot\overline{m}_{28}\cdot\overline{m}_{29}\cdot\overline{m}_{30}\cdot\overline{m}_{31} = \prod M(0,1,2,3,6,8,9,10,11,12,14) =$
$(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}+\overline{e})(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}+e)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+d+e)(\overline{a}+\overline{b}+c+d+\overline{e})(\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{d}+$
$\overline{e})(\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{d}+e)(\overline{a}+b+\overline{c}+d+\overline{e})(\overline{a}+b+\overline{c}+d+e)(\overline{a}+b+c+\overline{d}+\overline{e})(\overline{a}+b+c+d+\overline{e})$.

4. Suposem a, b, c, d elements d'una àlgebra de Boole B. Si f i g són les funcions booleanes:

   $f(a,b,c) = abc + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$. $\quad g(a,b,c,d) = (a+\overline{b}+\overline{d})(a+b+\overline{c}+\overline{d})(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d})$.

   i) Trobeu les funcions duals. ii) Calculeu les f.n.d. de les funcions duals. iii) Deduïu les f.nc. de les dues funcions f i g.

   Sol.: i) El primer mètode consistirà a aplicar la definició de dual. És a dir, $f^*(a,b,c) = \overline{f(\overline{a},\overline{b},\overline{c})}$.

   $f^*(a,b,c) = \overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} + abc} = (a+b+c)(\overline{a}+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$.

   El segon mètode ix directament si canviem $+$ per $\cdot$, $\cdot$ per $+$, 0 per 1 i 1 per 0.

   Aleshores, $f^*(a,b,c) = (a+b+c)(\overline{a}+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$.

   $g^*(a,b,c,d) = \overline{g(\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d})} = \overline{(\overline{a}+b+d)(\overline{a}+\overline{b}+c+d)(a+b+c+d)} = \overline{\overline{a}+b+d} + \overline{\overline{a}+\overline{b}+c+d} + \overline{a+b+c+d} = a\overline{b}\,\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$.

   Directament, $g^*(a,b,c,d) = a\overline{b}\,\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$.

   ii) La forma normal disjuntiva de f^* serà: $f^*(a,b,c) = (a+b+c)(\overline{a}+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = (a\cdot\overline{a}+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = (b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}b + b\overline{c} + \overline{a}c + \overline{b}c = \overline{a}b(c+\overline{c}) + (a+\overline{a})b\overline{c} + \overline{a}(b+\overline{b})c + (a+\overline{a})\overline{b}c = \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + ab\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}c = \sum_3 m(1,2,3,5,6)$.

   La forma normal disjuntiva de g^* serà: $g^*(a,b,c,d) = a\overline{b}\,\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} = a\overline{b}(c+\overline{c})\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} = a\overline{b}c\overline{d} + a\overline{b}\overline{c}\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} = \sum_4 m(0,8,10,12)$.

   iii) Per a trobar la forma normal conjuntiva de f , calcularem la forma normal disjuntiva de $\overline{f(a,b,c)}$, la qual està donada per la suma dels mintermes que no figuren en $f(a,b,c)$, i després utilitzarem la doble negació.

   $f(a,b,c) = abc + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \sum_3 m(0,3,7) \rightarrow \overline{f(a,b,c)} = \sum_3 m(1,2,4,5,6) \rightarrow$

   $\overline{\overline{f(a,b,c)}} = \overline{m_1+m_2+m_4+m_5+m_6} = \overline{m_1}\,\overline{m_2}\,\overline{m_4}\,\overline{m_5}\,\overline{m_6} = M_6M_5M_3M_2M_1 = \prod_3 M(1,2,3,5,6)$.

   La forma normal conjuntiva de g serà:

   Idem $g(a,b,c,d) = \prod_4 M(0,8,10,12)$.

   Així, doncs, podem observar que:

   $\boxed{(f.n.d.\text{ de } f)^* = f.n.c.\text{ de } f^*}$ i $\boxed{(f.n.c.\text{ de } f)^* = f.n.d.\text{ de } f^*}$

5. Suposem a, b, c elements d'una àlgebra de Boole B. Si f i g són les funcions booleanes:

   $f(a,b,c) = (a+b)(b+c)(c+\overline{a})(\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}+\overline{c}) \quad g(a,b,c) = \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

   i) Determineu les f.n.d. de les dues funcions f i g i de les seues complementàries.

ii) Demostreu que: $f(a,b,c) \leq g(a,b,c)$, $\overline{f(a,b,c)}+g(a,b,c) = 1$, $\overline{g(a,b,c)} \leq \overline{f(a,b,c)}$.

iii) Demostreu les implicacions:

1. $a\overline{c} + \overline{a}c + \overline{a}\overline{b} = 0 \Rightarrow f(a,b,c) = g(a,b,c)$.

2. $ac = 1 \Rightarrow f(a,b,c) = g(a,b,c)$.

3. Són certs els recíprocs de les implicacions anteriors?.

Sol.:i) $f(a,b,c) = ((a+b)(b+c))\left((c+\overline{a})(\overline{a}+\overline{b})\right)(\overline{b}+\overline{c}) = (b+ac)(\overline{a}+\overline{b}c)(\overline{b}+\overline{c}) = (\overline{a}b + a\overline{b}c)(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}c.$

$g(a,b,c) = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{a}(b+\overline{b})(c+\overline{c}) + (a+\overline{a})\overline{b}(c+\overline{c}) + (a+\overline{a})(b+\overline{b})\overline{c} = \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c} =$

$= \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} = \sum_{3} m(0,1,2,3,4,5,6).$

També $g(a,b,c) = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \prod_{3} M(0)$.

La $f.n.c.$ de $\overline{g} = \prod_{3} M(1,2,3,4,5,6,7)$. $\overline{\overline{g}}(a,b,c) = g(a,b,c) = \overline{M(1,2,3,4,5,6,7)} = \sum_{3} m(0,1,2,3,4,5,6)$

Si $f(a,b,c) = \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}c \to \overline{f(a,b,c)} = \overline{\overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}c} = \overline{\overline{a}b\overline{c}} \cdot \overline{a\overline{b}c} = (a+\overline{b}+c)(\overline{a}+b+\overline{c}) = ab + a\overline{c} + \overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{a}c + bc \underset{T.Quine}{=} ab + a\overline{c} + \overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{a}c \underset{T.Quine}{=} ab + \overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{a}c \underset{T.Quine}{=} ab + \overline{b}\overline{c} + \overline{a}c =$

$= ab(c+\overline{c}) + (a+\overline{a})\overline{b}\overline{c} + \overline{a}(b+\overline{b})c = abc + ab\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c.$

Si $g(a,b,c) = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \to \overline{g(a,b,c)} = \overline{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}} = abc.$

ii) $f(a,b,c) \leq g(a,b,c)$ ja que els dos termes de la forma normal disjuntiva de f, són també termes de g.

També podríem utilitzar la definició $a \leq b$ si, i sols si, $ab = a$, on $a, b \in B$.

$\overline{f(a,b,c)} + g(a,b,c) = 1$, ja que $\overline{f(a,b,c)} + g(a,b,c) = \sum_{3} m(0,1,2,3,4,5,6,7) = 1$.

$\overline{g(a,b,c)} \leq \overline{f(a,b,c)}$, ja que el terme de la forma normal disjuntiva de $\overline{g}$, és també terme de $\overline{f}$.

iii) 1. $a\overline{c} + \overline{a}c + \overline{a}\overline{b} = 0 \Rightarrow f(a,b,c) = g(a,b,c)$.

$a\overline{c}+\overline{a}c+\overline{a}\overline{b} = 0 \to a(b+\overline{b})\overline{c}+\overline{a}(b+\overline{b})c+\overline{a}\overline{b}(c+\overline{c}) = 0 \to ab\overline{c}+a\overline{b}\overline{c}+\overline{a}bc+\overline{a}\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c} = 0 \to ab\overline{c} = a\overline{b}\overline{c} = \overline{a}bc = \overline{a}\overline{b}c = \overline{a}b\overline{c} = 0.$

$g(a,b,c) = \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} = \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}c = f(a,b,c).$

El recíproc també és cert com es demostra utilitzant la taula de veritat:

a	b	c	$a\overline{c}$	$\overline{a}c$	$\overline{a}\overline{b}$	(1) $a\overline{c}+\overline{a}c+\overline{a}\overline{b}$	(2) 0	$(1)\leftrightarrow(2)$	f	g	$f\leftrightarrow g$
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1

2. $ac = 1 \Rightarrow f(a,b,c) = g(a,b,c)$.

2.

$ac = 1 \rightarrow a(b+\overline{b})c = (a+\overline{a})(b+\overline{b})(c+\overline{c}) \rightarrow abc + a\overline{b}c = \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} + abc \rightarrow \overline{a}bc = \overline{a}b\overline{c} = \overline{a}\overline{b}c = \overline{a}\overline{b}\overline{c} = a\overline{b}\overline{c} = ab\overline{c} = 0$

Del segon terme obtenim: $a\overline{b}c + abc = 1$, la qual cosa és sinònim de posar $\overline{a}bc = \overline{a}b\overline{c} = \overline{a}\overline{b}c = \overline{a}\overline{b}\overline{c} = a\overline{b}\overline{c} = ab\overline{c} = 0$.

És a dir, es complirà la implicació però no la igualtat, com es podria veure utilitzant la taula de veritat (com a exercici).

6. Considerem la funció booleana $f : B^4 \rightarrow B \ / \ f(a,b,c,d) = abc + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}$. Trobeu: i) La funció dual de f, és a dir, $f^*(a,b,c,d)$. ii) Mapes de Karnaugh de f^*. iii) Escriviu f^* com a suma dels seus implicants primers, utilitzant el mètode de Quine-McCluskey i el mètode dels consensos.

Sol.: i) $f(a,b,c,d) = abc + \overline{a}\overline{b}\,\overline{d} \rightarrow f^*(a,b,c,d) = (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{d})$.

ii) En primer lloc calcularem la f.n.c. de f^*.

$f^*(a,b,c,d) = (a+b+c+d\overline{d})(\overline{a}+\overline{b}+c\overline{c}+\overline{d}) = (a+b+c+d)(a+b+c+\overline{d})(\overline{a}+\overline{b}+c+\overline{d})(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}) = \prod_4 M(0,2,14,15)$.

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

ab \ cd	00	01	11	10
00	0			0
01				
11			0	0
10				

Figure 1:

$f^*(a,b,c,d) = (\overline{a}+\overline{b}+\overline{d})(a+b+c)$.

Nota: Cal dir que en treballar la forma normal conjuntiva, l'agrupació per zeros és com treballar en la forma normal disjuntiva agrupant per uns. És a dir si calcule la forma normal disjuntiva de f^*, em queda:

La forma normal conjuntiva de $\overline{f^*}$ serà el producte dels maxtermes que no apareixen en f^*, és a dir, $\overline{f^*} = \prod M(1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13)$.

Com que $\overline{\overline{f^*}} = f^* \rightarrow f^*(a,b,c,d) = \overline{M_1M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}} = \sum_4$ $m(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14)$.

Al simplificar per zeros seria: $f^*(a,b,c,d) = (a+b+c).(\overline{a}+\overline{b}+\overline{d})$.(figura 1).

iii) a) Mètode de Quine-McCluskey:

FASE 1		*FASE* 2	*FASE* 3
0000	X		
0010	X	00_0	
1110	X	$\nexists$	$\nexists$
1111	X	111_	

Implicants primers de f^* són: 00_0, 111_ que correspon a $\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}$, $a+b+c$.

b) Mètode dels consensos:

Utilitzarem $(x+\mu_1)(\overline{x}+\mu_2) = (x+\mu_1)(\overline{x}+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)$.

Variable a. $(a+b+c).(\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}) = (a+b+c).(\overline{a}+\overline{b}+\overline{d})(\underbrace{b+c+\overline{b}+\overline{d}}_{1})$.

La variable a no te cap consens. Igualment en la resta de les variables. Per la qual cosa la funció booleana no es pot simplificar més.

7. Definim la funció booleana f de la següent manera: f és una funció de tres variables a, b, c tal que agafa el valor 0 quan la variable b valga 1 i la variable a no estiga en estat 1. Per a la resta dels casos agafa el valor 1. Ens demanen: i) Obtenir la taula de veritat de $f(a, b, c)$ ii) Obtenir la f.n.d. i la f.n.c. de f.

Sol.: i)

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(a, b, c) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc = \sum_3 m(0, 1, 4, 5, 6, 7)$.

ii) Per a trobar la forma normal conjuntiva de f , calcularem la forma normal disjuntiva de $\overline{f(a, b, c)}$, la qual està donada per la suma dels mintermes que no figuren en $f(a, b, c)$, i després utilitzarem la doble negació. $f(a, b, c) = \sum_3 m(0, 1, 4, 5, 6, 7) \rightarrow \overline{f\ (a, b, c)} = \sum_3 m(2, 3)$.

$\overline{\overline{f\ (a, b, c)}} = \overline{m_2 + m_3} = \overline{m_2} \cdot \overline{m_3} = M_5 M_4 = (a + \overline{b} + c)(a + \overline{b} + \overline{c})$.

8. Simplifiqueu: i) $f(x, y, z) = \sum_3 m(1, 2, 5, 6)$. ii) $g(x, y, z) = \prod_3 M(0, 1, 4, 5)$.

iii) $f(x, y, z, t) = \sum_4 m(7, 9, 10, 11, 14, 15)$.

iv) $f(x, y, z, t, u) = \sum_5 m(13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31,) + \sum_\phi m(1, 2, 12, 24)$.

Sol.: i) $f(x, y, z) = \overline{y}z + y\overline{z}$.

ii) $g(x, y, z) = \prod_3 M(0, 1, 4, 5) = (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})(\overline{x} + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z})(x + \overline{y} + z) = y$. (fig. 2).

iii) $f(x, y, z, t) = xz + yzt + x\overline{y}t$.

iv) $f(x, y, z, t, u) = xu + yzu + x\ \overline{y}\ \overline{z}\ t + x\overline{y}z\overline{t}$. En aquest cas no hem utilitzat cap indeterminació (fig.3).

9. Expresseu la següent funció booleana com a suma minimal d'implicants primers. $f(x, y, z, t, u) = \sum_5 m(0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 26, 28, 30, 31)$.

Estudieu la quadrícula de McCluskey per a determinar els implicants necessaris (fixos).

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0		
1	0	0		

Figure 2:

xy \ ztu	000	001	011	010	110	111	101	100
00		X		X				
01						1	1	X
11	X	1	1			1	1	
10		1	1	1		1	1	1

Figure 3:

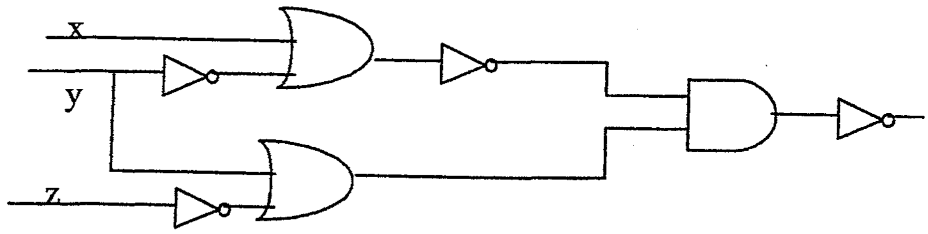


Figure 4:

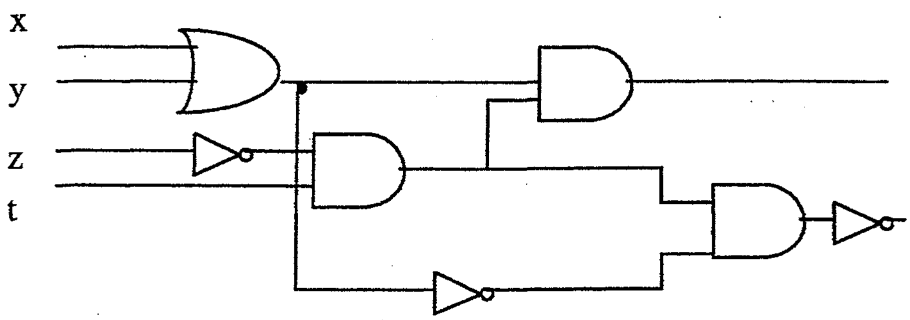


Figure 5:

Sol.:

$f(x,y,z,t,u) = \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{u} + \overline{x}y\overline{t}u + \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{t}\ \overline{u} + x\ \overline{y}\ \overline{t}\ u + xyz\overline{u} + yt\overline{u} + yzt.$

El implicants fixos són: $\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{u}$, $xyz\overline{u}$, $yt\overline{u}$, $x\ \overline{y}\ \overline{t}\ u$, yzt, $\overline{x}y\overline{t}u$.

La simplificació de f no és única.

10. Donats els següents circuits, figures 4 i 5, amb entrades x, y, z i x, y, z, t, trobeu $f(x,y,z)$ i $g(x,y,z,t)$ i construïu-ne uns altres equivalents amb un nombre mínim de portes OR, AND i NOT.

Sol.:

$f(x,y,z) = \sum_3 m(0,1,4,5,6,7)$. La funció simplificada és $f(x,y,z) = x + \overline{y}$.

$f(x,y,z,t) = \sum_4 m(5,9,13)$ per a la primera eixida. La funció simplificada $f(x,y,z,t) = (x+y)\overline{z}t$.

$f(x,y,z,t) = \sum_4 m(0,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$ per a la segona eixida. La funció simplificada $f(x,y,z,t) = x + y + z + \overline{t}$.

Part I
TEMA 3: CONJUNTS. OPERACIONS ENTRE CONJUNTS

1. IDEA DE CONJUNT

Podem admetre que qualsevol persona té una idea de la noció de conjunt, terme del qual s'accepten sinònims com ara *agregat, reunió* o *col·lecció.* Intuïtivament un conjunt és una reunió d'objectes diferents. Per exemple, els conjunts numèrics ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,...), les rectes d'un pla, els punts d'una recta, són conjunts utilitzats en matemàtiques. Les persones nascudes en una certa localitat, els estudiants de la classe, les paraules que componen un poema o una novel·la, els objectes que l'estudiant porta a les butxaques i bosses,...

Definició 1. *George Cantor, creador de la teoria de conjunts, va donar la següent definició:*

Denominem **conjunt** *una sèrie qualsevol d'objectes que tinguen una característica o propietat comuna ben definida. També podem dir que un* **conjunt** *és la reunió en un tot de determinats objectes ben definits i diferenciats els uns dels altres.*

Per tal que aquesta definició de conjunt puga ser acceptada com a vàlida, caldrà tenir en compte:

1. Un conjunt estarà bén definit si és possible saber sense cap dubte si cada objecte pertany o no al conjunt.
2. Si un objecte pertany al conjunt, aleshores és un sol element del conjunt. En altres paraules, en un conjunt tots els seus elements són distints.
3. Es postula que un element d'un conjunt no pot ser el mateix conjunt. És a dir, un conjunt mai podrà ser un dels elements que el formen.

Per a designar els conjunts utilitzarem lletres majúscules i per a designar els seus elements utilitzarem lletres minúscules.

Per a indicar que un element a és un element del conjunt A, s'utilitza el símbol $\in$ anomenat signe de pertinença i s'escriu $a \in A$ i es llegeix a pertany al conjunt A o bé a és un element del conjunt A. En cas contrari s'utilitza $\notin$(no pertany).

1.1. Caracterització d'un conjunt. Sabem que per a definir un conjunt cal precisar quins són tots i cadascú dels objectes que el formen. Això ho podem fer de dues maneres:

1. *Per extensió*, donant nom a cadascun dels seus elements.

2. *Per comprensió,* enunciant una propietat que siga complida per tots els seus elements del conjunt i sols per ells. Aquesta propietat s'anomena "propietat característica".

Per extensió: $A = \{a, e, i, o, u\}$.
$B = \{$dilluns, dimarts, dimecres, dijous, divendres, dissabte, diumenge$\}$.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Per comprensió: A=$\{$vocals$\}$. $B = \{$dies de la setmana$\}$. $\mathbb{N}$=$\{$naturals$\}$.
La notació per a representar un conjunt per comprensió pot ser: $A = \{x/ \quad p(x)\}$.
Es llegeix: A és el conjunt dels elements x tals que compleixen la propietat p.
Per exemple $A = \{x \in \mathbb{N}/ \quad 1 < x < 9\}$. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/ \quad x^2 + y^2 = 1\}$.
$C = \{x/ \quad x = 2n \quad n \in \mathbb{N}\} = \{$nombres parells$\}$.

Definició 2. *Anomenem* **conjunt buit** *i el representem per ϕ aquell conjunt que no té elements.*

Així $\phi = \{x \ / \ x \neq x\}$ També $A = \{x \ / \ x \in A$ és falsa $\forall x\} = \phi$.

Nota 1. *El conjunt ϕ és únic.*

Definició 3. *Anomenem* **conjunt unitari** *aquell conjunt que té un únic element.*

Definició 4. *Anomenem* **conjunt universal** *i el representem per E aquell conjunt que conté tots els conjunts que es consideren.*

Així $A = \{x \ / \ x \in A$ és certa $\forall x\} = E$.
És a dir, el conjunt universal és un conjunt constituït, almenys, per tots els elements que formen els conjunts que s'utilitzen en cada cas.

Nota 2. *El conjunt E no és únic.*

1.2. Representació. Un conjunt es pot representar entre claus, amb diagrames d'Euler-Venn, amb diagrames de Carroll, amb una representació lineal (diagrames d'arbre, de Hasse).

La forma més usual de representar un conjunt és utilitzant les claus com en els exemples anteriors.

En els diagrames d'Euler-Venn els conjunts es representen per àrees planes limitades per qualsevol línia tancada simple (circumferència, quadrat, el·lipse,...).

Els elements es representen per creus o punts. La relació de pertinença es caracteritza segons el punt estiga en el recinte pla, ja que si aquest està en el recinte, aleshores pertany al conjunt i si no es troba en el recinte no hi pertany. Vegeu la fig. 1.

Cal destacar que aquest diagrama és complicat en el moment en què ens donen diversos conjunts. Vegeu la fig. 2.

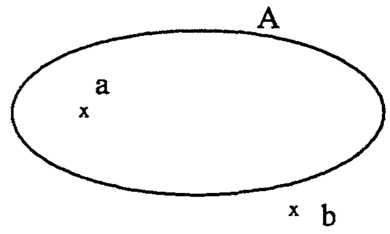


Figure 1:

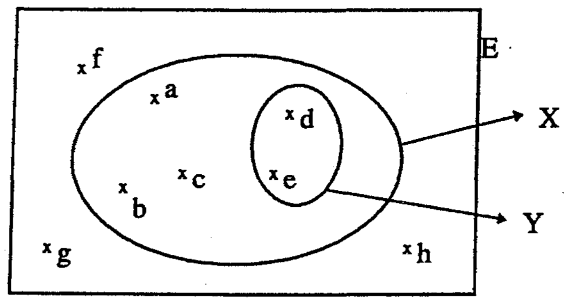


Figure 2:

E és el conjunt universal, $X = \{a, b, c, d, e\}$. $Y = \{d, e\}$.

Alguns estudiants interpreten erròniament aquest diagrama i creuen que X és el conjunt format pels elements a, b, c, però $\{a, b, c\}$ és el complementari de Y en X on $X = \{a, b, c, d, e\}$ que seria el conjunt universal i $\{f, g, h\}$ és el complementari de X en E.

2. INCLUSIÓ I COMPLEMENTACIÓ

Definició 5. *Donats dos conjunts A i B, direm que A està inclòs en B, o A és un subconjunt de B si, i sols si, tots els elements del conjunt A són també elements del conjunt B.*

És a dir, $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$.

Aquesta inclusió que hem definit és molt àmplia i pot ocórrer que algun element del conjunt B puga pertànyer també al conjunt A. Per a impedir aquest cas, cal establir la inclusió estricta.

És a dir, $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B \quad \wedge \quad \exists y \; / \; y \in B \; / \; y \notin A$.

Nota 3. *Normalment utilitzarem la notació $\subset$, però en sentit àmplia. És a dir,*

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$.

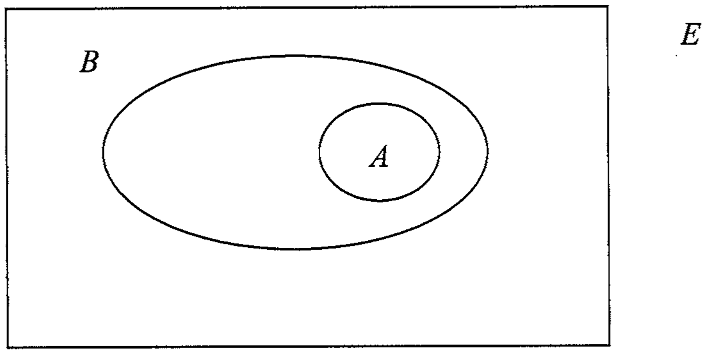


Figure 3:

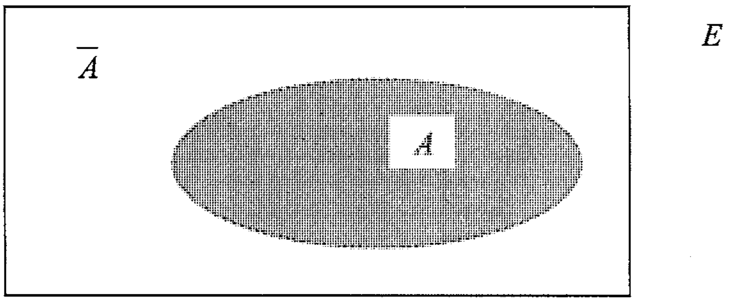


Figure 4:

Nota 4. *Quan convinga precisar anotarem* $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Nota 5. $A \subset B$ *correspon en lògica a la condicional* $a \to b$.

Vegeu la fig. 3.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \overset{A \subset B}{\longrightarrow} x \in B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definició 6. *Donat un conjunt universal* E *i* $A \subset E$, *anomenem* ***complementari*** *de* A *respecte de* E, *el conjunt dels elements de* E *que no pertanyen al* A.

És a dir $C_E(A) = A^c = \overline{A} = \{x \ / \ x \in E \wedge x \notin A\}$.
Vegeu la fig. 4.

$x \in A$	$x \in \overline{A}$
0	1
1	0

Nota 6. *En lògica la complementació correspon a la negació.*

Definició 7. *Direm que* **dos conjunts són iguals** *si, i sols si, tenen els mateixos elements.*

És a dir, $A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B \wedge \forall x \in B \rightarrow x \in A$ o bé
$A = B \ \Leftrightarrow (\ x \in A \leftrightarrow x \in B) \quad \forall x.$

Nota 7. *En lògica la igualtat entre conjunts correpon a $\leftrightarrow$ (bicondicional).*

Proposició 1. *La relació d'igualtat entre conjunts compleix les següents propietats:*

1. Reflexiva $\quad A = A \ \ \forall A.$
2. Simètrica $\quad A = B \Rightarrow B = A.$
3. Transitiva $\quad A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C.$

És a dir, la relació d'igualtat entre conjunts és una relació binària d'equivalència.

Proposició 2. *La relació d'inclusió entre conjunts compleix les següents propietats:*

1. Reflexiva $\quad A \subset A \ \ \forall A.$
2. Antisimètrica $\quad A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ (També se verifica $\Leftarrow$).
3. Transitiva $\quad A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C.$

És a dir, la relació d'inclusió entre conjunts és una relació binària d'ordre.

Nota 8. *La propietat antisimètrica serà el criteri que ens servirà per a demostrar la igualtat entre dos conjunts.*

Demostració:
Qualsevol propietat es pot demostrar utilitzant les taules de veritat. Caldrà substituir la inclusió per la condicional i la igualtat per la bicondicional. També utilitzant les regles i teoremes de l'àlgebra de Boole bivalent. Per exemple, demostrem l'antisimètrica.
Per taules de veritat:

a	b	$a \overset{(1)}{\rightarrow} b$	$b \overset{(2)}{\rightarrow} a$	$(1) \wedge (2)$	$a \overset{(3)}{\leftrightarrow} b$	$(1) \wedge (2) \rightarrow (3)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Per regles i teoremes de l'àlgebra de Boole bivalent:

La f.n.d. del primer terme seria:
$(a \to b \wedge b \to a) = (\overline{a} + b)(\overline{b} + a) = \overline{a}\,\overline{b} + ab.$
La f.n.d. del segon terme seria:
$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a) = (\overline{a} + b)(\overline{b} + a) = \overline{a}\,\overline{b} + ab.$
Per exemple, demostrem la transitiva.
Per taules de veritat:

a	b	c	$a \overset{(1)}{\to} b$	$b \overset{(2)}{\to} c$	$(1) \wedge (2)$	$a \overset{(3)}{\to} c$	$(1) \wedge (2) \to (3)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Per regles i teoremes de l'àlgebra de Boole bivalent:
La f.n.d. del primer terme seria:
$(a \to b) \wedge (b \to c) = (\overline{a} + b)(\overline{b} + c) = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}c + bc \underset{T.Quine}{=} \overline{a}\,\overline{b} + bc = \overline{a}\,\overline{b}(c + \overline{c}) + (a + \overline{a})bc = \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + abc + \overline{a}bc$
La f.n.d. del segon terme seria:
$a \to c = \overline{a} + c = \overline{a}(b + \overline{b})(c + \overline{c}) + (a + \overline{a})(b + \overline{b})c = \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + abc + a\overline{b}c + \overline{a}bc + \overline{a}\,\overline{b}c = \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + abc + a\overline{b}c$
Com que resulta que tots els termes de la primera expressió estan en la segona, aleshores la inclusió és certa.

2.1. Propietats. A més a més de les ja vistes anteriorment, es poden demostrar:

1. $\phi \subset A \quad \forall A \quad , \quad A \subset E \quad \forall A.$
2. $\overline{\overline{A}} = A \quad , \quad \overline{\phi} = E \quad , \quad \overline{E} = \phi \quad , \quad A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}.$

3. OPERACIONS ENTRE CONJUNTS

El concepte d'operació es veurà en un altre tema. Ara entendrem per operació entre conjunts un procediment de formació d'un nou conjunt en partir d'altres dos conjunts.

3.1. ***Unió.*** Unió o reunió entre dos conjunts A i B és el conjunt format amb els elements que pertanyen almenys a un dels dos. Es representa per $A \cup B$.
És a dir, $A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \vee x \in B\}$.
Vegeu les fig. 5 i 6.

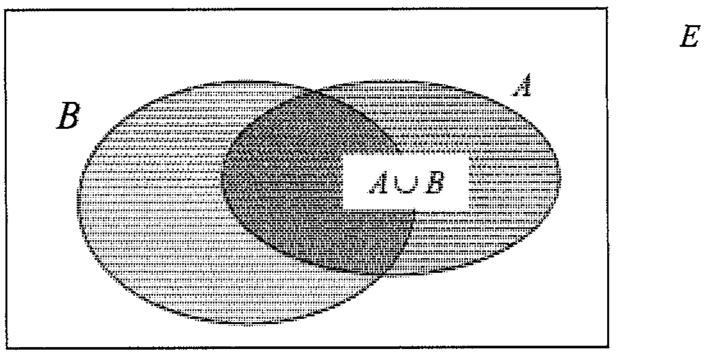


Figure 5:

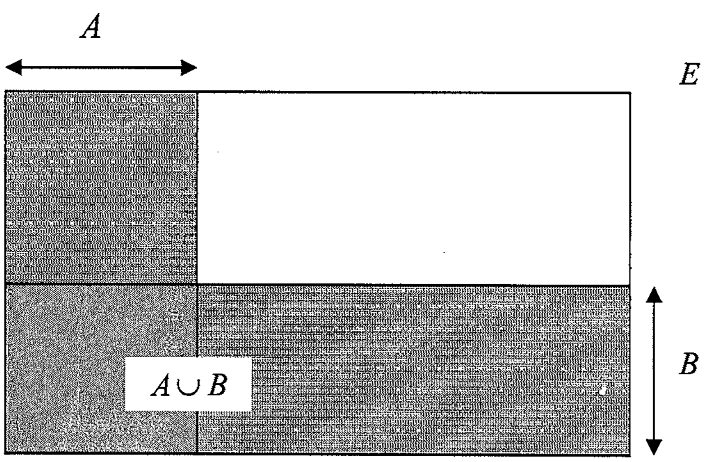


Figure 6:

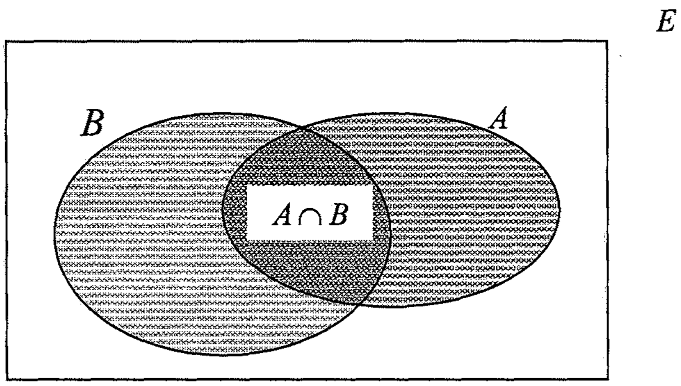


Figure 7:

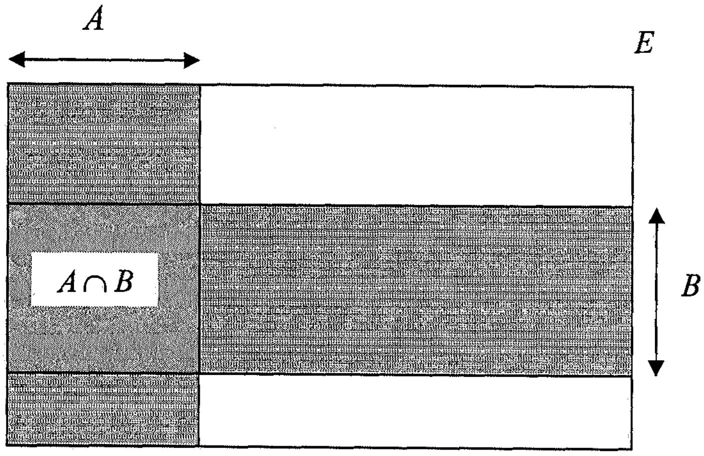


Figure 8:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Nota 9. *En lògica la unió correspon a* $+$ ($\vee$).

3.2. ***Intersecció.*** Intersecció de dos conjunts A i B és el conjunt format amb els elements que pertanyen als dos. Es representa per $A \cap B$.

És a dir, $A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \wedge x \in B\}$.

Vegeu les fig. 7 i 8.

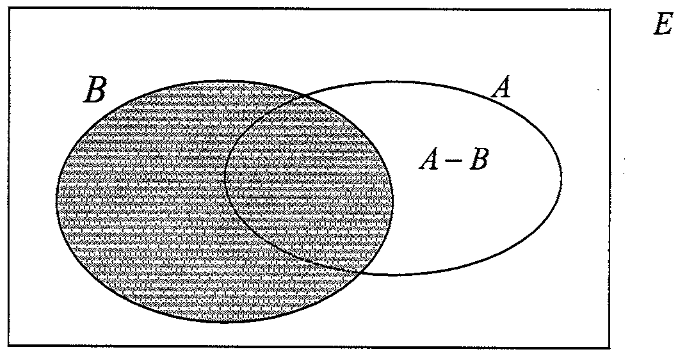


Figure 9:

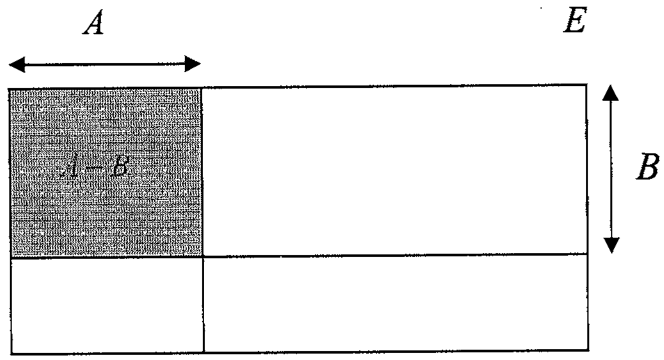


Figure 10:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nota 10. *En lògica, la intersecció correspon a* $\cdot$ $(\wedge)$.

3.3. ***Diferència.*** La diferència entre A i B és el conjunt dels elements de A que no són de B. Es representa per $A - B$.

És a dir, $A - B = \{x \in E \ / \ x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.

Vegeu les fig. 9 i 10.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A - B$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Nota 11. *En lògica, la diferència no es relaciona amb cap partícula connectiva.*

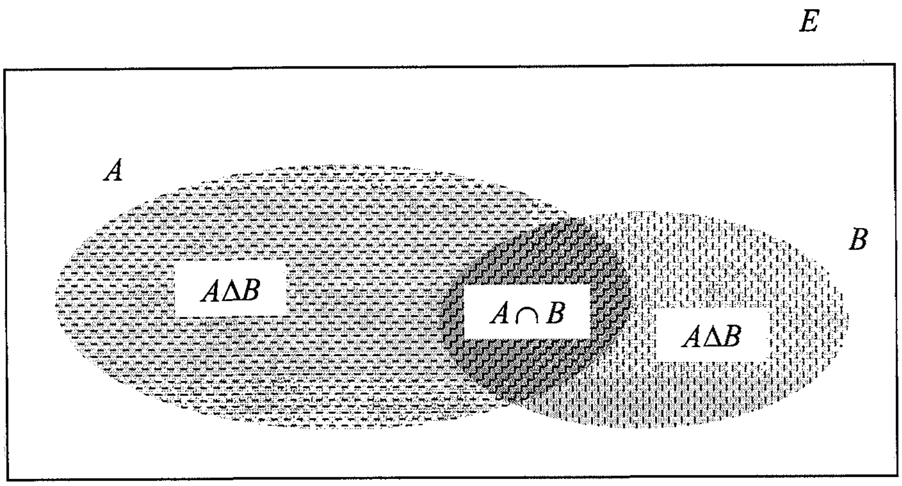


Figure 11:

3.4. *Diferència simètrica.* La diferència simètrica entre A i B és el conjunt dels elements que pertanyen sols a un dels dos (sols a A o sols a B). També podríem dir que la diferència simètrica entre A i B és el conjunt dels elements que pertanyen a A o a B però no a ambdós. Es representa per $A\Delta B$.

És a dir, $A\Delta B = \{x \in E \;/\; x \in A \wedge x \notin B\} \cup \{x \in E \;/\; x \in B \wedge x \notin A\}$.

Vegeu les fig. 11 i 12.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A\Delta B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Nota 12. *En lògica, la diferència simètrica correspon a la negació de la bicondicional. Correspon a la porta lògica OREX (negació de la bicondicional, es a dir, $\overline{\rightleftarrows}$).*

3.5. Suma.

Definició 8. *Direm que dos* **conjunts** *són* **disjunts** *si, i sols si, no tenen cap element en comú. És a dir, A i B són disjunts $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$.*

Donats A i B disjunts, definim la suma entre A i B com el conjunt dels elements que són de A o de B.

És a dir, si $A \cap B = \phi$, $\quad A + B = A \cup B$.

Vegeu les fig. 13 i 14.

4. PRODUCTE CARTESIÀ

4.1. Introducció. Si ens donen dos objectes qualsevol a i b, és possible formar un conjunt binari $\{a, b\}$ igual que el conjunt binari $\{b, a\}$. És a dir, l'ordre en què

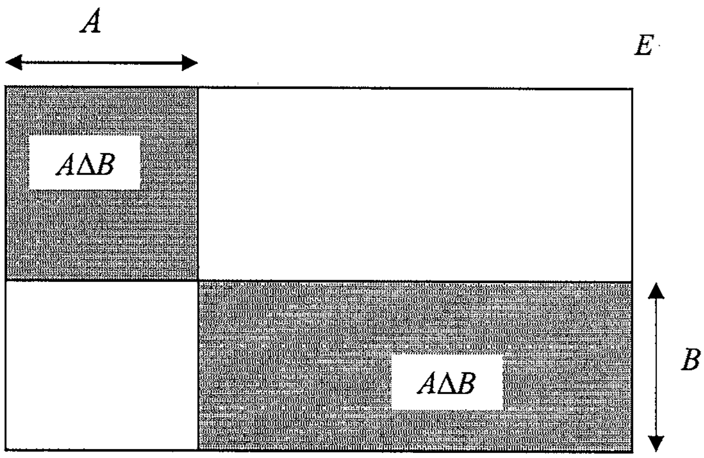


Figure 12:

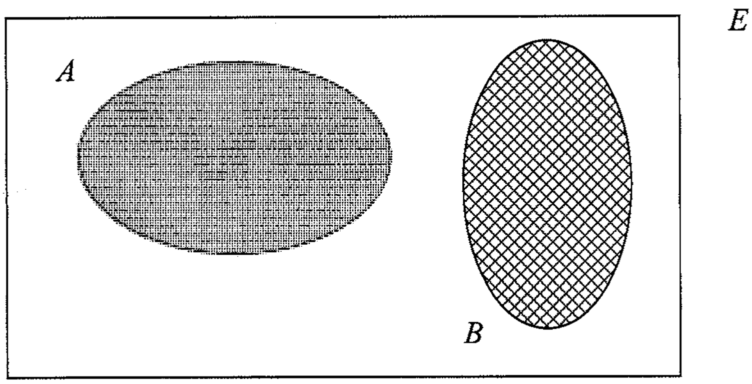


Figure 13:

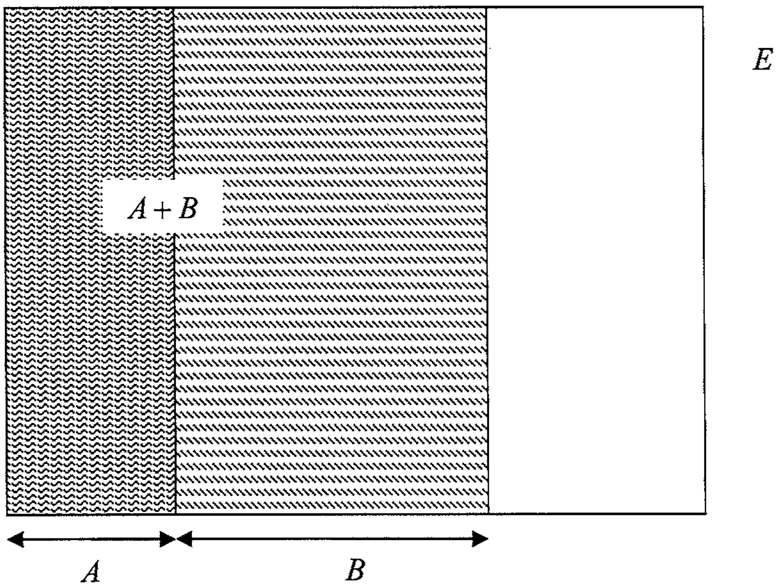


Figure 14:

s'escriuen els elements en un conjunt no importa.

Ara bé, tant en la vida ordinària com en les ciències i en particular en les matemàtiques, l'ordre intervé de manera especial. Per exemple, en geometria no representa el mateix punt $M = (1,2)$ que $N = (2,1)$. En un segment orientat $\overrightarrow{AB}$, no representa el mateix par (o parell) (A, B) que el par (o parell) (B, A).

Definició 9. *Donats dos objectes diferents x , y denominem* **parell ordenat** *de components x , y el parell (x, y), on l'ordre és essencial.*

És a dir, $(x,y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$.

Definició 10. *S'anomena* **producte cartesià** *de A i de B el conjunt dels parells ordenats de la forma (x, y), on $x \in A$, $y \in B$. Es representa per $A \times B$.*

És a dir, $A \times B = \{(x,y) \ / \ x \in A \wedge y \in B\}$ on x és la primera projecció i y és la segona projecció.

1. Un parell no és una parella.

   Per exemple (x,y) és un parell, però $\{x,y\}$ és una parella.

2. En partir d'una parella $\{x,y\}$, es poden formar quatre parells diferents:

   (x,x), (x,y), (y,x), (y,y).

3. En un parell, l'ordre és essencial, és a dir, $(x,y) \neq (y,x)$ si $x \neq y$.

4.2. Representació gràfica. Caldrà distingir dos casos:

i) Quan els conjunts estan definits per extensió. Per exemple:
$A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}$, el producte cartesià serà:
$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$.
Vegeu en la fig. 15 la representació cartesiana.

A B	a	b
1	$(1,a)$	$(1,b)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$
3	$(3,a)$	$(3,b)$

Vegeu en la fig. 16 la representació sagital.

ii)Quan els conjunts estan definits per comprensió. Per exemple:
$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq x \leq 3\}$ $\quad B = \{y \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq y \leq 4\}$
Vegeu en la fig. 17 la representació cartesiana.

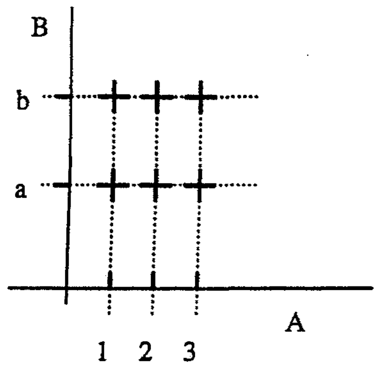


Figure 15:

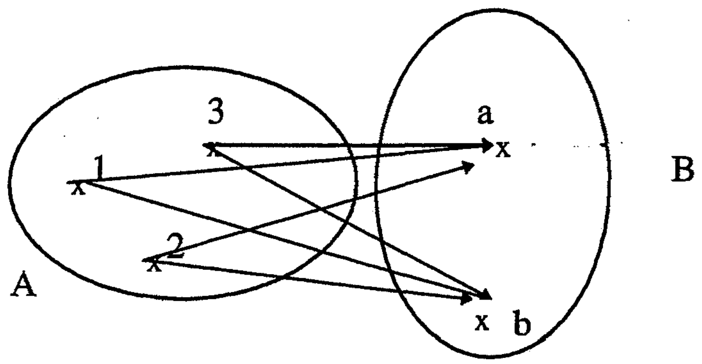


Figure 16:

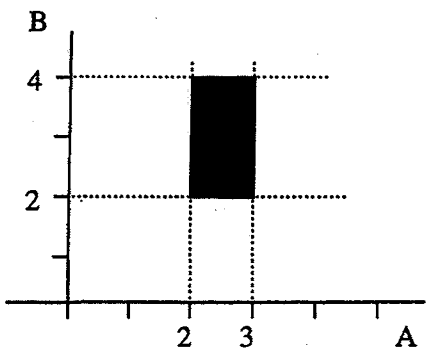


Figure 17:

5. ÀLGEBRA DE BOOLE DE LES PARTS D'UN CONJUNT

Definició 11. *Anomenem* ***família de conjunts*** *un conjunt on els seus elements són també conjunts.*

Definició 12. ***Conjunt de les parts d'un conjunt.***

Si ens donen un conjunt qualsevol $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, amb cadascun dels seus elements a_i es pot formar un nou conjunt unitari $\{a_i\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sent les expressions equivalents $a_i \in \{a_i\}$ o $\{a_i\} \subset A$.

De forma anàloga obtindríem els conjunts binaris$\{a_i, a_j\}$, $i \neq j \, \forall i$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ subconjunts de A i en reiterar el procés calcularíem tots els subconjunts de A.

Tots aquests conjunts constitueixen, com a elements, un altre conjunt o família de conjunts, denominada **conjunt de les parts d'un conjunt.** Es representa per $P(A)$.

És a dir, $P(A) = \{M \;/\; M \subset A \quad \forall M\}$.

Per exemple, si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$$P(A) = \{\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}.$$

Definició 13. *Anomenem* ***cardinal d'un conjunt finit*** *el nombre d'elements que té aquest conjunt.*

Proposició 3. $card(P(A)) = 2^{card(A)}$.

Demostració:

Suposem $card(A) = n$, cal demostrar que $card(P(A)) = 2^n$.

Com que $P(A) = \{M \;/\; M \subset A \quad \forall M\}$, els subconjunts de A que no tenen cap element corresponen a les combinacions de n elements agafats de zero en zero. És a dir, $C_{n,0} = \binom{n}{0}$.

Els subconjunts de A que tenen un element corresponen a les combinacions de n elements agafats d'un en un. És a dir, $C_{n,1} = \binom{n}{1}$.

Els subconjunts de A que tenen dos elements corresponen a les combinacions de n elements agafats de dos en dos. És a dir, $C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

Els subconjunts de A que tenen n elements corresponen a les combinacions de n elements agafats de n en n. És a dir, $C_{n,n} = \binom{n}{n}$.

Total $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$. Aquesta expressió és igual al desenvolupament del binomi de Newton $(1+1)^n$.

És a dir, $card(P(A)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n = 2^{card(A)}$

1. $P(A) \neq \phi \quad \forall A$.

   És a dir, les parts d'un conjunt qualsevol sempre tenen algun element (mai és el buit), ja que encara considerant $A = \phi, \quad P(A) = \{\phi\} \neq \phi$.

2. Sempre podem calcular $P(P(A))$ $\forall A$ i així successivament.
   En el meu cas $P(P(A)) = \{\phi, \{\phi\}\}$.
   $P(P(P(A))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$.

Proposició 4. *Si E és un conjunt universal i $A, B, C \in P(E)$, aleshores el conjunt de les parts d'un conjunt, amb les operacions $\cup, \cap$, i complementació, constitueix una àlgebra de Boole, denominada* ***Àlgebra de Boole de les parts d'un conjunt.***

És a dir, $(P(E), \cup, \cap, -)$ és un àlgebra de Boole (reticle, complementari i distributiu).

1. *Associativa.*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$ $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
2. *Commutativa.*
$A \cup B = B \cup A.$ $\quad A \cap B = B \cap A.$
3. *Idempotent.*
$A \cup A = A.$ $\quad A \cap A = A.$
4. *Simplificativa.*
$A \cup (A \cap B) = A.$ $\quad A \cap (A \cup B) = A.$
5. *Complementària.*
$\forall A \in P(E) \quad \exists \overline{A} \in P(E) \ / \ A \cup \overline{A} = E \wedge A \cap \overline{A} = \phi.$
6. *Distributiva.*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

6. RECOBRIMENT I PARTICIÓ

Suposem $A \neq \phi$. Suposem $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una família de subconjunts de A.

Definició 14. *Direm que la família $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjunts de A és un* **recobriment de** *A si es compleix $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$, és a dir, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.*

Definició 15. *Direm que la família $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjunts de A constitueix una* **partició** *o classificació del conjunt A si es verifica:*

i) $A_i \neq \phi \quad \forall i.$
ii) $A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j$ (conjunts disjunts dos a dos).
iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$

Cadascun dels subconjunts A_i es diu que és una **classe de la partició**.

Nota 13. *Definir una partició d'un conjunt és una activitat corrent en la vida qüotidiana. Tota classificació té per objecte crear una partició en un conjunt: departaments administratius, apartats de correu, catàlegs de biblioteca, grups d'una escola, ...*

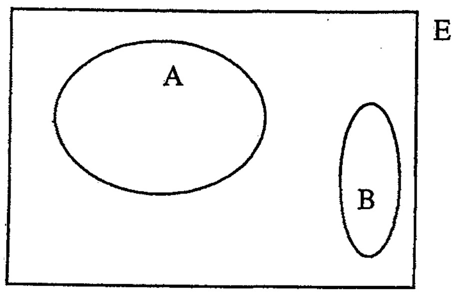


Figure 18:

El concepte de partició exerceix un paper important en matemàtiques com es pot apreciar a l'hora de construir els conjunts numèrics $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ...

1. Si $A \subset E \quad \Rightarrow \{A, \overline{A}\}$ constitueix una partició de E.
2. Si $\mathbb{N}$ és el conjunt dels naturals $\Rightarrow \{\mathbb{P}, \mathbb{I}\}$ constitueix una partició de $\mathbb{N}$, sent $\mathbb{P}$ el conjunt dels nombres naturals parells, $\mathbb{I}$ el conjunt dels nombres naturals imparells.
3. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$ constitueix una partició de E.
4. Si $E = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x < 5\} \Rightarrow \{\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x < -1\}, \{0, 2\}, \{-1, 1, 3, 4\}\}$ constitueix una partició de E.

7. CARDINAL DE LA UNIÓ DE DOS O MÉS CONJUNTS

Suposem el conjunt universal E i $A, B \subset E \ / \ A \neq \phi$, $B \neq \phi$, on A i B són conjunts finits.

Caldrà distingir dos casos:

1) $A \cap B = \phi$. En aquest cas $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.

En efecte, com $A \cap B = \phi \to A \cup B = A + B \to card(A \cup B) = card(A + B) = card(A) + card(B)$.

Vegeu fig. 18.

2) $A \cap B \neq \phi$. En aquest cas $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

Vegeu fig. 19.

En efecte, descompondrem $A \cup B$ en dos conjunts disjunts per a poder aplicar el cas 1)

$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$. $\qquad B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Com els segons termes d'aquestes igualtats són disjunts, aplicarem el cas 1) i obtindrem:

$card(A \cup B) = card(A) + card(\overline{A} \cap B)$ (I).

$card(B) = card(A \cap B) + card(\overline{A} \cap B) \to card(B) - card(A \cap B) = card(\overline{A} \cap B)$.

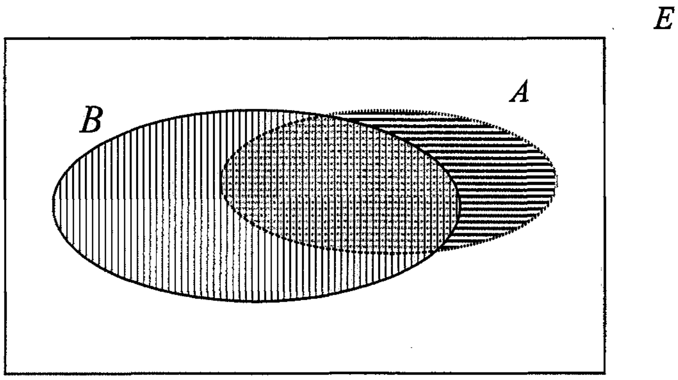


Figure 19:

En substituir aquesta última expressió en (I), obtenim:
$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

Nota 14. *La fórmula es pot generalitzar per a n conjunts.*

En cas de tres conjunts quedaria: $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$.

Per a la demostració caldrà aplicar la propietat associativa de la unió entre conjunts i utilitzar el cas 2).

8. GENERALITZACIÓ DE LA UNIÓ, DE LA INTERSECCIÓ I DEL PRODUCTE CARTESIÀ

Definició 16. *Unió.*

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és el conjunt format pels elements que pertanyen almenys a un dels conjunts A_i.

És a dir, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \; / \; x \in A_i \quad \exists i \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Definició 17. *Intersecció.*

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ és el conjunt format pels elements que pertanyen a tots els conjunts A_i.

És a dir, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \; / \; x \in A_i \quad \forall i \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Definició 18. *Producte cartesià.*

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{X}_{i=1}^{n} A_i = \{x \; / \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \; / \; x_i \in A_i \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ (és una n-tupla d'elements).

9. PROPIETATS ENTRE LES OPERACIONS DELS CONJUNTS

9.1. P_1 : *INCLUSIÓ RESPECTE A LA UNIÓ I INTERSECCIÓ* .

1. $A \subset A \cup B$. $\qquad B \subset A \cup B$.
2. $A \cap B \subset A$. $\qquad A \cap B \subset B$.
3. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
4. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
5. $A \subset C \; i \; B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$.
6. $D \subset A \; i \; D \subset B \Leftrightarrow D \subset A \cap B$.
7. $A \subset B \; i \; C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$.
8. $A \subset B \; i \; C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$.

9.2. P_2 : *INCLUSIÓ RESPECTE A LA UNIÓ ,INTER., COMPL., I DIFERÈNCIA* .

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Són les lleis de De Morgan.
3. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$.
4. $A \cap B = \phi \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$.
5. $A \cup B = E \Leftrightarrow \overline{A} \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset A$.
6. $A - (A \cap B) = A - B$.
7. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

9.3. P_3 : *PROPIETATS DEDUÏDES PER LA DIFERÈNCIA SIMÈTRICA* .

1. $A \Delta B \subset A \cup B$.
2. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
3. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
4. $\overline{A \Delta B} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.
5. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. Associativa.
6. $A \Delta \phi = A = \phi \Delta A$.
7. $A \Delta A = \phi$.

8. $A\Delta B = B\Delta A$. Commutativa.

9. $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$. Distributiva $\cap$ de respecte de Δ.

10. $A \cup (B\Delta C) \neq (A \cup B)\Delta(A \cup C)$.
Contraexemple $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5\}$, $C = \{1,5,10,15,20\}$.

Nota 15. *Totes aquestes propietats es poden demostrar clàssicament per elements o aplicant l'àlgebra de Boole bivalent i les regles i teoremes vists en el tema anterior.*

Caldrà substituir: $\subset$ per $\rightarrow$; $=$ per $\leftrightarrow$; $\cup$ per $+$; $\cap$ per $\cdot$; Δ per $\overline{\leftrightarrow}$ (negació de la bicondicional) ; E per 1 ; ϕ per 0 ; A per a ; B per b ; C per c ; $\overline{A}$ per $\overline{a}, \ldots$

9.4. P_4: *PROPIETATS DEL PRODUCTE CARTESIÀ* .

1. $A \subset X \wedge B \subset Y \Rightarrow A \times B \subset X \times Y$ sent X, Y conjunts universals.
2. $A \neq \phi \wedge B \neq \phi \wedge A \times B \subset X \times Y \Rightarrow A \subset X \wedge B \subset Y$.
3. $A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$.
4. $A \times B \neq \phi \Leftrightarrow A \neq \phi \wedge B \neq \phi$.
5. $A \times B \neq B \times A$ si $A \neq B$.
6. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.
7. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
8. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
9. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
10. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subset (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$.
11. $A \subset X \wedge B \subset Y \Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$.
12. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
13. $A \subset X \wedge B \subset Y \Rightarrow (X \times Y) - (A \times B) = [(X - A) \times Y] \cup [X \times (Y - B)]$.
14. $\overline{A} \times B = \overline{A \times B}$; $A \times \overline{B} = \overline{A \times B}$.

Nota 16. *Aquestes propietats no es poden demostrar aplicant l'àlgebra de Boole bivalent ni per taules de veritat. Caldrà aplicar la teoria de conjunts sobre els elements.*

Demostració 7 de P_1.
$A \subset B \; i \; C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$.
Per taules de veritat:

a	b	c	d	$a \xrightarrow{1} b$	$c \xrightarrow{2} d$	$a \overset{3}{+} c$	$b \overset{4}{+} d$	$3 \xrightarrow{II} 4$	$1 \overset{I}{\cdot} 2$	$I \to II$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Exercici 1. *Demostreu $A \subset B \; i \; C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$ utilitzant les funcions booleanes.*

Exercici 2. *Demostreu $A \subset B \; i \; C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$ utilitzant elements dels conjunts.*

En efecte, $\forall x \in A \cup C$, caldrà demostrar que també $x \in B \cup D$.

Si $x \in A \cup C \longrightarrow x \in A \vee x \in C$. Com $A \subset B$, $x \in B$. Com $C \subset D$, $x \in D$. Aleshores, $x \in B \vee x \in D \longrightarrow x \in B \cup D$.

Demostració 5 de P_2.
$A \cup B = E \Leftrightarrow \overline{A} \subset B$.
Per taules de veritat:

a	b	$a+b$	e	$a+b \leftrightarrow e$	$\overline{a}$	$\overline{a} \to b$	$(a+b \leftrightarrow e) \leftrightarrow (\overline{a} \to b)$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

Per funcions booleanes:
f.n.d. del primer terme $(a + b = 1)$.

$a(b+\overline{b})+(a+\overline{a})b = (a+\overline{a})(b+\overline{b}) \longrightarrow ab+a\overline{b}+ab+\overline{a}b = ab+a\overline{b}+\overline{a}b+\overline{a}\,\overline{b} \longrightarrow \overline{a}\,\overline{b} = 0.$
f.n.d. del segon terme $\overline{a} \rightarrow b$.
$\overline{a} \rightarrow b = a+b = a(b+\overline{b})+(a+\overline{a})b = ab+a\overline{b}+ab+\overline{a}b = ab+a\overline{b}+\overline{a}b.$

Nota 17. *El primer terme és una igualtat i mai es podrà calcular la f.n.d. Sempre ens donarà una suma de mintermes igualada a zero. Però a partir d'aquesta, es podrà obtenir la f.n.d. i que correspondria a l'obtinguda en el segon terme.*

Per elements:
$A \cup B = E \Leftrightarrow \overline{A} \subset B.$
$\rightarrow)$
Suposem $x \in \overline{A} \longrightarrow x \notin A$. Com $\forall x \in E$ i $A \cup B = E \longrightarrow x \in B$.
$\leftarrow)$ $\subset)$ $A \cup B \subset E$. Sempre es verifica.
$\supset)$ Si $x \in E$,suposem $x \notin A$. Per hipòtesi $x \in B \longrightarrow x \in A \cup B$.
També $A \cup B \subset E$ sempre es verifica i si $\overline{A} \subset B \longrightarrow A \cup \overline{A} \subset A \cup B \longrightarrow E \subset A \cup B$.

Demostració de l'equivalència entre 2 i 3 de P_3.
$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B).$
En efecte,
$(A-B) \cup (B-A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup \overline{A})}_{E} \cap \underbrace{(\overline{B} \cup B)}_{E} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$
$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$
$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) - (A \cap B).$

Demostració de 3 de P_3.
Per elements:
$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$
$\subset)$ $\forall x \in A \Delta B \longrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \longrightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin A) \longrightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B) \longrightarrow (x \in A \cup B \wedge x \in \overline{A \cap B}) \longrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B).$
$\supset)$ $\forall x \in (A \cup B) - (A \cap B) \longrightarrow [x \in A \wedge x \notin (A \cap B)] \vee [x \in B \wedge x \notin (A \cap B)] \longrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \longrightarrow x \in A \Delta B.$
Per funcions booleanes:
f.n.d. de $A \Delta B$.
$\overline{(a \leftrightarrow b)} = \overline{(a \rightarrow b)(b \rightarrow a)} = \overline{(\overline{a}+b)(\overline{b}+a)} = \overline{(\overline{a}+b)} + \overline{(\overline{b}+a)} = a\overline{b}+\overline{a}b.$
f.n.f. de $(A \cup B) - (A \cap B)$.
$(a+b)\,\overline{ab} = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a}+a\overline{b}+\overline{a}b+b\overline{b} = a\overline{b}+\overline{a}b.$

$\boxed{\text{Demostració de 9 de } P_3}$.

Per taules de veritat:

$x\in A$	B	C	$B\Delta C$	$\overset{I}{A\cap B\Delta C}$	$A\cap B$	$A\cap C$	$\overset{II}{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$	$I\leftrightarrow II$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1

Aplicant propietats estudiades anteriorment:

$A\cap(B\Delta C) = A\cap\left[(B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}\right] = (A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$.

$(A\cap B)\Delta(A\cap C) = \left[(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})\right]\cup\left[(A\cap C)\cap(\overline{A\cap B})\right] = \left[(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\right]\cup \left[(A\cap C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right] = \underbrace{(A\cap B\cap\overline{A})}_{\phi}\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup\underbrace{(A\cap C\cap\overline{A})}_{\phi}\cup(A\cap C\cap\overline{B}) =$
$(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$.

També per funcions booleanes:

$A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$. Es tradueix en:

$a(\overline{b\leftrightarrow c}) = a(\overline{\overline{b}\,\overline{c}+bc}) = a\left[\overline{\overline{b}\,\overline{c}}\cdot\overline{bc}\right] = a(b+c)(\overline{b}+\overline{c}) = ab\overline{c}+a\overline{b}c.$

$\overline{ab\leftrightarrow ac} = \overline{\overline{ab}\cdot\overline{ac}+abac} = \overline{(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+\overline{c})+abc} = \overline{(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+\overline{c})}\cdot\overline{abc} = \left[\overline{(\overline{a}+\overline{b})}+\overline{(\overline{a}+\overline{c})}\right]\cdot$
$(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = (ab+ac)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = ab\overline{c}+a\overline{b}c.$

$\boxed{\text{Demostració de les propietats del producte cartesià}}$

1. $A\subset X\wedge B\subset Y\Rightarrow A\times B\subset X\times Y$ sent X,Y conjunts universals.
$\rightarrow$) Suposem $z=(x,y)\in A\times B\longrightarrow x\in A$, $y\in B$. Per hipòtesi $A\subset X\wedge$ $B\subset Y$, aleshores $x\in X$, $y\in Y\longrightarrow(x,y)\in X\times Y$.

2. $A\neq\phi\wedge B\neq\phi\wedge A\times B\subset X\times Y\Rightarrow A\subset X\wedge B\subset Y$.
$\rightarrow$) Suposem $x\in A\wedge B\neq\phi$. Cal demostrar que $A\subset X$.
Com $B\neq\phi\longrightarrow\exists y\,/\,y\in B$.Aleshores $(x,y)\in A\times B$, i com $A\times B\subset X\times Y$,obtenim $(x,y)\in X\times Y\longrightarrow x\in X$.
De manera anàloga per a $A\neq\phi$ i $y\in B$.

3. $A\times B=\phi\Leftrightarrow A=\phi\vee B=\phi$. És equivalent a 4. $A\times B\neq\phi\Leftrightarrow A\neq\phi\wedge B\neq\phi$.
Demostrem l'última expressió:

$\rightarrow$) $A \times B \neq \phi \longrightarrow \exists\, z = (x,y) \;/\; z \in A \times B \longrightarrow x \in A \wedge y \in B \longrightarrow A \neq \phi \wedge B \neq \phi$
$\leftarrow$) $A \neq \phi \wedge B \neq \phi \longrightarrow \exists\, x \in A\;,\; \exists\, y \in B \;/\; (x,y) \in A \times B \longrightarrow A \times B \neq \phi.$

5. $A \times B \neq B \times A \quad$ si $A \neq B$.
Aquesta demostració pot fer-se mitjançant una equivalent i que ens diga quan el producte cartesià de dos conjunts és commutatiu.
$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi \vee A = B.$
$\rightarrow$) Per reducció a l'absurde neguem la tesi i suposem $A \neq \phi \wedge B \neq \phi \wedge A \neq B$.
Si $A \neq B \longrightarrow (\exists\, x \;/\; x \in A \wedge x \notin B) \vee (\exists\, x \;/\; x \in B \wedge x \notin A)$.
Suposem $\exists\, x \;/\; x \in A \wedge x \notin B$. Com per hipòtesi $B \neq \phi \rightarrow \exists\, y \;/\; y \in B$.
Aleshores $(x,y) \in A \times B = B \times A \longrightarrow x \in B$, absurd.
De manera anàloga per a la segona suposició.
$\leftarrow$) Si $A = \phi \vee B = \phi \xrightarrow{P\,3} A \times B = \phi = B \times A$.
Si $A = B$, clarament $A \times B = B \times A$ (ja que $A \times A = A \times A$).

6. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.
$A \times (B \times C) = \{(x,z) \;/\; x \in A \wedge z \in B \times C\} = \{(x,z) \;/\; x \in A \wedge z = (y,r)\;,\; y \in B \;\;, r \in C\} = \{(x,(y,r))\}$.
$(A \times B) \times C = \{(m,r) \;/\; m \in A \times B \;\wedge\; r \in C\} = \{(m,r) \;/\; m = (x,y)\;,\; x \in A\;,\; y \in B\;,\; r \in C\} = \{((x,y),r)\}$.

7. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
$\subset$)
$(x,y) \in A \times (B \cup C) \longrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \longrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \longrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \longrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \longrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
$\supset$)
$(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \longrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \longrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \longrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \longrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \longrightarrow (x,y) \in A \times (B \cup C)$.

8. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
La demostració és idèntica a l'anterior.

9. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
$\subset$)

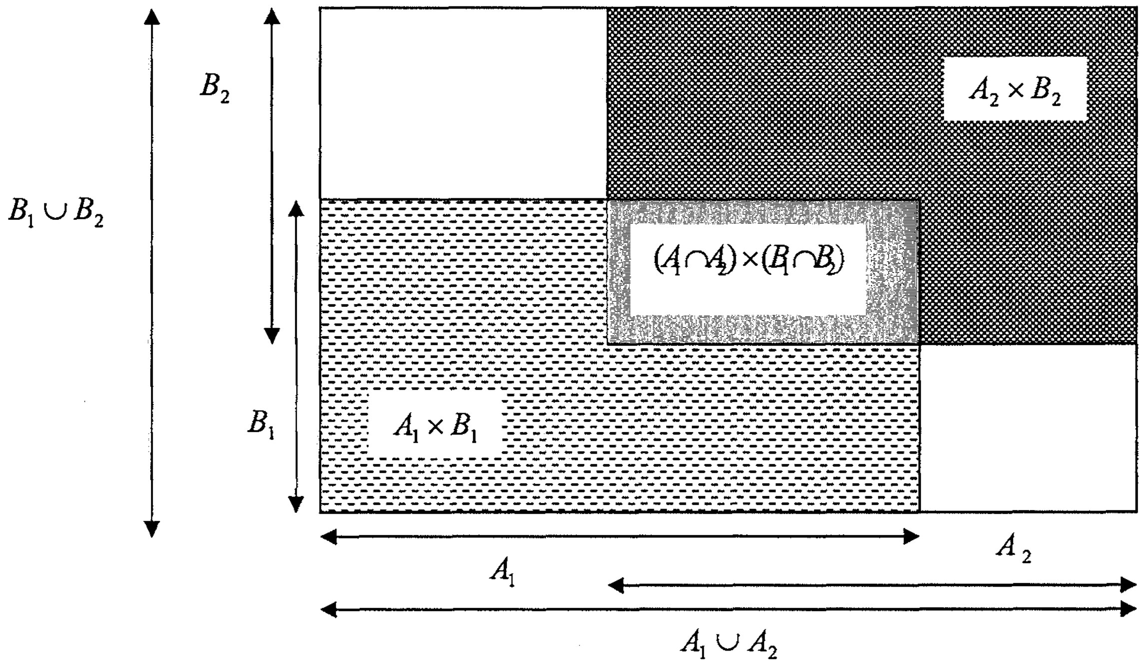


Figure 20:

Suposem $z \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \longrightarrow z \in (A_1 \times B_1) \wedge z \in (A_2 \times B_2) \longrightarrow \exists\, x\ ,\ \exists\, y\ /\ z = (x,y) \wedge (x,y) \in (A_1 \times B_1) \wedge (x,y) \in (A_2 \times B_2) \longrightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2\ ,\ y \in B_1 \wedge y \in B_2 \longrightarrow x \in A_1 \cap A_2\ ,\ y \in B_1 \cap B_2 \longrightarrow (x,y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

$\supset$)

$z \in (x,y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \longrightarrow x \in A_1 \cap A_2\ ,\ y \in B_1 \cap B_2 \longrightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2\ ,\ y \in B_1 \wedge y \in B_2 \longrightarrow (x,y) \in (A_1 \times B_1) \wedge (x,y) \in (A_2 \times B_2) \longrightarrow z = (x,y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

10. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subset (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$.
Contraexemple: Vegeu la fig. 20.

11. $A \subset X \wedge B \subset Y \Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$
$(A \times Y) \cap (X \times B) \underset{P\,9}{=} (A \cap X) \times (Y \cap B) \underset{Hipòtesi}{=} A \times B$.

12. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
$\subset$)
$z = (x,y) \in (A - B) \times C \longrightarrow x \in A - B\ ,\ y \in C \longrightarrow x \in A\ ,\ x \notin B\ ,\ y \in C \longrightarrow (x,y) \in A \times C\ ,\ (x,y) \notin B \times C \longrightarrow (x,y) \in (A \times C) - (B \times C)$.
$\supset$)

$z = (x,y) \in (A \times C) - (B \times C) \longrightarrow (x,y) \in A \times C \ , \ (x,y) \notin B \times C \longrightarrow x \in A \ , \ x \notin B \ , \ y \in C \longrightarrow x \in A - B \ , \ y \in C \longrightarrow (x,y) \in (A - B) \times C$.

13.$A \subset X \wedge B \subset Y \Rightarrow (X \times Y) - (A \times B) = [(X - A) \times Y] \cup [X \times (Y - B)]$.

Per la propietat 11 sabem que $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$.

Es tracta de calcular $\overline{A \times B} = \overline{(A \times Y) \cap (X \times B)} = (\overline{A \times Y}) \cup (\overline{X \times B})$.

En desenvolupar el segon terme queda: $[(X - A) \times Y] \cup [X \times (Y - B)] \underset{P\,2}{=} [(X \times Y) - (A \times Y)] \cup [(X \times Y) - (X \times B)] =$

$(\overline{A \times Y}) \cup (\overline{X \times B}) = \overline{(A \times Y) \cap (X \times B)} = \overline{A \times B} = (X \times Y) - (A \times B)$.

14. $\overline{A} \times B = \overline{A \times B}$.

$\subset$) $z = (x,y) \in \overline{A} \times B \longrightarrow x \in \overline{A} \wedge y \in B \longrightarrow x \notin A \wedge y \in B \longrightarrow (x,y) \notin A \times B \longrightarrow (x,y) \in \overline{A \times B}$.

$\supset$) $z = (x,y) \in \overline{A \times B} \longrightarrow (x,y) \notin A \times B \longrightarrow x \notin A \wedge y \in B \longrightarrow x \in \overline{A} \wedge y \in B \longrightarrow (x,y) \in \overline{A} \times B$.

PROBLEMES TEMA 3 *CONJUNTS*

1. Digueu quins dels següents agrupaments d'objectes són conjunts:

   $A = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x^2 + 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x < 5\}$, $C = \{7,\ Dalí,\ D\}$,
   $D = \{A, B, C, D, E\}$, $E = \{escultures\ boniques\}$, $F = \{x \;/\; 2 < x \leq 5\}$,
   $G = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; 0 < x < 1\}$.

   Sol.: A no és un conjunt ja que la condició $x^2 + 1$ no significa res. B sí que és un conjunt que per extensió seria : $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. També C és un conjunt format per tres elements. D no seria un conjunt ja que es postula que un element del conjunt mai pot ser el mateix conjunt. Tampoc E pot ser un conjunt, ja que les escultures boniques és un concepte subjectiu i per a unes determinades persones una escultura pot ser bonica i la mateixa escultura per a altres persones no és bonica. F no és un conjunt perquè falta especificar el conjunt numèric. G és un conjunt que resulta ser el conjunt ϕ.

2. Definiu per extensió o per comprensió, segons la definició donada, els següents conjunts:

   $A = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x^2 - 3x - 10 = 0\}$, $B = \{mesos\ de\ l'any\ de\ 5\ lletres\}$,
   $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $D = \left\{x \in \mathbb{N} \;/\; x < 13 \wedge x = \dot{3}\right\}$, $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

   Sol.: $A = \{-2, 5\}$, $B = \{\text{gener, abril, agost}\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{N} \;/\; x = \dot{2} \;\wedge\; x < 10\right\}$,
   $D = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, $E = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; |x| \leq 2\}$.

3. Donat $E = \{a, b\}$, trobeu $P(E)$ i $P(P(E))$ i estudieu si són certes o no les següents afirmacions:

   i) $\{a\} \subset E$, ii) $\{a\} \subset P(E)$, iii) $\phi \in P(E)$, iv) $\{\phi\} \in P(E)$, v) $\{a, b\} \in E$, vi) $\{b\} \in P(P(E))$, vii) $b \subset P(E)$, viii) $\phi \subset P(E)$.

   Sol.: $P(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

   $$P(P(E)) = \left\{ \begin{array}{c} \phi, \{\phi\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\phi, \{a\}\}, \{\phi, \{b\}\}, \{\phi, \{a,b\}\}, \\ , \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\phi, \{a\}, \{b\}\}, \\ , \{\phi, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\phi, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{P(E)\} \end{array} \right\}.$$

   i) $\{a\} \subset E$, és cert ja que $\{a\} \in P(E)$. ii) $\{a\} \subset P(E)$, és fals ja que $\{a\} \notin P(P(E))$. iii) $\phi \in P(E)$, cert, ja que ϕ és un element de $P(E)$. iv) $\{\phi\} \in P(E)$, fals ja que $\{\phi\}$ no és un element de $P(E)$. v) $\{a, b\} \in E$, fals ja que el signe $\in$ no correspon perquè E no és una família de conjunts. vi) $\{b\} \in P(P(E))$, fals ja que $\{b\}$ no és un element de $P(P(E))$. vii) $b \subset P(E)$, fals perquè el símbol $\subset$ no correspon. Aquest s'utilitza quan intervenen conjunts i b és un

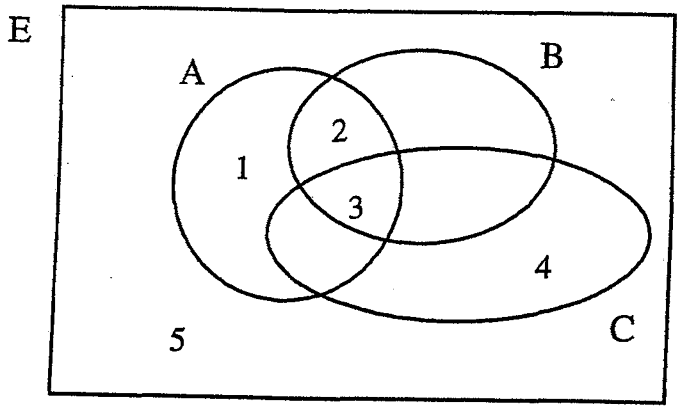


Figure 1:

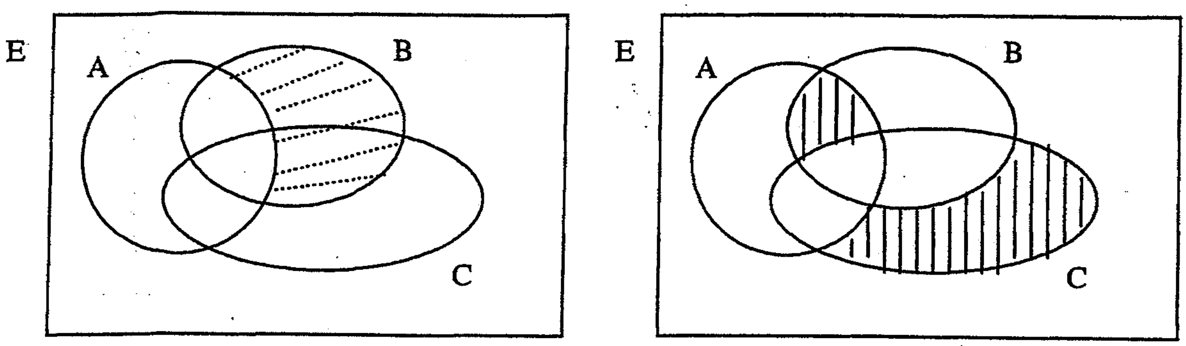


Figure 2:

element. viii) $\phi \subset P(E)$, cert ja que $\phi \in P(P(E))$. A més a més, ϕ és un subconjunt de qualsevol conjunt.

4. Donats $A, B, C \subset E$, utilitzant la unió, la intersecció i el complementari, expresseu les regions numerades de la figura 1.

   Sol.:(1) $= a(\overline{b+c}) = a\overline{b}\overline{c} = m_4$. És a dir, (1) $= A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. (2) $= ab\ \overline{abc} = ab(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = ab\overline{c} = m_6$. És a dir, (2) $= A \cap B \cap \overline{C}$. (3) $= abc = m_7$. És a dir, (3) $= A \cap B \cap C$. (4) $= (\overline{a+b})c = \overline{a}\overline{b}c = m_1$. És a dir, (4) $= \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$. (5) $= \overline{a+b+c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} = m_0$. És a dir, (5) $= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

5. Donats $A, B, C \subset E$, utilitzant la unió, la intersecció i el complementari, expresseu les regions ombrejades de les figures 2 i 3:

   Sol.: i) $\overline{a}b = \overline{a}b(c+\overline{c}) = \overline{a}bc+\overline{a}b\overline{c} = m_3+m_2$. És a dir, $(\overline{A} \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$.

   ii) $ab\overline{c} + \overline{a+b}\ c = ab\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c = m_6 + m_1$. És a dir, $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

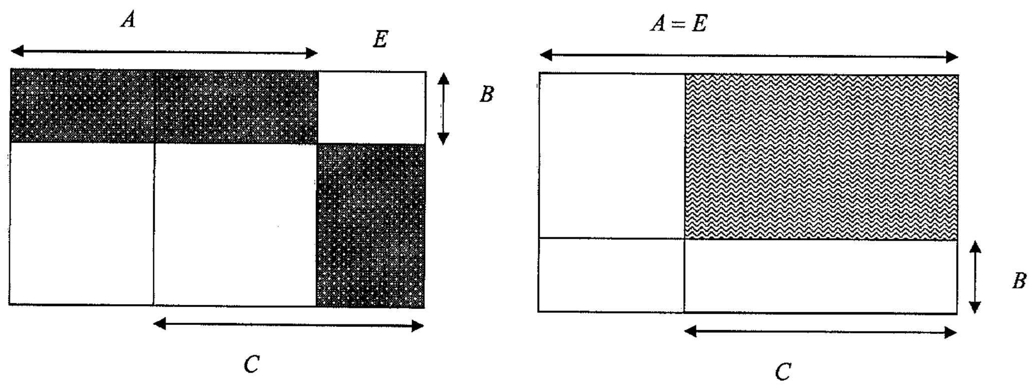


Figure 3:

iii) $ab + \overline{a}\overline{b}c = ab(c+\overline{c}) + \overline{a}\overline{b}c = abc + ab\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c = m_7 + m_6 + m_1$. És a dir, $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

iv) En aquest cas $A = E$ i $\overline{A} = \phi$ $\quad \overline{b}c = (a+\overline{a})\overline{b}c = e\overline{b}c + 0\overline{b}c = \overline{b}c$. És a dir, $\overline{B} \cap C$.

6. Trobeu el complementari de :

   i) $(\overline{A \cup B}) \cap (A \cup \overline{B})$, $\qquad$ ii) $(A \cup (\overline{B \cap C})) \cap (A \cup C \cup \overline{B})$.

   Sol.: En transformar la primera expressió quedaria: $(\overline{a+b})(a+\overline{b})$. Tractem de calcular el complementari.

   $\overline{(\overline{a+b})(a+\overline{b})} = (a+b) + (\overline{a+\overline{b}}) = (a+b) + \overline{a}b = (a+b+\overline{a})(a+b+b) = (1+b)(a+b) = a+b$.

   És a dir, $\overline{(\overline{A \cup B}) \cap (A \cup \overline{B})} = A \cup B$.

   En transformar la segona expressió quedaria: $(a+\overline{bc})(a+c+\overline{b})$.Tractem de calcular el complementari.

   $\overline{(a+\overline{bc})(a+c+\overline{b})} = \overline{a+\overline{bc}} + \overline{a+c+\overline{b}} = \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} = \overline{a}b(c+\overline{c}) = \overline{a}b$.

   És a dir, $\overline{(A \cup (\overline{B \cap C})) \cap (A \cup C \cup \overline{B})} = \overline{A} \cap B$.

7. Simplifiqueu, utilitzant les propietats de l'Àlgebra de Boole del conjunts de les parts d'un conjunt E.

   i) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap (E - C)) \cup ((E - A) \cap B)$.

   ii) $(A \cap (E - (B \cap (E - C)))) \cup (E - ((E - A) \cup (E - B) \cup C))$.

   iii) $(A \cap ((E - A) \cup B) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$.

   Sol.: i) $abc + ab\overline{c} + \overline{a}b = ab(c+\overline{c}) + \overline{a}b = ab + \overline{a}b = (a+\overline{a})b = b$.

És a dir, $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap (E - C)) \cup ((E - A) \cap B) = B$.

ii) $a\overline{b\overline{c}} + \overline{\overline{a} + \overline{b} + c} + = a(\overline{b} + c) + ab\overline{c} = a\overline{b} + ac + ab\overline{c} \underset{T.Quine}{=} a\overline{b} + ac + ab\overline{c} + a\overline{c} =$
$a\overline{b} + ab\overline{c} + a = a$.

És a dir, $(A \cap (E - (B \cap (E - C)))) \cup (E - ((E - A) \cup (E - B) \cup C)) = A$.

iii) $a(\overline{a} + b) + b(b + c) + b = ab + b + bc + b = b$.

És a dir, $(A \cap ((E - A) \cup B) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B = B$.

8. Demostreu:

i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

ii) $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C$.

iii) $A \subset B \wedge C = B - A \Rightarrow A = B - C$.

Sol.: i) Primer terme: $a\overline{b} + b\overline{a}$. Segon terme: $(a + b)\overline{ab} = (a + b)(\overline{a} + \overline{b}) = a\overline{b} + b\overline{a}$.

ii) $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset C$.

$(a + b \leftrightarrow bc) \Leftrightarrow (a \rightarrow b)\,(b \rightarrow c)$.

Primer terme: $(a + b \leftrightarrow bc) = \overline{a + b}\;\;\overline{bc} + (a + b)bc = \overline{a}\overline{b}(\overline{b} + \overline{c}) + abc + bc =$
$\overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + abc + bc = \overline{a}\overline{b} + bc$.

Segon terme: $(a \rightarrow b)\,(b \rightarrow c) = (\overline{a} + b)(\overline{b} + c) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}c + bc \underset{T.Quine}{=} \overline{a}\overline{b} + bc$.

Nota: Cal fer aquest apartat trobant les formes normals disjuntives de cada terme i també per taules de veritat.

iii) $[(a \rightarrow b)\,(c \leftrightarrow b\overline{a})] \Rightarrow (a \leftrightarrow b\overline{c})$

La forma normal disjuntiva del primer terme seria: $(\overline{a} + b)(\overline{c}\;\overline{\overline{a}b} + \overline{a}bc) = (\overline{a} + b)\left[\overline{c}\,(a + \overline{b}) + \overline{a}bc)\right] = (\overline{a} + b)\;\left(a\overline{c} + \overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc\right) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + ab\overline{c} + \overline{a}bc = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + ab\overline{c}$.

La forma normal disjuntiva del segon terme seria:

$(a \leftrightarrow b\overline{c}) = \overline{a}\;\overline{b\overline{c}} + ab\overline{c} = \overline{a}(\overline{b} + c) + ab\overline{c} = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}c + ab\overline{c} = \overline{a}\overline{b}(c + \overline{c}) + \overline{a}(b + \overline{b})c + ab\overline{c} =$
$\overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c + ab\overline{c} = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + ab\overline{c}$.

Resulta que tots els elements del primer terme estan en el segon terme, per la qual cosa hem demostrat la implicació.

9. Proveu:

i) $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$, ii) $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$.

Sol.: i) $\subset$ $\quad \forall x \in A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) \rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$.

$\forall x \in A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) \rightarrow x \in A \wedge x \in \bigcup_{i\in I} B_i \rightarrow x \in A \wedge (\exists i_0 \in I \ / \ x \in B_{i_0}) \rightarrow x \in A \cap B_{i_0}$.

Com que $A \cap B_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$, resulta que $x \in \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$.

$\supset$ $\quad \forall x \in \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i) \rightarrow x \in A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i)$.

$x \in \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i) \rightarrow \exists i_0 \in I \ / \ x \in A \cap B_{i_0} \rightarrow x \in A \wedge x \in B_{i_0}$.

Com que $B_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} B_i$, resulta que $x \in A \wedge x \in \bigcup_{i\in I} B_i \rightarrow \forall x \in A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i)$.

ii) $\subset$ $\quad \forall x \in A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) \rightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$.

$\forall x \in A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) \rightarrow x \in A \vee x \in \bigcap_{i\in I} B_i \rightarrow (x \in A \vee x \in B_i \ \forall i) \rightarrow (x \in A \vee x \in B_i) \ \forall i \rightarrow (x \in A \cup B_i) \ \forall i \rightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$.

$\supset$ $\quad \forall x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) \rightarrow x \in A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i)$.

$\forall x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) \rightarrow (x \in A \cup B_i) \ \forall i \rightarrow (x \in A \vee x \in B_i) \ \forall i \rightarrow (x \in A \vee x \in B_i \ \forall i) \rightarrow x \in A \vee x \in \bigcap_{i\in I} B_i \rightarrow x \in A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i)$.

10. Donats $A, B \subset E$, proveu que si els següents subconjunts d'E no són buits, aleshores formen una partició del conjunt E.

    $A \cap B, \qquad A \cap (E - B), \qquad (E - A) \cap B, \qquad (E - A) \cap (E - B).$

    Sol.: Per hipòtesi la primera de les condicions ja es verifica, ja que cada subconjunt és no buit.

    La segona de les condicions per veure si formen una partició ens diu que aquests conjunts cal que siguen disjunts dos a dos. És a dir,

    $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \phi$.

    $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \phi$.

    $(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \phi$.

    Son buits ja que podem aplicar les propietats associativa de la intersecció i la complementària.

    La tercera de les condicions ens diu que aquests subconjunts constitueixen un recobriment del conjunt universal E.

    És a dir, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \big(A \cap (B \cup \overline{B})\big) \cup \big(\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})\big) = (A \cap E) \cup (\overline{A} \cap E) = (A \cup \overline{A}) \cap E = E \cap E = E$.

11. En una oficina de col·locació s'ofereixen 29 llocs de treball del ram de la construcció: 13 són paletes, 13 ferrers i 15 fusters. A més a més, 6 són ferrers i paletes, 4 ferrers i fusters, 5 paletes i fusters. Ens demanen: i) Quantes han de ser les tres coses a la vegada?. ii) A quantes persones que sols tinguen l'ofici de

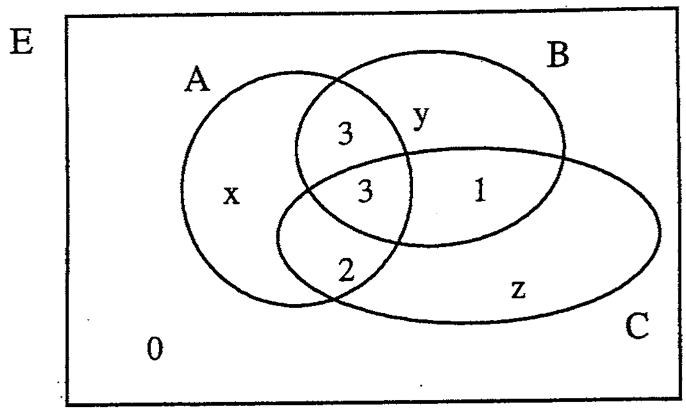


Figure 4:

paleta se'ls pot oferir treball?. iii) Quantes persones són fusters i paletes, però no ferrers?

Sol.: i) Siga $E = \{x \ / \ x \in \textit{llocs de treball de la construcció}\}$, $A = \{x \ / \ x \in paletes\}$, $B = \{x \ / \ x \in ferrers\}$, $C = \{x \ / \ x \in fusters\}$, $A \cap B = \{x \ / \ x \in paletes \wedge ferrers\}$, $A \cap C = \{x \ / \ x \in paletes \wedge fusters\}$, $B \cap C = \{x \ / \ x \in ferrers \wedge fusters\}$, $A \cap B \cap C = \{x \ / \ x \in paletes \wedge ferrers \wedge fusters\}$.

En aquest problema, $E = A \cup B \cup C$, ja que un treballador, per a la seua contractació cal que sàpiga, almenys, un dels tres oficis.

Aleshores, $card(E) = 29, card(A) = 13, card(B) = 13, card(C) = 15, card(A \cap B) = 6, card(A \cap C) = 5, card(B \cap C) = 4$

$card(E) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C) \rightarrow 29 = 13 + 13 + 15 - 6 - 5 - 4 + card(A \cap B \cap C) \rightarrow card(A \cap B \cap C) = 3$.

ii)

$card(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = card(A \cap (\overline{B \cup C}) = x$

Com $E = A \cup B \cup C \rightarrow [A \cap (\overline{B \cup C})] \cup (B \cup C) = E \wedge [A \cap (\overline{B \cup C})] \cap (B \cup C) = \phi \rightarrow card [A \cap (\overline{B \cup C})] + card(B \cup C) = card(E) \rightarrow card [A \cap (\overline{B \cup C})] = 29 - 25 = 5$.

$card(B \cup C) = carc(B) + card(C) - card(B \cap C) = 13 + 15 - 4 = 24$.

Però $(B \cup C) \cup (\overline{B \cup C}) = E$, i en ser disjunts, obtenim que $card(E) = card(B \cup C) + card(\overline{B \cup C}) \rightarrow card(\overline{B \cup C}) = 29 - 24 = 5 = x$

D'una altra manera, com que $card(A) = 13 \rightarrow x + 3 + 3 + 2 = 13 \rightarrow x = 5$.

iii) $card((A \cap C) - B) = card(A \cap C \cap \overline{B}) = 2$.

12. En el conjunt format per tots els nombres naturals menors que 1000 (salvat el zero), quants d'ells no són múltiples ni de 3 ni de 5 ni de 7?.

    Sol.: Siga $E = \{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x < 1000\}$.

    $A = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{3}\right\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 999\}$.

    $B = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{5}\right\} = \{5, 10, 15, 20, \ldots, 995\}$.

    $C = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{7}\right\} = \{7, 14, 21, 28, \ldots, 994\}$.

    $A \cap B = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{3} \wedge x = \dot{5}\right\} = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{15}\right\} = \{15, 30, 45, 60, \ldots, 990\}$.

    $A \cap C = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{3} \wedge x = \dot{7}\right\} = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{21}\right\} = \{21, 42, 63, 84, \ldots, 987\}$.

    $B \cap C = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{5} \wedge x = \dot{7}\right\} = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{35}\right\} = \{35, 70, 105, 140, \ldots, 980\}$.

    $A \cap B \cap C = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{3} \wedge x = \dot{5} \wedge x = \dot{7}\right\} = \left\{x \ / \ x \in \mathbb{N} - \{0\} \ / \ x = \dot{105}\right\} = \{105, 210, 315, 420, \ldots, 945\}$.

    $card(E) = 999$, $card(A) = 333$, $card(B) = 199$, $card(C) = 142$, $card(A \cap B) = 66$, $card(A \cap C) = 47$, $card(B \cap C) = 28$, $card(A \cap B \cap C) = 9$.

    $card(A \cup B \cup C) = 333 + 199 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 542$.

    Aquest és el número de nombres naturals que són múltiples de 3, de 5 o de 7. El número de nombres naturals que no siguen múltiples ni de 3 ni de 5 ni de 7 a la vegada és el complementari. És a dir, $card(\overline{A \cup B \cup C}) = card(E) - card(A \cup B \cup C) = 999 - 542 = 457$.

13. Disposem d'un conjunt de banderes d'1, 2 o 3 colors. N'hi ha 10 que no tenen el roig, 8 que no tenen el blanc, 4 que no tenen el negre, 6 que tenen el roig i el negre, 7 que tenen el blanc i el negre, 5 que tenen el blanc i el roig i 4 que tenen els tres colors. Ens demanen: i) Quantes banderes es tenen?. ii) Quantes no tenen ni el roig ni el negre?

    Sol.: i) Suposem $E = \{x \ / \ x \in bandera\}$, $R = \{x \ / \ x \in bandera\ roja\}$, $B = \{x \ / \ x \in bandera\ blanca\}$, $N = \{x \ / \ x \in bandera\ negra\}$.

    Com que no hi ha cap bandera que no tinga almenyns un color, $E = R \cup B \cup N$.

    $card(R \cup B \cup N) = card(R) + card(B) + card(N) - card(R \cap B) - card(R \cap N) - card(B \cap N) + card(R \cap B \cap N)$.

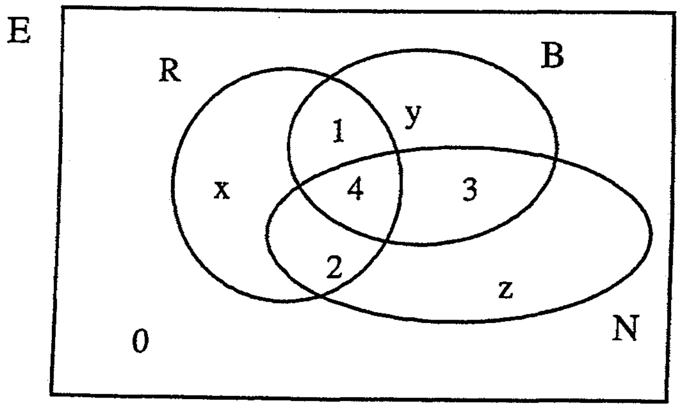


Figure 5:

Si $card(R \cup B \cup N) = x$, $card(R) = x - card(\overline{R}) = x - 10$, $card(B) = x - card(\overline{B}) = x - 8$,

$card(N) = x - card(\overline{N}) = x - 4$, $card(R \cap B) = 5$, $card(R \cap N) = 6$, $card(B \cap N) = 7$, $card(R \cap B \cap N) = 4$.

$card(R \cup B \cup N) = x = (x - 10) + (x - 8) + (x - 4) - 5 - 6 - 7 + 4 \rightarrow x = 18$.

ii) $(B \cap (\overline{R \cup N})) \cup (R \cup N) = E \rightarrow (B \cap \overline{R} \cap \overline{N}) \cup (R \cup N) = E \rightarrow$

$\rightarrow card\left[(B \cap \overline{R} \cap \overline{N}) \cup (R \cup N)\right] = card(E) \rightarrow card(B \cap \overline{R} \cap \overline{N}) + card(R \cup N) = card(E) \rightarrow card(B \cap \overline{R} \cap \overline{N}) = card(E) - card(R \cup N) = 18 - 8 - 14 + 6 = 2$.

Aquest problema també es por fer d'una altra manera. Vegeu la fig. 5.

$card(\overline{R}) = 10 = y + z + 3$, $card(\overline{B}) = 8 = x + z + 2$, $card(\overline{N}) = 4 = x + y + 1 \rightarrow x = 1$, $y = 2$, $z = 5$.

$card(R \cup B \cup N) = 18$, $card(B \cap \overline{R} \cap \overline{N}) = y = 2$.

14. En una reunió hi ha més homes que dones, més dones que beuen que homes que fumen i més dones que fumen i no beuen que homes que no beuen ni fumen. Demostreu que hi ha menys dones que no beuen ni fumen que homes que beuen i no fumen.

    Sol.:

    Cal demostrar que $card(VIII) < card(I)$.

    $card(V) + card(VI) + card(VII) + card(VIII) < card(I) + card(II) + card(III) + card(IV)$.

    $card(III) + card(IV) < card(V) + card(VI)$.

    $card(II) < card(VII)$.

    En sumar i simplificar obtenim $card(VIII) < card(I)$.

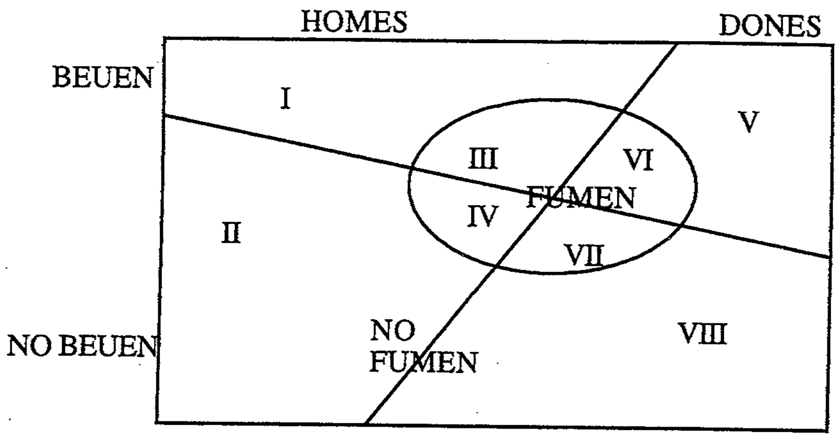


Figure 6:

15. En una enquesta realitzada a 100 persones sobre la lectura de la premsa, s'ha obtingut el següent resultat: 40 lligen *l'ABC*, 42 lligen *Diario*16, 45 el *País*, 13 *l'ABC* i *Diario*16, 20 *Diario*16 i *el País*, 18 *l'ABC* i *el País*, 7 lligen els tres periòdics. Ens demanen: i) Quantes persones no lligen cap dels tres periòdics?. ii) Quantes persones sols lligen *l'ABC*?. iii) Quantes persones sols lligen un únic periòdic?

    Sol.: i) Suposem $E = \{x \ / \ x \in \textit{persones que lligen la premsa}\}$,

    $A = \{x \ / \ x \in \textit{persones que lligen l'ABC}\}$.

    $B = \{x \ / \ x \in \textit{persones que lligen Diario } 16 \ \}$.

    $C = \{x \ / \ x \in \textit{persones que lligen el País}\}$.

    $card(E) = 100$, $card(A) = 40$, $card(B) = 42$, $card(C) = 45$, $card(A \cap B) = 13$, $card(A \cap C) = 18$, $card(B \cap C) = 20$, $card(A \cap B \cap C) = 7$.

    $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C) = 40 + 42 + 45 - 13 - 18 - 20 + 7 = 83$.

    Aquest és el nombre de persones que lligen almenys un periòdic. Aleshores, el nombre de persones que no lligen cap periòdic serà $card(\overline{A \cup B \cup C}) = card(E) - card(A \cup B \cup C) = 100 - 83 = 17$.

    ii) $card(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = card(A \cap (\overline{B \cup C}))$.

    $card(B \cup C) = card(B) + card(C) - card(B \cap C) = 42 + 45 - 20 = 67 \rightarrow card(\overline{B \cup C}) = 100 - 67 = 33$.

    Com que $card(\overline{A \cup B \cup C}) = 17 \rightarrow card(A \cap (\overline{B \cup C})) = 33 - 17 = 16$.

    iii) $card(A \cap (\overline{B \cup C})) \cup card(B \cap (\overline{A \cup C})) \cup card(C \cap (\overline{A \cup B}))$.

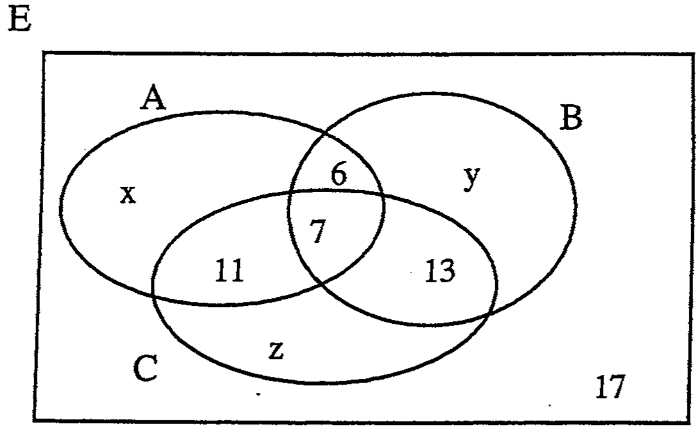


Figure 7:

El cardinal d'aquesta unió de conjunts serà la suma dels cardinals ja que els conjunts són disjunts.

$card(A \cup C) = card(A) + card(C) - card(A \cap C) = 40 + 45 - 18 = 67 \rightarrow card(\overline{A \cup C}) = 33$.

Com que $card(\overline{A \cup B \cup C}) = 17 \rightarrow card(B \cap (\overline{A \cup C})) = 33 - 17 = 16$.

$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = 40 + 42 - 13 = 69 \rightarrow card(\overline{A \cup B}) = 31$.

Com que $card(\overline{A \cup B \cup C}) = 17 \rightarrow card(C \cap (\overline{A \cup B})) = 31 - 17 = 14$.

Aleshores, el nombre de persones que sols lligen un únic periòdic serà la suma dels anteriors, és a dir, 46.

També es pot fer:

$x = 40 - (6 + 7 + 11) = 16$, $y = 42 - (6 + 7 + 13) = 16$, $z = 45 - (11 + 7 + 13)$.

16. D'un grup de 1000 homes, s'ha trobat que 950 porten rellotge, 760 porten paraigües, 800 porten corbates i 850 porten barret. Trobeu el nombre mínim de persones que porten les quatre coses a la vegada.

Sol.:

Calcularem en primer lloc el nombre mínim de persones que porten rellotge i paraigues.

$card(R \cup P) = card(R) + card(P) - card(R \cap P) \rightarrow card(R \cap P) = card(R) + card(P) - card(R \cup P)$.

Aquest cardinal és mínim quan $card(R \cup P)$ és màxim.

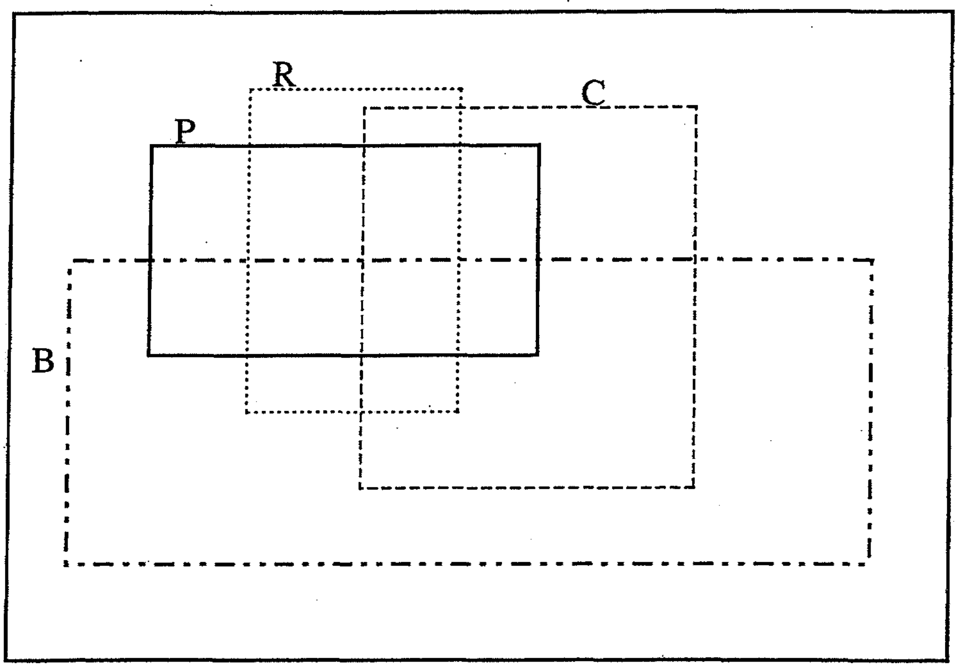


Figure 8:

$card(R \cap P) = 950 + 760 - 1000 = 710.$

$card((R \cap P) \cup C) = card(R \cap P) + card(C) - card(R \cap P \cap C).$

$card(R \cap P \cap C) = card(R \cap P) + card(C) - card((R \cap P) \cup C)\,.$

Aquest cardinal és mínim quan $card((R \cap P) \cup C)$ és màxim.

$card(R \cap P \cap C) = 710 + 800 - 1000 = 510.$

$card((R \cap P \cap C) \cup B) = card(R \cap P \cap C) + card(B) - card(R \cap P \cap C \cap B).$

$card(R \cap P \cap C \cap B) = card(R \cap P \cap C) + card(B) - card((R \cap P \cap C) \cup B)\,.$

Aquest cardinal és mànim quan $card((R \cap P \cap C) \cup B)$ és màxim.

$card(R \cap P \cap C \cap B) = 510 + 850 - 1000 = 360.$

Una altra manera de fer el problema:

$card(R \cup P) = card(R) + card(P) - card(R \cap P) \rightarrow card(R \cap P) = card(R) + card(P) - card(R \cup P).$

Aquest cardinal és mínim quan $card(R \cup P)$ és màxim.

$card(R \cap P) = 950 + 760 - 1000 = 710.$

$card(C \cup B) = card(C) + card(B) - card(C \cap B) \rightarrow card(C \cap B) = card(C) + card(B) - card(R \cup P).$

Aquest cardinal és mínim quan $card(R \cup P)$ Ue9s mUe0xim.

$card(C \cap B) = 800 + 850 - 1000 = 650.$

$card((R \cap P) \cup (C \cup B)) = card(R \cap P) + card(C \cup B) - card(R \cap P \cap C \cup B)\,.$

$card(R \cap P \cap C \cup B) = card(R \cap P) + card(C \cup B) - card((R \cap P) \cup (C \cup B))\,.$

Aquest cardinal és mínim quan $card((R \cap P) \cup (C \cup B))$ és màxim.

$card((R \cap P) \cup (C \cup B)) = 710 + 650 - 1000 = 360.$

17. Dels 4000 estudiants matriculats en una universitat, 2300 ho estan en matemàtiques, 1700 en economia, 1850 en informàtica, 1200 en matemàtiques i economia, 715 en matemàtiques i informàtica, 300 en economia i informàtica i 50 en les tres assignatures. De cara a fer les fitxes, (una per cada estudiant), es necessita saber:

    i) Quantes se n'han de fer amb matemàtiques o economia?

    ii) Quantes se'n necessiten amb alguna de les tres assignatures?

    iii) Quants estudiants no tindran cap fitxa d'aquestes tres assignatures?

    iv) Quants estudiants tenen fitxa sosl de matemàtiques? (considerant únicament les tres assignatures esmentades).

    v) Quants estudiants tenen fitxa amb sols una d'aquestes tres assignatures?

Sol.: i) Suposem $U = \{x \ / \ x \in estudiants\ matriculats\}$.

$M = \{x \ / \ x \in estudiants\ de\ matemàtiques\}$.

$E = \{x \ / \ x \in estudiants\ d'economia\}$.

$I = \{x \ / \ x \in estudiants\ d'informàtica\}$.

$M \cap E = \{x \ / \ x \in estudiants\ de\ matemàtiques\ i\ d'economia\}$.

$M \cap I = \{x \ / \ x \in estudiants\ de\ matemàtiques\ i\ d'economia\}$.

$E \cap I = \{x \ / \ x \in estudiants\ d'economia\ i\ d'informàtica\}$.

$M \cap E \cap I = \{x \ / \ x \in estudiants\ de\ matemàtiques,\ d'economia\ i\ d'informàtica\}$.

$card(M \cup E) = card(M) + card(E) - card(M \cap E) = 2300 + 1700 - 1200 = 2800$.

ii)$card(M \cup E \cup I) = card(M) + card(E) + card(I) - card(M \cap E) - card(M \cap I) - card(E \cap I) + card(M \cap E \cap I) = 2300 + 1700 + 1850 - 1200 - 715 - 300 + 50 = 3685$.

iii) $card(\overline{M \cup E \cup I}) = card(U) - card(M \cup E \cup I) = 4000 - 3685 = 315$.

iv) Sols de matemàtiques, és a dir, $card(M \cap \overline{E} \cap \overline{I}) = card(M) - card(M \cap E \cap \overline{I}) - card(M \cap \overline{E} \cap I) - card(M \cap E \cap I) = 2300 - 1150 - 665 - 50 = 435$.

v) Sols d'economia, és a dir, $card(E \cap \overline{M} \cap \overline{I}) = card(E) - card(E \cap M \cap \overline{I}) - card(E \cap \overline{M} \cap I) - card(E \cap M \cap I) = 1700 - 1150 - 250 - 50 = 250$. Sols d'informàtica, és a dir, $card(I \cap \overline{E} \cap \overline{M}) = card(I) - card(I \cap E \cap \overline{M}) - card(I \cap \overline{E} \cap M) - card(I \cap E \cap M) = 1850 - 250 - 665 - 50 = 885$.

Per la qual cosa, el nombre d'estudiants que tenen fitxa amb sols una d'aquestes tres assignatures estarà determinada per la suma d'aquests tres cardinals. És a dir, $card(M \cap \overline{E} \cap \overline{I}) + card(E \cap \overline{M} \cap \overline{I}) + card(I \cap \overline{E} \cap \overline{M}) = 1570$.

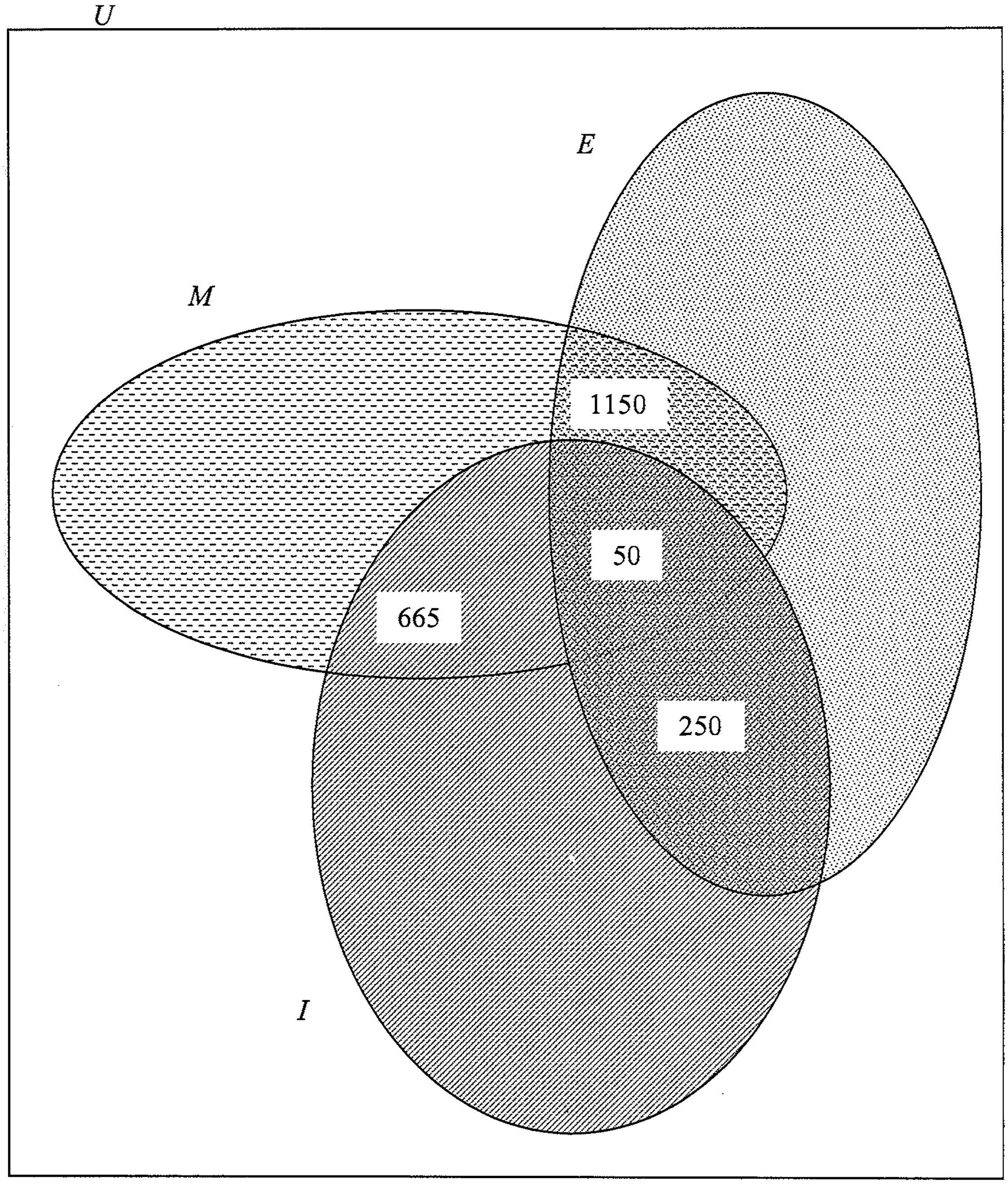


Figure 9:

Part I

TEMA 4: RELACIONS, APLICACIONS I FUNCIONS

1. RELACIONS O CORRESPONDÈNCIES ENTRE CONJUNTS

Definició 1. *Direm que un conjunt G és un* ***graf*** *quan tots els seus elements són parells ordenats. És a dir,* $G = \{z \ / \ z = (x,y)\}$.

Definició 2. *Suposem X , $Y \subset E$ no buits i $G \subset X \times Y$. Aleshores la terna d'elements $\Re = (X,Y,G)$, defineix una* ***relació*** *$\Re$ de X cap a Y on X és el conjunt inicial, Y el conjunt final i G el graf de la relació.*

Definició 3. *Alguns autors defineixen* **relació o correspondència** *entre dos conjunts, qualsevol subconjunt del producte cartesià $X \times Y$. És a dir, $G \subset X \times Y$ i en aquest cas $G = \Re = \{z \ / \ z = (x,y) \ / \ x \in X \ , \ y \in Y\}$.*

Quan dos elements estiguen relacionats ho indicarem per $x\Re y$ o $(x,y) \in \Re$ i direm que l'element x està relacionat amb l'element y o (x,y) és un element de $\Re$.

Per exemple si $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$ i el graf $G = \{(1,a),(1,b),(2,c),(4,d)\}$, indicarem $1\Re a, 1\Re b, 2\Re c, 4\Re d$ o $(1,a),(1,b),(2,c),(4,d) \in \Re$.

Com qualsevol producte cartesià podrem representar-lo com ja hem vist en el tema anterior.

Definició 4. *Suposem $\Re \subset X \times Y$. Anomenem* **domini** *de la relació $\Re$ el conjunt de les primeres projeccions de $\Re$. Anomenem* **rang o recorregut** *el conjunt de les segones projeccions de $\Re$.*

És a dir, *dom* $\Re = \{x \ / \ x \in X \ , \ \exists y \in Y \ / \ (x,y) \in \Re\} =$ *conjunt original.*
rang $\Re = \{y \ / \ y \in Y \ / \ \exists x \in X \ / \ (x,y) \in \Re\} =$ *conjunt imatge.*

1.1. Propietats.

1. Si $\Re$ és una relació i $S \subset \Re \Rightarrow S$ és una relació.
2. Si $\Re$ i S són relacions $\Rightarrow \Re \cup S$, $\Re \cap S$, $\Re - S$ són relacions.
3. $dom\ (\Re \cup S) = dom\ \Re \cup dom\ S$.
4. $rang\ (\Re \cup S) = rang\ \Re \cup rang\ S$.
5. $dom\ (\Re \cap S) \subset dom\ \Re \cap dom\ S$.
6. $rang\ (\Re \cap S) \subset rang\ \Re \cap rang\ S$.

7. $dom\ \Re -\ dom\ S \subset\ dom\ (\Re -\ S)$.

8. $rang\ \Re -\ rang\ S \subset\ rang\ (\Re -\ S)$.
   Contraexemple de 5. Suposem $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{a,b,c\}$,
   $R = \{(1,a),(2,a)\}$, $S = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$.

Demostració de 3. $dom\ (\Re \cup S\ ) = dom\ \Re \cup\ dom\ S$.
$\subset$ $x \in dom\ (\Re \cup S\ ) \longrightarrow \exists y\ /\ (x,y) \in \Re \cup S \longrightarrow (x,y) \in \Re \vee (x,y) \in S \longrightarrow x \in dom\ \Re \vee x \in dom\ S \longrightarrow x \in dom\ \Re \cup dom\ S$.
$\supset$ $x \in dom\ \Re \cup dom\ S \longrightarrow x \in dom\ \Re \vee x \in dom\ S \longrightarrow \exists y\ /\ (x,y) \in \Re \vee \exists y\ /\ (x,y) \in S \longrightarrow (x,y) \in \Re \cup S \longrightarrow x \in dom\ (\Re \cup S\ )$.
La resta de les demostracions, com a exercici.

2. COMPOSICIÓ I INVERSA

Definició 5. *Suposem $\Re \subset X \times Y$ una relació de X cap a Y. Denominem* **relació recíproca o inversa** *aquella relació que té invertides els seus parells ordenats respecte a $\Re$. És a dir, si $(x,y) \in \Re$, aleshores, $(y,x) \in \Re^{-1}$.*
Així doncs, $\Re^{-1} = \{(y,x)\ /\ (x,y) \in \Re\}$.

Exemple 1. *Calculeu $\Re^{-1}$ si ens donen $X = \{a_1,a_2,a_3\}$, $Y = \{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ i $\Re = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_4)\}$.*

2.1. Propietats.

1. Si $\Re$ és una relació $\Rightarrow \Re^{-1}$és una relació tal que $dom\ \Re^{-1} = rang\ \Re$ i $rang\ \Re^{-1} = dom\ \Re$.

2. $(\Re^{-1})^{-1} = \Re$.

3. $(\Re \cup S\ )^{-1} = \Re^{-1} \cup S^{-1}$.

4. $(\Re \cap S\ )^{-1} = \Re^{-1} \cap S^{-1}$.

5. $(\Re - S\ )^{-1} = \Re^{-1} - S^{-1}$.

Demostració de 4. $(\Re \cap S\ )^{-1} = \Re^{-1} \cap S^{-1}$.
$\subset$ $(x,y) \in (\Re \cap S\ )^{-1} \longrightarrow (y,x) \in \Re \cap S \longrightarrow (y,x) \in \Re \wedge (y,x) \in S \longrightarrow (x,y) \in \Re^{-1} \wedge (x,y) \in S^{-1} \longrightarrow (x,y) \in \Re^{-1} \cap S^{-1}$.
$\supset$ $(x,y) \in \Re^{-1} \cap S^{-1} \longrightarrow (x,y) \in \Re^{-1} \wedge (x,y) \in S^{-1} \longrightarrow (y,x) \in \Re \wedge (y,x) \in S \longrightarrow (y,x) \in \Re \cap S \longrightarrow (x,y) \in (\Re \cap S\ )^{-1}$.
La resta de les demostracions, com a exercici.

Definició 6. *Suposem* $\Re \subset X \times Y$ *i* $S \subset Y \times Z$ *dues relacions. S'anomena* ***composició*** *de* S *amb* $\Re$ *la relació* $S \circ \Re \subset X \times Z$. *És a dir,*

$$S \circ \Re = \{(x,z) \;/\; x \in X \;,\; z \in Z \;/\; \exists y \in Y \;/\; (x,y) \in \Re, (y,z) \in S\}$$

Exemple 2. *Si* $X = \{a_1, a_2, a_3\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $Z = \{c_1, c_2\}$, $\Re = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_4)\} \subset X \times Y$, $S = \{(b_1,c_1),(b_2,c_2),(b_3,c_2)\} \subset Y \times Z$.
Trobeu: i) $S \circ \Re$ *ii)* $\Re \circ S$. *(Si és possible).*

2.2. Propietats.

1. *dom* $(S \circ \Re) \subset$ *dom* $\Re$.
2. *rang* $(S \circ \Re) \subset$ *rang* S.
3. $S \circ \Re \neq \Re \circ S$ No commutativa.
4. $T \circ (S \circ \Re) = (T \circ S) \circ \Re$ Associativa.
5. Distributives:
   i) $(T \cup S) \circ \Re = (T \circ \Re) \cup (S \circ \Re)$. Distributiva de $\circ$ respecte de $\cup$.
   ii) $(T \cap S) \circ \Re \subset (T \circ \Re) \cap (S \circ \Re)$. No distributiva de $\circ$ respecte de $\cap$.
   iii) $(S \circ \Re) - (T \circ \Re) \subset (S - T) \circ \Re$. No distributiva de $\circ$ respecte de $\cap$.
6. $(S \circ \Re)^{-1} = \Re^{-1} \circ S^{-1}$.
7. $\Re \circ \Delta_X = \Re = \Delta_Y \circ \Re$ sent $\Delta_X = \{x \;/\; x\Re x\}$, la diagonal en X i $\Delta_Y = \{y \;/\; y\Re y\}$, la diagonal en Y.

Demostració de 4. $T \circ (S \circ \Re) = (T \circ S) \circ \Re$.
Vegeu la fig.1
Aquesta demostració es pot fer utilitzant les inclusions o més ràpidament de la següent manera:
$T \circ (S \circ \Re) = \{(x,w) \;/\; \exists z \in Z \;/\; (x,z) \in S \circ \Re \wedge (z,w) \in T\} =$
$= \{(x,w) \;/\; \exists z \in Z \;,\; \exists y \in Y \;/\; (x,y) \in \Re \wedge (y,z) \in S \wedge (z,w) \in T\} =$
$= \{(x,w) \;/\; \exists y \in Y \;/\; (x,y) \in \Re \;,\; (y,w) \in T \circ S\} = (T \circ S) \circ \Re$.

Demostració de 5. ii) $(T \cap S) \circ \Re \subset (T \circ \Re) \cap (S \circ \Re)$.
$\subset$ $(x,z) \in (T \cap S) \circ \Re \longrightarrow \exists y \;/\; (x,y) \in \Re \wedge (y,z) \in T \cap S \longrightarrow \exists y \;/\; (x,y) \in \Re \wedge$ $[((y,z) \in T) \wedge ((y,z) \in S)] \longrightarrow [((x,y) \in \Re \;,\; (y,z) \in T) \;\wedge\; ((x,y) \in \Re \;,\; (y,z) \in S)] \longrightarrow$ $((x,z) \in T \circ \Re) \wedge ((x,z) \in S \circ \Re) \longrightarrow (x,z) \in (T \circ \Re) \cap (S \circ \Re)$.

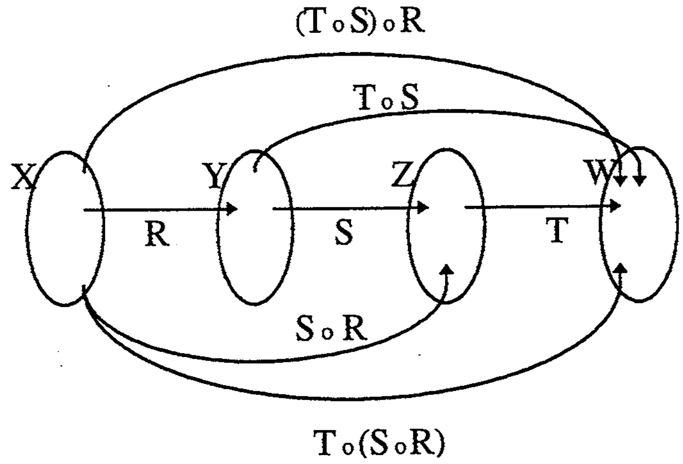


Figure 1:

$\supset$ no es verifica.
Contraexemple. $\Re = \{(3,1),(3,2)\}$ $S = \{(1,0)\}$ $T = \{(2,0)\}$.
En efecte, $T \cap S = \phi$. Per la qual cosa, $(T \cap S) \circ \Re = \phi \circ \Re = \phi$.
Però $S \circ \Re = \{(3,0)\}$ $T \circ \Re = \{(3,0)\} \longrightarrow (S \circ \Re) \cap (T \circ \Re) = \{(3,0)\}$.
La resta de les demostracions, com a exercici.

3. RELACIONS BINÀRIES EN UN CONJUNT

Definició 7. *Suposem X , $Y \subset E$ no buits tal que $X = Y$ i $G \subset X \times X$. Aleshores la terna d'elements $\Re = (X, X, G)$, defineix una* **relació binària** *$\Re$ de X cap a X on el conjunt inicial i final és X i G el graf de la relació.*

Definició 8. *Alguns autors defineixen* **relació binària** *en X, qualsevol subconjunt del producte cartesià $X \times X$. És a dir, $G \subset X \times X$ i en aquest cas $G = \Re = \{z \;/\; z = (x,y) \;/\; x,\ y \in X\}$.*

3.1. Propietats.

1. *Reflexiva* $x\Re x$ $\forall x$ o $(x,x) \in \Re$ $\forall x$.
2. *Simètrica* Si $x\Re y \Rightarrow y\Re x$ o Si $(x,y) \in \Re \Rightarrow (y,x) \in \Re$.
3. *Antisimètrica* Si $x\Re y \wedge y\Re x \Rightarrow y = x$ o Si $(x,y) \in \Re \wedge (y,x) \in \Re \Rightarrow y = x$.
4. *Transitiva* Si $x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z$ o Si $(x,y) \in \Re \wedge (y,z) \in \Re \Rightarrow (x,z) \in \Re$.
5. *Connexa* $\forall x,y \in X \Rightarrow x\Re y \vee y\Re x$ o $\forall x,y \in X \Rightarrow (x,y) \in \Re \vee (y,x) \in \Re$.

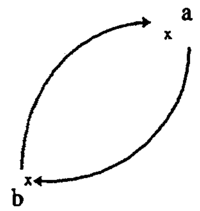


Figure 2:

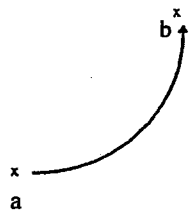


Figure 3:

Definició 9. *Una relació binària que compleix les propietats: reflexiva i transitiva direm que és una* **relació binària de preordre.**

Definició 10. *Una relació binària que compleix les propietats: reflexiva, simètrica i transitiva direm que és una* **relació binària d'equivalència.** *(RBE)*

Definició 11. *Una relació binària que compleix les propietats: reflexiva, antisimètrica i transitiva direm que és una* **relació binària d'ordre.** *(RBO)*

Definició 12. *Una relació binària que compleix les propietats: reflexiva, antisimètrica, transitiva i connexa, direm que és una* **relació binària d'ordre total.** *(RBOT)*

Definició 13. *Una relació binària que compleix les propietats: reflexiva, antisimètrica, transitiva i no connexa, direm que és una* **relació binària d'ordre parcial.** *(RBOP)*

Nota 1. *Per tal que no ens resulte difícil veure les propietats anteriors, podríem denotar:*

Parell boomerang. Vegeu la fig.2
Parell unilateral. Vegeu la fig.3
Bucle. Vegeu la fig.4
Aleshores les propietats es converteixen en:
Reflexiva. Tots els elements de X tindran bucle.

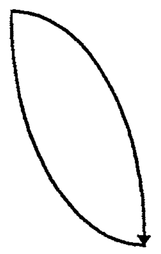


Figure 4:

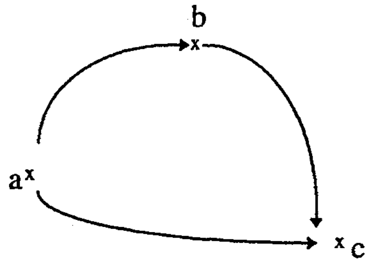


Figure 5:

Simètrica. Absència de parell unilateral. ($\nexists$ parell unilateral). És a dir, si existira parell unilateral, aleshores la relació no compliria la propietat simètrica.

Antisimètrica. Absència de parell boomerang. ($\nexists$ parell boomerang). És a dir, si existira parell boomerang, aleshores la relació no compliria la propietat antisimètrica.

Transitiva. i) En el parell boomerang, els dos elements cal que tinguen bucle. ii) En el parell unilateral, qualsevol element podrà tenir bucle. iii) Cal complir la regla de *les tres parts del triangle.* Vegeu la fig.5 iv). En cas de dubte, caldrà comprovar la regla pràctica $\Re \circ \Re \subset \Re$.

Observació : *La paraula anti no és sinònima de no.* Per tant antisimetria no és sinònim de no simetria. Simetria no és sinònim de no antisimetria.

Per exemple: Poden haver-hi relacions que siguen no simètriques i no antisimètriques. Vegeu la fig. 6

Poden haver-hi relacions que siguen simètriques i antisimètriques. Vegeu la fig. 7

4. RELACIÓ BINÀRIA D'EQUIVALÈNCIA

Definició 14. *Suposem un conjunt $X \neq \phi$. Siga $\Re$ una relació binària d'equivalència en X. Anomenem* **classe d'equivalència** *generada pel element x i ho representem per $[x]$, el conjunt dels elements de X relacionats amb aquest element x. És a dir,* $[x] = \overline{x} = \{y \ / \ y \in X \ / \ y\Re x\} = \{y \ / \ y \in X \ / \ x\Re y\}$.

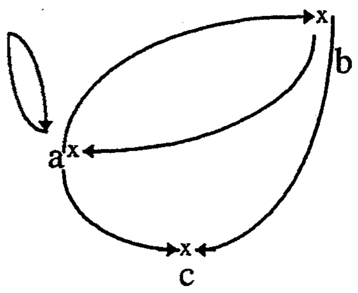


Figure 6:

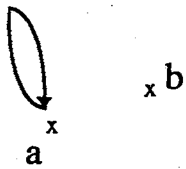


Figure 7:

Definició 15. *El conjunt de totes les classes d'equivalència s'anomena* **conjunt quocient** *i es representa per $X/\Re$.*
És a dir, $X/\Re = \{[x] \ / \ x \in X\}$.

Definició 16. *Anomenem* **representant** *un element qualsevol que pertanya a la seua classe. És a dir, representant serà un element qualsevol de la classe.*

Definició 17. *Anomenem* **representant canònic** *aquell element més senzill que ens represente tota la classe d'equivalència.*

Exercici 1. *En el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$, considerem la relació de congruència mòdul 3, i la representem per $\equiv_{(3)}$ i) Demostreu que $\equiv_{(3)}$és una RBE. ii) Obteniu les classes d'equivalència. iii) Trobeu el conjunt quocient.*

Abans de fer l'exercici cal definir el concepte de congruència.

Definició 18. *Donats dos nombres enters x , y direm que són* **congruents mòdul** *$n \in \mathbb{N}$ si, i sols si, en dividir x i y entre n ens dóna el mateix residu.*

Definició 19. *Donats dos nombres enters x, y direm que són* **congruents mòdul** *$n \in \mathbb{N}$ si, i sols si, la seua diferència és múltiple de n.*

Es pot demostrar que ambdúes definicions són equivalents.

i) Demostrem que la relació de congruència és una RBE per a $n \in \mathbb{N}$. En efecte,

a) Reflexiva. $x \equiv_{(n)} x \quad \forall x$ Es compleix ja que $x - x = 0 = \dot{n} \quad \forall n$.

b) Simètrica. $x \equiv_{(n)} y \Rightarrow y \equiv_{(n)} x$ Es compleix ja que si

$$x \equiv_{(n)} y \longrightarrow x - y = \dot{n} \longrightarrow (-1)(x-y) = (-1)\dot{n} \longrightarrow y - x = \dot{n} \longrightarrow y \equiv_{(n)} x.$$

c) Transitiva. $x \equiv_{(n)} y \wedge y \equiv_{(n)} z \Rightarrow x \equiv_{(n)} z$. En efecte,

$x \equiv_{(n)} y \longrightarrow x - y = \dot{n}$.

$y \equiv_{(n)} z \longrightarrow y - z = \dot{n}$.

D'ambdúes obtenim $x - y = \dot{n} \wedge\ y - z = \dot{n} \longrightarrow (x-y) + (\ y - z) = 2\dot{n} = \dot{n} \longrightarrow x - z = \dot{n} \longrightarrow x \equiv_{(n)} z$.

En substituir n per 3 obtindríem el cas particular de l'exercici.

ii) Per a obtenir les classes d'equivalència ens adonem que sols hi ha tres possibles residus i que són 0,1,2

Aleshores:

$[0] = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ 0\Re y\} = \left\{y \in \mathbb{Z} \ / \ y = \dot{3}\right\} = \dot{3}.$

$[1] = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ 1\Re y\} = \left\{y \in \mathbb{Z} \ / \ y - 1 = \dot{3}\right\} = \left\{y \in \mathbb{Z} \ / \ y = \dot{3} + 1\right\} = \dot{3} + 1.$

$[2] = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ 2\Re y\} = \left\{y \in \mathbb{Z} \ / \ y - 2 = \dot{3}\right\} = \left\{y \in \mathbb{Z} \ / \ y = \dot{3} + 2\right\} = \dot{3} + 2.$

iii) El conjunt quocient és el conjunt de les classes d'equivalència. És a dir, $\mathbb{Z}/\equiv_{(3)} = \mathbb{Z}/_3 = \{[0]\,,[1]\,,[2]\}$.

Exercici 2. *En el conjunt $A = \{m, n, p, q, r\}$, definim la relació binària:*

$$\Re = \{(m,n), (n,n), (p,p), (q,q), (r,r), (m,m), (n,m), (q,r), (r,q)\}.$$

i) Demostreu que $\Re$ és una RBE. ii) Obteniu les classes d'equivalència. iii) Trobeu el conjunt quocient.

4.1. Propietats.

1. *El conjunt classe d'equivalencia mai és el conjunt buit.*

   És a dir, $[x] \neq \phi$.

   En efecte, com $\Re$ és una RBE, aleshores, $x\Re x \quad \forall x$, per la qual cosa $x \in [x]$.

2. *Dues classes d'equivalència són iguals si, i sols si, els seus elements estan relacionats.*

   És a dir, $[x] = [y] \Leftrightarrow x\Re y$.

   Demostració:

$\rightarrow)$ $z \in [x] = [y] \longrightarrow z \in [x] \wedge z \in [y] \longrightarrow z\Re x \wedge z\Re y \longrightarrow x\Re z \wedge z\Re y \longrightarrow x\Re y.$

$\leftarrow)$ $\subset$ $z \in [x] \longrightarrow z\Re x$ Per hipòtesi, $x\Re y$ Aplicant la transitiva, $z\Re y \longrightarrow z \in [y]$.

$\supset$ $z \in [y] \longrightarrow z\Re y$ Per hipòtesi, $x\Re y$ Aplicant la simètrica, $y\Re x$.

Aplicant la transitiva, $z\Re x \longrightarrow z \in [x]$.

3. *Classes distintes són disjuntes.*

És a dir, $[x] \neq [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] = \phi$.
És equivalent a demostrar:
$[x] = [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] \neq \phi$.
Suposem $[x] \cap [y] \neq \phi \longleftrightarrow \exists z \in [x] \cap [y] \longleftrightarrow z \in [x] \wedge z \in [y] \longleftrightarrow z\Re x \wedge z\Re y \underset{\text{Sim.}}{\longleftrightarrow} x\Re z \wedge z\Re y \underset{Trans.}{\longleftrightarrow} x\Re y \underset{2}{\longleftrightarrow} [x] = [y]$.

Teorema 1. *Suposem $\Re \subset X \times X$ una RBE. El teorema afirma que el conjunt de les classes d'equivalència forma una partició del propi conjunt X. Recíprocament, si $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ és una partició de X, es pot definir en X una RBE, on les classes són precisament els elements de P.*

Demost.:
Suposem $(X_i)_{i\in I}$ una partició de X. És a dir, *i)* $X_i \neq \phi \; \forall i \quad i \in I$ *ii)* $X_i \cap X_j = \phi \;\; i \neq j \;\; i,j \in I$ *iii)* $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = X$.
$\rightarrow)$ Siga $[x] = \{y \,/\, x\Re y\}$ una classe d'equivalència. Siga $\{[x] \,/\, x \in X\}$ el conjunt de les classes d'equivalència. Aquest conjunt constituirà una partició de X quan: *i)* $[x] \neq \phi$, demostrat anteriorment. *ii)* $[x] \neq [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] = \phi$, demostrat anteriorment. *iii)* $\bigcup\limits_{x\in X} [x] = X$.
$\subset$ $\forall x \in X \longrightarrow [x] \subset X \longrightarrow \bigcup\limits_{x\in X} [x] \subset X$.
$\supset$ $x \in [x] \quad \forall x \in X \longrightarrow \bigcup\limits_{x\in X} x \subset \bigcup\limits_{x\in X} [x] \longrightarrow X \subset \bigcup\limits_{x\in X} [x]$.
$\leftarrow)$ Siga $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\} = \{X_i\}_{i\in I}$ una partició de X.
Siga $\Re$ una relació definida de la següent forma:
$x\Re y \Leftrightarrow x \in X_i \wedge y \in X_i$ És a dir, *dos elements estan relacionats si, i sols si, pertanyen a la mateixa partició de X.*
Vegem que $\Re$ és una relació binària d'equivalència.
i) Reflexiva. $x \,\Re\, x \quad \forall x$ ja que $x \in X_i \wedge x \in X_i$
ii) Simètrica. $x\Re y \Rightarrow y\Re x$ Si $x\Re y \longrightarrow \exists i \,/\, x \in X_i \wedge y \in X_i \longrightarrow \exists i \,/\, y \in X_i \wedge x \in X_i \longrightarrow y\Re x$.
iii) Transitiva. $x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z$.
$x\Re y \longrightarrow \exists i \,/\, x \in X_i \wedge y \in X_i$.
$y\Re z \longrightarrow \exists j \,/\, y \in X_j \wedge z \in X_j$.

D'aquestes dues expressions obtenim que $y \in X_i \cap X_j$. Com$\{X_i\}_{i \in I}$ és una partició de X, $X_i \cap X_j = \phi \quad i \neq j$. Aleshores $\overline{\exists}\ y\ /\ y \in X_i \cap X_j$, salvat que $i = j$, que ens quedaria $\quad x \in X_i \wedge z \in X_i \longrightarrow x\Re z$.

Observació: Aquest teorema identifica partició i relació d'equivalència, de tal manera que ens permet classificar els elements d'un conjunt en classes disjuntes i a més a més relacionats entre si. Tot això implica la possibilitat de crear nous objectes, que són les classes d'equivalència. Així, a partir del nombre natural pot construir-se el nombre enter, i a partir d'aquest el nombre racional, etc. També el concepte de vector lliure està lligat al de la relació d'equipotència (vectors equipolents).

La noció d'equivalència és l'instrument de la denominada *definició per abstracció o definició per pas al quocient.* En aquesta definició s'agafen les classes d'equivalència com a vertaders elements, prescindint del fet que siguen conjunts. Sobre aquestes classes d'equivalència s'estableixen lleis de composició que doten el conjunt quocient de noves estructures algebraiques.

En tots els casos, caldrà comprovar que la nova definició és independent del representant elegit (és l'anomenada propietat uniforme). També se sol dir que la nova llei siga *compatible* amb el pas al quocient.

5. RELACIÓ BINÀRIA D'ORDRE

Definició 20. *Suposem un conjunt $X \neq \phi$. Siga $\Re$ una relació binària d'ordre en X. Direm que X és un* **conjunt ordenat** *quan $\Re$ siga una RBO.*

Nota 2. *Sobre un mateix conjunt es poden definir diverses relacions d'ordre, les quals provoquen distintes ordenacions. Per exemple, les relacions ser divisor de (/) i ser menor o igual que ($\leq$) en $\mathbb{N}$, provoquen les ordenacions $(\mathbb{N}, /)$, $(\mathbb{N}, \leq)$. Caldrà observar que dos nonbres naturals estaran relacionats per $\leq$, però no sempre per /.*

Exercici 3. *Demostreu que:*

1. $(P(X), \subset)$, és un conjunt parcialment ordenat.
2. $(\mathbb{N}, \bullet) = (\mathbb{N}, \textit{ser múltiple de})$, és un conjunt parcialment ordenat.
3. $(\mathbb{Z}, \bullet) = (\mathbb{Z}, \textit{ser múltiple de})$, és un conjunt preordenat.
4. $(\mathbb{N}, \leq)$, és un conjunt totalment ordenat.

Per a demostrar el primer exercici, cal recordar les propietats de la relació binària d'ordre estudiades en el tema 3 i en aquest tema. En el cas particular quan $X = \{1, 2, 3\}$, estudiem la representació sagital i el diagrama de Hasse. Vegeu les figures 8 i 9.

$P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

En el diagrama de Hasse:

i) Els elements es representen per punts.

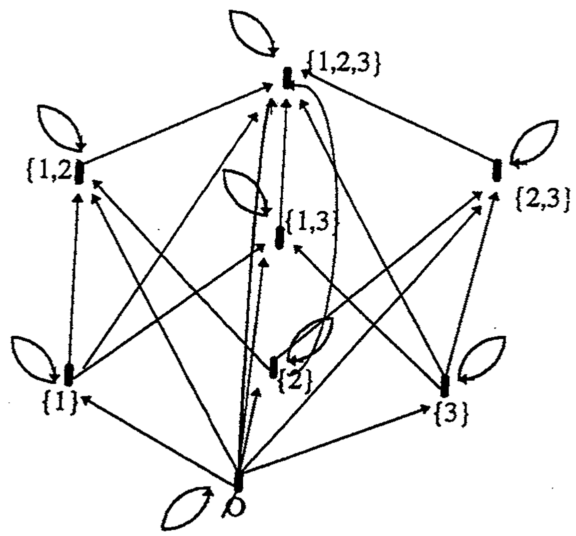


Figure 8:

ii) Els elements relacionats estan units per un segment, d'esquerra cap a dreta o de sota cap a d'amunt.

iii) S'elimina la propietat reflexiva (bucles) i la transitiva.

Es pot apreciar que el diagrama de Hasse resulta més còmode i senzill que el diagrama sagital.

6. ELEMENTS NOTABLES EN UN CONJUNT ORDENAT

Suposem $X \neq \phi$ i $\Re \subset X \times X$ una RBO en X, és a dir, suposem $(X, \Re)$ un conjunt ordenat. Suposem $A \subset X$.

Definició 21. *Un element de X és una* **cota inferior** *si, i sols si, està relacionat amb tots els elements d'A.*

És a dir, $m \in X$ és cota inferior del subconjunt $A \Leftrightarrow m\Re a \quad \forall a \in A$.

Definició 22. *Un conjunt que tinga cotes inferiors direm que està* **acotat inferiorment***.*

Definició 23. *Un element de X és una* **cota superior** *si, i sols si, tots els elements de A estan relacionats amb aquest element.*

És a dir, $m' \in X$ és cota superior del subconjunt $A \Leftrightarrow a\Re m' \quad \forall a \in A$.

Definició 24. *Un conjunt que tinga cotes superiors direm que està* **acotat superiorment***.*

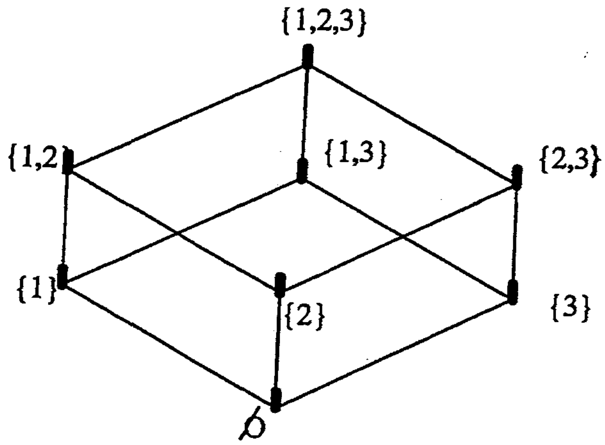


Figure 9:

Definició 25. *Un conjunt que estiga acotat superiorment i inferiorment direm que està* ***acotat.***

Definició 26. *Anomenem* ***extrem inferior o ínfim*** *la major de les cotes inferiors.*

Proposició 1. *L'extrem inferior, si existeix, és únic.*

En efecte, suposem que $\exists\ x_1, x_2$ extrems inferiors en principi diferents $(x_1 \neq x_2)$. Vegem que són iguals.

Si x_1, x_2 són extrems inferiors$\longrightarrow x_1, x_2$ són cotes inferiors.

Com x_1 és cota inferior $\longrightarrow x_1 \Re x_2$.

Com x_2 és cota inferior $\longrightarrow x_2 \Re x_1$.

D'ambdues s'obté $x_1 = x_2$ en aplicar la propietat antisimètrica.

Definició 27. *Anomenem* ***extrem superior o suprem*** *la menor de les cotes superiors.*

Proposició 2. *L'extrem superior, si existeix, és únic.*

Definició 28. *Quan l'extrem inferior o ínfim pertanya al subconjunt A, s'anomena* ***mínim o primer element*** *del subconjunt.*

Proposició 3. *El mínim, si existeix, és únic.*

Definició 29. *Quan l'extrem superior o suprem pertanya al subconjunt A, s'anomena* ***màxim o últim element*** *del subconjunt.*

Definició 30. *El màxim, si existeix, és únic.*

Definició 31. *Un element de A, és* **minimal** *si, i sols si, no admet antecessors.*

És a dir, $m_1 \in A$, és *minimal* $\Leftrightarrow \forall x \in A \ / \ x\Re m_1 \Rightarrow x = m_1$.

Proposició 4. *El minimal, si existeix, no ha de ser únic necessàriament.*

Definició 32. *Un element de A, és* **maximal** *si, i sols si, no admet sucessors.*

És a dir, $m_2 \in A$, és max*imal* $\Leftrightarrow \forall x \in A \ / \ m_2\Re x \Rightarrow x = m_2$.

Proposició 5. *El maximal, si existeix, no ha de ser únic necessàriament.*

Nota 3.

1. *Cal adornar-nos que en estar treballant amb un conjunt ordenat, qualsevol subconjunt també està ordenat, amb la mateixa ordenació.*
2. *De la mateixa manera que hem definit mínim i màxim per al subconjunt A, podem definir mínim i màxim per al conjunt X.*
3. *Demostrarem que el mínim i el màxim del conjunt X, si existeixen, són únics.*
   En efecte, suposem m i m' mínims per a $X \ / \ m \neq m'$, en principi.
   Si $m \in X \ / \ m$ és mínim$\longrightarrow m\Re x \quad \forall x \in X$ (1).
   Si $m' \in X \ / \ m'$ és mínim$\longrightarrow m'\Re x \quad \forall x \in X$ (2).
   En particular es compleix per a $x = m' \xrightarrow{(1)} m'\Re m$.
   En particular es compleix per a $x = m \xrightarrow{(2)} m\Re m'$. En aplicar la propietat antisimètrica obtenim $m = m'$.

Exercici 4. *Siga $X = \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$. Considerem en X la relació binària:*
$x\Re y \Leftrightarrow x/y$ *(x divideix a y). Demostreu: i) $\Re$ és una RBOP. ii) Trobeu els elements notables respecte a cadascun dels subconjunts:*
a) $A = \{8,12,16\}$ *b)* $B = \{2,4,6,8\}$ *c)* $C = \{12,16,24,48\}$.
Abans de fer l'exercici cal definir el concepte de divisibilitat (en el conjunt adient).

Definició 33. *Suposem $x, y \in \mathbb{N}$ Direm que x* **divideix a** *y o x* **és un divisor de** *y o y* **és múltiple de** *x i es representa per x/y o $x \in d(y)$ o $y = \dot{x}$, si en dividir y entre x ens dóna residu zero.*
És a dir, $x/y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ y = nx$.

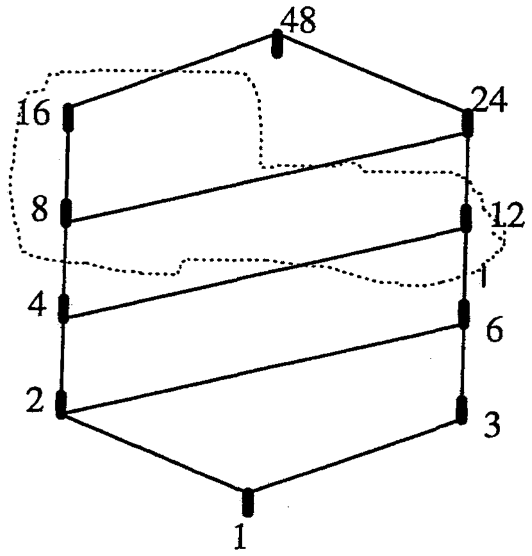


Figure 10:

i) $\Re$ és una RBOP.

a) Reflexiva. $x/x \quad \forall x$. Es compleix ja que $\exists 1 \in \mathbb{N} \;/\; x = 1x$.

b) Antisimètrica. $x/y \wedge y/x \Rightarrow x = y$ Es compleix ja que:

$x/y \longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; y = nx$.

$y/x \longrightarrow \exists m \in \mathbb{N} \;/\; x = my$.

D'ambdúes: $x/y \wedge y/x \longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \;/\; y = nx) \wedge (\exists m \in \mathbb{N} \;/\; x = my) \longrightarrow yx = (nx)(my) = (nm)yx \longrightarrow nm = 1 \overset{n,m \in \mathbb{N}}{\longrightarrow} n = m = 1$ .Per la qual cosa $x = y$

c) Transitiva. $x/y \wedge y/z \Rightarrow x/z$ Es compleix ja que:

$x/y \longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; y = nx$.

$y/z \longrightarrow \exists m \in \mathbb{N} \;/\; z = my$.

D'ambdúes:

$x/y \wedge y/z \longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \;/\; y = nx) \wedge (\exists m \in \mathbb{N} \;/\; z = my) \longrightarrow yz = (nx)(my) \longrightarrow yz = nxmy \longrightarrow z = nmx \longrightarrow z = kx \overset{k \in \mathbb{N}}{\longrightarrow} x/z$.

d) No connexa. Donats $x, y \in \mathbb{N} \quad \forall x \; \forall y \overset{no}{\Longrightarrow} x/y \vee y/x$.

Contraexemple $x = 2$, $y = 5$.

ii) Elements notables. a) $A = \{8, 12, 16\}$. Vegeu la fig.10.

$\{$cotes inferiors$\} = \{1, 2, 4\}$, ja que 1,2,4 divideixen tots els elements de A.

$\{$cotes superiors$\} = \{48\}$, ja que tots els elements de A són divisors de 48.

O bé, ja que tots els elements de A divideixen 48.

El conjunt A és un conjunt acotat, ja que ho és superiorment i inferiorment.

Extrem inferior o ínfim = 4, ja que és la major de les cotes inferiors.

Extrem superior o suprem = 48, ja que és la menor de les cotes superiors.

No hi ha mínim ni màxim ja que les respectives cotes no pertanyen al subconjunt A.

Minimal=$\{8,12\}$, ja que ni el 8 ni el 12, elements de A, admeten cap antecessor. (El 16 no és minimal ja que té com a antecessor el 8).

Maximal=$\{12,16\}$, ja que ni el 12 ni el 16, elements de A, admeten cap sucessor.

Cal fer, com a exercici, els apartats b) i c).

Exercici 5. *En el conjunt dels nombres naturals, definim la relació $x\Re y \Leftrightarrow x/y$ (x divideix a y). Trobeu els elements notables respecte a cadascun dels subconjunts: a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subset \mathbb{N}$. b) $B = \{3,4,6,12\} \subset \mathbb{N}$.*

Sol.:

a) Cota inferior resulta ser l'element 1 ja que 1 divideix qualsevol element del conjunt A.

Per a calcular la cota, o cotes superiors, caldrà veure els nombres naturals tals que qualsevol element del conjunt A dividisca aquest número. És a dir, caldrà calcular $m' \in \mathbb{N} \;/\; a\Re m' \quad \forall a \in A \longrightarrow 1/m', 2/m', 3/m', 5/m', 6/m', 7/m', 8/m', 9/m' \longrightarrow m' = \dot{1},\ m' = \dot{2},\ m' = \dot{3},\ m' = \dot{4},\ m' = \dot{5},\ m' = \dot{6},\ m' = \dot{7},\ m' = \dot{8},\ m' = \dot{9} \longrightarrow m' = \overset{\bullet}{\overbrace{m.c.m.(1,2,3,4,5,6,7,8,9)}} \longrightarrow m' = 25\dot{2}0$.

Aleshores $\{cotes\ superiors\} = \left\{x \in \mathbb{N} \;/\; x = 25\dot{2}0\right\}$.

L'extrem inferior o ínfim és l'element 1. També 1 és el mínim, ja que pertany al subconjunt A.

L'extrem superior o suprem és el número 2520, ja que correspon a la menor de les cotes superiors. En aquest cas no existeix màxim.

El minimal és l'element 1. Els maximals són els elements 5,6,7,8,9, ja que compleixen la definició i també ho podeu comprovar en la fig.11

Cal fer, com a exercici, l'apartat b).

7. RETICLE

Definició 34. *S'anomena* **reticle** *tot conjunt ordenat tal que qualsevol subconjunt de dos elements té suprem i té ínfim.*

És a dir, si $(X,\Re)$ és un conjunt ordenat i $\forall \{a,b\} \subset X$, direm que X és un reticle si $\exists$ suprem i $\exists$ ínfim.

Per exemple $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}^*, /)$.

Per exemple, figura 12.

Nota 4. *Tot conjunt totalment ordenat és un reticle.*

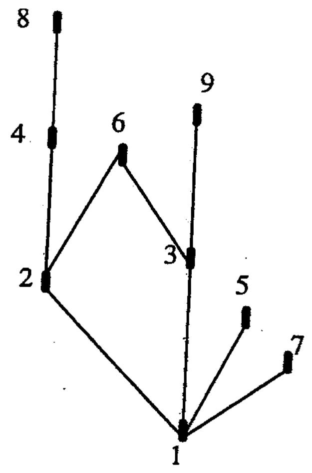


Figure 11:

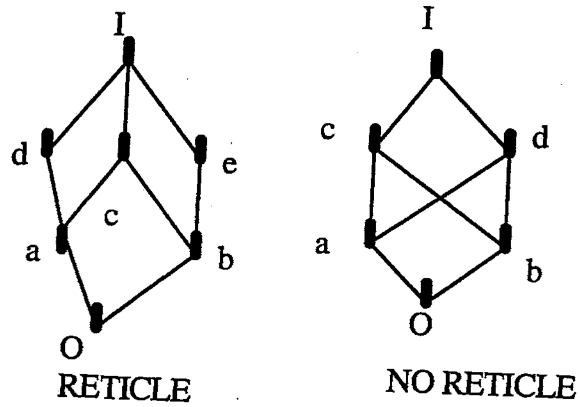


Figure 12:

Figure 13:

8. BON ORDRE

Definició 35. *S'anomena* **bon ordre** *tot conjunt ordenat tal que qualsevol subconjunt no buit, posseeix mínim.*

És a dir, si $(X, \Re)$ *és un conjunt ordenat i* $\forall\ A \subset X,\ A \neq \phi$, *direm que* X *és un bon ordre si, i sols si,* $\forall\ A \subset X,\ A \neq \phi \quad \exists a \in A\ /\ a\Re x \quad \forall x \in A$.

Proposició 6. *Tot conjunt ben ordenat està totalment ordenat.*

Demost.:

Si $(X, \Re)$ és un conjunt ben ordenat $\longrightarrow \forall\ A \subset X,\ A \neq \phi$ posseeix mínim o primer element.

Suposem $A = \{x, y\} \subset X \longrightarrow x\Re y \vee y\Re x$ (ja que A poseeix mínim)$\longrightarrow \Re$ compleix la propietat connexa$\longrightarrow (X, \Re)$ és totalment ordenat.

Nota 5. *El recíproc no és cert. Contraexemple* $(\mathbb{R}, \leq)$.*Vegeu fig.13.*

Suposem $]x_1, x_2[\ \subset \mathbb{R}$. Sabem que $(\mathbb{R}, \leq)$ és totalment ordenat (dos nonbres reals qualsevol estan relacionats per $\leq$). L'element $x_1$és un extrem inferior ja que $x_1 \leq y \quad \forall y \in\ ]x_1, x_2[$, però $x_1 \notin\ ]x_1, x_2[\ \subset \mathbb{R}$, és a dir, x_1 no és mínim.

9. FUNCIÓ

9.1. Introducció. Fins ara, en parlar de les relacions entre dos conjunts X, Y, no exigíem res sobre si un element del conjunt inicial té un, distints, o cap element amb imatge.

Particularitzarem el concepte de relació per a obtenir el de funció i després el de funció per a obtenir el d'aplicació.

9.2. Relació funcional.

Definició 36. *Suposem* $\Re \subset X \times Y$. *Direm que* $\Re$ *és una* **relació funcional, funció uniforme** *de* X *en* Y *o simplement* **funció** *de* X *en* Y *si, i sols si, tot element del conjunt inicial té, com a màxim una imatge en el conjunt final.*

Això vol dir que hi poden haver elements que no tinguen imatge, però aquells que en tinguen, aquesta és única.

És a dir, $\Re \subset X \times Y \quad \Re$ és una relació funcional si sent

$(x, y) \in \Re \wedge (x, z) \in \Re \Rightarrow y = z$.

Diverses notacions es poden utilitzar per a representar les funcions:

$\Re \subset X \times Y$ $\Re$ és una relació funcional o $f \subset X \times Y$ o (X, Y, f) o $f : X \longrightarrow Y$
Representarem les funcions per lletres minúscules: $f, g, h, \ldots$

Definició 37. *Suposem $f \subset X \times Y$. Anomenem* **domini** *de la funció f el conjunt de les primeres projeccions de f. Anomenem* **imatge** *de la funció f el conjunt de les segones projeccions de f.*

És a dir,
$dom(f) = \{x \ / \ \exists y \in Y \ / \ f(x) = y\} = orig(f) = camp\ d'existència\ de\ f.$
$im(f) = \{y \ / \ \exists x \in X \ / \ f(x) = y\} = rang(f) = recorregut(f).$

Definició 38. *Direm que f és una* **funció** *de X en Y ($f : X \longrightarrow Y$) si, i sols si, tots els elements del domini tenen imatge única.*

És a dir, $f : X \longrightarrow Y$ és una funció $\Leftrightarrow \forall x \in dom(f) \quad \exists! y \in Y \ / \ f(x) = y$.

Definició 39. *Suposem $f : X \longrightarrow Y$ una funció i $A \subset X$. S'anomena* **funció restricció** *de f i es representa per f/A a la funció $f/A : A \longrightarrow Y$ tal que $f/A = f \cap (A \times Y)$.*

És a dir, $f = f/A \quad \forall a \in A$.

9.3. Igualtat de funcions.

Definició 40. *Direm que dues funcions f i g són iguals ($f = g$) si, i sols si, i) $dom(f) = dom(g)$ ii) les dues funcions tenen igual conjunt final iii) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in X \quad X$ és el conjunt inicial.*

Exemples de funcions:

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$.
2. $f : X \longrightarrow Y \ / \ f(x) = \mathbb{k}$ (*const.*) $\forall x \in X$. És la funció constant.
3. $f : X \longrightarrow X \ / \ f(x) = x \quad \forall x \in X$. És la funció identitat.
4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{1}{x}$.
5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \sqrt{x - 3}$. És una funció multiforme.
6. $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = 2x$.
7. Si $A \subset X \quad f_A : X \longrightarrow \{0,1\} \ / \ f_A(x) = 0 \quad$ si $x \notin A$, $f_A(x) = 1 \quad$ si $x \in A$.
   A la funció f_A s'anomena **funció característica**.

10. APLICACIÓ

Definició 41. *Anomenem* ***aplicació*** *tota funció tal que tot element del conjunt inicial té imatge única.*

És a dir, la funció $f : X \longrightarrow Y$ és aplicació $\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \exists! y \in Y \ / \ f(x) = y$. Aleshores $dom(f) = X$.

Nota 6. *Els conceptes definits anteriorment per a funcions (restricció, igualtat, dom,...), ens serviran per a aplicacions i per la qual cosa no els definirem.*

Exemples:

1. $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+1}$.
2. $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \sqrt{x-3}$ on $X = \{x \ / \ x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 3\}$.

   Cal notar que f seria una aplicació multiforme. Per a tractar-la com a una aplicació caldria modificar la definició o els conjunts numèrics, en el sentit:
   $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = +\sqrt{x-3}$ o $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ / \ f(x) = \sqrt{x-3}$ o
   $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^- \ / \ f(x) = -\sqrt{x-3}$ o $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \left|\sqrt{x-3}\right|$.

11. TIPUS D'APLICACIONS

Considerem l'aplicació $f : X \longrightarrow Y$.

Definició 42. *Direm que f és una aplicació* ***injectiva*** *si a elements diferents corresponen imatges diferents.*

És a dir, f és injectiva si $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

També, direm que f és una aplicació ***injectiva*** *si dos elements tenen la mateixa imatge, és perquè són el mateix element.*

És a dir, f és injectiva si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

També, direm que f és una aplicació ***injectiva*** *quan tot element de la imatge té una única antiimatge.*

És a dir, f és injectiva si $\forall y \in im(f) \quad \exists! x \in X \ / \ f(x) = y$.

Definició 43. *Direm que f és una aplicació* ***suprajectiva*** *si tots els elements del conjunt final tenen antiimatge.*

És a dir, f és suprajectiva si $\forall y \in Y \quad \exists x \in X \ / \ f(x) = y$.

Aleshores, quan f siga suprajectiva $f(X) = Y = im(f)$.

Definició 44. *Direm que f és una aplicació* **bijectiva** *si és injectiva i suprajectiva a la vegada.*

També, direm que f és una aplicació **bijectiva** *si tots els elements del conjunt final tenen una única antiimatge.*

És a dir, f és bijectiva $\Leftrightarrow \forall y \in Y \quad \exists! x \in X \ / \ f(x) = y$.

Exercici 6. *Classifiqueu les aplicacions:*

1. $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = y = \dfrac{1}{x-1}$.
2. $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ / \ g(x) = y = \sqrt{x}$.
3. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ h(x) = y = x^2 + 1$.
4. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \varphi(x) = \dfrac{x+1}{2}$.
5. $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \omega(x) = y = x^2 + x$.
6. $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \psi(x) = y = 5x + 4$.

Demostració d'1 : $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = y = \dfrac{1}{x-1}$.

Injectiva: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
$f(x) = f(x') \longrightarrow \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x'-1} \longrightarrow x' - 1 = x - 1 \longrightarrow x' = x$.
Suprajectiva: $\forall y \in Y \quad \exists x \in X \ / \ f(x) = y$.
$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} - \{1\} \ / \ f(x) = y = \dfrac{1}{x-1}$.
$y = \dfrac{1}{x-1} \longrightarrow y(x-1) = 1 \longrightarrow yx - y = 1 \longrightarrow yx = y + 1 \longrightarrow x = \dfrac{y+1}{y}$.
Si $y = 0 \quad \nexists x$ aleshores f no és suprajectiva, ja que el element $y = 0$ no té antiimatge.

Demostració de 2 : $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ / \ g(x) = y = \sqrt{x}$.

Injectiva: $g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$.
$g(x) = g(x') \longrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x'} \longrightarrow x = x'$.
Suprajectiva: $\forall y \in Y \quad \exists x \in X \ / \ g(x) = y$.
$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ / \ g(x) = y = \sqrt{x}$.
Com $y \in \mathbb{R}^+ \rightarrow y = |\sqrt{x}| \rightarrow y^2 = x \in \mathbb{R}^+$.
$g(x) = y = \sqrt{x} \longrightarrow x = y^2$.
Com $y \in \mathbb{R}^+$, aleshores $\exists x \ / \ x \in \mathbb{R}^+$.
Per la qual cosa g és bijectiva.

Demostració de 3 : $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; h(x) = y = x^2 + 1$.

Injectiva: $h(x) = h(x') \Rightarrow x = x'$.

$$h(x) = h(x') \longrightarrow x^2 + 1 = (x')^2 + 1 \longrightarrow x^2 = (x')^2 \longrightarrow \begin{cases} x = x' & \vee \\ x = -x' & \vee \\ -x = x' & \vee \\ -x = -x' \end{cases}$$

Per la qual cosa h no seria injectiva.
Suprajectiva: $\forall y \in Y \quad \exists x \in X \;/\; h(x) = y$.
$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \;/\; h(x) = y = x^2 + 1$.
$y = x^2 + 1 \longrightarrow x^2 = y - 1 \longrightarrow x = \sqrt{y-1}$.
Quan $y \in \mathbb{R} \;/\; y < 1$, $\overline{\exists} x$. El que vol dir que h no és suprajectiva.

12. COMPOSICIÓ I INVERSA

Suposem $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ dues aplicacions.

Definició 45. *S'anomena* **composició** *de g amb f , ho llegirem g compost amb f i ho escriurem $g \circ f$ a una nova aplicació que ens passa del conjunt inicial X al final Z sense passar per l'intermedi Y.*
És a dir, $h = g \circ f : X \longrightarrow Z \;/\; h(x) = (g \circ f)(x) = g\,[f(x)] \quad \forall x \in X$.

Nota 7. *Per a poder calcular la composició, cal que $im(f) = dom(g)$.*

Exercici 7. *Trobeu $g \circ f$ i $f \circ g$.*

1. $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \;/\; f(x,y) = 2x^2 + 5y$.
   $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \;/\; g(x) = (3x + 5, x^2 + 1)$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = 2x + 1$.
   $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = x^2$.

Sol.:
$g \circ f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}./ \; (g \circ f)(x,y) = g\,[f(x,y)] = g(2x^2 + 5y) = (3(2x^2 + 5y) + 5 \;,\; (2x^2 + 5y)^2 + 1) = (6x^2 + 15y + 5 \;,\; 4x^4 + 20x^2y + 25y^2 + 1)$.
$f \circ g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \;/\; (f \circ g)(x) = f\,[g(x)] = f(3x+5, x^2+1) = 2(3x+5)^2 + 5(x^2+1) = 23x^2 + 60x + 55$.

Definició 46. *Suposem $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació. Suposem que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ siga també una aplicació. Definim* **aplicació inversa de** *f, i la representem per f^{-1}, aquella aplicació tal que si $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.*

Per trobar la inversa: 1) $x = \varphi(y)$ 2) Se canvia x per y.

Nota 8. *No sempre la inversa d'una aplicació és aplicació.*

Contraexemple: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2$, però $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no és aplicació. L'element 1 té dues antiimatges 1 i -1 ja que $f(1) = 1$ i $f(-1) = 1$. Així $f^{-1}(1) = \{1, -1\}$.

Nota 9. *Per a trobar la inversa seguirem dos passsos:* 1) $x = \varphi(y)$. 2) *Se canvia* x *per* y.

Teorema 2. f^{-1} *és aplicació* $\Leftrightarrow f$ *és bijectiva.*

Demost.:

Suposem $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicació.*

$\rightarrow$) *Suposem* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ *siga també una aplicació* $\overset{Def.}{\longrightarrow} \forall y \in Y, \exists! x \in X \ / \ f^{-1}(y) = x \longrightarrow \forall y \in Y \quad \exists! x \in X \ / \ y = f(x) \longrightarrow f$ *és bijectiva.*

$\leftarrow$) *Suposem* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicació bijectiva* $\longrightarrow \forall y \in Y \exists! x \in X \ / \ y = f(x) \longrightarrow \forall y \in Y \exists! x \in X \ / \ x = f^{-1}(y) \longrightarrow f^{-1}$ *és aplicació.*

Teorema 3. f *és bijectiva* $\Leftrightarrow f^{-1}$ *és bijectiva.*

Demost.:

Suposem $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicació.*

$\rightarrow$) $f : X \longrightarrow Y$ *bijectiva* $\longrightarrow f$ *és aplicació i* $f : X \longrightarrow Y$, *aleshores* $\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \ / \ f(x) = y \longrightarrow \forall x \in X \quad \exists! y \in Y \ / \ x = f^{-1}(y) \longrightarrow f^{-1}$ *és bijectiva (ja que* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$*).*

$\leftarrow$) *Si* f^{-1} *és bijectiva* $\longrightarrow f^{-1}$ *és aplicació i* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, *aleshores* $\forall y \in Y$ $\exists! x \in X \ / \ x = f^{-1}(y) \longrightarrow \forall y \in Y \quad \exists! x \in X \ / \ y = f(x) \longrightarrow f$ *és bijectiva.*

12.1. Propietats.

1. *La composició de dues aplicacions és una altra aplicació.*

   Demost.:

   Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions $\longrightarrow \forall x \in X \quad \exists! y \in Y \ / \ f(x) = y \wedge \forall y \in Y \quad \exists! z \in Z \ / \ g(y) = z \longrightarrow \forall x \in X \quad \exists! z \in Z \ / \ g[f(x)] = z \longrightarrow \forall x \in X \quad \exists! z \in Z \ / \ (g \circ f)(x) = z \longrightarrow g \circ f$ és aplicació.

2. *La composició d'aplicacions és associativa.*

   Demost.:

   Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ i $h : Z \longrightarrow W$ són tres aplicacions $\longrightarrow ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g[f(x)]] = h[(g \circ f)(x)] = (h \circ (g \circ f))(x) \ \forall x \in X \longrightarrow (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

3. *La composició d'aplicacions no és commutativa.*

   $g \circ f \neq f \circ g$ Contraexemple:

   Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \ / \ f(x) = x^2 + 2$ i $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \ / \ g(x) = 2x - 1$.

4. *La inversa de la inversa d'una aplicació coincideix amb ella mateixa.*

   És a dir, $(f^{-1})^{-1} = f$.

   Demost.:

   Si $f : X \longrightarrow Y$, sabem que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ no ha de ser necessàriament una aplicació, però sempre es verifica que $f^{-1}(y) = x$.

   Suposem $f(x) = y \quad (f^{-1})^{-1} : X \longrightarrow Y \;/\; ((f^{-1})^{-1})(x) = y$.

   Aleshores, $f(x) = ((f^{-1})^{-1})(x)\ \forall x \in X \longrightarrow f = (f^{-1})^{-1}$.

5. *La composició d'aplicacions injectives és una aplicació injectiva.*

   Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions injectives $\Rightarrow g \circ f$ és injectiva.

   En efecte:

   f injectiva$\longrightarrow$ Si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

   g injectiva$\longrightarrow$ Si $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$.

   Si $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x') \longrightarrow g\,[f(x)] = g\,[f(x')] \underset{g \text{ injectiva}}{\longrightarrow} f(x) = f(x') \underset{f \text{ injectiva}}{\longrightarrow} x = x'$.

6. *La composició d'aplicacions suprajectives és una aplicació suprajectiva.*

   Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions suprajectives $\Rightarrow g \circ f$ és suprajectiva.

   En efecte:

   f suprajectiva$\longrightarrow \forall y \in Y\ \ \exists x \in X \;/\; f(x) = y$.

   g suprajectiva$\longrightarrow \forall z \in Z\ \ \exists y \in Y \;/\; g(y) = z$.

   $\forall z \in Z\ \exists x \in X \;/\; (g \circ f)(x) = g\,[f(x)] = g(y) = z \longrightarrow g \circ f$ és suprajectiva.

7. *La composició d'aplicacions bijectives és una aplicació bijectiva.*

   Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions bijectives $\Rightarrow g \circ f$ és bijectiva.

   En efecte:

   f bijectiva$\longrightarrow \forall y \in Y\ \ \exists! x \in X \;/\; f(x) = y$.

   g bijectiva$\longrightarrow \forall z \in Z\ \ \exists! y \in Y \;/\; g(y) = z$.

   $\forall z \in Z\ \ \exists! x \in X \;/\; (g \circ f)(x) = z \longrightarrow g \circ f$ és bijectiva.

8. *La inversa de la composició de dues aplicacions bijectives és la composició de les inverses en ordre invertit.*

   És a dir, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X\,/\,R \arrow[r, "f*"'] & f(X) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Figure 14:

Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions bijectives.

En aplicar propietats anteriors, sabem que $(g \circ f)^{-1}$ és una aplicació tal que $(g \circ f)^{-1} : Z \longrightarrow X$.

Aleshores, $(g \circ f)^{-1}(z) = x$.

$g^{-1} : Z \longrightarrow Y$ i $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ són dues aplicacions , aleshores

$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}\left[g^{-1}(z)\right] = f^{-1}(y) = x$.

Per la qual cosa, $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)\ \forall z \in Z \longrightarrow (g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$.

9. *La composició d'una aplicació amb la identitat és la mateixa aplicació.*

10. *La composició d'una aplicació amb la seua inversa és l'aplicació identitat.*

    Les demostracions com a exercici.

13. DESCOMPOSICIÓ CANÒNICA D'UNA APLICACIÓ

Teorema 4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ / f és una aplicació $\Rightarrow \exists!\ f^*$ aplicació bijectiva tal que el diagrama adjunt és commutatiu (fig 14).*

És a dir $f = i \circ f^* \circ \pi$ on π és la projecció canònica i i és la injecció canònica.

Demost.:

En el conjunt X, definim una relació binària $\Re$ i demostrarem que és d'equivalència.

Dos elements de X estan relacionats si, i sols si, tenen la mateixa imatge per f. És a dir,

$$x \Re x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Demostrem que $\Re$ és una RBE.

i) *Reflexiva* $x \Re x \quad \forall x \in X$ ja que $f(x) = f(x) \quad \forall x \in X$.

ii) *Simètrica* Si $x\Re x' \to x'\Re x$.
Si $x\Re x' \to f(x) = f(x') \leftrightarrow f(x') = f(x) \to x'\Re x$.
iii) *Transitiva* $x\Re x' \wedge x'\Re x'' \to x\Re x''$.
$x\Re x' \to f(x) = f(x')$.
$x'\Re x'' \to f(x') = f(x'')$.
Aleshores $f(x) = f(x'') \longrightarrow x\Re x''$.
Per la qual cosa, en ser la relació $\Re$ d'equivalència ens engendra un conjunt quocient $X/\Re = \{[x] \ / \ x \in X\}$.

L'aplicació $\pi : X \longrightarrow X/\Re \ / \ \pi(x) = [x]$ s'anomena **projecció canònica.** Demostrarem que és suprajectiva. En efecte:
$\forall [y] \in X/\Re \quad \exists x \in X \ / \ \pi(x) = [y]$ És suficient agafar $x = y$ ja que $y \in [y]$ i obtenim $\forall [y] \in X/\Re \quad \exists x \in X \ / \ \pi(x) = [x] = [y]$.

Nota 10. *π no és injectiva, ja que $\exists x' \in X \ / \ x \neq x' \ / \ x\Re x' \longrightarrow \pi(x) = [x] = [x'] = \pi(x')$.*

L'aplicació $i : f(X) \longrightarrow Y \ / \ i(f(x)) = f(x)$ s'anomena **injecció canònica.** Demostrarem que és injectiva. En efecte:
$i(m) = i(m') \longrightarrow m = m'$ sent $m, m' \in f(X)$.
$m \in f(X) \longrightarrow \exists x \in X \ / \ m = f(x)$.
$m' \in f(X) \longrightarrow \exists x' \in X \ / \ m' = f(x')$.
$i(m) = i(m') \longrightarrow i(f(x)) = i(f(x')) \longrightarrow f(x) = f(x') \longrightarrow m = m'$.

Nota 11. *i no és suprajectiva, ja que poden haver elements de Y que no tinguen antiimatge.*

Dividirem la demostració en quatre apartats:

1. Definim $f^* : X/\Re \longrightarrow f(X) \ / \ f^*([x]) = f(x)$.

   Cal veure l'*existència de l'aplicació f^**.

   És a dir, f^*està ben definida (independència del representant elegit).

   Suposem $[x] = [x']$ i cal demostrar que $f^*([x]) = f^*([x'])$.

   Si $[x] = [x'] \longleftrightarrow x\Re x' \longleftrightarrow f(x) = f(x') \longleftrightarrow f^*([x]) = f^*([x'])$.

2. *Diagrama commutatiu.*

   És a dir, $f = i \circ f^* \circ \pi$.

   $(i \circ f^* \circ \pi)(x) = (i \circ f^*)(\pi(x)) = (i \circ f^*)([x]) = i(f^*([x])) = i(f(x)) = f(x)$

   $\forall x \in X$.

3. *Unicitat de f^*.*
Suposem $\exists f_1^* \ / \ f = i \circ f_1^* \circ \pi$. Demostrarem que $f_1^* = f^*$.
$f(x) = (i \circ f_1^* \circ \pi)(x) = (i \circ f_1^*)(\pi(x)) = (i \circ f_1^*)([x]) = i(f_1^*([x])) = f_1^*([x])$.
$f(x) = (i \circ f^* \circ \pi)(x) = (i \circ f^*)(\pi(x)) = (i \circ f^*)([x]) = i(f^*([x])) = f^*([x])$.
És a dir, $f_1^*([x]) = f^*([x]) \quad \forall [x] \in X/\Re$, el que vol dir que $f_1^* = f^*$.

4. *f^* és bijectiva.*
Injectiva: Si $f^*([x]) = f^*([x']) \longrightarrow [x] = [x']$.
$f^*([x]) = f^*([x']) \longrightarrow f(x) = f(x') \longrightarrow x\Re x' \longrightarrow [x] = [x']$.
Suprajectiva: $\forall y \in f(X) \quad \exists [x] \in X/\Re \ / \ f^*([x]) = y$.
Com que $y \in f(X)\ \forall y \longrightarrow \exists x \in X \ / \ f(x) = y \underset{Def.\ de\ f^*}{\longrightarrow} f^*([x]) = y$.

Exercici 8. *Donada l'aplicació $f : X \longrightarrow Y \ / \ f(x) = y = x^2$ sent $X = \{-2,-1,0,1,2\}$ $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$. Trobeu la seua descomposició canònica.*

14. HOMOMORFISME D'ORDRE

Definició 47. *Si $(X,\Re)$ i $(Y,\Re')$ són dos conjunts ordenats, direm que l'aplicació $f : X \longrightarrow Y$ és un **homomorfisme** (o conserva l'ordre) si*
$x\Re x' \Rightarrow f(x)\Re' f(x') \quad \forall x \in X \ , \ \forall x' \in X$.

Definició 48. *Si $(X,\Re)$ i $(Y,\Re')$ són dos conjunts ordenats, direm que l'aplicació $f : X \longrightarrow Y$ és un **isomorfisme** (igual forma) si l'aplicació f és bijectiva i a més a més f i f^{-1} conserven l'ordre. Se representa per $(X,\Re) \simeq (Y,\Re')$.*
És a dir, $(X,\Re) \simeq (Y,\Re')$ si, i sols si, $\exists f : X \longrightarrow Y$ bijectiva / $x\Re x' \Leftrightarrow f(x)\Re' f(x') \quad \forall x \in X \ , \ \forall x' \in X$.

Exercici 9. *Si $X = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ $Y = \{1,2,3,6,9,18,27,54\}$ Suposem $\Re$ la relació x divideix y (x/y) Si $f : X \longrightarrow Y$ és una aplicació definida per:*

$f(1) = 1,\ f(3) = 2,\ f(2) = 3,\ f(6) = 6,\ f(4) = 9,\ f(12) = 18,\ f(8) = 27,\ f(24) = 54.$

Comproveu que és un isomorfisme entre els conjunts ordenats $(X,/)$ i $(Y,/)$. (fig. 15).

15. NUMERABILITAT.CARDINALS

Definició 49. *Un conjunt A és **equipotent (o coordinable)** amb un altre conjunt B si, i sols si, es pot definir una aplicació bijectiva entre ells.*
És a dir, $A \simeq B \Leftrightarrow \exists f : A \longrightarrow B$ f bijectiva.

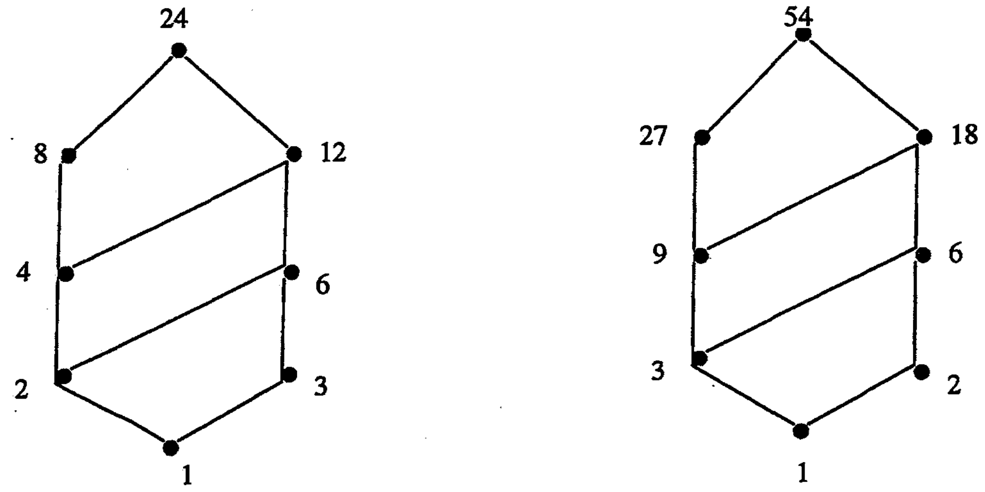


Figure 15:

Per exemple: si tots els seients de la classe estigueren ocupats per estudiants, els dos conjunts serien equipotents. No ho serien el conjunt dels jugadors de bàsquet i el conjunt dels jugadors de futbol.

Proposició 7. *La relació d'equipotència és una RBE.*

Per la qual cosa aquesta relació origina una classificació on cada classe d'equivalència estarà formada per tots els conjunts equipotents.

Definició 50. *Anomenem* **cardinal** *d'un conjunt finit, el nombre d'elements que té.*

Així, $A \simeq B \Leftrightarrow card(A) = card(B)$.

Nota 12.

1. $card(\phi) = 0$, $card(\{\phi\}) = 1$, $card(\{\phi, \{\phi\}\}) = 2$, $card(\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}) = 3, \ldots$
2. *A és un conjunt finit si* $\exists n \in \mathbb{N} \;/\; A \simeq I_n$ *sent* $I_n = \{0, 1, 2, \ldots n-1\}$. *Aleshores* $card(A) = card(I_n) = n$.
3. *Si A no és finit, direm que A és un conjunt infinit.*
4. *Cal recordar que* $\mathbb{N}$ *és el conjunt de tots els cardinals finits, però* $\mathbb{N}$ *és infinit.*

   $(\mathbb{N}= \{[0], [1], [2], \ldots\})$,*sent* $0 \in [0], 1 \in [1], 2 \in [2], \ldots$

   $card(\mathbb{N}) = número\ transfinit = \chi_0\,(alef\ \ zero)$.
5. *Com que la relació* $\simeq$ *és d'equivalència, associem un cardinal a cada classe d'equi-valència.*

6. *Si* $card(A) = a$ *i* $card(B) = b$, *definim* $a \leq b \Leftrightarrow \exists f : A \longrightarrow B \ / \ f$ *injectiva.*

7. $\mathbb{R}$ *és un conjunt infinit, però*

   $card(\mathbb{R}) = card(]0,1[) = card([0,1]) =$ *card. de qualsevol interval de* $\mathbb{R}$.

   Al $card(\mathbb{R}) = \chi_1$*(alef un). Es pot demostrar que* $\chi_0 < \chi_1$.

   També es diu que $\mathbb{R}$ *té la potència del continu.*

8. $\mathbb{Z}$ *i* $\mathbb{Q}$ *són numerables.* $\mathbb{R}$ *no és numerable (La demostració com a exercici al final del tema).*

Definició 51. *Un conjunt* A *es diu que és* **numerable** *si, i sols si, és equipotent a* $\mathbb{N}$.

És a dir, A és **numerable** $\Leftrightarrow \exists f : A \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ f$ *bijectiva.*

Teorema 5. *Caracterització dels conjunts infinits.*
A és infinit si, i sols si, és equipotent a algunas de les seues parts pròpies.
És a dir, A *és infinit* $\Leftrightarrow \exists B \subset A \ / \ B$ *és numerable.*
Aquest teorema no el demostrarem, però veurem uns exercicis.

Exercici 10. $\mathbb{N}$ *és infinit.*
En efecte, si $B = \{0,1,4,9,16,25,\ldots\} = \{x \ / \ x = n^2, \ n \in \mathbb{N}\}$.
És evident que $B \subset \mathbb{N}$.
En definir $f : \mathbb{N} \longrightarrow B \ / \ f(n) = n^2$, es pot demostrar que f és bijectiva.

Exercici 11. $\mathbb{N}$ *és infinit.*
En efecte, si $B = \{0,2,4,6,8,10,\ldots\} = \{x \ / \ x = 2n, \ n \in \mathbb{N}\}$
És evident que $B \subset \mathbb{N}$
En definir $f : \mathbb{N} \longrightarrow B \ / \ f(n) = 2n$, es pot demostrar que f és bijectiva.
També, en definir $f : B \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ f(x) = \dfrac{x}{2}$, es pot demostrar que f és bijectiva.

Exercici 12. $\mathbb{N}$ *és infinit.*
En efecte, si $B = \{1,3,5,7,9,11,\ldots\} = \{x \ / \ x = 2n+1, \ n \in \mathbb{N}\}$
És evident que $B \subset \mathbb{N}$.
En definir $f : \mathbb{N} \longrightarrow B \ / \ f(n) = 2n+1$, es pot demostrar que f és bijectiva.
També, en definir $f : B \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ f(x) = \dfrac{x-1}{2}$, es pot demostrar que f és bijectiva.

Proposició 8. *Si* A *i* B *són numerables* $\Rightarrow A \cup B$ *són numerables.*

Definició 52. *Si* A *i* B *són finits i* $card(A) = a$ *i* $card(B) = b$.
Definim $a + b = card(A \cup B)$ *si* $A \cap B = \phi$.
Definim $a \cdot b = card(A \times B)$.
Definim $a^b = card(A^B)$ *sent* $A^B = \{f : A \longrightarrow B \ / \ f \text{ aplicació}\}$.

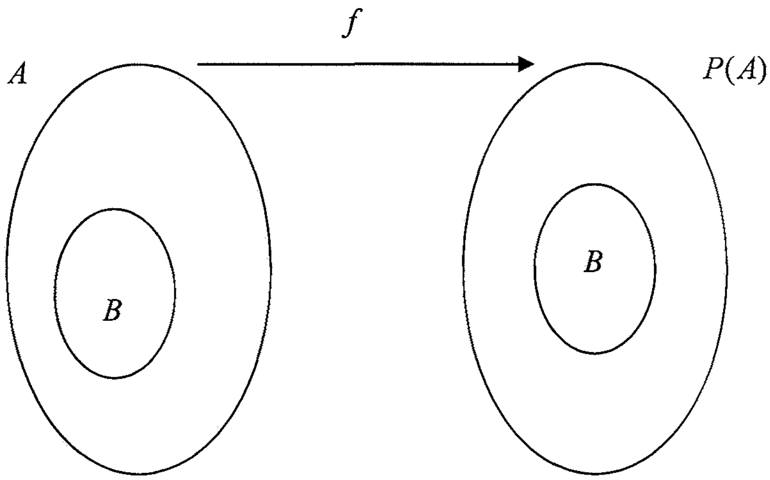


Figure 16:

16. TEOREMA DE CANTOR

$\forall A \Rightarrow card(A) < card(P(A))$ ($\nexists$ *bijecció entre A i $P(A)$*).

És a dir, qualsevol siga el cardinal d'un conjunt, sempre existirà un altre superior.

Demost.:

Si A és finit, la demostració és trivial ja que:

En suposar que $A = \phi \longrightarrow card(\phi) = 0$ i $card(P(\phi)) = 1$.

En suposar que $card(A) = n \in \mathbb{N} \longrightarrow card(P(A)) = 2^{card(A)} = 2^n$ i $n < 2^n$.

Si A és infinit, l'aplicació $\varphi : A \longrightarrow P(A)$ / $\varphi(a) = \{a\}$ és evidentment una aplicació injectiva (ja que si $a \neq a' \longrightarrow \{a\} \neq \{a'\} \longrightarrow \varphi(a) \neq \varphi(a')$).

Per la qual cosa, en aplicar la nota .... $card(A) \leq card(P(A))$.

Vegem que $card(A) \neq card(P(A))$.

Per R.A., suposem que $\exists f : A \longrightarrow P(A)$ / f *bijectiva*.

Considerem $B \subset A$ / $B = \{a \in A \ / \ a \notin f(a)\} \subset A$. Vegeu la fig. 16.

Com $B \subset A \underset{Def.\ P(A)}{\longrightarrow} B \in P(A) \underset{f\ bijectiva}{\longrightarrow} \exists! a' \in A \ / \ f(a') = B$.

Si ens donen a' $\forall a' \in A \longrightarrow a' \in B \veebar a' \notin B$.

Si $a' \in B \longrightarrow a' \notin f(a') = B \longrightarrow$ *absurde* ja que $a' \in B \wedge a' \notin B$.

Si $a' \notin B \longrightarrow a' \in f(a') = B \longrightarrow$ *absurde* ja que $a' \notin B \wedge a' \in B$.

Per la qual cosa $card(A) < card(P(A))$.

Exercici 13. *Demostreu que $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ són numerables. $\mathbb{R}$ no és numerable.*

I) $\mathbb{Z}$ és numerable. El veurem de tres maneres:

i) Definim $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ / $f(x) = |x| = (x \text{ si } x \geq 0 \quad \vee \quad -x \text{ si } x < 0)$ Caldrà demostrar que f és bijectiva.

a) Injectiva. Si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

$f(x) = f(x') \longrightarrow |x| = |x'|$.

Si $x \geq 0 \longrightarrow f(x) = x,\ f(x') = x' \longrightarrow x = x'$.

Si $x < 0 \longrightarrow f(x) = -x,\ f(x') = -x' \longrightarrow -x = -x' \longrightarrow x = x'$.

b) Suprajectiva. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{Z}\ /\ f(x) = n$.

Si $f(x) = n$ i $x \geq 0$ És suficient agafar $x = n$ ja que $x \geq 0$ per ser $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \mathbb{N}$.

Si $f(x) = n$ i $x < 0$ És suficient agafar $x = -n$ ja que $-n > 0$ i $-n \in \mathbb{N}$

ii) Definim $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\ /\ g(x) = \left(\frac{x}{2} \text{ si } x = 2n,\ n \in \mathbb{N} \vee -\frac{x+1}{2} \text{ si } x = 2n+1,\ n \in \mathbb{N} \right)$.

a) Injectiva. Si $g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$.

Si $x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\quad g(x) = g(x') \longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x'}{2} \longrightarrow x = x'$.

Si $x = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}\quad g(x) = g(x') \longrightarrow -\frac{x+1}{2} = -\frac{x'+1}{2} \longrightarrow x = x'$.

b) Suprajectiva. $\forall y \in \mathbb{Z},\ \exists x \in \mathbb{N}\ /\ g(x) = y$.

Suposem $y \in \mathbb{Z}\ /\ y \geq 0$ Si $g(x) = y \longrightarrow \frac{x}{2} = y \longrightarrow x = 2y \longrightarrow x \in \mathbb{N}$ i x és par

Suposem $y \in \mathbb{Z}\ /\ y < 0$ Si $g(x) = y \longrightarrow -\frac{x+1}{2} = y \longrightarrow x = -(2y+1) \in \mathbb{N}$ ja que $y < 0$ i $y \neq 0 \longrightarrow 2y+1 < 0 \longrightarrow -(2y+1) > 0$.

iii) Definim $r : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\ /\ r(x) = x$.

Definim $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^-\ /\ s(x) = -x-1$.

Es pot demostrar que r i s són bijectives. Per la qual cosa, $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \wedge \mathbb{Z}^-$són numerables. Com $\mathbb{Z}$=$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$ és numerable per ser la unió de dos conjunts numerables.

II) $\mathbb{Q}$ és numerable.

Per la construcció de $\mathbb{Q}$, sabem que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ ja que en definir en el conjunt $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ la relació $\Re\ /\ (a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow ab' = ba'$ és una RBE.

El conjunt quocient és $\mathbb{Q}$.

És a dir, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\Re = \{[(a,b)]\ /\ (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\}$.

Així, $(a,b) = \frac{a}{b}$ amb $b \neq 0$ tal que $[(a,b)] = \left[\frac{a}{b}\right]$.

$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right] \Leftrightarrow ab' = ba'$.

Com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \longrightarrow card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)$ ja que podrem definir l'aplicació $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\ /\ f(\frac{a}{b}) = (a,b)$ que és injectiva.

Com $\mathbb{Z}$ és numerable$\longrightarrow$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ és numerable

Nota: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Com $card(\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ ) = card(\mathbb{N}\ )$ja que l'aplicació

$\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\ /\ \varphi(a,b) = |a-b|$ és bijectiva, obtindrem:

$card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*) \leq card(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = card(\mathbb{N}) \longrightarrow card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{N})$ (1).

Però obviament $card(\mathbb{N}) \leq card(\mathbb{Q})$ (2) ja que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

De (1) i (2) $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Q})$, el que vol dir que $\mathbb{Q}$ és numerable.

III) $\mathbb{R}$ no és numerable.

Com $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \longrightarrow card(\mathbb{N}) \leq card(\mathbb{R})$.

Com $\mathbb{R} \simeq [0,1]$ Definim $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ /
$\psi(0) = 0'a_{01}a_{02}\ldots a_{0n}\ldots a_{0m}\ldots = x_0$.
$\psi(1) = 0'a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots a_{1m}\ldots = x_1$.
$\psi(2) = 0'a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots a_{2m}\ldots = x_2$.
$\vdots$
$\psi(n) = 0'a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots a_{nm}\ldots = x_n$.

(Aquests nombres reals de l'interval $[0,1]$, queden expressats en forma decimal il·limitada, de tal manera que si

fóra $\frac{7}{20} = 0'35$, posaríem 0'3499999...).

Òbviament $\{x_n \quad n \in \mathbb{N}\} = [0,1]$ on $a_{ni} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Caldrà demostrar que ψ no és suprajectiva (ja que no seria bijectiva)

En efecte:

ψ no serà suprajectiva si $\exists y \in [0,1] \ / \ \overline{\exists}\psi^{-1}(y)$.

Siga $y = 0'b_1b_2\ldots b_n\ldots b_m\ldots$ on

$(b_i = a_{ii} - 1 \text{ si } a_{ii} = 9 \quad \wedge \quad b_i = a_{ii} + 1 \text{ si } a_{ii} \neq 9)$.

Aquest número $y \in [0,1]$, però no és cap dels $\psi(0), \psi(1), \psi(2), \ldots \psi(i), \ldots \psi(n)$ ja que tenen distinta, almenys, la xifra que ocupa el lloc n (és a dir $\psi(n) \neq y \ \ \forall n$).

Per exemple, si suposem que $\psi(3) = 0'2879548997\ldots$ agafaríem $y = 0'2889548997\ldots$

Per la qual cosa $\mathbb{R}$ no és numerable.

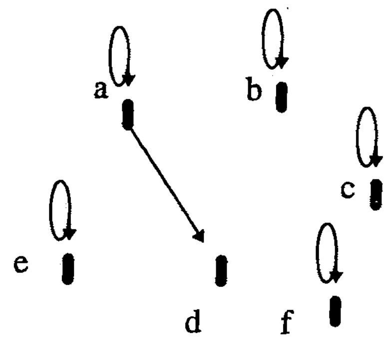


Figure 1:

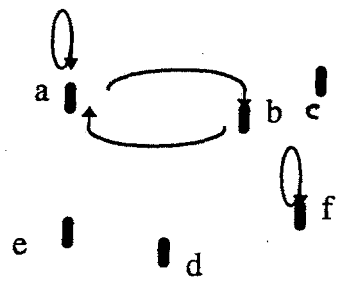


Figure 2:

PROBLEMES TEMA 4 RELACIONS, FUNCIONS, APLICACIONS

1. Donat $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, estudieu les propietats de les següents relacions en X:

   i) $\Re = \{(a,a),(b,b),(c,c),(f,f),(a,d)\}$. ii) $\Re = \{(a,a),(a,b),(b,a),(f,f)\}$.

   iii) $\Re = \{(a,b),(b,c),(a,c),(f,f),(f,e\}$. iv) $\Re = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

   Sol.: i) Antisimètrica (absència de parell boomerang). Transitiva ($\Re \circ \Re \subset \Re$).Vegeu la fig.1.

   ii) Simètrica (absència de parell unilateral). Vegeu la fig.2.

   iii) Antisimètrica. Transitiva. Vegeu la fig.3.

   iv) Simètrica. Transitiva. Vegeu la fig.4.

2. Estudieu les propietats de les següents relacions:

   i) En $\mathbb{N}$, $x\Re y \iff x \leq y$. ii) En $\mathbb{N}$, $x\Re y \iff x + y = 40$.

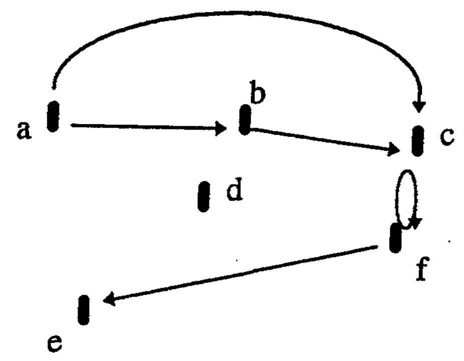


Figure 3:

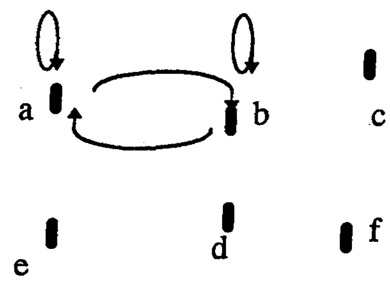


Figure 4:

iii) En $\mathbb{N}$, $x\Re y \iff x, y$ són primers entres ells. iv) En $\mathbb{Z}$, $x\Re y \iff x/y$.

v) En $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x,y)\Re(x',y') \iff x+y'=x'+y$.

Sol.:

i) En $\mathbb{N}$, $x\Re y \iff x \leq y$ *sii* (def) $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ x+n=y$.

Reflexiva: $x \leq x \ \forall x$. Es compleix ja que $\exists n = 0 \in \mathbb{N} \ / \ x+0=x$.

Antisimètricà: $x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x=y$.

$\left.\begin{array}{l} x \leq y \to \exists n \in \mathbb{N} \ / \ x+n=y. \\ y \leq x \to \exists m \in \mathbb{N} \ / \ y+m=x. \end{array}\right\} \to (x+n)+m=x \to x+(m+n)=x \to$
$m+n=0 \to m=n=0$, ja que $n,m \in \mathbb{N}$.

Si $n=0 \to x=y$. Si $m=0 \to y=x$.

Transitiva: $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

$\left.\begin{array}{l} x \leq y \to \exists n \in \mathbb{N} \ / \ x+n=y. \\ y \leq z \to \exists m \in \mathbb{N} \ / \ y+m=z. \end{array}\right\} \to (x+n)+m=z \to x+(m+n)=z \to$
$x+p=z \to x \leq z$, on $m+n=p$, ja que $n,m \in \mathbb{N}$.

Connexa: $\forall x \neq y \ / \ x,y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$.

Si $x \neq y$, suposem $x<y$, aleshores $x \leq y$.

Si $x \neq y$, suposem $y<x$, aleshores $y \leq x$.

Per la qual cosa, la relació anterior és una relació binària d'ordre total. $(\mathbb{N}, \leq)$ és totalment ordenat.

ii) En $\mathbb{N}$, $x\Re y \iff x+y=40$, on $x,y \in \mathbb{N}$.

Reflexiva: $x\Re x \ \forall x$. No es compleix ja que $\exists 2 \in \mathbb{N} \ / \ 2\overline{\Re}2$, $(2+2 \neq 40)$.

Simètrica: Si $x\Re y \Rightarrow y\Re x$.

$x\Re y \to x+y=40 \to y+x=40 \to y\Re x$.

Transitiva: $x\Re y \wedge y\Re z \to x\Re z$.

$\left.\begin{array}{l} x\Re y \to x+y=40. \\ y\Re z \to y+z=40. \end{array}\right\} \to x+2y+z=80 \to x+z=80-2y \to x+z \neq 40.$

No compleix la propietat transitiva.

Tampoc compleix la propietat connexa, ja que $\exists 3 \in \mathbb{N} \wedge \exists 5 \in \mathbb{N} \ / \ 3\overline{\Re}5 \wedge 5\overline{\Re}3$.

iii) En $\mathbb{N}$, $x\Re y \iff x,y$ són primers entres ells *sii* (def) $m.c.d.(x,y)=1$.

Reflexiva: $x\Re x \ \forall x$. No es compleix ja que $\exists 2 \in \mathbb{N} \ / \ m.c.d.(2,2)=2 \neq 1$.

Simètrica: Si $x\Re y \Rightarrow y\Re x$.

Si $x\Re y \to m.c.d.(x,y)=1 \to m.c.d.(y,x)=1 \to y\Re x$.

Transitiva: $x\Re y \wedge y\Re z \to x\Re z$.

$$\left.\begin{array}{l} x\Re y \rightarrow m.c.d.(x,y)=1. \\ y\Re z \rightarrow m.c.d.(y,z)=1. \end{array}\right\} \nrightarrow m.c.d.(x,z)=1.$$

Contraexemple: Si $x=2$, $y=3$, $z=4 \rightarrow 2\Re 3, 3\Re 4$, però $2\overline{\Re}4$

No compleix la propietat transitiva.

Tampoc compleix la propietat connexa, ja que $\exists 3 \in \mathbb{N} \wedge \exists 6 \in \mathbb{N}\ /\ 3\overline{\Re}6 \wedge 6\overline{\Re}3$.

iv) En $\mathbb{Z}$, $x\Re y \Longleftrightarrow x/y\ sii(def)\ \exists n \in \mathbb{Z}\ /\ y=nx$, on $x,y \in \mathbb{Z}$.

Reflexiva: $x/x\ \forall x$. Es compleix ja que $\exists 1 \in \mathbb{N}\ /\ x=1x\ \forall x$.

Antisimètrica: x/y i $y/x \Rightarrow x=y$.

$$\left.\begin{array}{l} x/y \rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\ /\ y=nx. \\ y/x \rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}\ /\ x=my. \end{array}\right\} \rightarrow yx=(nx)(my)=nmxy=nmyx \rightarrow nm=1.$$

Com que $n,m \in \mathbb{Z} \rightarrow nm=1 \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=m=1. \\ n=m=-1. \end{array}\right.$

Si $n=-1 \rightarrow y=-x$.

Per la qual cosa, no es compleix la propietat antisimètrica en $\mathbb{Z}$.

Transitiva: x/y i $y/z \Rightarrow x/z$.

$$\left.\begin{array}{l} x/y \rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\ /\ y=nx. \\ y/z \rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}\ /\ z=my. \end{array}\right\} \rightarrow z=m(nx)=(mn)x=px \rightarrow x/z, \text{ on } mn=p,$$
ja que $n,m \in \mathbb{Z}$.

Per la qual cosa $(\mathbb{Z},/)$ és un preordre.

v) En $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x,y)\Re(x',y') \Longleftrightarrow x+y'=x'+y$.

Reflexiva: $(x,y)\Re(x,y)\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Com que $x+y=y+x \rightarrow (x,y)\Re(x,y)\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, es compleix la propietat reflexiva.

Simètrica: Si $(x,y)\Re(x',y') \Rightarrow (x',y')\Re(x,y)$.

Si $(x,y)\Re(x',y') \rightarrow x+y'=x'+y \rightarrow x'+y=x+y' \rightarrow (x',y')\Re(x,y)$.

Transitiva: $(x,y)\Re(x',y') \wedge (x',y')\Re(x'',y'') \Rightarrow (x,y)\Re(x'',y'')$.

$$\left.\begin{array}{l} (x,y)\Re(x',y') \rightarrow x+y'=x'+y. \\ (x',y')\Re(x'',y'') \rightarrow x'+y''=x''+y'. \end{array}\right\} \rightarrow (x+y')+(x'+y'')=(x'+y)+$$
$(x''+y') \rightarrow x+y''=x''+y \rightarrow (x,y)\Re(x'',y'')$.

Així, doncs, $\Re$ és una relació binària d'equivalència en el conjunt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

3. Estudieu les propietats: De la fig.5. No reflexiva, no simètrica, antisimètrica, transitiva.

   De la fig. 6. No reflexiva, no simètrica, no antisimètrica, no transitiva.

   De la fig. 7. No reflexiva, no simètrica, antisimètrica, no transitiva.

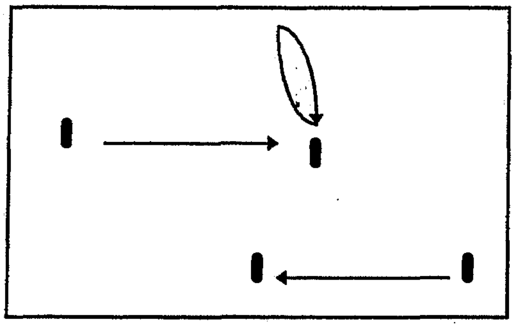


Figure 5:

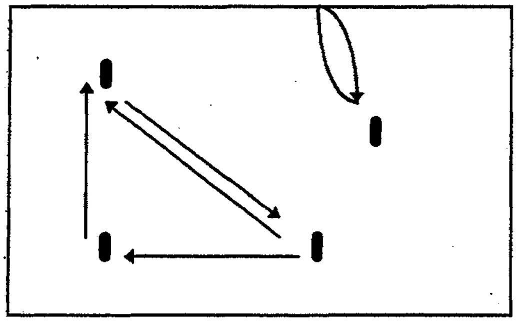


Figure 6:

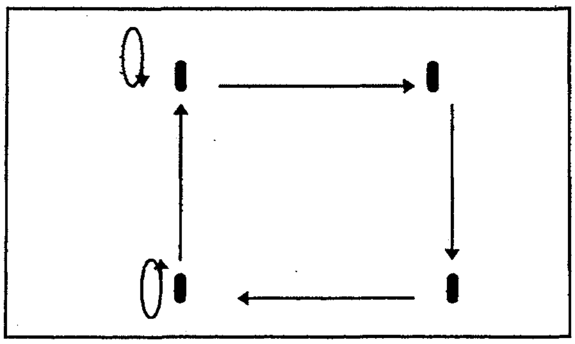


Figure 7:

4. En el conjunt $\mathbb{Z}$, definim $x\Re y \iff x^2 - y^2 = x - y$.

   i) Proveu que $\Re$ és una relació binària d'equivalència en $\mathbb{Z}$.

   ii) Determineu la classe d'equivalència de l'element $a \in \mathbb{Z}$.

   Sol.:

   i) Reflexiva: $x\Re x\ \forall x$, ja que $x^2 - x^2 = x - x$.

   Simètrica $x\Re y \Rightarrow y\Re x\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$. En efecte, $x\Re y \to x^2 - y^2 = x - y \to (-1)(x^2 - y^2) = (-1)(x - y) \to y^2 - x^2 = y - x \to y\Re x$.

   Transitiva: $x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

   $$\left.\begin{array}{l} x\Re y \to x^2 - y^2 = x - y. \\ y\Re z \to y^2 - z^2 = y - z. \end{array}\right\} \to x^2 - z^2 = x - z \to x\Re z.$$

   ii) $[a] = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x\Re a\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 - a^2 = x - a\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 - x + a - a^2 = 0\} = \{a,\ 1 - a\}$.

5. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim: $(x, y)\Re(z, t) \iff x^2 + y^2 = z^2 + t^2$.

   i) Proveu que $\Re$ és una relació binària d'equivalència en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   ii) Trobeu gràficament el conjunt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\Re$.

   Sol.:

   i) Reflexiva: $(x, y)\Re(x, y) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   En efecte, $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \to (x, y)\Re(x, y) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   Simètrica: $(x, y)\Re(z, t) \to (z, t)\Re(x, y) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall(z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   $(x, y)\Re(z, t) \to x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \to z^2 + t^2 = x^2 + y^2 \to (z, t)\Re(x, y)$.

   Transitiva: $(x, y)\Re(z, t) \wedge (z, t)\Re(u, v) \to (x, y)\Re(u, v) \quad \forall(x, y), (z, t), (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   $$\left.\begin{array}{l} (x, y)\Re(z, t) \to x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \\ (z, t)\Re(u, v) \to z^2 + t^2 = u^2 + v^2 \end{array}\right\} \to x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \to (x, y)\Re(u, v).$$

   ii) $[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (x, y)\Re(a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x^2 + y^2 = a^2 + b^2\} =$

   $=$ Circumferència de centre $(0, 0)$ i radi $\sqrt{a^2 + b^2}$.

   Per la qual cosa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\Re = \{$ *Circumferències de centre* $(0, 0)\}$.

6. Una relació $\Re$ en X es diu circular si $\forall a, b, c \in X, \quad a\Re b \wedge b\Re c \longrightarrow c\Re a$.

   Demostreu:

   i) Tota relació binària d'equivalència és circular.

   ii) Si una relació és reflexiva i circular, aleshores és una relació binària d'equivalència.

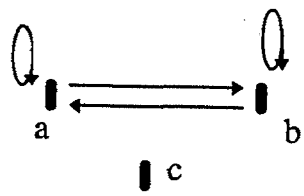


Figure 8:

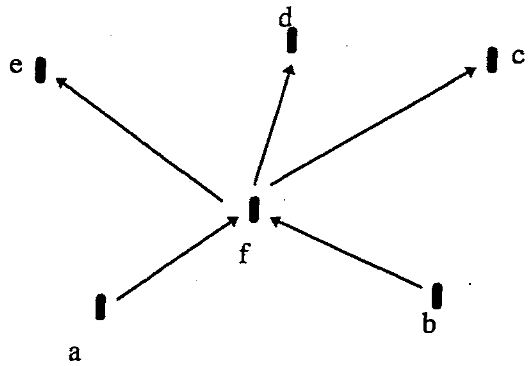


Figure 9:

iii) Si una relació és simètrica i circular, no necessàriament és una relació binària d'equivalència.

Sol.:

i) $\forall\ \mathfrak{R}$ relació binària d'equivalència, si $a\mathfrak{R}b \wedge b\mathfrak{R}c \overset{Trans.}{\longrightarrow} a\mathfrak{R}c \overset{Simètr.}{\longrightarrow} c\mathfrak{R}a$.

ii) Reflexiva, per hipòtesi.

Simètrica: $a\mathfrak{R}b \to b\mathfrak{R}a$. En efecte, $a\mathfrak{R}b \wedge b\mathfrak{R}b(reflexiva) \overset{Circular}{\longrightarrow} b\mathfrak{R}a$.

Transitiva: $a\mathfrak{R}b \wedge b\mathfrak{R}c \to a\mathfrak{R}c$. En efecte, $a\mathfrak{R}b \wedge b\mathfrak{R}c \overset{Circular}{\longrightarrow} c\mathfrak{R}a$.

$c\mathfrak{R}a \wedge a\mathfrak{R}a(reflexiva) \overset{Circular}{\longrightarrow} a\mathfrak{R}c$.

iii) Cal veure la fig. 8.

7. Siga $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ un conjunt ordenat pel següent diagrama de Hasse (fig. 9).

   Trobeu: i) Els parells (x, y) tals que $x \leq y$.

   ii) Els subconjunts de tres elements totalment ordenats.

   iii) Màxim, mínim, maximals i minimals, si existeixen.

iv) Els elements notables dels subconjunts d'X : $A = \{a,b,f\}$, $B = \{a,c,f\}$.

Sol.: i) $\left\{ \begin{array}{c} (a,f),(b,f),(f,c),(f,d),(f,e),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,d),(a,e), \\ ,(a,c),(b,c),(b,d),(b,e) \end{array} \right\}$

ii) $\{a,f,e\}, \{a,f,d\}, \{a,f,c\}, \{b,f,e\}, \{b,f,d\}, \{b,f,c\}$.

iii) No existeix màxim ni mínim. Maximals són e,d,c. Minimals són a,b.

iv) $A = \{a,b,f\} \subset X$. No existeix cota inferior. Cota superior: e,d,c,f. Suprem: f. No existeix mínim. Màxim: f. Minimal: a,b. Maximal: f.

$B = \{a,c,f\} \subset X$. Cota inferior: a. Cota superior: c. Ínfim: a. Suprem: c. Mínim: a. Màxim: c. Minimal: a. Maximal: c.

8. Siga $X = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 1 \le x \le 12\}$ i la relació $x\Re y \Longleftrightarrow x \in \dot{y}$.

   i) Demostreu que $\Re$ és una relació binària d'ordre parcial.

   ii) Dibuixeu el diagrama de Hasse.

   iii) Trobeu els elements notables d'X i de $B = \{3,4,6\}$.

   Sol.: $x\Re y \Longleftrightarrow x \in \dot{y} \underset{def.}{\leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} \ / \ x = ny.$

   Reflexiva: $x\Re x \ \forall x$, perquè $x \in \dot{x}$, ja que $\exists 1 \in \mathbb{N} \ / \ x = 1x$.

   Antisimètrica: $x\Re y \ \wedge y\Re x \Rightarrow x = y$.

   $$\left. \begin{array}{l} x\Re y \Longleftrightarrow x \in \dot{y} \underset{def.}{\leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} \ / \ x = ny. \\ y\Re x \Longleftrightarrow y \in \dot{x} \underset{def.}{\leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{N} \ / \ y = mx. \end{array} \right\} \to y = mny \to n = m = 1 \to x = y.$$

   Transitiva: $x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z$.

   $$\left. \begin{array}{l} x\Re y \Longleftrightarrow x \in \dot{y} \underset{def.}{\leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} \ / \ x = ny. \\ y\Re z \Longleftrightarrow y \in \dot{z} \underset{def.}{\leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{N} \ / \ y = mz. \end{array} \right\} \to x = nmz = pz \to x \in \dot{z} \to x\Re z.$$

   ii) Diagrama de Hasse: (fig.10).

   iii) Elements notables d'X, on $X \subset \mathbb{N}$: Màxim: 1. Mínim no existeix. Maximals: 1 Minimals: 8,12,10,9,7,11. $\{Cotes\ superiors\} = \{1\}, \{Cotes\ inferiors\} = \left\{ 27\dot{7}20 \right\}$.

   Elements notables de $B = \{3,4,6\}$. Màxim no existeix. Mínim no eixteix. Maximals: 3,4. Minimals: 4,6. Cotes superiors: 1. Cotes inferiors: 12. Suprem: 1. Ínfim: 12.

9. Donat un conjunt E, definim en $P(E)$ la relació:

   $A\Re B \Longleftrightarrow A \cap B = B$, on $A, B \subset E$.

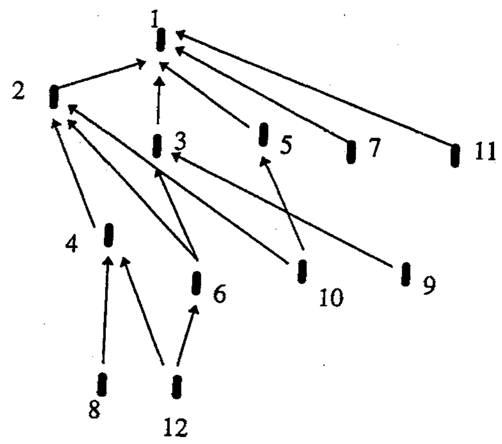


Figure 10:

i) Proveu que $\Re$ és una relació binària d'ordre. És total? És $P(E)$ ben ordenat?

ii) Si $E = \{a, b, c\}$, representeu el diagrama de Hasse de la relació i trobeu els elements notables de $P(A)$, on $A = \{a, b\}$.

Sol.: i) Reflexiva: $A\Re A$ $\forall A$, ja que $A \cap A = A$.

Antisimètrica: $A\Re B \wedge B\Re A \Rightarrow A = B$.

$$\left.\begin{array}{l} A\Re B \Longleftrightarrow A \cap B = B \\ B\Re A \Longleftrightarrow B \cap A = A \end{array}\right\} \rightarrow A = B.$$

Transitiva: $A\Re B \wedge B\Re C \Rightarrow A\Re C$.

$$\left.\begin{array}{l} A\Re B \Longleftrightarrow A \cap B = B \\ B\Re C \Longleftrightarrow B \cap C = C \end{array}\right\} \rightarrow A \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = B \cap C =$$
$C \rightarrow A\Re C$.

Connexa: La relació no compleix la propietat connexa ja que $\forall A, B \;/\; A \neq B \nRightarrow A\Re B$ ni $B\Re A$.

En efecte, $\forall A, B \;/\; A \neq B \rightarrow A \overset{no}{\subset} B \wedge B \overset{no}{\subset} A \rightarrow A \cap B \neq A \wedge B \cap A \neq B \rightarrow$ni $A\Re B$ ni $B\Re A$. Contraexemple: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, m, n\}$ i $A \cap B = \{1\}$.

Per la qual cosa, la relació $\Re$ no és relació binària d'ordre total.

$P(E)$ no està ben ordenat ja que en aquest cas, el parell $\{A, B\}$ no té mínim.

iii) El diagrama de Hasse: (fig. 11).

Elements notables de $P(A)$, on $A = \{a, b\}$: Màxim: ϕ. Mínim: $\{a, b\} = A$. Maximals: ϕ. Minimals: A. Cotes superiors: ϕ. Cotes inferiors: A, E. Suprem: ϕ. Ínfim: A.

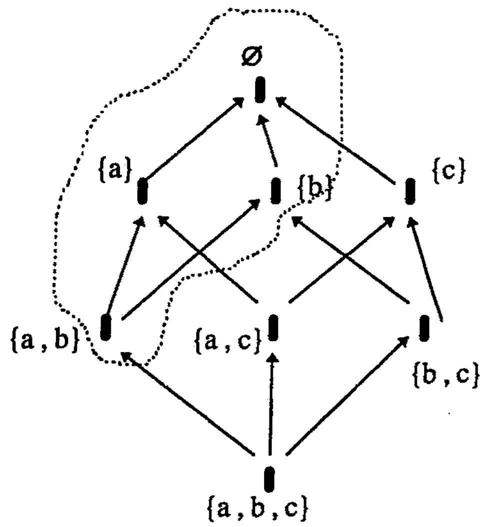


Figure 11:

10. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim: $(x,y)\Re(x',y') \iff \begin{cases} x < x' \ si \ x \neq x' \\ y \leq y' \ \ si \ x = x' \end{cases}$.

Demostreu que $\Re$ és una relació d'ordre total.

Sol.: Reflexiva: $(x,y)\Re(x,y)\ \forall(x,y)$.

En efecte, ja que $x = x \to y \leq y\ (y = y)$.

Antisimètrica: $(x,y)\Re(z,t) \wedge (z,t)\Re\ (x,y) \Rightarrow (x,y) = (z,t)$.

$(x,y)\Re(z,t) \iff \begin{cases} x < z \ si \ x \neq z \\ y \leq t \ si \ x = z \end{cases}$

$(z,t)\Re\ (x,y) \iff \begin{cases} z < x \ si \ z \neq x \\ t \leq y \ si \ z = x \end{cases}$

Si $x \neq z \to x < z \wedge z < x$, impossible. Per la qual cosa, $x = z$.

Si $x = z \to y \leq t \wedge t \leq y \to y = t$.

$\left.\begin{array}{c} x = z \\ y = t \end{array}\right\} \to (x,y) = (z,t)$.

Transitiva: $(x,y)\Re(z,t) \wedge\ (z,t)\ \Re(u,v) \Rightarrow (x,y)\Re(u,v)$.

$(x,y)\Re(z,t) \iff \begin{cases} x < z \ si \ x \neq z \\ y \leq t \ si \ x = z \end{cases}$

$(z,t)\Re\ (u,v) \iff \begin{cases} z < u \ si \ z \neq u \\ t \leq v \ si \ z = u \end{cases}$

Per la qual cosa, $((x < z) \vee (x = z \wedge y \leq t)) \wedge ((z < u) \vee (z = u \wedge t \leq v))$

$\to ((x < z) \wedge (z < u)) \vee ((x < z) \wedge (z = u \wedge t \leq v)) \vee ((x = z \wedge y \leq t) \wedge (z < u))$
$\vee((x = z \wedge y \leq t) \wedge (z = u \wedge t \leq v)) \leftrightarrow (x < u) \vee (x < u \wedge t \leq v) \vee (x < u \wedge y \leq t)$
$\vee(x = u \wedge y \leq v) \leftrightarrow \begin{cases} x < u \ si \ x \neq u \\ y \leq v \ si \ x = u \end{cases} \leftrightarrow (x,y)\Re(u,v).$

Connexa: $\forall (x,y),(z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow (x,y)\Re(z,t) \vee \ (z,t)\Re\ (z,t).$

Com que $x,y,z,t \in \mathbb{R}$, donats $x, z \to x < z \vee z < x \vee x = z.$

Si $x < z \to (x,y)\Re(z,t)$ per definició.

Si $z < x \to (z,t)\Re x,y)$ per definició.

Si $x = z$, com $y,t \in \mathbb{R} \to y \leq t \vee t \leq y \to (x = z\ ,\ y \leq t) \vee (x = z\ ,\ t \leq y) \to$ $(x,y)\Re(z,t) \vee \ (z,t)\Re\ (z,t).$

11. Siga $X \subset \mathbb{R}$, $X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 \leq x\}$.

i) És X acotat? ii) Existeixen màxim, mínim, suprem i ínfim d'X?

Sol.: i) $X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 \leq x\} = [-2, +\infty[\subset \mathbb{R}$.

Cotes superiors d'X, no existeixen. Cotes inferiors d'$X = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \leq -2\} =$ $]-\infty, -2]$.

Aleshores X no està acotat (sí que està acotat inferiorment).

ii) No existeix màxim per a X. Mínim d'X : -2. Suprem d'X, no existeix. Ínfim d'X : -2.

12. Siguen A i B dos conjunts ordenats. Demostreu que $A \times B$ és un reticle respecte de l'ordre donat per: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2$ (en A) $\wedge\ y_1 \leq y_2$ (en B).

Sol.: Sabem que reticle és tot conjunt ordenat tal que qualsevol subconjunt de dos elements té suprem i ínfim.

Demostrarem que $\forall \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \subset A \times B \Rightarrow$suprem$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} =$ $(x_2, y_2) \wedge$ ínfim$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = (x_1, y_1)$.

En efecte, (x_2, y_2) és cota superior, ja que $(x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 \leq x_2 \wedge y_2 \leq y_2)$.

Cal veure que és la menor. Suposem que $\exists (u, v)$ una altra cota superior. Aleshores,

$(x_1 \leq u \wedge y_1 \leq v) \wedge (x_2 \leq u \wedge y_2 \leq v) \to x_i \leq u \ \forall i = 1,2 \wedge y_i \leq v \ \forall i = 1,2.$

Sabem que si $x \leq y \to \begin{cases} \sup(x,y) = x \vee y = y \\ \inf(x,y) = x \wedge y = x \end{cases} \quad x_1 \leq x_2$

Aleshores, si $x_1 \leq x_2 \to \begin{cases} \sup(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2 = \ x_2 \\ \inf(x_1,x_2) = x_1 \wedge x_2 = \ x_1 \end{cases}$

De $x_i \leq u\ \forall i = 1,2 \rightarrow u \geq$ que la major de les dos $x_i \rightarrow u \geq x_1 \vee x_2 = x_2$.

De $y_i \leq v\ \forall i = 1,2 \rightarrow v \geq$ que la major de les dos $y_i \rightarrow v \geq y_1 \vee y_2 = y_2$.

Aleshores, $(u,v) \geq (x_2,y_2)$.

Idèntica demostració per a l'ínfim.

13. Donats S i T conjunts ben ordenats, proveu que la relació:

$(s,t) < (s',t') \iff (s < s' \vee (s = s' \wedge t < t'))$ és un bon ordre en $S \times T$ (S'anomena ordre lexicogràfic de $S \times T$).

Sol.: Cal demostrar que $\forall D \subset S \times T$, D té primer element (o mínim).

Si D_1 =proj(D) sobre $S = \{s \in S \ / \ \exists t \in T \ / \ (s,t) \in D\}$.

És obvi que $D_1 \neq \phi$, ja que S és ben ordenat.

En ser $D_1 \neq \phi$, té primer element. Siga σ el primer element de D_1.

Considerem $(D \cap \{\sigma\}) \times T = \{(\sigma,t) \in D\}$.

Si D_2 =proj$(D \cap \{\sigma\}) \times T$ sobre $T = \{t \in T \ / \ (\sigma,t) \in D\}$.

És obvi que $D_2 \neq \phi$, ja que T és ben ordenat.

En ser $D_2 \neq \phi$, té primer element. Siga τ el primer element de D_2.

Aleshores, $(\sigma,\tau) < (s,t)\quad \forall (s,t) \in D$, ja que $\sigma < s \vee (\sigma = s \wedge \tau < t)$ per la mateixa construcció.

14. Siga X una cadena i A i B dos subconjunts d'X tals que $X = A \cup B$. Si suposem que A i B són ben ordenats amb la restricció d'X, demostreu que X és ben ordenat.

Sol.: X serà ben ordenat quan $\forall S \subset X$, S tinga primer element o mínim.

Suposem $S \subset X \quad \forall S \rightarrow S = S \cap X = S \cap (A \cup B) = (S \cap A) \cup (S \cap B)$.

Si $S \cap A = \phi \rightarrow S = S \cap B \rightarrow S \subset B$.

Com que B és ben ordenat, $\exists s \in S \subset B \subset X \rightarrow s$ és primer element de S en X.

Si $S \cap B = \phi \rightarrow S = S \cap A \rightarrow S \subset A$.

Com que$A$ és ben ordenat, $\exists s' \in S \subset A \subset X \rightarrow s'$ és primer element de S en X.

Si $(S \cap A) \neq \phi \wedge (S \cap B) \neq \phi$. Com que $(S \cap A) \neq \phi \rightarrow \exists m_1 \ / \ m_1 \in S \cap A$. Com que $S \cap A \subset A \subset X \ \wedge A$ és ben ordenat, m_1 és primer element de S en X.

Com que $(S \cap B) \neq \phi \rightarrow \exists m_2 \ / \ m_2 \in S \cap B$. Com $S \cap B \subset B \subset X \ \wedge B$ és ben ordenat, m_2 és primer element de S en X.

Per hipótesi X és una cadena, és a dir X és un conjunt totalment ordenat. Per la qual cosa, $\forall m_1, m_2 \in X \Rightarrow m_1 \leq m_2 \vee m_2 \leq m_1$.

Si $m_1 \leq m_2 \rightarrow m_1$ és el primer element en X.
Si $m_2 \leq m_1 \rightarrow m_2$ és el primer element en X.

15. Siga $f : A \longrightarrow B$ una aplicació i $A_1, A_2 \subset A$, proveu:

i) $A_1 \subset A_2 \to f(A_1) \subset f(A_2)$.
ii) $f(\ A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
iii) $f(\ A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
Sol.: i) $\forall y \in f(A_1) \to \exists x \in A_1 \ / \ y = f(x) \underset{A_1 \subset A_2}{\longrightarrow} \exists x \in A_2 \ / \ y = f(x) \to y \in f(A_2)$.

ii) $\subset$) $\forall y \in f(\ A_1 \cup A_2) \to \exists x \in A_1 \cup A_2 \ / \ y = f(x) \to \left\{ \begin{array}{c} x \in A_1 \ / \ y = f(x) \\ \vee \\ x \in A_2 \ / \ y = f(x) \end{array} \right. \to$
$\left\{ \begin{array}{c} y \in f(A_1) \\ \vee \\ y \in f(A_2) \end{array} \right. \to y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

$\supset$) $\forall y \in f(A_1) \cup f(A_2) \to \left\{ \begin{array}{c} y \in f(A_1) \\ \vee \\ y \in f(A_2) \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} \exists x \in A_1 \ / \ y = f(x) \\ \vee \\ \exists x \in A_2 \ / \ y = f(x) \end{array} \right. \to$
$\exists x \in A_1 \cup A_2 \ / \ y = f(x) \to y \in f(\ A_1 \cup A_2)$.
També,
$$\left. \begin{array}{c} A_1 \subset A_1 \cup A_2 \\ A_2 \subset A_1 \cup A_2 \end{array} \right\} \overset{a)}{\to} \left. \begin{array}{c} f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2) \\ f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2) \end{array} \right\} \to f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2).$$

iii) $\forall y \in f(\ A_1 \cap A_2) \to \exists x \in A_1 \cap A_2 \ / \ y = f(x) \to \left\{ \begin{array}{c} x \in A_1 \ / \ y = f(x) \\ \wedge \\ x \in A_2 \ / \ y = f(x) \end{array} \right. \to$
$\left\{ \begin{array}{c} y \in f(A_1) \\ \wedge \\ y \in f(A_2) \end{array} \right. \to y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.
També, $\left. \begin{array}{c} A_1 \cap A_2 \subset A_1 \\ A_1 \cap A_2 \subset A_2 \end{array} \right\} \overset{a)}{\to} \left. \begin{array}{c} f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2) \end{array} \right\} \to f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
$\supset$) No sempre es verifica. Contraexemple: (fig. 12).
Suposem l'aplicació $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = sen\ x$. Suposem $A_1 = [0, 2\pi]$, $A_2 = [2\pi, 4\pi]$.
Aleshores, $f(A_1) = f(A_2) = [-1, 1]$,però $f(A_1 \cap A_2) = f(2\pi) = 0$.

16. Donats $f : A \longrightarrow B$ una aplicació i $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, proveu:
i) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

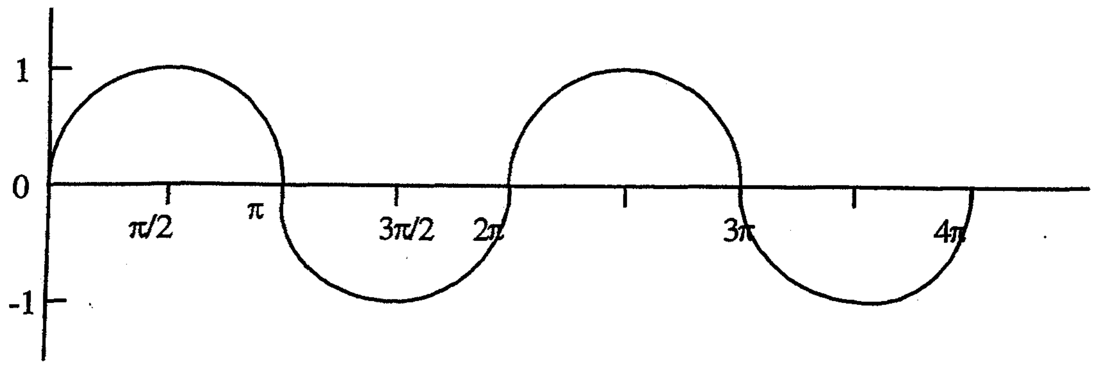


Figure 12:

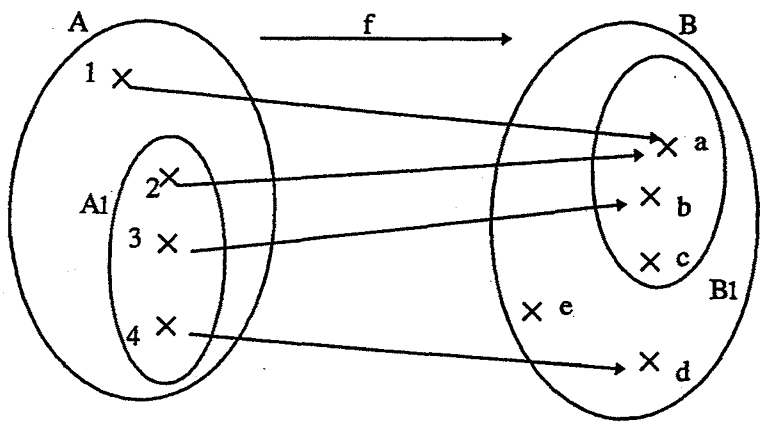


Figure 13:

ii) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$.

iii) Si f és suprajectiva es verifica la igualtat en ii).

Sol.: i) $\forall x \in A_1 \to f(x) \in f(A_1) \to f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(f(A_1)) \to x \in f^{-1}(f(A_1))$.

L'altra inclusió no és certa. Contraexemple: (fig. 13).

ii) $\forall y \in f(f^{-1}(B_1)) \to \exists x \in f^{-1}(B_1)\ /\ f(x) = y \to \exists y' \in B_1\ /\ x = f^{-1}(y') \to \exists y' \in B_1\ /\ f(x) = y = f(f^{-1}(y')) = y' \in B_1 \to y \in B_1$.

L'altra inclusió no és certa. El mateix contraexemple:

iii) Si f és suprajectiva caldrà demostrar que $B_1 \subset f(f^{-1}(B_1))$.

$\forall y \in B_1 \underset{f \text{ supraj.}}{\longrightarrow} \exists x \in A\ /\ f(x) = y \to \exists x \in A\ /\ x = f^{-1}(y) \to \exists x \in A\ /$

$x \in f^{-1}(B_1) \rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B_1)) \rightarrow y \in f(f^{-1}(B_1))$.

17. Donades $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ aplicacions, demostreu que :

i) Si f i g són injectives, $g \circ f$ és injectiva.

Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions injectives $\Rightarrow g \circ f$ és injectiva.

En efecte:

f injectiva$\longrightarrow$ Si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

g injectiva$\longrightarrow$ Si $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$

Si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \longrightarrow g\,[f(x)] = g\,[f(x')] \underset{g \ injectiva}{\longrightarrow} f(x) = f(x') \underset{f \ injectiva}{\longrightarrow} x = x'$

ii) Si f i g són suprajectives, $g \circ f$ és suprajectiva.

Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions suprajectives $\Rightarrow g \circ f$ és suprajectiva.

En efecte:

f suprajectiva$\longrightarrow \forall y \in Y \ \ \exists x \in X \ / \ f(x) = y$.

g suprajectiva$\longrightarrow \forall z \in Z \ \ \exists y \in Y \ / \ g(y) = z$.

$\forall z \in Z \ \exists x \in X \ / \ (g \circ f)(x) = g\,[f(x)] = g(y) = z \longrightarrow g \circ f$ és suprajectiva.

iii) Si f i g són bijectives, $g \circ f$ és bijectiva.

Si $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ són dues aplicacions bijectives $\Rightarrow g \circ f$ és bijectiva.

En efecte:

f bijectiva$\longrightarrow \forall y \in Y \ \ \exists! x \in X \ / \ f(x) = y$.

g bijectiva$\longrightarrow \forall z \in Z \ \ \exists! y \in Y \ / \ g(y) = z$.

$\forall z \in Z \ \ \exists! x \in X \ / \ (g \circ f)(x) = z \longrightarrow g \circ f$ és bijectiva.

iv) Si $g \circ f$ és injectiva, f és injectiva.

Caldrà demostrar que si $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$.

Si $f(x) = f(x') \rightarrow g\,[f(x)] = g\,[f(x')] \rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \underset{g \circ f \text{ inject.}}{\longrightarrow} x = x'$.

v) Si $g \circ f$ és suprajectiva, g és suprajectiva.

Suposem $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$,aleshores $g \circ f : X \longrightarrow Z$.

Si $g \circ f$ és suprajectiva$\rightarrow \forall z \in Z \ \ \exists x \in X \ / \ (g \circ f)(x) = z \rightarrow \forall z \in Z \ \ \exists x \in X \ / \ g\,[f(x)] = z$.

Com f és aplicació $\rightarrow f(x) = y \in Y$

Aleshores, $\forall z \in Z \ \ \exists y \in Y \ / \ g(y) = z \rightarrow g$ és suprajectiva.

18. Siga l'aplicació $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ / $f((x,y)) = x - y$.

Siga l'aplicació $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $g(x) = (x, -x)$.

i) Trobeu $f \circ g$ i $g \circ f$. ii) Classifiqueu les quatre.

Sol.: i) $f \circ g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ / $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f((x,-x)) = x - (-x) = 2x$.

$g \circ f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $(g \circ f)((x,y)) = g[f((x,y))] = g(x-y) = ((x-y), -(x-y)) = (x - y\ ,\ y - x)$.

ii) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ / $f((x,y)) = x - y$.

f és injectiva si sent $f((x,y)) = f((x',y')) \to (x,y) = (x',y')$.

$f((x,y)) = f((x',y')) \to x - y = x' - y' \nrightarrow x = x'\ ,\ y = y'$. Contraexemple: $x = 2, y = 6, x' = 1, y' = 5$. Per la qual cosa f no és injectiva.

f és suprajectiva si $\forall z \in \mathbb{Z}\ \ \exists (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $f((x,y)) = z$.

Donat $\forall z \in \mathbb{Z}\ \ \exists$ infinits $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $x - y = z$, però $f((x,y)) = x - y = z$. Per la qual cosa $\forall z \in \mathbb{Z}\ \ \exists (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $f((x,y)) = z$ i deduïm que f és suprajectiva.

$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $g(x) = (x, -x)$.

g és injectiva si sent $g(x) = g(x') \to x = x'$.

$g(x) = g(x') \to (x, -x) = (x', -x') \to x = x' \wedge -x = -x' \to x = x'$.

g és suprajectiva si $\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\exists z \in \mathbb{Z}$ / $g(z) = (x,y)$.

No es verifica sempre. Els elements $y \neq -x$ no tenen antiimatge. Així, g^{-1} $((3,4))$ no existeix. (La antiimatge de l'element $(3,4)$ no existeix).

$f \circ g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ / $(f \circ g)(x) = 2x$.

$f \circ g$ serà injectiva si sent $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x') \to x = x'$.

$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x') \to 2x = 2x' \to x = x'$.

$f \circ g$ serà suprajectiva si $\forall y \in \mathbb{Z}$, $\exists x \in \mathbb{Z}$ / $(f \circ g)(x) = y$.

$(f \circ g)(x) = y \to 2x = y \to x = \dfrac{y}{2} \notin \mathbb{Z}$. Per la qual cosa $f \circ g$ no és suprajectiva.

$g \circ f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $(g \circ f)((x,y)) = (x - y\ ,\ y - x)$.

$g \circ f$ serà injectiva si sent $(g \circ f)((x,y)) = (g \circ f)((x',y')) \to (x,y) = (x',y')$.

$(g \circ f)((x,y)) = (g \circ f)((x',y')) \to (x - y\ ,\ y - x) = (x' - y'\ ,\ y' - x') \to x - y = x' - y' \wedge y - x = y' - x'$. No implica que $x = x'$ ni que $y = y'$. No és injectiva. Contraexemple: $(g \circ f)((3,-2) = (5,-5) \wedge$ $(g \circ f)((7,2)) = (5,-5)$ (elements diferents tenen la mateixa imatge).

$(g \circ f)$ serà suprajectiva si $\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ \ \exists (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ / $(g \circ f)((m,n)) = (x,y)$.

$(g \circ f)((m,n)) = (x,y) \to (m-n\ ,\ n-m) = (x,y) \to m-n = x, n-m = y \to m = -n$. No és suprajectiva ja que obliga a que $m = -n$ i no seria $\forall m, n$.

Contraexemple: L'element $(3,-7)$ no té antiimatge per mitjà de $g \circ f$ ja que seria trobar (x,y) tal que $(g \circ f)((x,y) = (3,-7)$, el que voldria dir que $x - y = 3 \wedge y - x = 7$.

19. Siga l'aplicació $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ \ / \ \ f((x,y)) = 2x^2 + 5y$.
Siga l'aplicació $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ \ / \ \ g(x) = (3x+5\ ,\ x^2+1)$.
i) Trobeu $f \circ g$ i $g \circ f$. ii) És f injectiva? És g suprajectiva? iii) Classifiqueu $f \circ g$. iv) Calculeu $g(7)$ i $(f \circ g)^{-1}(18)$.
Sol.: i) $f \circ g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\ /\ (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f((3x+5, x^2+1)) = 2(3x+5)^2 + 5(x^2+1) = 2(9x^2+30x+25) + 5x^2 + 5 = 23x^2 + 60x + 55$.
$g \circ f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\ /\ (g \circ f)((x,y)) = g[f((x,y)] = g(2x^2+5y) = (3(2x^2+5y)+5\ ,\ (2x^2+5y)^2+1) = (6x^2+15y+5\ ,\ 4x^4+20x^2y+25y^2+1)$.
ii) f serà injectiva si sent $f((x,y)) = f((x',y')) \to (x,y) = (x',y')$.
$f((x,y)) = f((x',y')) \to 2x^2+5y = 2x'^2+5y' \not\Rightarrow x = x'$ ni $y = y'$.
Contraexemple: $(x,y) = (2,1)\ \ (x',y') = (-2,1) \to f((2,1)) = f((-2,1)) = 13$.
g serà suprajectiva si $\forall (a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\ \ \exists x \in \mathbb{Q}\ /\ g(x) = (a,b)$.
$g(x) = (a,b) \to (3x+5\ ,\ x^2+1) = (a,b) \to 3x+5 = a\ ,\ x^2+1 = b \to x = \dfrac{a-5}{3} \in \mathbb{Q}\ ,\ x = \sqrt{b-1} \notin \mathbb{Q}$.
Per la qual cosa, g no és suprajectiva. Contraexemple: l'element $(1/2,-2)$ no té antiimatge, és a dir, no existeix $g^{-1}(1/2,-2)$. En efecte, $g^{-1}(1/2,-2) = \{x \in \mathbb{Q}\ /\ g(x) = (1/2,-2)\} = \left\{x \in \mathbb{Q}\ /\ x = -\dfrac{3}{2} \vee x = \sqrt{-3}\right\}$.
iii) $f \circ g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\ /\ (f \circ g)(x) = y = 23x^2 + 60x + 55$.
L'aplicació $f \circ g$ resulta ser una paràbola.
Si $x = 1 \to (f \circ g)(1) = y = 23 + 60 + 55 = 138$.
$23x^2+60x+55 = 138 \to 23x^2+60x-83 = 0 \to x = \dfrac{-60 \pm \sqrt{3600 + 4 \cdot 23 \cdot 83}}{46} =$
$= \dfrac{-60 \pm 106}{46} \to \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{83}{23} \end{cases}$. Per la qual cosa, $f \circ g$ no és injectiva ja que elements diferents com són 1 i $-\dfrac{83}{23}$, tenen la mateixa imatge que val 138.
L'aplicació $f \circ g$ no és suprajectiva, ja que l'element 0 no té antiimatge. És a dir, $\overline{\exists}\ (f \circ g)^{-1}(0)$.

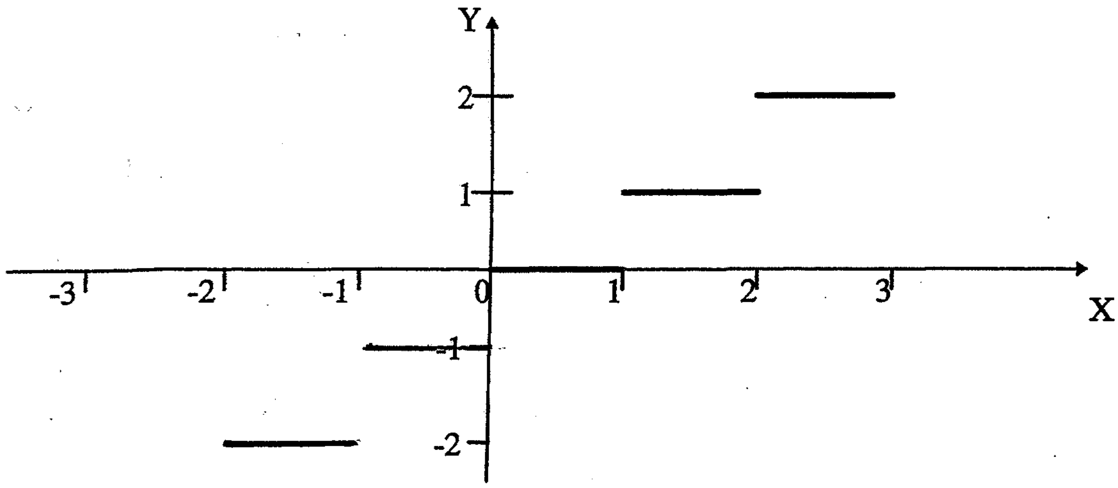


Figure 14:

$(f \circ g)^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; (f \circ g)(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; 23x^2 + 60x + 55 = 0\} \rightarrow$ $x \notin \mathbb{Q}$.

iv) $g(7) = (3 \cdot 7 + 5\;,\; 7^2 + 1) = (26, 50)$.

$(f \circ g)^{-1}(18) = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; (f \circ g)(x) = 18\} = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; 23x^2 + 60x + 55 = 18\} = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; 23x^2 + 60x - 37 = 0\} = \{-1, -37/23\}$.

20. Estudieu les següents aplicacions i les seues inverses:

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad x \rightsquigarrow E(x)$.

ii) $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \quad / \quad g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

iii) $h : \mathbb{Q} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \quad / \quad h(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

Sol.: i) Definim part sencera d'un nombre real x i es representa per $E(x)$, al major sencer inferior o igual a x.

La seua gràfica és: (fig. 14).

L'aplicació no és injectiva, ja que $E(1'3) = E(1'7) = 1$.

L'aplicació no és suprajectiva, ja que l'element $1'3$ no té antiimatge. En efecte $\overline{\exists}\, x \in \mathbb{R} \;/\; E(x) = 1'3$.

ii) Injectiva. Si $g(x) = g(x') \rightarrow x = x'$.

$g(x) = g(x') \rightarrow \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x'-1} \rightarrow x' - 1 = x - 1 \rightarrow x = x'$. Per la qual cosa g és injectiva.

Suprajectiva. $\forall y \in \mathbb{R}-\{0\} \quad \exists x \in \mathbb{R}-\{1\} \;/\; g(x)=y$.
$g(x)=y \rightarrow \dfrac{1}{x-1}=y \rightarrow 1=y(x-1) \rightarrow 1=yx-y \rightarrow \dfrac{1+y}{y}=x \in \mathbb{R}-\{1\}$.
Per la qual cosa g és suprajectiva.

En definitiva g és bijectiva.

La seua inversa serà també una aplicació i a més a més bijectiva.

Per a trobar la inversa d'una aplicació caldrà aïllar x en funció de y i després canviarem la x per la y.

És a dir: $g(x)=y=\dfrac{1}{x-1} \rightarrow x=\dfrac{1+y}{y} \rightarrow y=\dfrac{1+x}{x}=g^{-1}(x)$.

Així, $g^{-1}:\mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\} \quad / \quad g^{-1}(x)=y=\dfrac{1+x}{x}$.

iii) Injectiva. Si $h(x)=h(x') \rightarrow \dfrac{x+2}{x}=\dfrac{x'+2}{x'} \rightarrow (x+2)x'=(x'+2)x \rightarrow xx'+2x'=x'x+2x \rightarrow x=x'$.

Suprajectiva. $\forall y \in \mathbb{R}-\{0\} \quad \exists x \in \mathbb{Q}-\{0\} \;/\; h(x)=y$.
$h(x)=y \rightarrow \dfrac{x+2}{x}=y \rightarrow x+2=yx \rightarrow x-yx=-2 \rightarrow x(1-y)=-2 \rightarrow x=\dfrac{-2}{1-y} \notin \mathbb{Q}-\{0\}$. Per la qual cosa h no és suprajectiva.

21. Siguen les aplicacions f,g,h, definides per:

$f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q} \quad / \quad f(x)=\dfrac{1}{2}-x$.

$g:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q} \quad / \quad g(x)=2x^2-\dfrac{1}{2}$.

$h:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \quad / \quad h(x)=(\dfrac{x^2+1}{2}\,,\,1-x)$.

Trobeu: i) f^{-1}. És aplicació? En cas afirmatiu, classifiqueu-la i comproveu que: $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$. ii) Demostreu que g no és injectiva. iii) Comproveu que $\dfrac{g(x)}{f(x)}=ax+b \;/\; a,b,\in\mathbb{Z}$. iv) Podem calcular les dues composicions $g\circ h$, $h\circ g$? Siga j la composició que es possible calcular. Trobeu $j\circ f^{-1}$.

Sol.: i) Per teoria sabem que la inversa d'una l'aplicació és aplicació, si i sols si, l'aplicació és bijectiva i a més a més la inversa és bijectiva.

f serà injectiva si $f(x)=f(x') \rightarrow x=x'$.

$f(x)=f(x') \rightarrow \dfrac{1}{2}-x=\dfrac{1}{2}-x' \rightarrow x=x'$. Per la qual cosa f és injectiva.

f serà suprajectiva si $\forall y \in \mathbb{Q} \quad \exists x \in \mathbb{Q} \;/\; f(x)=y$.

$f(x) = y \rightarrow \dfrac{1}{2} - x = y \rightarrow 1 - 2x = 2y \rightarrow x = \dfrac{1-2y}{2} \in \mathbb{Q}$. Per la qual cosa f és suprajectiva. En definitiva f és bijectiva.

Aleshores existirà f^{-1} i serà una aplicació bijectiva.

Per a definir f^{-1} aïllarem la x en funció de y i després canviarem la x per la y.

$x = \dfrac{1-2y}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = y = \dfrac{1-2x}{2}$. Aleshores:

$f^{-1} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad / \quad f^{-1}(x) = y = \dfrac{1-2x}{2} = \dfrac{1}{2} - x.$

$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\,[f(x)] = f^{-1}\,(\dfrac{1}{2} - x) = \dfrac{1}{2} - (\dfrac{1}{2} - x) = x.$

$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f(\dfrac{1}{2} - x) = \dfrac{1}{2} - (\dfrac{1}{2} - x) = x.$

ii) $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad / \quad g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{2}$, no és injectiva. Contraexemple per a $x = 1$ i $x' = -1$, $g(1) = g(-1) = \dfrac{3}{2}$.

També es pot demostrar: Si $g(x) = g(x') \nrightarrow x = x'$.

$$g(x) = g(x') \rightarrow 2x^2 - \frac{1}{2} = 2x'^2 - \frac{1}{2} \rightarrow x^2 = x'^2 \rightarrow \begin{cases} x = x' \\ x = -x' \\ -x = x' \\ -x = -x' \end{cases}$$

No sempre $x = x'$.

iii) $\dfrac{g(x)}{f(x)} = ax + b \leftrightarrow g(x) = f(x) \cdot (ax + b) \qquad$ on $a, b \in \mathbb{Z}$.

$g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{2} = (\dfrac{1}{2} - x) \cdot (ax + b) \rightarrow \dfrac{4x^2 - 1}{2} = (\dfrac{1-2x}{2}) \cdot (ax + b) \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 - 1 = (1 - 2x) \cdot (ax + b) \rightarrow 4x^2 - 1 = -2ax^2 + (a - 2b)x + b.$

Identificant: $a = -2$, $b = -1$.

iv) $g \circ h$ no es pot calcular ja que el conjunt final de h, no coincideix amb el conjunt inicial de g.

Aleshores:

$j = h \circ g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad / \quad j(x) = (h \circ g)(x) = h\,[g(x)] = h(2x^2 - \dfrac{1}{2}) = h(\dfrac{4x^2 - 1}{2}) =$

$$= (\frac{\left(\dfrac{4x^2-1}{2}\right)^2 + 1}{2}\;,\; 1 - \frac{4x^2 - 1}{2}) = (\frac{16x^4 - 8x^2 + 5}{8}\;,\; \frac{-4x^2 + 3}{2}).$$

$(j \circ f^{-1})(x) = j\left[f^{-1}(x)\right] = j(\frac{1}{2} - x) = j(\frac{1-2x}{2}) =$
$= (\frac{16(\frac{1-2x}{2})^4 - 8(\frac{1-2x}{2})^2 + 5}{8}, \frac{-4(\frac{1-2x}{2})^2 + 3}{2})..$

22. Donada l'aplicació $f(x) = \frac{x}{1+x}$, de $[0,+\infty[$ en $\mathbb{R}$, trobeu l'aplicació inversa de f on tinga sentit. Calculeu per inducció la composició n-èsima de f, és a dir, f^n on $n = 2, 3, 4, \ldots$

Sol.: $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = y = \frac{x}{1+x}$.

$f(x) = y = \frac{x}{1+x} \rightarrow y(1+x) = x \rightarrow y + yx = x \rightarrow y = x - yx \rightarrow y = x(1-y) \rightarrow x = \frac{y}{1-y}$.

Aleshores $f^{-1}(x) = y = \frac{x}{1-x}$.

$f^{-1} : X \longrightarrow [0,+\infty[$

Per tal que f^{-1} siga aplicació cal restringir el conjunt inicial X i posar $X = [0,1[$.

És a dir, $f^{-1} : [0,1[\longrightarrow [0,+\infty[\;/\; f^{-1}(x) = y = \frac{x}{1-x}$.

$f^2 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f^2(x) = f\left[f(x)\right] = f(\frac{x}{1+x}) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + (\frac{x}{1+x})} = \frac{x}{1+2x}$.

$f^3 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f^3(x) = (f^2 \circ f)(x) = f^2\left[f(x)\right] = f^2(\frac{x}{1+x}) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + 2(\frac{x}{1+x})} = \frac{x}{1+3x}$.

Suposem $f^n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f^n(x) = \frac{x}{1+nx}$.

Caldrà demostrar que $f^{n+1} : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f^{n+1}(x) = \frac{x}{1+(n+1)x}$.

En efecte, $f^{n+1}(x) = (f^n \circ f)(x) = f^n\left[f(x)\right] = f^n(\frac{x}{1+x}) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + n(\frac{x}{1+x})} = \frac{x}{1+(n+1)x}$.

23. Definim les aplicacions:

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f((x,y)) = x^2 + y^2. \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;/\; g(x) = (x, -x).$

i) Trobeu *dom* f , *im* f , $f \circ g$, $g \circ f$. ii) Classifiqueu l'aplicació $f \circ g$.

iii) Trobeu $(g \circ f)^{-1}(0,1)$, $f^{-1}(\{4\})$, $f(\{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\})$.

Sol.: *dom* $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ \exists f((x,y)) = x^2 + y^2\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

im $f = \{y' \in \mathbb{R} \ / \ \exists (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ f((x,y)) = y'\} =$

$= \{y' \in \mathbb{R} \ / \ \exists (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y' = x^2 + y^2\} = \mathbb{R} \cup \{0\}$.

$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f((x,-x)) = 2x^2$.

$g \circ f$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)((x,y)) = g[f((x,y))] = g(x^2+y^2) = (x^2+y^2 \ , \ -(x^2+y^2)) = (x^2+y^2 \ , \ -x^2-y^2)$.

ii) $f \circ g$ serà injectiva si sempre que $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x') \Rightarrow x = x'$.

$$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x') \rightarrow 2x^2 = 2x'^2 \rightarrow \begin{cases} x = x' \\ x = -x' \\ -x = x' \\ -x = -x' \end{cases} . \text{ No sempre } x = x'.$$

Per la qual cosa, $f \circ g$ no és injectiva.

$f \circ g$ serà suprajectiva si $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \ / \ (f \circ g)(x) = y$.

$(f \circ g)(x) = y \rightarrow 2x^2 = y \rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{2}} \notin \mathbb{R}$. Per la qual cosa $f \circ g$ no és suprajectiva.

(Contraexemple: els nombres reals negatius no tenen antiimatge).

iii) $(g \circ f)^{-1}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)((x,y)) = (0,1)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (x^2+y^2 \ , \ -x^2-y^2) = (0,1)\}$ .Impossible. Per la qual cosa, l'element $(0,1)$ no té antiimatge.

$f^{-1}(\{4\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ f((x,y)) = 4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x^2 + y^2 = 4\}$.

Correspon a una circumferència de centre en l'origen de coordenades i radi 2.

$f(\{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}) = \{f((x,0)) = y \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \{y = x^2 \quad / \ x \in \mathbb{R}\}$.

Correspon a una paràbola de vèrtex en l'origen de coordenades.

24. i) Demostreu que si A i A' són equipotents i B i B' també, aleshores ho són $A \times B$ i $A' \times B'$.

ii) Demostreu que si A i B són numerables, també ho és $A \times B$.

Sol.: i) Si A i A' són equipotents $(A \simeq A') \rightarrow \exists f : A \longrightarrow A' \ / \ f$ és bijectiva.

Si B i B' són equipotents $(B \simeq B') \rightarrow \exists g : B \longrightarrow B' \ / \ g$ és bijectiva.

Definim una aplicació $h : A \times B \longrightarrow A' \times B' \ / \ h((x,y)) = (f(x) \ , \ g(y))$. Caldrà demostrar que h és bijectiva.

En efecte, si $h((x,y)) = h((x',y')) \rightarrow (f(x) \ , \ g(y)) = (f(x') \ , \ g(y')) \rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(x') \\ g(y) = g(y') \end{array} \right. \rightarrow x = x' \ , \ y = y' \rightarrow (x, y) = (x', y')$. Per la qual cosa, h és injectiva.

h serà suprajectiva si $\forall (a', b') \in A' \times B'$, $\exists (a, b) \in A \times B \ / \ h((a, b)) = (a', b')$.

Com que f és bijectiva, $\forall a' \in A'$, $\exists a \in A \ / \ f(a) = a'$.

Com que g és bijectiva, $\forall b' \in B'$, $\exists b \in B \ / \ g(b) = b'$.

$h((a, b)) = (f(a) \ , \ g(b)) = (a', b')$.

$h((a, b)) = (a', b') \rightarrow (f(a) \ , \ g(b) = (a', b')$. Per la qual cosa, h és suprajectiva.

ii) Si A és numerable, $\rightarrow \exists f : A \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ f$ és bijectiva.

Si B és numerable, $\rightarrow \exists g : B \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ g$ és bijectiva.

Definim $h : A \times B \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ h((x, y)) = (f(x) \ , \ g(y))$, on $x \in A$, $y \in B$.

Es demostra, com abans, que h és bijectiva.

Una altra demostració:

Si demostrem que $card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = card(\mathbb{N})$, podríem substituir $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ per $\mathbb{N}$, i obtindríem que $A \times B$ seria numerable.

Per teoria, sabem que si $card(A) = a$ i $card(B) = b \quad a \leq b \Leftrightarrow \exists f : A \longrightarrow B \ /$ f injectiva.

Definim $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ f(n) = (n, 0)$. Aquesta aplicació és fàcil de demostrar que és injectiva, aleshores, $card(\mathbb{N}) \leq card(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Definim $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ g((n, m)) = 2^n \cdot 3^m$

Demostrem que g és injectiva:

Si $g((n, m)) = g((n', m')) \rightarrow 2^n \cdot 3^m = 2^{n'} \cdot 3^{m'} \rightarrow 2^{n-n'} \cdot 3^{m-m'} = 2^0 \cdot 3^0 \rightarrow$ $n - n' = 0 \quad , \quad m - m' = 0 \rightarrow n = n' \ , \ m = m' \rightarrow (n, m) = (n', m')$.

Aleshores $card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq card(\mathbb{N})$.

Per la qual cosa $card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = card(\mathbb{N})$.

25. Demostreu que el conjunt dels nombres sencers i el conjunt dels nombres racionals són numerables. Proveu que el conjunt dels nombres reals no és numerable, demostrant que no ho és l'interval $[0, 1]$.

    Sol.: La demostració està en la teoria.

26. Demostreu que per a qualsevol cardinal x, es verifica: $\qquad x + x = 2x$.

    Sol.: Considerem un conjunt X tal que $card(X) = x$. Considerem un conjunt Y tal que $card(Y) = x$ i a més a més $X \cap Y = \emptyset$.

    Aleshores, $card(X \cup Y) = card(X) + card(Y) = x + x$.

    $card(\{0, 1\}) = 2, \quad card(\{0, 1\} \times X) = card(\{0, 1\}) \cdot card(X) = 2x$.

Com que $card(X) = card(Y) \rightarrow \exists f : X \longrightarrow Y \ / \ f$ és bijectiva

Definim $h : X \cup Y \longrightarrow \{0,1\} \times X \quad / \quad \left. \begin{array}{r} x \rightsquigarrow h(x) = (0,x). \\ y \rightsquigarrow h(y) = (1, f^{-1}(y). \end{array} \right\}$

h és injectiva ja que: $h(x) = h(x') \rightarrow (0,x) = (0,x') \rightarrow x = x'$.

$h(x) = h(y)$ no és possible.

$h(y) = h(y') \rightarrow (1, f^{-1}(y) = (1, f^{-1}(y') \rightarrow y = y'$.

h és suprajectiva ja que $\forall (0,x) \in (\{0,1\} \times X) \quad \exists x \in X \subset X \cup Y \ / \ h(x) = (0,x)$.

$\forall (1,x) \in (\{0,1\} \times X) \quad \exists y \in Y \subset X \cup Y \ / \ h(y) = (1, f^{-1}(y))$.

En efecte, com $x \in X$ i f és bijectiva, $f^{-1}(y) = x$. Aleshores, donat $(1,x) \rightarrow \exists f(x) = y \ / \ (1,x) = (1, f^{-1}(y)) = h(y)$.

Per la qual cosa $\quad card(X \cup Y) = card(\{0,1\} \times X) \rightarrow x + x = 2x$.

Part I
TEMA 5: ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES. ELS NOMBRES SENCERS

1. LLEI DE COMPOSICIÓ INTERNA. TAULA DE PITÀGORES

Siga A un conjunt no buit. $A \subset E$.

Definició 1. *Anomenem* **operació** *en E una funció de $E \times E$ en E.*

Per exemple $-$ en $\mathbb{N}$ ja que $- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és una funció (no sempre $a - b \in \mathbb{N}$).

Definició 2. *Anomenem* **llei de composició interna** *en E una aplicació de $E \times E$ en E.*

Per exemple $-$ en $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$. $+$ en $\mathbb{N}$, en $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$. $\cup, \cap$ en $P(E)$.

Nota 1. *Tota llei de composició interna és operació, però no tota operació és una ll.c.i.*

Si A és un conjunt finit, resulta còmode donar els resultats d'una ll.c.i. en una taula anomenada **taula de Pitàgores.** *En la primera fila posarem els elements del conjunt en un cert ordre, en la primera columna els posarem en el mateix ordre i en la casella superior esquerra posarem el símbol de la llei que utilitzem.*

Exercici 1. *Si $E = \{a, b\}$, constru¨u la taula de Pitàgores de $P(E)$ respecte a cadascuna de les quatre lleis de composició internes designades per $\cup, \cap, \Delta, -$.*

Sol.: $P(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

$\cup$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

$\cap$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$
$\{b\}$	ϕ	ϕ	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

$-$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{a\}$	$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$	ϕ
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	ϕ	ϕ
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	ϕ

Δ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	ϕ	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	ϕ	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	ϕ

Exercici 2. *Si $E = \{1,2,3,4,5\}$, i al parell $(x,y) \in E \times E$ hi associem el quocient euclidià de x per y, construim la taula de Pitàgores. ¿És llei de composició interna? ($(2,1) \rightsquigarrow 2 \quad (3,2) \rightsquigarrow 1, etc$).*

2. LLEI DE COMPOSICIÓ EXTERNA

La veurem en Àlgebra.

3. PROPIETATS

Suposem el parell $(A,*)$ on $A \neq \phi$ i $*$ una ll.c.i. en A.

1. *Associativa:*

   $x*(y*z) = (x*y)*z \qquad \forall x,y,z \in A.$

2. *Commutativa:*

   $x*y = y*x \qquad \forall x,y \in A.$

3. *Distributiva:*

   Suposem el parell $(A,*,\Box)$ on $A \neq \phi$ i $*,\Box$ dues ll.c.i. en A.

   Distributiva de $*$ respecte a $\Box$ $\quad x*(y\Box z) = (x*y)\Box(x*z)$.

   Distributiva de $\Box$ respecte a $*$ $\quad x\Box(y*z) = (x\Box y)*(x\Box z)$.

Exercici 3. *De les operacions vistes en el tema de conjunts, indiqueu quines propietats compleixen. El mateix per a conjunts numèrics.*

4. ELEMENTS NOTABLES

Suposem el parell $(A,*)$ on $A \neq \phi$ i $*$ una ll.c.i. en A.

1. *Neutre:*

   $e \in A$ és l'element neutre si $e*a = a*e = a \qquad \forall a \in A.$

2. *Absorbent:*

   $s \in A$ és l'element absorbent si $s*a = a*s = s \qquad \forall a \in A.$

3. *Regular o simplificable:*

   $r \in A$ és l'element regular si $a*r = r*b \Rightarrow a = b \ \wedge \ r*a = r*b \Rightarrow a = b \quad \forall a,b \in A.$

4. *Inversible o simetritzable:*

   Un element $a \in A$ és inversible si, i sols si, $\exists\ a' \in A \ / \ a*a' = a'*a = e.$

5. *Idempotent:*

   Un element $t \in A$ és idempotent si, i sols si, $t*t = t$.

Exercici 4. *De les operacions vistes en el tema de conjunts, indiqueu quins són els seus elements notables. El mateix per a conjunts numèrics.*

5. ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Definició 3. *Un conjunt A en el qual s'han definit una o més d'una llei de composició interna direm que A és una* ***estuctura algebraica.***

Suposem $A \neq \phi$ i $*$ una ll.c.i. en A.

1. *Grupoide:*

   $(A, *)$ és un grupoide quan: $*$ és una ll.c.i.

2. *Semigrup:*

   $(A, *)$ és un semigrup quan: i) $*$ és una ll.c.i., ii) $*$ és associativa.

   Nota:

   1. Si $*$ és commutativa, és un semigrup abelià.
   2. Si $*$ té element neutre, és un semigrup unitari.
   3. Si $*$ és commutativa i té element neutre, és un semigrup abelià i unitari.

3. *Monoide:*

   $(A, *)$ és un monoide quan: i) $*$ és una ll.c.i., ii) $*$ és associativa, iii) $\exists e$ / e és el neutre.

4. *Grup:*

   $(A, *)$ és un grup quan: i) $*$ és una ll.c.i., ii) $*$ és associativa, iii)$\exists e$ / e és el neutre, iv) Tot element del conjunt A té simètric.

   Nota: Si $*$ és commutativa, és un grup abelià.

   Exemples: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$, $(P(A), \triangle)$.

5. *Semianell:*

   Suposem $(A, *, \square)$, on $A \neq \phi$ i $*, \square$ dues ll.c.i. en A.

   $(A, *, \square)$ és un semianell quan: i) $(A, *)$ és un semigrup abelià, ii) $(A, \square)$ és un semigrup, iii) $\square$ és distributiva respecte $*$.

   Nota:

   1. $\square$ commutativa, és un semianell commutatiu.
   2. $\square$ té element neutre, és un semianell unitari.
   3. $\square$ commutativa i element neutre, és un semianell commutatiu i unitari.

6. *Anell:*

   $(A, *, \square)$ és un anell quan: i) $(A, *)$ és un grup abelià, ii) $(A, \square)$ és un semigrup, iii) $\square$ és distributiva respecte $*$

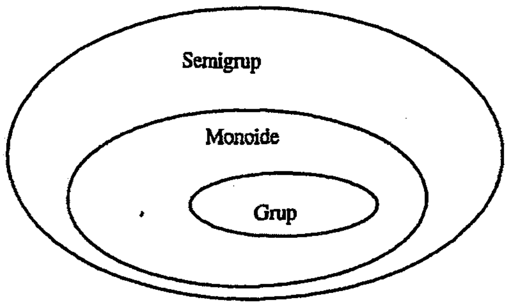


Figure 1:

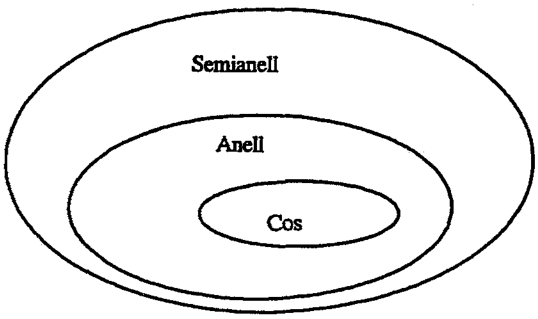


Figure 2:

Nota:

1. $\square$ commutativa, és un anell commutatiu.
2. $\square$ té element neutre, és un anell unitari.
3. $\square$ commutativa i element neutre, és un anell commutatiu i unitari.

Exemples: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(P(A), \triangle, \cap)$, $(\mathbb{Z}_5, \mp, \bar{\cdot})$.

7. *Cos:*

$(A, *, \square)$ és un cos quan: i) $(A, *)$ és un grup abelià, ii) $(A - \{e\}, \square)$ és un grup, sent e el neutre de $*$ en A, iii) $\square$ és distributiva respecte $*$.

Nota: Si $\square$ commutativa, és un cos commutatiu.
Exemples: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, \mp, \bar{\cdot})$, sent n un nombre primer.
Observacions: 1. Tot grup és un monoide. 2. Tot monoide és un semigrup. Els recíprocs no són certs (fig.1).
3. Tot cos és un anell. 4. Tot anell és un semianell. Els recíprocs no són certs (fig. 2).

6. SUBGRUPS

Definició 4. *Suposem $(G,*)$ un grup i $S \subset G$. Direm que el subconjunt S és un* ***subgrup*** *de G, si, i sols si, $(S,*)$ és un grup.*

Teorema 1. *Caracterització dels subgrups:*

Teorema 1r:

$$(S,*) \text{ és un subgrup de } (G,*) \Leftrightarrow i)\ a*b \in S \quad \forall a,b \in S \quad ii)\ a' \in S \quad \forall a \in S.$$

on a' , es el simètric d' a en G.

Teorema 2n:

$$(S,*) \text{ és un subgrup de } (G,*) \Leftrightarrow \ a*b' \in S \quad \forall a,b \in S.$$

Demostració del teorema 1r:

$\rightarrow$) Com que $(S,*)$ *és un subgrup de* $(G,*) \rightarrow S \subset G \ / \ S \neq \phi \wedge (S,*)$ és un grup $\rightarrow *$ és ll.c.i., és a dir, $\forall a,b \in S \rightarrow a*b \in S$.(ja hem vist i)).

Si a' ,es el simètric de a en G , demostrarem que $a' \in S$.

Suposem que $a \in S$ i que a admiteix simètric, el qual l'anomenem a''. Vegem que $a' = a''$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{En el grup } (G,*) \rightarrow a*a' = e.\\ \text{En el grup } (S,*) \rightarrow a*a'' = e.\end{array}\right\} \rightarrow a*a' = a*a'' \rightarrow a' = a''.$$

Com que a'' és un element de S, també a' serà un element de S. (ja hem vist ii)).

Cal adonarnos que tant a com a" són de S i també són de G, ja que $S \subset G$.

$\leftarrow$) Caldrà demostrar que $(S,*)$ és un grup.

$*$ és ll.c.i. per i).

$*$ és associativa ja que com $S \subset G$, $\forall a,b,c \in S \rightarrow a,b,c \in G \rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$, ja que $(G,*)$ és grup.

Existència d'element neutre. En efecte, suposem $a \in S \quad \forall a \Rightarrow a' \in S$.(per ii))

$$\left.\begin{array}{r}\text{Com que } a \in S \wedge a' \in S \rightarrow a*a' \in S \text{ (per } i)).\\ \text{Com que } S \subset G \rightarrow a \in G \wedge a' \in G.\end{array}\right\} \rightarrow a*a' = e \in S.$$

És a dir, el neutre de S és el mateix que el de G.

Existència d'element simètric. Es compleix per la hipòtesi ii).

Demostració del teorema 2n:

$\rightarrow$) Com que $(S,*)$ *és un subgrup de* $(G,*) \rightarrow S \subset G \ / \ S \neq \phi, \quad (S,*)$ grup.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Si } (S,*) \; grup \to \forall a,b \in S \Rightarrow a*b \in S \\ \text{Si } (S,*) \; grup \to \forall b \in S \Rightarrow b' \in S\end{array}\right\} \to \forall a,b' \in S \Rightarrow a*b' \in S.$$

$\leftarrow$) Per a demostrar que $(S,*)$ és un subrup, caldrà demostrar que $(S,*)$ és un grup.

i) $*$ és associativa ja que com $S \subset G$, $\forall a,b,c \in S \to a,b,c \in G \to a*(b*c) = (a*b)*c$, ja que $(G,*)$ és grup.

ii) Existència d'element neutre:

Per hipòtesi $\forall a, a \in S \to a*a' \in S \to e \in S$.(sent e el neutre de G).

ii) Existència d'element simètric:

$\forall e,a \in S \to e*a' \in S \to a' \in S$.

iv) $*$ és ll.c.i.:

Per hipòtesi, $\forall a,b \in S \Rightarrow a*b' \in S$.

$$\left.\begin{array}{r}\forall b \in S \to \exists b' \;\; / \;\; b' \in S. \\ \forall a \in S \qquad\qquad\end{array}\right\} \to a*(b')' \in S \to a*b \in S.$$

7. SUBANELLS

Definició 5. *Suposem $(A,*,\square)$ un anell i $S \subset A$. Direm que el subconjunt S és un* ***subanell*** *d'A si, i sols si, $(S,*,\square)$ és un anell.*

Teorema 2. *Caracterització dels subanells:*

$(S,*,\square)$ *és un subanell de* $(A,*,\square) \Leftrightarrow$ *i)* $(S,*)$ *és un subgrup de* $(A,*)$, *ii)* $a\square b \in S \quad \forall a,b \in S$.

Demostració:

$\to$) $(S,*,\square)$ *és un subanell de* $(A,*,\square) \to (S,*,\square)$ *és un anell* $\to (S,*)$ és un grup abelià

$\to \forall a,b \in S \Rightarrow a*b \in S$.

$$\left.\begin{array}{r}\forall b \in S \to \exists b' \;\; / \;\; b' \in S. \\ \forall a \in S \qquad\qquad\end{array}\right\} \to a*b' \in S \underset{Teorema\ 2on}{\longrightarrow} (S,*) \text{ és un subgrup de } (A,*).$$

Per a demostrar ii), sabem que $(S,*,\square)$ *és un anell* $\to (S,\square)$ és semigrup $\to \square$ és estable per a S, és a dir, $\forall a,b \in S \Rightarrow a\square b \in S$.

$\leftarrow$) En complir-se aquestes dues hipòtesi, $(S,*,\square)$ *és un subanell de* $(A,*,\square)$ ja que $(S,*)$ *és un subgrup de* $(A,*)$ i l'associativitat i la distributivitat es compliran per tractar-se d'elements de G. (ja que $S \subset G$).

Exemple: 1. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ és un subanell de $(\mathbb{Q},+,\cdot)$. 2. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ és un subanell de $(\mathbb{R},+,\cdot)$

8. IDEALS

Definició 6. *Suposem $(A,*,\square)$ un anell i $I \subset A$. Direm que el subconjunt I és un* ***ideal*** *d'A si, i sols si,: i) $(I,*)$ és un subgrup de $(A,*)$, ii) $a\square x \in I \;\wedge\; x\square a \in I \quad \forall a \in A \quad \forall x \in I$.*

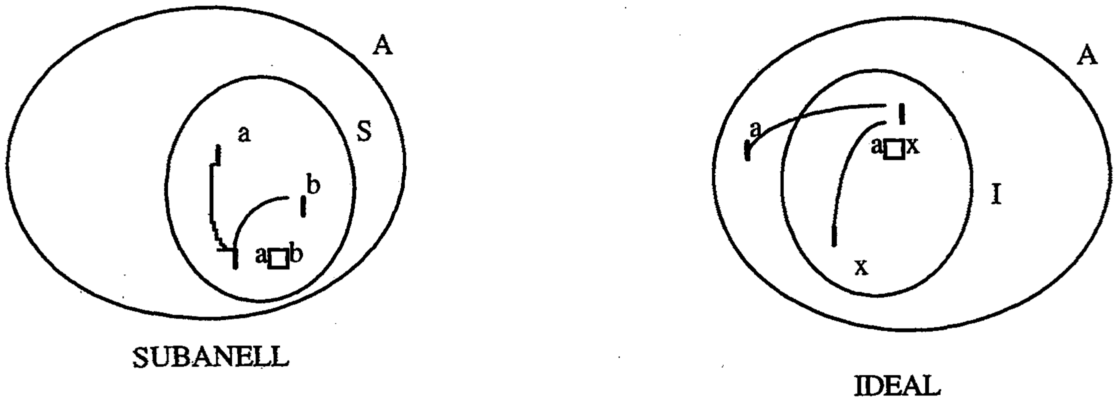


Figure 3:

Exemple: $(\mathbb{Z}_5, \overline{+}, \bar{\cdot})$ és un ideal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (En aquest cas $I = \left\{ x \,/\, x \in \mathbb{Z} \,/\, x = \dot{5} \right\}$).
Tot ideal és un subanell, però no a l'inrevés. (fig. 3).

9. HOMOMORFISMES

Suposem dues estructures algebraiques $(A, *, \top, \ldots)$, $(B, \Box, \perp, \ldots)$

Definició 7. *Direm que l'aplicació $f : A \longrightarrow B$ és un* ***homomorfisme*** *entre les dues estructures si, i sols si,:*
$i)\ f(x * y) = f(x) \Box f(y), \quad ii)\ f(x \top y) = f(x) \perp f(y), \quad iii) \ldots \qquad \forall x, y \in A.$

Nota 2. *Sinònim d'homomorfisme és aplicació lineal o morfisme.*

9.1. Tipus.

Suposem $f : A \longrightarrow B$ un homomorfisme.

1. *Monomorfisme* si, i sols si, f és injectiva.
2. *Epimorfisme* si, i sols si, f és suprajectiva.
3. *Isomorfisme* si, i sols si, f és bijectiva.
4. *Endomorfisme* si, i sols si, $A = B$.
5. *Automorfisme* si, i sols si, $A = B$ i f és bijectiva (endomorfisme bijectiu).

10. HOMOMORFISMES ENTRE GRUPS

Suposem $(X,*)$, $(Y,\perp)$ dos grups.

Suposem $f: X \longrightarrow Y$ una aplicació entre els dos grups.

Definició 8. *Direm que f és un* ***homomorfisme*** *entre el grup X i el Y si, i sols si,:*
$f(a*b) = f(a)\perp f(b) \quad \forall a,b \in X.$

Teorema 3. *La imatge del neutre d'X és el neutre d'Y.*

És a dir, $f(e) = e_1$ on $f: X \longrightarrow Y$ un homomorfisme entre grups, e el neutre d'X, e_1 el neutre d'Y.

Dem.:

e el neutre d'X $\rightarrow e*a = a \quad \forall a \in X \rightarrow f(e*a) = f(a) \rightarrow f(e)\perp f(a) = f(a) \rightarrow$ $f(e)$ és el neutre d'Y $\rightarrow e_1 = f(e)$.

e el neutre d'X $\rightarrow a*e = a \quad \forall a \in X \rightarrow f(a*e) = f(a) \rightarrow f(a)\perp f(e) = f(a) \rightarrow$ $f(e)$ és el neutre d'Y $\rightarrow e_1 = f(e)$.

Teorema 4. *La imatge del simètric és el simètric de la imatge.*

És a dir, $f(a') = (f(a))' \quad \forall a \in X,$ on a' és el simétric d'a en X.

Dem.:

$f(a*a') = f(a)\perp f(a') \rightarrow f(e) = f(a)\perp f(a') \rightarrow e_1 = f(a)\perp f(a') \rightarrow (f(a))' = f(a')$.

$f(a'*a) = f(a')\perp f(a) \rightarrow f(e) = f(a')\perp f(a) \rightarrow e_1 = f(a')\perp f(a) \rightarrow (f(a))' = f(a')$.

11. NUCLI I IMATGE D'UN HOMORFISME

Suposem $(X,*)$, $(Y,\perp)$ dos grups.

Suposem $f: X \longrightarrow Y$ un homomorfisme entre els dos grups.

Definició 9. *$Ker(f) = \{a \in X \ / \ f(a) = e_1\}$, on e_1 és el neutre de $\perp$ en Y.*

Definició 10. *$Im(f) = f(X) = \{f(a) \ / \ a \in X\}$.*

Teorema 5. *El nucli de f és un subgrup de $(X,*)$.*

Dem.: En aplicar el teorema 2n de caracterització dels subgrups queda:
$(Ker(f),*) =$ subgrup de $(X,*) \Leftrightarrow a*b' \in Ker(f) \quad \forall a,b \in Ker(f)$.

$$\left.\begin{array}{l} a \in Ker(f) \rightarrow f(a) = e_1 \\ b \in Ker(f) \rightarrow f(a) = e_1 \end{array}\right\} . \text{ Cal demostrar que } a*b' \in Ker(f).$$

$f(a*b') = f(a)\perp f(b') = f(a)\perp(f(b))' = e_1\perp(e_1)' = e_1\perp e_1 = e_1$.

Per la qual cosa $a*b' \in Ker(f)$.

Teorema 6. *La imatge de f és un subgrup de $(Y,\perp)$.*

Dem.: En aplicar el teorema 2n de caracterització dels subgrups queda:
$(Im(f),*) =$ subgrup de $(Y,\perp) \Leftrightarrow y\perp y_1' \in Im(f) \quad \forall y,y_1' \in Im(f)$.

Definició 11. $\left.\begin{array}{l} y \in Im(f) \rightarrow \exists a \in X \ \ / \ \ f(a) = y. \\ y_1' \in Im(f) \rightarrow \exists a_1 \in X \ \ / \ \ f(a_1) = y_1. \end{array}\right\}$. *Cal demostrar que* $y \perp y_1' \in Im(f)$.

És a dir, $y \perp y_1' \in Im(f)$ *quan* $\exists m \in X \ \ / \ \ f(m) = y \perp y_1'$.

$y \perp y_1' = f(a) \perp (f(a_1))' = f(a) \perp f(a_1') = f(a * a_1') \quad (1)$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Com } a \in X \ \ \forall a. \\ \text{Com } a_1 \in X \ \ \forall a_1 \rightarrow \exists a_1' \ \ / \ \ a_1' \in X. \end{array}\right\} \rightarrow a * a_1' = m \in X.$

De $(1) \rightarrow y \perp y_1' = f(a * a_1') = f(m)$.

12. DOMINI D'INTEGRITAT

Suposem $(X, *, \perp)$ un anell.

Definició 12. *Si* $a, b \in X$. *Direm que l'element* a *és un* **divisor de zero** *si, i sols si, sent* $a \neq e$ *(neutre de* $*$*)* $\exists b \neq e \ / \ a \perp b = b \perp a = e$ *(en cas de ser commutatiu).*

Definició 13. *Anomenem* **anell d'integritat o anell íntegre** *tot anell que no tinga divisors de zero.*

Definició 14. *Anomenem* **domini d'integritat** *tot anell íntegre, commutatiu i amb element unitat.*

Per exemple $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}_5, \overline{+}, \bar{\cdot})$ són D.I.
$(\mathbb{Z}_6, \overline{+}, \bar{\cdot})$ no és D.I. ja que $\exists\, [2] \neq [0]$, $\exists\, [3] \neq [0] \ / \ [2] \bar{\cdot} [3] = [6] = [0]$.

13. PROPIETATS SOBRE ESTRUCTURES

SEMIGRUP

1. Suposem $(X, *)$ un semigrup. Aleshores:

   i) Si $\exists e$ neutre $\Rightarrow e$ és únic. *ii)* Si $\exists e$ neutre i $\forall a \ \ \exists a'$ simètric $\Rightarrow a'$ és únic. *iii)* $\forall a$ és regular.

   Dem.: *i)* Suposem $\exists e$ i $\exists e' \in X \ \ / \ \ e \neq e'$. Cal veure que $e = e'$.

   Com que e és neutre $\rightarrow e * x = x * e = x \quad \forall x \in X \quad (1)$.

   Com que e' és neutre $\rightarrow e' * x = x * e' = x \quad \forall x \in X \quad (2)$.

   En particular per a (1) $x = e' \rightarrow e * e' = e' * e = e'$.

   En particular per a (2) $x = e \rightarrow e' * e = e * e' = e$.

   D'ambdues obtenim que $e = e'$.

   ii) Suposem $\exists a'$ i $\exists a'' \in X \ \ / \ \ a'$ i a'' simètrics d'$a \ \ / \ \ a' \neq a''$. Cal veure que $a' = a''$.

   Com qiue a' és simètric d'$a \rightarrow a * a' = a' * a = e. \quad (1)$.

   Com que a'' és simètric d'$a \rightarrow a * a'' = a'' * a = e. \quad (2)$.

En (1), $a'' * a * a' = (a'' * a) * a' = e * a' = a'$.

En (2), $a'' * a * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''$.

Per la qual cosa $a' = a''$.

iii) $a * x = a * y \Rightarrow x = y \quad \wedge \quad x * a = y * a \Rightarrow x = y$.

$a * x = a * y \rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y) \rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y \rightarrow e * x = e * y \rightarrow x = y$.

$x * a = y * a \rightarrow (x * a) * a' = (y * a) * a' \rightarrow x * (a * a') = y * (a * a') \rightarrow x * e = y * e \Rightarrow x = y$.

2. Suposem $(X, *)$ un semigrup. Aleshores:

i) El simètric de la composició és la composició dels simètrics en ordre invertit.

ii) El simètric del simètric és el mateix element.

Dem.: *i)* $(a * b)' = b' * a'$.

En efecte, suposem c és el simètric de $a * b$. Aleshores:

$(a * b) * c = e \quad (1) \quad \wedge \quad c * (a * b) = e \quad (2)$. Cal veure que $c = b' * a'$.

En (1) $\rightarrow (b' * a') * ((a * b) * c) = \begin{cases} (b' * a') * e = b' * a'. \\ b' * (a' * a) * (b * c) = (b' * e) * (b * c) = (b' * b) * c = c. \end{cases}$

Per la qual cosa, $c = b' * a'$.

En (2) $\rightarrow (c * (a * b)) * (b' * a') = \begin{cases} e * (b' * a') = b' * a'. \\ c * a * (b * b') * a' = (c * a) * (e * a') = c * (a * a') = c. \end{cases}$

Per la qual cosa, $c = b' * a'$.

Dem.: *ii)* $(a')' = a$.

En efecte, siga b el simètric d'a', és a dir, $b = (a')'$. Cal veure que $b = a$.

Com que b és el simètric d'$a' \rightarrow b * a' = a' * b = e$.

$b * a' = e \rightarrow (b * a') * a = e * a \rightarrow b * (a' * a) = a \rightarrow b * e = a \rightarrow b = a$.

$a' * b = e \rightarrow a * (a' * b) = a * e \rightarrow (a * a') * b = a \rightarrow e * b = a \rightarrow b = a$.

GRUP

3. Suposem $(X, *)$ un grup. Aleshores:

i) $X \neq \phi$. *ii)* les equacions del tipus $a * x = m, \quad y * b = n$ tenen una única solució.

Dem.: *i)* $X \neq \phi$, ja que existeix almenys l'element neutre que pertany al mateix conjunt X.

ii) $a * x = m \rightarrow a' * (a * x) = a' * m \rightarrow (a' * a) * x = a' * m \rightarrow x = a' * m$.

$y * b = n \rightarrow (y * b) * b' = n * b' \rightarrow y * (b * b') = n * b' \rightarrow y = n * b'$.

La unicitat és consequència de la unicitat de l'element simètric.

ANELL

4. Suposem $(X, *, \perp)$ un anell, aleshores:

   L'element neutre de la primera llei és absorbent per a la segona llei. És a dir, $a \perp e = e \perp a = e \quad \forall a \in X, \quad$ sent e el neutre de $*$.

   Dem.: Si e és el neutre de $* \rightarrow x * e = e * x = x \quad \forall x \in X$.

   $a \perp e = a \perp (x * e) = (a \perp x) * (a \perp e) \longrightarrow a \perp e = e$.

   $e \perp a = (e * x) \perp a = (e \perp a) * (x \perp a) \longrightarrow e \perp a = e$.

5. Regla dels signes en un anell $(X, *, \perp)$.

   i) $(a \perp b') = (a \perp b)'$, *ii)* $(a' \perp b) = (a \perp b)'$, *iii)* $(a' \perp b') = (a \perp b) \quad \forall a, b \in X$,

   sent a' el simètric d'a respecte de $*$, b' el simètric de b respecte de $*$.

   Dem.: *i)* Suposem e el neutre de $*$. Cal demostrar que el simètric de l'element $a \perp b$ és l'element $a \perp b'$. És a dir, cal demostrar que: $(a \perp b) * (a \perp b') = e \quad \wedge \quad (a \perp b') * (a \perp b) = e$.

   En efecte, $(a \perp b) * (a \perp b') = a \perp (b * b') = a \perp e = e$.

   $(a \perp b') * (a \perp b) = a \perp (b' * b) = a \perp e = e$.

   ii) Idem.

   iii) Siga $b' = m$. $\quad (a' \perp b') = (a' \perp m) = (a \perp m)' = (a \perp b')' = ((a \perp b)')' = (a \perp b)$.

6. Si l'anell $(X, *, \perp)$ fóra commutatiu $\Rightarrow (a * b) \perp (a * b') = a^2 * b^2$, sent $a^2 = a \perp a \quad b^2 = b \perp b$.

   Dem.: $(a * b) \perp (a * b') = (a \perp a) * (a \perp b') * (b \perp a) * (b \perp b') = a^2 * ((a \perp b)' * (a \perp b)) * b^2 = a^2 * e * b^2 = a^2 * b^2$.

7. En un anell d'integritat (i per tant en un domini d'integritat), qualsevol equació de la forma $a \perp x = b$ té una única solució.

   Dem.: Per reducció a l'absurd.

   Suposem que en l'anell d'integritat $(X, *, \perp)$, la equació $a \perp x = b$ tinga dos solucións x i $y \quad / \quad x \neq y$.

   $$\left.\begin{array}{l} a \perp x = b \\ a \perp y = b \end{array}\right\} \rightarrow (a \perp x) * (a \perp y)' = e \rightarrow (a \perp x) * (a \perp y') = e \rightarrow a \perp (x * y') = e.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Com que } a \in X \quad \forall a, \quad \text{siga } a \neq e \\ \text{Com que } x \neq y \rightarrow x * y' \neq e \\ \text{Com que } a \perp (x * y') = e\end{array}\right\} \rightarrow a \quad \text{i} \quad (x * y') \text{ són divisors de zero.}$$

Impossible, ja que $(X, *, \perp)$ és un anell íntegre.

Per la qual cosa, $x = y$.

COS

Suposem $(X, *, \perp)$ un cos.

Com que tot cos és un anell, totes les propietats dels anells també seran dels cossos i, a més a més:

8. Tot cos commutatiu és un domini d'integritat.

   En efecte, sabem que tot cos commutatiu és un anell commutatiu i amb element unitat (la segona llei té neutre per ser grup). Per a demostrar que és D.I. sols falta veure que l'anell és íntregre (no té divisors de zero).

   Per R.A., suposem $\exists a, b \ / \ a \neq e, \ b \neq e \ / \ a \perp b = e$ (1).

   És a dir, suposem que a i b són divisors de zero.

   Com que $(X - \{e\}, \perp)$ és un grup i $a \neq e \rightarrow \exists a^{-1} \ / \ a^{-1} \perp a = a \perp a^{-1} = e_\perp$.

   D'(1), obtenim $a^{-1} \perp (a \perp b) = a^{-1} \perp e \rightarrow (a^{-1} \perp a) \perp b = e \rightarrow e_\perp \perp b = e \rightarrow b = e$
   Absurd.

9. En tot cos commutatiu es poden resoldre les equacions del tipus: i) $(a \perp x) * b = c$, sent x la incògnita. ii) $a * (y \perp b) = c$, sent y la incògnita.

   Dem.: i) $(a \perp x) * b = c \rightarrow$i)$[(a \perp x) * b] * b' = c * b' \rightarrow (a \perp x) * (\underbrace{b * b'}_{e}) = c * b' \rightarrow$

   $(a \perp x) = c * b' \rightarrow a^{-1} \perp (a \perp x) = a^{-1} \perp (c * b') \rightarrow (\underbrace{a^{-1} \perp a}_{e_\perp}) \perp x = a^{-1} \perp (c * b') \rightarrow$

   $x = a^{-1} \perp (c * b')$.

   ii) Idem.

Definició 15. *Suposem $(X, *, \perp)$ un anell unitari. Definim* **conjunt de les unitats de l'anell** *X, el conjunt dels elements de l'anell que tinguen invers.*

És a dir, $U(X) = \{a \ / \ a \in X \ / \ \exists a^{-1} \in X \ / \ a^{-1} \perp a = a \perp a^{-1} = e_\perp\}$, on $e_\perp$ és el neutre de $\perp$ i a^{-1} el simètric (invers) d'a per a $\perp$.

Proposició 1. *$(U(X), \perp)$ és un grup, anomenat* **grup de les unitats.**

Dem.: i) $\perp$ és ll.c.i.

En efecte, si $a_1 \in U(X) \wedge a_2 \in U(X) \Rightarrow a_1 \perp a_2 \in U(X)$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \in U(X) \rightarrow \exists a_1^{-1} \ / \ a_1 \perp a_1^{-1} = a_1^{-1} \perp a_1 = e_\perp \\ a_2 \in U(X) \rightarrow \exists a_2^{-1} \ / \ a_2 \perp a_2^{-1} = a_2^{-1} \perp a_2 = e_\perp \end{array}\right\}$$

Volem demostrar que $a_1 \perp a_2 \in U(X)$, el que vol dir que cal demostrar que:

$\exists(a_1 \perp a_2)^{-1}$ / $(a_1 \perp a_2) \perp (a_1 \perp a_2)^{-1} = e_\perp$.
$(a_1 \perp a_2) \perp (a_1 \perp a_2)^{-1} = (a_1 \perp a_2) \perp (a_2^{-1} \perp a_1^{-1}) = a_1 \perp \underbrace{(a_2 \perp a_2^{-1})}_{e_\perp} \perp a_1^{-1} =$
$= a_1 \perp a_1^{-1} = e_\perp$.

ii) $\perp$ *és associativa.*

Com $U(X) \subset X \wedge (X, \perp)$ *és un semigrup* $\rightarrow \forall a, b, c \in U(X) \rightarrow a, b, c \in X \ \wedge \ \perp$ *és associativa, aleshores la llei* $\perp$ *també será associativa en* $U(X)$ *i a més a més* $e_\perp \in U(X)$.

iii) $e_\perp$ *és l'element neutre.*

$e_\perp \perp e_\perp^{-1} = e_\perp \rightarrow e_\perp^{-1} = e_\perp$. *(El neutre, si n´hi ha, és únic).*

iv) Simètric.

$\forall a \in U(X) \quad \exists a^{-1} \in U(X)$ / $a \perp a^{-1} = a^{-1} \perp a = e_\perp$.
El que volem demostrar és que $a^{-1} \in U(X)$.
Serà veritat si $\exists (a^{-1})^{-1} \in X$ / $(a^{-1})^{-1} \perp a^{-1} = e_\perp$.
Però $(a^{-1})^{-1} \perp a^{-1} = a \perp a^{-1} = e_\perp$.

14. INTRODUCCIÓ AL NOMBRE (MATEMÀTIQUES)

El nombre en matemàtiques és un símbol utilitzat per designar quantitats. Els nombres s'agrupen en conjunts o estructures; cadascuna conté a l'anterior i és més completa amb possibilitat de realitzar majors número d'operacions.

Els **nombres naturals** serveixen per contar els elements dels conjunts. Són infinits. Es poden sumar i multiplicar, però no sempre es poden restar ni dividir.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Els **nombres senceres** són els naturals i els corresponents negatius. Es poden sumar, multiplicar i restar. No sempre es poden dividir.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Els **nombres racionals** són els què es poden espressar com a quocient de dos nombres sencers. El conjunt dels racionals, $\mathbb{Q}$, està composat pels nombres sencers i pels fraccionaris. Es poden sumar, restar, multiplicar i dividir (salvat pel zero).

A diferència dels natural i sencers, els racional no estan col·locats de manera que es puguen ordenar d'un en un. És a dir, no existeix el següent d'un nombre racional, ja què entre dos racionals hi han infinits. En representar aquests racionals sobre una recta, aquesta quedaria densament ocupada. No obstant això, entre dos nombres densament situats sobre la recta, hi ha infinits punts que no estan ocupats pels racionals. Són els **nombres irracionals.**

El conjunt format pels racionals i irracionals formen el conjunt del **nombres reals,** $\mathbb{R}$.

El producte d'un nombre real per sí mateix és sempre 0 o positiu. Així, l'equació $x^2 = -1$, no te solució en el conjunt dels nombres reals.

Per què aquesta equació tinga solució es necessita definir el conjunt dels **nombres imaginaris.** Si $\sqrt{-1} = i$, l'equació anterior te dues solucions i seran: $x = i$, $x = -i$. Els nombres bi, $b \neq 0$ són el imaginaris purs.

Els **nombres complexes,** $\mathbb{C}$, estan formats per tots els nombres reals i tots els imaginaris purs. És a dir $z = a + bi$, on $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Els nombres complexes són de gran utilitat en la teoria de la corrent elèctrica alterna i també en altres branques de la física, enginyeria i ciències naturals.

RESUM

$$\left.\begin{array}{c}\mathbb{N}\\ negatius\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}\mathbb{Z}\\ \mathbb{F}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}\mathbb{Q}\\ \mathbb{I}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}\mathbb{R}\\ Imaginaris\end{array}\right\}\mathbb{C}.$$

De tal manera que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

15. NECCESITAT D'AMPLIAR $\mathbb{N}$

Sabem que $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ és un semianell commutatiu i unitari ja que: i) $(\mathbb{N}, +)$ és un semigrup commutatiu i unitari on tot element és regular. ii) $(\mathbb{N}, \cdot)$ és un semigrup commutatiu i unitari on tot element, llevat el zero és regular. iii) $\cdot$,és distributiva respecte a $+$.

A més a més sabem que: 1) l'únic element simetritzable per a la suma és el zero. 2) la substracció no és llei de composició interna en $\mathbb{N}$. 3) l'equació $a + x = b$ no té sempre solució en $\mathbb{N}$.

A més a més sabem que: A) l'únic element simetritzable per al producte és l'element unitat. B) la divisió no sempre és llei de composició interna en $\mathbb{N}$. C) l'equació $a \cdot x = b$ no té sempre solució en $\mathbb{N}$.

Per la qual cosa es preten aconseguir un conjunt anomenat $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ i que els problemes anteriors queden solucionats. Els problemes 1,2 i 3 es poden solucionar. No així els A,B i C.

16. ESTRUCTURACIÓ DE $\mathbb{Z}$ COM A ANELL

16.1. Relació d'equivalència en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Suposem que $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Direm que $(a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

Proposició 2. *La relació $\Re$ és una relació binària d'equivalència i el conjunt quocient $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, \Re$ l'anomenem $\mathbb{Z}$.*

Cada classe d'equivalència serà un nombre sencer. El representant canònic és el que almenys un element del parell ordenat és el zero. Així $\overline{(m,0)} = +m \quad \overline{(0,n)} = -n \quad \overline{(0,0)} = 0$.

Per la qual cosa $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

16.2. $(\mathbb{Z}, \overline{+}, \bar{\cdot}\,)$ és un domini d'integritat.

Definició 16. ***Domini d'integritat*** *és un anell íntegre (sense divisors de zero), commutatiu i amb element unitat.*

En efecte, i) Si definim la llei $\overline{+} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

Tal que($\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}$) $\rightsquigarrow$ $(\overline{(a,b)}\,\overline{+}\,\overline{(c,d)}) = \overline{(a+c, b+d)}$. Aleshores $(\mathbb{Z}, \overline{+})$ és un grup abelià.

ii) Si definim la llei $\bar{\cdot} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

Tal que($\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}$) $\rightsquigarrow$ $(\overline{(a,b)}\ \bar{\cdot}\,\overline{(c,d)}) = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$. Aleshores $(\mathbb{Z}, \bar{\cdot})$ és un semigrup abelià amb element unitat.

iii) La llei $\bar{\cdot}$ és distributiva respecte a $\overline{+}$.

Per la qual cosa $(\mathbb{Z}, \overline{+}, \bar{\cdot}\,)$ és un anell commutatiu i amb element unitat.

Definició 17. *Un element $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ és un* ***divisor de zero*** *si i sols si $\exists b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ / $a \,\bar{\cdot}\, b = 0$ (neutre de la 1ª llei).*

Definició 18. *Un element $a \in \mathbb{Z}$* ***no és un divisor de zero*** *si i sols si $\exists b \in \mathbb{Z}$ tal que si $a \,\bar{\cdot}\, b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.*

És a dir que per a demostrar que l'anell és íntegre caldrà veure que no te divisors de zero. Si representem en parells ordenats tindrem que:
$\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(0,0)} \vee \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$, la qual cosa és equivalent a $\overline{(a,b)} \neq \overline{(0,0)} \wedge \overline{(c,d)} \neq \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)} \neq \overline{(0,0)}$.

Utilitzarem la demostració per reducció a l'absurde.

Si $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)} = \overline{(0,0)} \rightarrow \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(0,0)} \rightarrow (ac+bd, ad+bc)\Re(0,0) \rightarrow ac+bd = ad+bc$. (I)

Suposem que $c < d$. De (I), $b(d-c) = a(d-c) \rightarrow b = a \rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$, en contradicció amb la hipòtesi.

Suposem que $c = d \rightarrow \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$, en contradicció amb la hipòtesi.

Suposem que $d < c$. De (I), $a(c-d) = b(c-d) \rightarrow a = b \rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$, en contradicció amb la hipòtesi.

17. EL PRINCIPI DEL BON ORDRE

En $\mathbb{Z}$ podem definir $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \geqq 1\}$. Si intentem operar igual en $\mathbb{Q}$ i en $\mathbb{R}$ tendriem que $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x > 0\}$ i $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ però no és possible representar $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$ utilitzant $\geqq$ com en $\mathbb{Z}^+$.

El conjunt $\mathbb{Z}^+$ es diferència dels conjunts $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{R}^+$ en que qualsevol subconjunt X de $\mathbb{Z}^+$ té mínim. És a dir, $\forall X \subset \mathbb{Z}^+$, $X \neq \phi \quad \exists a \in X \ / \ a \leq x \quad \forall x \in X$. Per la qual cosa es diu que $\mathbb{Z}^+$ està ben ordenat.

Aquest principi del bon ordre a més a més de diferenciar $\mathbb{Z}^+$ de $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{R}^+$ és la base de la demostració per inducció completa estudiada en el tema 1 de lògica matemàtica.

18. DIVISIBILITAT EN $\mathbb{Z}$. PROPIETATS

Definició 19. *Suposem $a, b \in \mathbb{Z}$. Direm que a* ***és un divisor de*** *b, o que b* ***és un múltiple de*** *a o que b* ***és divisible per*** *a o que a* ***divideix a*** *b si i sols si, al dividir b entre a dóna residu zero.*

És a dir, $\boxed{a/b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = aq} \quad a \neq 0$.

PROPIETATS:

$\boxed{\textit{P1: } 0 \textit{ és múltiple de } a \ \forall a \in \mathbb{Z}.}$

Dem.: $a/0$ ja que $\exists q = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = a0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\textit{P2: La relació "ser divisor de" no és R.B.O. en } \mathbb{Z}.}$

a) Reflexiva: $a/a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$, ja que $\exists 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = a1$

b) Antisimètrica: $a/b \wedge b/a \overset{no}{\Rightarrow} a = b$.

Dem.:

$$\left.\begin{array}{l} a/b \rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = aq_1 \\ b/a \rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = bq_2 \end{array}\right\} \rightarrow b = bq_1q_2 \rightarrow 1 = q_1q_2.$$

Si $1 = q_1q_2 \rightarrow \begin{cases} \text{a) } q_1 = q_2 = 1 \rightarrow a = b \\ \text{b) } q_1 = q_2 = -1 \rightarrow a = -b \end{cases}$
Aleshores no compleix la propietat antisimètrica.
c) Transitiva: $a/b \wedge b/c \Rightarrow a/c$
Dem.: $\left.\begin{array}{l} a/b \rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = aq_1 \\ b/c \rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c = bq_2 \end{array}\right\} \rightarrow c = aq_1q_2 = aq_3 \rightarrow a/c.$

$$\boxed{\textit{P3:}\quad a/b \Leftrightarrow \begin{cases} 1\ (-a)/b \\ 2\ a/(-b) \\ 3\ (-a)/(-b) \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.}$$

P4: $\boxed{-1/a \quad \forall a \in \mathbb{Z}.}$

P5: $\boxed{(-a)/a \quad \forall a \in \mathbb{Z}.}$

P6: Qualsevol nombre sencer que divideix a varios, divideix també a la seua suma.
És a dir, $\boxed{m/a \wedge m/b \wedge m/c \Rightarrow m/(a+b+c).}$ $\forall m, a, b, c \in \mathbb{Z}.$
Dem.: $\left.\begin{array}{l} m/a \rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = mq_1 \\ m/b \rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = mq_2 \\ m/c \rightarrow \exists q_3 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c = mq_3 \end{array}\right\} \rightarrow a + b + c = m(\underbrace{q_1 + q_2 + q_3}_{q \in \mathbb{Z}}) =$
$mq \rightarrow m/(a + b + c).$

P7: Qualsevol nombre sencer que divideix a dos, divideix també a la diferència.
És a dir, $\boxed{m/a \wedge m/b \Rightarrow m/(a-b).}$ $\forall m, a, b \in \mathbb{Z}.$

P8: Qualsevol nombre sencer que divideix a un altre, divideix també als seus múltiples
És a dir, $\boxed{m/a \Rightarrow m/(\dot{a}).}$ $\forall m, a \in \mathbb{Z}.$

P9: Qualsevol nombre sencer que divideix a dos, divideix també a qualsevol combinació lineal. És a dir, $\boxed{m/a \wedge m/b \Rightarrow m/(xa + yb).}$ $\forall m, a, b, x, y \in \mathbb{Z}.$

P10: $\boxed{a/b \Rightarrow (ac)/(bc).}$ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$

19. DIVISIÓ EUCLÍDEA (ALGORISME DE LA DIVISIÓ)

Teorema 7. $\boxed{\textit{Si } a,b \in \mathbb{Z}, \textit{ on } a > 0 \Longrightarrow \exists! q,r \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } b = aq + r, \textit{ on } 0 \leq r < a.}$

Dem.:
Si a/b el teorema es compleix ja que $r = 0$.
Suposem que a no divideix a b.
Siga $C = \{b - ta,\ t \in \mathbb{Z},\ b - ta > 0\} \subset \mathbb{Z}^+$. Demostrem que $C \neq \phi$.
Si $b > 0$ i $t = 0 \to b \in C \to C \neq \phi$.
Si $b \leq 0$, siga $t = b - 1 \to b - ta = b - (b-1)a = b - ba + a = b(1-a) + a > 0$ ja que :

$$a \in \mathbb{Z}^+ \to a \geqq 1 \to a - 1 \geqq 0 \to \left.\begin{array}{r} 1 - a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} b(1-a) \geqq 0 \\ a \in \mathbb{Z}^+ \end{array}\right\} \to b(1-a) + a > 0.$$

Per la qual cosa $b - ta \in C \to C \neq \phi$.
Pel principi del bon ordre, com que $C \subset \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \wedge C \neq \phi \to C$ té un element mínim. Siga $r = b - qa$ l'element mínim per a algún $q \in \mathbb{Z}$.
Vegem que $0 \leq r < a$.
Si $r = a \to a = b - qa \to b = a + qa = (1+q)a$. És a dir a divideix a b, en contradició.
Si $r > a \to r = a + c$, per a algún $c \in \mathbb{Z}^+ \to b - qa = r = a + c \to c = b - qa - a = b - (q+1)a \in C$, ja que $c \in \mathbb{Z}^+ \wedge c = b - sa$, amb $s \in \mathbb{Z}$, el que contradeix a r (El mínim seria c)
Conclusió $r < a$. Com que $r \in \mathbb{Z}^+ \to 0 \leq r < a$.
Faltarà veure la unicitat de q i de r.
Suposem que $\exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} b = aq_1 + r_1, \text{ on } 0 \leq r_1 < a \\ b = aq_2 + r_2, \text{ on } 0 \leq r_2 < a \end{array}\right\} \to aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2 \to a\,|q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| < a,$$

ja que $0 \leq r_1 \wedge r_2 < a$.
Si $q_1 \neq q_2 \to a\,|q_1 - q_2| < a$, contradicció. Aleshores $q_1 = q_2 \wedge r_1 = r_2$ ja que

$$\left.\begin{array}{l} b = aq_1 + r_1 \\ b = aq_1 + r_2 \end{array}\right\} \to 0 = r_1 - r_2 \to r_1 = r_2.$$

Exemple 1. *Escriviu el nombre 6137 en base octal (8).*

Sol.: Es tracta de dividir succesivament el nombre entre 8 i veure els residus $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$ amb $r_k > 0$ Aleshores $6137 = (r_k \cdots r_2\ r_1\ r_0)_8 = 13771_8$

20. MÀXIM COMÚ DIVISOR

Definició 20. *Anomenem* **m.c.d. de dos números** *al major dels seus divisors comuns. És a dir, si $a, b \in \mathbb{Z}$ on al menys un d'ells no és zero i $d \in \mathbb{Z}^+$.Aleshores $d = m.c.d.(a,b)$ sii (def): i) $d/a \wedge\ d/b$ ii) Si $\exists d'$ tal que $d'/a \wedge d'/b \Rightarrow d'/d$.*

La primera condició expresa que el *m.c.d.* és divisor comú a ambdós números. La segona que és el major, és a dir qualsevol número que fora divisor comú dels dos, ha de ser divisor del *m.c.d.*

Aquesta definició ens dona un primer criteri per a trobar el *m.c.d.* de dos nombres naturals (sencers positius).

Per pasos: i) Trobarem tots els divisors d'a, és a dir $D(a)$. ii) Trobarem tots els divisors de b, és a dir $D(b)$. iii) Obtindrem $D(a) \cap D(b)$. iv) Al major dels elements de $D(a) \cap D(b)$ l'anomenem d. Per exemple trobeu el $m.c.d.(20, 8)$. Sol.:$d = 4$.

Nota 3. *i) Si $a, b \in \mathbb{Z}$, ¿ existeix sempre un m.c.d. de a i b?. ii) ¿Quants màxims comuns divisors podem obtenir d'un par de sencers?*

Per a resoldre aquestes questions cal demostrar el següent teorema.

Teorema 8. $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \exists!\ c \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } c = m.c.d.(a, b).}$

Dem.: Suposem $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Siga $C = \{as + bt \text{ tal que } as + bt > 0,\ s, t \in \mathbb{Z}\} \neq \phi$.

Pel principi del bon ordre, C té element mínim. Siga c. Cal demostrar que $c = m.c.d.(a, b)$.

i) Cal demostrar que $c/a \wedge c/b$.

Com que $c \in C \rightarrow c = ax + by$ per a algun $x, y \in \mathbb{Z}$.

Per reducció a l'absurde, suposem que $(c/a)^{\neg} \rightarrow a = qc + r$ on $0 < r < c$

$\rightarrow r = a - qc = a - q(ax + by) = (1 - qx)a + (-qb)y \rightarrow r \in C$. Absurde ja que c és el mínim.

De manera similar es demostra que c/b.

ii) Cal demostrar que si $d \in \mathbb{Z} \wedge d/a \wedge d/b \Rightarrow d/c$

Per una propietat estudiada anteriorment, si $d \in \mathbb{Z}$ tal que $d/a \wedge d/b \rightarrow d/ax + by \rightarrow d/c$.

iii) Cal demostrar la unicitat. Suposem que c_1 i c_2 siguen dos màxim comú divisors de a i b.

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = m.c.d.(a, b) \wedge c_2 = divisor\ comú \rightarrow c_2/c_1 \\ c_2 = m.c.d.(a, b) \wedge c_1 = divisor\ comú \rightarrow c_1/c_2 \end{array}\right\} \rightarrow c_1 = c_2.$$

Nota 4. $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow m.c.d.(-a, b) = m.c.d.(a, -b) = m.c.d.(-a, -b) = m.c.d.(|a|, |b|) = m.c.d.(a, b)$.

És a dir, si $a, b \in \mathbb{Z}$, el $m.c.d.(a, b)$ és el major positiu del conjunt $D(a) \cap D(b)$

Nota 5. $\forall a \in \mathbb{Z} - \{0\} \rightarrow m.c.d.(a, 0) = |a|$.

Nota 6. *Si $c = m.c.d.(a, b) \rightarrow c = ax + by$ per a algun $x, y \in \mathbb{Z}$.*

21. MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE

Definició 21. *Anomenem* **m.c.m. de dos números** *al menor dels seus múltiples comuns. És a dir, si $a, b \in \mathbb{Z}$ on al menys un d'ells no és zero i $m \in \mathbb{Z}^+$.Aleshores $m = m.c.m.(a,b)$ sii (def): i) $a/m \wedge b/m$. ii) Si $\exists m'$ tal que $a/m' \wedge b/m' \Rightarrow m/m'$.*

La primera condició expresa que el *m.c.m.* és múltiple comú a ambdós números. La segona que és el menor, és a dir qualsevol número que fora múltiple comú dels dos, ha de ser múltiple del *m.c.m.*

Aquesta definició ens dona un primer criteri per a trobar el *m.c.m.* de dos nombres naturals (sencers positius).

Per pasos: i) Trobarem tots els múltiples d'a, és a dir $\dot{a}$. ii) Trobarem tots els múltiples de b, és a dir $\dot{b}$. iii) Obtindrem $\dot{a} \cap \dot{b}$. iv) Al menor dels elements de $\dot{a} \cap \dot{b}$ l'anomenem m. Per exemple trobeu el $m.c.m.(20,8)$. Sol.: $m = 40$.

Nota 7. $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow m.c.m.(-a,b) = m.c.m.(a,-b) = m.c.m.(-a,-b) = m.c.m.(|a|,|b|) = m.c.m.(a,b)$.

És a dir, si $a, b \in \mathbb{Z}$, el $m.c.m.(a,b)$ és el menor positiu del conjunt $\dot{a} \cap \dot{b}$.

Exemple 2. *Trobeu el m.c.d. i m.c.m. dels nombres $a = 12$, $b = -15$.*

22. ALGORISME D'EUCLIDES

Lema 1. $\boxed{a/b \Leftrightarrow m.c.d.(a,b) = a.}$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Dem. $\rightarrow$) a és un divisor de b i a és un divisor de a, $\forall a$. Aleshores a és un divisor comú de a i b i és el major divisor comú ja que a no pot tenir un divisor major que ell mateix.

$\leftarrow$) Si $m.c.d.(a,b) = a \rightarrow a \in D(a) \wedge a \in D(b) \rightarrow a/b$.

Algorisme d'Euclides : $\boxed{m.c.d.(a,b) = m.c.d.(b,r).}$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a > b$, $(a/b)^\neg \wedge (b/a)^\neg \wedge a = bq + r \wedge r < b$.

És a dir, el *m.c.d.* de dos números que no són divisibles l'un per l'altre coincideix amb el *m.c.d.* del menor d'ells i el residu de dividir el major pel menor.

Dem.: És suficient demostrar que a i b tenen els mateixos divisors comuns que b i r ja que aleshores tindran el mateix *m.c.d.*

$D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(r)$.

$\subset$) $\forall x \in D(a) \cap D(b) \rightarrow x \in D(b) \cap D(r)$.

$$\forall x \in D(a) \cap D(b) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in D(a) \rightarrow x/a \\ x \in D(b) \rightarrow x/b \rightarrow x/bq \end{array} \right\} \rightarrow x/a - bq \rightarrow x/r \rightarrow$$

$\rightarrow x \in D(r) \rightarrow x \in D(b) \cap D(r)$.

$\supset$) $\forall x \in D(b) \cap D(r) \rightarrow x \in D(a) \cap D(b)$.

$\forall x \in D(b) \cap D(r) \to \left\{ \begin{array}{c} x \in D(b) \to x/b \to x/bq \\ x \in D(r) \to x/r \to x/a-bq \end{array} \right\} \to x/(bq+a-bq) \to x/a \to$
$\to x \in D(a) \to x \in D(a) \cap D(b)$.

El lema i l'Algoritme d'Euclides ens donen un procediment per a obtenir el *m.c.d.* de dos nombres.:

$$\boxed{\text{"El } m.c.d. \text{ és l'últim residu anterior al residu zero"}}.$$

El que es fa és dividir el major nombre pel menor. Si el residu és zero, pel lema obtenim que el menor és divisor del major i per la qual cosa és el *m.c.d.* Si la divisió no és exacta, tornem a dividir el major pel menor i obtenim un quocient q_1 i un residu r_1. Si la divisió és exacta, r_1 és el *m.c.d.* que busquem. Si no és exacta, tornem a dividir el major pel menor i obtenim un quocient q_2 i un residu r_2, etc. Obtenim:

$m.c.d.(a,b) = m.c.d.(b,r_1) = m.c.d.(r_1,r_2) = \ldots = m.c.d.(r_{n-2},r_{n-1}) = m.c.d.(r_{n-1},0) = r_{n-1}$.

En la pràctica:

$$\begin{array}{ccccccccc} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdots & \cdots & q_{n-1} & q_n \\ a & b & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{n-3} & r_{n-2} & \boxed{r_{n-1}} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & \cdots & r_{n-1} & 0 & \end{array}$$

Exemple 3. *Trobeu el m.c.d.*(370, 145).

$$\begin{array}{lcccccc} & & 2 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ \text{Sol.:} & 370 & 145 & 80 & 65 & 15 & \boxed{5} \\ & 80 & 65 & 15 & 5 & 0 & \end{array}$$

Aleshores $m.c.d.(370,145) = m.c.d.(-370,145) = m.c.d.(370,-145) = m.c.d.(-370,-145) = 5$.

Per la nota 5 anterior, si $m.c.d.(370,145) = 5 \to \exists x, y \in \mathbb{Z}$, tal que $370x + 145y = 5 \to 74x + 29y = 1$.(Equació diofàntica).

Aquestes equaciones les veurem més endavant. Una solució particular és $x_0 = -9$, $y_0 = 23$.

La solució general és $x = -9 + 29k$, $y = 23 - 74k$ on $k \in \mathbb{Z}$.

23. TEOREMA DE BEZOUT-BACHET: CONSEQÜÈNCIES

Definició 22. *a i b* ***són primers entre ells*** *si i sols si, $m.c.d.(a,b) = 1$, on $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 9. $\boxed{m.c.d.(a,b) = 1 \Leftrightarrow \exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } ax_0 + by_0 = 1.}$

Dem.: $\to$) $m.c.d.(a,b) = 1 \to \exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $ax_0 + by_0 = 1$. Per la nota 6 anterior.

$\leftarrow$) Si $ax_0 + by_0 = 1$, suposem que $m.c.d.(a,b) = d$. Caldrà veure que $d = 1$.

$$m.c.d.(a,b) = d \to \begin{cases} d/a \to d/ax_0 \\ d/b \to d/by_0 \end{cases} \to d/ax_0 + by_0 \to d/1 \to d = 1.$$

C-1. $\boxed{\textit{Teorema d'Euclides.}}$

$\boxed{\text{Si } a/bc \wedge m.c.d.(a,b) = 1 \Rightarrow a/c.}$ on $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Dem.: Per hipòtesi $m.c.d.(a,b) = 1 \underset{\text{T.B.B.}}{\longrightarrow} \exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $ax_0 + by_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} a/a \to a/\dot{a} \to a/a(cx_0) \\ a/bc \to a/\dot{bc} \to a/(bc)y_0 \end{array}\right\} \to a/a(cx_0) + (bc)y_0 \to a/c(ax_0 + by_0) \to a/c.$$

C-2. $\boxed{m.c.d.(a,b) = d \Leftrightarrow m.c.d.(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1.}$ on $a, b \in \mathbb{Z}$.

Dem.: $\to$) $m.c.d.(a,b) = d \to \begin{cases} d/a \to \exists a' \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = a'd. \\ d/b \to \exists b' \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = b'd. \end{cases}$

$m.c.d.(a,b) = d \underset{Nota}{\to} \exists x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $d = ax_1 + by_1 = (a'd)x_1 + (b'd)y_1 = d(a'x_1 + b'y_1) \to a'x_1 + b'y_1 = 1 \to m.c.d.(a', b') = 1 \to m.c.d.(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

$\leftarrow$) $m.c.d.(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1 \to \exists x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $(\frac{a}{d})x_1 + (\frac{b}{d})y_1 = 1 \to ax_1 + by_1 = d \to m.c.d.(a,b) = d$.

Nota 8. *Si $a = a'd \wedge b = b'd$, la conseqüència se transformarà:*

$m.c.d.(a,b) = d \Leftrightarrow m.c.d.(a', b') = 1$.

El que vol dir que a' i b' són primers entre ells. És important a l'hora de fer problemes.

C-3. $\boxed{m.c.d.(a,b) \times m.c.m.(a,b) = |ab|.}$ on $a, b \in \mathbb{Z}$.

Dem.:1) Suposem que $m.c.d.(a,b) = 1$.

Suposem $m = m.c.m.(a,b) \left\{\begin{array}{l} m = \dot{a} \to m = ap \text{ on } p \in \mathbb{Z}. \ (1) \\ m = \dot{b} \to b/m \end{array}\right\} \to b/ap \wedge m.c.d.(a,b) = 1 \underset{T.Euclides}{\to} b/p \to p = bq$ on $q \in \mathbb{Z}$ (2).

De (1) *i* (2) $\to m = a(bq) = (ab)q \to \boxed{ab/m}$ (I).

Però $\boxed{m/ab}$ (II) ja que $ab = \dot{a} \wedge ab = \dot{b} \to ab = \overbrace{m.c.m.(a,b)}^{\bullet} = \dot{m}$.

De (I) i (II) $\to |ab| = m$.

Nota 9. *La relació de divisibilitat en $\mathbb{Z}$ no compleix la propietat antisimètrica.*

2) Suposem que $m.c.d.(a,b) = d$. Suposem $m.c.m.(a,b) = m$.

Per la conseqüència 2, $m.c.d.(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1 \rightarrow m.c.d.(a', b') = 1$ on $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$

Aleshores $m = m.c.m.(a'd, b'd) = d \times m.c.m.(a', b') = d\,|a'b'| \rightarrow md = d^2\,|a'b'| = |da'db'| = |ab|$.

24. TEOREMA FONAMENTAL DE LA ARITMÈTICA

Definició 23. *Si $n \in \mathbb{Z}^+$ i $n > 1$, direm que n és* **primer** *si i sols si els únics divisors de n són el 1 i el propi n.*

És a dir n és primer sii $D(n) = \{1, n\}$.

Definició 24. *Si $n \in \mathbb{Z}$, direm que n és* **primer** *si i sols si els únics divisors de n són el $\pm$ 1 i el $\pm$ n.*

És a dir n és primer sii $D(n) = \{+1, -1, +n, -n\}$.

Definició 25. *Qualsevol nombre que no és primer s'anomena* **compost.**

Proposició 3. *El conjunt de nombres primers és infinit.*

Dem.: Per R.A. Suposem que p fora el major de tots els nombres primers. Formem la taula de tots els nombres primers menors que p.

Considerem el producte de tots aquells. Siga $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_p = 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p$.

Siga $n = 1 + p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_p = 1 + 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p$ tal que $p_1 < p_2 < \cdots < p_p = p$.

Aquest nombre n és primer i $n > p$.

En efecte,

$n = 1 + \dot{2} \rightarrow n$ no és múltiple de 2.

$n = 1 + \dot{3} \rightarrow n$ no és múltiple de 3.

$n = 1 + \dot{5} \rightarrow n$ no és múltiple de 5.

$\vdots$

$n = 1 + \dot{p} \rightarrow n$ no és múltiple de p.

Per la qual cosa n no és compost ja que no és múltiple de cap primer. Si n no és compost, n és primer. Evidentment per construcció $n > p$, el que contradiu que p siga el major primer.

Teorema 10. *Qualsevol nombre compost es pot descomposar, de forma única salvat l'ordre dels factors, com a producte de primers.*

Dem.: En primer lloc veurem l'existència i després la unicitat.

Existència: Si n és un nombre compost, n es pot descomposar com a producte d'un primer a per un altre a'. És a dir, $n = a \times a'$, on a és primer.

Si a' és compost, també podem descomposar-lo com a producte d'un primer b per un altre b'. És a dir, $a' = b \times b'$, on b és primer.

Si b' és compost, també podem descomposar-lo com a producte d'un primer c per un altre c'. És a dir, $b' = c \times c'$, on c és primer.

Obtenim $n = a \times a' = a \times b \times b' = a \times b \times c \times c'$ etc. Al final quedaria n descomposat com a producte de nombres primers.

Unicitat: Suposem que n tinga dos descomposicions com a producte de primers.

Siga, doncs, $n = a \times b \times c \times \cdots \times k \quad \wedge \quad n = a_1 \times b_1 \times c_1 \times \cdots \times k_1 \to n = a \times b \times c \times \cdots \times k = a_1 \times b_1 \times c_1 \times \cdots \times k_1 \to a \times (b \times c \times \cdots \times k) = a_1 \times b_1 \times c_1 \times \cdots \times k_1 \to a/(a_1 \times b_1 \times c_1 \times \cdots \times k_1)$.

Aleshores, o a és igual a algú dels factors, o a és divisor d'algú d'ells. Com que $b_1, c_1, \cdots, k_1$ són primers, no admiteixen cap divisor distints de la unitat o d'ells mateix. Per la qual cosa a és igual a algú desl factors. En ordenar el segon membre podem obtenir que $a = a_1$.

Al dividir per a queda: $b \times c \times \cdots \times k = b_1 \times c_1 \times \cdots \times k_1$.

De la mateixa forma obtenim que $b = b_1$, $c = c_1, \cdots k = k_1$.

En la descomposició d'un nombre compost n, pot aparéixer un nombre primer més d'una vegada. En aquest cas $n = a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times \cdots \times a_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} a_i^{\alpha_i}$ on $\alpha_i \geqq 1$, a_i primers (de forma creixent).

Per exemple $2058 = 2 \times 3 \times 7^3$. $\quad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

En aquestes condicions veurem una proposició que ens indique quan un nombre descomposat en factors és divisor d'un altre.

Proposició 4. *$n'/n \Leftrightarrow n$ conté tots dels factors primers de n' amb exponents iguals o majors.*

És a dir, la condició necessària i suficient per a que un nombre n siga divisible per un altre n' després d'haver efectuat la descomposició en factors primers és que n, continga tots els factors primers de n', amb exponents iguals o majors.

Dem.: Suposem $\quad n = \prod_{i=1}^{r} a_i^{\alpha_i} \qquad n' = \prod_{i=1}^{r} a_i^{\alpha'_i} \qquad \alpha'_i \leq \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, r.$

$\to$) $n'/n \to \exists q \in \mathbb{N}^*$ tal que $n = n'q \to n$ conté tots els factors de n' i a més a més els de q. (si algun dels factors de q coincideixen amb els de n', l'exponent serà major).

$\leftarrow$) Si n conté tots els factors primers de n' amb exponents majors o iguals, fent ús de les propietats associativa i commutativa del producte de naturals, obtindrem que els factors de n es podran agrupar en els factors que composen n' i els restants. És a dir, $n = n'k$, on k és un altre factor. El que vol dir és que $n = \dot{n'} \to n'/n$.

Exemple: Si $n = 2^3 \times 5^4 \times 7^3 \times 13^2$. $\quad n' = 2 \times 5^4 \times 7^2$. Aleshores n'/n.

Però Si $n'' = 2^3 \times 3 \times 13$. Aleshores n'' no divideix a n ja que no tenen els mateixos factors.

Nota 10. *Si $n \in \mathbb{Z}^+$ és compost, $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$ on p_i són primers escrits de forma creixent i $a_i \geqq 0$.*

Per exemple $2058 = 2 \times 3 \times 7^3 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^3 \times 11^0 \times 13^0 \times \ldots$

El següent teorema s'utilitza per a calcular de manera pràctica el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de dos nombres que estan descomposats en factors.

Teorema 11. *Si* $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$, $b = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}$ *on p_i són primers escrits de forma creixent i* $a_i, b_i \geqq 0 \Rightarrow$ *i)* $m.c.d.(a,b) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c_i}$, *on* $c_i = min\ \{a_i, b_i\}$ *ii)* $m.c.m.(a,b) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d_i}$, *on* $d_i = max\ \{a_i, b_i\}$.

Lema 2. *Si* $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i} \Rightarrow D(n) = \left\{ x \text{ tal que } x = \prod_{i=1}^{r} p_i^{c_i},\ \text{on } 0 \leq c_i \leq a_i \right\}$. *(resultat evident si aplique la proposició anterior).*

Els primers divisors de n són:

$$\left.\begin{array}{l} 1, p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{a_1} \\ 1, p_2, p_2^2, \ldots, p_2^{a_2} \\ \vdots \\ 1, p_r, p_r^2, \ldots, p_r^{a_r} \end{array}\right\}$$

Aleshores $D(n)$ serien els termes del producte $(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{a_1}) \times (1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{a_2}) \times \ldots \times (1 + p_r + p_r^2 + \ldots + p_r^{a_r})$ (I).

Exemple: Trobeu els divisors de 540.

$n = 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.

$$\left.\begin{array}{l} 1, 2, 2^2 \\ 1, 3, 3^2, 3^3 \\ 1, 5 \end{array}\right\}$$

Multipliquem tots els termes de la 1^a fila per tots els termes de la segona i obtenim:

$$\left.\begin{array}{l} 1, 2, 4 \\ 3, 6, 12 \\ 9, 18, 36 \\ 27, 54, 108 \end{array}\right\}$$

Multipliquem tots els termes per la última fila i obtenim:

$$\left.\begin{array}{l} 1, 2, 4, 5, 10, 20 \\ 3, 6, 12, 15, 30, 60 \\ 9, 18, 36, 45, 90, 180 \\ 27, 54, 108, 135, 270, 540 \end{array}\right\} = D(540).$$

El **número de divisors** d'un nombre compost correspon el número de termes del producte anterior. És a dir $(1 + a_1) \times (1 + a_2) \times \cdots \times (1 + a_r)$.

En l'exemple: $(1 + 2) \times (1 + 3) \times (1 + 1) = 24$.

La **suma de tots els divisors** d'un nombre compost correspon el valor numéric del producte (I).

Cada paréntesi és la suma dels termes d'una progresió geomètrica. $(s = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1}$, on q és la raó), ja que

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 q \\ a_3 = a_1 q^2 \\ \vdots \\ a_n = a_1 q^{n-1} \end{array}\right\} \to s = a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) \to qs - s = a_n q - a_1 \to$$

$$\to s = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{(a_1 q^{n-1})q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

$$S = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \times \cdots \times \frac{p_r^{a_r+1}-1}{p_r - 1}.$$

En l'exemple: $S = \dfrac{2^3-1}{1} \times \dfrac{3^4-1}{2} \times \dfrac{5^2-1}{4} = 1680.$

Demostració del teorema:

i) Siga $d = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c_i}$, on $c_i = min\ \{a_i, b_i\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ja que } 0 \le c_i \le a_i \underset{Lema}{\to} d \in D(a) \\ \text{Ja que } 0 \le c_i \le b_i \underset{Lema}{\to} d \in D(b) \end{array}\right\} \to d \in D(a) \cap D(b)\ (1).$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \exists d' \in D(a) \cap D(b) \to d' \in D(a) \underset{Lema}{\to} d' = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c'_i}, \text{ on } 0 \le c'_i \le a_i \\ \text{Si } \exists d' \in D(a) \cap D(b) \to d' \in D(b) \underset{Lema}{\to} d' = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c'_i}, \text{ on } 0 \le c'_i \le b_i \end{array}\right\} \to 0 \le c'_i \le$$

c_i, ja que $c_i = min\ \{a_i, b_i\}$.

Per la qual cosa, pel lema, $d' \in D(d)$ (2).

De (1) i (2), obtenim que $d = m.c.d.(a,b)$ (ja que d és el major comú divisor de a i de b).

ii) Cal observar que $c_i + d_i = min\ \{a_i, b_i\} + max\ \{a_i, b_i\} = a_i + b_i \quad \forall i$.

Però $m.c.d.(a,b) \times m.c.m.(a,b) = |ab|$ on $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a, b \in \mathbb{Z}^+ \to m.c.d.(a,b) \times m.c.m.(a,b) = ab \quad (I)$.

$ab = (\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}) \times (\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i+b_i} = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c_i+d_i} = (\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c_i}) \times (\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d_i}) = m.c.d.(a,b) \times (\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d_i}) = d(\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d_i}) \quad (II)$.

De (I) i $(II) \to md = d(\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d_i})$ i $d \neq 0 \to m = m.c.m.(a,b) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d_i}$, on $d_i = max\ \{a_i, b_i\}$.

Exemple 4. *i) Trobeu* $m.c.d.(180, 270)$ *i* $m.c.m.(180, 270)$ *Sol.:* $d = 90$, $m = 540$.

ii) Trobeu $m.c.d.(140, 2058)$ *i* $m.c.m.(140, 2058)$ *Sol.:* $d = 14$, $m = 20580$.

25. EQUACIONS DIOFÀNTIQUES

Aquestes equacions s'anomenen diofàntiques en honor al gran matemàtic grec Diofante, que va viure a Alejandria (Egipte) durant el s. III dC.

Definició 26. *Anomenem* **equació diofàntica** *a una equació amb varies incògnites, amb coeficients i solucions nombres sencers.*

És a dir equacions de la forma $ax \pm by = c$, on $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i amb solucions senceres.

Estudi de l'equació $ax + by = c$ (1).

Tractarem de trobar les solucions senceres d'aquesta equació diofàntica.

Suposem que (x_0, y_0) siga una solució de (1).

Aleshores $ax_0 + by_0 = c$.

Si $d = m.c.d.(a, b)$ vol dir que a i b no són primers entre ells.

Ja que $d \in D(a) \wedge d \in D(b) \to d \in D(ax_0) \wedge d \in D(by_0) \to d \in D(ax_0 + by_0) \to d \in D(c)$.

Per la qual cosa:

$\boxed{\text{L'equació diofàntica } ax + by = c \text{ te solució si i sols si } d \in D(c), \text{ on } m.c.d.(a, b) = d.}$

En dividir (1) entre d obtenim:

$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d} \to a'x + b'y = c'$ (2) on a' i b' són primers entre ells.

Si (x_0, y_0) és solució de (1), també és solució de (2). Per la qual cosa $a'x_0 + b'y_0 = c'$

Si restem: $a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0 \to a'(x - x_0) = -b'(y - y_0) \to b'/a'(x - x_0)$.

Per la qual cosa

$$\left.\begin{array}{r} b'/a'(x - x_0). \\ m.c.d.(a', b') = 1 \end{array}\right\} \underset{T.Euclides}{\longrightarrow} b'/x - x_0.$$

El que vol dir que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - x_0 = b'k$. (I).

En substituir en $a'(x - x_0) = -b'(y - y_0)$ queda $a'b'k = -b'(y - y_0) \to a'k = y - y_0$ (II).

De (I) i (II) : $\boxed{\left.\begin{array}{c} x = x_0 + b'k \\ y = y_0 - a'k \end{array}\right\}}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. És la solució general de l'equació on (x_0, y_0) és una solució particular.

El problema es presenta, a vegades, en trobar una solució particular de l'equació. Quan siga difícil trobar-la, utilitzarem el mètode d'Euler.

Estudi de l'equació $ax - by = c$.

De la mateixa manera obtindríem que $\boxed{\left.\begin{array}{c} x = x_0 + b'k \\ y = y_0 + a'k \end{array}\right\}}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. És la solució general de l'equació on (x_0, y_0) és una solució particular.

25.1. Mètode d'Euler. Aquest mètode el veurem utilitzant un exemple.

Exemple 5. *En una tenda comprem dos classes de pilotes de tennis. Per la primera classe paguem 680 pessetes per cada lot. Per la segona paguem el lot a 760 pessetes. En total paguem 11760 pessetes. Trobeu el número de lots que hem comprat de cada classe.*

Sol.: Suposem x siga el número de pilotes de la primera classe.

Suposem y siga el número de pilotes de la segona classe.

L'equació a resoldre és $680x + 760y = 11760 \rightarrow 17x + 19y = 294$. (En dividir pel *m.c.d.* que és 40).

Aquesta última equació te solució ja que $m.c.d.(17, 19) = 1$ i $1 \in D(294)$.

La solució particular la traurem de la següent manera:

$x = \dfrac{294 - 19y}{17} = \dfrac{294}{17} - \dfrac{19y}{17} = 17 + \dfrac{5}{17} - (y + \dfrac{2y}{17}) = 17 - y + \dfrac{5 - 2y}{17} \in \mathbb{Z}.$

Ja que $y \in \mathbb{Z} \rightarrow 17 - y \in \mathbb{Z}$.

Per a que $\dfrac{5-2y}{17} \in \mathbb{Z}$, és suficient agafar $y = -6$ i alehores $x = 24$.

Per la qual cosa una solució particular és $(x_0, y_0) = (24, -6)$.

La solució general serà:

$$\left.\begin{array}{l} x = 24 + 19k \\ y = -6 - 17k \end{array}\right\} \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La solució al exemple és $x = 5$, $y = 11$ (on $k = -1$).

Si no resulta fàcil trobar la solució de $\dfrac{5-2y}{17} \in \mathbb{Z}$, utilitzarem un canvi de variable:

$\dfrac{5-2y}{17} = u \rightarrow 5 - 2y = 17u \rightarrow y = \dfrac{17u - 5}{-2} = -\dfrac{17}{2}u + \dfrac{5}{2} = -(8u + \dfrac{u}{2}) + 2 + \dfrac{1}{2} =$
$-8u + 2 + \dfrac{1-u}{2}$.

$\dfrac{1-u}{2} \in \mathbb{Z}$, si $u = -1$.

Per la qual cosa $y = 11, x = 5$.

PROBLEMES TEMA 5. ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES. ELS NOMBRES SENC.

1. Estudieu les propietats i elements notables de les següents lleis de composició internes en $\mathbb{Z}$.

   i) $x * y = xy + 1$. *ii)* $x * y = y$. *iii)* $x * y = x + y - 3$.

   Sol.: i) Associativa: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

   $(x * y) * z = (xy + 1) * z = (xy + 1)z + 1 = xyz + z + 1$.

   $x * (y * z) = x * (yz + 1) = x(yz + 1) + 1 = xyz + x + 1$.

   Per la qual cosa no és associativa.

   Commutativa: $x * y = y * x$.

   $x * y = xy + 1 = yx + 1 = y * x$. Per la qual cosa és commutativa.

   Element neutre: $x * e = e * x = x$.

   $x * e = xe + 1 = x \rightarrow e = \dfrac{x-1}{x} \notin \mathbb{Z}$. Per la qual cosa no existeix element neutre.

   Element regular: $x * y = x * z \rightarrow y = z$.

   $x * y = x * z \rightarrow xy + 1 = xz + 1 \rightarrow xy = xz \rightarrow y = z$. Per la qual cosa tot element és regular.

   Element absorbent: $x * a = a \quad \forall x$.

   $x * a = xa + 1 = a \rightarrow xa - a = -1 \rightarrow (x-1)a = -1 \rightarrow a = \dfrac{-1}{x-1} \notin \mathbb{Z}$. Per la qual cosa no té element absorbent.

   Element idempotent: $x * x = x$.

   $x * x = xx + 1 \neq x$. Per la qual cosa no té element idempotent.

   ii) $x * y = y$.

   Associativa: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

   $(x * y) * z = y * z = z$.

   $x * (y * z) = x * z = z$. Per la qual cosa és associativa.

   Commutativa: $x * y = y * x$.

   $x * y = y$. $y * x = x$. Per la qual cosa no és commutativa.

   Element neutre: $x * e = e * x = x$.

   $x * e = e$. $e * x = x \rightarrow e = x$. No existeix neutre, ja que sabem per teoria que si hi hagueraneutre és únic i així qualsevol element seria neutre.

   Element regular: $x * y = z * y \rightarrow x = z$.

$x * y = z * y \rightarrow y = y$. Per la qual cosa no té element regular.

iii) $x * y = x + y - 3$.

Associativa: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

$(x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + y + z - 6$.

$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + (y + z - 3) - 3 = x + y + z - 6$. Per la qual cosa és associativa.

Commutativa: $x * y = y * x$.

$x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x$. Per la qual cosa és commutativa.

Element neutre: $x * e = e * x = x$.

$x * e = x + e - 3 = x \rightarrow e = 3$.

$e * x = e + x - 3 = x \rightarrow e = 3$. Per la qual cosa existeix element neutre igual a 3.

Element inversible: $x * x' = x' * x = e$.

$x * x' = 3 \rightarrow x + x' - 3 = 3 \rightarrow x' = 6 - x$.

$x' * x = 3 \rightarrow x' + x - 3 = 3 \rightarrow x' = x - 6$. Per la qual cosa tot element és inversible.

Element regular: $x * y = x * z \rightarrow y = z$.

$x * y = x * z \rightarrow x + y - 3 = x + z - 3 \rightarrow y = z$. Per la qual cosa tot element és regular.

$(\mathbb{Z}, *)$ és grup commutatiu.

2. Demostreu que $B = \{a + b\sqrt{2} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$, és part estable de $\mathbb{R}$ respecte de la suma i del producte.

   Sol.: B és part estable per a la suma si i sols si, $\forall x, \forall y \in B \Rightarrow x + y \in B$.

   $\left.\begin{array}{ll} x \in B & \forall x \rightarrow x = a + b\sqrt{2}. \\ y \in B & \forall y \rightarrow y = a' + b'\sqrt{2}. \end{array}\right\} \rightarrow x + y = (a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} = m + n\sqrt{2} \in B$.

   B és part estable per al producte si i sols si, $\forall x, \forall y \in B \Rightarrow x \cdot y \in B$.

   $\left.\begin{array}{ll} x \in B & \forall x \rightarrow x = a + b\sqrt{2}. \\ y \in B & \forall y \rightarrow y = a' + b'\sqrt{2}. \end{array}\right\} \rightarrow x \cdot y = (a + b\sqrt{2}) \cdot (a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2} = m + n\sqrt{2} \in B$.

3. En el con junt $A = \{1, 2, 3, 4\}$, doneu una llei de composició interna tal que tots els elements siguen regulars i inversibles.

$*$	1	2	3	4
1	3	1	4	2
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	2	4	1	3

L'element neutre seria el 2, $1' = 4$, $2' = 2$, $3' = 3$, $4' =$

1.Tots els elements són regulars, ja que tots els elements tenen simètric. En efecte, si $x * y = x * z \to x' * (x * y) = x' * (x * z) \to (x' * x) * y = (x' * x) * z \to e * y = e * z \to y = z$.

4. Si $(G, *)$ és un grup commutatiu i $a \Box b = e \quad \forall a, b \in G$,sent e el neutre de G, estudieu si $(G, *, \Box)$ és un anell commutatiu.

   Sol.: i) $(G, *)$ és un grup commutatiu, per hipòtesi.

   ii) $(G, \Box)$ és un semigrup commutatiu. En efecte, $\Box$ és llei de composició interna ja que $a \Box b = e \quad \forall a, b \in G$ i $e \in G$.

   $\Box$ és associativa ja que: $\left.\begin{array}{l} a\Box(b\Box c) = a\Box e = e. \\ (a\Box b)\Box c = e\Box c = e. \end{array}\right\} \to a\Box(b\Box c) = (a\Box b)\Box c.$

   $\Box$ és commutativa ja que $a\Box b = b\Box a = e$.

   iii) $\Box$ és distributiva respecte a $*$. $\left.\begin{array}{l} a\Box(b * c) = a\Box d = e. \\ (a\Box b) * (a\Box c) = e * e = e. \end{array}\right\} \to a\Box(b*c) = (a\Box b) * (a\Box c)$.

5. Donades les aplicacions: $f_1(x) = x$, $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad f_3(x) = -x$, $\quad f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$, totes de $\mathbb{Q}^*$ en $\mathbb{Q}^*$. Demostreu que amb la llei composició d'aplicacions formen un grup. És commutatiu?

   Sol.: $f_i : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

   $(f_1 \circ f_1)(x) = f_1[f_1(x)] = f_1(x) = x \to f_1 \circ f_1 = f_1$.

   $(f_1 \circ f_2)(x) = f_1[f_2(x)] = f_1(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} = f_2(x) \to f_1 \circ f_2 = f_2$.

   $(f_1 \circ f_3)(x) = f_1[f_3(x)] = f_1(-x) = -x = f_3(x) \to f_1 \circ f_3 = f_3$.

   $(f_1 \circ f_4)(x) = f_1[f_4(x)] = f_1(-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x} = f_4(x) \to f_1 \circ f_4 = f_4$.

   $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2[f_1(x)] = f_2(x) = \frac{1}{x} \to f_2 \circ f_1 = f_2$.

   $(f_2 \circ f_2)(x) = f_2[f_2(x)] = f_2(\frac{1}{x}) = x = f_1(x) \to f_2 \circ f_2 = f_1$.

   $(f_2 \circ f_3)(x) = f_2[f_3(x)] = f_2(-x) = -\frac{1}{x} = f_4(x) \to f_2 \circ f_3 = f_4$.

   $(f_2 \circ f_4)(x) = f_2[f_4(x)] = f_2(-\frac{1}{x}) = -x = f_3(x) \to f_2 \circ f_4 = f_3$.

   $(f_3 \circ f_1)(x) = f_3[f_1(x)] = f_3(x) = -x = f_3(x) \to f_3 \circ f_1 = f_3$.

$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3\,[f_2(x)] = f_3(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x} = f_4(x) \to f_3 \circ f_2 = f_4.$

$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3\,[f_3(x)] = f_3(-x) = x = f_1(x) \to f_3 \circ f_3 = f_1.$

$(f_3 \circ f_4)(x) = f_3\,[f_4(x)] = f_3(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} = f_2(x) \to f_3 \circ f_4 = f_2.$

$(f_4 \circ f_1)(x) = f_4\,[f_1(x)] = f_4(x) = -\frac{1}{x} = f_4(x) \to f_4 \circ f_1 = f_4.$

$(f_4 \circ f_2)(x) = f_4\,[f_2(x)] = f_4(\frac{1}{x}) = -x = f_3(x) \to f_4 \circ f_2 = f_3.$

$(f_4 \circ f_3)(x) = f_4\,[f_3(x)] = f_4(-x) = \frac{1}{x} = f_2(x) \to f_4 \circ f_3 = f_2.$

$(f_4 \circ f_4)(x) = f_4\,[f_4(x)] = f_4(-\frac{1}{x}) = x = f_1(x) \to f_4 \circ f_4 = f_1.$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

6. Definida en $\mathbb{R}^3$ la següent llei de composició:

$$(x,y,z)*(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+xy').$$

Comproveu que $(\mathbb{R}^3,*)$ és un grup. És commutatiu?.

Sol.: i) Associativa.

$[(x,y,z)*(x',y',z')]*(x'',y'',z'') = (x+x',y+y',z+z'+xy')*(x'',y'',z'') = [(x+x')+x'',(y+y')+y'',(z+z'+xy')+z''+(x+x')y''] = (x+x'+x'',y+y'+y'',z+z'+xy'+z''+xy''+x'y'').$

$(x,y,z)*[(x',y',z')*(x'',y'',z'')] = (x,y,z)*(x'+x'',y'+y'',z'+z''+x'y'') = [x+(x'+x''),y+(y'+y''),z+(z'+z''+x'y'')+x(y'+y'')] = (x+x'+x'',y+y'+y'',z+z'+z''+x'y''+xy'+xy'').$

ii) Neutre.

$(x,y,z)*(a,b,c) = (x,y,z) \to x+a=x, \quad y+b=y, \quad z+c+xb=z \to a=b=c=0.$

$(a,b,c)*(x,y,z) = (x,y,z) \to a+x=x, \quad b+y=y, \quad c+z+ay=z \to a=b=c=0.$

Element neutre seria $(0,0,0)$

iii) Simètric.

$(x,y,z)*(x',y',z')=(0,0,0)\rightarrow x+x'=0, \quad y+y'=0, \quad z+z'+xy'=0\rightarrow$
$x'=-x, \quad y'=-y, \quad z'=-z-xy'=xy-z.$

És a dir, $(x,y,z)'=(-x,-y,xy-z)$.

iv) Commutatiu.

$(x,y,z)*(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z'+xy')$.

$(x',y',z')*(x,y,z)=(x'+x,y'+y,z'+z+x'y)$.

No és commutatiu.

7. Estudieu les propietats i elements notables de les següents lleis de composició internes:

i)

$*$	a	b	c	d	e	f
a	e	e	c	a	b	d
b	e	e	c	b	a	c
c	c	c	c	c	c	c
d	a	b	c	d	e	f
e	b	a	c	e	f	d
f	d	c	c	f	d	d

No és associativa ja que $b*(a*f)\neq(b*a)*f$.

L'element neutre és d.

Simètric: $a'=f, \quad b'\,\overline{\exists}, \quad c'\overline{\exists}, \quad d'=d, \quad e'=f, \quad f'=a,e,f.$

Elements regulars: d,e.

Elements absorbents: c.

Sí que és commutativa.

ii)

$\square$	a	b	c	d	e
a	d	e	e	d	a
b	e	a	d	d	b
c	e	d	b	a	c
d	d	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e

No és associativa ja que $a\square(b\square c)\neq(a\square b)\square c$.

No és commutativa ja que $c\square d\neq d\square c$.

L'element neutre és e.

Simètric: $a'=b,c, \quad b'=a, \quad c'=a, \quad d'\,\overline{\exists}, \quad e'=e.$

Elements regulars: e.

Elements absorbents: $\overline{\exists}$.

8. Trobeu un nombre natural n, sabent que és un cub perfecte, que admet 16 divisors i que dividit per 43 el qüocient dóna un nombre primer i el residu igual a la unitat.

   Sol.: Si n és un cub perfecte, $n = x^{3a}$, on x és primer i $a \in \mathbb{N}$.

   Número de divisors: $3a + 1 = 16 \rightarrow a = 5$.

   Si $x = 2 \rightarrow n = 2^{15} = 32768$. Aquest nombre no ens serveix ja què $n - 1 \neq \dot{43}$.

   Si $x = 3 \rightarrow n = 3^{15} = 14348907$. Aquest nombre no ens serveix ja què $n-1 \neq \dot{43}$.

   No hi ha cap altre nombre.

   Si n és un cub perfecte, $n = x^{3a}y^{3b}$, on x, y són primers i $a, b \in \mathbb{N}$.

   Número de divisors: $(3a + 1)(3b + 1) = 16 \rightarrow a = b = 1 \rightarrow n = x^3y^3$.

   Si $x = 2, y = 3 \rightarrow n = 2^33^3 = 216$. Aquest nombre ens serveix ja què $n-1 = \dot{43}$.

   Si $x = 2, y = 5 \rightarrow n = 2^33^5 = 1000$. Aquest nombre no ens serveix ja què $n - 1 \neq \dot{43}$.

   No hi ha cap nombre més.

   Si n és un cub perfecte, $n = x^{3a}y^{3b}z^{3c}$, on x, y, z són primers i $a, b, c \in \mathbb{N}$.

   Número de divisors: $(3a+1)(3b+1)(3c+1) = 16$. Imposible ja què cada factor, com a mínim ha de valdre 4.

9. Suposem $n = x^ay^bz^c$ un nombre descomposat en factors primers. Aquest nombre té 36 divisors i si l'escrivim en base 3, en base 5 i en base 6, s'obtenen escriptures acabades en dos zeros. Trobeu n.

   Sol.: Nombre de divisors de $n = x^ay^bz^c$, segons la teoria és:

   $D(n) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) = 36 = 2^23^2$.

   $n_{(3} = \ldots a_3a_2a_100_{(3} = a_13^2 + a_23^3 + a_33^5 + \cdots = 3^2(a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \cdots) = \dot{9}$.

   $n_{(5} = \ldots b_3b_2b_100_{(5} = b_15^2 + b_25^3 + b_35^5 + \cdots = 5^2(b_1 + 5b_2 + 5^2b_3 + \cdots) = \dot{25}$.

   $n_{(6} = \ldots c_3c_2c_100_{(6} = c_16^2 + c_26^3 + c_36^5 + \cdots = 6^2(c_1 + 6c_2 + 6^2c_3 + \cdots) = \dot{36}$.

   $n_{(3} = \dot{9}$, $n_{(5} = \dot{25}$, $n_{(6} = \dot{36} \rightarrow n = \overbrace{m.c.m.(9, 25, 36)}^{\bullet} = \dot{900}$.

   Ja què $900 = 2^23^25^2$, n té els factors $2, 3, 5$.

   $n \in \dot{900} = \{900, 1800, 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, \ldots\}$. Però n no pot ser tots aquests nombres ja què el problema té unes restriccions.

   $$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 36 = 2^23^2 \rightarrow \begin{cases} 2 \times 2 \times 9 & (1) \\ 2 \times 3 \times 6 & (2) \\ 3 \times 3 \times 4 & (3) \end{cases}$$

En (1), $a = 1, b = 1, c = 8$. En (2), $a = 1, b = 2, c = 5$. Aquestes possibilitats no es poden donar ja què en la descomposició de n, el 2 és el mínim exponent.

En (3), $a = 2, b = 2, c = 3$.

Per la qual cosa els nombres que són solució del problema seràn:

$n_1 = 2^2 3^2 5^3 = 4500, \qquad n_2 = 2^2 3^3 5^2 = 2700, \qquad n_3 = 2^3 3^2 5^2 = 1800.$

10. Trobeu dos nombres, sabent que el seu $m.c.d.$ és 36 i el $m.c.m.$ és 5148.

Sol.: Suposem $m.c.d.(a,b) = d = 36, \quad m.c.m.(a,b) = m = 5148$. Per teoria sabem que:

$md = ab$ i $a = a'd, \ b = b'd$, on a' i b' són primers entre ells.

Per la qual cosa $\quad md = ab = a'db'd \to m = a'b'd \to 5148 = a'b'36 \to a'b' = 143$.

a'	b'	a	b
1	143	36	5148
11	13	396	468

$\to \boxed{a = 36, b = 5148} \ ; \ \boxed{a = 396, b = 468}$.

11. Trobeu dos nombres, sabent que el seu producte és 2700 i el $m.c.d.$ és 6.

Sol.: $ab = 2700$, $m.c.d.(a,b) = 6 \to md = a'db'd = 2700 \to a'b' = 75$.

a'	b'	a	b
1	75	6	450
3	25	18	150

$\to \boxed{a = 6, b = 450} \ ; \ \boxed{a = 18, b = 150}$.

12. Trobeu el nombre natural n, si $n = 2^a 5^b 7^c$, sabent que $5n$ té 8 divisors més que n, i que $8n$ té 18 divisors més que n.

Sol.: El números de divisors de n és: $D(n) = (a+1)(b+1)(c+1)$.

$5n = 2^a 5^{b+1} 7^c \to (a+1)(b+2)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 8 \qquad (1).$

$8n = 2^{a+3} 5^b 7^c \to (a+4)(b+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 18 \qquad (2).$

De (1), $(a+1)(c+1) + 8$.

De (2), $(b+1)(c+1)3 = 18 \to (b+1)(c+1) = 6$.

Resulta que $c+1$ és un divisor de 8 i de 6. A més a més, $c+1 \neq 1$ ja què $c \neq 0$.

Per la qual cosa, $c+1 = 2 \to c = 1, a = 3, b = 2 \to n = 2^a 5^b 7^c = 2^3 5^2 7 = 1400$.

13. En una batalla on combatiren entre 10000 i 11000 soldats, resultaren morts 23/165 del total i fertits 35/143 del total. Trobeu quants soldats quedaren ilesos.

Sol.: Suposem n el número de soldats tàl que $10000 \leq n \leq 11000$, x el número de morts, y el número de ferits, z el número de ilesos.

$$\left.\begin{array}{r}\frac{23}{165}n = x\\ \frac{35}{143}n = y\\ x+y+z=n\end{array}\right\} \to \frac{23}{165}n + \frac{35}{143}n + z = n \to 1321n - 2145z = 0.$$

Equació diofàntica: $n = \dfrac{2145z}{1321} = z + \dfrac{824z}{1321}$ →Solució particular $(n_0, z_0) = (2145, 1321)$.

Solució general: $\left.\begin{array}{r} n = 2145 + 2145k\\ z = 1321 + 1321k\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} n = 2145(k+1)\\ z = 1321(k+1)\end{array}\right\}$.

Si $k = 4$, $n = 10725$, $x = 1495$, $y = 2625$, $z = 6605$.

Altra forma de fer el problema:

El número de soldats, n, és múltiple de 165 i de 143, per la qual cosa és múltiple del mínim comú múltiple. És a dir, $n = \overbrace{m.c.m.(165, 143)}^{\bullet} = \overset{\bullet}{2145}$.

En dividir 11000 entre 2145, el quocient és 5, per la qual cosa $n = 2145 \times 5 = 10725$.

14. Trobeu dos nombres tal que la suma dels seus quadrats és 369 i el $m.c.m.$ és 60.

Sol.: $\left.\begin{array}{r} a^2 + b^2 = 369\\ m.c.m.(a,b) = 60\end{array}\right\} \to md = ab = a'db'd \to 60 = a'b'd \quad (1).$

$a^2 + b^2 = 369 \to (a'd)^2 + (b'd)^2 = 3^2 \times 41 \to d^2(a'^2 + b'^2) = 3^2 \times 41 \to d = 3 \wedge a'^2 + b'^2 = 41$.

En (1) $\to 60 = a'b'3 \to a'b' = 20$.

$\left.\begin{array}{r} a'b' = 20\\ a'^2 + b'^2 = 41\end{array}\right\} \to a' = \dfrac{20}{b'}$. Substituint en l'altra equació:

$$\frac{400}{b'^2} + b'^2 = 41 \to b'^4 - 41b'^2 + 400 = 0 \to y^2 - 41y + 400 = 0 \to \left\{\begin{array}{l} y_1 = 25 \to b'_1 = 5\\ y_2 = 16 \to b'_2 = 4\end{array}\right.$$

La solució és: $a' = 4, b' = 5 \to a = 12$, $b = 15$.

15. Dividiu el nombre 120 en tres parts de tal manera que la suma del doble de la primera, del triple de la segona i del quíntuple de la tercera siga igual a 400.

Sol.: $\left.\begin{array}{r} x+y+z = 120\\ 2x+3y+5z = 400\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y = 120 - z\\ 2x+3y = 400-5z\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-2y = -240+2z\\ 2x+3y = 400-5z\end{array}\right\} \to$ $y + 3z = 160$.

Equació diofàntica. Solució particular: $(y_0, z_0) = (10, 50)$.

Solució general: $\left.\begin{array}{r} y = y_0 + b'k\\ z = z_0 - a'k\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} y = 10 + 3k\\ z = 50 - k\end{array}\right\}$.

En substituir en la 1^a eqaució obtenim: $x = 60 - 2k$.

En aquest exercici $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-3 \leq k \leq 30$. És a dir, són 34 les solucions del problema.

Algunes solucions:

$\{(66,1,53),\ldots,(60,10,50),\ldots,(40,40,40),\ldots,(30,55,35),\ldots,(0,100,20)\}$.

16. Trobeu el menor nombre natural múltiple de 11 tal que dividit per 2,3,4,5,6 i 7 ens dóne sempre de residu la unitat.

Sol.: Siga m un número múltiple de 11, és a dir $m = 11x$, on $x \in \mathbb{Z}$ tal que:

$m-1=\dot{2} \wedge m-1=\dot{3} \wedge m-1=\dot{4} \wedge m-1=\dot{5} \wedge m-1=\dot{6} \wedge m-1=\dot{7} \rightarrow$

$m-1=\overset{\bullet}{\overbrace{m.c.m.(2,3,4,5,6,7)}}=\dot{420}=420y$, on $y \in \mathbb{Z} \rightarrow 11x-420y=1$.

Cal resoldre aquesta equació diofàntica.

$x=\dfrac{420y}{11}+\dfrac{1}{11}=38y+\dfrac{2y+1}{11}$. Solució particular: $(x_0,y_0)=(191,5)$.

Solució general: $\left.\begin{array}{r} x=191+420k \\ y=5+11k \end{array}\right\} \rightarrow$

k	-1	0	1
x	-229	191	611
y	-6	5	16
m	-2519	2101	6721

Aleshores $m = 2101$.

17. En una escola hi ha 9 grups amb un total de 300 estudiants repartits en classes de 27, 32 i 43 estudiants. Trobeu els grups que hi ha de cada classe.

Sol.: Siga x, y, z, el número de grups de 27, 32, 9 43 estudiants respectivament.

$: \left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ 27x+32y+43z=300 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} z=9-x-y \\ 27x+32y+43(9-x-y)=300 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} z=9-x-y \\ 16x+11y=87 \end{array}\right\}$

En resoldre l'equació diofàntica $16x+11y=87$, substituirem en l'altra i obtindrem la solució:

$y=\dfrac{87}{11}-\dfrac{16x}{11}=7-x+\dfrac{10-5x}{11}$.

Solució particular, apliquem Euler: $\dfrac{10-5x}{11}=u \rightarrow x=2-2u-\dfrac{u}{5}$.

Si $u=5 \rightarrow x_0=-9$, $y_0=21 \rightarrow (x_0,y_0)=(-9,21)$.

Solució general:

$\left.\begin{array}{r} x=-9+11k \\ y=21-16k \end{array}\right\}$. Aleshores, $z=9-(-9+11k)-(21-16k) \rightarrow z=-3+5k$.

En el problema la solució és única i surt per a $k=1 \rightarrow x=2$, $y=5$, $z=-2$.

18. El número de pàgines d'un llibre és major que 400 i menor que 500. En comptarles de 2 en 2 sobra 1, de 3 en 3 sobren 2, de 5 en 5 sobren 4 i de 7 en 7 sobren 6. Trobeu el número de pàgines que té el llibre.

Sol.: Si n és el número de pàgines del llibre, $400 \leq x \leq 500$.

$n = \dot{2} + 1 \wedge \ n = \dot{3} + 2 \wedge \ n = \dot{5} + 4 \wedge \ n = \dot{7} + 6 \rightarrow n + 1 = \dot{2} \wedge \ n + 1 = \dot{2} \wedge$
$n + 1 = \dot{3} \wedge \ n + 1 = \dot{5} \wedge \ n + 1 = \dot{7} \rightarrow n + 1 = \overbrace{m.c.m.(2,3,5,7)}^{\bullet} = 2\dot{1}0 \rightarrow n =$
$2\dot{1}0 - 1 \rightarrow n = 419$.

També es pot fer: $n = 2x + 1 \wedge \ n = 3y + 2 \wedge \ n = 5z + 4 \wedge \ n = 7t + 6$ i resoldre aquest sistema.

$2x + 1 = 3y + 2 \rightarrow x = y + \dfrac{1+y}{2} \rightarrow (x_0, y_0) = (2, 1)$.

Solució general: $\left.\begin{array}{c} x = 2 + 3k \\ y = 1 + 2k \end{array}\right\}$.

Però $n = 2x + 1 = 5z + 4 \rightarrow 2(2 + 3k) + 1 = 5z + 4 \rightarrow 6k - 5z = -1 \rightarrow z = k + \dfrac{1+k}{5} \rightarrow (k_0, z_0) = (4, 5)$.

Solució general: $\left.\begin{array}{c} k = 4 + 5k_1 \\ z = 5 + 6k_1 \end{array}\right\}$.

Però $n = 5z + 4 = 7t + 6 \rightarrow 5(5 + 6k_1) + 4 = 7t + 6 \rightarrow 30k_1 - 7t = -23 \rightarrow t = 4k_1 + \dfrac{2k_1 + 23}{7} \rightarrow (k_{1_0}, t_0) = (-1, -1)$.

Solució general: $\left.\begin{array}{c} k_1 = -1 + 7k_2 \\ t = -1 + 30k_2 \end{array}\right\}$.

Ja què $n = 7t + 6 \rightarrow n = 7(-1 + 30k_2) + 6 \rightarrow n = 210k_2 - 1$.Surt el mateix que abans.

19. Trobeu un nombre natural de tres xifres que dividit per 12 dóna 7 de residu i dividit per 13 el residu és 4.

    Sol.: Si n el nombre natural de tres xifres tal que:

    $n - 7 = \dot{12} \wedge \ n - 4 = \dot{13} \rightarrow n = 12x + 7 \wedge \ n = 13y + 4 \rightarrow 12x - 13y = -3$.

    Equació diofàntica. $x = \dfrac{13y}{12} - \dfrac{3}{12} = y + \dfrac{y-3}{12}$.

    Solució particular: $(x_0, y_0) = (-10, -9)$.

    Solució general: $\left.\begin{array}{c} x = -10 + 13k \\ y = -9 + 12k \end{array}\right\}$.

    La solució del problema surt quan $k \in \{2, 3, 4, \ldots, 7\}$. Els nombres naturals de tres xifres són 199, 354, 511, ... ,979.

20. Es van repartir 1000 euros entre homes i dones. Cada home va rebre 23 euros i cada dona 17. Quants homes i dones hi havia?.

    Sol.: Suposem x és el número d'homes i y el de dones.

$23x+17y = 1000 \to 17y = -23x+1000 \to y = \dfrac{-23x}{17}+\dfrac{1000}{17} = -x+\dfrac{1000-6x}{17}$.

Utilitzem el mètode d'Euler per a la solució particular:

$\dfrac{1000-6x}{17} = u \to x = -2u + \dfrac{1000-5u}{6}$.

Si $u = 200 \to x_0 = -400$, $y_0 = 600$.

Solució general: $\left.\begin{array}{c} x = -400+17k \\ y = 600-23k \end{array}\right\} \to \begin{array}{cccc} k & 24 & 25 & 26 \\ x & 8 & 25 & 42 \\ y & 48 & 25 & 2 \end{array}$

Part I

TEMA 6: SISTEMES DE NUMERACIÓ, RECURRÈNCIA, COMBINATÒRIA

1. SISTEMES DE NUMERACIÓ

1.1. Introducció. Un sistema numèric està definit per la base que utilitza. La base és el número de símbols (guarismes) diferents, necessaris per representar un nombre qualsevol, dels infinits, en el sistema. Al llarg de la història s'han utilitzat multitud de sistemes numèrics. En realitat qualsevol nombre major que 1 pot ser utilitzat com a base. Els babilonis utilitzaren el sistema sexagesimal, basat en el nombre 60. Els romans el duodecimal amb el 12 com a base, a més a més del sistema propi de numeració romana: I per a representar 1, V per a representar 5, X per al 10, L per al 50, C per al 100, D per al 500 i M per al 1000, amb totes les seues particulars regles. Els maies utilitzaven el sistema vigesimal basat en el 20. Avui en dia s'utilitza el sistema decimal de manera universal. Els ordinadors utilitzen el sistema binari i també el sistema en base 16.

Definició 1. *Anomenem* **sistema de numeració** *el conjunt de regles i convenis que ens permeteixen expressar verbal i gràficament els nombres mitjançant paraules i signes.*

En un sistema de base b, les unitats simples o de primer ordre són: $0, 1, 2, \ldots, b-1$. *Cada b unitats de primer ordre formen una de segon ordre; cada b unitats de segon ordre formen una de tercer ordre, etc.*

Un sistema utilitzat pels computadors és el sistema binari. Sols utilitza els signes 0 i 1.Altres sistemes són el decimal, el sistema de base 12 i el sistema de base 60. Quan la base és major que 10, cal utilitzar uns símbols per a representar als elements superiors o iguals a 10.

Teorema 1. *Qualsevol sencer positiu es pot descomposar de manera única com a suma de productes.*

És a dir, $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \exists b \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } n = q_k b^k + r_k b^{k-1} + \cdots + r_3 b^2 + r_2 b + r_1.}$ *on* $q_k < b, \quad r_i < b, \quad 1 \leq i \leq k$. *Aquesta descomposició és única.*

Dem.: Existència.

Siga $b \in \mathbb{Z}^+ \to \forall n \in \mathbb{Z}^+$, sempre es pot dividir per b, fins aplegar a un quocient $q_k < b$. (Si $q_k \neq 0$).

$$\begin{array}{llllll}
n: & b & & & & \\
r_1 & q_1: & b & & & \\
 & r_2 & q_2: & b & & \\
 & & r_3 & q_3 & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & q_{k-1}: & b \\
 & & & & r_k & q_k
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{De la primera divisió, } n = q_1 b + r_1 \\
\text{De la segona divisió, } q_1 = q_2 b + r_2 \\
\vdots \\
\text{De la k-èsima divisió, } q_{k-1} = q_k b + r_k
\end{array}\right\}, \text{ amb } r_i < b, \quad 1 \le i \le k \text{ i } q_k < b \text{ per}$$

hipòtesi.

En multiplicar aquestes igualtats per $1, b, b^2, \ldots, b^{k-1}$, respectivament queda:

$$\left.\begin{array}{l}
n = q_1 b + r_1 \\
q_1 b = q_2 b^2 + r_2 b \\
q_2 b^2 = q_3 b^3 + r_3 b^2 \\
\vdots \\
q_{k-1} b^{k-1} = q_k b^k + r_k b^{k-1}
\end{array}\right\} \text{ En sumar ordenadamdent queda:}$$

$$n = q_k b^k + r_k b^{k-1} + \cdots + r_3 b^2 + r_2 b + r_1 \quad (1)$$

Unicitat. Per reducció a l'absurde.

Suposem que $n = q'_m b^m + r'_m b^{m-1} + \cdots + r'_3 b^2 + r'_2 b + r'_1$. (2)

Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l}
n = b(q_k b^{k-1} + r_k b^{k-2} + \cdots + r_3 b + r_2) + r_1 \\
n = b(q'_m b^{m-1} + r'_m b^{m-2} + \cdots + r'_3 b + r'_2) + r'_1
\end{array}\right\}$$

El que indica que el divident i el divisor són iguals. Aleshores també són iguals el qüocient i el residu.

Per la qual cosa $r_1 = r'_1$.

$$\left.\begin{array}{l}
n_1 = q_k b^{k-1} + r_k b^{k-2} + \cdots + r_3 b + r_2 \\
n_1 = q'_m b^{m-1} + r'_m b^{m-2} + \cdots + r'_3 b + r'_2
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
n_1 = b(q_k b^{k-2} + r_k b^{k-3} + \cdots + r_3) + r_2 \\
n_1 = b(q'_m b^{m-2} + r'_m b^{m-3} + \cdots + r'_3) + r'_2
\end{array}\right\}$$

El que indica que el divident i el divisor són iguals. Aleshores també són iguals el qüocient i el residu.

Per la qual cosa $r_2 = r'_2, \ldots, r_k = r'_m$, $q_k = q'_m$, on $m = k$.

Hem demostrat, doncs, que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $n = q_k b^k + r_k b^{k-1} + \cdots + r_3 b^2 + r_2 b + r_1$, que també es pot escriure $n = q_k r_k r_{k-1} \ldots r_3 r_2 r_{1(b}$.

1.2. Canvi de sistemes. Considerarem tres cassos:

i) D'un sistema no decimal al decimal.

ii) Del sistema decimal a un no decimal.
iii) D'un sistema no decimal a un altre no decimal.
Per exemple:
i) $341_{(5} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5 + 1 = 96$.
ii) $58 = 2011_{(3}$.
iii) $45_{(6} = 131_{(4}$.
Faltarien fer exercicis de sumar, multiplicar, dividir i restar en bases no decimals.

2. CONGRUÈNCIES

Definició 2. *Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Direm que a* **és congruent amb** *b* **mòdul** *m quan al dividir a i b entre m ens dona el mateix residu.*

És a dir $\boxed{a \equiv b(m) \Leftrightarrow a = mq + r \wedge b = mq' + r, \text{ on } 0 \leq r < m.}$

Definició 3. *Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Direm que a* **és congruent amb** *b* **mòdul** *m quan la seua diferència siga múltiple de m.*

És a dir $\boxed{a \equiv b(m) \Leftrightarrow a - b = \dot{m}.}$

2.1. Proposicions. $\boxed{\textit{P 1 : Les dues definicions són equivalents.}}$

$\rightarrow$) Si $a \equiv b(m) \rightarrow a = mq + r \wedge b = mq' + r \rightarrow a - b = (mq + r) - (mq' + r) = ma - mq' = m(q - q') = \dot{m}$.

$\leftarrow$) Si $a - b = \dot{m} \rightarrow a - b = mq \rightarrow a = b + mq \quad (1)$.

Suposem que al dividir b entre m ens dona residu r. És a dir, $b = mq' + r$. Al substituir en (1), queda: $a = b + mq \rightarrow a = (mq' + r) + mq = \dot{m} + r + \dot{m} = \dot{m} + r = mq_1 + r \rightarrow$ al dividir a entre m ens dona el mateix residu r.

$\boxed{\textit{P 2 : La relació de congruència és una relació binària d'equivalència.}}$

i) Reflexiva. $a \equiv a(m) \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ ja que $a - a = 0 = \dot{m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$.
ii) Simètrica. $a \equiv b(m) \Rightarrow b \equiv a(m)$.
Si $a \equiv b(m) \rightarrow a - b = \dot{m} \rightarrow -(a - b) = -(\dot{m}) \rightarrow b - a = \dot{m} \rightarrow b \equiv a(m)$.
iii) Transitiva. $a \equiv b(m) \wedge b \equiv c(m) \Rightarrow a \equiv c(m)$.

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b(m) \rightarrow a - b = \dot{m} \\ b \equiv c(m) \rightarrow b - c = \dot{m} \end{array}\right\} \rightarrow (a-b) + (b-c) = \dot{m} + \dot{m} \rightarrow a - c = \dot{m} \rightarrow a \equiv c(m).$$

Aquesta relació d'equivalència ens permiteix classificar els nombres sencers segons el mòdul. La congruència estableix una partició de $\mathbb{Z}$ en classes d'equivalència.

P 3 : Cada nombre sencer a, és congruent mòdul m amb el residu que resulta de dividir a entre m.

És a dir $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv r(m).}$

En efecte, si $a = mq + r \rightarrow a - r = mq \rightarrow a - r = \dot{m} \rightarrow a \equiv r(m)$.

Per la qual cosa, qualsevol sencer és congruent amb un i sols un dels residus possibles $0, 1, 2, \ldots, m-1$, que són els representants de les m classes que se formen per la relació de congruència. Les classes d'equivalència s'anomenen **classes residuals** i el seu conjunt qüocient es representa per $\mathbb{Z}/m$.

Per exemple $\mathbb{Z}/3 = \{[0], [1], [2]\}$, on $[0] = \dot{m}$, $[1] = \dot{m} + 1$, $[2] = \dot{m} + 2$.

$$P\ \ 4 : \text{Si } a \equiv b(m) \wedge c \equiv d(m) \Rightarrow \begin{cases} i)\ ax + cy \equiv bx + dy(m) & \forall x, y \in \mathbb{Z} \\ ii)\ ac \equiv bd(m) \\ iii)\ a^n \equiv b^n(m) & \forall n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

La demostració com a exercici. La tercera part per inducció completa.

3. CRITERIS DE DIVISIBILITAT

Definició 4. *Anomenem* ***residus potencials*** *d'un nombre b mòdul m, els residus que s'obtenen en dividir les potències del nombre b pel mòdul m. Els anomenem* $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$

És a dir, $b^0 \equiv r_0(m) = 1(m)$, $b^1 \equiv r_1(m)$, $b^2 \equiv r_2(m)$, $\ldots\ b^k \equiv r_k(m)$.

Per exemple: i) Trobeu els residus potencials del nombre 10 mòdul 8. Sol.: $r_0 = 1, r_1 = 2, r_2 = 4, r_3 = 0 = r_4 = \ldots = r_k$. *ii)* Trobeu els residus potencials del nombre 10 mòdul 11. Sol.: $r_0 = 1, r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = -1, r_4 = 1, r_5 = -1, \ldots$

Nota 1. *El número de residus possibles és finit. Si m és el mòdul, el màxim és* $m-1$.

Nota 2. *Una vegada hem obtés un residu igual a un altre anterior es van repetint tots de forma periòdica i amb el mateix ordre.*

Nota 3. *Si un residu potencial és zero, tots els següents són zeros.*

Nota 4. *La forma pràctica d'obtenir els residus potencials és dividir el nombre pel mòdul i veure els residus.*

3.1. Teorema fonamental dels criteris de divisibilitat. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \cdots + a_k b^k$ on $0 \leq a_i < b$ $\quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (b és la base).

És a dir, $n = a_k \ldots a_3 a_2 a_1 a_{0(b}$.

Si $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ són els residus potencial de b respecte al mòdul m.

El teorema afirma que:

$$\boxed{m/n \Leftrightarrow m/(a_0r_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + \ldots + a_kr_k).}$$

És a dir, n és divisible per m si i sols si, $a_0r_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + \ldots + a_kr_k$ és divisible per m.

Dem.: Sabem que:

$$\left.\begin{array}{l} b^0 \equiv r_0(m) = 1(m) \\ b^1 \equiv r_1(m) \\ b^2 \equiv r_2(m) \\ \vdots \\ b^{k-1} \equiv r_{k-1}(m) \\ b^k \equiv r_k(m) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Multipliquem la } 1^a \text{ per } a_0\text{, la segona per } a_1\text{, la tercera}$$

per $a_2, \ldots$, la $k+1$-èsima per a_k.

$$\left.\begin{array}{l} a_0b^0 \equiv a_0r_0(m) = a_0(m) \\ a_1b^1 \equiv a_1r_1(m) \\ a_2b^2 \equiv a_2r_2(m) \\ \vdots \\ a_{k-1}b^{k-1} \equiv a_{k-1}r_{k-1}(m) \\ a_kb^k \equiv a_kr_k(m) \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Al sumar queda:}$$

$n \equiv a_0r_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + \ldots + a_kr_k(m)$. És a dir aquestes dues expressions, al ser congruents, si les dividim per m ens donen el mateix residu.

Per hipòtesi n és divisible per m, el que vol dir que el dividir n per m ens dona residu zero. Per la qual cosa el dividir $a_0r_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + \ldots + a_kr_k$ entre m ens dona residu zero i en definitiva és divisible per m.

Exercici 1. *i) Trobeu els criteris de divisibilitat en base* 10 *mòdul* 2, 3, 4, 5, 8, 9 *i* 11.
ii) Trobeu el criteri de divisibilitat en base 7 *mòdul* 2.

4. PRINCIPI D'INCLUSIÓ I EXCLUSIÓ (PIE)

4.1. Cardinal de la unió de dos o més conjunts. Generalització. La fórmula vista en el tema 3 de la unió de dos o més conjunts es pot generalitzar per a n conjunts i aquesta generalització constitueix el principi d'inclusió i exclusió.

$$\begin{aligned} card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}^{n} card(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} card(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{n-1} card(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned}$$

Dem.: Per inducció completa.

Suposem que per a $n = h$, la fórmula és certa, és a dir:

$card(\bigcup_{i=1}^{h} A_i) = \sum_{i=1}^{h} card(A_i) - \sum_{1\le i<j\le h} card(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le h} card(A_i \cap A_j \cap A_k) +$

$\cdots + (-1)^{h-1} card(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_h)$.

Caldrà demostrar que també és certa per a $n = h+1$, és a dir:

$card(\bigcup_{i=1}^{h+1} A_i) = \sum_{i=1}^{h+1} card(A_i) - \sum_{1\le i<j\le h+1} card(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le h+1} card(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{h} card(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{h+1})$.

$$\begin{aligned} card(\bigcup_{i=1}^{h+1} A_i) &= card[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h) \cup A_{h+1}] = \\ &= card(\bigcup_{i=1}^{h} A_i) + card(A_{h+1}) - card\left[(\bigcup_{i=1}^{h} A_i) \cap A_{h+1})\right] \quad (1). \end{aligned}$$

Però

$card\left[(\bigcup_{i=1}^{h} A_i) \cap A_{h+1})\right] = card[(A_1 \cap A_{h+1}) \cup (A_2 \cap A_{h+1}) \cup (A_3 \cap A_{h+1}) \cup \ldots \cup (A_h \cap A_{h+1})] =$

$= card[\bigcup_{i=1}^{h} (A_i \cap A_{h+1})] \underset{Hip.ind.}{=} card(A_1 \cap A_{h+1}) + card(A_2 \cap A_{h+1}) +$

$+ card(A_3 \cap A_{h+1}) + \cdots + card(A_h \cap A_{h+1}) - card[(A_1 \cap A_{h+1}) \cap (A_2 \cap A_{h+1})] -$
$- card[(A_1 \cap A_{h+1}) \cap (A_3 \cap A_{h+1})] - \cdots + card[(A_1 \cap A_{h+1}) \cap (A_2 \cap A_{h+1}) \cap (A_3 \cap A_{h+1})] +$
$+ \cdots - \cdots + (-1)^{h-1} card[(A_1 \cap A_{h+1}) \cap (A_2 \cap A_{h+1}) \cap \ldots \cap (A_h \cap A_{h+1})] =$
$= card(A_1 \cap A_{h+1}) + card(A_2 \cap A_{h+1}) + card(A_3 \cap A_{h+1}) + \cdots + card(A_h \cap A_{h+1}) -$
$- card(A_1 \cap A_2 \cap A_{h+1}) - card(A_1 \cap A_3 \cap A_{h+1}) - \cdots$
$\cdots + card(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{h+1}) + \cdots - \cdots + (-1)^{h-1} card(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{h+1})$.

Substituint en (1), obtenim que:

$card(\bigcup_{i=1}^{h+1} A_i) = \sum_{i=1}^{h} card(A_i) + card(A_{h+1}) - \sum_{1\le i<j\le h} card(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le h} card(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots$

$\cdots + (-1)^{h-1} card(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_h) -$

$$- \left[\begin{array}{c} card(A_1 \cap A_{h+1}) + card(A_2 \cap A_{h+1}) + card(A_3 \cap A_{h+1}) + \cdots + \\ + card(A_h \cap A_{h+1}) - card(A_1 \cap A_2 \cap A_{h+1}) - \\ - card(A_1 \cap A_3 \cap A_{h+1}) - \cdots + card(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{h+1}) + \\ + \cdots - \cdots + (-1)^{h-1} card(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{h+1}) \end{array} \right] =$$

$= \sum_{i=1}^{h} card(A_i) + card(A_{h+1}) - \sum_{1\le i<j\le h} card(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le h} card(A_i \cap A_j \cap A_k) +$

$+\cdots+(-1)^{h-1}card(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_h)-card(A_1\cap A_{h+1})-card(A_2\cap A_{h+1})-$
$-card(A_3\cap A_{h+1})-\cdots-card(A_h\cap A_{h+1})+card(A_1\cap A_2\cap A_{h+1})+$
$+card(A_1\cap A_3\cap A_{h+1})++\cdots-card(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_{h+1})-\cdots+\cdots$
$\cdots-(-1)^{h-1}card(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_{h+1})=$
$=\sum_{i=1}^{h+1}card(A_i)-\sum_{1\le i<j\le h+1}card(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le h+1}card(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots+$
$+(-1)^{h-1}card(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_h)+(-1)^h card(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_{h+1})=$
$card(\bigcup_{i=1}^{h+1}A_i)$ *cvd.*

5. RECURRÈNCIA LINEAL

Definició 5. *Anomenem* ***progressió geomètrica*** *una successió infinita de nombres tal que en dividir dos termes consecutius resulta ser una constant. Aquesta constant s'anomena* ***raó*** *de la progressió.*

Per exemple la succesió de nombres 5, 15, 45, 135, ... constitueix una progressió geomètrica de raó 3. També la succesió 7, 21, 63, 189, ... forma una progressió geomètrica de raó 3.

Si $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ són els termes d'una progressió geométrica, aleshores $\dfrac{a_1}{a_0}=\dfrac{a_2}{a_1}=\ldots=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ldots=r\longmapsto a_{n+1}=a_n r.$

En l'exemple $a_{n+1}=3a_n$. Aquesta seria la relació de recurrència per a les dues progressions.

$a_{n+1}=3a_n$ amb $n\geqq 0$, $a_0=5$ ens referim a la primera succesió.

$a_{n+1}=3a_n$ amb $n\geqq 0$, $a_0=7$ ens referim a la segona succesió.

Definició 6. *A la equació $a_{n+1}=ca_n$ amb $n\geqq 0$ i c una constant s'anomena* ***relació de recurrència (equació en diferències)*** *ja que el valor de a_{n+1}(la consideració present), depen de a_n (una consideració anterior).*

Ja que a_{n+1} depen sols del seu antecessor més immediat, es diu que la relació és de **primer ordre.**

Quan ens donen valors particulars, aquests reben el nom de **condicions en la frontera.**

Definició 7. *Considerem la succesió de nombres de* ***Fibonacci:*** *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Aquesta conté els nombres que són iguals a la suma dels seus dos antecessors immediats. La succesió comença amb els nombres 1 i 1.*

Aleshores per la definició s'obté que: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, amb $n\geqq 2$, i $a_0=a_1=1$, com a condicions en la frontera.

Definició 8. *La relació $a_{n+1} + ca_n = f(n)$ amb $n \geqq 0$, c una constant i $f(n)$ una funció definida en $\mathbb{N}$, s'anomena relació de recurrència* **lineal de primer ordre amb coeficients constants.** *Quan $f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la relació s'anomena* **homogènia.**

Definició 9. *Anomenem* **solució general** *de la relació a una funció de n on no hi ha dependència de termes anteriors de la succesió.*

Per exemple, trobeu la solució general de la relació: $a_{n+1} = 3a_n$ amb $n \geqq 0$, $a_0 = 7$

$a_0 = 7$, $\quad a_1 = 3a_0 = 3(7)$, $\quad a_2 = 3a_1 = 3(3a_0) = 3^2(7)$, $\quad a_3 = 3a_2 = 3(3^2(7)) = 3^3(7), \ldots, a_n = 3^n(7)$.

És a dir, la solució general de la relació de recurrència anterior és $a_n = 7 \cdot 3^n$

Exemple 1. *Resoleu la relació de recurrència: $a_n = 7a_{n-1}$, $\quad n \geqq 1$, $\quad a_2 = 98$.*

Exemple 2. *Un banc paga el 6% d'interés anual sobre l'estalvi i composa mensualment l'interés. Si Marta deposita 3000 euros el dia 18 de novembre. Quant valdrà el seu depòsit un any després?.*

El 6% anual es tradueix en el (6/100) : 12 mensual és a dir en el 0.005.

Siga $d_n$el valor del depòsit al llarg de n mesos on $0 \leq n \leq 12$.

Aleshores $d_{n+1} = d_n + 0.005d_n$ on $0 \leq n \leq 11$ i $d_0 = 3000$.

La solució de la relació de recurrència $d_{n+1} = d_n + 0.005d_n = 1,005d_n$ ve donada per $d_n = d_0(1,005)^n = 3000(1,005)^{12} = 3185,04$ euros.

Nota 5. *En algunes ocasions una relació de recurrència no lineal es pot convertir en una lineal per mitjà d'una substitució algebraica.*

Exemple 3. *Trobeu a_{12} si $a_{n+1}^2 = 5a_n^2$ on $a_n > 0$, $n \geqq 0$, $a_0 = 2$.*

Utilitzeu el canvi $a_n^2 = b_n$. Solució: $a_{12} = 31250$.

Definició 10. *Una relació de la forma $c_0a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} = f(n)$, on c_i són constants s'anomena* **relació de recurrència lineal de k-èssim ordre amb coeficients constants** *(si $c_0 \neq 0$ i $c_k \neq 0$, $n \geqq k$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$).*

Quan $f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la relació s'anomena **homogènia.**

Per exemple i) $2a_n + 3a_{n-1} = 2^n$ (primer ordre) ii) $3a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2} = n^2 + 5$ (segon ordre), iii) $a_n + 7a_{n-2} = 0$ (homogènia de segon ordre).

5.1. Recurrència homogènia lineal de segon ordre. Siga $c_0a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} = 0$ una relació homogènia d'ordre dos. Tractarem de resoldre aquest tipus de relacions.

En primer lloc caldrà buscar una solució de la forma $a_n = cr^n$, on $c \neq 0$, $r \neq 0$.

Aleshores $c_0a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} = 0 \longrightarrow c_0cr^n + c_1cr^{n-1} + c_2cr^{n-2} = 0 \longrightarrow cr^{n-2}(c_0r^2 + c_1r^1 + c_2) = 0 \longrightarrow c_0r^2 + c_1r^1 + c_2 = 0$.

Definició 11. *Aquesta equació de segon grau s'anomena* **equació característica** *i les seues arrels,* **arrels característiques.**

Cassos: i) Les arrels r_1 i r_2 són reals i distintes. ii) Les arrels r_1 i r_2 són reals i iguals. iii) Les arrels r_1 i r_2 són complexes.

Exemple 4. *Resoleu la relació de recurrència* $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ $n \geqq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Suposem la solució general $a_n = cr^n$, on $c \neq 0$, $r \neq 0$.

$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \rightarrow cr^n + cr^{n-1} - 6cr^{n-2} = 0 \rightarrow cr^{n-2}(r^2 + r - 6) = 0 \rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \rightarrow r = 2$, $r = -3$.

Com que les dues arrels són distintes, $a_n = 2^n$ i $a_n = (-3)^n$ son solucions linealment independents ja que una no és mútiple de l'altra.

La solució general seria $a_n = c_1(2)^n + c_2(-3)^n$.

Com $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ resulta que $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

Per la qual cosa $a_n = 2^n$ és la solució general.

Exemple 5. *Resoleu la succesió de* **Fibonacci:** *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...*

Sabem que la relació de recurrència d'aquesta succesió ve donada per: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, amb $n \geqq 2$, i $a_0 = a_1 = 1$.

Considerem la solució general donada per $a_n = cr^n$, on $c \neq 0$, $r \neq 0$.

Aleshores, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \rightarrow cr^n - cr^{n-1} - cr^{n-2} = 0 \rightarrow cr^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0 \rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow r_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$.

La solució general vindrà donada per $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n = c_1\left[(1+\sqrt{5})/2\right]^n + c_2\left[(1-\sqrt{5})/2\right]^n$.

Si $a_0 = 1 \rightarrow 1 = c_1 + c_2$.

Si $a_1 = 1 \rightarrow 1 = c_1(1+\sqrt{5})/2 + c_2(1-\sqrt{5})/2$.

En resoldre el sistema obtenim que: $c_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ $\quad c_2 = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Per la qual cosa la solució general vindrà donada per $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n = (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}})\left[(1+\sqrt{5})/2\right]^n - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}})\left[(1-\sqrt{5})/2\right]^n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$.

Exemple 6. *Resoleu la relació de recurrència:* $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad n \geqq 0 \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 3.$

Considerem la solució general donada per $a_n = cr^n$, on $c \neq 0$, $r \neq 0$.

Aleshores, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \to a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \to r^2 - 4r + 4 = 0$ és l'equació característica on la solució és $r_1 = r_2 = 2$. És a dir la solució és única (Multiplicitat algebraica és dos). Però ara no tenim dues solucions independents. Cal obtenir una altra solució independent. Provem amb $n(2)^n$.

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \to 4a_{n+1} - 4a_n = 4(n+1)2^{n+1} - 4n2^n = 2(n+1)2^{n+2} - n2^{n+2} = (2n+2-n)2^{n+2} = (n+2)2^{n+2} = a_{n+2}$.

De manera que $n2^n$, és també una solució i independent a $c2^n$ ja que és impossible que $n2^n = c2^n$ $\forall n \geqq 0$ i c una constant ($n \neq c$).

La solució general serà: $a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n = (c_1 + c_2 n)2^n$.

De $a_0 = 1 \to a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n \to 1 = c_1$.

De $a_1 = 3 \to a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n \to 3 = 2c_1 + 2c_2 \to c_2 = 1/2$.

Per la qual cosa $a_n = 2^n + (1/2)n2^n = 2^n + 2^{-1}n2^n = 2^n + n(2^{n-1})$ amb $n \geqq 0$, és la solució general.

Generalitzant, si $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = f(n)$, on c_i són constants és una relació de recurrència lineal de k-èssim ordre amb coeficients constants (si $c_0 \neq 0$ i $c_k \neq 0$, $n \geqq k$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$) i r una arrel característica de multiplicitat m, $2 \leq m \leq k$, aleshores, la part de la solució general que inclueix l'arrel r te la forma: $(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$.

Exercici 2. *Resoleu les seguents relacions de recurrència:*

i) $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad n \geqq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 3.$
Sol.: $a_n = (3/7)(-1)^n + (4/7)(6)^n, \quad n \geqq 0.$
ii) $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0, \quad n \geqq 0, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = -8.$
Sol.: $a_n = 4(1/2)^n - 2(5)^n, \quad n \geqq 0.$

5.2. Relació de recurrència no homogènia. Tractarem de resoldre relacions no homogènies de la forma:

$a_n + ca_{n-1} = f(n), \quad n \geqq 1 \quad (1)$

$a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n), \quad n \geqq 2 \quad (2)$, on b i c són constants, $c \neq 0$, $f(n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Encara que no eixteisca cap métode general per a resoldre aquestes relacions, quan $f(n)$ tinga certa forma, intentarem un métode útil.

Suposem que en l'equació , (1), $c = -1$, $a_1 = a_0 + f(1)$, $a_2 = a_1 + f(2) = a_0 + f(1) + f(2)$, $a_3 = a_2 + f(3) = a_0 + f(1) + f(2) + f(3)$, $\ldots$ $a_n = a_0 + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(a_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

Exemple 7. *Resoleu la relació* $a_n - a_{n-1} = 3n^2, \quad n \geqq 1, \quad a_0 = 7.$

La solució general serà: $a_n = 7 + \sum_{i=1}^{n} f(i) = 7 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 = 7 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$
$7 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

En cas de no conéixer el valor del sumatori, utilitzarem el **mètode dels coeficients indeterminats,** que està basat en la relació homogènia associada obtesa al substituir $f(n)$ per zero.

Per a les relacions (1) i (2), siga $a_n^{(h)}$ la solució **general** de la relació **homogènia** associada i $a_n^{(p)}$ la solució **particular**, és a dir una solució de la relació no homogènia. Aleshores $\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}}$ és la **solució general de la relació.**

Exemple 8. *Resoleu la relació* $a_n - a_{n-1} = 3n^2, \quad n \geqq 1, \quad a_0 = 7.$

Per a la resolució utilitzarem, ara, el mètode dels coeficients indeterminats:

Siga $a_n^{(h)} = cr^n$ una solució de la homogènia $a_n - a_{n-1} = 0 \to cr^n - cr^{n-1} = 0 \to cr^{n-1}(r-1) = 0 \to r = 1 \to a_n^{(h)} = c.$

Siga $a_n^{(p)}$ la solució particular on $a_n^{(p)} = An^3 + Bn^2 + Cn + D \to (An^3 + Bn^2 + Cn + D) - [A(n-1)^3 + B(n-2)^2 + C(n-1) + D] = 3n^2 \to 3An^2 + (-3A + 2B)n + (A - B + C) = 3n^2.$

Identificant: $A = 1$, $B = 3/2$, $C = 1/2$.

Com que la solució general és $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \to a_n = c + n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = c + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

Però $a_0 = 7 \to 7 = c.$

Aleshores $a_n = 7 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

Exemple 9. *Resoleu la relació* $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n), \quad n \geqq 1, \quad a_0 = 2.$

Cal trobar la solució general de la relació homogènia associada, $a_n^{(h)} = cr^n$.

$a_n - 3a_{n-1} = 0 \to cr^n - 3cr^{n-1} = 0 \to cr^{n-1}(r-3) = 0 \to r - 3 = 0 \to r = 3.$

Aleshores, $a_n^{(h)} = cr^n = c3^n$.

Com que $f(n) = 5(7^n)$, cal trobar la solució particular de la no homogènia. Suposem $a_n^{(p)} = A(7^n)$

$a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n) \to A(7^n) - 3A(7^{n-1}) = 5(7^n) \to 7^{n-1}(7A - 3A) = 7^{n-1}(35) \to A = 35/4.$

És a dir, $a_n^{(p)} = (35/4)(7^n) = (5/4)(7^{n+1}), \quad n \geqq 0.$

La solució general $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c3^n + (5/4)(7^{n+1}).$

Com que $a_0 = 2 \to 2 = c + 35/4 \to c = -27/4.$

$a_n = (-27/4)3^n + (5/4)(7^{n+1}).$

Exemple 10. *Resoleu la relació* $a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n), \quad n \geqq 1, \quad a_0 = 2.$

Cal trobar la solució general de la relació homogènia associada, $a_n^{(h)} = cr^n$.
$a_n - 3a_{n-1} = 0 \to cr^n - 3cr^{n-1} = 0 \to cr^{n-1}(r-3) = 0 \to r - 3 = 0 \to r = 3$.
Aleshores, $a_n^{(h)} = cr^n = c3^n$.
Però $a_n^{(h)} = c3^n$ i $f(n) = 5(3^n)$, no són linealment independents. Aleshores suposem la solució particular $a_n^{(p)} = Bn(3^n)$.
$a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n) \to Bn(3^n) - 3B(n-1)(3^{n-1}) = 5(3^n) \to 3^n(Bn - B(n-1)) = 5(3^n) \to Bn - B(n-1) = 5 \to B = 5$.
La solució general $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c3^n + 5n3^n = (c+5n)3^n$.
Com que $a_0 = 2 \to 2 = c \to a_n = (2+5n)3^n$.

Conclusió :

$$\begin{aligned} \text{En } a_n + ca_{n-1} &= f(n), \quad n \geqq 1. \\ \text{on } f(n) &= k(r^n), k \text{ una constant}, n \geqq 0 \begin{cases} a_n^{(p)} = A(r^n), \text{ si } r^n \text{ no és sol. de la hom. assoc.} \\ a_n^{(p)} = Bn(r^n), \text{ si } r^n \text{ és sol. de la hom. assoc.} \end{cases} \end{aligned}$$

En $a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n)$, $n \geqq 2$ on b i c són constants, $c \neq 0$, $f(n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{on } f(n) = k(r^n), \quad k \text{ una constant}, \quad n \geqq 0 \begin{cases} a_n^{(p)} = A(r^n), \text{ si } r^n \text{ no és sol. de la hom. associada.} \\ a_n^{(p)} = Bn(r^n), \text{ si } a_n^{(h)} = c_1 r^n + c_2 r_1^n, \quad r_1 \neq r. \\ a_n^{(p)} = Cn^2(r^n), \text{ si } a_n^{(h)} = (c_1 + c_2 n) r^n \ r \text{ doble.} \end{cases}$$

Exemple 11. *En un llac la població de caragols augmenta en una tasa triple que la de l'any anterior. Comencem en 3000 caragols i a l'any següent hi ha 3500. Retirem 200 del llac per a incrementar el número en altres llacs. Seguim retirant caragols al final de cada any. Si a_n representa la població de caragols en el llac original després de n anys, trobeu i resoleu una relació de recurrència per a a_n, $n \geqq 0$.*

Açí, la relació de recurrència vindrà donada per:
$(a_{n+2} - a_{n+1}) = 3(a_{n+1} - a_n) - 200 \quad n \geqq 0 \to a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = -200$. La relació homogènia:
$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, si $a_n^{(h)} = cr^n$ és una solució, obtenim que:
$cr^{n+2} - 4cr^{n+1} + 3cr^n = 0 \to cr^n(r^2 - 4r + 3) = 0 \to r^2 - 4r + 3 = 0 \to r_1 = 3$, $r_2 = 1 \to a_n^{(h)} = c_1 3^n + c_2 1^n = 3^n c_1 + c_2$
Ja que

$f(n) = -200 = -200(1)^n \to a_n^{(p)} = Bn(1)^n = Bn \to B(n+2)-4B(n+1)+3Bn = -200 \to Bn + 2B - 4Bn - 4B + 3Bn = -200 \to B = 100.$

Aleshores, la solució general serà:

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = 3^n c_1 + c_2 + 100n.$

Però sabem que $a_0 = 3000, \quad a_1 = 3500 - 200 = 3300.$

Obtenim el sistema $\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 = 3000 \\ 3c_1 + c_2 = 3200 \end{array}\right\} \to c_1 = 100, \quad c_2 = 2900.$

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = 3^n c_1 + c_2 + 100n = 100(3^n) + 2900 + 100n \quad n \geqq 0.$

RESUM:

Considerem la relació de recurrència lineal amb coeficients constants:

$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = f(n)$, on c_i són constants i $c_0 \neq 0$ i $c_k \neq 0$, $n \geqq k$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Suposem que $a_n^{(h)}$ és la part homogènia de la solució a_n.

Aleshores:

i) Si $f(n)$ és un múltiple constant d'una de les seguents formes i no és una solució de la relació homogènia associada, aleshores $a_n^{(p)}$ te la forma mostrada en la taula:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
c constant	A constant
n	$An + B$
n^2	$An^2 + Bn + C$
$n^t \quad t \in \mathbb{N} - \{0\}$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n \quad r \in \mathbb{R}$	Ar^n
$sen\ \alpha n$	$A\ sen\ \alpha n + B\ cos\ \alpha n$
$cos\ \alpha n$	$A\ sen\ \alpha n + B\ cos\ \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n\ sen\ \alpha n$	$Ar^n\ sen\ \alpha n + Br^n\ cos\ \alpha n$
$r^n\ cos\ \alpha n$	$Ar^n\ sen\ \alpha n + Br^n\ cos\ \alpha n$

ii) Si $f(n)$ consta d'una suma de múltiples constants de termes com els mostrats en la taula anterior, aleshores la solució particular $a_n^{(p)}$ està formada per la suma dels termes corresponents de la columna encapçalada per $a_n^{(p)}$.

iii) Si un sumand $f_1(n)$ de $f(n)$ conté un factor que és una solució de la relació homogènia associada. Per exemple quan $f(n)$ conté sumands com cr^n o $(c_1 + c_2 n)r^n$ i r és una arrel característica.

Si $f_1(n)$ causa aquest problema, es multiplica la solució particular $a_{n_1}^{(p)}$ corresponent a $f_1(n)$ per la menor potència de n, per exemple n^s, per al qual cap sumand de $n^s f_1(n)$ és una solució de la relació homogènia associada. Aleshores $n^s a_{n_1}^{(p)}$ és la part corresponent de $a_n^{(p)}$

Aquest cas és el més complexe i no el tindrem en compte.

6. COMBINATÒRIA

6.1. Variacions.

Definició 12. *Anomenem* **variacions** *de m elements agafats de n en n, els diversos grups que es poden formar de m elements agafats de n en n de tal forma que cada grup es diferencia de l'anterior per tenir algun element nou o per l'ordre de col·locació.*
Es representa per $V_{m,n}$, on $m > n$, $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Definició 13. *Anomenem* **variacions** *de m elements agafats de n en n, el número d'aplicacions injectives que es poden formar entre un conjunt A de n elements i un altre conjunt B de m elements.*

El seu número ve donat per: $V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$.
Exemple: $V_{4,3} = 4.3.2 = 24$.
Formació: Per diagrames d'arbre. (fig.1).Per conjunts, per exemple per a $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{1,2,3,4\}$. Per grups.

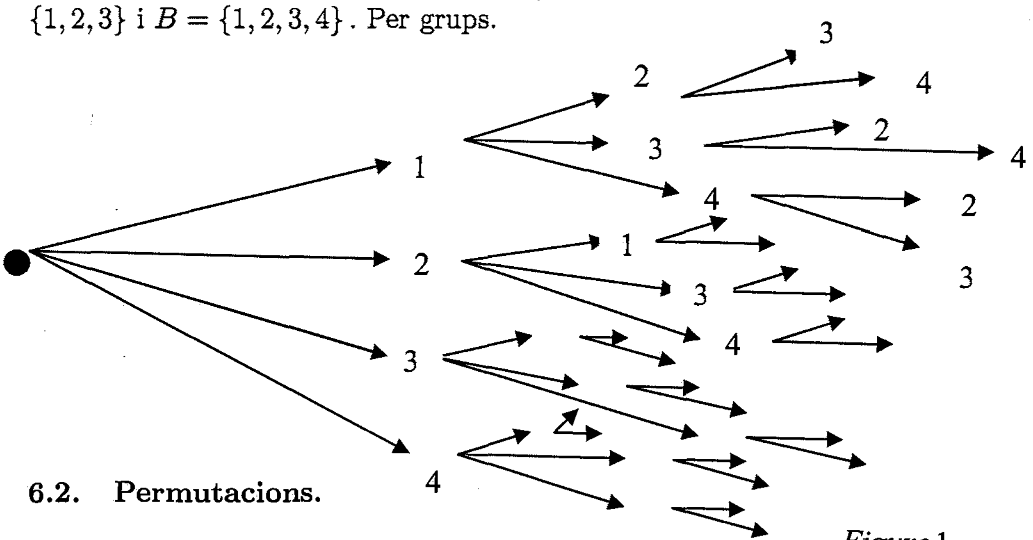


Figure 1

6.2. Permutacions.

Definició 14. *Anomenem* **permutacions** *de m elements els distints grups de m elements que es poden formar de m elements de tal manera que cada grup es diferencia de l'anterior per l'ordre de col·locació.*
Es representa per P_m on $m \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Definició 15. *Anomenem* **permutacions** *de m elements el número d'aplicacions bijectives que es poden formar entre dos conjunts de m elements.*

El seu número ve donat per: $P_m = V_{m,m} = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.
Exemple: $P_3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$.
Formació: Per diagrames d'arbre (fig 2).Per conjunts, per exemple per a $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{1,2,3\}$. Per grups.

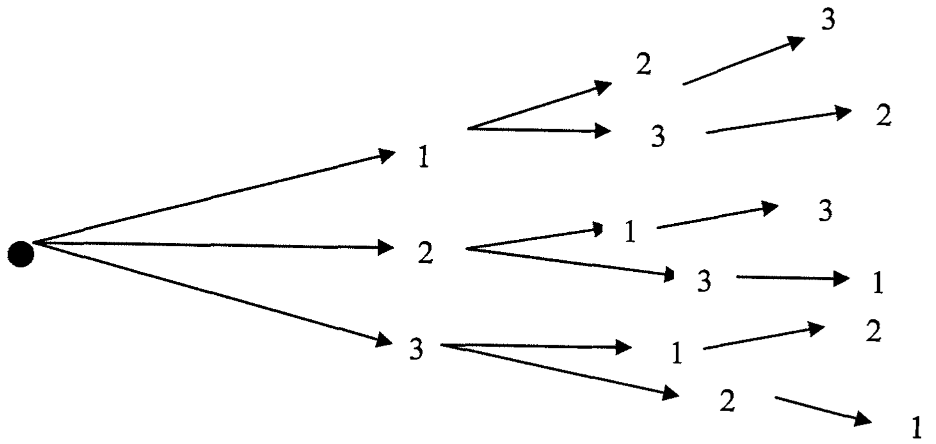


Figure 2

6.3. Combinacions.

Definició 16. *Anomenem* ***combinacions*** *de m elements agafats de n en n, els diversos grups que es poden formar de m elements agafats de n en n de tal forma que cada grup es diferencia de l'anterior per tenir algun element nou. L'ordre no interveneix.*
Es representa per $C_{m,n}$, on $m > n$, $m,n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Definició 17. *Anomenem* ***combinacions*** *de m elements agafats de n en n, el número de subconjunts de n elements que es poden formar d'un conjunt de m elements.*

El seu número ve donat per: $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.
Exemple: $C_{5,3} = \dfrac{V_{5,3}}{P_3} = \binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} = 10$.
Formació: Per diagrames d'arbre (fig 3). Per conjunts, per exemple per a $A = \{1,2,3,4\}$ i $B = \{1,2,3,4,5,6\}$. Per grups.

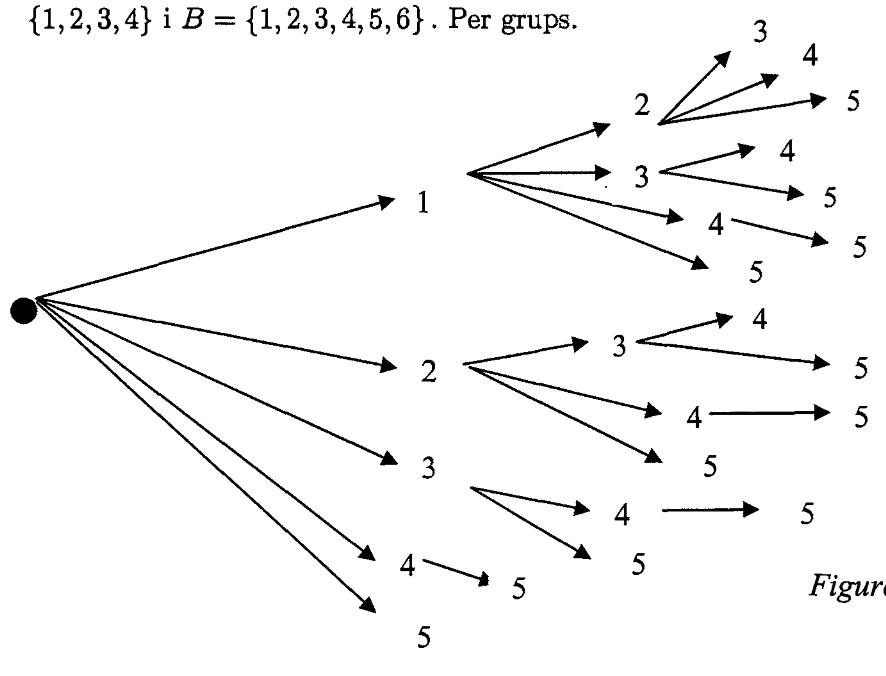


Figure 3

			Subconjunts	*de*	*n elements*	
Conjunts		1	2	3	4	5
	$\emptyset$					
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$				
$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$ $\{2\}$	$\{1,2\}$			
$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$	$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$		
$\{1,2,3,4\}$	$\emptyset$	$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$	$\{1,2\},\{1,3\}$ $\{1,4\},\{2,3\}$ $\{2,4\},\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$ $\{1,2,4\}$ $\{1,3,4\}$ $\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	
$\{1,2,3,4,5\}$	$\emptyset$	$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$ $\{5\}$	$\{1,2\},\{1,3\}$ $\{1,4\},\{1,5\}$ $\{2,3\},\{2,4\}$ $\{2,5\},\{3,4\}$ $\{3,5\},\{4,5\}$	$\{1,2,3\},\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\},\{1,3,4\}$ $\{1,3,5\},\{1,4,5\}$ $\{2,3,4\},\{2,3,5\}$ $\{2,4,5\},\{3,4,5\}$	$\{1,2,3,4\}$ $\{1,2,3,5\}$ $\{1,2,4,5\}$ $\{1,3,4,5\}$ $\{2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$

		Número de	*subconjunts*	*de*	*n*	*elements*
Conjunts	0	1	2	3	4	5
$\emptyset$	1					
$\{1\}$	1	1				
$\{1,2\}$	1	2	1			
$\{1,2,3\}$	1	3	3	1		
$\{1,2,3,4\}$	1	4	5	4	1	
$\{1,2,3,4,5\}$	1	5	10	10	5	1

6.4. Variacions amb repetició.

Definició 18. *Anomenem* **variacions amb repetició** *de m elements agafats de n en n, els diversos grups que es poden formar de m elements agafats de n en n de tal forma que en cada grup hi ha n elements distints o repetits.*

Es representa per $RV_{m,n}$, on $m,n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

Definició 19. *Anomenem* **variacions amb repetició** *de m elements agafats de n en n, el número d'aplicacions que es poden formar entre un conjunt de n elements en un altre de m elements.*

El seu número ve donat per: $RV_{m,n} = m^n$.

Formació: Per diagrames d'arbre (fig 4). Per conjunts, per exemple per a $A = \{1,2,3,4\}$ i $B = \{1,2,3,4,5,6\}$. Per grups.

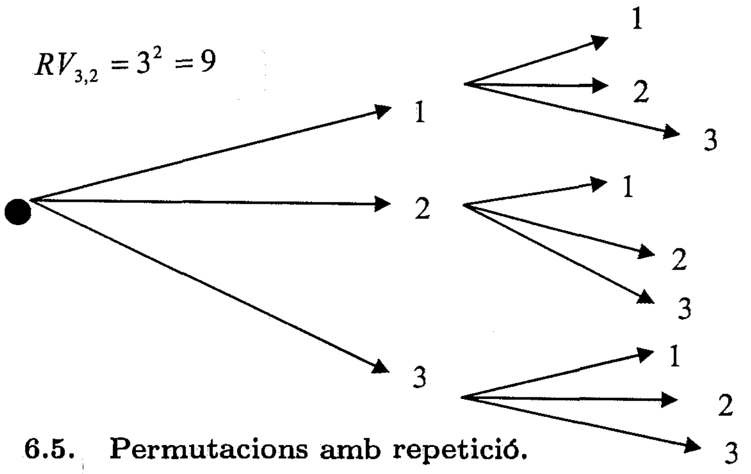


Figure 4

6.5. Permutacions amb repetició.

Definició 20. *Anomenem* **permutacions amb repetició** *de m elements $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ els diversos grups que es poden formar essent $\alpha_1$elements iguals a a_1, α_2 elements iguals a $a_2, \ldots$, α_m elements iguals a a_m, on $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$.*

Es representa per $RP_m^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m}$ on $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Definició 21. *Anomenem* **permutacions amb repetició** *de m elements $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ el número d'aplicacions suprajectives de tal manera que en el conjunt imatge hi hagen α_1 elements iguals a a_1, α_2 elements iguals a $a_2, \ldots$, α_m elements iguals a a_m, on $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$.*

El seu número ve donat per: $RP_m^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m} = \dfrac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!}$.

Nota 6. *Si pretenem calcular el número total d'aplicacions suprajectives entre un conjunt A amb una altre conjunt B tal que $card(A) = n$, $card(B) = m$, on $n > m$ $n, m\mathbb{N} - \{0\}$, es podria demostrar que:*

Número d'aplicacions suprajectives $= \binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \binom{m}{m-2}(m-2)^n -$

$$-\binom{m}{m-3}(m-3)^n + \cdots + (-1)^{m-2}\binom{m}{2}2^n + (-1)^{m-1}\binom{m}{1}1^n.$$

6.6. Números combinatoris.

Definició 22. *Si $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $m > n$, anomenem* ***número combinatori*** *de m sobre n i es representa per* $\binom{m}{n}$, *el quocient* $\dfrac{m!}{n!(m-n)}$.

És a dir, $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)}$.

Propietats. $P1: \boxed{\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}}$.

Dem.: $\binom{m}{m-n} = \dfrac{m!}{(m-n)![(m-(m-n)]!} = \dfrac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{n}$.

$P2: \boxed{\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}}$.

Dem.:

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{V_{m-1,n-1}}{(n-1)!} + \frac{V_{m-1,n}}{n!} = \frac{(m-1)(m-2)\dots[(m-1)-(n-1)+1]}{(n-1)!} +$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)\dots[(m-1-n+1]}{n!} = \frac{(m-1)(m-2)\dots[(m-n+1]}{(n-1)!} +$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)\dots[m-n]}{n(n-1)!} = \frac{(m-1)(m-2)\dots[(m-n+1]n + (m-1)(m-2)\dots(m-n)]}{n(n-1)!} =$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)\dots[(m-n+1]n + (m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)]}{n(n-1)!} =$$
$$\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)[n+(m-n)]}{n!} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} =$$
$$= \frac{V_{m,n}}{n!} = \binom{m}{n}.$$

6.7. Binomi de Newton.

Si volem desenbolupar l'expressió $(a+b)^n$ on $n \in \mathbb{N}$. seguirem els següents passos:

Si $n = 1$, $(a+b)^n = (a+b)^1 = a + b$.

Si $n = 2$, $(a+b)^n = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Si $n = 3$, $(a+b)^n = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$.

Al generalitzar:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n}$$

Dem.: Per inducció completa:

Suposem que es verifica per a $n = h \to (a+b)^h = \binom{h}{0} a^h + \binom{h}{1} a^{h-1}b + \binom{h}{2} a^{h-2}b^2 + \cdots + \binom{h}{h} b^h$.

Cal demostrar que la fórmula també és certa per a $n = h+1 \to (a+b)^{h+1} = \binom{h+1}{0} a^{h+1} + \binom{h+1}{1} a^h b + \binom{h+1}{2} a^{h-1}b^2 + \cdots + \binom{h+1}{h+1} b^{h+1}$.

En efecte, $(a+b)^{h+1} = (a+b)^h(a+b) =$

$$= \left[\binom{h}{0} a^h + \binom{h}{1} a^{h-1}b + \binom{h}{2} a^{h-2}b^2 + \cdots + \binom{h}{h} b^h\right](a+b) =$$

$$= \left[\binom{h}{0} a^h + \binom{h}{1} a^{h-1}b + \binom{h}{2} a^{h-2}b^2 + \cdots + \binom{h}{h} b^h\right] a +$$

$$+ \left[\binom{h}{0} a^h + \binom{h}{1} a^{h-1}b + \binom{h}{2} a^{h-2}b^2 + \cdots + \binom{h}{h} b^h\right] b =$$

$$\left[\binom{h}{0} a^{h+1} + \binom{h}{1} a^h b + \binom{h}{2} a^{h-1}b^2 + \cdots + \binom{h}{h} ab^h\right] +$$

$$+ \left[\binom{h}{0} a^h b + \binom{h}{1} a^{h-1}b^2 + \binom{h}{2} a^{h-2}b^3 + \cdots + \binom{h}{h} b^{h+1}\right] =$$

$$= \binom{h}{0} a^{h+1} + \left[\binom{h}{0} + \binom{h}{1}\right] a^h b + \left[\binom{h}{1} + \binom{h}{2}\right] a^{h-1}b^2 +$$

$$+ \left[\binom{h}{2} + \binom{h}{3}\right] a^{h-2}b^3 + \cdots + \left[\binom{h}{h-1} + \binom{h}{h}\right] ab^h + \binom{h}{h} b^{h+1} =$$

$$= \binom{h+1}{0} a^{h+1} + \binom{h+1}{1} a^h b + \binom{h+1}{2} a^{h-1}b^2 + \cdots + \binom{h+1}{h+1} b^{h+1}.$$

PROBLEMES TEMA 6. SISTEMES DE NUMERACIÓ, RECURRÈNCIA, COMBINATÒRIA

1. Resoleu les següents relacions de recurrència:

i) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$.

Sol.: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$.

$a_n^{(h)} = cr^n \to cr^{n+1} - 2cr^n = 0 \to cr^n(r-2) = 0 \to r = 2$.

Per la qual cosa $a_n^{(h)} = c2^n$.

$a_n^{(p)} = An2^n \to A(n+1)2^{n+1} - 2An2^n \to A = 1/2 = 2^{-1}$.

$a_n = c2^n + n2^{n-1}$. Ja que $a_0 = 1 \to 1 = c$. $a_n = 2^n + n2^{n-1}$.

ii) $a_{n+1} - 2a_n = 5$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$.

Sol.: $a_n^{(h)} = c2^n$. $a_n^{(p)} = A \to A - 2A = 5 \to A = -5$.

$a_n = c2^n - 5$. Ja que $a_0 = 1 \to 1 = c - 5 \to c = 6$. $a_n = 3 \times 2^{n+1} - 5$.

iii) $a_{n+1} - a_n = 2n + 3$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$.

Sol.: $a_n^{(h)} = cr^n \to cr^{n+1} - cr^n = 0 \to cr^n(r-1) = 0 \to r = 1$.

Per la qual cosa $a_n^{(h)} = c$.

$a_n^{(p)} = An^2 + Bn + C \to (A(n+1)^2 + B(n+1) + C) - (An^2 + Bn + C) = 2n + 3 \to A = 1$, $B = 2$.

$a_n = c + n^2 + 2n$. De la condició en frontera $a_0 = 1 \to 1 = c$, $a_n = (n+1)^2$.

iv) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n$, $n \geq 0$, $a_0 = 3$.

Sol.: $a_n^{(h)} = c$. $a_n^{(p)} = An^3 + Bn^2 + Cn + D \to (A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D) - (An^3 + Bn^2 + Cn + D) = 3n^2 - n \to A = 1$, $B = -2$, $C = 1$.

$a_n = c + n^3 - 2n^2 + n$. De la condició en frontera $a_0 = 3 \to 3 = c$, $a_n = 3 + n(n-1)^2$.

v) $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n$, $n \geq 0$, $a_0 = a_1 = 1$.

Sol.: En utilitzar el canvi de variable $a_n^2 = b$, la equació queda:

$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 7n$.

$b_n^{(h)} = cr^n \to r^2 - 5r + 6 = 0 \to r_1 = 3$, $r_2 = 2 \to b_n^{(h)} = c_1 3^n + c_2 2^n$.

$b_n^{(p)} = An + B \to (A(n+2)+B) - 5(A(n+1)+B) + 6(An+B) = 7n \to A = 7/2$, $B = 21/4 \to b_n = c_1 3^n + c_2 2^n + (7/2)n + (21/4)$.

De $a_0 = a_1 = 1 \to b_0 = b_1 = 1 \to \left\{ \begin{array}{c} c_1 + c_2 + \frac{21}{4} = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + \frac{7}{2} + \frac{21}{4} = 1 \end{array} \right. \to c_1 = \frac{3}{4}$, $c_2 = -5$.

$b_n = \frac{3}{4} \times 3^n - 5 \times 2^n + (7/2)n + (21/4) \to a_n = (b_n)^{1/2} \to a_n = (\frac{3}{4} \times 3^n - 5 \times 2^n + (7/2)n + (21/4))^{1/2}$.

vi) $a_n - 3a_{n-1} = n$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$.

Sol.: $a_n = (\frac{7}{4})3^n - (\frac{1}{2})n - \frac{3}{4}$.

2. Merxe demana un prèstec de 2500 euros al 12 per cent d'interés compost anual per comprar un computador. Si el prèstec ha de pagar-se en dos anys, quin és el pagament mensual?.

   Sol.: El capital prestat pel banc al cap de $n+1$ mes és $a_{n+1} = a_n i$, on i és l'interés, $a_0 = 2500$.

   Suposem P el pagament constant al final de cada mes. La equació de recurrència a resoldre serà:

   $a_{n+1} = a_n + a_n \times 0,01 - P \to a_{n+1} - 1,01a_n = -P$, on $a_0 = 2500$, $a_{24} = 0$.
   $a_n^{(h)} = cr^n \to r = 1,01 \to a_n^{(h)} = c(1,01)^n$.
   $a_n^{(p)} = A \to A - 1,01A = -P \to A = \dfrac{P}{0,01} \to a_n = c(1,01)^n + \dfrac{P}{0,01}$.

   De les condicions en frontera obtenim:

   $$\left.\begin{array}{r} c + \dfrac{P}{0,01} = 2500 \\ c(1,01)^{24} + \dfrac{P}{0,01} = 0 \end{array}\right\} \to c = -9268,34 \quad \text{i} \quad P = 117,68.$$

3. La solució general de la relació de recurrència $a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_2 a_n = b_3 n + b_4$ és $c_1 2^n + c_2 3^n + n - 7$, on $n \geq 0$. Trobeu les constants b_i, $1 \leq i \leq 4$.

   Sol.: $a_n^{(h)} = cr^n \to r^2 + b_1 r + b_2 = 0 \to r_1 = 2$, $r_2 = 3 \to (r-2)(r-3) = 0 \to r^2 - 5r + 6 = 0 \to b_1 = -5$, $b_2 = 6$.

   $a_n^{(p)} = n - 7 \to (n+2) - 7 + (-5)((n+1) - 7) + 6(n-7) = b_3 n + b_4 \to b_3 = 2$, $b_4 = -17$.

4. El nombre de bacteries de cert cultiu és 1000 aproximadament. Aquesta quantitat s'incrementa un 250% cada 2 hores. Utilitzeu una relació de recurrència per determinar el nombre de bacteries presents després d'un dia.

   Sol.: $a_{n+1} = a_n + 0,125a_n$, on $a_0 = 1000$.

   En calcular aquesta equació homogènia surten 16891 bacteries.

5. Si Laura va invertir 1000 euros al 6% d'interés trimestral, quants mesos ha d'esperar per obtenir el doble del què va invertir?. (No pot retirar els diners abans de finalitzar el trimestre).

Sol.: $a_{n+1} = a_n + 0,02a_n$, on $a_0 = 1000 \to a_{n+1} - 1,02a_n = 0 \to r = 1,02$.
$a_n = cr^n = c \times 1,02^n \to c = 1000$.
$2000 = 1000 \times 1,02^n \to 2 = 1,02^n \to n = \dfrac{log\ 2}{log\ 1,02} = 35$.

6. Efectueu:

i) $231_{(5} \times 24_{(5}$.

Sol.: Taules de sumar i multiplicar en base 5:

+	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

$$\begin{array}{r} 231_{(5} \\ \times \quad 24_{(5} \\ \hline 2024 \\ 1012 \\ \hline 12144_{(5} \end{array}$$

Per comprovar el resultat podem passar a base decimal, multiplicar i tornar a passar a base 5.

$231_{(5} \times 24_{(5} = 66 \times 14 = 924 = 12144_{(5}$.

ii) $3440_{(7} + 32521_{(7} + 142605_{(7} = 212166_{(7}$.

Taula de sumar en base 7:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

iii) $123745_{(8} : 670_{(8}$.

Taules de sumar i multiplicar en base 8:

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

Nota: $670_{(8} \times 1 = 670_{(8}$; $670_{(8} \times 2 = 1560_{(8}$; $670_{(8} \times 3 = 2450_{(8}$; $670_{(8} \times 4 = 3340_{(8}$.

$$
\begin{array}{rl}
123745_{(8} & :670_{(8} \\
-670_{(8} & 141_{(8} \\
\hline
3474_{(8} & \\
-3340_{(8} & \\
\hline
1345_{(8} & \\
-670_{(8} & \\
\hline
455_{(8} &
\end{array}
$$

7. Trobeu el nombre que en el sistema de base 8 s'escriu amb tres xifres que són respectivament el triple de les què s'utilitzarien per escriure'l en la base 14.

   Sol.: Siga $n = \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}_{(8} = \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}_{(14}$ tal que $x = 3a$, $y = 3b$, $z = 3c$.

   $n = \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}_{(8} = \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}_{(14} \rightarrow 3c + (3b)8 + (3a)8^2 = c + 14b + 14^2a.$

   Ja què $3a$, $3b$, $3c$ representen xifres en base 8, són menors que 8. Aleshores a, b, c sols poden agafar valors 0, 1 o 2. És més $a \neq 0$.

   Si $a = 1 \rightarrow 3c + (3b)8 + (3)8^2 = c + 14b + 14^2 \rightarrow 5b + c = 2.$

   Equació diofàntica en la qual agafarem les solucions positives amb les restriccions anteriors.

   $5b + c = 2 \rightarrow c = 2 - 5b$. Si $b = -1$, $c = 7$. Solució particular $(b_0, c_0) = (-1, 7)$.

   Solució general: $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + b'k \\ y = y_0 - a'k \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -1 + k \\ c = 7 - 5k \end{array} \right. \rightarrow k = 1,\ b = 0,\ c = 2.$

   Per la qual cosa $n = 306_{(8} = 102_{(14}$.

8. Expresseu el nombre 0,4 en base 3.

   Sol.: $= 0,4 = 0,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}\,\underline{f}\cdots_{(3} = a3^{-1}+b3^{-2}+c3^{-3}+d3^{-4}+e3^{-5}+f3^{-6}+\cdots =$
   $\frac{a}{3} + \frac{b}{3^2} + \frac{c}{3^3} + \frac{d}{3^4} + \frac{e}{3^5} + \frac{f}{3^6} + \cdots$

   En multiplicar per 3 a ambdós costats de la igualtat queda:

   $1,2 = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{3^2} + \frac{d}{3^3} + \frac{e}{3^4} + \frac{f}{3^5} + \cdots \rightarrow a = 1.$En restar la unitat queda:

   $0,2 = \frac{b}{3} + \frac{c}{3^2} + \frac{d}{3^3} + \frac{e}{3^4} + \frac{f}{3^5} + \cdots$

   En multiplicar per 3 a ambdós costats de la igualtat queda:

   $0,6 = b + \frac{c}{3} + \frac{d}{3^2} + \frac{e}{3^3} + \frac{f}{3^4} + \cdots \rightarrow b = 0.$

   En multiplicar per 3 a ambdós costats de la igualtat queda:

   $1,8 = c + \frac{d}{3} + \frac{e}{3^2} + \frac{f}{3^3} + \cdots \rightarrow c = 1.$En restar la unitat queda:

   $0,8 = \frac{d}{3} + \frac{e}{3^2} + \frac{f}{3^3} + \cdots$

En multiplicar per 3 a ambdós costats de la igualtat queda:

$2,4 = d + \frac{e}{3} + \frac{f}{3^2} + \cdots \rightarrow d = 2$.En restar dos unitats queda:

$0,4 = \frac{e}{3} + \frac{f}{3^2} + \cdots$

En multiplicar per 3 a ambdós costats de la igualtat queda:

$1,2 = e + \frac{f}{3} + \cdots \rightarrow e = 1$,etc

Aleshores $0,4 = 0,\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}\ \underline{f} \cdots_{(3} = 0,\widehat{1012}_{(3}$.

9. Siga n un nombre de tres xifres. Si el multipliquem per dos i al resultat li sumem 75, obtindrem un altre nombre que tindrà les mateixes xifres però en ordre invers. Si el nombre que busquem el dividim per la xifra de les unitats, el qüocient és 41 (residu zero). Si sumem les xifres del nombre que busquem ens dóna 6. Trobeu aquest nombre.

   Sol.: Si $n = \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z} = z + 10y + 100x$.

   $2n + 75 = \underline{z}\ \underline{y}\ \underline{x} = x + 10 + 100z \rightarrow 2(z + 10y + 100x) + 75 = x + 10 + 100z$. (1)

   $\frac{n}{z} = 41 \rightarrow z + 10y + 100x = 41z$. (2)

   $x + y + z = 6$. (3)

   $$\left.\begin{array}{r} 199x + 10y - 98z + 75 = 0 \\ 10x + y - 4z = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1,\ y = 2,\ z = 3 \rightarrow n = 123.$$

10. Determineu un nombre de dos xifres igual al doble del producte de les seues xifres.

    Sol.: $\left.\begin{array}{r} n = \underline{x}\ \underline{y} = y + 10x \\ n = 2xy \end{array}\right\} \rightarrow y + 10x = 2xy \rightarrow 10x = y(2x - 1)$. (1)

    $x \neq 0$, $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $y \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

    En (1) podem donar valors:

    Si $x = 1 \rightarrow 10 = y$, impossible.

    Si $x = 2 \rightarrow 20 = 3y \rightarrow y \notin \mathbb{N}$, impossible.

    Si $x = 3 \rightarrow 30 = 5y \rightarrow y = 6$. En aquest ca $n = 36$. Ja no existeix cap altra solució.

    També podem raonar aplicant el teorema d'Euclides a (1), ja què x i $2x - 1$ són primers entre ells. Aleshores $2x - 1$ dividix a 10.

    Les quatre possibilitats són: a) $2x - 1 = 1$, b) $2x - 1 = 2$, c) $2x - 1 = 5$, c) $2x - 1 = 10$. De totes, sols l'apartat c) és solució.

11. i) En quina xifra acaba la potència 17^{345}?.

ii) Quin residu dóna el nombre 180^{316} al dividir-lo per 7?.

Sol.: i) $17^0 = 1$, 17^1 acaba en 7, 17^2 acaba en 9, 17^3 acaba en 3, 17^4 acaba en1 i ja es tornen a repetir en aquest ordre. És a dir, 1,7,9,3 1,7,9,3.

Sols tenim que dividir 345 entre 4 i veure el residu. Ja què aquest és 1, aleshores la potència acaba en 7.

ii) Sabem que $a \equiv r(m)$, $\forall a$ és a dir, qualsevol sencer és congruent módul m amb el residu que s'obté en dividir a entre m. També utilitzarem propietats de la relació de congruència.

Calculem els residus potencials del nombre 180^{316} pel módul $m = 7$.

$180^0 \equiv 1(7)$, $180^1 \equiv 5(7)$, $180^2 \equiv 25(7) \equiv 4(7)$, $180^3 \equiv 20(7) \equiv 6(7)$, $180^4 \equiv 16(7) \equiv 2(7)$, $180^5 \equiv 24(7) \equiv 3(7)$, $180^6 \equiv 36(7) \equiv 1(7), \ldots$

Ja què ha surtit el residu 1, tots els altres es van repetint i queda:

1,5,4,6,2,3 1,5,4,6,2,3 1,5,4,6,2,3 ...

Sols tenim que dividir 316 entre 6 i el residu és 4. Aleshores per a la potència 180^4, el residu potencial és 2.

En definitiva, el nombre 180^{316} al dividir-lo per 7 dóna residu 2.

12. Trobeu el criteri de divisibilitat per 13. És divisible per 13 el nombre 7240081502?.

Sol.: Calculem els residus potencials en base 10 i módul 13.

$10^0 \equiv 1(13)$, $10^1 \equiv 10(13) \equiv -3(13)$, $10^2 \equiv 9(13)$, $10^3 \equiv -1(13)$, $10^4 \equiv 3(13)$, $10^5 \equiv 4(13)$, $10^6 \equiv 1(13), \ldots$

Ja què ha surtit el residu 1, tots els altres es van repetint i queda:

1,-3,9,-1,3,4 1,-3,9,-1,3,4 1,-3,9,-1,3,4 ...

El criteri de divisibilitat s'obté en aplicar la teoria (teorema fonamental).

El nombre 7240081502 és divisible per 13 sii $2 \times 1 + 0 \times (-3) + 5 \times 9 + 1 \times (-1) + 8 \times 3 + 0 \times 4 + 0 \times 1 + 4 \times (-3) + 2 \times 9 + 7 \times (-1)$ és múltiple de 13.

Resulta que el número que ens dóna val 69 i al no ser múltiple de 13, el nombre 7240081502 no és divisible per 13.

13. Trobeu el criteri de divisibilitat per 11 i per 101. Trobeu les xifres x i y per què el nombre $7x1y4$ siga múltiple de 11 i de 101.

Residus potencials en base 10 i módul 11 són: 1, -1, 1, -1, ...

Residus potencials en base 10 i módul 101 són: 1,10,-1,-10,1,10,-1,-10,...

El nombre $7x1y4$ serà divisible per 11 sii $4 \times 1 + y \times (-1) + 1 \times 1 + x \times (-1) + 7 \times 1 = \dot{11} \to 12 - x - y = \dot{11} \to x + y = \dot{11} + 1$.

El nombre $7x1y4$ serà divisible per 101 sii $4\times 1+10y+1\times(-1)+x\times(-10)+7\times 1 = \overset{\bullet}{101} \to 10(-x+y+1) = \overset{\bullet}{101} \to 1-x+y = \overset{\bullet}{101} \to -x+y = \overset{\bullet}{101}-1$.

Ja què $x, y \in \{0,1,2,\dots,8,9\} \to 0 \le x+y \le 18$.

De $x+y = \overset{\bullet}{11}+1$ sols caben dues possibilitat: 1^a $x+y=1$, 2^a $x+y=12$.

De $-x+y = \overset{\bullet}{101}-1 \to -x+y=-1$.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1\\ -x+y&=-1 \end{aligned}\right\} \to y=0,\ x=1.$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=12\\ -x+y&=-1 \end{aligned}\right\} \to 2y=11 \to y \notin \mathbb{N}.$$

Solució: el nombre divisible per 11 i per 101 és 71104.

14. Sense efectuar cap divisió, trobeu els residus que resulten de dividir 8795 per 7, per 9 i per 11.

    Sol.: Calculem esl residus potencials en base 10 i mòdul 7.

    $10^0 \equiv 1(7)$, $10^1 \equiv 3(7)$, $10^2 \equiv 2(7)$, $10^3 \equiv -1(7)$, $10^4 \equiv 4(7)$, $10^5 \equiv -2(7)$, $10^6 \equiv 1(7)$.

    Ja què ha surtit el residu 1, tots els altres es van repetint i queda:

    1,3,2,-1,4,-2 1,3,2,-1,4,-2 1,3,2,-1,4,-2 ...

    El nombre 8795 és divisible per 7 sii $5\times\ 1+9\times 3+7\times 2+8\times(-1) = \overset{\bullet}{7}$.

    Però $5+27+14-8 = 5+21+6+\overset{\bullet}{7}-7-1 = 5+\overset{\bullet}{7}+6-1 = 10+\overset{\bullet}{7} = 7+3+\overset{\bullet}{7} = \overset{\bullet}{7}+3$.

    Per la qual cosa sense efectuar cap divisió, el residu de dividir 8795 per 7 és 3.

    Per als dos cassos posteriors es fa el mateix i el resultat és: al dividir per 9 el residu és 2 i al dividir per 11 el residu és 6.

15. Trobeu les solucions senceres de l'equació $ax-by=13$, on a és la base del sistema de numeració en la qual $123_{(a}$ s'escriu 66 en base 10 i b és el menor sencer positiu que cal sumar a 3^{1964} per obtenir un múltiple de 4.

    Sol.: $123_{(a} = 3+2a+a^2 = 66 \to a=7$, ja què la solució negativa no serveix.

    Residus potencials del nombre 3^{1964} mòdul 4:

    $3^0 \equiv 1(4)$, $3^1 \equiv -1(4)$, $3^2 \equiv 1(4)$.Ja què ha surtit el residu 1, tots els altres es van repetint i queda:

    1, -1, 1, -1, 1, -1, ... Ja què $3^{1964} = 3^{248\times 4+0}$ ens indica que el residu de dividir aquesta potència per 4 dóna 1. És a dir, $3^{1964}-1 = \overset{\bullet}{4} \to 3^{1964} = \overset{\bullet}{4}+1$, el què vol dir que cal sumar 3 per què aquesta potència sega múltiple de 4. Aleshores $b=3$.

Per la qual cosa l'equació a resoldre seria: $7x - 3y = 13 \rightarrow y = \frac{7x}{3} - \frac{13}{3} = 2x - 4 + \frac{x-1}{3}$

Solució particular: $(x_0 + y_0) = (4, 5)$.

Solució general: $\left.\begin{array}{l} x = 4 + 3k \\ y = 5 + 7k \end{array}\right\}$, on $k \in \mathbb{Z}$

k	-1	0	1	2
x	1	4	7	10
y	-2	5	12	19

16. Trobeu les xifres x, y tal que: i) $xx088y$ siga divisible per 231. ii) $1x1yxy$ siga divisible per 63. iii) $12xy3x$ sigadivisible per 84.

Sol.: i) El nombre $231 = 3 \times 7 \times 11$. Aleshores per a que el nombre el nombre $xx088y$ siga divisible per 231 ha de ser-ho per 3, per 7 i per 11 a la vegada.

Divisibilitat per 3:

Residus potencials en base 10 mòdul 3:

$10^0 \equiv 1(3)$, $10^1 \equiv 1(3)$. Tots els residus potencials són iguals a la unitat.

$2x + y + 16 = \dot{3} \rightarrow 2x + y = \dot{3} - 16 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26\}$.

Divisibilitat per 7:

Residus potencials en base 10 mòdul 7:

$10^0 \equiv 1(7)$, $10^1 \equiv 3(7)$, $10^2 \equiv 2(7)$, $10^3 \equiv -1(7)$, $10^4 \equiv 4(7)$, $10^5 \equiv -2(7)$, $10^6 \equiv 1(7)$.

Ja què ha surtit el residu 1, tots els altres es van repetint i queda:

1,3,2,-1,4,-2 1,3,2,-1,4,-2 1,3,2,-1,4,-2 ...

$y+8\times3+8\times2+0\times(-1)+x\times4+x\times(-2) = \dot{7} \rightarrow 2x+y = \dot{7}-40 = \{2, 9, 16, 23\}$.

Divisibilitat per 11:

Residus potencials en base 10 mòdul 11:

$10^0 \equiv 1(11)$, $10^1 \equiv -1(11)$, $10^2 \equiv 1(11)$. Ja es repeteixen.

1,-1 1,-1 1,-1 ...

$y - 8 + 8 + x - x = \dot{11} \rightarrow y = \dot{11} \rightarrow y = 0$, ja què x, y són xifres.

Aleshores $x = 1$, $y = 0$. El nombre seria 110880.

ii) El nombre $1x1yxy$ serà divisible per 63 sii és divisible per 9 i per 7.

Divisibilitat per 9:

Residus potencials en base 10 mòdul 9:.

$10^0 \equiv 1(9)$, $10^1 \equiv 1(9)$. Tots els residus potencials són iguals a la unitat.

$2x + 2y + 2 = \dot{9} \rightarrow 2x + 2y = \dot{9} - 2 = \{7, 16, 25, 34\} \rightarrow x + y \in \{8, 17\}$ (1)

Divisibilitat per 7:

$7x + 3y = \dot{7} + 3 = \{3, 10, 17, 24, \ldots, 73, 80\}$ (2)

De tots els possibles cassos de (1) $x = 0, y = 8$ $x = 1, y = 7$ $\ldots$ $x = 8, y = 9$, sols el primer compleix també l'equació (2).

La única solució del problema és: 101808.

iii) El nombre $12xy3x$ serà divisible per 84 sii és divisible per 4 i per 3 i per 7.

Divisibilitat per 4:

Residus potencials en bas

Els residus potencials en base 10 módul 4 són : 1,2,0,0,0,...

$x + 6 = \dot{4} \rightarrow x = \dot{4} - 6 \in \{2, 6\}$.

Divisibilitat per 3:

$2x + y + 6 = \dot{3} \rightarrow 2x + y = \dot{3} - 6 \in \{0, 3, 6, 9, \ldots, 24, 27\}$.

Divisibilitat per 7:

Residus potencials en base 10 módul 7:

1,3,2,-1,4,-2 1,3,2,-1,4,-2 1,3,2,-1,4,-2 ...

$x + 9 + 2y - x + 8 - 2 = \dot{7} \rightarrow 2y = \dot{7} - 1 \in \{6, 13\} \rightarrow y = 3$.

Si $x = 2$ i $y = 3 \rightarrow 2x + y = 7 \notin \dot{3} - 6$. No és solució.

Si $x = 6$ i $y = 3 \rightarrow 2x + y = 15 \in \dot{3} - 6$. Sí és solució. El nombre és 126336.

17. i) Trobeu el criteri de divisibilitat en base 7 de $14_{(7}$.

ii) Trobeu el criteri de divisibilitat en base 7 de $11_{(7}$. Apliqueu-lo al nombre $2251642_{(7}$.

Sol.: i) En aquest cas es tracta de trobar els residus potencials del nombre $14_{(7}$ mòdul 7. Però $7 = 10_{(7}$.

$(14_{(7)})^0 \equiv 1(7)$, $(14_{(7)})^1 \equiv 4(7)$, $(14_{(7)})^2 \equiv 2(7)$, $(14_{(7)})^3 \equiv 1(7)$. Ja es repeteixen

Cal tenir en compte que $14_{(7} = 11_{(10}$. Així, els residus potencials són: 1,4,2 1,4,2 ...

ii) Els residus potencials del nombre $11_{(7}$ mòdul 7 són: 1,-1,1,-1,...

El nombre $2251642_{(7}$ serà divisible per $11_{(7}$ en base 7 sii $2-4+6-1+5-2+2 = 11_{(7} \rightarrow 8 = 11_{(7}$ (ja què $11_{(7} = 8_{(10}$.) El nombre sí que és divisible per $11_{(7}$.

18. Trobeu el número de paraules diferents de 5 lletres que es poden formar amb les lletres de la paraula "empujado", i) si cada lletra no s'utilitza més d'una vegada, ii) si cada lletra es pot repetir (no fa falta que tinga significat).

    Sol.: i) En la paraula "empujado", cap de les lletres ve repetida, per la qual cosa aquestes 8 lletres han d'ocupar 5 llocs. Es tracta de trobar les $V_{8,5} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$. En l'apartat ii) $RV_{8,5} = 8^5 = 32768$.

19. Trobeu els números que es poden formar amb 4 dels 5 dígits, 1,2,3,4,5, i) si aquests no es poden repetir en cada número, ii) sí es poden repetir. Si els dígits no es poden repetir, quants números de 4 xifres es poden formar?, iii) començant per 2, iv) acabant en 25.

    Sol.: i) $V_{5,4} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$. ii) $RV_{5,4} = 5^4 = 625$. iii) Per començar amb la xifra 2 queden 3 llocs per ser ocupats per 4 xifres. Per la qual cosa $V_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$. També és suficient dividir 120 entre 5. iv) Idem $V_{3,2} = 3 \times 2 = 6$.

20. Trobeu els nombres de 4 xifres que es poden formar amb els 10 dígits, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, si cadascú sols es pot utilitzar una sola vegada. Quants d'aquests nombres són senars (imparells)?.

    Sol.: Ja què els nombres són de 4 xifres, aquests no poden començar per zero. Resten 9 xifres per ocupar un lloc, és a dir, $V_{9,1}$. El número total de nombres seria $9 \times V_{9,3} = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$. Per què el nombre siga senar, cal que acabe en una xifra senar com 1, 3, 5, 7 o 9. Però tampoc pot començar per zero ja què es tracta de nombres de 4 xifres. Per la qual cosa: $8 \times 5 \times V_{8,2} = 40 \times 8 \times 7 = 2240$.

21. Resoleu l'equació:

    $$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \frac{x(x^2+6)}{6}.$$

    Sol.: $1 + x + \dfrac{x(x-1)}{2} + \dfrac{x(x-1)(x-2)}{2} = \dfrac{x(x^2+6)}{6} \to 6 + 6x + 3x(x-1) + x + (x-1)(x-2) = x^3 + 6x \to x = 6$.

22. Trobeu m per què verifique:

    $$\binom{m}{2} + \binom{m-1}{2} + \binom{m-2}{2} = 136.$$

    Sol.: $\dfrac{m(m-1)}{2} + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2} = 136 \to m^2 - 3m - 88 = 0 \to m = 11$. La solució negativa no és vàlida.

23. Una persona que viu a l'últim pis, baixa per l'escala de tres en tres esclaons i la puja de dos en dos. En total dóna 100 salts. Quants esclaons te l'escala?.

Sol.: Suposem n el número de salts que utilitza en baixar i m els utilitzats en pujar. Ja què són 100 el número de salts, aleshores, $n + m = 100$.

En baixar, cada tres esclaons és un salt i en pujar, cada dos esclaons és un salt. El número d'esclaons val $2m = 2n$.

$$\left.\begin{array}{r} 2m = 2n \\ n+m = 100 \end{array}\right\} \rightarrow n = 40, \qquad m = 60.$$ El número d'esclaons val 120.

24. i) Com trobaràs de quantes maneres es podrien asseure dotze persones al voltant d'una taula rodona?. Raoneu la resposta. ii) De quantes maneres es podrien asseure dotze persones al voltant d'una taula rodona de forma que tres d'aquestes estiguen sempres juntes?.

    Sol.: i) Suposem que una d'aquestes es pose en un lloc determinat. Les onze persones restants poden asseure's de 11! formes. Per la qual cosa hi haurà $11! = 11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 39.916.800$ maneres d'asseure's.

    ii) Considerem a les tres persones com si fos sols una. Ja què són 3! les maneres diferents de disposar a tres persones entre sí i 9! les formes de col·locar les restants persones. El número demanat serà igual a $3!\times 9! = 3\times2\times9\times8\times7\times 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 2.177.280$.

25. Trobeu la suma dels nombres representats per les permutacions sense repetició de les xifres 2,3,4 i 5.

    Sol.: el número total de nombres de 4 xifres sense repetició correspon a $P_4 = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$.

    La suma de tots ells serà: $2345 + 2354 + 2435 + 2453 + 2534 + 2543 + 3245 + 3254 + 3425 + 3452 + 3524 + 3542 + \cdots$
    $= (2\times10^3 + 3\times10^2 + 4\times10 + 5) + (2\times10^3 + 3\times10^2 + 5\times10 + 4) + \cdots$
    $+(2\times10^3 + 5\times10^2 + 4\times10 + 3) + (3\times10^3 + 2\times10^2 + 4\times10 + 5)+$
    $+(3\times10^3 + 2\times10^2 + 5\times10 + 4) + \cdots = 6\times2\times10^3 + 6\times3\times10^3 + 6\times4\times 10^3 + 6\times5\times10^3 + 6\times2\times10^2 + 6\times3\times10^2 + 6\times4\times10^2 + 6\times5\times10^2 + \cdots$
    $= 6\times(2{+}3{+}4{+}5)\times10^3{+}6\times(2{+}3{+}4{+}5)\times10^2{+}\cdots = 6\times14\times10^3{+}6\times14\times10^2{+}\cdots$
    $= 6\times14\times(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 93324$.

26. Trobeu el número i la suma de tots els nombres de cinc xifres sense repetir que es poden formar de les xifres 1,2,3,4,5,6 i 7.

    Sol.: El número correpon a $V_{7,5} = 7\times6\times5\times4\times3 = 2520$.

    La suma és $360\times28\times(10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 1119998880$.

27. i) Trobeu els nombres de 5 xifres que es poden formar amb els dígits 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, si es poden repetir. Quants d'aquests nombres ii) comencen per 40, iii) són pars, iv) són divisibles per 5?.

Sol.: Ja què el nombre és de 5 xifres, mai pot començar per zero i per la qual cosa tenim 9 números per ocupar un lloc. És a dir, $V_{9,1} = 9$. Les xifres es poden repetir, per la qual cosa el número de nombres de 5 xifres correspon a $9 \times RV_{10,4} = 90000$.

ii) En començar per 40 resten tres llocs per ser ocupats per 10 xifres, aleshores el número de nombres que començen per 40 correspon a $RV_{10,3} = 1000$.

iii) Els nombres pars acaben en xifra par, no poden començar per zero i a més a més són 5 les xifres pars. Per tot això, el número de nombres pars correspon a $9 \times RV_{10,3} \times 5 = 45000$.

iv) Idem. La solució seria 18000.

28. i) Trobeu el número de paraules que es poden formar amb les lletres de la paraula "cooperador" agafades totes a la vegada. Quantes d'aquestes paraules, ii) tenen juntes les tres "o"?., iii) comencen per les dos "r"?. (Les paraules no necessiten tenir significat).

Sol.: i) En la paraula cooperador la lletra o està repetida tres vegades, la r dos vegades i les altres una sola vegada. Es tracta de calcular les $RP_{10}^{3,2,1,1,1,1,1} = \frac{10!}{3! \times 2!} = 302400$.

ii) El número de possibilitats que tenen les tres o juntes són 8 i queden 7 lletres per ocupar 7 llocs. Aleshores, el número de paraules que tenen juntes les tres o serà: $8 \times RP_7^{2,1,1,1,1,1} = 8 \times \frac{7!}{2!} = 20160$.

iii) Idem. La solució és 6720.

29. A una reunió van 18 persones. i) Quants grups distints de 5 persones es poden formar?. ii) En quants d'aquests grups entra una persona determinada?. iii) En quants entren tres persones determinades?.

Sol.: i) $C_{18,5} = \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{18!}{5! \times 13!} = 8568$. ii) $C_{17,4} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{17!}{4! \times 13!} = 2380$.

iii) $3! \times C_{15,2} = 6 \times \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \times \frac{15!}{2! \times 13!} = 630$.

30. Trobeu x i y si $C_{x,y-1} = C_{x,y}$ i $4C_{x,y} = 5C_{x,y-2}$.

Sol.: $C_{x,y-1} = C_{x,y} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{x!}{(y-1)! \times (x-y+1)!} = \frac{x!}{y! \times (x-y)!} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{(y-1)! \times (x-y+1) \times (x-y)!} = \frac{1}{y \times (y-1)! \times (x-y)!} \rightarrow \boxed{2y - x = 1.}$$

$$4C_{x,y} = 5C_{x,y-2} \to 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix} \to 4\frac{x!}{y! \times (x-y)!} = 5\frac{x!}{(y-2)! \times (x-y+2)!} \to$$

$$\to \frac{4}{y \times (y-1)! \times (y-2)! \times (x-y)!} = \frac{5}{(y-2)! \times (x-y+2) \times (x-y+1) \times (x-y)!} \to$$

$$\to \boxed{4(x-y+2)(x-y+1) = 5y(y-1).}$$

$$\left.\begin{array}{c} 4(x-y+2)(x-y+1) = 5y(y-1) \\ y = x-y+1 \end{array}\right\} \to 4(y+1)y = 5y(y-1) \to \boxed{y=9\ ;\ x=17.}$$

31. Per poder transmetre manaments, disposem de 5 senyeres de colors diferents que es poden posar sobre tres pals situats en línia recta. Sobre cada pal es pot colocar una senyera o ninguna. Segons siga el número de senyeres, el pal sobre la què es col·loca i el color de la senyera, obtindrem un senyal diferent. Quants manaments diferents podem transmetre?.

    Sol.:

    Cap senyera: ....1.

    Amb una senyera en cada pal: $3 \times 5 = 15$.

    Amb dos senyeres: $V_{5,2} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 60$.

    Amb tres senyeres: $V_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

    Total: 136 manaments.

32. Resoleu: $V_{x,2} + V_{(x-2),2} + V_{(x-4),2} = 98$.

    Sol.: $x(x-1)+(x-2)(x-3)+(x-4)(x-5) = 98 \to 3x^2-15x-72 = 0 \to x = 8$. L'altra solució és negativa i no val.

33. De quantes maneres es poden elegir 3 homes entre un grup de 15, de forma què: i) un d'ells cal que figure en cada grup seleccionat?., iii) un d'ells cal i els altres 2 no deuen de figurar en cada grup seleccionat?.

    Sol.: i) Si un d'ells figura en cada grup, queden 14 homes per ocupar 2 llocs. És a dir, $\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix} = 91$.

    ii) Ja què dos d'ells no figuren en cada grup, queden 13 homes per ocupar 3 llocs. És a dir, $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} = 286$.

    iii) Si dos no figuren en cada grup, queden 13 persones per ocupar 2 llocs, però com què l'altre lloc està ocupat per un d'ells, vol dir què són 12 les persones per ocupar 2 llocs. És a dir, $\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = 66$.

34. i) De quantes maneres es poden repartit 12 llibres entre 3 estudiants de forma què cadascú reba 4 llibres?. ii) De quantes maneres es poden dividir 12 llibres en 3 grups de 4 llibres cadascú?.

    Sol.: i) El primer estudiant pot elegir 4 llibres esntre esl 12 de $\binom{12}{4}$ formes diferents.

    El segon estudiant pot elegir 4 llibres entre els 8 que resten de $\binom{8}{4}$ formes diferents.

    El tercer estudiant pot elegir 4 llibres entre els 4 que resten d'una forma que és $\binom{4}{4}$.

    Per la qual cosa, el número que ens demanen serà: $\binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4} = 34650$.

    ii) Els tres grups es poden distribuir entre els estudiants de $3! = 6$ maneres diferents. Per la qual cosa, el número demanat és $\dfrac{34650}{6} = 5775$.

35. Suposem ordenades en sentit creixent totes les permutacions que es poden formar amb les xifres 1,2,3,4,5,6. Quin lloc correspon a la 354612?.

    Sol.: $P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

    En dividir 720 entre 6 obtenim que són 120 les que comencen per 1, per 2, ... És a dir, 240 abans de començar per 3.

    La que ocuparia el lloc 241 seria 312456.

    En dividir 120 entre 5 obtenim que són 24 les que comencen per 1, per 2, ... És a dir, 72 abans de començar per 5.

    La que ocuparia el lloc 313 seria 351246.

    En dividir 24 entre 4 obtenim que són 6 les que comencen per 1, per 2, ... És a dir, 12 abans de començar per 4.

    La que ocuparia el lloc 325 seria 354126.

    En dividir 6 entre 3 obtenim que són 2 les que comencen per 1, per 2, ... És a dir, 4 abans de començar per 6.

    La que ocuparia el lloc 329 seria 354612.

Part I
TEMA 7: GRAFS

1. INTRODUCCIÓ

Cal tenir en compte que la teoria dels grafs és mes o menys recent i per la qual cosa la terminologia no és única. El terme de graf, en matemàtiques, és utilitzat de diferentes formes. Abans s'ha estudiat com un subconjunt d'un producte cartesià. De qualsevol manera, aquesta teoria és important en l'actualitat i adopta diferentes formes pràctiques d'abordar alguns problemes qüotidians, com es veura al llarg del tema.

Definició 1. *Un* **graf** *G consta de dos parts:*

i) Un conjunt V als quals elements s'anomenen *vèrtex*.
ii) Un conjunt E de parells no ordenats de vèrtex distints anomenats *arestes*.
Representem el graf per $G = (V, E)$.

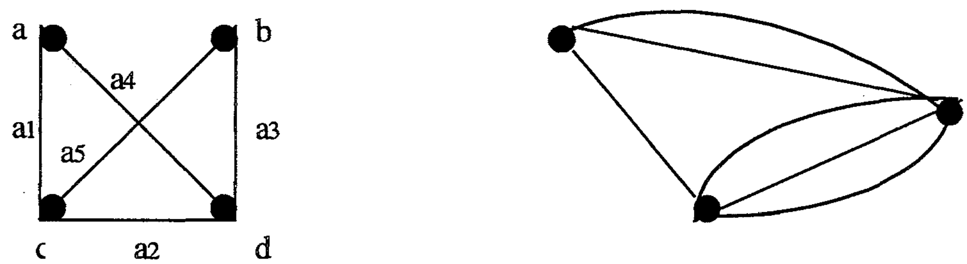


Figure 1:

El primer graf de la figura 1 consta de quatre vèrtexs i de cinc arestes. Sols hi ha una aresta que comunica dos vèrtexs distints. El segon és un **multigraf**, ja que consta de tres vèrtexs, però no és única l'aresta que comunica amb dos vèrtexs diferents. Aquest seria un 3-graf, ja que el nombre màxim d'arestes que se comunica amb dos vèrtexs és 3. Quan les arestes són segments orientats, el graf s'anomena **graf orientat.** Normalment treballarem sols els grafs no orientats.

Hi ha una equivalència entre els grafs orientats i els no orientats.

Grafs orientats	*Grafs no orientats*
Arc	*Aresta*
Camí	*Cadena*
Circuit	*Cicle*
Fortament conexe	*Conexe*
Folgana	*Distància*

Definició 2. *Direm que dos* **vèrtexs** *són* **adjacents** *si estan units per alguna aresta. Direm que dos* **arestes** *són* **adjacents** *si tenen un punt en comú.*

Definició 3. *Siga $G = (V, E)$ un graf. Siga $V' \subset V$ i $E' \subset E$ tal que els extrems siguen en V'. Aleshores a $G' = (V', E')$ s'anomena* **subgraf** *de $G = (V, E)$.*

És a dir, cada aresta de E' és incident amb vèrtexs de V'.

Exercici 1. *Dibuixeu tots els subgrafs que es poden obtenir del graf anterior.*

Definició 4. *Anomenem* **bucle** *una aresta que uneix un mateix vèrtex.*

Definició 5. *Anomenem* **grau** *d'un vèrtex al nombre d'arestes incidents en el vèrtex.*

Així, en la figura 1, $g(a) = 2, \qquad g(b) = 2, \qquad g(c) = 3, \qquad g(d) = 3.$

Teorema 1. *La suma dels graus dels vèrtexs d'un graf és igual al doble del nombre d'arestes.*

La demostració és evident per la pròpia definició de grau.

Així en l'exemple anterior, la suma de tots els graus és igual a 10 i correspon al doble del nombre d'arestes.

Definició 6. *Anomenem* **cadena** *una seqüència d'arestes tal que l'extrem final d'una és l'inicial de la següent.*

Definició 7. *Anomenem* **cicle** *tota cadena amb vèrtexs inicial i final iguals. És a dir, un cicle és una cadena tancada.*

Definició 8. *Un* **graf** *és* **eulerià** *si conté cada aresta sols una vegada. És a dir, si podem dibuixar-lo sense alçar el llapis del paper ni passar dues vegades per la mateixa aresta. Cal començar i acabar al mateix vèrtex.*

Nota 1. *Per reconèixer que un* **graf** *és* **eulerià**, *cal comprovar que* **tots els vèrtexs són de grau parell.**

Definició 9. *Un* **graf** *és* **recorrible** *si conté cada aresta sols una vegada. És a dir, si podem dibuixar-lo sense alçar el llapis del paper ni passar dues vegades per la mateixa aresta. No fa falta començar i acabar al mateix vèrtex.*

Nota 2. *Per reconèixer que un* ***graf*** *és* ***recorrible****, cal comprovar que* ***el nombre de vèrtexs de grau senar (imparell), és menor o igual a 2.***

Nota 3. *Tot graf eulerià és recorrible. A l'inrevés no és cert.*

Definició 10. *Un* ***graf*** *és* ***hamiltonià*** *si conté cada vèrtex sols una vegada. Cal recorrer tots els vèrtexs, començant i acabant en el mateix vèrtex.*

Exercici 2. *El graf de la figura 1, és Eulerià?, és Recorrible?, és Hamiltonià?.*

La resposta: No és Eulerià, sí Recorrible, sí Hamiltonià. Cal descriure el recorregut, en cas de ser la resposta afirmativa.

2. GRAFS ESPECIALS

Definició 11. *Un* ***graf*** *és* ***complet*** *si cada vèrtex està conectat amb tots els altres. Així un graf complet amb n vèrtexs el representem per K_n.*

Exercici 3. *Dibuixeu tots els grafs complets fins $n = 7$.*

Definició 12. *Un* ***graf*** *és* ***regular*** *si tots els vèrtexs tenen el mateix grau.*

Definició 13. *Un* ***graf*** *és* ***bipartit*** *si els seus vèrtexs es poden repartir en dos subconjunts M i N tal que cada aresta del graf conecte un vèrtex de M amb un altre vèrtex de N.*

Definició 14. *Un* ***graf*** *és* ***bipartit complet*** *si és bipartit i a més a més tots els vèrtexs de M estan conectats amb tots els de N. Aquest graf es representa per $K_{m,n}$, on m és el nombre de vèrtexs de M i n és el nombre de vèrtexs de N.*

Sense cap pèrdua de generalitat, podem suposar que $m \leq n$.

Exercici 4. *Dibuixeu els grafs $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$, $K_{3,5}$.*

Definició 15. *Un* ***graf*** *és* ***pesat*** *si en les seues arestes figura un nombre, anomenat* ***pes.*** *El pes d'un graf és la suma dels pesos de totes les arestes. El pes d'una cadena s'anomena* ***longitud de la cadena.***

Per trobar la cadena (el camí) més curta (més curt) entre dos vèrtexs (cadena de longitud mínima), utilitzarem l'Algoritme de Dijkstra.

Definició 16. *Un* ***graf*** *és* ***conexe*** *quan par a tot parell de vèrtexs, existeix el menys una cadena (camí) entre ells.*

3. ARBRES

3.1. Introducció. Estudiarem un tipus especial de graf que s'anomena arbre. Al 1847, Gustav Kirchhoff (1824-1887), va utilitzar per primera vegada els arbres en l'estudi de les xarxes elèctriques. Després Artur Cayley (1821-1895), els va perfeccionar en l'estudi dels hidrocarburs. S'utilitzen en biologia, combinatòria, genealogia, etc. Avui són importants per l'aparició dels computadors.

Definició 17. *Un* ***arbre*** *és un graf conexe sense cicles. Un* ***bosc*** *és tot conjunt d'arbres.*

Definició 18. *Anomenem* ***longitud d'un cicle*** *el nombre d'arestes que formen el cicle.*

Nota 4. *L'arbre no te bucles ja que aquests són cicles de longitud igual a la unitat.*

Exercici 5. *Dibuixeu tots els arbres que es poden formar amb 6 vèrtexs.*

Definició 19. *Anomenem* ***arbre parcial (arbre generador)*** *a tot arbre contingut en ell i que continga tots els vèrtexs del graf.*

Per construir aquest arbre parcial cal suprimir, sucessivament, arestes que no desconecten la xarxa.

Definició 20. *Anomenem* ***arbre amb arrel*** *a aquell arbre que te un vèrtex que no és final de cap aresta. Aquest vèrtex s'anomena* ***arrel.***

Nota 5. *Qualsevol arbre pot convertir-se en un arbre amb arrel simplement en elegir un dels seus vèrtexs com a arrel.*

Definició 21. *Anomenem* ***grau d'entrada d'un vèrtex*** v ($grau^+(v)$) *el nombre d'arestes del graf incidents en v. És a dir, el nombre d'arestes que entren a v.*

Definició 22. *Anomenem* ***grau de sortida d'un vèrtex*** v ($grau^-(v)$) *el nombre d'arestes del graf incidents des de v. És a dir, el nombre d'arestes que surten de v.*

Definició 23. *Anomenem* ***fulles*** *els vèrtexs amb $grau^-(v) = 0$.*

Ja que existeix sols una única trajectòria de l'arrel a qualsevol vèrtex, ens dona una direcció a les arestes de l'arbre. Per això:

Definició 24. *Anomenem* ***nivell o profunditat*** *del vèrtex a la longitud de la trajectòria que va de l'arrel al vèrtex.*

Definició 25. *Anomenem* ***rama*** *una trajectòria dirigida d'un vèrtex a una fulla.*

Així, en la figura 2, r és l'arrel de l'arbre. Els vèrtex d, f, g, h, i, j són les fulles. El nivell del vèrtex a és 1, el de f és 2, el de j és 3.

Un arbre amb arrel resulta útil per determinar totes les possibilitats que cert esdeveniment puga ocórrer dins d'un nombre finit de cassos. Per exemple, suposem dos adolescents, Carlos i Diego, que estan jugant un torneig de tennis. El campió serà el primer en guanyar dos sets consecutius o un total de tres sets. Gràficament totes les possibilitats de guanyar el torneig es poden representar per l'arbre de la figura 3. Aquestes possibilitats corresponen a les 10 fulles del l'arbre i que són: CC, $CDCC$, $CDCDC$, $CDCDD$, CDD, DD, DCC, $DCDCC$, $DCCD$, $DCDD$.

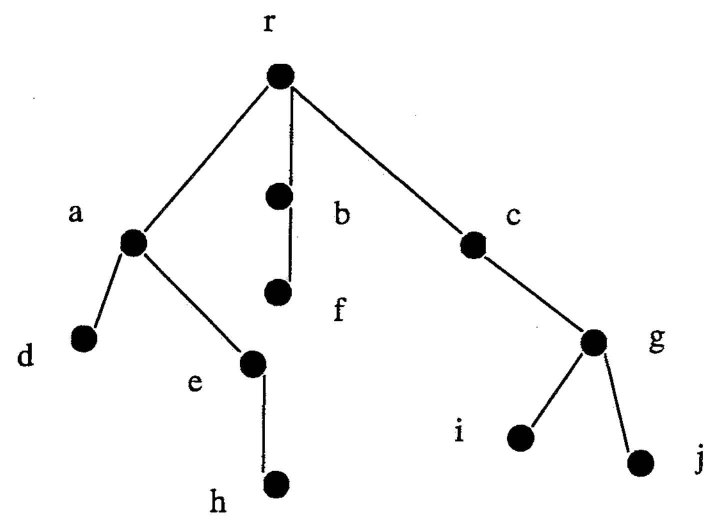


Figure 2:

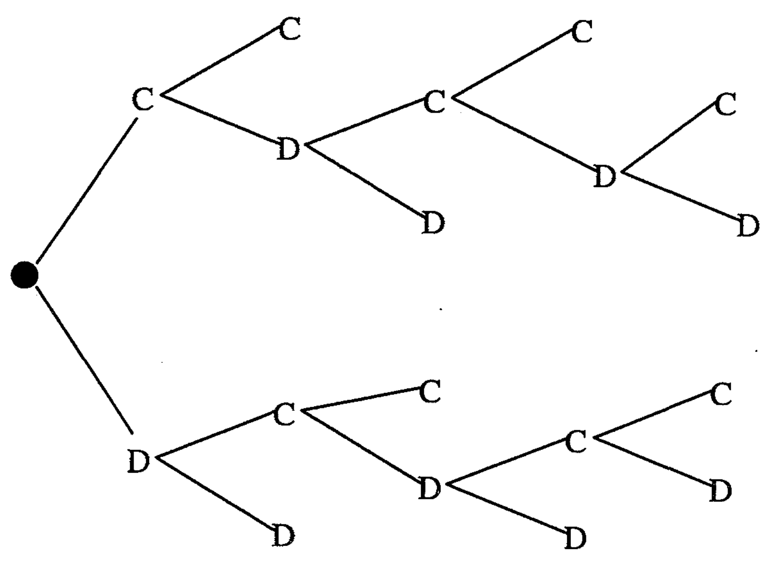


Figure 3:

4. GRAFS ISOMORFS

Siguen els grafs $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.

Definició 26. *Direm quue aquests dos* ***grafs són isomorfs*** *si i sols si, per definició, existeix una aplicació bijectiva entre els vèrtexs tal que conserva les adjacències. Es representa per* $G_1 \simeq G_2$

És a dir, $G_1 \simeq G_2 \Leftrightarrow \exists f : G_1 \rightarrow G_2$ *tal que:*

i) f *és bijectiva* *ii) Si* $\{a,b\} \in E_1 \Rightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2 \quad \forall a, b \in V_1$.

Dibuixar un graf que siga isomorf a un altre resulta sempre fàcil. El què és difícil és veure quan dos grafs són o no isomorfs.

Una forma de comprovar que dos grafs G_1 i G_2 no són isomorfs és trobar una propietat que se conserve en grafs isomorfs, però no entre G_1 i G_2. Una propietat que se conserva davant isomorfismes s'anomena **invariant**. Així, si els grafs G_1 i G_2 són isomorfs hi haurà una aplicació bijectiva entre els grafs tal que conserva el nombre de vèrtexs i el nombre d'arestes.

Per la qual cosa les propietats "*tenir igual nombre de vèrtexs*" i "*tenir igual nombre d'arestes*" són invariants. De tal manera que si dos grafs tenen distints nombres de vèrtexs o d'arestes, ja no poden ser isomorfs.

Això no vol dir que tots els grafs que tinguen el mateix nombre de vèrtexs i igual nombre d'arestes siguen isomorfs. Cal mirar altres propietats invariants, com són: conservació del nombre de vèrtexs amb el mateix grau, conservació del nombre de cicles de la mateixa longitud, etc.

Així els dos grafs de la figura 4 no són isomorfs, encara que tenen el mateix nombre de vèrtexs i d'arestes, ja que no conserven el nombre de vèrtexs del mateix grau.

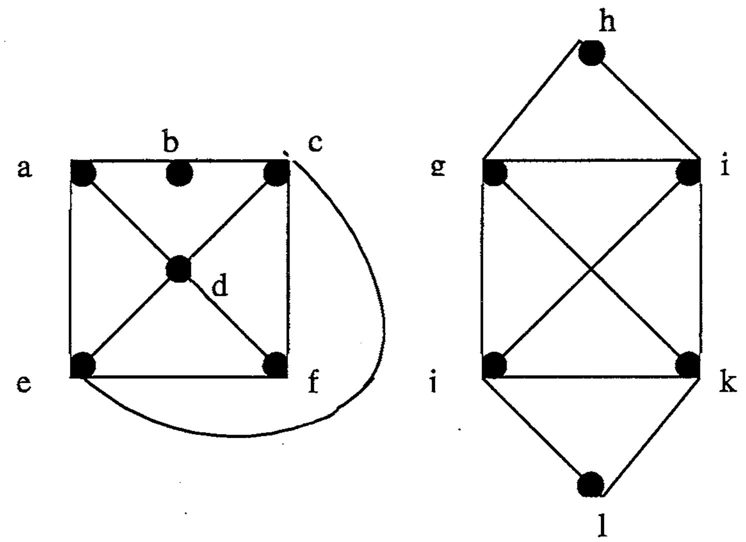


Figure 4:

5. GRAFS PLANS. TEOREMA DE KURATOWSKI. FÓRMULA D'EULER

Definició 27. *Un* ***graf*** *és* ***pla*** *si és isomorf a un graf tal que les seues arestes sols s'intersecten en vèrtexs.*

5.1. Teorema de Kuratowski. Un graf és pla si i sols si no conté un subgraf homeomorf a $K_{3,3}$ o K_5. Aquest teorema no el demostrarem.

Definició 28. *Dos* ***grafs*** *G_1 i G_2 són* ***homeomorfs*** *si es poden reduir a grafs isomorfs després d'una succesió de reduccions en sèrie.*

Definició 29. *Direm que un* ***graf*** *s'obté d'un altre mitjançant* ***reducció en sèrie*** *si és possible eliminar vèrtexs que estan en sèrie.*

Definició 30. *Direm que un* ***vèrtex*** *està* ***en sèrie*** *si és de grau dos i les arestes estan en sèrie.*

Definició 31. *Direm que dos* ***arestes*** *estan* ***en sèrie*** *si existeix un vèrtex en comú de grau dos.*

És a dir, les arestes $\{a,b\}$ i $\{b,c\}$ estan en sèrie si $i)$ $grau(b) = 2$ $ii)$ $a \neq c$.

Nota 6. *La reducció d'una sèrie consisteix en eliminar el vèrtex en sèrie i reemplaçar les arestes $\{a,b\}$ i $\{b,c\}$ per l'aresta $\{a,c\}$.*

Exercici 6. *El graf de la figura 5 no és pla, ja que en eliminar les arestes: $\{a,b\}$, $\{a,f\}$, $\{c,d\}$, $\{e,d\}$ surt un $K_{3,3}$ (figura 6).*

Definició 32. *Un* ***graf*** *és* ***poligonal (mapa)*** *si és pla, conexe i unió de cicles. L'interior de cada cicle s'anomena* ***cara*** *i la part exterior,* ***cara de l'infinit.***

5.2. Fórmula d'Euler. En tot graf poligonal es verifica la fórmula d'Euler:

$V + C = A + 2$, on V és el nombre de vèrtexs, C el nombre de cares i A el nombre d'arestes.

Definició 33. *Un* ***graf poligonal*** *és* ***regular*** *si tots els vèrtexs tenen el mateix grau.*

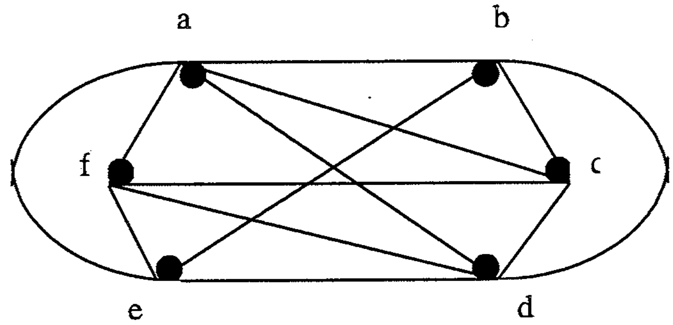


Figure 5:

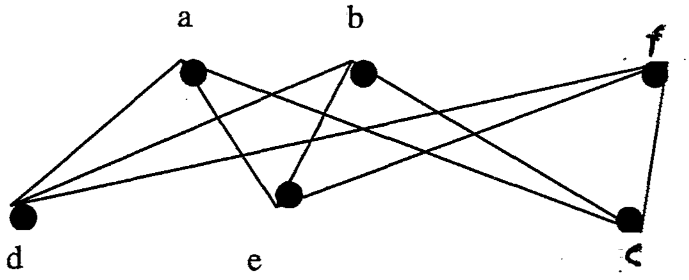


Figure 6:

5.3. Coloració. Una coloració d'un graf és una aplicació que asigna a cada vèrtex un color, de forma que dos vèrtexs adjacents tinguen color diferent.

Acolorir un mapa és donar una aplicació tal que a cada cara li asigna un color, de forma que **cares oposades** (les que tenen aresta comuna), tinguen color diferent.

Definició 34. *Graf dual és el graf que resulta al unir un punt interior de cada cara oposada.*

Teorema 2. *Qualsevol mapa es pot acolorir amb quatre colors (no el demostrem).*

6. REPRESENTACIONS DE GRAFS

Siga $G = (V, E)$ un graf, on $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $|V| = m$, $|E| = n$.

Per raons de la computació, a vegades és pràctic representar el graf per una matriu.

6.1. Matriu d'adjacència.

Definició 35. *Siga $M = (m_{ij})$, la matriu quadrada de grandària $m \times m$ definida per:*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{v_i, v_j\} \text{ és una aresta} \\ 0 \text{ en cas contrari} \end{cases}$$

A la matriu M s'anomena **matriu d'adjacència.**

Nota 7. *En un multigraf, m_{ij} seria el nombre d'arestes $\{v_i, v_j\}$.*

6.2. Matriu d'incidència.

Definició 36. *Siga $N = (n_{ij})$, la matriu rectangular de grandària $m \times n$ definida per:*

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el vèrtex } v_i \text{ és incident amb l'aresta } a_j \\ 0 \text{ en cas contrari} \end{cases}$$

A la matriu N s'anomena ***matriu d'incidència.***

Exercici 7. *Trobeu la matriu d'adjacència i d'incidència del graf de la figura 1.*

Sol.:
$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ a & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. ALGORISME DE KRUSKAL

Siga $G = (V, E)$ un graf conexe i pesat amb $|V| = n$. Per obtenir un arbre generador minimal cal aplicar el següent procediment recursiu:

i) Per a $i = 1$, seleccionem una aresta $a_1 \in E$ de pes mínim.

ii) Per a $1 \leq i \leq n-2$, cal agafar a_{i+1} entre les arestes de $E - \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ de manera que a_{i+1} tinga el menor pes possible i el graf determinat per les arestes $a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}$ no continga cicles.

iii) Cal substituir i per $i+1$.

Si $i = n-1$, aleshores ja hem acabat i el subgraf determinat per les arestes $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ que conecten els n vèrtexs és un arbre generador minimal.

Si $i < n-1$, cal tornar a ii).

8. ALGORISME DE PRIM

Siga $G = (V, E)$ un graf conexe i pesat amb $|V| = n$. Per obtenir un arbre generador minimal cal aplicar el següent procediment recursiu:

i) Per a $i = 1$, seleccionem un vèrtex $v_1 \in V$ en el conjunt $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Siga $T = V - \{v_1\}$ i $R = \phi$.

ii) Per a $1 \leq i \leq n-1$, siga $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$, $T = V - P$.

Cal afegir a R l'aresta de pes mínim en G que unisca un vèrtex $x \in P$ amb un altre $y \in V_T$.

Definim $v_{i+1} = y$. Coloquem el vèrtex v_{i+1} en P i l'eliminem de T.

iii) Cal Substituir i per $i+1$.

Si $i = n$, ja hem acabat i el subgraf de G definit per (V, R) és un arbre generador minimal per a G.

Si $i < n$, cal tornar a ii).

9. ALGORISME DE DIJKSTRA

Siga $G = (V, E)$ un graf conexe i pesat amb $|V| = n$. Siga $a, b \in V$. Es tracta de buscar una cadena (camí) de longitud mínima entre el vèrtex a i el vèrtex b.

Per buscar aquesta cadena (camí) farem:

i) Siga $P = \{a\}$. Siga $T = V - \{a\}$.

$\forall t \in T$, siga $l_p(t)$ la longitud d'un camí de longitud mínima entre el vèrtex a i el vèrtex t, tal que no tinga cap vèrtex en T, salvat el propi t.

Cas de no existir, escriurem $l_p(t) = \infty$.

ii) Cal seleccionar el vèrtex $t \in T$ amb el menor $l_p(t)$. L'anomenem vèrtex x.

iii) a) Si $x = b$, finalitzem.

b) Si $x \neq b$, escriurem $P' = P \cup \{x\}$, $T' = T - \{x\}$.

$l_{p'}(t) = min\,\{l_p(t), l_p(x) + p(x,t)\}$ i passarem al punt ii).

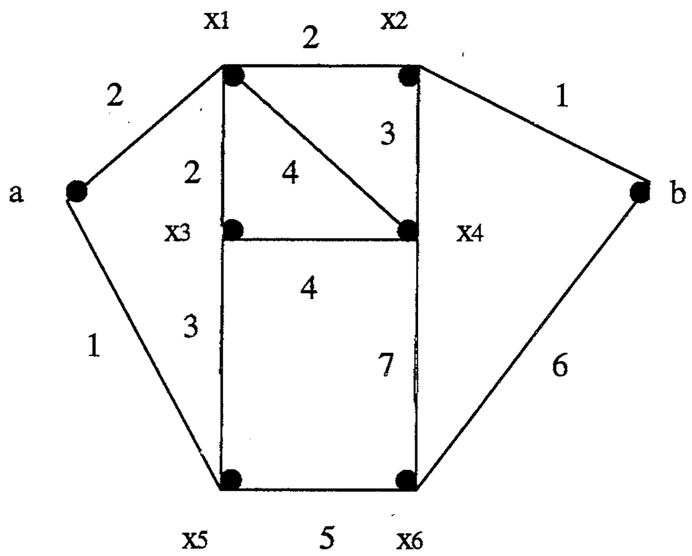


Figure 7:

Exemple 1. *Apliqueu aquests algorismes al graf de la figura 7.*

KRUSKAL

Ja que $n = 8$, s'acaba la iteració quan $i = n - 1$, és a dir, quan $i = 7$. Seleccionem l'aresta de pes 1, és a dir l'aresta $\{a, x_5\}$. Després l'aresta de pes 3, és a dir, $\{x_5, x_3\}, \ldots$ La figura 8 il·lustra l'arbre generador minimal , la qual longitud és $l = 17$.

PRIM

Ja que $n = 8$, s'acaba la iteració quan $i = n$, és a dir, quan $i = 8$. La figura que obtenim és la mateixa que abans. Per a:

$i = 1$, seleccionem el vèrtex $v_1 = x_4$. Aleshores, $P = \{x_4\}, T = \{a, x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, b\}$, $R = \phi$.

$i = 2$, $P = \{x_2, x_4\}, T = \{a, x_1, x_3, x_5, x_6, b\}$.
$i = 3$, $P = \{x_2, x_4, b\}, T = \{a, x_1, x_3, x_5, x_6\}$.
$i = 4$, $P = \{x_1, x_2, x_4, b\}, T = \{a, x_3, x_5, x_6\}$.
$i = 5$, $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, b\}, T = \{a, x_5, x_6\}$.
$i = 6$, $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, b\}, T = \{a, x_6\}$.
$i = 7$, $P = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, b\}, T = \{x_6\}$.
$i = 8$, $P = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, b\}$.

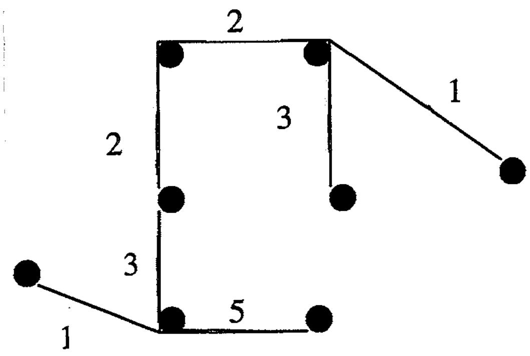


Figure 8:

DIJKSTRA

Siga $P_1 = \{a\}, V = T - \{a\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, b\}$.
Aleshores, $l_{p_1}(x_1) = 2, l_{p_1}(x_2) = \infty, l_{p_1}(x_5) = 1$,tots els altres són ∞.
Agafem $l_{p_1}(x_5) = 1$.

$P_2 = \{a, x_5\}, V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, b\}$.
$l_{p_2}(x_1) = min\ \{l_{p_1}(x_1), l_{p_1}(x_5) + p(x_5, x_1)\} = min\ \{2, 1 + \infty\} = 2$.
$l_{p_2}(x_2) = min\ \{l_{p_1}(x_2), l_{p_1}(x_5) + p(x_5, x_2)\} = min\ \{\infty, 1 + \infty\} = \infty$.
$l_{p_2}(x_3) = min\ \{l_{p_1}(x_3), l_{p_1}(x_5) + p(x_5, x_3)\} = min\ \{\infty, 1 + 3\} = 4$.
$l_{p_2}(x_4) = min\ \{l_{p_1}(x_4), l_{p_1}(x_5) + p(x_5, x_4)\} = min\ \{\infty, 1 + \infty\} = \infty$.
$l_{p_2}(x_6) = min\ \{l_{p_1}(x_6), l_{p_1}(x_5) + p(x_5, x_6)\} = min\ \{\infty, 1 + 5\} = 6$.
$l_{p_2}(b) = min\ \{l_{p_1}(b), l_{p_1}(x_5) + p(x_5, b)\} = min\ \{\infty, 1 + \infty\} = \infty$.
Agafem $l_{p_2}(x_1) = 2$.

$P_3 = \{a, x_5, x_1\}, V = \{x_2, x_3, x_4, x_6, b\}$.
$l_{p_3}(x_2) = min\ \{l_{p_2}(x_2), l_{p_2}(x_1) + p(x_1, x_2)\} = min\ \{\infty, 2 + 2\} = 4$.
$l_{p_3}(x_3) = min\ \{l_{p_2}(x_3), l_{p_2}(x_1) + p(x_1, x_3)\} = min\ \{3, 2 + 2\} = 4$.
$l_{p_3}(x_4) = min\ \{l_{p_2}(x_4), l_{p_2}(x_1) + p(x_1, x_4)\} = min\ \{\infty, 2 + 4\} = 6$.

$l_{p_3}(x_6) = min\ \{l_{p_2}(x_6), l_{p_2}(x_1) + p(x_1, x_6)\} = min\ \{5, 2 + \infty\} = 5.$
$l_{p_3}(b) = min\ \{l_{p_2}(b), l_{p_2}(x_1) + p(x_1, b)\} = min\ \{\infty, 2 + \infty\} = \infty.$
Podem agafar $l_{p_3}(x_2) = l_{p_3}(x_3) = 4.$
i) Si elegim $l_{p_3}(x_2)$, obtenim $a \to x_1 \to x_2 \to b$, ja que:

$P_4 = \{a, x_5, x_1, x_2\}\,,\ V = \{x_3, x_4, x_6, b\}\,.$
$l_{p_4}(x_3) = min\ \{l_{p_3}(x_3), l_{p_3}(x_2) + p(x_2, x_3)\} = min\ \{4, 4 + \infty\} = 4.$
$l_{p_4}(x_4) = min\ \{l_{p_3}(x_4), l_{p_3}(x_2) + p(x_2, x_4)\} = min\ \{6, 4 + 3\} = 6.$
$l_{p_4}(x_6) = min\ \{l_{p_3}(x_6), l_{p_3}(x_2) + p(x_2, x_6)\} = min\ \{6, 4 + \infty\} = 6.$
$l_{p_4}(b) = min\ \{l_{p_3}(b), l_{p_3}(x_2) + p(x_2, b)\} = min\ \{\infty, 4 + 1\} = 5.$
Cal agafar $l_{p_4}(x_3) = 4.$

$P_5 = \{a, x_5, x_1, x_2, x_3\}\,,\ V = \{x_4, x_6, b\}\,.$
$l_{p_5}(x_4) = min\ \{l_{p_4}(x_4), l_{p_4}(x_3) + p(x_3, x_4)\} = min\ \{6, 4 + 4\} = 6.$
$l_{p_5}(x_6) = min\ \{l_{p_4}(x_6), l_{p_4}(x_3) + p(x_3, x_6)\} = min\ \{6, 4 + \infty\} = 6.$
$l_{p_5}(b) = min\ \{l_{p_4}(b), l_{p_4}(x_3) + p(x_3, b)\} = min\ \{5, 4 + \infty\} = 5.$
Agafaríem $l_{p_5}(b) = 5.$
ii) Si elegim $l_{p_3}(x_3) = 4$, obtenim $a \to x_1 \to x_2 \to b$, ja que:

$P_4 = \{a, x_5, x_1, x_3\}\,,\ V = \{x_2, x_4, x_6, b\}\,.$
$l_{p_4}(x_2) = min\ \{l_{p_3}(x_2), l_{p_3}(x_3) + p(x_3, x_2)\} = min\ \{4, 4 + \infty\} = 4.$
$l_{p_4}(x_4) = min\ \{l_{p_3}(x_4), l_{p_3}(x_3) + p(x_3, x_4)\} = min\ \{6, 4 + 4\} = 6.$
$l_{p_4}(x_6) = min\ \{l_{p_3}(x_6), l_{p_3}(x_3) + p(x_3, x_6)\} = min\ \{6, 4 + \infty\} = 6.$
$l_{p_4}(b) = min\ \{l_{p_3}(b), l_{p_3}(x_3) + p(x_3, b)\} = min\ \{\infty, 4 + \infty\} = \infty.$
Cal agafar $l_{p_4}(x_2) = 4.$

$P_5 = \{a, x_5, x_1, x_3, x_2\}\,,\ V = \{x_4, x_6, b\}\,.$
$l_{p_5}(x_4) = min\ \{l_{p_4}(x_4), l_{p_4}(x_2) + p(x_2, x_4)\} = min\ \{6, 4 + 3\} = 6.$
$l_{p_5}(x_6) = min\ \{l_{p_4}(x_6), l_{p_4}(x_2) + p(x_2, x_6)\} = min\ \{6, 4 + \infty\} = 6.$
$l_{p_5}(b) = min\ \{l_{p_4}(b), l_{p_4}(x_2) + p(x_2, b)\} = min\ \{\infty, 4 + 1\} = 5.$
Agafaríem $l_{p_5}(b) = 5.$

PROBLEMES TEMA 7. GRAFS

1. En $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, definim la relació de divisibilitat:

   $x/y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N}^* \;/\; y = ax$.

   Siga $D(y)$ el conjunt dels divisors de y. És a dir, $D(y) = \{x \in \mathbb{N}^* \;/\; x/y\}$.

   i) Demostreu que aquesta és una relació binària d'ordre parcial en $\mathbb{N}^*$.

   ii) Dibuixeu el graf associat a $D(12)$.

   iii) Dibuixeu el diagrama de Hasse en el conjunt $D(12)$. (L'anomenem G).

   iv) Obteniu tres arbres parcial de G.

   v) Trobeu un altre graf isomorf a G.

   vi) És G un graf pla?.

   Sol.: i) Està demostrat en el tema de teoria.

   ii) $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. El graf associat és el dibuixat en la figura 1.

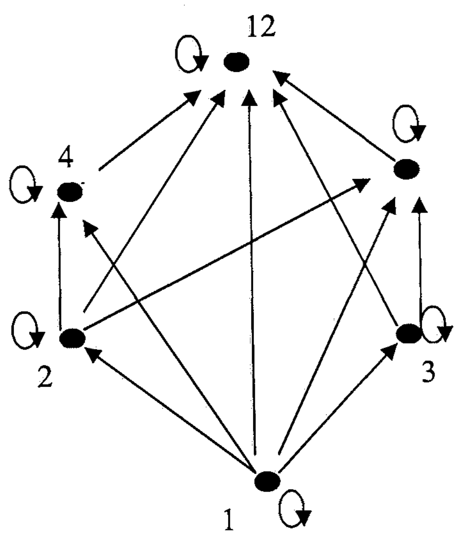


Figure 1

   iii) El diagrama de Hasse correspon a la figura 2.

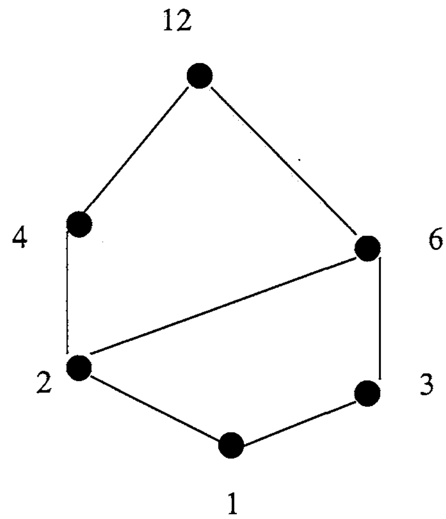


Figure 2

iv) Vegeu la figura 3.

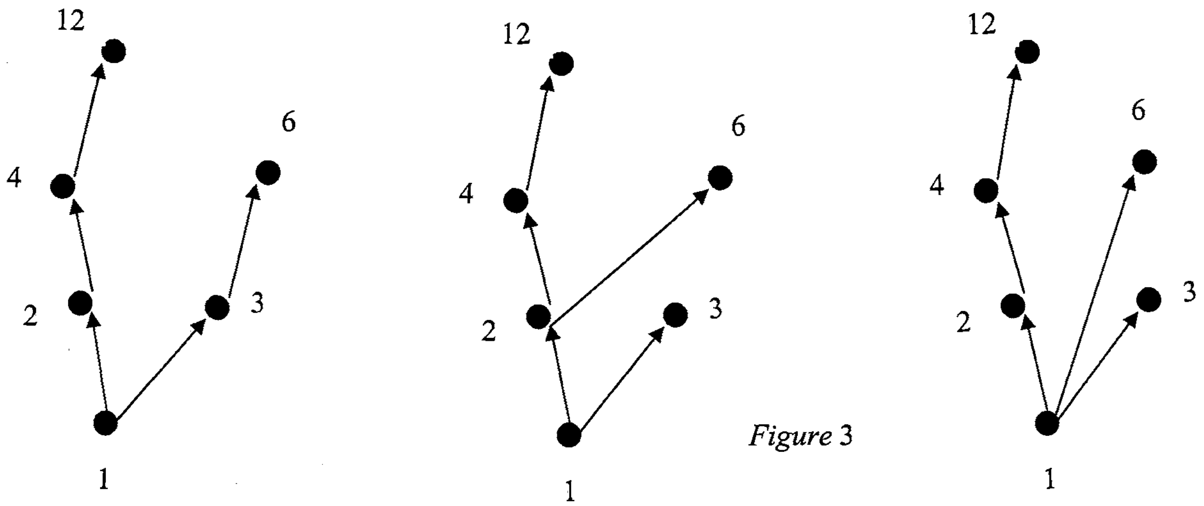


Figure 3

v) Un graf isomorf seria, figura 4.

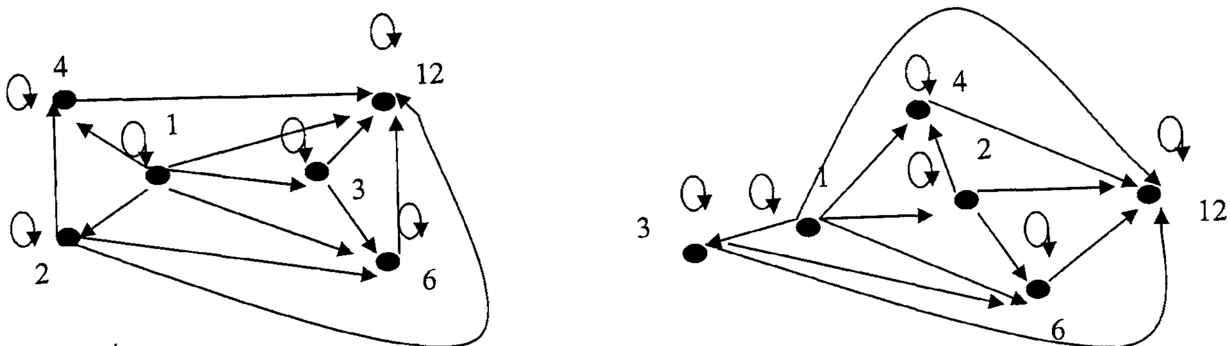
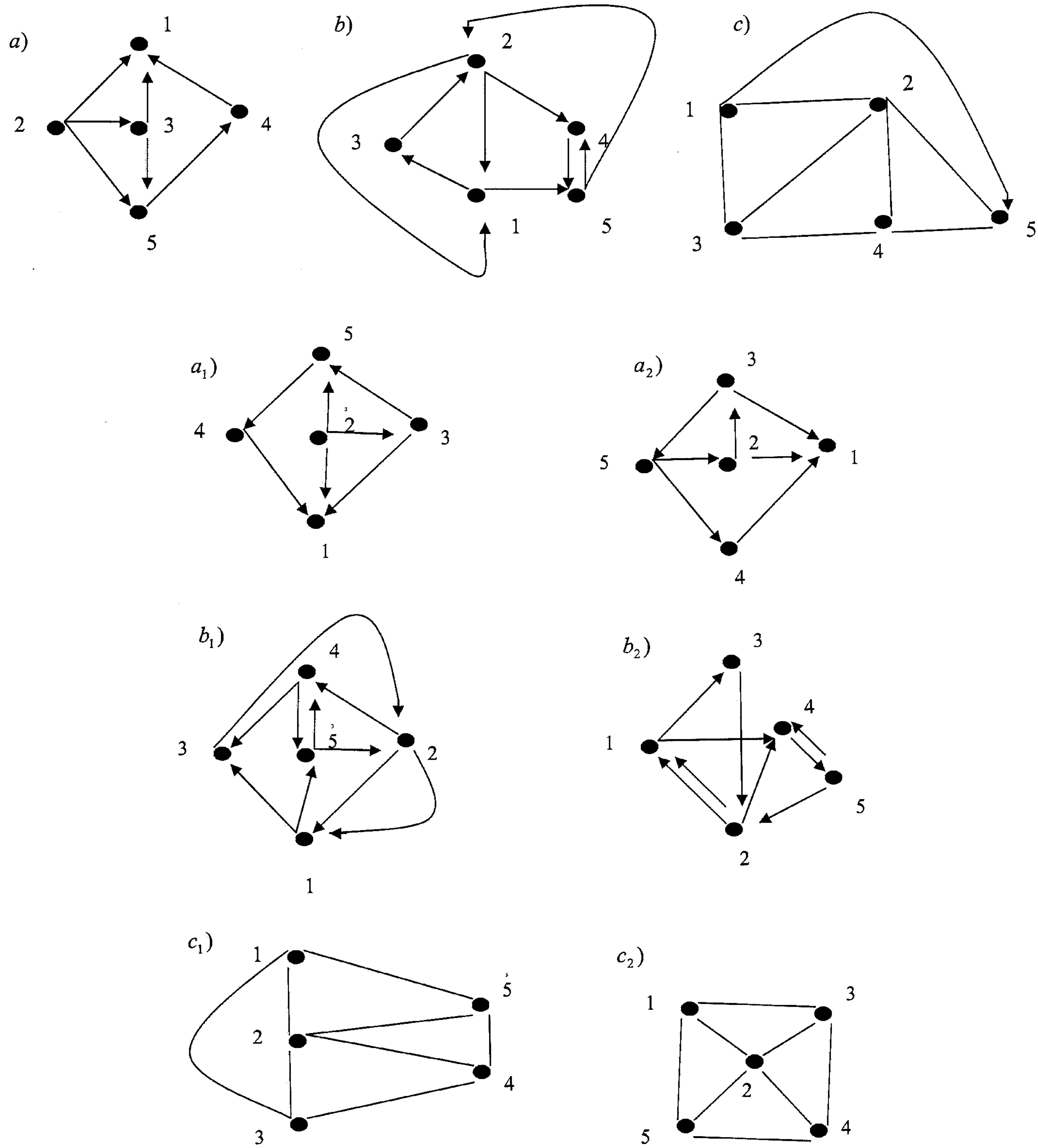


Figure 4

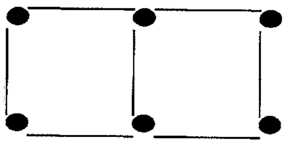
vi) El graf és pla.

2. Dibuixeu dos grafs isomorfs a cadascun dels següents:

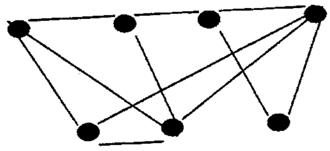


3. Estudieu quins dels següents grafs són plans, poligonals, poligonals regulars, recorribles, eulerians, o hamiltonians. Acoloreu els poligonals amb el menor nombre possible de colors.

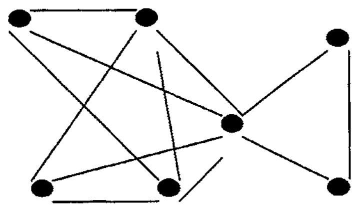
a)



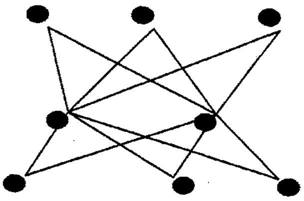
b)



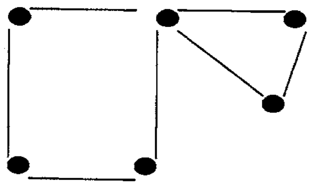
c)



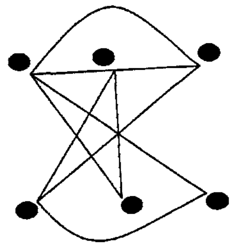
d)



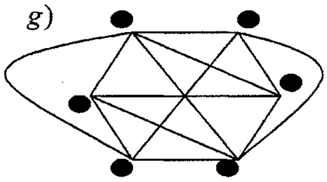
e)



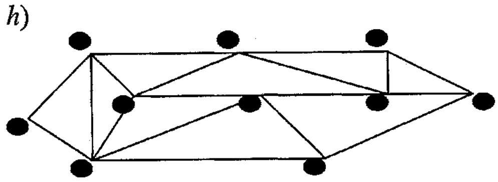
f)



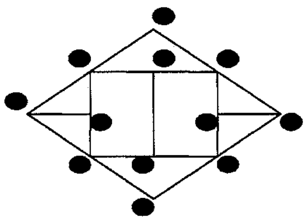
g)



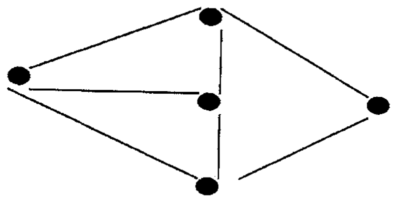
h)



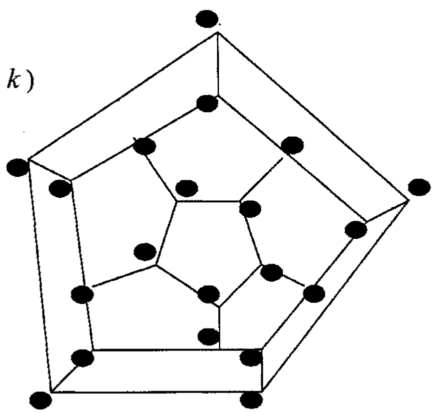
i)



j)



k)



Sol.: La solució de l'exercici ve donada en el esquema següent:

Representem per plans(PL), poligonals (PG), poligonals regulars (PR), recorribles (R), eulerians (E), hamiltonians (H), coloració de vèrtex (CV), coloració de cares (CC) sols si són poligonals.

	PL	*PG*	*PR*	*R*	*E*	*H*	*CV*	*CC*
a	*SI*	*SI*	*NO*	*SI*	*NO*	*SI*	2	3
b	*SI*	*SI*	*NO*	*NO*	*NO*	*SI*	3	3
c	*SI*	*SI*	*NO*	*SI*	*NO*	*NO*	4	3
d	*SI*	*SI*	*NO*	*SI*	*SI*	*NO*	2	2
e	*SI*	*SI*	*NO*	*SI*	*SI*	*NO*	3	2
f	*SI*	*SI*	*NO*	*SI*	*NO*	*SI*	3	3
g	*NO*	*NO*	*NO*	*SI*	*NO*	*SI*	3	*NO*
h	*SI*	*SI*	*NO*	*NO*	*NO*	*SI*	3	3
i	*SI*	*SI*	*NO*	*NO*	*NO*	*NO*	3	4
j	*SI*	*SI*	*NO*	*NO*	*NO*	*SI*	3	4
k	*SI*	*SI*	*SI*	*NO*	*NO*	*SI*	3	4

Estudiem el graf c). El graf és pla ja que és possible dibuixar un graf isomorf tal que les seues arestes sols s'intersecten en punts que són vèrtexs. Cal numerar els vèrtexs del graf c) i veure el graf de la figura 5.

c)

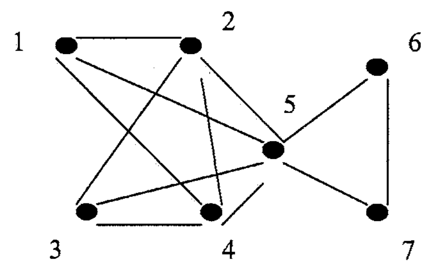
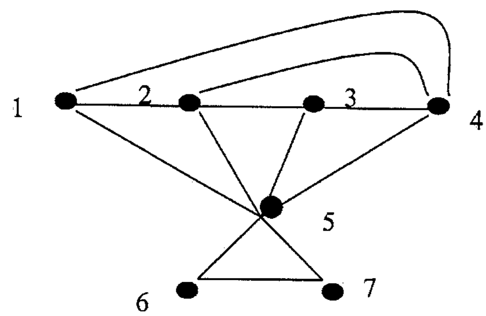


Figure 5



El graf c) és poligonal ja que és pla, conexe i unió de cicles. No és poligonal regular ja què no tots els vèrtexs tenen el mateix grau. (El vèrtex 1 és de grau 3, mentre que el vèrtex 2 de grau 4).

No és eulerià ja què no tots els vèrtexs són de grau par.

Sí és recorrible ja què el nombre de vèrtexs de grau impar és menor o igual a 2, i serà possible recòrrer tots els vèrtexs sense començar ni acabar en el mateix vèrtex ni passant dues vegades pel mateix. En veure el graf original, un recorregut seria: 1,2,5,6,7,5,1,4,2,3,4,5,3.

No és hamiltonià, ja què no és possible recòrrer tots els vèrtexs començant i acabant en el mateix vèrtex sense passar dues vegades pel mateix.

Com és poligonal, es compleix la fórmula d'Euler: $V + C = A + 2$ (7+7=12+2) i necessitem 4 colors per a acolorir els vèrtexs i 3 per a acolorir les cares. Això es pot comprovar en la figura 5.

El graf d) és poligonal no regular com indica la figura 6. És Eulerià (i per la qual cosa també recorrible), ja què tots els vèrtexs són de grau parell, en aquest cas de grau 2. Un recorregut seria: 1,4,6,5,3,4,2,5,8,4,7,5,1. No és hamiltonià i necessitem 2 colors per als vèrtexs i altres dos colors per a les cares. Veure la figura 6.

d)

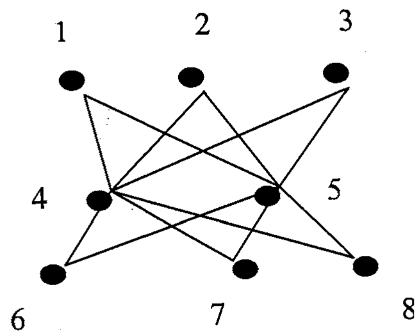
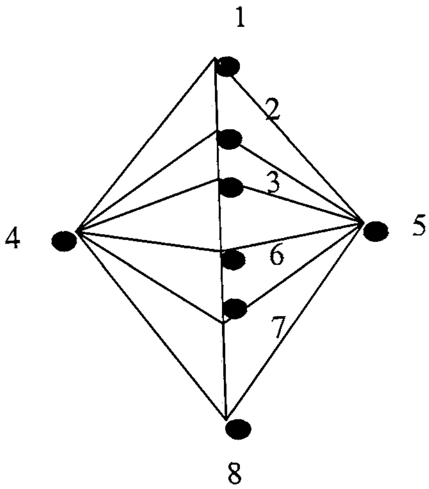


Figure 6



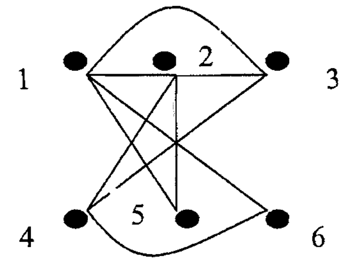
El graf f) és poligonal no regular com indica la figura 7. És recorrible ja què són dos els vèrtexs de grau imparell, sent un recorregut: 3,2,1,5,2,4,6,1,3,4.

No és eulerià ja què no tots els vèrtexs són de grau parell.

Sí és hamiltonià ja què és possible recòrrer tots els vèrtexs, començant i acabant en el mateix sense passar dues vegades pel mateix vèrtex. Un recorregut seria: 1,5,2,3,4,6,1.

Necessitaríem 3 colors per als vèrtexs i altres 3 colors per a les cares. Veure la figura 7.

f)



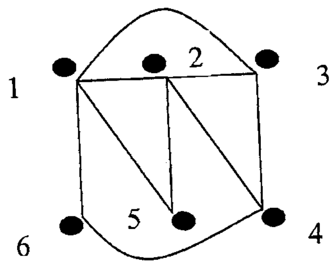
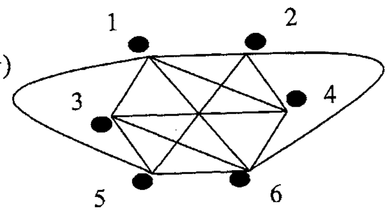


Figure 7

El graf g) no és poligonal ja què no és pla ja què en aplicar el teorema de Kuratowski ens adonem que existeix un graf homeomorf a un $k_{3,3}$.Cal veure la figura 8 obtesa del graf g en eliminar les arestes que uneixen els vèrtexs 1 amb 2; 1 amb 3; 5 amb 6; 6 amb 4. Si no és poligonal, no es pot acolorir.

g)



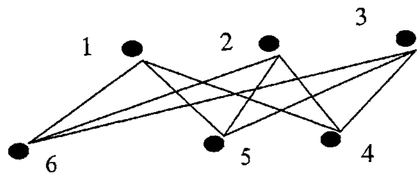
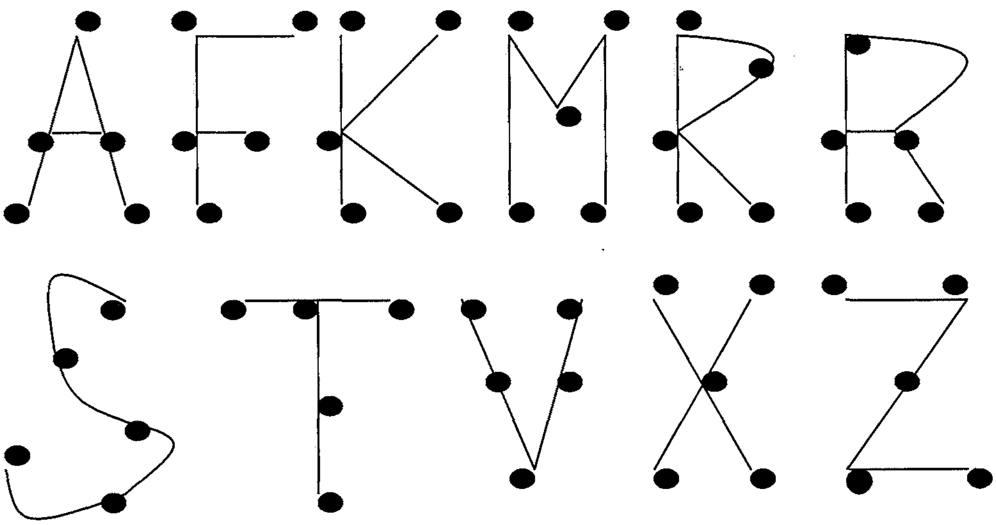


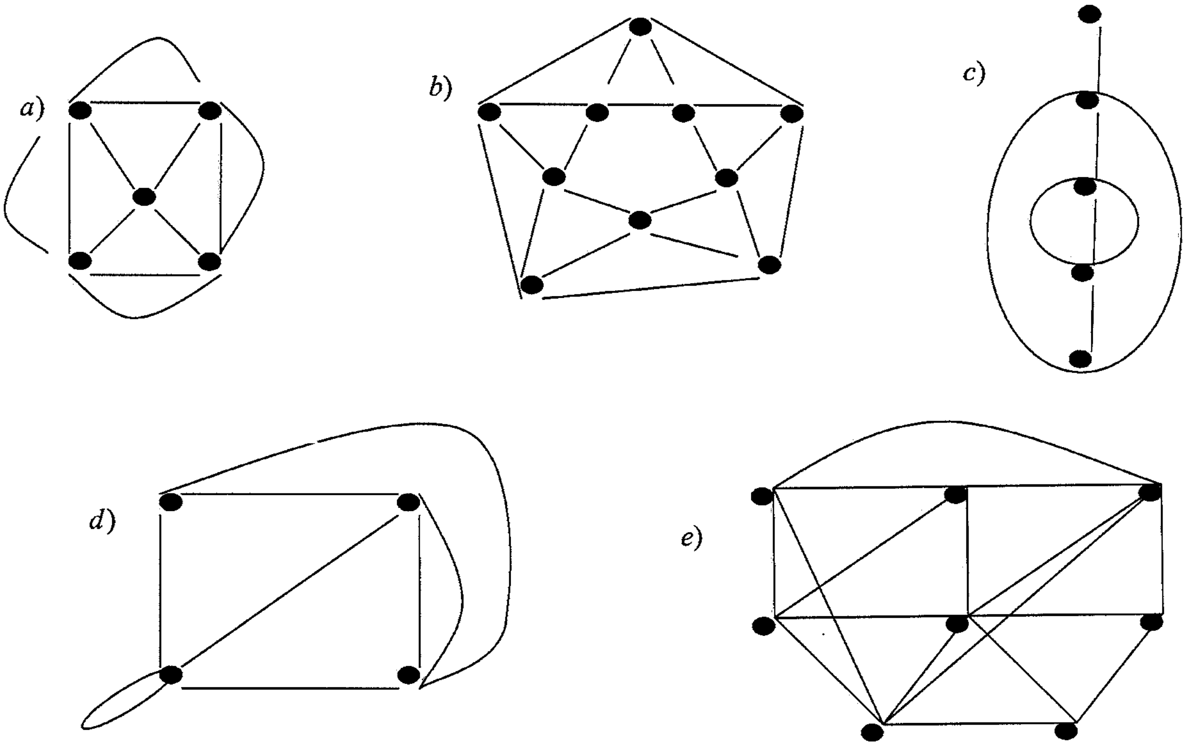
Figure 8

4. Estudieu quins dels següents grafs són isomorfs:



Sol.: A amb la 1^a r ; f amb t ; m amb v,s,z ; k amb x ; la 2^a r no és isomorfa amb cap d'elles.

5. Estudieu quins dels següents grafs són recorribles, eulerians o hamiltonians. En les respostes afirmatives, dibuixeu el recorregut.



Sol.:

	R	E	H	CV	CC
$a)$	NO	NO	SI	3	3
$b)$	SI	SI	SI	4	2
$c)$	SI	NO	NO	2	NO
$d)$	SI	NO	SI	4	3
$e)$	NO	NO	SI	3	3

El graf b) és eulerià ja què tots el vèrtexs són de grau parell, en aquest cas de grau 4. Al ser Eulerià és recorrible. També és Hamiltonià ja què puc recòrrer tots els vèrtexs, començant i acabant en el mateix, sense passar dues vegades pel mateix vèrtex. El recorregut en el eulerià i recorrible és el mateix per a ambdós i és: 1,2,3,4,5,9,4,8,3,7,2,6,7,8,9,10,6,1,10,5,1. El recorregut per al hamiltonià és: 1,2,3,4,5,9,8,7,6,10,1. Vegeu la figura 9.

b)

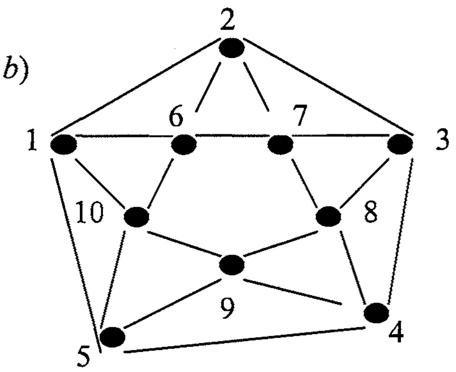
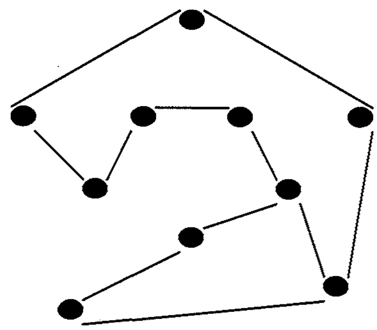


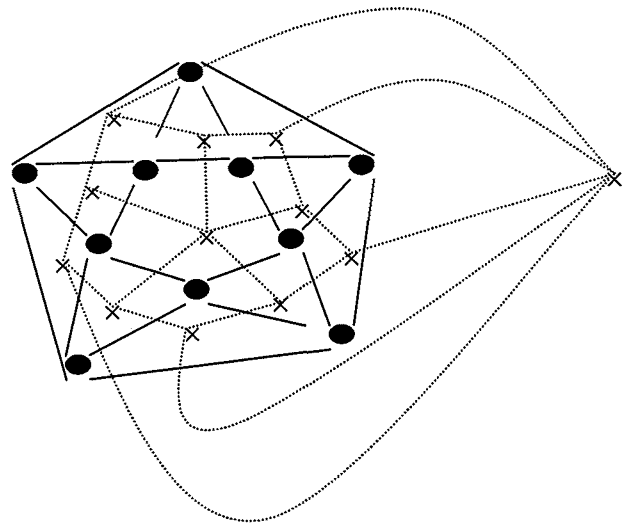
Figure 9



6. Trobeu el dual i acolereu els grafs de l'exercici anterior.

   Sol.: Per trobar el dual d'un graf cal que aquest siga pla. El dual s'obté al unir punts de cares oposades amb un punt de la cara de l'infinit. Així el dual del graf b) correspondria al de la figura 10.

Figure 10



7. Trobeu, si existeixen, dos grafs eulerians no hamiltonians i dos hamiltonians no eulerians.

   Sol.: Cal veure les figures 11 (Eulerians i no hamiltonians) i 12 (Hamiltonians i no eulerians).

Figure 11

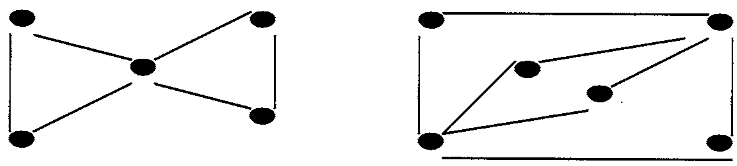
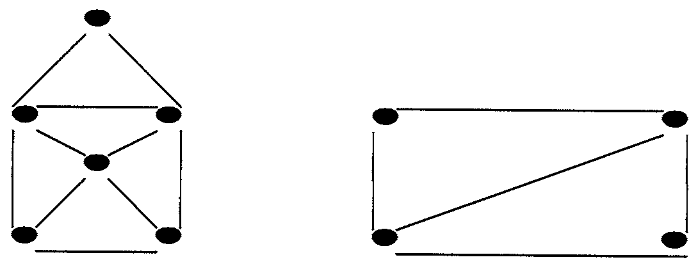


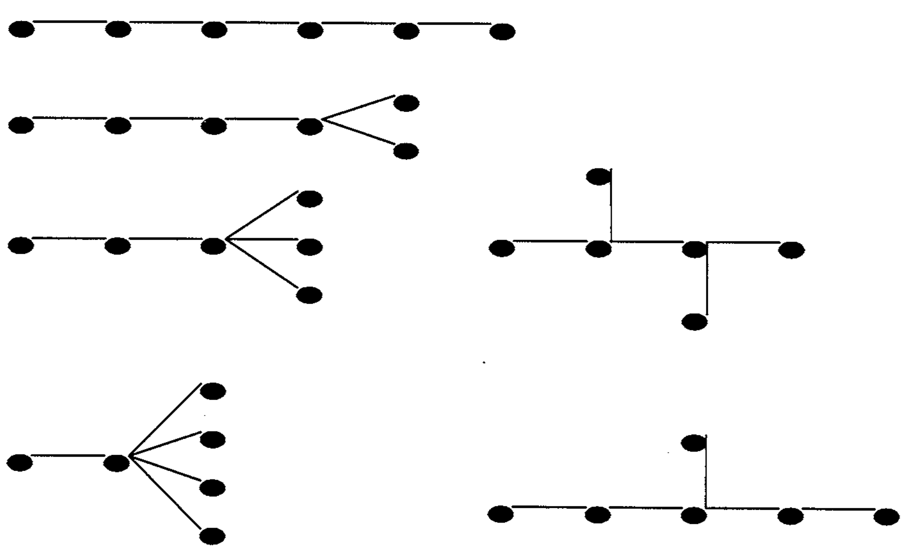
Figure 12



8. Dibuixeu tots els arbres no isomorfs de 6 vèrtexs.

   Sol.: Veure la figura 13.

Figure 13



9. Trobeu tots els arbres connexes de 4 vèrtexs.

   Sol.: Veure la figura 14. Graus dels vèrtexs: 1,2,2,1 ; 2,2,2,2 ; 2,3,2,3 ; 3,3,3,3 1,3,2,2 ; 1,1,3,1.

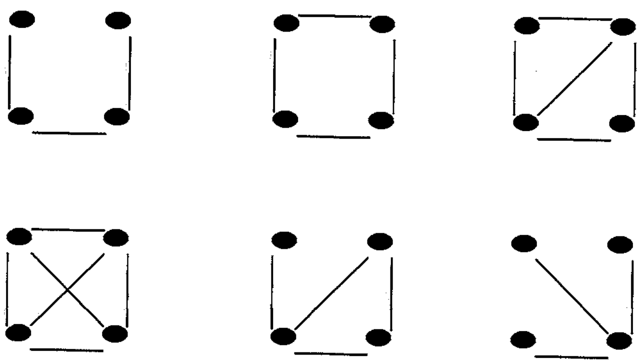
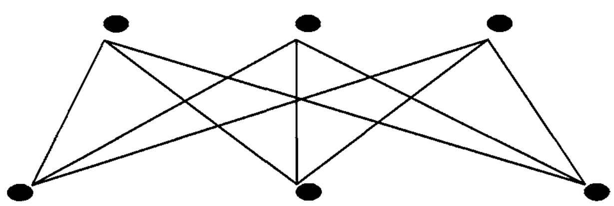


Figure 14

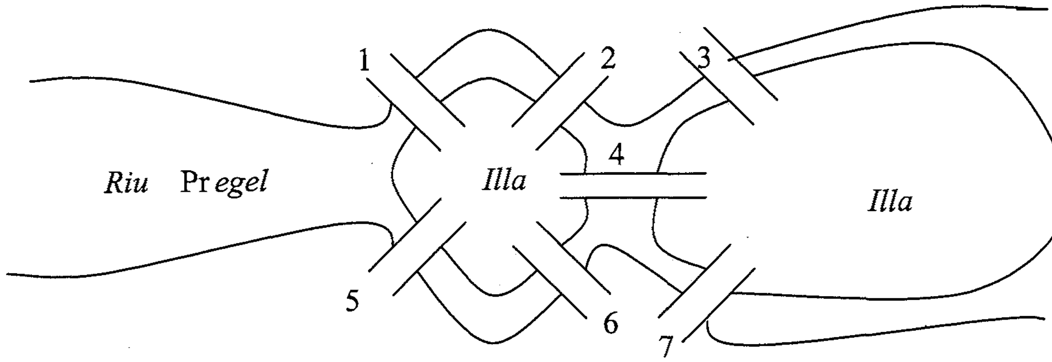
10. Podem conectar 3 ordinadors amb 3 endolles sense que es creuen cap cable, si cada ordinador té tres cables i cadascun d'ells es conecta a una endolla diferent?.

    Sol.: No és possible conectar-los ja què el següent graf no és pla. Veure la figura 15.

Figure 15



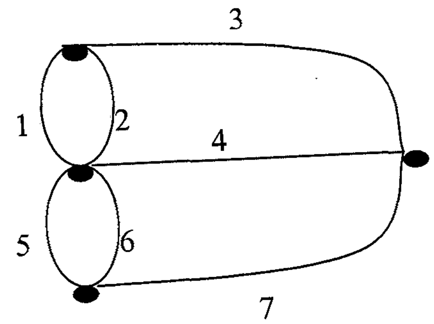
11. Segle XVIII. Ciutat de Konïsgsberg.



És possible creuar els 7 ponts passant sols una vegada per cadascun?. Euler ho resolgué en 1736. Saps resoldre-ho tu?.

Sol.: No és possible passar-los sols una vegada per cadascun ja què això és equivalent a dir que el següent graf és recorrible. Veure la figura 16. Aquest graf no és recorrible ja què tots els vèrtex són de grau senar. (El nombre de vèrtexs de grau senar no és menor o igual a 2).

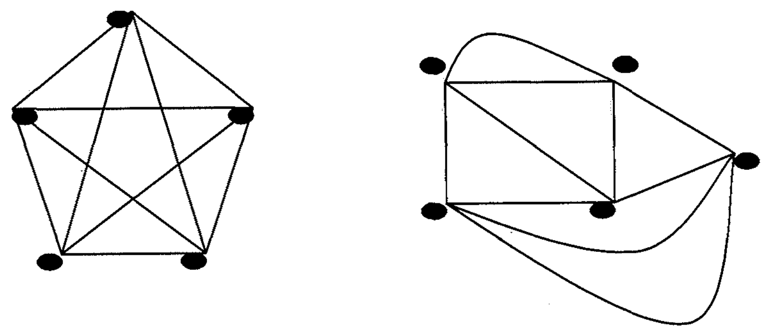
Figure 16

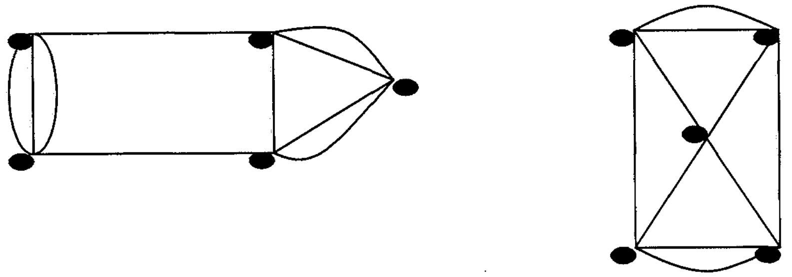


12. És possible construir un graf regular amb 10 arestes i tots els vèrtexs de grau 4?. Si existeix solució, és única?.

Sol.: Sabem que en el graf regular tots els vèrtexs tenen igual grau i que la suma de tots és el doble del nombre d'arestes. Aleshores: 4 vegades el nombre de vèrtexs és igual a 2 vegades el nombre d'arestes. ës a dir, $4x = 2\times 10 \rightarrow x = 5$. Així els possibles grafs tots són de 5 vèrtexs. La solució no és única. Cal veure la figura 17.

Figure 17





13. En el conjunt $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, definim la relació $\Re$:

$x \Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; x + y = 3n + 2$

i) Estudieu les propietats de la relació $\Re$.

ii) Dibuixeu el graf associat.

iii) Trobeu $B \subseteq A$ tal que $\Re$ siga relació binària d'equivalència en B. Determineu les classes d'equivalència i el conjunt quocient.

iv) Considereu la relació anterior $\Re$ en el conjunt $C = \{0,2,3,5,6,8\}$.

Dibuixeu el graf associat, considerant-lo no orientat i dibuixant un únic camí entre cada parell de vèrtexs diferents. És pla?. És recorrible. És eulerià?. És hamiltonià?. En cas afirmatiu, dibuixeu el recorregut. Dibuixeu un graf isomorf.

Sol.: i) $x \Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,/\, x+y = 3n+2 = \dot{3}+2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,\ldots\}$

a) Reflexiva. Serà reflexiva si $x \Re x \;\; \forall x$. En aquest cas no és reflexiva ja què $\exists 0 \in \mathbb{N} \;/\; 0 \overset{no}{\Re} 0$.

b) Simètrica. Sí que és simètrica ja què si $x \Re y \rightarrow x + y = 3n + 2 \rightarrow y + x = 3n + 2 \rightarrow y \Re x$.

c) Antisimètrica. Serà antisimètrica si $x\Re y \wedge y\Re x \rightarrow x = y$. No la compleix. Contraexemple: $1\Re 4 \wedge 4\Re 1 \nrightarrow 1 = 4$.

d) Transitiva. Serà transitiva si $x\Re y \wedge y\Re z \rightarrow x\Re z$. No la compleix. Contraexemple: $8\Re 6 \wedge 6\Re 5 \nrightarrow 8\Re 5$.

També: $\left.\begin{array}{l} x\Re y \rightarrow x+y=3n+2 \\ y\Re z \rightarrow y+z=3n+2 \end{array}\right\} \rightarrow x+z = 2(3n+2)-2y = 2(\dot{3}+2)-2y =$
$2(\dot{3}+2-y) = 2\dot{3}+2(2-y) = \dot{3}+\dot{2} \neq \dot{3}+2$.

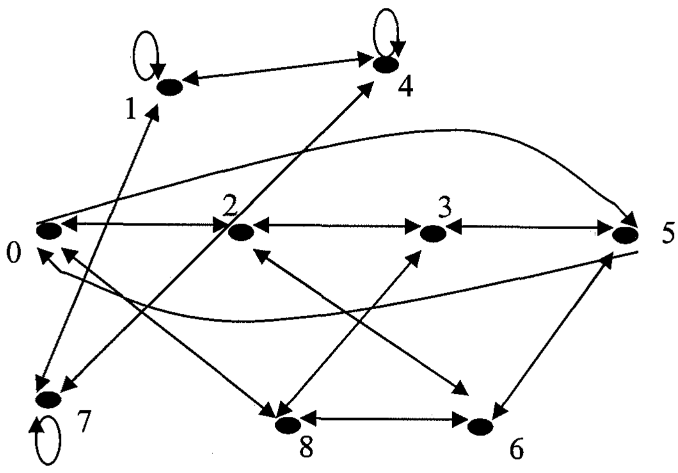
e) Connexa. No és connexa ja què $\forall x, y \in A \nrightarrow x\Re y \vee y\Re x$. Contraexemple, $x = 7, y = 3$, aleshores $7 \overset{no}{\Re} 3$ ni $3 \overset{no}{\Re} 7$.

També: Per veure les propietats que compleix la relació, cal veure cada element del conjunt A en quins elements del mateix conjunt A estan relacionats. Aleshores: $0\Re\{2,5,8\}$, $1\Re\{1,4,7\}$, $2\Re\{0,3,6\}$, $3\Re\{2,5,8\}$, $4\Re\{1,4,7\}$,

$5\Re\{0,3,6\}$, $6\Re\{2,5,8\}$, $7\Re\{1,4,7\}$, $8\Re\{0,3,6\}$.

ii) Cal veure la figura 18.

Figure 18



iii) $B = \{1,4,7\}$.

$[1] = \{x \;/\; x\Re 1\} = \{x \;/\; x+1 = 3n+2\} = \{x \;/\; x = 3n+1\} = \{1,4,7\}$.

Aleshores, $B/\Re = \{[1]\} = B$.

iv) Si $C = \{0,2,3,5,6,8\}$. El graf que ens demanen ve donat per la figura 19.

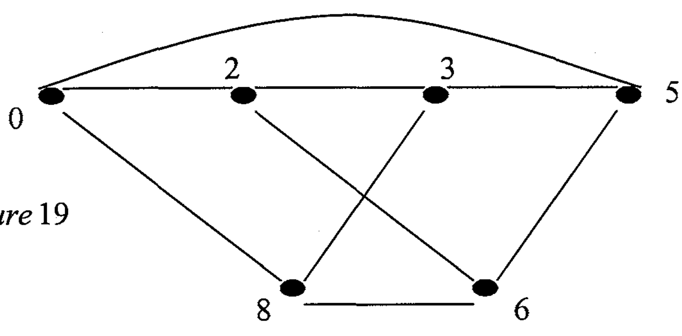


Figure 19

Aquest graf no és pla ja què si apliquem el teorema de Kuratowski es pot trobar un altre graf homeomorf a $k_{3,3}$. (En aquest cas és isomorf). Veure la figura 20.

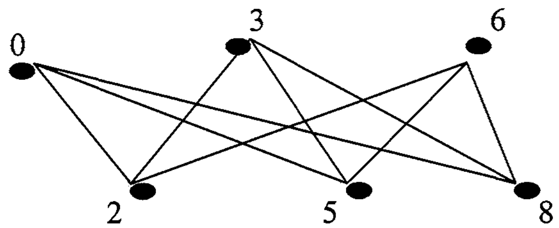


Figure 20

El graf no és eulerià ja què no tots els vèrtexs són de grau parell (en aquest tots els vèrtexs són de grau impar). Tampoc seria recorrible ja què el nombre de vèrtexs de grau imparell no és menor o igual que 2. Sí és hamiltonià ja què és possible recòrrer tots els vèrtexs del graf començant i acabant en el mateix vèrtex sense passar dues vegades pel mateix. El recorregut seria: 0,2,3,5,6,8,0. Cal veure la figura 21.

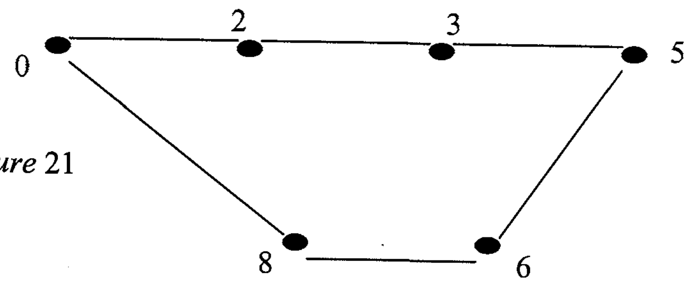


Figure 21

Dos grafs isomorfs serien els dibuixats en la figura 22.

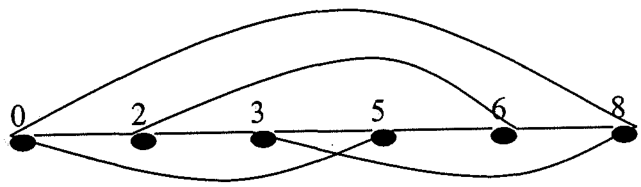
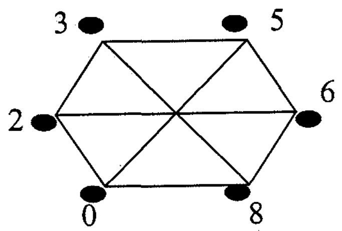


Figure 22



14. En el conjunt $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, definim la relació $\Re$:

$x \Re y \Leftrightarrow x - y \in \{-1, 3, 5, 6\}$.

i) Dibuixeu el graf associat.

ii) Estudieu les propietats de la relació $\Re$.

iii) Donat $A' = \{-3, -1, 1, 2, 3\} \subseteq A$ i la relació $\Re$ definida en A' , afegiu al graf d'aquesta les fletxes necessàries perquè siga una relació binària d'ordre. D'aquesta nova relació d'ordre, trobeu el màxim, mínim, maximals i minimals, si existeixen. Dibuixeu el diagrama de Hasse.

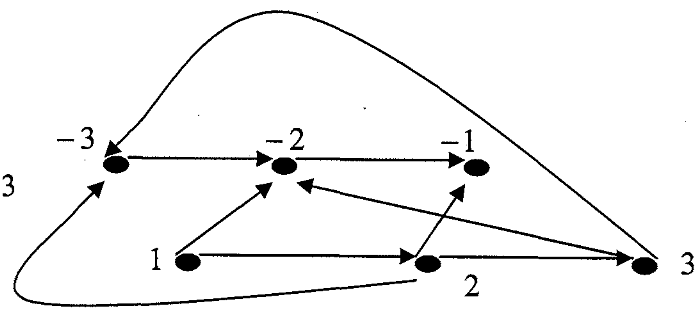
iv) Donat el graf inicial de la relació $\Re$ en A, i considerant-lo no dirigit, estudieu se és pla, recorrible, eulerià i hamiltonià. Dibuixeu un graf isomorf.

Sol.:

i) Per dibuixar el graf associat, cal saber la relació entre cadascun dels elements del conjunt A.

Així: $-3\Re-2$; $-2\Re-1$; $-1\Re$ *cap element* ; $1\Re\{-2,2\}$; $2\Re\{-3,-1,3\}$; $3\Re\{-3,-2\}$ .Cal veure la figura 23.

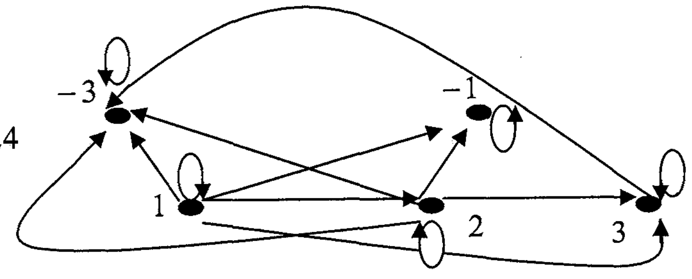
Figure 23



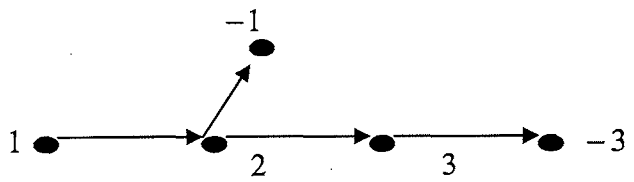
ii) De la figura 23 es veu que la relació no és reflexiva, no és simètrica, és antisimètrica, no és transitiva i no és connexa.

iii) Per què la relació en A' siga d'ordre, cal afegir 5 bucles (per a la reflexiva) i tres fletxes (per a la transitiva) que uneixen els punts: 1 amb -3, 1 amb -1, 1 amb 3. Cal veure la figura 24.

Figure 24



El diagrama de Hasse es construeix a partir de l'anterior eliminant els bucles i la transitiva. Cal veure la figura 25.



ó

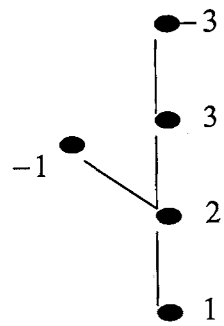


Figure 25

En aquest diagrama es veu que: 1 és l'element mínim, no existeix màxim, 1 és l'element minimal, -1 i -3 són els elements maximals.

iv) El graf és pla, no eulerià, recorrible sent el seu recorregut -3,-2,-1,2,1,-2,3,2, -3,3, no és hamiltonià. Val veure la figura 26.

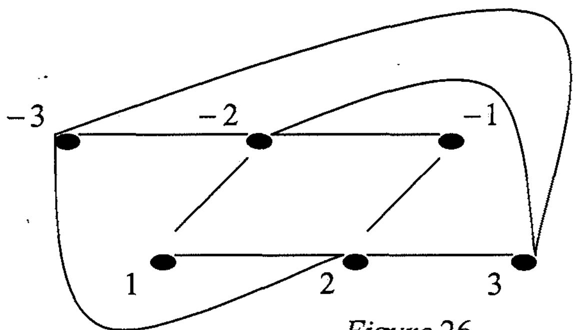
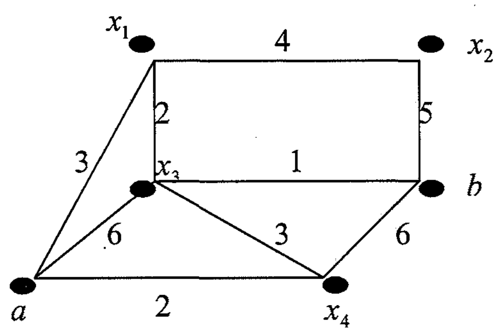


Figure 26

15. Apliqueu els algoritmes de Kruskal, Prim i Dijkstra al graf:



KRUSKAL

Tractarem de trobar un arbre generador minimal.

Ja què $card(V) = 6$, s'acabarà la iteració en $i = 5$. En primer lloc dibuixarem tots els vèrtexs. Després elegirem l'aresta de pes mínim. En aquest cas l'aresta a_1 serà la que uneix el vèrtex x_3 amb el b. Les altres dos arestes de menor pes seràn les que uneixen el vèrtex a amb el x_4. Siga a_2. Anomenem aresta a_3 la què uneix el vèrtex x_1 amb el x_3. L'aresta a_4 pot ser la que uneix el vèrtex x_1 amb el a. Falta una última iteració i encara què en el graf hi ha una aresta de pes 3, no es pot agafar l'aresta a_5 la què uneix el vèrtex x_3 amb el x_4 ja què es formaria un cicle. Aleshores l'aresta a_5 és la formada a l'unir el vèrtex x_1 amb el x_2. El pes d'aquest arbre seria la suma dels pesos de les arestes i valdria 12. Cal veure la figura 27. Altre isomorf seria el corresponent a la figura 28.

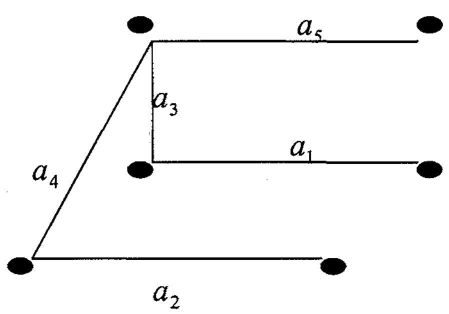


Figure 27

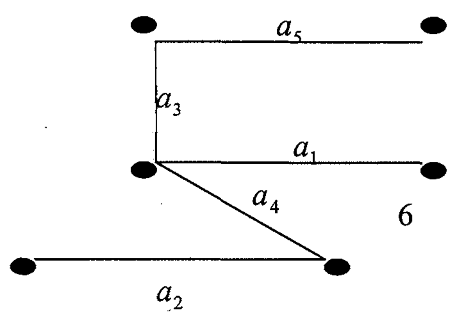


Figure 28

PRIM

Tractarem de trobar un arbre generador minimal.

Ja què $card(V) = 6$, s'acabarà la iteració en $i = 6$.

En $i = 1$, elegim $v_1 = x_2$. Aleshores $P_1 = \{x_2\}$, $T_1 = V - P_1 = \{a, x_1, x_3, x_4, b\}$, $R = \emptyset$.

En $i = 2$, unim x_2 amb x_1.Aleshores $P_2 = \{x_1, x_2\}$, $T_2 = V - P_2 = \{a, x_3, x_4, b\}$, $R = \{a_1\}$ on a_1 uneix x_2 amb x_1.

En $i = 3$, unim x_1 amb x_3.Aleshores $P_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $T_3 = V - P_3 = \{a, x_4, b\}$, $R = \{a_1, a_2\}$ on a_2 uneix x_1 amb x_3.

En $i = 4$, unim x_3 amb b.Aleshores $P_4 = \{x_1, x_2, x_3, b\}$, $T_4 = V - P_4 = \{a, x_4\}$, $R = \{a_1, a_2, a_3\}$ on a_3 uneix x_3 amb b.

En $i = 5$, unim x_3 amb x_4.Aleshores $P_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, b\}$, $T_5 = V - P_5 = \{a\}$, $R = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ on a_4 uneix x_3 amb x_4.

En $i = 6$, unim x_4 amb a.Aleshores $P_6 = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, b\}$, $T_6 = V - P_6 = \emptyset$, $R = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ on a_5 uneix x_4 amb a.

De forma similar surt quan agafem com a vèrtex inicial un qualsevol del graf.

DIJKSTRA

Tractarem de trobar un camí de longitud mínima entre el vèrtex a i el vèrtex b.

Siga $P_1 = \{a\}$, $T_1 = V - P_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, b\}$.

Aleshores $l_{P_1}(x_1) = 3$, $l_{P_1}(x_2) = \infty$, $l_{P_1}(x_3) = 6$, $l_{P_1}(x_4) = 2$, $l_{P_1}(b) = \infty$. Agafem $l_{P_1}(x_4) = 2$.

Siga $P_2 = P_1 \cup \{x_4\} = \{a, x_4\}$, $T_2 = T_1 - \{x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, b\}$.

Aleshores $l_{P_2}(x_1) = min\ \{l_{P_1}(x_1), l_{P_1}(x_4) + p(x_1, x_4)\} = min\ \{3, 2 + \infty\} = 3$.

$l_{P_2}(x_2) = min\ \{l_{P_1}(x_2), l_{P_1}(x_4) + p(x_2, x_4)\} = min\ \{\infty, 2 + \infty\} = \infty$.

$l_{P_2}(x_3) = min\ \{l_{P_1}(x_3), l_{P_1}(x_4) + p(x_3, x_4)\} = min\ \{6, 2 + 3\} = 5$.

$l_{P_2}(b) = min\ \{l_{P_1}(b), l_{P_1}(x_4) + p(b, x_4)\} = min\ \{\infty, 2 + 6\} = 8$.

Agafem $l_{P_2}(x_1) = 3$.

Siga $P_3 = P_2 \cup \{x_1\} = \{a, x_1, x_4\}$, $T_3 = T_2 - \{x_1\} = \{x_2, x_3, b\}$.

$l_{P_3}(x_2) = min\ \{l_{P_2}(x_2), l_{P_2}(x_1) + p(x_2, x_1)\} = min\ \{\infty, 3 + 4\} = 7$.

$l_{P_3}(x_3) = min\ \{l_{P_2}(x_3), l_{P_2}(x_1) + p(x_3, x_1)\} = min\ \{5, 3 + 2\} = 5$.

$l_{P_3}(b) = min\ \{l_{P_2}(b), l_{P_2}(x_1) + p(b, x_1)\} = min\ \{8, 3 + \infty\} = 8$.

Agafem $l_{P_3}(x_3) = 5$.

Siga $P_4 = P_3 \cup \{x_3\} = \{a, x_1, x_3, x_4\}$, $T_4 = T_3 - \{x_3\} = \{x_2, b\}$.
Aleshores $l_{P_4}(x_2) = min\ \{l_{P_3}(x_2), l_{P_3}(x_3) + p(x_2, x_3)\} = min\ \{7, 5 + \infty\} = 7$.
$l_{P_4}(b) = min\ \{l_{P_3}(b), l_{P_3}(x_3) + p(b, x_3)\} = min\ \{8, 5 + 1\} = 6$.
Agafem $l_{P_4}(b) = 6$.
Ja què $x = b$, acabem. Per la qual cosa el trajecte seria a, x_1, x_3, b. El pes seria 6.

Part I

TEMA 8. ESPAIS VECTORIALS i APLICACIONS LINEALS

1. ESPAI VECTORIAL

Definició 1. *Un **espai vectorial** sobre un cos commutatiu* $(\mathbb{k}\ ,+,\cdot)$ *és un grup abelià* $(V,+)$*, amb una llei de composició externa* $\circ : \mathbb{k}\times V \longrightarrow V$ *tal que satisfaça els axiomes següents:*

A-1. *Propietat distributiva respecte als escalars.*
$(k_1+k_2)\circ v=(k_1\circ v)+(k_2\circ v) \qquad \forall k_1,k_2\in\mathbb{k} \qquad \forall v\in V.$
A-2. *Propietat associativa.*
$(k_1\cdot k_2)\circ v=k_1\cdot(k_2\circ v) \qquad \forall k_1,k_2\in\mathbb{k} \qquad \forall v\in V.$
A-3. *Propietat distributiva respecte als vectors.*
$k\circ(v_1+v_2)=(k\circ v_1)+(k\circ v_2) \qquad \forall k\in\mathbb{k} \qquad \forall v_1,v_2\in V.$
A-4. *Propietat de tenir element neutre.*
$\mathbf{1}_{\mathbb{k}}\circ v=v$ sent $\mathbf{1}_{\mathbb{k}}$ l'element unitat de $\mathbb{k}$ $\qquad \forall v\in V.$
Els elements de $\mathbb{k}$ s'anomenen *escalars*.
Els elements de V s'anomenen *vectors*.

La notació més usual serà dir que V és un $\mathbb{k}$-espai vectorial, encara que també es diu que un espai vectorial és un trio d'elements format per:

$[(V,+),(\mathbb{k},+,\cdot),\circ]$ on $(V,+)$ és un grup abelià, $(\mathbb{k},+,\cdot)$ un cos commutatiu i $\circ$ una llei de composició externa que relaciona escalars amb vectors.

Nota 1. *A partir d'ara la ll.c.e.* $\circ$ *la substituirem per* $\cdot$ *o per absència del punt.*

Exemple 1. 1. *Tot cos* $\mathbb{k}$ *és un espai vectorial sobre sí mateix.*

2. *El conjunt* V*, de les successions d'infinits nombres reals.*
$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n) \qquad \forall(x_n)\in V\ ,\quad \forall(y_n)\in V \quad \lambda(x_n)=(\lambda x_n) \qquad \forall(x_n)\in V \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$

3. *L'espai vectorial trivial és* $V=\{\overline{0}\}$.

4. *El conjunt* $\mathbb{C}$ *dels nombres complexos sobre* $\mathbb{R}$.

5. *El conjunt* $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\quad \forall x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,n\}$.

6. *El conjunt* $\mathbb{k}[x]$*, de les funcions polinòmiques amb una variable i amb coeficients del cos* $\mathbb{k}$.

7. *El conjunt* $\mathcal{F}$ *de les aplicacions d'*$\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *sobre el cos* $\mathbb{R}$.

8. *El conjunt de les matrius rectangulars de tamany* $m \times n$ *sobre el cos* $\mathbb{R}$.

9. *No és un espai vectorial el conjunt* $V = \{(x,y)/y = 2x+1,\ x \in \mathbb{R}\}$.

10. *Si en* $\mathbb{R}^2$ *definim la llei suma:*
 $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.
 La llei de composició externa:
 $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0)$.
 Aleshores $(\mathbb{R}^2, +)$ *no és un* $\mathbb{R}$*-espai vectorial.*

PROPIETATS.

1. $0_{\mathbb{k}} \cdot v = \overline{0}$.
 On $0_{\mathbb{k}}$ és l'element neutre de la llei + en $\mathbb{k}$ i $\overline{0}$ l'element neutre de la llei + en V.
 En efecte, si $0_{\mathbb{k}}$ és l'element neutre de la llei + en $\mathbb{k} \longrightarrow (0_{\mathbb{k}} + k) = k$.
 $(0_{\mathbb{k}} + k) \cdot v = (0_{\mathbb{k}} \cdot v) + (k \cdot v) = k \cdot v \longrightarrow 0_{\mathbb{k}} \cdot v = \overline{0}$.

2. $k \cdot \overline{0} = \overline{0}$.
 Si $\overline{0}$ és l'element neutre de + en $V \longrightarrow \overline{0} + v = v$.
 $k \cdot (\overline{0} + v) \underset{Distr.}{=} k \cdot \overline{0} + k \cdot v = k \cdot v \longrightarrow k \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

3. $(-1_{\mathbb{k}}) \cdot v = -v$.
 $v + (-1_{\mathbb{k}}) \cdot v = (1_{\mathbb{k}}) \cdot v + (-1_{\mathbb{k}}) \cdot v = (1_{\mathbb{k}} - 1_{\mathbb{k}}) \cdot v = 0_{\mathbb{k}} \cdot v = \overline{0} \longrightarrow (-1_{\mathbb{k}}) \cdot v = v$.

4. Si $k \cdot v = \overline{0} \Rightarrow k = 0_{\mathbb{k}} \vee v = \overline{0}$.
 Si $k = 0_{\mathbb{k}}$, ja està demostrat en aplicar la propietat 1.
 Si $k \neq 0_{\mathbb{k}}\ \exists k^{-1} \ / \ k \cdot k^{-1} = 1_{\mathbb{k}}$.
 Si $k \cdot v = \overline{0} \longrightarrow k^{-1} \cdot (k \cdot v) = (k^{-1} \cdot k) \cdot v = \overline{0} \longrightarrow 1_{\mathbb{k}} \cdot v = \overline{0} \longrightarrow v = \overline{0}$.

5. $(-k) \cdot v = -(k \cdot v)$.
 $(-k) \cdot v + (k \cdot v) = ((-k) + k) \cdot v = 0_{\mathbb{k}} \cdot v = \overline{0} \longrightarrow (-k) \cdot v = -(k \cdot v)$.

6. $k \cdot (-v) = -(k \cdot v)$.
 $k \cdot (-v) + (k \cdot v) = k \cdot ((-v) + v) = k \cdot \overline{0} = \overline{0} \longrightarrow k \cdot (-v) = -(k \cdot v)$.

2. COMBINACIÓ LINEAL

Suposem un conjunt de vectors $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$, on V és un $\Bbbk$-e.v.

Definició 2. *Direm que un vector $v \in V$ és una* ***combinació lineal*** *de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ quan $\exists$ escalars $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \Bbbk$ / $v = k_1 v_1 + v_2 k_2 + \ldots + k_m v_m$.*

Exemple 2. *1. En $\mathbb{R}^3$, el vector $v = (-7, 7, 7)$ és combinació lineal dels vectors $v_1 = (-1, 2, 4)$ i $v_2 = (5, -3, 1)$.*

2. En $\Bbbk[x] = \{p(x), polinomis\ de\ grau\ n\}$, tot polinomi es pot posar com a combinació lineal dels monomis $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

2.1. PROPIETATS.

1. *El vector nul és combinació lineal de qualsevol conjunt de vectors.*

   És a dir, $\overline{0} = C.L.(v_1, v_2, \ldots, v_m)$.

2. *Qualsevol vector és combinació lineal de si mateix.*

   És a dir, $v_i = C.L.(v_i) \quad \forall i$.

3. Si $v = C.L.(v_1, v_2, \ldots, v_m) \wedge v_i = C.L.(w_1, w_2, \ldots, w_n) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow v = C.L.(w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

3. INDEPENDÈNCIA LINEAL

Suposem el conjunt de vectors $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$, on V és un $\Bbbk$-e.v.

Definició 3. *Direm que S* ***és un sistema lliure o linealment independent (L.I.)*** *si qualsevol combinació lineal de vectors de S igualada al vector nul implica que tots els coeficients són nuls.*

És a dir,

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = L.I. \text{ si } k_1 v_1 + v_2 k_2 + \ldots + k_m v_m = \overline{0} \Rightarrow k_i = 0 \ \forall i.$$

Òbviament perquè $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ siga lliure, $\forall v_i \neq \overline{0} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\} \wedge v_i \neq v_j \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \wedge v_i \neq \lambda v_j \quad \lambda \in \Bbbk$.

Exemple 3. *1. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1) \rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ és L.I.*

2. $v_1 = (1, 2, 4)$, $v_2 = (2, 5, -3) \rightarrow \{v_1, v_2\}$ és L.I.

3. $w_1 = (1, -2, 3)$, $w_2 = (2, -2, 0)$, $w_3 = (0, 1, 7) \rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ és L.I.

4. DEPENDÈNCIA LINEAL

Suposem el conjunt de vectors $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$, on V és un $\mathbb{k}$-e.v.

Definició 4. *Direm que S **és un sistema lligat o linealment dependent** si existeixen escalars de $\mathbb{k}$, no tots nuls, tal que la seua combinació lineal siga el vector nul.*

És a dir,

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = L.D. \text{ si } \exists k_i \neq 0 \ / \ k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + v_mk_m = \overline{0}.$$

Òbviament, si el sistema no és lliure, direm que és lligat.

Exemple 4. *1.* $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (1,1,0) \to \{u_1, u_2, u_3\}$ *és L.D.*

2. $w_1 = (1,-3,0)$, $w_2 = (3,0,4)$, $w_3 = (11,-6,12) \to \{w_1, w_2, w_3\}$ *és L.D.*

3. $v_1 = (2,-3,4), v_2 = (4,7,-6), v_3 = (18,-11,4), v_4 = (2,-7,3) \to \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *és L.D.*

Proposició 1. *Suposem $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \wedge S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\} \subset V$ / $S \subset S'$.*

Aleshores: i) Si $S = L.D. \Rightarrow S' = L.D.$ ii) Si $S' = L.I. \Rightarrow S = L.I.$

Demostració:

i) *Si* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = L.D. \longrightarrow \exists k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{k}$ no tots nuls / $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p = \overline{0}$.

Podem agafar $k_{p+1} = k_{p+2} = \ldots = k_q = 0$ i escriure:

$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p + k_{p+1}v_{p+1} + k_{p+2}v_{p+2} + \ldots + k_qv_q = \overline{0}$, *on* $\exists k_i \neq 0$ $1 \leq i \leq p$.

Per la qual cosa el sistema $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ *és L.D.*

Demostració:

ii) Per reducció a l'absurd.

Suposem que S fóra L.D. i S' fóra L.I.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = L.D. \longrightarrow \exists k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{k}$ no tots nuls / $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p = \overline{0}$.

Afegint $k_{p+1}v_{p+1} + k_{p+2}v_{p+2} + \ldots + k_qv_q$ *amb* $\forall k_j = 0$ $j \in \{p+1, \ldots, q\}$ *ens queda:*

$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p + k_{p+1}v_{p+1} + k_{p+2}v_{p+2} + \ldots + k_qv_q = \overline{0}$ *amb algun* $k_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq p)$, *per la qual cosa* $S' = L.D.$, *en contradicció amb l'hipòtesi.*

Proposició 2. Teorema de caracterització dels sistemes lligats.

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ *és lligat o L.D.$\Leftrightarrow$ un qualsevol dels vectors es pot posar com a combinació lineal dels p-1 restants.*

Demostració:

$\rightarrow)$ *Si* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *és lligat o L.D.*$\longrightarrow \exists k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{k}$ no tots nuls / $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p = \overline{0}$.

Suposem $k_i \neq 0$ *amb* $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. *Aleshores* $k_i v_i = -k_1 v_1 - k_2 v_2 - \dots - k_{i-1} v_{i-1} - k_{i+1} v_{i+1} - \dots - k_p v_p$.
Si $k_i \neq 0 \longrightarrow \exists k_i^{-1} \in \mathbb{k} \ / \ k_i k_i^{-1} = 1 = k_i^{-1} k_i$.
$k_i^{-1}(k_i v_i) = k_i^{-1}(-k_1 v_1) + k_i^{-1}(-k_2 v_2) + \dots + k_i^{-1}(-k_{i-1} v_{i-1}) + k_i^{-1}(-k_{i+1} v_{i+1}) + \dots + k_i^{-1}(k_p v_p) = (-k_i^{-1} k_1) v_1 + (-k_i^{-1} k_2) v_2 + \dots + (-k_i^{-1} k_{i-1}) v_{i-1} + (-k_i^{-1} k_{i+1}) v_{i+1} + \dots + (-k_i^{-1} k_p) v_p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_p v_p \longrightarrow v_i = C.L.(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p)$.
$\leftarrow$) *Suposem* $v_j = C.L.(v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p)$, amb $1 \leq j \leq p \longrightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_p \in \mathbb{k} \ / \ v_j = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_{j+1} v_{j+1} + \dots + \beta_p v_p \longrightarrow \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + \beta_{j+1} v_{j+1} + \dots + \beta_p v_p = \overline{0} \longrightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p\}$ *és L.D. ja que existeixen escalars no tots nuls tals que la C.L. és el vector nul.*

5. SISTEMA GENERADOR

Suposem el conjunt de vectors $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$, on V és un $\mathbb{k}$-e.v.

Definició 5. *Direm que S* ***és un sistema generador de*** *V si tot vector de V es pot expressar com a combinació lineal dels elements de S. S'expressa per* $V = < v_1, v_2, \dots, v_m >$.

És a dir, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} = S.G.\ de\ V \quad (V = < v_1, v_2, \dots, v_m >)$ si $\forall v \in V$, $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m$.

Exemple 5. *1.* $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1) \rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ *és S.G. de* $\mathbb{R}^3$.

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *és un S.G. del conjunt de les matrius quadrades de tamany 2 sobre* $\mathbb{R}$. $(M_{2\times 2}^{\mathbb{R}})$.

6. ESPAIS VECTORIAL DE DIMENSIÓ FINITA

Introducció. Existeixen alguns espais vectorials en els quals un nombre finit de vectors constitueix un sistema generador de tot l'espai. Per exemple, el sistema format pel conjunt $\{e_1, e_2, e_3\}$, on $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ és un S.G. de $\mathbb{R}^3$.

Però en l'espai vectorial $\mathbb{R}[x]$, de les funcions polinòmiques d'$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, qualsevol nombre determinat de polinomis $p_1, p_2, \dots, p_m$, no constitueix un sistema generador de $\mathbb{R}[x]$, ja que una funció polinòmica de grau major que el major dels graus de les m donades no pot expressar-se com a combinació lineal d'aquests.

Definició 6. *Direm que* ***un espai vectorial és de tipus finit o de dimensió finita****, si admet un conjunt finit de vectors que generen tol l'espai.*

És a dir, si V és un $\mathbb{k}$-e.v., V és de tipus finit, si $\exists \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V \ / \ v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m \quad \forall v \in V \quad k_i \in \mathbb{k} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Nota 2. *En el supòsit que V siga un espai vectorial de dimensió finita, el sistema generador no és únic.*

Per exemple, en l'espai $\mathbb{R}^2$, *constitueixen un sistema generador els vectors* $S = \{e_1, e_2\}$, *on* $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ *i* $T = \{u_1, u_2, u_3\}$, *on* $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,-1)$, $u_3 = (-3,-2)$.

En efecte, $\forall v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $v = C.L.(e_1, e_2)$, ja que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.

$\forall v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $v = C.L.(u_1, u_2, u_3)$, ja que $(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(2,-1) + \gamma(-3,-2) \longrightarrow x = \alpha + 2\beta - 3\gamma \wedge y = \alpha - \beta - 2\gamma$.

En resoldre el sistema ens queda: $\alpha = \dfrac{x + 2y + 7\gamma}{3}$, $\beta = \dfrac{x - y + \gamma}{3}$.

Nota 3. *En el primer sistema de generadors, els vectors són linealment independents, mentre que en el segon són lligats.*

7. BASE

Suposem el conjunt de vectors $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V$, on V és un $\mathbb{k}$-e.v.

Definició 7. *Direm que* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ***és una base de*** *V, si és un sistema lliure i generador de V.*

És a dir,

$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *és base* $\Leftrightarrow$ *i)* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *és L.I.* *ii)*$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *és S.G.*

Observació:

1. Si un espai vectorial té base, aleshores és per força de tipus finit. Més endavant demostrarem que qualsevol sistema de tipus finit, admetrà una base.

2. Els espais que no són de tipus finit, no poden tenir base, però cal dir que es pot generalitzar el concepte de base i definir *bases infinites*. Per exemple, en $\mathbb{R}[x]$, $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$ es pot considerar una base infinita.

3. La base canònica d'un espai vectorial seria la formada pels vectors del sistema $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$, on $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $e_3 = (0,0,1,\ldots,0), \ldots$, $e_n = (0,0,0,\ldots,1)$.

Definició 8. *Anomenem* **coordenades d'un vector** *els escalars corresponents en què queda descompost el vector en certa base.*

És a dir, si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *és una base de V, sabem que* $\forall v \in V$, $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Els escalars $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *són anomenats coordenades del vector v en la base B.*

Teorema 1. Caracterització d'una base.

Les coordenades d'un vector escrit en una base són úniques.

És a dir, Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *és una base de* $V \Rightarrow \forall v \in V$, $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ *de forma única.*

Demostració: *Com* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *és una base de* $V \longrightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *és un sistema generador i* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *és lliure, per la qual cosa,* $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Caldrà veure la unicitat. Ho demostrarem per reducció a l'absurd.

Suposem $\forall v \in V$, $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \wedge v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n \longrightarrow v - v = (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n \longrightarrow \overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n \underset{\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}L.I.}{\longrightarrow} \alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \alpha_n - \beta_n = 0 \longrightarrow \alpha_i = \beta_i \forall i \;\; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema 2. Existència de bases.

Qualsevol espai vectorial de dimensió finita, posseeix, al menys una base.

Demostració: *Suposem,* V *un* $\mathbb{k}$*-e.v. de tipus finit /* $V \neq \overline{0} \longrightarrow V$ *posseeix un sistema de generador. Siga* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *aquest sistema finit de generadors. Si aquest sistema és lliure, ja tenim la base. Si no fóra lliure,* $\exists v_r$ / v_r *seria combinació lineal de la resta de vectors i se'l podria eliminar.*

Aleshores, $\forall v \in V$, $v = C.L.(v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, \ldots, v_p)$.

Si el sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, \ldots, v_p\}$ *fóra lliure, en ser generador seria base.*

Si el sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, \ldots, v_p\}$ *no fóra lliure, existeria un vector que seria combinació lineal de la resta de vectors i se'l podria eliminar. Seguiríem d'aquesta manera fins obtenir un sols vector. Com resulta que* $V \neq \overline{0}$, *aleshores* $v_i \neq \overline{0}$ *i el sistema* $\{v_i\}$ *seria lliure i generador, és a dir, seria base.*

Teorema 3. En un espai vectorial de dimensió finita, totes les bases tenen igual nombre de vectors.

És a dir, suposem V *un* $\mathbb{k}$*-e.v. de tipus finit. Suposem una primera base* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *.Suposem una segona base* $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ *. Cal veure que* $n = p$.

Demostració per reducció a l'absurd.

Suposem que $p > n$.

Com que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, u_p\}$ *és una base de* $V \longrightarrow \forall v \in V$, $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots + \alpha_p u_p$.

Però $e_1 \in V$, *per la qual cosa* $e_1 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n + \ldots + \beta_p u_p$. (1)

En (1), $\exists \beta_i \neq 0$ *ja que si foren* $\beta_i = 0 \quad \forall i \longrightarrow e_1 = \overline{0}$ *i el sistema* $\{\overline{0}, e_2, \ldots, e_n\}$ *no seria base.*

Suposem $\beta_1 \in \mathbb{k} \wedge \beta_1 \neq 0 \longrightarrow \exists \beta_1^{-1} / \beta_1 \beta_1^{-1} = \beta_1^{-1}\beta_1 = 1$.

$\beta_1 u_1 = e_1 - \beta_2 u_2 - \ldots - \beta_n u_n - \ldots - \beta_p u_p \longrightarrow \beta_1^{-1}(\beta_1 u_1) = \beta_1^{-1} e_1 - \beta_1^{-1}(\beta_2 u_2) - \ldots - \beta_1^{-1}(\beta_n u_n) - \ldots - \beta_1^{-1}(\beta_p u_p) \longrightarrow u_1 = \beta_1^{-1} e_1 - (\beta_1^{-1}\beta_2)u_2 - \ldots - (\beta_1^{-1}\beta_n)u_n - \ldots - (\beta_1^{-1}\beta_p)u_p \longrightarrow u_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n + \ldots + \lambda_p u_p$.

Aleshores el sistema $\{e_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, u_p\}$ *seria lliure (la demostració en l'annex al final del teorema) i en ser generador (ja que* $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ *és generador, i per tant* $\{e_1, u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ *també és generador) seria la nova base.*

Però $e_2 \in V$*, per la qual cosa* $e_2 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_n u_n + \ldots + \gamma_p u_p$. (2)

En (2), $\exists \gamma_i \neq 0$ *ja que si foren* $\gamma_i = 0 \quad \forall i \longrightarrow e_1 = \overline{0}$ *i el sistema* $\{\overline{0}, e_2, \ldots, e_n\}$ *no seria base.*

Suposem $\gamma_2 \in \Bbbk \wedge \gamma_2 \neq 0 \longrightarrow \exists \gamma_2^{-1} \ / \ \gamma_2^{-1}\gamma_2 = \gamma_2\gamma_2^{-1} = 1.$

$\gamma_2 u_2 = e_2 - \gamma_1 u_1 - \gamma_3 u_3 - \ldots - \gamma_n u_n - \ldots - \gamma_p u_p \longrightarrow u_2 = \mu_1 e_2 + \mu_2 e_1 + \mu_3 u_3 + \ldots + \mu_n u_n + \ldots + \mu_p u_p.$

Aleshores el sistema $\{e_1, e_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots, u_p\}$ *seria la nova base.*

En repetir el procés, obtenim el sistema lliure $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, u_{n+1}, \ldots, u_n\}$ *(ja que* $p > n$*).*

Però $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *és una base*$\longrightarrow$*és un sistema lliure d'ordre màxim (com també es defineixen les bases), per la qual cosa el sistema* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, u_{n+1}, \ldots, u_n\}$ *seri lligat. Absurd. Conclusió* $p \not> n$*. Aleshores* $p \leq n$*.*

En intercanviar l'ordre de les bases i si la primera base fóra $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ *i la segona fóra* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *obtindríem que* $n \leq p$*.*

Conclusió $n = p$*.*

ANNEX: el sistema $\{e_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, u_p\}$ és lliure.

És a dir, $\mu_1 e_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n + \ldots + \mu_p u_p = \overline{0} \Rightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, p.$

En efecte, com que per (1) $\quad e_1 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n + \ldots + \beta_p u_p$, en substituir tenim:

$\mu_1(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n + \ldots + \beta_p u_p) + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n + \ldots + \mu_p u_p = \overline{0} \longrightarrow (\mu_1\beta_1)u_1 + (\mu_1\beta_2 + \mu_2)u_2 + \ldots + (\mu_1\beta_n + \mu_n)u_n + \ldots + (\mu_1\beta_p + \mu_p)u_p = \overline{0} \underset{\{u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots,u_p\} \text{ és base de } V}{\longrightarrow} \mu_1\beta_1 = 0 \wedge \mu_1\beta_i + \mu_i = 0$

$\forall i = 2, 3, \ldots, n, \ldots, p.$

Com $\mu_1\beta_1 = 0 \wedge \beta_1 \neq 0 \longrightarrow \mu_1 = 0.$

Com $\mu_1\beta_i + \mu_i = 0 \wedge \mu_1 = 0 \longrightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i = 2, 3, \ldots, n, \ldots, p.$

De les dues últimes expressions obtenim que $\mu_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, p.$

Nota 4. *Dels teoremes anteriors podem deduir que qualsevol espai vectorial no trivial de tipus finit, posseeix, almenys una base i que totes les bases tenen igual nombre de vectors.*

Definició 9. *Anomenem* ***dimensió de l'espai vectorial*** V *al nombre de vectors que formen la base. Es representa per* $\dim(V)$*.*

Nota 5. *Quan* $V = \{\overline{0}\}$, *convenim que* $\dim(V) = 0$*.*

8. EQUACIONS DEL CANVI DE BASE

Suposem V un $\mathbb{k}$-e.v. de dimensió n.

Suposem $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V.

Suposem $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ una base de V / $e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ són les coordenades de v en B.

Si $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ són les coordenades de v en B'.

$\Longrightarrow \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\beta_i$. Aquestes equacions s'anomenen *equacions del canvi de base.*

Demostració:

$\forall v \in V \longrightarrow v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

$\forall v \in V \longrightarrow v = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \ldots + \beta_n e'_n$. En igualar les dues expressions queda: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\beta_i) e_j$. Identificant obtenim $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\beta_i$.

Exemple 6. *Suposem $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}$-e.v. de dimensió 3. Suposem $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$,on $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.*

Suposem $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$,on $e'_1 = (0,0,-1)$, $e'_2 = (0,-1,0)$, $e'_3 = (-1,0,-1)$.

i) Trobeu les equacions del canvi de base. ii) Si les coordenades del vector v de $\mathbb{R}^3$ són $(2,1,3)$ en la base B, trobeu les coordenades d'aquest vector en la nova base B'.

Solució i)

Primera manera:

$v = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = \beta_1(0,0,-1) + \beta_2(0,-1,0) + \beta_3(-1,0,-1) \longrightarrow \alpha_1 = -\beta_3$, $\alpha_2 = -\beta_2$, $\alpha_3 = -\beta_1$. *Que són les equacions del canvi de base.*

Segona manera:

$e'_1 = (0,0,-1) = a_{11}(1,0,1) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$.

$e'_2 = (0,-1,0) = a_{12}(1,0,1) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1)$.

$e'_3 = (-1,0,-1) = a_{13}(1,0,1) + a_{23}(0,1,0) + a_{33}(0,0,1)$.

En resoldre el sistema queda: $a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{32} = a_{23} = a_{33} = 0, \quad a_{31} = a_{22} = a_{13} = -1$.

És a dir, les equacions del canvi les podem tenir matricialment:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

En calcular matricialment obtenim el mateix resultat que abans, és a dir $\alpha_1 = -\beta_3$, $\alpha_2 = -\beta_2$, $\alpha_3 = -\beta_1$.

ii) Primera manera:

$v = (2,1,3)_B = 2(1,0,1) + (0,1,0) + 3(0,0,1)$.

$v = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{B'} = \beta_1(0,0,-1) + \beta_2(0,-1,0) + \beta_3(-1,0,-1)$.

En igualar queda: $2(1,0,1) + (0,1,0) + 3(0,0,1) = \beta_1(0,0,-1) + \beta_2(0,-1,0) + \beta_3(-1,0,-1) \longrightarrow 2 = -\beta_3,\ 1 = -\beta_2,\ 5 = -\beta_1 - \beta_3 \longrightarrow \beta_1 = -3,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = -2$.

És a dir, el vector v *té de coordenades* $(2,1,3)$ *en la base* B *i té de coordenades* $(-3,-1,-2)$ *en la nova base* B' .

Segona manera:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\beta_1 = -3,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = -2$.

9. TEOREMA DE LA BASE INCOMPLETA

Teorema 4. *Suposem* V *un* $\mathbb{k}$*-e.v. de dimensió* n.

Suposem $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *una base de* V.

Si $P = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ *és un sistema de vectors linealment independents de* V $(n \geqslant p)$.

$\Rightarrow \exists n-p$ *vectors* / $P' = \{v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ *és base de* V.

Demostració: Si $P = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ *fóra sistema generador, aleshores seria base de* V *i no faria falta afegir cap vector nou* $(n = p)$.

Si $P = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ *no fóra sistema generador (suposem* $n > p$*),vegem que* $\exists$ v_{p+1} / $\{v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}\}$ *és lliure.*

En efecte, si $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} v_{p+1} = \overline{0} \longrightarrow \forall \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p, p+1$ *ja que com que* $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ *és lliure, si* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p = \overline{0} \longrightarrow \forall \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$.

Sols fa falta demostrar que $\alpha_{p+1} = 0$.

Suposem que $\alpha_{p+1} \neq 0 \longrightarrow \alpha_{p+1} v_{p+1} = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_p v_p \longrightarrow \alpha_{p+1}^{-1}(\alpha_{p+1} v_{p+1}) = \alpha_{p+1}^{-1}(-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_p v_p) \longrightarrow v_{p+1} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \longrightarrow v_{p+1} = C.L.(v_1, v_2, \dots, v_p) \longrightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ *seria sistema generador, en contra del que hem suposat. Per la qual cosa* $\forall \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p, p+1$.

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}\}$ *fóra sistema generador, ja seria base.*

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}\}$ *no fóra sistema generador, procediriem com abans.*

Raonant d'aquesta manera, obtindríem una base, ja que per contra, el procés s'allargaria indefinidament i V *no seria de tipus finit.*

Exemple 7. *Cosiderem l'espai vectorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre* $\mathbb{R}$*. Considerem* $P = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ *lliure. Completeu una base de* $\mathbb{R}^3$.

És suficient agafar un vector que no siga combinació lineal dels dos vectors anteriors, per exemple $(1,3,0)$.

Cal adonar-nos que si $v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,1,1),\ < v_1, v_2 >= \{v_3 \ / \ v_3 = C.L.(v_1, v_2)\} = \{v_3 \ / \ v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2\}$.

$v_3 = (x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) \longrightarrow \alpha = x,\ \beta = y,\ \alpha + \beta = z$.

Per la qual cosa, $< v_1, v_2 >= \{v_3 \ / \ v_3 = (\alpha, \beta, \alpha + \beta)\}$.

Un vector $w \notin < v_1, v_2 >$ quan la tercera component no siga la suma de les dues anteriors. És per això que $w = (1,3,0) \notin < v_1, v_2 >$.

Evidentment existeixen molts vectors que no siguen de $< v_1, v_2 >$ i és per això que existeixen moltes bases.

Exercici 1. *Trobeu la relació de dependència que puga existir entre els vectors:*
$v_1 = (2,3,4,-1)$, $v_2 = (-1,-2,-1,3)$, $v_3 = (1,-2,2,2)$, $v_4 = (0,2,3,5)$, $v_5 = (1,1,3,2)$.

Trobeu també un altre sistema generador tal que genere el mateix subespai que aquests cinc vectors i tal que siga lliure.

Solució: $3v_2 + 2v_1 - v_3 - v_4 = \overline{0} \wedge v_1 + v_2 - v_5 = \overline{0}$.

En utilitzar el mètode de reducció en cascada *obtenim:*

$v_1 = (2,3,4,-1)$	$v_1 = (2,3,4,-1)$	$v_1 = (2,3,4,-1)$
$v_2 = (-1,-2,-1,3)$	$v_2' = 2v_2 + v_1 = (0,-1,2,5)$	$v_2' = (0,-1,2,5)$
$v_3 = (1,-2,2,2)$	$v_3' = v_1 - 2v_3 = (0,7,0,-5)$	$v_3'' = 7v_2' + v_3' = (0,0,14,30)$
$v_4 = (0,2,3,5)$	$v_4 = (0,2,3,5)$	$v_4' = 2v_2' + v_4 = (0,0,7,15)$
$v_5 = (1,1,3,2)$	$v_5' = v_1 - 2v_5 = (0,1,-2,-5)$	$v_5'' = v_2' + v_5' = (0,0,0,0)$

$v_1 = (2,3,4,-1)$
$v_2' = (0,-1,2,5)$
$v_3'' = (0,0,14,30)$
$v_4'' = v_3'' - 2v_4' = (0,0,0,0)$
$v_5'' = (0,0,0,0)$

$v_4'' = v_3'' - 2v_4' = (0,0,0,0) \longrightarrow 7v_2' + v_3' - 2(2v_2' + v_4) = \overline{0} \longrightarrow 7(2v_2 + v_1) + (v_1 - 2v_3) - 4(2v_2 + v_1) - 2v_4 = \overline{0} \longrightarrow 3v_2 + 2v_1 - v_3 - v_4 = \overline{0}$.

$v_5'' = (0,0,0,0) \longrightarrow v_2' + v_5' = 2v_2 + v_1 + v_1 - 2v_5 = \overline{0} \longrightarrow v_1 + v_2 - v_5 = \overline{0}$.

Exercici 2. *Trobeu la relació de dependència que puga existir entre els vectors:*
$w_1 = (2,-4,2,6)$, $w_2 = (-3,6,-3,9)$, $w_3 = (2,6,4,-3)$, $w_4 = (3,4,5,0)$.
Sol. $3w_1 + 2w_2 = \overline{0} \wedge -w_1 - 2w_3 + 2w_4 = \overline{0}$.

10. SUBESPAI VECTORIAL

Suposem V un $\Bbbk$-e.v. i $W \subset V$.

Definició 10. *Direm que W* **és un $\Bbbk$-subespai vectorial de** *V si W és un $\Bbbk$-e.v. S'expressa per $W \leq V$.*

10.1. Teoremes de caracterització. T-1: $W \leq V \Leftrightarrow i)$ $(W,+)$ és un subgrup de $(V,+)$ $ii)$ $\alpha x \in W \quad \forall \alpha \in \Bbbk \quad \forall x \in W$.

T-2: $W \leq V \Leftrightarrow \alpha x + \beta y \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \Bbbk \quad \forall x, y \in W$.

Demostració:

Teorema 1 $\Leftrightarrow$ Teorema 2.

$\rightarrow$) Com que per $i)$ $(W,+)$ és un subgrup de $(V,+) \longrightarrow \forall x, y \in W \Rightarrow x - y \in W$, on $-y$ és el simètric de y respecte a la llei $+$.

Com que es compleix *ii)* $\alpha x \in W \quad \forall \alpha \in \mathbb{k} \quad \forall x \in W \wedge \beta y \in W \quad \forall \beta \in \mathbb{k} \quad \forall y \in W \longrightarrow \alpha x \in W \quad -\beta y \in W \longrightarrow \alpha x - (-\beta y) \in W \longrightarrow \alpha x + \beta y \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall x, y \in W$.

$\leftarrow$) Per hipòtesi $\alpha x + \beta y \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall x, y \in W$. $\longrightarrow$ En particular, si $\beta = 0 \longrightarrow \alpha x \in W \quad \forall \alpha \in \mathbb{k} \quad \forall x \in W$.

Per hipòtesi $\alpha x + \beta y \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall x, y \in W$. $\longrightarrow$ En particular,$\alpha = 1$, $\beta = -1 \longrightarrow x - y \in W, \forall x, y \in W \longrightarrow (W, +)$ és un subgrup de $(V, +)$.

Exemple 8. *1. Si $\mathbb{R}^4$ és un $\mathbb{R}$-e.v.$\Rightarrow W = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \ / \ x_i \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}$.*

2. *Si $K[x]$ és l'espai vectorial dels polinomis i $W[x]$ és el subconjunt format per aquells polinomis de grau menor que un nombre natural fix $n \Rightarrow W[x] \leq K[x]$.*

3. *Si V un $\mathbb{k}$-e.v. i $v_1 \in V$, on v_1 és fix $\Rightarrow W = \{w \ / \ w = \lambda v_1 \ / \ \lambda \in \mathbb{k}\} \leq V$.*

4. *La suma (intersecció) de dos subespais vectorials, és un altre subespai vectorial.*

5. *Si $\mathbb{R}^3$ és un $\mathbb{R}$-e.v.$\Rightarrow W = \{(x, 2, z) \ / \ x, z \in \mathbb{R}\} \not\leq \mathbb{R}^3$.*

10.2. Generació de subespais. Suposem V un $\mathbb{k}$-e.v. i $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$.

Definició 11. *Definim **varietat lineal engendrada pels vectors** $v_1, v_2, \ldots, v_p$, al conjunt dels vectors que puguen escriure's com una combinació lineal dels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_p$. S'expressa per $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$.*

És a dir,

$$< v_1, v_2, \ldots, v_p >= \{v \ / \ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p, \quad v \in V, \quad \alpha_i \in \mathbb{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Proposició 3. *La varietat lineal engendrada pels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_p$ és un subespai vectorial de V. És a dir, $< v_1, v_2, \ldots, v_p > \leq V$.*

Demostració: En aplicar el segon teorema de caracterització dels subespais vectorials tenim que si $W =< v_1, v_2, \ldots, v_p >, W \leq V \Leftrightarrow \alpha x + \beta y \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall x, y \in W$.

Com que $x \in W \longrightarrow x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p$.

Com que $y \in W \longrightarrow y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_p v_p$.

$\alpha x + \beta y = \alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p) + \beta(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_p v_p) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha\alpha_p + \beta\beta_p)v_p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \in W$.

Nota 6. *Si $V =< v_1, v_2, \ldots, v_n >$, aleshores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és un sistema generador de V.*

Nota 7. *Si V un $\mathbb{k}$-e.v.de tipus finit, és evident que també són de tipus finit tots els seus subespais vectorials.*

11. DIMENSIONS DELS SUBESPAIS

Suposem V un $\Bbbk$-e.v.de tipus finit. Suposem $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$.

Definició 12. *Anomenem rang del sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ a la dimensió de la varietat lineal engendrada per aquest sistema de vectors.*

És a dir, $rang(\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}) = dim < v_1, v_2, \ldots, v_m >=$ al major nombre de vectors linealment independents del sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Nota 8. *1. $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ és L.I. si, i sols si, $rang(\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}) = m$.*

2. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ / $dim(V) = n$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és base de V si, i sols si, $rang(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}) = n$.

Teorema 5. Fórmula de les dimensions.

Suposem V un $\Bbbk$-e.v.de tipus finit. Suposem $U_1, U_2 \leq V \Rightarrow$

$$dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2).$$

Definició 13. *Si $U_1, U_2 \leq V$,*

Definim $U_1 + U_2 = \{v \ / \ v \in V \ / \ v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, \quad u_2 \in U_2\}$.

Definim $U_1 \cap U_2 = \{v \ / \ v \in U_1 \wedge \ v \in U_2\}$.

Lema 1. *i) $U_1 + U_2 \leq V$ ii) $U_1 \cap U_2 \leq V$.*

Demostració de i)

$U_1 + U_2 \leq V \Leftrightarrow \alpha x + \beta y \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \Bbbk \quad \forall x, y \in U_1 + U_2$.

$x \in U_1 + U_2 \longrightarrow x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in U_1, \quad x_2 \in U_2$.

$y \in U_1 + U_2 \longrightarrow y = y_1 + y_2 \quad y_1 \in U_1, \quad y_2 \in U_2$.

$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) = u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$ *ja que:*

$U_1, U_2 \leq V$.

Nota 9. *Si $U_1, U_2 \leq V, U_1 \cup U_2 \not\leq V$.*

Contraexemple: $U_1 = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}, \quad U_2 = \{(0, y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

Demostració del teorema:

Suposem $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ una base de $U_1 \cap U_2$.

Suposem $dim(U_1 \cap U_2) = p, \quad dim(U_1) = r, \quad dim(U_2) = s$.

Resulta fàcil deduir que, $U_1 \cap U_2 \leq U_1 \wedge U_1 \cap U_2 \leq U_2$.

Pel teorema de la base incompleta:

$B' = \{e_1, e_2, \ldots, e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_r\}$ és base de U_1, on $u_i \in U_1 \quad i = p + 1, p + 2, \ldots, r$.

$B'' = \{e_1, e_2, \ldots, e_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \ldots, v_s\}$ és base de U_2, on $v_j \in U_2 \quad j = p + 1, p + 2, \ldots, s$.

Cal demostrar que $C = \{e_1, e_2, \dots, e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_r, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_s\}$ és base de $U_1 + U_2$,

(ja que $dim(U_1 + U_2) = p + (r-p) + (s-p) = r + s - p = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2)$).

i) $C = \{e_1, e_2, \dots, e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_r, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_s\}$ és un sistema generador de $U_1 + U_2$.

En efecte, si $v \in U_1 + U_2 \longrightarrow v = u_1 + u_2 \ / \ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$.

$u_1 \in U_1 \longrightarrow u_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} u_{p+1} + \alpha_{p+2} u_{p+2} + \ldots + \alpha_r u_r$.

$u_2 \in U_2 \longrightarrow u_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_p e_p + \beta_{p+1} v_{p+1} + \beta_{p+2} v_{p+2} + \ldots + \beta_s v_s$.

$v = u_1 + u_2 = \sum\limits_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i) e_i + \sum\limits_{j=p+1}^{r} \alpha_j u_j + \sum\limits_{l=p+1}^{s} \beta_l v_l = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum\limits_{j=p+1}^{r} \alpha_j u_j + \sum\limits_{l=p+1}^{s} \beta_l v_l$.

Aleshores, v és combinació lineal del sistema $\left\{ \begin{array}{l} e_1, e_2, \dots, e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_r, v_{p+1}, \\ v_{p+2}, \dots, v_s \end{array} \right\}$.

ii) $C = \{e_1, e_2, \dots, e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_r, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_s\}$ és un sistema lliure.

$\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum\limits_{j=p+1}^{r} \alpha_j u_j + \sum\limits_{l=p+1}^{s} \beta_l v_l = \overline{0} \longrightarrow \lambda_i = 0\ \forall i = 1, 2, \dots, p,\ \alpha_j = 0\ \forall j = p+1, p+2, \dots, r,\ \beta_l = 0,$

$\forall l = p+1, p+2, \dots, s$.

$\sum\limits_{l=p+1}^{s} \beta_l v_l = -\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - \sum\limits_{j=p+1}^{r} \alpha_j u_j \in U_1 \cap U_2$.

En efecte, el primer terme és un element de U_1 ja que puc considerar $\lambda_i = 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, p$ i agafar β_l ,

$l = p+1, p+2, \dots, s$.

El segon terme és un element de U_2 ja que és una combinació lineal dels vectors de la base B'.

En tractar-se d'una igualtat resulta que és un vector dels dos subespais, és a dir, de la intersecció.

Com que una base de $U_1 \cap U_2$ és $B = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$, resulta que

$\sum\limits_{l=p+1}^{s} \beta_l v_l = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i \longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i + \sum\limits_{l=p+1}^{s} (-\beta_l) v_l = \overline{0}$.

Però $B'' = \{e_1, e_2, \dots, e_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_s\}$ és base de

$U_2 \longrightarrow \mu_i = 0\ \forall i = 1, 2, \dots, p,\ \beta_l = 0 \quad \forall l = p+1, p+2, \dots, s$.

Aleshores, $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum\limits_{j=p+1}^{r} \alpha_j u_j = \overline{0}$.

Com que una base de U_1 és $B' = \{e_1, e_2, \dots, e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_r\} \longrightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, p \wedge \alpha_j = 0$

$\forall j = p+1, p+2, \dots, r$.

Exercici 3. *Si* $V = \mathbb{k} - e.v. \ / \ dim(V) = 5$. *Si* $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *és una base de* V. *Si* $caract.(\mathbb{k}) \neq 2$.

Suposem $U_1 \leq V$ / $U_1 =< v_1 + v_2\ ,\ v_1 - v_2\ ,\ v_1 + v_3 >$.
Suposem $U_2 \leq V$ / $U_2 =< v_1 + v_2 + v_3\ ,\ v_1 + 2v_4 >$.
Comproveu que es compleix la fórmula de les dimensions.

12. SUMA DIRECTA

Introducció:

Suposem $U_1 \leq \mathbb{R}^4$ / $U_1 =< (x, 0, z, 0) >$ $\quad x, z \in \mathbb{R}$.
Suposem $U_2 \leq \mathbb{R}^4$ / $U_2 =< (0, y, z', 0) >$ $\quad y, z' \in \mathbb{R}$.

Aleshores, un vector d'$\mathbb{R}^4$ i que pertanya a $U_1 + U_2$, podrà escriure's de moltes formes diferents com a suma de vectors dels subespais U_i. Per exemple, $(3, 2, 5, 0) = (3, 0, 1, 0) + (0, 2, 4, 0) = (3, 0, -2, 0) + (0, 2, 7, 0) = \ldots$

Analitzarem els casos en què la descomposició és única.

Definició 14. *Si $V = \mathbb{k} - e.v.$ i $U_1, U_2 \leq V$.*
Direm que U_1 i U_2 són ***suplementaris*** *si, i sols si, $U_1 + U_2 = V \wedge U_1 \cap U_2 = \{\overline{0}\}$.*
Per indicar que dos subespais vectorials són suplementaris de V, ho escriurem $U_1 \oplus U_2 = V$ i direm que V ***és suma directa*** *de U_1 i U_2.*

Teorema 6. *Si $V = \mathbb{k} - e.v.$ de tipus finit $\Rightarrow \forall U \leq V$, U admet suplementari.*

Demostració:
Suposem $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ una base de U.
Pel teorema de la base incompleta, siga $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ una base de V.
$\forall v \in V \longrightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta q v_q$.
Si $W =< v_1, v_2, \ldots, v_q >$, aleshores $V = U + W$ (per la mateixa construcció de W).
Si $U \cap W$ fóra el vector nul, tendríem que $V = U \oplus W$ i per la qual cosa U admetria com a suplementari el W.
Si $v' \in U \cap W \longrightarrow v' \in U \wedge v' \in W$.
$v' \in U \longrightarrow v' = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$.
$v' \in W \longrightarrow v' = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma q v_q$.
$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma q v_q \longrightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p + (-\gamma_1) v_1 + (-\gamma_2) v_2 + \ldots + (-\gamma q) v_q \longrightarrow \lambda_i = 0$
$\forall i = 1, 2, \ldots, p$, $\gamma_j = 0\ \forall j = 1, 2, \ldots, q$ ja que el sistema $\{u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ és base de V.
Per la qual cosa, $v' = \overline{0}$.

Nota 10. *1. El suplementari d'un subespai vectorial no és únic.*

Exemple 1. Si $V = \mathbb{k} - e.v.$ / $dim(V) = 2$ i $B = \{v_1, v_2\}$ és una base de V, també $B' = \{v_1, v_1 + v_2\}$ és una base de V, i $< v_2 >$, i $< v_1 + v_2 >$ són dos subespais suplementaris de $< v_1 >$.

Exemple 2. Si $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} - e.v.$ *Suposem* $U_1, U_2, U_3 \leq \mathbb{R}^2$ *, on* $U_1 =< (x,0) >, x \in \mathbb{R}$; $U_2 =< (0,y) >, y \in \mathbb{R}$; $U_3 =< (z,z) >, z \in \mathbb{R}$. *Podrem demostrar fàcilment que* $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$; $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_3$, *és a dir,* U_2 *i* U_3 *són suplementaris a* U_1.

2. *De la definició de suma directa obtenim:*
   $V = U \oplus W \Leftrightarrow dim(V) = dim(U) + dim(W)$.

Definició 15. *En aquesta definició generalitzarem el concepte de suma directa per a un nombre finit de subespais.*

Si $U_1, U_2, \ldots, U_m \leq V$, *definim suma*

$$U_1+U_2+\ldots+U_m = \sum_{i=1}^{m} U_i = \{v \in V \ / \ v = u_1 + u_2 + \ldots + u_m \ / \ u_i \in U_i \ i = 1,2,\ldots,m\}.$$

Direm que la suma $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ ***és suma directa*** *(i s'expresa per* $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$ *o* $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ *), si cada element de* $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ *s'escriu de forma única com a suma de vectors dels espais sumands*

Definició 16. *Si la suma* $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ *és directa, direm que els subespais són* ***independents***.

Observació:
U_1 i U_2 són suplementaris si, i sols si, són independents i la seua suma és V.

Proposició 4. $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ *és suma directa* $\Leftrightarrow$ *Si* $u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \overline{0} \rightarrow \forall u_i = \overline{0}$.

És a dir, en una suma directa, la descomposició del vector nul com a suma de vectors dels subespais, és única.

Demostració:

$\rightarrow$)
Sabem que $\overline{0} = \overline{0} + \overline{0} + \ldots + \overline{0}$.
Per hipòtesi $u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \overline{0}$.
Com que $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ és suma directa, per la pròpia definició cada vector de la suma s'escriu de forma única com a suma de vectors dels subespais sumands, per la qual cosa, en identificar obtenim que $\forall u_i = \overline{0}$, $i = 1,2,\ldots,m$.

$\leftarrow$)
Suposem que $u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \overline{0} \rightarrow \forall u_i = \overline{0}$ i caldrà demostrar que $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ és suma directa.

És a dir, suposem que el vector nul admet una única descomposició en suma de vectors dels subespais U_i, i caldrà demostrar que també ocorre per a qualsevol vector de l'espai.

Si un mateix vector $v \in V$ tinguera dues descomposicions diferents, obtindríem:
$v = u_1+u_2+\ldots+u_m = v_1+v_2+\ldots+v_m \longrightarrow (u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\ldots+(u_m-v_m) = \overline{0} \longrightarrow u_i - v_i \longrightarrow u_i = v_i \forall i = 1,2,\ldots,m$.

12.1. Teorema de caracterització de la suma directa.

Teorema 7. *Suposem $U_1, U_2, \ldots, U_m \leq V$.*
$U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ *és suma directa* $\Leftrightarrow U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{\overline{0}\}$.

Demostració:

$\longrightarrow)$
Suposem $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ suma directa.
Si $u \in U_i \cap (\sum_{j\neq i} U_j) \longrightarrow u \in U_i \wedge u \in \sum_{j\neq i} U_j \longrightarrow u = u_i \wedge u = \sum_{j\neq i} u_j \longrightarrow u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_{i-1} + u_{i+1} + \ldots + u_m \longrightarrow \overline{0} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{i-1} + (-1)u_i + u_{i+1} + \ldots + u_m \underset{\text{Prop.anterior}}{\longrightarrow} u_j = \overline{0},\ j \neq i \wedge -u_i = \overline{0} \longrightarrow u_i = \overline{0}\ \forall i.$

$\longleftarrow)$
Suposem $U_i \cap (\sum_{j\neq i} U_j) = \{\overline{0}\}$.
Per a demostrar que la suma $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ siga directa caldrà veure que el vector nul admet una única
descomposició com a suma de vectors dels subespais U_i.
Si $u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \overline{0} \longrightarrow \underbrace{-u_i}_{\in U_i} = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_{i-1} + u_{i+1} + \ldots + u_m}_{\in \sum_{j\neq i} U_j} \in$
$\in U_i \cap (\sum_{j\neq i} U_j) = \{\overline{0}\} \longrightarrow u_i = \overline{0}\ \forall i = 1, 2, \ldots, m.$
Observació:
En el cas de dos subespais vectorials $U_1, U_2 \leq V$:

$$U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{\overline{0}\}.$$

Nota 11. *Sembla que la condició de suma directa seria equivalent a posar $U_i \cap U_j = \{\overline{0}\}$ $j \neq i$, és a dir , quan foren disjunts dos a dos, però no és així.*

Exemple: Si $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} - e.v.$ Suposem $U_1, U_2, U_3 \leq \mathbb{R}^2$, on $U_1 =< (x,0) >, x \in \mathbb{R}$; $U_2 =< (0,y) >, y \in \mathbb{R}$; $U_3 =< (z,z) >, z \in \mathbb{R}$, la suma $U_1 + U_2 + U_3$ no és suma directa encara que podem demostrar que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{\overline{0}\}$.

En efecte, $U_1 \cap (U_2 + U_3) \neq \{\overline{0}\}$, ja que $U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$ i per la qual cosa, $U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_1 \cap \mathbb{R}^2 = U_1$.

13. ESPAI VECTORIAL PRODUCTE

Suposem $V_1, V_2, \ldots, V_n$ siguen n $\mathbb{k} - e.v.$ Considerem el producte cartesià: $W = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$.

Es pot demostrar que W, amb la llei suma i la llei de composició externa que definirem, constitueix una estructura d'espai vectorial.

$+ : W \times W \longrightarrow W \ / \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$

$\circ : \mathbb{k} \times W \longrightarrow W \ / \ \alpha \circ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$

Teorema 8. *$Dim(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n) = \sum_{i=1}^{n} dim(V_i)$.*

Demostració:
Considerem $B_i = \{x_{ij}\}$ $j = 1, 2, \ldots, m_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$ una base de V_i.
Caldrà demostrar que B és base de $W = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$, on

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (x_{11}, 0, 0, \ldots, 0), (x_{12}, 0, 0, \ldots, 0), \ldots, (x_{1m_1}, 0, 0, \ldots, 0), (0, x_{21}, 0, \ldots, 0), (0, x_{22}, 0, \ldots, 0), \ldots, \\ (0, x_{2m_2}, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 0, x_{n1}), (0, 0, 0, \ldots, 0, x_{n2}), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 0, x_{nm_n}) \end{array} \right.$$

i) B és sistema generador.
$\forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} V_i \longrightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ és combinació lineal dels vectors de B.
En efecte, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_{1j}(x_{1j}, 0, 0, \ldots, 0) + \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{2j}(0, x_{2j}, 0, \ldots, 0) + \ldots + \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{nj}(0, 0, \ldots, 0, x_{nj})$.
ii) B és linealment independent.
$\sum_{j=1}^{m_1} \alpha_{1j}(x_{1j}, 0, 0, \ldots, 0) + \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{2j}(0, x_{2j}, 0, \ldots, 0) + \ldots + \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{nj}(0, 0, \ldots, 0, x_{nj}) = (0, 0, 0, \ldots, 0, 0) \longrightarrow \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_{1j}x_{1j} = \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{2j}x_{2j} = \ldots = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{nj}x_{nj} = 0 \longrightarrow \alpha_{ij} = 0 \quad \forall i, j$ (ja que $x_{ij} \neq \overline{0}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ $\forall j$).

14. ESPAI VECTORIAL QUOCIENT

Suposem $V = \mathbb{k} - e.v.$ i $W \leq V$.

Definició 17. *Definim en V la relació $\sim$ tal que $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W \quad \forall x, y \in V$.*

Proposició 5. *La relació $\sim$ és una relació binària d'equivalència.*
Demostració:
i) Reflexiva. $x \sim x \quad \forall x \in V$, *ja què* $x - x = \overline{0} \in W$.
ii) Simètrica. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, *ja què* $x \sim y \longrightarrow x - y \in W \longrightarrow -(x - y) \in W \longrightarrow y - x \in W \longrightarrow y \sim x$.
iii) Transitiva. $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$, *ja què :*

$$\left. \begin{array}{l} x \sim y \longrightarrow x - y \in W \\ y \sim z \longrightarrow y - z \in W \end{array} \right\} \longrightarrow x - z \in W \longrightarrow x \sim z.$$

Així es creen les classes d'equivalència generades per un element:
$[x] = \{y \in V \ / \ y \sim x\} = \{y \in V \ / \ y - x \in W\} = \{y \in V \ / \ y = x + W\} = x + W$.
Al conjunt de les classes d'equivalència s'anomena conjunt quocient i se representa per V/W.

Proposició 6. *El conjunt quocient amb les lleis que a continuació definirem és un espai vectorial anomenat espai vectorial quocient.*

Demostració:

Definim $+ : V/W \times V/W \longrightarrow V/W$ tal que $(x+W)+(y+W)=(x+y)+W$. És a dir, $([x]+[y]=[x+y])$.

Definim $\circ : \Bbbk \times V/W \longrightarrow V/W$ tal que $k\circ(x+W)=kx+W$. És a dir, $k\,[x]=[kx]$.

Caldrà demostrar que $(V/W,+)$ és un grup abelià i que la llei de composició externa $\circ$ complisca els axiomes d'espai vectorial.

$(V/W,+)$ és un grup abelià, ja què:

1) La llei $+$ està ben definida ja que és independent del representant elegit. És a dir, si

$[x]=[x'] \wedge [y]=[y'] \Rightarrow [x]+[y]=[x']+[y']$

$[x]=[x'] \longrightarrow x \sim x' \longrightarrow x-x' \in W.$

$[y]=[y'] \longrightarrow y \sim y' \longrightarrow y-y' \in W.$

En sumar queda:

$(x-x')+(y-y') \in W \longrightarrow (x+y)-(x'+y') \in W \longrightarrow (x+y) \sim (x'+y') \longrightarrow [x+y]=[x'+y'] \longrightarrow [x]+[y]=[x']+[y']$.

2) Associativa. $([x]+[y])+[z]=[x]+([y]+[z])$.

$([x]+[y])+[z]=[x+y]+[z]=[(x+y)+z]=[x+(y+z)]=[x]+[y+z]=[x]+([y]+[z])$.

3) Neutre. $[x]+[e]=[x] \wedge [e]+[x]=[x]$.

$[x]+[e]=[x+e]=[x] \longrightarrow x+e=x \longrightarrow e=\overline{0} \in W.$

4) Simètric. $[x]+[x']=[x']+[x']=[0]$.

$[x]+[x']=[x+x']=[0] \longrightarrow x+x'=0 \longrightarrow x'=-x' \longrightarrow [x']=[-x']$.

5)Commutatiu. $[x]+[y]=[y]+[x]$.

$[x]+[y]=[x+y]=[y+x]=[y]+[x]$.

La llei externa està ben definida ja que és independent del representan elegit. És a dir, si

$x+W=y+W \longrightarrow kx+W=ky+W.$

$x+W=y+W \longrightarrow k\circ(x+W)=k\circ(y+W) \longrightarrow kx+W=ky+W.$

A-1. *Propietat distributiva respecte als escalars.*

$(k_1+k_2)\circ[x]=k_1\circ[x]+k_2\circ[x] \quad \forall k_1,k_2 \in \Bbbk \quad \forall\,[x] \in V/W.$

$(k_1+k_2)\circ[x]=(k_1+k_2)\circ(x+W)=(k_1+k_2)x+W=(k_1x+k_2x)+W=(k_1x+W)+(k_2x+W)=k_1\circ(x+W)+k_2\circ(x+W)=k_1\circ[x]+k_2\circ[x]$

A-2. *Propietat associativa.*

$(k_1k_2)\circ[x]=k_1(k_2\circ[x]) \quad \forall k_1,k_2 \in \Bbbk \quad \forall\,[x] \in V/W.$

$(k_1k_2)\circ[x]=(k_1k_2)\circ(x+W)=(k_1k_2)x+W=k_1(k_2x)+W=k_1(k_2x+W)=k_1(k_2\circ(x+W))=k_1(k_2\circ[x])$.

A-3. *Propietat distributiva respecte als vectors.*

$k\circ([x]+[y])=k\circ[x]+k\circ[y] \quad \forall k \in \Bbbk \quad \forall\,[x],[y] \in V/W.$

$k \circ ([x] + [y]) = k \circ ((x + W) + (y + W)) = k \circ ((x + y) + W)) = k(x + y) + W = (kx + ky) + W = (kx + W) + (ky + W) = k \circ (x + W) + k \circ (y + W) = k \circ [x] + k \circ [y]$.

A-4. *Propietat de tenir element neutre.*

$1_{\mathbb{k}} \circ [x] = [x]$.

$1_{\mathbb{k}} \circ [x] = 1_{\mathbb{k}} \circ (x + W) = 1_{\mathbb{k}} x + W = x + W = [x]$.

Teorema 9. *Si $V = \mathbb{k} -$ e.v. és de tipus finit. Si $W \leq V \Rightarrow$ i) V/W és de tipus finit. ii) $dim(V/W) = dim(V) - dim(W)$.*

Demostració:

i) Si $V = \mathbb{k} -$ e.v. és de tipus finit, aleshores suposem $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un sistema generador de V, és a dir, $\forall v \in V \longrightarrow v = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n \longrightarrow [v] = [k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n] = [k_1u_1] + [k_2u_2] + \ldots + [k_nu_n] = k_1 [u_1] + k_2 [u_2] + \ldots + k_n [u_n]$.

Com que $[v] \in V/W \longrightarrow \{[u_1], [u_2], \ldots, [u_n]\}$ és un sistema generador de V/W i per la qual cosa V/W és de tipus finit.

ii) Suposem ara que $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ és una base de W.

Pel teorema de la base incompleta, siga $\{w_1, w_2, \ldots, w_r, v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ una base de V.

Caldrà demostrar que $\{[v_1], [v_2], \ldots, [v_t]\}$ és una base de V/W, ja que si ho fóra, $dim(V/W) = t$, $dim(W) = r$, $dim(V) = r + t$ i quedaria $dim(V/W) = dim(V) - dim(W)$.

a) $\{[v_1], [v_2], \ldots, [v_t]\}$ és un sistema generador de V/W

Si $\{w_1, w_2, \ldots, w_r, v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ és una base de $V \longrightarrow \forall v \in V$, $v = k_1w_1 + k_2w_2 + \ldots + k_rw_r + k'_1v_1 + k'_2v + \ldots + k'_tv_t \longrightarrow [v] = k_1 [w_1] + k_2 [w_2] + \ldots + k_r [w_r] + k'_1 [v_1] + k'_2 [v_2] + \ldots + k'_t [v_t]$ (1).

Però $[w_i] = \overline{0} \quad \forall i$ ja que $[w_i] = w_i + W = W \quad$ (ja que $w_i \in W \quad \forall i$).

Substituint en (1), $\quad [v] = k'_1 [v_1] + k'_2 [v_2] + \ldots + k'_t [v_t]$, com volíem demostrar.

b) $\{[v_1], [v_2], \ldots, [v_t]\}$ és lliure.

Si $k'_1 [v_1] + k'_2 [v_2] + \ldots + k'_t [v_t] \Rightarrow k'_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, t$

Si $k'_1 [v_1] + k'_2 [v_2] + \ldots + k'_t [v_t] \longrightarrow [k'_1v_1 + k'_2v_2 + \ldots + k'_tv_t] = \overline{0} \longrightarrow k'_1v_1 + k'_2v_2 + \ldots + k'_tv_t \in W$.

Com que $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ és una base de W, qualsevol vector de W es pot posar com a combinació lineal dels vectors de la base. En particular, el vector $k'_1v_1 + k'_2v_2 + \ldots + k'_tv_t = k_1w_1 + k_2w_2 + \ldots + k_rw_r \longrightarrow k'_1v_1 + k'_2v_2 + \ldots + k'_tv_t - k_1w_1 - k_2w_2 - \ldots - k_rw_r = \overline{0} \underset{\{w_1,\ldots,w_r,v_1,\ldots,v_t\} \text{base de } V}{\longrightarrow} k'_j = 0 \quad \forall j \quad k_i = 0 \quad \forall i$.

Exercici 4. *1. Si $V = \mathbb{k} -$ e.v. / $dim(V) = 3$. $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V. Si $W \leq V$ tals que $W = < u_1, u_2 >$ / $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = e_1 + e_2$. Trobeu una base de V/W.*

Solució:

Els vectors de l'espai quocient són aquells que no siguen nuls i que no siguen del subespai W.

$W =< u_1, u_2 > \longrightarrow (x, y, z) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1(e_1 - e_2) + \alpha_2(e_1 + e_2) = \alpha_1(1, -1, 0) + \alpha_2(1, 1, 0) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2, 0)$.

Identificant: $x = \alpha_1 + \alpha_2, \quad y = -\alpha_1 + \alpha_2, \quad z = 0$.

En resoldre el sistema, obtenim que $\alpha_1 = \dfrac{x-y}{2} \quad \alpha_2 = \dfrac{x+y}{2}$.

Per la qual cosa, $(x, y, z) = (\dfrac{x-y}{2} + \dfrac{x+y}{2}, -\dfrac{x-y}{2} + \dfrac{x+y}{2}, 0) = (x, y, 0)$.

El vector $(0, 0, 1)$ *és un vector diferent del nul i que no pertany a W.*

Una base de V/W *és* $B' = \{[(0, 0, 1)]\}$.

2. *Si* $V = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} - e.v.$ *Si* $W =< (1, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2) >$. *Trobeu una base de* $\mathbb{R}^4/W$.

Solució:

Els vectors de l'espai quocient són aquells que no siguen nuls i que no siguen del subespai W.

$$\begin{array}{cccc} (1,0,1,1) & (1,0,1,1) & (1,0,1,1) & (1,0,1,1) \\ (1,2,1,1) & (1,2,1,1) & (0,2,0,0) & (0,1,0,0) \\ (2,2,2,2) & (1,1,1,1) & (0,1,0,0) & (0,0,0,0) \end{array}$$

$W =< (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0) >$, $dim(W) = 2$, *aleshores* $dim(\mathbb{R}^4/W) = 2$.

$W =< (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0) > \longrightarrow (x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(0, 1, 0, 0) = (\alpha, \beta, \alpha, \alpha) = (x, y, x, x)$.

Una base de $\mathbb{R}^4/W$ *seria la formada pel sistema* $B' = \{[(1, 0, 0, 0)], [(0, 1, 0, 1)]\}$, *ja que els quatre vectors* $(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)$ *són linealment independents i* $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)$ *no són de W.*

En definitiva, trobar una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/W$ *és trobar un subespai vectorial suplementati al W.*

En aquest cas el subespai vectorial suplementati al W seria el generat pels vectors $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)$.

15. APLICACIÓ LINEAL.

Suposem V_1, V_2 dos $\Bbbk - e.v.$ Suposem $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació.

Definició 18. *1. f* ***és aplicació lineal*** *o* ***homomorfisme*** *de* V_1 *en* V_2 *si es verifiquen les dues condicions:*

i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$.
ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall \alpha \in \Bbbk \quad \forall v \in V_1$.

2. f ***és aplicació lineal o homomorfisme*** *de* V_1 *en* V_2 *si es verifica la condició:*

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k} \quad \forall v_1, v_2 \in V_1.$$

Nota 12. *Òbviament tot homomorfisme entre espais vectorial és un homomorfisme de grups ja que* $(V_1, +), (V_2, +)$ *són dos grups. Per la qual cosa:*
$f(\overline{0}) = \overline{0}$, $f(-v) = -f(v)$ $\forall v \in V_1$.

Proposició 7. *Definició 1* $\Leftrightarrow$ *Definició 2.*

Demostració:
$\rightarrow)$ $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(v_1' + v_2') = f(v_1') + f(v_2') = f(\alpha_1 v_1) + f(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$.
$\leftarrow)$ $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$ $\forall v_1, v_2 \in V_1$. En particular $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, obtenim $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.
En particular $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$, $v_1 = v$, obtenim $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

Exercici 5. *Si* $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{R}^3$ *són* $\mathbb{R} - e.v.$ *i* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y) = (x - 2y, 3x, -x + y)$. *Demostreu que* f *és lineal.*

Solució:
$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.
$v_1 \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow v_1 = (x, y)$.
$v_2 \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow v_2 = (x', y')$.
$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1(x,y) + \alpha_2(x',y')) = f((\alpha_1 x + \alpha_2 x', \alpha_1 y + \alpha_2 y')) =$
$((\alpha_1 x + \alpha_2 x') - 2(\alpha_1 y + \alpha_2 y'), 3(\alpha_1 x + \alpha_2 x'), -(\alpha_1 x + \alpha_2 x') + \alpha_1 y + \alpha_2 y') =$
$(\alpha_1 x - 2\alpha_1 y + \alpha_2 x' - 2\alpha_2 y', 3\alpha_1 x + 3\alpha_2 x', -\alpha_1 x + \alpha_1 y - \alpha_2 x' + \alpha_2 y') =$
$(\alpha_1(x - 2y) + \alpha_2(x' - 2y'), 3\alpha_1 x + 3\alpha_2 x', \alpha_1(-x + y) + \alpha_2(-x' + y')) =$
$(\alpha_1(x - 2y), 3\alpha_1 x, \alpha_1(-x + y)) + (\alpha_2(x' - 2y'), 3\alpha_2 x', \alpha_2(-x' + y')) =$
$\alpha_1(x - 2y, 3x, -x + y) + \alpha_2(x' - 2y', 3x', -x' + y') = \alpha_1 f(x,y) + \alpha_2 f(x',y') =$
$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$.

Teorema 10. *Suposem* $f : V_1 \longrightarrow V_2$ *un homomorfisme, aleshores:*
i) Si $W_1 \leq V_1 \Rightarrow f(W_1) \leq V_2$.
ii) Si $W_2 \leq V_2 \Rightarrow f^{-1}(W_2) \leq V_1$.

16. CLASSIFICACIÓ.

Suposem $f : V_1 \longrightarrow V_2$ un homomorfisme.

1. *Monomorfisme* si, i sols si f és injectiva.
2. *Epimorfisme* si, i sols si f és suprajectiva.
3. *Isomorfisme* si, i sols si f és bijectiva.
4. *Endomorfisme* si, i sols si $V_1 = V_2$.
5. *Automorfisme* si, i sols si $V_1 = V_2$ i f és bijectiva (endomorfisme bijectiu).

17. NUCLI D'UN HOMOMORFISME.

Suposem $f : V_1 \longrightarrow V_2$ un homomorfisme.

Definició 19. *Anomenem* **nucli de** f *el conjunt dels vectors, la imatge del qual ens dóna el vector nul. És a dir,* $Ker(f) = \{v_1 / \ v_1 \in V_1 \ / \ f(v_1) = \overline{0}\}$.

Proposició 8. $Ker(f) \leq V_1$.

Demostració:
$\alpha u + \beta v \in Ker(f) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall u, v \in Ker(f)$.
$u \in Ker(f) \longrightarrow f(u) = \overline{0}$.
$v \in Ker(f) \longrightarrow f(v) = \overline{0}$.
$f(\alpha u + \beta v) \underset{f \ lineal}{=} \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha \overline{0} + \beta \overline{0} = \overline{0} \longrightarrow \alpha u + \beta v \in Ker(f)$.

18. IMATGE D'UN HOMOMORFISME.

Suposem $f : V_1 \longrightarrow V_2$ un homomorfisme.

Definició 20. *Anomenem* **Imatge de** f, *el conjunt de vectors del segon espai vectorial que tenen antiimatge. És a dir,*
$\mathrm{Im}(f) = \{v_2 \ / \ v_2 \in V_2 \ / \ \exists v_1 \in V_1 \ / \ f(v_1) = v_2\}$.

Proposició 9. $\mathrm{Im}(f) \leq V_2$.

Definició 21. *Anomenem* **rang de** f, *la dimensió del subespai imatge. És a dir,*
$rang(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Exercici 6. *Suposem* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \ / \ f((x, y, z)) = (x + y, 0, x + y + z, 0)$.
i) Trobeu $Ker(f)$ *ii) Trobeu* $Im(f)$.

$Ker(f) = \{(x, y, z) \ / \ f((x, y, z)) = (0, 0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \ / \ z = 0, x = -y\} = \{(-y, y, 0)\} = \{y(-1, 1, 0)\}$.
$dim(Ker(f)) = 1$, $Base = \{(-1, 1, 0)\}$.
$Im(f) = \{(x', y', z', t') \ / \ f((x, y, z)) = (x', y', z', t')\} = \{ \ (x + y, 0, x + y + z, 0) = (x', y', z', t')\} =$
$\{(x + y, 0, x + y + z, 0)\} = \{x(1, 0, 1, 0) + y(1, 0, 1, 0) + z(0, 0, 1, 0)\}$.
$dim(Im(f)) = 2$, $Base = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0)\}$.

Exercici 7. *Trobeu* $Ker(f)$ *i* $Im(f)$ *de l'exercici 5.*

Proposició 10. *Suposem* $f : V_1 \longrightarrow V_2$ *un homomorfisme.*
i) f *epimorfisme si, i sols si,* $Im(f) = f(V_1) = V_2$.
$\longleftrightarrow)$ $\mathrm{Im}(f) = \{v_2 \ / \ v_2 \in V_2 \ / \ \exists v_1 \in V_1 \ / \ f(v_1) = v_2\}$.
En ser f *suprajectiva,* $\forall v_2 \ / \ v_2 \in V_2 \ / \ \exists v_1 \in V_1 \ / \ f(v_1) = v_2$, *és a dir,* $f(V_1) = V_2$.
i) f *monomorfisme si, i sols si,* $Ker(f) = \overline{0}$.
$\longrightarrow)$ $Ker(f) = \{v_1 / \ v_1 \in V_1 \ / \ f(v_1) = \overline{0}\} = \{v_1 / \ v_1 \in V_1 \ / \ f(v_1) = \overline{0} = f(\overline{0})\}$.

Com que f és injectiva, si $f(v_1) = \overline{0} = f(\overline{0}) \longrightarrow v_1 = \overline{0}$.
Aleshores, en ser $v_1 = \overline{0} \longrightarrow Ker(f) = \overline{0}$.
$\leftarrow$) *Suposem $Ker(f) = \overline{0}$. Si $f(x) = f(y) \longrightarrow f(x) - f(y) = \overline{0} \underset{f\ lineal}{\longrightarrow} f(x-y) = \overline{0} \longrightarrow x - y \in Ker(f) = \overline{0} \longrightarrow x = y \longrightarrow f$ és injectiva.*

19. PRIMER TEOREMA D'ISOMORFIA.

Donat $f : V_1 \longrightarrow V_2$ un homomorfisme.

$$\left.\begin{array}{lcc} \text{Definim } \tilde{f} : V_1/Ker(f) & \longrightarrow & Im(f) \\ \qquad [v] & \rightsquigarrow & \tilde{f}([v]) = f(v) \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{f} \text{ és un isomorfisme.}$$

Demostració:

i) $\tilde{f}$ està ben definida, ja que si $[v] = [v'] \longrightarrow \tilde{f}([v]) = \tilde{f}([v'])$.

En efecte, si $[v] = [v'] \longrightarrow v \sim v' \longrightarrow v - v' \in Ker(f) \longrightarrow f(v - v') = \overline{0} \longrightarrow f(v) = f(v') \longrightarrow \tilde{f}([v]) = \tilde{f}([v'])$.

ii) $\tilde{f}$ és lineal.

$\tilde{f}([\alpha u + \beta v]) = \alpha\tilde{f}([u]) + \beta\tilde{f}([v]) \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall [u], [v] \in V_1/Ker(f)$.

$\tilde{f}([\alpha u + \beta v]) = f(\alpha u + \beta v) \underset{f\ lineal}{=} \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha\tilde{f}([u]) + \beta\tilde{f}([v])$.

iii) $\tilde{f}$ és injectiva.

Si $\tilde{f}([u]) = \tilde{f}([v]) \longrightarrow [u] = [v]$.

$\tilde{f}([u]) = \tilde{f}([v]) \longrightarrow f(u) = f(v) \longrightarrow f(u) - f(v) = \overline{0} \longrightarrow f(u-v) = \overline{0} \longrightarrow u - v \in Ker(f) \longrightarrow u = v + Ker(f) \longrightarrow u + Ker(f) = v + Ker(f) \longrightarrow [u] = [v]$.

iv) $\tilde{f}$ és suprajectiva.

$\forall y \in Im(f) \quad \exists\, [x] \in V_1/Ker(f)$ tal que $\tilde{f}([x]) = y$.

Si $\tilde{f}([x]) = y \longrightarrow f(x) = y$.

Com que $y \in Im(f)\ \forall y \longrightarrow \exists x\ /\ f(x) = y$.

És suficient agafar $[x]$,ja que $x \in [x]\ \forall x$ i obtindrem:

$\forall y \in Im(f) \longrightarrow \exists x\ /\ f(x) = y \longrightarrow \exists\, [x] \in V_1/Ker(f)$ tal que $f(x) = \tilde{f}([x]) = y$.

Lema 2. *Suposem $f : V_1 \longrightarrow V_2$ un monomorfisme.*
Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ és lliure en $V_1 \Rightarrow \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_t)\}$ és lliure en V_2.
Demostració:
Si $\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_t f(u_t) = \overline{0} \longrightarrow \alpha_i = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, t$ (tesi).

$\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_t f(u_t) = \overline{0} \underset{f\ lineal}{\longrightarrow} f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_t u_t) = \overline{0} \longrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_t u_t \in \ker(f) = \{\overline{0}\} \longrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_t u_t = \overline{0} \underset{\{u_1, u_2, \ldots, u_t\} = L.I.}{\longrightarrow} \alpha_i = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, t$.

Teorema 11. *Si V_1, V_2 són dos $\mathbb{k}-$e.v. de tipus finit:*

$$dim(V_1) = dim(V_2) \Leftrightarrow \exists f : V_1 \longrightarrow V_2 \ / \ f \text{ és isomorfisme.}$$

Demostració:

$\rightarrow)$
Suposem $dim(V_1) = dim(V_2)$.
Suposem $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de V_1.
Suposem $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V_2.
Definim $f : V_1 \longrightarrow V_2 \ / \ f(u_i) = v_i$.

i) f està ben definida ja que actua sobre vectors de les bases i aquests estan unívocament determinats.

Si aprofundim més sobre aquesta definició, veurem que a un vector del primer espai li correspon un altre vector del segon espai, però que tinga les mateixes coordenades, ja que si $u \in V_1 \longrightarrow u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \longrightarrow f(u) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.

ii) f és lineal.
$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall u, v \in V_1$.
$u \in V_1 \longrightarrow u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \longrightarrow f(u) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.
$v \in V_1 \longrightarrow v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n \longrightarrow f(v) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$.
$f(\alpha u + \beta v) = f((\alpha(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) + \beta(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n)) = f((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)u_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)u_n) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n = (\alpha\alpha_1)v_1 + (\alpha\alpha_2)v_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n)v_n + (\beta\beta_1)v_1 + (\beta\beta_2)v_2 + \ldots + (\beta\beta_n)v_n = \alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

iii) f és injectiva.
Si $f(u) = f(v) \longrightarrow u = v \quad \forall u, v \in V_1$.
$f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.
$f(v) = f(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$.
Per hipòtesi, $f(u) = f(v) \longrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n \longrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = \overline{0} \longrightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \longrightarrow u = v$.

iv) f és suprajectiva.
$\forall v' \in V_2 \ \exists v \in V_1 \ / \ f(v) = v'$.
$v' \in V_2 \longrightarrow v' = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \underset{f(u_i)=v_i}{=} \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_n f(u_n) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n) = f(v)$, amb $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$.

$\leftarrow)$
Suposem $V_1 \simeq V_2$. Cal demostrar que $dim(V_1) = dim(V_2)$.
Si $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de $V_1 \underset{Lema}{\longrightarrow} \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ és lliure.
Però $\forall v \in V_1 \longrightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \longrightarrow f(v) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_n f(u_n) \underset{f(V_1)=V_2}{\longrightarrow} \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ és generador.

Aleshores $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ és base de V_2. Per la qual cosa $dim(V_2) = n = dim(V_1)$.

Observació:

Pel primer teorema d'isomorfia i per aquest teorema, tindrem:

$V_1/Ker(f) \simeq Im(f) \longrightarrow dim(V_1/Ker(f)) = dim(Im(f)) \longrightarrow dim(V_1) - dim(Ker(f)) = dim(Im(f)) \longrightarrow dim(V_1) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$.

20. EXISTÈNCIA I UNICITAT DE LES APLICACIONS LINEALS: TEOREMA.

Teorema 12. *Suposem V, V' dos $\Bbbk - e.v.$ / $dim(V) = n$.*

Suposem $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de V.

Suposem $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un sistema de vectors de V'.

$\Rightarrow \exists!\ f : V \longrightarrow V'$ *lineal* / $f(u_i) = w_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Si a més a més, S és un sistema lliure, aleshores f és monomorfisme.

Demostració:

Definim $f : V \longrightarrow V'$

$\forall v \in V,\ v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \rightsquigarrow f(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n$.

i) f està ben definida ja que en ser $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de V, les coordenades $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ són úniques.

ii) $f(u_i) = f(0u_1 + 0u_2 + \ldots + 1u_i + \ldots + 0u_n) = 0w_1 + 0w_2 + \ldots + 1w_i + \ldots + 0w_n = w_i$.

iii) f és lineal.

$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \Bbbk \quad \forall u, v \in V$.

$u \in V \longrightarrow u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \longrightarrow f(u) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n$.

$v \in V \longrightarrow v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n \longrightarrow f(v) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n$.

$f(\alpha u + \beta v) = f((\alpha(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) + \beta(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n)) = f((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)u_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)u_n) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)w_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)w_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)w_n = (\alpha\alpha_1)w_1 + (\alpha\alpha_2)w_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n)w_n + (\beta\beta_1)w_1 + (\beta\beta_2)w_2 + \ldots + (\beta\beta_n)w_n = \alpha(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

iv) Unicitat.

Suposem $\exists g : V \longrightarrow V'$ lineal / $g(u_i) = w_i$. Cal demostrar que $f = g$.

$\forall u \in V \longrightarrow f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n = \alpha_1 g(u_1) + \alpha_2 g(u_2) + \ldots + \alpha_n g(u_n) = g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) = g(u)$.

A més a més, si $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ és un sistema lliure$\longrightarrow \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n = \overline{0} \Rightarrow \mu_i = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Si $f(u) = f(v) \longrightarrow f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) = f(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n) = f(v) \longrightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n \longrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)w_1 + (\alpha_2 - \beta_2)w_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)w_n = \overline{0} \longrightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \forall i \longrightarrow u = v$.

Exercici 8. *Suposem $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ dos $\mathbb{R} - e.v.$*

Suposem $B = \{(2,1,0), (1,2,0), (1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Suposem $S = \{(1,2),(2,0),(1,1)\}$ *un sistema de vectors de* $\mathbb{R}^2$.
Definim $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ /
$f(2,1,0) = (1,2),\ f(1,2,0) = (2,0),\ f(1,1,1) = (1,1)$.
i) Demostreu que f *és lineal. ii) Trobeu* $ker(f)$. *iii) Trobeu* $Im(f)$.

Solució:
i) $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$.
$f(\alpha u+\beta v) = f\left(\alpha(\alpha_1(2,1,0) + \alpha_2(1,2,0) + \alpha_3(1,1,1)) + \beta(\beta_1(2,1,0) + \beta_2(1,2,0) + \beta_3(1,1,1))\right)$
$= f\left((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)(2,1,0) + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)(1,2,0) + (\alpha\alpha_3 + \beta\beta_3)(1,1,1)\right) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)(1,2) + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)(2,0) + (\alpha\alpha_3 + \beta\beta_3)(1,1)$.
$\alpha f(u)+\beta f(v) = \alpha f(\alpha_1(2,1,0)+\alpha_2(1,2,0)+\alpha_3(1,1,1))+\beta f(\beta_1(2,1,0)+\beta_2(1,2,0)+\beta_3(1,1,1)) = \alpha(\alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,0) + \alpha_3(1,1)) + \beta(\beta_1(1,2) + \beta_2(2,0) + \beta_3(1,1)) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)(1,2) + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)(2,0) + (\alpha\alpha_3 + \beta\beta_3)(1,1)$.
També:
$\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (x,y,z) = \alpha_1(2,1,0) + \alpha_2(1,2,0) + \alpha_3(1,1,1)$.

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ y = & \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ z = & \alpha_3 \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha_1 = \frac{2x-y-z}{3} \quad \alpha_2 = \frac{-x+2y-z}{3} \quad \alpha_3 = z.$$

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2x-y-z}{3}\right)(1,2)+\left(\frac{-x+2y-z}{3}\right)(2,0)+z(1,1) = \left(y, \frac{4x-2y+z}{3}\right).$$

$f(\alpha u + \beta v) = f\left(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')\right) = f\left((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')\right) = \left(\alpha y + \beta y', \frac{4(\alpha x+\beta x')-2(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')}{3}\right) = \left(\alpha y + \beta y', \frac{4\alpha x+4\beta x'-2\alpha y-2\beta y'+\alpha z+\beta z'}{3}\right) = \left(\alpha y + \beta y', \frac{\alpha(4x-2y+z)+\beta(4x'-2y'+z')}{3}\right) = \alpha\left(y, \frac{4x-2y+z}{3}\right)+\beta\left(y', \frac{4x'-2y'+z'}{3}\right) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z') = af(u) + \beta f(v)$.

ii) $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0, \frac{4x-2y+z}{3} = 0\right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0,\ z = -4x\} = \{(x,0,-4x)\} = x(1,0,-4)$.
$dim(ker(f)) = 1$. $Base = \{(1,0,-4)\}$.
iii) $Im(f) = \left\{\left(y, \frac{4x-2y+z}{3}\right)\right\} = x(0,\frac{4}{3}) + y(1,\frac{-2}{3}) + z(0,\frac{1}{3})$.
$dim(Im(f)) = 2$, ja que el primer vector és combinació lineal del'últim.
$Base = \{(3,-2),(0,1)\}$.

21. L'ESPAI VECTORIAL DE LES APLICACIONS LINEALS

Considerem el conjunt de les aplicacions lineals de V en V'. És a dir, $\mathcal{L}(V,V') = \{f_i \ / \ f_i : V \longrightarrow V' \ \ f_i$ aplicacions lineals $i = 1,2,\ldots,n\}$.

Proposició 11. $\mathcal{L}(V,V') = \mathbb{k} - e.v.$

Demostració:
i) $(\mathcal{L}(V,V'),+)$ és un grup abelià.

$$\begin{array}{lcl} \text{Definim} + : \pounds(V,V') \times \pounds(V,V') & \longrightarrow & \pounds(V,V') \\ (f,g) & \rightsquigarrow & f+g=h \end{array}$$
$h(v) = (f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall v \in V.$

1. $+$ és una llei de composició interna ja que és suma de duss aplicacions i per la qual cosa és també una aplicació. Falta veure que és lineal, és a dir:
   $(f+g)(\alpha u + \beta v) = \alpha(f+g)(u) + \beta(f+g)(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall f, g \in \pounds(V, V')$.
   $(f+g)(\alpha u+\beta v) = f(\alpha u+\beta v)+g(\alpha u+\beta v) = (\alpha f(u) + \beta f(v))+(\alpha g(u) + \beta g(v)) = \alpha\left(f(u+g(u)\right) + \beta\left(f(v) + g(v)\right) = \alpha(f+g)(u) + \beta(f+g)(v)$.
2. Associativa. $(f+g)+h = f+(g+h)$.
   $((f+g)+h)(u) = (f+g)(u)+h(u) = (f(u)+g(u))+h(u) = f(u)+(g(u)+h(u)) = f(u) + ((g+h)(u)) = (f+(g+h))(u)$.
3. Neutre. $f+e = e+f = f$.
   $(f+e)(u) = f(u)+e(u) = f(u) \longrightarrow e(u) = 0$.
   El element neutre resulta ser l'aplicació nula. És a dir, $0 : V \longrightarrow V' \;/\; 0(u) = \overline{0}$ $\forall u \in V$.
4. Simètric. $f + f' = f' + f = 0$.
   $(f+f')(u) = f(u) + f'(u) = 0(u) \longrightarrow f'(u) = -f(u) \; \forall u \longrightarrow f' = -f$.
5. Commutativa. $f+g = g+f$.
   $(f+g)(u) = f(u)+g(u) = g(u)+f(u) = (g+f)(u)$.

Definim la llei de composició externa:
$$\begin{array}{lcl} \circ : \mathbb{k} \times \pounds(V,V') & \longrightarrow & \pounds(V,V') \\ (\alpha, f) & \rightsquigarrow & \alpha \circ f \end{array}$$
$(\alpha \circ f)(u) = \alpha f(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{k} \quad \forall f \in \pounds(V,V')$.

1. La llei $\circ$ és externa ja que en multiplicar un escalar per una aplicació ens dóna una aplicació.
2. A-1. $(k_1+k_2)\circ f = (k_1 \circ f) + (k_2 \circ f)$. $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{k} \quad \forall f \in \pounds(V,V')$.
   $((k_1+k_2)\circ f)(u) = (k_1+k_2)f(u) = k_1 f(u)+k_2 f(u) = (k_1 \circ f)(u)+(k_2 \circ f)(u) = ((k_1 \circ f)+(k_2 \circ f))(u)$.
3. A-2. $(k_1 k_2)\circ f = k_1(k_2 \circ f)$. $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{k} \quad \forall f \in \pounds(V,V')$.
   $((k_1k_2)\circ f)(u) = (k_1k_2)f(u) = k_1(k_2 f(u)) = k_1((k_2 \circ f)(u)) = (k_1(k_2 \circ f))(u)$.
4. A-3. $k \circ (f+g) = (k \circ f) + (k \circ g)$.
   $(k \circ (f+g))(u) = k(f+g)(u) = k(f(u)+g(u)) = kf(u)+kg(u) = (k\circ f)(u) + (k \circ g)(u) = ((k \circ f) + (k \circ g))(u)$.

5. A-4. $1_{\mathbb{k}} \circ f = f$.
$(1_{\mathbb{k}} \circ f)(u) = 1_{\mathbb{k}} f(u) = f(u)$. on $1_{\mathbb{k}}$ és el element neutre de $\mathbb{k}$ respecte al producte. $\forall f \in \pounds(V, V')$.

Proposició 12. *$Dim(\pounds(V,V')) = dim(V) \times dim(V')$.*
La demostració en el tema 9.

22. SEGON TEOREMA D'ISOMORFIA.

Si $V = \mathbb{k} - e.v. \wedge U, W \leq V \Longrightarrow \dfrac{W+U}{U} \simeq \dfrac{W}{W \cap U}$

Demostració: Definim una aplicació f :

$$f : \frac{W+U}{U} \longrightarrow \frac{W}{W \cap U}$$
$$[w] = w + U \quad \rightsquigarrow \quad f(w+U) = w + (W \cap U)$$

Caldrà demostrar que f està ben definida, que és lineal i bijectiva. (Exercici).

23. TERCER TEOREMA D'ISOMORFIA.

Si $V = \mathbb{k} - e.v. \wedge U, W \leq V \Longrightarrow \dfrac{\frac{V}{U}}{\frac{W}{U}} \simeq \dfrac{V}{W}$

Demostració: Definim una aplicació f :

$$f : \frac{\frac{V}{U}}{\frac{W}{U}} \longrightarrow \frac{V}{W}$$
$$(v+U) + \tfrac{W}{U} \quad \rightsquigarrow \quad f\left((v+U) + \tfrac{W}{U}\right) = v + W.$$

Caldrà demostrar que f està ben definida, que és lineal i bijectiva. (Exercici).

Nota 13. *1. Pel segon teorema d'isomorfia, $\frac{W+U}{U} \simeq \frac{W}{W \cap U} \longrightarrow dim(\frac{W+U}{U}) = dim(\frac{W}{W \cap U}) \longrightarrow dim(W+U) - dim(U) = dim(W) - dim(W \cap U) \longrightarrow dim(W+U) = dim(U) + dim(W) - dim(W \cap U)$.*

2. Pel tercer teorema d'isomorfia, $\frac{\frac{V}{U}}{\frac{W}{U}} \simeq \frac{V}{W} \longrightarrow dim(\frac{\frac{V}{U}}{\frac{W}{U}}) = dim(\frac{V}{W}) \longrightarrow dim(\frac{V}{U}) - dim(\frac{W}{U}) = dim(\frac{V}{W})$.

24. ESPAI DUAL.

Suposem $V = \mathbb{k} - e.v.$

Definició 22. *Definim **forma lineal** en V tota aplicació $f : V \longrightarrow \mathbb{k}$ / f és lineal. És a dir, que les formes lineals són les aplicacions lineals de V sobre el propi cos.*

Exercici 9. *Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ / $f((x,y,z)) = 3x - 2y + 5z$.*
Demostreu que f és una forma lineal.

Proposició 13. *1. Si $f : V \longrightarrow \Bbbk$ és una forma lineal no nul·la $\Rightarrow f$ és un epimorfisme.*

Demostració:

Suposem $f : V \longrightarrow \Bbbk$ és una forma lineal no nul·la$\longrightarrow \exists v_0 \in V \ / \ f(v_0) \neq 0$.

Cal demostrar que f és suprajectiva, és a dir:

$\forall k \in \Bbbk \ \ \exists v \in V \ / \ f(v) = V.$

És suficient agafar $v = \dfrac{k}{f(v_0)} \cdot v_0$, ja que $f(v) = \dfrac{k}{f(v_0)} \cdot f(v_0) = k$.

En particular, si $1_{\Bbbk}$ és l'element unitari (neutre) de $\Bbbk$ respecte al producte, aleshores $\exists v_1 \in V \ / \ f(v_1) = 1_{\Bbbk}$, sempre que $f \neq 0$.

2. $\begin{array}{l} \text{Si } f : V \longrightarrow \Bbbk \quad \text{és una forma lineal no nul.la} \\ \wedge \quad dim(V) = n \end{array} \Rightarrow dim(ker(f)) = n - 1.$

Demostració: Sabem que $dim(V) = dim(ker(f)) + dim(Im(f)) \underset{f \ supraj.}{=} dim(ker(f)) + 1 \longrightarrow dim(ker(f)) = n - 1$.

Definició 23. *Suposem $V = \Bbbk - e.v.$*

*Definim **dual de** V, i ho representem per V^*, el conjunt de les formes lineals de V en $\Bbbk$.*

És a dir, $V^* = \pounds(V, \Bbbk) = \{f \ / \ f : V \longrightarrow \Bbbk \ / \ f \text{ és forma lineal}\}$.

Proposició 14. *$V^* = \Bbbk - e.v.$, anomenat **espai dual.***

Les lleis $+$ i $\circ$ són les mateixes que hem vist en estudiar la pregunta 7.

Proposició 15. *$V \simeq V^*$.*

En efecte, com que $dim(V^*) = dim(\pounds(V, \Bbbk)) = dim(V) \cdot dim(\Bbbk) = dim(V) \longrightarrow V \simeq V^*$.

24.1. Base dual. Suposem $V = \Bbbk - e.v.$ de tipus finit.

Suposem $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V.

Sabem que $\forall v \in V \longrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, on $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ són les coordenades del vector v en la base B i que són úniques.

Com a conseqüència de tenir definida una base B de V, tenim definides n aplicacions:

$f_i : V \longrightarrow \Bbbk \ / \ f_i(v) = \alpha_i \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$

En particular, si $v = v_j \longrightarrow f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ \ i = j \\ 0 & si \ \ i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Definició 24. *Al sistema $B^* = \{ f_1, \ f_2, \ldots, \ f_n\}$ l'anomenem **base dual de l'espai dual.***

Proposició 16. *$B^* = \{ f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ és una base.*

Demostració:
i) f_i són formes lineals. (A f_i s'anomena la **i-èsima forma coordenada**).
En efecte: $f_i(\alpha u + \beta v) = \alpha f_i(u) + \beta f_i(v)$.
$f_i(\alpha u+\beta v) = f_i(\alpha(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_i v_i+\ldots+\alpha_n v_n)+\beta(\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\ldots+\beta_i v_i+\ldots+\beta_n v_n)) = f_i\left((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i)v_i + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n\right) = \alpha\alpha_i + \beta\beta_i$.
$\alpha f_i(u) + \beta f_i(v) = \alpha f_i(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_n v_n) + \beta f_i(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_i v_i + \ldots + \beta_n v_n) = \alpha\alpha_i + \beta\beta_i$.
ii) $B^* = \{ f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ és lliure.
Si $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0 \longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$.
És a dir, si $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n)(v) = 0 \to \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$ $\forall v \in V$.
$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n)(v) = 0 \quad \forall v \in V \longrightarrow$ En particular per a $v = v_j$
$j = 1, 2, \ldots, n \quad \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i f_i)(v_j) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (f_i(v_j)) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{ij} \underset{Quan\ i=j}{=} \lambda_j = 0$. En variar la
$j = 1, 2, \ldots, n$, obtenim que tots els escalars són nuls.
iii) $B^* = \{ f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ és sistema generador de V^*. És a dir,
$\forall f \in V^* \longrightarrow f = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_n f_n$.
Com que f són formes lineals, actuen sobre vectors i caldrà demostrar:
$f(v) = (\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_n f_n)(v) \quad \forall v \in V$.
$f(v) = f\left((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_n v_n)\right) \underset{f\ lineal}{=} \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots+\alpha_i f(v_i)+\ldots+\alpha_n f(v_n) \underset{f(v_i)\in \mathbf{k}}{=} \alpha_1\, \mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \ldots + \alpha_i\mu_i + \ldots + \alpha_n\mu_n \underset{Definició\ de\ f_i}{=}$

$f_1(v)\mu_1 + f_2(v)\mu_2 + \ldots + f_i(v)\mu_i + \ldots + f_n(v)\mu_n = \mu_1 f_1(v) + \mu_2 f_2(v) + \ldots + \mu_i f_i(v) + \ldots + \mu_n f_n(v) = (\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_i f_i + \ldots + \mu_n f_n)(v)$.

Exemple 9. *Suposem $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, on $v_1 = (1, -1, 3)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 3, -2)$.*
Trobeu la base dual, $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Solució:
Definim $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ f_i(v_j) = \delta_{ij}$. És a dir,
$f_1(v_1) = 1 \longrightarrow f_1(1, -1, 3) = 1$
$f_1(v_2) = 0 \longrightarrow f_1(0, 1, -1) = 0$
$f_1(v_3) = 0 \longrightarrow f_1(0, 3, -2) = 0$
$f_2(v_1) = 0 \longrightarrow f_2(1, -1, 3) = 0$
$f_2(v_2) = 1 \longrightarrow f_2(0, 1, -1) = 1$
$f_2(v_3) = 0 \longrightarrow f_2(0, 3, -2) = 0$

$f_3(v_1) = 0 \longrightarrow f_3(1,-1,3) = 0$
$f_3(v_2) = 0 \longrightarrow f_3(0,1,-1) = 0$
$f_3(v_3) = 1 \longrightarrow f_3(0,3,-2) = 1$

Com que $\forall v \in \mathbb{R}^3, v =< v_1, v_2, v_3 >\longrightarrow (x,y,z) = \alpha_1(1,-1,3) + \alpha_2(0,1,-1) + \alpha_3(0,3,-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_1 \\ y = -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ z = 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 7x - 2y - 3z,\ \alpha_3 = -2x + y + z.$$

Per la qual cosa, $f_1(v) = \alpha_1 = x$, $f_2(v) = \alpha_2 = 7x - 2y - 3z$, $f_3(v) = \alpha_3 = -2x + y + z$.

És a dir, $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$, on
$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f_1(x,y,z) = x$.
$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f_2(x,y,z) = 7x - 2y - 3z$.
$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f_3(x,y,z) = -2x + y + z$.

1. PROBLEMES TEMA 8: ESPAIS VECTORIALS I APLICACIONS LINEALS

1. En el conjunt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es defineixen les següents operacions:

   $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

   $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $k \cdot (x, y) = (k^2 x, k^2 y)$ $\forall k, x, y \in \mathbb{R}$.

   Estudieu si la terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

   Sol.: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ no és un $\mathbb{R}$-espai vectorial ja què la llei externa no és distributiva respecte els escalars.

   Propietat distributiva: $(k_1 + k_2) \cdot (x, y) = k_1 \cdot (x, y) + k_2 \cdot (x, y)$ $\forall k_1, k_2, x, y \in \mathbb{R}$.

   Primer terme: $(k_1 + k_2) \cdot (x, y) = ((k_1 + k_2)^2 x, (k_1 + k_2)^2 y)$.

   Segon terme: $k_1 \cdot (x, y) + k_2 \cdot (x, y) = (k_1^2 x, k_1^2 y) + (k_2^2 x, k_2^2 y) = (k_1^2 x + k_2^2 x, k_1^2 y + k_2^2 y) = ((k_1^2 + k_2^2) x, (k_1^2 + k_2^2) y))$.

   Ambdós termes no són iguals.

2. Estudieu si els següents conjunts amb la suma i producte habituals són $\mathbb{Q}$-espais vectorials:

   i) $\{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ *ii)* $\{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

   Sol.: i) No és $\mathbb{Q}$-espai vectorial ja què la llei de composició externa no està be definida.

   $\circ : \mathbb{Q} \times \{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\} \to \{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

   Definim aquesta llei: $((q, (a + b\sqrt{5})) = q \circ (a + b\sqrt{5}) = (qa + (qb)\sqrt{5})$. En general $qa, qb \notin \mathbb{Z}$ (per ser producte d'un nombre racional per un nombre sencer).

   ii) En aquest cas sí que és un $\mathbb{Q}$-espai vectorial.

   Definim la llei interna: $(a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{5}$.

   Cal provar que $(\{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}, +)$ és un grup abelià.

   Naturalment la llei suma és interna perquè la suma de nombres racionals és un altre nombre racional.

   Propietat associativa:

   $\left[(a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5})\right] + (a_3 + b_3\sqrt{5}) = (a_1 + b_1\sqrt{5}) + \left[(a_2 + b_2\sqrt{5}) + (a_3 + b_3\sqrt{5})\right]$.

   Primer terme: $\left[(a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5})\right] + (a_3 + b_3\sqrt{5}) = \left[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{5}\right] + (a_3 + b_3\sqrt{5}) = [(a_1 + a_2) + a_3] + [((b_1 + b_2) + b_3)]\sqrt{5} = [a_1 + (a_2 + a_3)] + [(b_1 + (b_2 + b_3)]\sqrt{5}$.

   Segon terme: $(a_1 + b_1\sqrt{5}) + \left[(a_2 + b_2\sqrt{5}) + (a_3 + b_3\sqrt{5})\right] = (a_1 + b_1\sqrt{5}) + \left[(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt{5}\right] = [(a_1 + (a_2 + a_3)] + [b_1 + (b_2 + b_3)]\sqrt{5}$.

   Ambdos termes són iguals.

   Existència d'element neutre: L'element neutre és $0 + 0\sqrt{5}$ ja què:

$(a + b\sqrt{5}) + (0 + 0\sqrt{5}) = (a + 0) + (b + 0)\sqrt{5} = (a + b\sqrt{5})$.

$(0 + 0\sqrt{5}) + (a + b\sqrt{5}) = (0 + a) + (0 + b)\sqrt{5} = (a + b\sqrt{5})$.

Ja què 0 és l'element neutre de $\mathbb{Q}$ per a la operació $+$.

Existència d'element simètric: L'element simètric de $(a+b\sqrt{5})$ és $(-a+(-b)\sqrt{5})$ ja què:

$(a + b\sqrt{5}) + (-a + (-b)\sqrt{5}) = 0 = (-a + (-b)\sqrt{5}) + (a + b\sqrt{5})$.

En efecte: $(a+b\sqrt{5})+(-a+(-b)\sqrt{5}) = (a+(-a))+(b+(-b))\sqrt{5} = 0+0\sqrt{5} = 0$.

$(-a + (-b)\sqrt{5}) + (a + b\sqrt{5}) = ((-a) + a) + ((-b) + b)\sqrt{5} = 0 + 0\sqrt{5} = 0$.

Propietat commutativa: $(a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5}) = (a_2 + b_2\sqrt{5}) + (a_1 + b_1\sqrt{5})$.

En efecte, $(a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{5} = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{5} = (a_2 + b_2\sqrt{5}) + (a_1 + b_1\sqrt{5})$.

Per la qual cosa és un grup abelià.

Siga la llei externa: $\circ : \mathbb{Q}\times \left\{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\right\} \to \left\{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

Definim aquesta llei: $((q, (a + b\sqrt{5})) = q \circ (a + b\sqrt{5}) = (qa + (qb)\sqrt{5})$.

Cal provar que aquesta llei compleix els 4 axiomes de l'espai vectorial.

A1. Propietat distributiva respecte als escalars:

$(q_1 + q_2) \circ (a + b\sqrt{5}) = q_1 \circ (a + b\sqrt{5}) + q_2 \circ (a + b\sqrt{5}) \quad \forall q_1, q_2, a, b \in \mathbb{Q}$.

$(q_1 + q_2) \circ (a + b\sqrt{5}) = (q_1 + q_2)a + (q_1 + q_2)b\sqrt{5} = (q_1a + q_2a) + (q_1b + q_2b)\sqrt{5} =$

$= (q_1a + (q_1b)\sqrt{5}) + (q_2a + (q_2b)\sqrt{5} = (q_1 \circ (a + b\sqrt{5})) + (q_2 \circ (a + b\sqrt{5}))$.

A2. Propietat associativa:

$(q_1q_2) \circ (a + b\sqrt{5}) = q_1 \circ (q_2 \circ (a + b\sqrt{5}) \quad \forall q_1, q_2, a, b \in \mathbb{Q}$.

$(q_1q_2) \circ (a + b\sqrt{5}) = (q_1q_2)a + (q_1q_2)b\sqrt{5}) = q_1 \circ (q_2a) + q_1 \circ (q_2b)\sqrt{5}) =$

$= q_1 \circ ((q_2a) + (q_2b)\sqrt{5}) = q_1 \circ (q_2 \circ (a + b\sqrt{5})$.

A3. Propietat distributiva respecte als vectors:

$q\circ((a_1+b_1\sqrt{5})+(a_2+b_2\sqrt{5})) = q\circ((a_1+b_1\sqrt{5})+q\circ((a_2+b_2\sqrt{5})) \ \forall q, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$.

$q \circ ((a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5})) = q \circ ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{5})) = (q(a_1 + a_2) + q(b_1 + b_2)\sqrt{5})) =$

$= (qa_1 + qa_2 + (qb_1 + qb_2)\sqrt{5} = (qa_1 + qb_1\sqrt{5}) + (qa_2 + qb_2\sqrt{5}) = q \circ ((a_1 + b_1\sqrt{5}) + q \circ ((a_2 + b_2\sqrt{5}))$.

A4. Element neutre:

$1_{\mathbb{Q}} \circ (a + b\sqrt{5}) = (a + b\sqrt{5})$ on $1_{\mathbb{Q}}$ és l'element neutre de $\mathbb{Q}$.

$1_{\mathbb{Q}} \circ (a + b\sqrt{5}) = 1a + 1b\sqrt{5} = (a + b\sqrt{5})$.

3. Siga $\mathbb{K}$ un cos. i) Proveu que $\mathbb{K}[x]$ te estructura de $\mathbb{K}-$espai vectorial respecte de la suma de polinomis i el producte escalar:

$a(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = aa_0 + aa_1x + +aa_nx^n \qquad \forall a \in \mathbb{K}$.

ii) Demostreu que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ és una $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{K}[x]$.

Sol.: Cal demostrar en primer lloc que $(\mathbb{K}[x], +)$ és un grup abelià. Considerem tots els polinomis del mateix grau (si més no es podria aconseguir agafant els coeficients necessaris iguals a zero).

És evident que la suma de polinomis és una llei de composició interna ja què la suma de dos polinomis és un altre polinomi.

Propietat associativa:

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + (\sum_{i=0}^{n} b_ix^i + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i) = (\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} b_ix^i) + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i.$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + (\sum_{i=0}^{n} b_ix^i + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} (b_i + c_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} [a_i + (b_i + c_i)]\, x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [(a_i + b_i) + c_i)]\, x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i = (\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} b_ix^i) + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i.$$

Existència d'element neutre: $0 = \sum_{i=0}^{n} 0x^i$.

Cal demostrar que: $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} 0x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} 0x^i + \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} 0x^i = \sum (a_i + 0)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i.$$

$$\sum_{i=0}^{n} 0x^i + \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} (0 + a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i.$$

Existència d'element simètric:

Donat el polinomi $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, el seu simètric és $\sum_{i=0}^{n} (-a_i)x^i$.

Cal demostrar que: $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} (-a_i)x^i = 0 = \sum_{i=0}^{n} (-a_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$.

En efecte, $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} (-a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + (-a_i))x^i = \sum_{i=0}^{n} 0x^i = 0$.

Igual per a $0 = \sum_{i=0}^{n} (-a_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$.

Propietat commutativa: $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Definim la llei externa:

$$\circ : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x] \text{ tal que } (k, \sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \rightsquigarrow k \circ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (k a_i) x^i.$$

Aquesta llei compleix els 4 axiomes de l'espai vectorial. En efecte:

A1. Propietat distributiva respecte als escalars:

$$(k + k') \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = k \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) + k' \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \quad \forall k, k' \in \mathbb{K}.$$

$$(k + k') \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} [(k + k') a_i x^i] = \sum_{i=0}^{n} (k a_i + k' a_i) x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (k a_i) x^i + \sum_{i=0}^{n} (k' a_i) x^i = k \circ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + k' \circ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

A2. Propietat associativa:

$$k \circ \left[k' \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \right] = (k k') \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \quad \forall k, k' \in \mathbb{K}.$$

$$k \circ \left[k' \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \right] = k \circ \left[\sum^{n} (k' a_i) x^i \right] = \sum^{n} k (k' a_i) x^i = \sum^{n} (k k') a_i x^i =$$

$$= (k k') \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i).$$

A3. Propietat distributiva respecte als vectors:

$$k \circ \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right] = k \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) + k \circ (\sum_{i=0}^{n} b_i x^i).$$

$$k \circ \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right] = k \circ \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \right] = \sum_{i=0}^{n} k (a_i + b_i) x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (k a_i + k b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} (k a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} (k b_i) x^i = k \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) + k \circ (\sum_{i=0}^{n} b_i x^i).$$

A4. Element neutre:

$1_{\mathbb{K}} \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ on $1_{\mathbb{K}}$ és l'element neutre de $\mathbb{K}$ per a l'operació $\circ$.

$$1_{\mathbb{K}} \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} (1a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Per la qual cosa $(\mathbb{K}[x], +, \circ)$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial.

ii) Anem a demostrar que $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ és una $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{K}[x]$.

a) $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ és un sistema linealment independent ja què:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{n} 0x^i \rightarrow \alpha_i = 0,\ i = 0, 1, 2, \dots$$

b) $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ és un sistema generador ja què:

Si $p(x)$ és un polinomi de grau m, aleshores $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i>m} 0x^i$.

És a dir qualsevol polinomi es pot posar com a combinació lineal dels elements del sistema.

4. Siga el sistema $S = \{(1,1,0,m), (3,-1,-n,-1), (-3,5,m,-4)\}$.

i) Determineu els valors de m i n perquè el sistema siga lliure.

ii) Per als valors obtesos en i), estudieu si el vector $(2,2,2,2)$ pertany al subespai generat per S.

NOTA: Aquest problema és convenient veure'l després d'estudiar sistemes d'equacions.

Sol.: i) $\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 3 & -1 & -n & -1 \\ -3 & 5 & m & -4 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & -4 & -n & -1-3m \\ 0 & 8 & m & 3m-4 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & -4 & -n & -1-3m \\ 0 & 0 & m-2n & 3m-6 \end{matrix}$

El sistema S és lliure sempre el tercer vector no siga el nul. Això vol dir que $m - 2n \neq 0$ i $3m - 6 \neq 0 \rightarrow m \neq -2$ o $n \neq -1$.

ii) El vector $(2,2,2,2) \in < S > \Leftrightarrow (2,2,2,2) = \alpha(1,1,0,m) + \beta(3,-1,-n,-1) + \gamma(-3,5,m,-4) \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha + 3\beta - 3\gamma &= 2 \\ \alpha - \beta + 5\gamma &= 2 \\ -n\beta + m\gamma &= 2 \\ m\alpha - \beta - 4\gamma &= 2 \end{aligned} \right. \quad \text{és un sistema compatible.}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -n & m & 2 \\ m & -1 & -4 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & -n & m & 2 \\ 0 & -1-3m & 3m-4 & 2-2m \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & m-2n & 2 \\ 0 & 0 & -3m-6 & 2-2m \end{matrix}$$

En l'anterior apartat s'ha vist que S és lliure si $m \neq -2$ o $n \neq -1$, què equival a dir si $m \neq -2$ o si $m = -2$ i $n \neq -1$.

$$\text{Si } m \neq -2 \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & m-2n & 2 \\ 0 & 0 & -3m-6 & 2-2m \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -3m-6 & 2-2m \\ 0 & 0 & m-2n & 2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -3m-6 & 2-2m \\ 0 & 0 & 0 & -2m^2+8m-4n+4mn+12 \end{matrix}$$

Fixat un valor de $m \neq -2$, l'equació $-2m^2+8m-4n+4mn+12=0$ serà de primer grau amb la incògnita n, i per tant la seua solució seria:

$$-2m^2+8m+n(-4+4m)+12=0 \rightarrow n = \frac{2m^2-8m-12}{-4+4m} \in \mathbb{R} \text{ si } m \neq 1.$$

En definitiva, $\forall m \neq -2$ i $\forall m \neq 1$, $\exists n = \dfrac{2m^2-8m-12}{-4+4m} \in \mathbb{R}$ tal que $rang(A) = 3 = rang(A,B) =$ *número d'incògnites* $\rightarrow$Sistema compatible determinat i per la qual cosa $(2,2,2,2) \in < S >$.

$$\text{Si } m = -2 \text{ i } n \neq -1 \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2-2n & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{matrix} \rightarrow \text{Sistema incompatible} \rightarrow$$

$(2,2,2,2) \notin < S >$.

$$\text{NOTA: Si } m = 1 \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{matrix} \rightarrow \text{Sistema incompatible} \rightarrow (2,2,2,2) \notin < S >.$$

5. Demostreu que si els vectors $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ d'un espai vectorial V són linealment independents, també ho són els vectors: $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, \ldots, v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n$.

   Sol.: $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, \ldots, v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n$ seran L.I. si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2(v_1+v_2) + \lambda_3(v_1+v_2+v+\ldots+\lambda_n(v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i$.

   $\lambda_1 v_1 + \lambda_2(v_1+v_2) + \lambda_3(v_1+v_2+v+\ldots+\lambda_n(v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n) = 0 \rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)v_1 + (\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)v_2 + (\lambda_3+\cdots+\lambda_n)v_3+\cdots+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0$.

   Per hipòtesi $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ és lliure, per la qual cosa tots els escalars són zero.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=0 \\ \lambda_3+\cdots+\lambda_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n-1}+\lambda_n=0 \\ \lambda_n=0 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda_i=0\ \forall i.$$

6. Siga V un $\mathbb{K}$-espai vectorial i x, y, z tres vectors linealment independents. Considerem els vectors $u = ax+(1-a)y$; $v = ay+(1-a)z$; $w = az+(1-a)x$. Demostreu que:

   i) Si $\mathbb{K}$ és el cos dels nombres reals, aleshores u, v, w són L.I. $\forall a \in \mathbb{R}$.

   ii) Si $\mathbb{K}$ és el cos dels nombres complexes, determineu a perquè u, v, w siguen L.I.

   Sol.: u, v, w són L.I. sii $\lambda u + \mu v + \gamma w = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0$.

   $\lambda u + \mu v + \gamma w = 0 \rightarrow \lambda\,[ax + (1-a)y] + \mu\,[ay + (1-a)z] + \gamma\,[az + (1-a)x] = 0 \rightarrow [\lambda a + \gamma(1-a)]\,x + [\lambda(1-a) + \mu a]\,y + [\mu(1-a) + \gamma a]\,z = 0$.

   Ja què $\{x, y, z\}$ és lliure per hipòtesi, tots els escalars son nuls. Per la qual cosa:

   $\left.\begin{array}{l} \lambda a + \gamma(1-a) = 0 \\ \lambda(1-a) + \mu a = 0 \\ \mu(1-a) + \gamma a = 0 \end{array}\right\}$ Sistema homogeni. Si el determinant de la matriu dels coeficients és distinti de zero, hi haurà una única solució (la trivial). Si el determinant de la matriu dels coeficients és nul, hi hauran infinites solucions.

   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1-a \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{vmatrix} = 3a^2 - 3a + 1.$$

   $$3a^2 - 3a + 1 = 0 \rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{6}$$

   Aquesta equació no te solució en el conjunt dels nombres reals.

   En el conjunt dels complexes hi haurien dos solucions:

   $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ i $a = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

   En definitiva, si $a \in \mathbb{R} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Sistema compatible determinat $\rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0 \rightarrow \{u, v, w\}$ L.I. $\forall a \in \mathbb{R}$.

   Si $a \in \mathbb{C}$ i $a \neq \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{6} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Sistema compatible determinat $\rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0 \rightarrow \{u, v, w\}$ L.I.

7. Siga V un $\mathbb{Q}$-espai vectorial i $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una $\mathbb{Q}$-base de V. Estudieu quin dels següents conjunts són base:

i) $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3, v_4\}$.

ii) $\{v_1+v_2+v_3, v_1+v_2, v_1+v_3\}$.

iii) $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3, v_4, v_3+v_4\}$.

iv) $\{0, v_1, v_2, v_3, v_3+v_4\}$.

Sol.: i) Primer procediment:

Hem de demostrar que $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3, v_4\}$ és un sistema lliure i generador. $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3, v_4\}$ serà lliure si $\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_1-v_2)+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4 = 0 \rightarrow$ $(\lambda_1+\lambda_2)v_1+(\lambda_1-\lambda_2)v_2+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4 = 0 \underset{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}L.I}{\longrightarrow} \lambda_1+\lambda_2 = 0,$ $,\lambda_1-\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$

$\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3, v_4\}$ serà sistema generador si $\forall x \in V, \quad \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ tal que $x = \alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1-v_2)+\gamma v_3+\delta v_4$.

$x = \alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1-v_2)+\gamma v_3+\delta v_4 = (\alpha+\beta)v_1+(\alpha-\beta)v_2+\gamma v_3+$ $\delta v_4 \underset{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}Base}{\longrightarrow} x = \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4.$

Identificant: $\lambda_1 = \alpha+\beta, \quad \lambda_2 = \alpha-\beta, \quad \lambda_3 = \gamma, \quad \lambda_4 = \delta \rightarrow \alpha = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},$ $,\beta = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}, \lambda_3 = v_3, \quad \lambda_4 = v_4.$

Segon procediment: (mètode de reducció en cascada)

Suposem $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ siga la base canònica. Les coordenades dels vectors que formen el sistema $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3, v_4\}$ els col·locarem en forma de matriu:

$$\begin{array}{c} (1,1,0,0) \\ (1,-1,0,0) \\ (0,0,1,0) \\ (0,0,0,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0) \\ (0,2,0,0) \\ (0,0,1,0) \\ (0,0,0,1) \end{array}$$

Com els quatre vectors són L.I. i l'espai vectorial és de dimensió quatre, aleshores també són S.G. i per la qual cosa base.

ii) $\{v_1+v_2+v_3, v_1+v_2, v_1+v_3\}$ no pot formar base ja què tots els espais vectorials poden tenir moltes bases, però el número de vectors que formen la base és el mateix. Aquests tres vectors mai poden formar base ja què la dimensió de l'espai és quatre.

iii) $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3, v_4, v_3+v_4\}$. Aquests cinc vectors mai poden formar base ja què la dimensió de l'espai és quatre.

iv) $\{0, v_1, v_2, v_3, v_3+v_4\}$ no forma base ja què qualsevol sistema de vectors que continga al vector nul és lligat.

8. Siga $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial V de dimensió 4. Determineu quin dels següents sistemes són lliures, generadors i bases de V :

i) $S_1 = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1\}$.

ii) $S_2 = \{v_1 - 2v_2, 3v_2 + v_3, 2v_4 - v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_4 - v_1\}$.

iii) $S_3 = \{v_4, v_3 - v_4, v_2 - v_4, v_1 - v_4\}$.

iv) $S_4 = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3 + v_4, v_1 + v_3 + v_4\}$.

Calculeu les coordenades del vector $v_1 - v_2 + v_3$ en les bases calculades.

Sol.: i) Pel mètode de reducció en cascada:

$$\begin{array}{rl} v_1 + v_2 = (1,1,0,0) \\ v_2 + v_3 = (0,1,1,0) \\ v_3 + v_4 = (0,0,1,1) \\ v_4 + v_1 = (1,0,0,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0) \\ (0,1,1,0) \\ (0,0,1,1) \\ (0,1,0,-1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0) \\ (0,1,1,0) \\ (0,0,1,1) \\ (0,0,1,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0) \\ (0,1,1,0) \\ (0,0,1,1) \\ (0,0,0,0) \end{array} \text{ Sistema}$$

lligat ja què el quart vector és C.L. dels tres anteriors.

Aquest sistema no pot ser generador ja què si ho fora, com $dim(V) = 4$, S_1 seria base i per tant lliure, el què contradiu l'anterior.

ii) El sistema $S_2 = \{v_1 - 2v_2, 3v_2 + v_3, 2v_4 - v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_4 - v_1\}$ és lligat ja què consta de cinc vectors i la $dim(V) = 4$. En efecte:

$$\begin{array}{r} v_1 - 2v_2 = (1,-2,0,0) \\ 3v_2 + v_3 = (0,3,1,0) \\ 2v_4 - v_1 = (-1,0,0,4) \\ v_1 + v_2 + v_3 = (1,1,1,0) \\ v_4 - v_1 = (-1,0,0,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,-2,0,0) \\ (0,3,1,0) \\ (0,-2,0,2) \\ (0,3,1,0) \\ (0,-2,0,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,-2,0,0) \\ (0,3,1,0) \\ (0,-2,0,2) \\ (0,0,0,0) \\ (0,0,0,1) \end{array} \text{ Sistema lligat ja}$$

què el quart vector és C.L. de la resta.

Aleshores el sistema $\{v_1 - 2v_2, 3v_2 + v_3, 2v_4 - v_1, v_4 - v_1\}$ és un sistema generador de V contingut en S_2. Per la qual cosa S_2 és un sistema generador de V.

iii) El sistema $S_3 = \{v_4, v_3 - v_4, v_2 - v_4, v_1 - v_4\}$ és una base de V ja què:

$$\begin{array}{r} v_4 = (0,0,0,1) \\ v_3 - v_4 = (0,0,1,-1) \\ v_2 - v_4 = (0,1,0,-1) \\ v_1 - v_4 = (1,0,0,-1) \end{array} \sim \begin{array}{r} v_1 - v_4 = (1,0,0,-1) \\ v_2 - v_4 = (0,1,0,-1) \\ v_3 - v_4 = (0,0,1,-1) \\ v_4 = (0,0,0,1) \end{array} \text{ Sistema lliure i generador,}$$

és a dir, base.

Anem a calcular les coordenades del vector $v_1 - v_2 + v_3$ en la base

$S_3 = \{v_4, v_3 - v_4, v_2 - v_4, v_1 - v_4\}$.

Les coordenades seran els nombres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tal que:

$v_1 - v_2 + v_3 = \alpha v_4 + \beta(v_3 - v_4) + \gamma(v_2 - v_4) + \delta(v_1 - v_4) \rightarrow v_1 - v_2 + v_3 = \delta v_1 + \gamma v_2 + \beta v_3 + (\alpha - \beta - \gamma - \delta)v_4 \rightarrow \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = 1$.

Aleshores les coordenades del vector $v_1 - v_2 + v_3$ en la base S_3 són $(1, 1, -1, 1)$.

iv) El sistema $S_4 = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3 + v_4, v_1 + v_3 + v_4\}$

$$\begin{array}{lcccc} v_1+v_2+v_3=(1,1,1,0) & & (1,1,1,0) & & (1,1,1,0) \\ v_2+v_3+v_4=(0,1,1,1) & \sim & (0,1,1,1) & \sim & (0,1,1,1) \quad \text{Sistema lliure.} \\ v_1+v_3+v_4=(1,0,1,1) & & (0,1,0,-1) & & (0,0,1,2) \end{array}$$

El sistema S_4 no és generador ja què la $dim(V)=4$ i S_4 està format per tant sols 3 vectors. (NOTA, si fos generador, al ser lliure seria base, la qual cosa és impossible ja què caldria estar format per 4 vectors).

9. a) Siga $\mathbb{C}^2$ el $\mathbb{C}$-espai vectorial del parell de nombres complexes. Ens demana:

   i) Demostreu que $\{(1,0),(0,1)\}$ és una base de $\mathbb{C}^2$.

   ii) Calculeu les coordenades de $(2+3i,-4+5i)$ respecte de la base anterior.

   iii) Demostreu que $\{(1,1),(1,i),(i,1),(i,-i)\}$ és un conjunt lligat.

b) Siga $\mathbb{C}^2$ el $\mathbb{R}$-espai vectorial del parell de nombres complexes. Ens demana:

   i) Demostreu que $\{(1,1),(1,i),(i,1),(i,-i)\}$ és una base d'aquest espai vectorial.

   ii) Calculeu les coordenades de $(2+3i,-4+5i)$ respecte de la base anterior.

Sol.: a) i) Correspon a la base canònica. ii) Les mateixes coordenades per ser la base canònica. iii) Serà lligat ja què $dim(\mathbb{C}^2)=2$ i per la qual cosa, qualsevol conjunt de més de dos vectors és lligat.

b) i) El sistema $\{(1,1),(1,i),(i,1),(i,-i)\}$ és lliure ja què $a(1,1)+b(1,i)+c(i,1)+d(i,-i)=(0,0)\to(a+b+(c+d)i,a+c+(b-d)i)=(0,0)\to$

$a+b=0, c+d=0, a+c=0, b-d=0\to a=b=c=d=0.$

El sistema $\{(1,1),(1,i),(i,1),(i,-i)\}$ és generador ja què $\forall(a+bi,c+di)\in\mathbb{C}^2,\quad \exists\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tal que

$(a+bi,c+di)=\alpha(1,1)+\beta(1,i)+\gamma(i,1)+\delta(i,-i)\to\alpha+\beta=a,\ \gamma+\delta=b,$ $\alpha+\gamma=c,\ \beta-\delta=d.$

Per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&a\\0&0&1&1&b\\1&0&1&0&c\\0&1&0&-1&d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1&1&0&0&a\\0&0&1&1&b\\0&1&-1&0&a-c\\0&1&0&-1&d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1&1&0&0&a\\0&1&0&-1&d\\0&1&-1&0&a-c\\0&0&1&1&b\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&a\\0&1&0&-1&d\\0&0&1&-1&d-a+c\\0&0&1&1&b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1&1&0&0&a\\0&1&0&-1&d\\0&0&1&-1&d-a+c\\0&0&0&2&b-d+a-c\end{pmatrix}$$

$$2\delta=b-d+a-c\to\boxed{\delta=\frac{a+b-c-d}{2}},\quad \gamma-\delta=-a+c+d\to\boxed{\gamma=\frac{-a+b-c+d}{2}}$$

$\beta - \delta = d \rightarrow \boxed{\beta = \dfrac{a+b-c+d}{2}}, \quad \alpha + \beta = a \rightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{a-b+c-d}{2}}$

ii) $(2+3i, -4+5i) = \alpha(1,1) + \beta(1,i) + \gamma(i,1) + \delta(i,-i) = \dfrac{a-b+c-d}{2}(1,1) + \dfrac{a+b-c+d}{2}(1,i) +$
$+ \dfrac{-a+b-c+d}{2}(i,1) + \dfrac{a+b-c-d}{2}(i,-i) = -5(1,1) + 7(1,i) + 1(i,1) + 2(i,-i)$.
Les coordenades de $(2+3i, -4+5i)$ respecte de la base $\{(1,1),(1,i),(i,1),(i,-i)\}$ són $(-5,7,1,2)$.

10. En el $\mathbb{R}$-espai vectorial dels polinomis reals de variable real $\mathbb{R}_3[x]$ es consideren els següents sistemes de polinomis (vectors):

$S_1 = \{1, x, x^2, 2x^3\} \qquad S_2 = \{2, x-2, x^2+1, x^3\}$.

i) Demostreu que formen base de $\mathbb{R}_3[x]$.

ii) Trobeu les coordenades de cada vector d'una base respecte de l'altra.

Sol.: Utilitzarem, en primer lloc el mètode de reducció en cascada.

$$\begin{matrix}(1,0,0,0)\\(0,1,0,0)\\(0,0,1,1)\\(0,0,0,2)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(1,0,0,0)\\(0,1,0,0)\\(0,0,1,1)\\(0,0,0,1)\end{matrix} \quad \text{El sistema } S_1 \text{ és base.}$$

$$\begin{matrix}(2,0,0,0)\\(-2,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(0,0,0,1)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(2,0,0,0)\\(0,1,0,0)\\(0,0,-2,0)\\(0,0,0,1)\end{matrix} \quad \text{El sistema } S_2 \text{ és base.}$$

Ara utilitzarem la definició de base.

$S_1 = \{1, x, x^2, 2x^3\}$ serà base si és lliure i generador.

Lliure, $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 2x^3 = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Generador, quan $\forall p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, és combinació lineal de $\{1, x, x^2, 2x^3\}$.

En efecte $\forall p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \rightarrow p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = a + bx + cx^2 + \dfrac{d}{2}2x^3$.

$S_2 = \{2, x-2, x^2+1, x^3\}$ serà base si és lliure i generador.

Lliure, $\alpha 2 + \beta(x-2) + \gamma(x^2+1) + \delta x^3 = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \rightarrow (2\alpha - 2\beta + \gamma) + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0 \rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Generador, quan $\forall p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, és combinació lineal de $\{2, x-2, x^2+1, x^3\}$.

Si $p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \rightarrow p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = \alpha 2 + \beta(x-2) + \gamma(x^2+1) + \delta x^3 = (2\alpha - 2\beta + \gamma) + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$.

Identificant: $a = 2\alpha - 2\beta + \gamma, \quad b = \beta, \quad c = \gamma, \quad d = \delta \to \alpha = \dfrac{a+2b-c}{2}$

Per la qual cosa $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3 = \dfrac{a+2b-c}{2}\cdot 2+b(x-2)+c(x^2+1)+dx^3$.

ii)

$$\left.\begin{array}{r} 1 = \frac{1}{2}2 + 0(x-2) + 0(x^2+1) + 0x^3 \to \text{Les coordenades són } (\frac{1}{2},0,0,0). \\ x = 1\cdot 2 + 1\cdot(x-2) + 0(x^2+1) + 0x^3 \to \text{Les coordenades són } (1,1,0,0). \\ x^2 = -\frac{1}{2}\cdot 2 + 0(x-2) + 1(x^2+1) + 0x^3 \to \text{Les coordenades són } (-\frac{1}{2},0,1,0). \\ 2x^3 = 0\cdot 2 + 0(x-2) + 0(x^2+1) + 2x^3 \to \text{Les coordenades són } (0,0,0,2). \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2 = 2\cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0(2x^3) \to \text{Les coordenades són } (2,0,0,0). \\ x-2 = -2\cdot 1 + 1x + 0x^2 + 0(2x^3) \to \text{Les coordenades són } (-2,1,0,0). \\ x^2+1 = 1\cdot 1 + 0x + 1x^2 + 0(2x^3) \to \text{Les coordenades són } (1,0,1,0). \\ x^3 = 0\cdot 1 + 0x + 0x^2 + \frac{1}{2}(2x^3) \to \text{Les coordenades són } (0,0,0,\frac{1}{2}). \end{array}\right\}$$

11. Siga $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una $\mathbb{K}$ base de V. Siga els sistema $B' = \{v_1, v_1 - v_2, v_1 + v_2 - v_3\}$.

i) Demostreu que B' és una $\mathbb{K}$ base de V.

ii) Trobeu les fórmules del canvi de base.

iii) Trobeu les coordenades en B d'un vector tal que les seus coordenades en la base B' són $(1,1,0)$.

Sol.: i) $\begin{array}{c}(1,0,0)\\(1,-1,0)\\(1,1,-1)\end{array} \sim \begin{array}{c}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,-1,1)\end{array} \sim \begin{array}{c}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{array}$ El sistema B' és base.

ii) 1^a forma: Si $x \in V \to x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \beta_1 v_1 + \beta_2(v_1 - v_2) + \beta_3(v_1 + v_2 - v_3) = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)v_1 + (-\beta_2 + \beta_3)v_2 + (-\beta_3)v_3$.

Identificant:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \alpha_2 = -\beta_2 + \beta_3 \\ \alpha_3 = -\beta_3 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

2^a forma: Per obtenir la matriu canvi de base de B a B', cal posar en columna les coordenades dels vectors de B' respecte de la base B.

$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3, \quad v_1 - v_2 = 1v_1 - 1v_2 + 0v_3, \quad v_1 + v_2 - v_3 = 1v_1 + 1v_2 - 1v_3.$

Aleshores la matriu canvi de base de B a $B' = M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \boxed{x_B = M_B^{B'} \cdot x_{B'}}$

iii) $x_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

12. Siga $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de l'espai vectorial V.

Es considera $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, on $v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3$, $v_2 = u_1 + u_3$, $v_3 = 3u_1 - u_2 + 3u_3$.

i) Demostreu que B' és una base de V.

ii) Determineu les equacions del canvi de base de B a B'.

iii) Trobeu les coordenades respecte de B del vector $v = -2v_1 + 3v_2 + v_3$.

Sol.: $\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$ El sistema és base.

També $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ és base si és lliure i generador.

Lliure: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \to \alpha_1(2u_1 - u_2 + u_3) + \alpha_2(u_1 + u_3) + \alpha_3(3u_1 - u_2 + 3u_3) = 0 \to$
$(2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3)u_1 + (-\alpha_1 - \alpha_3)u_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3)u_3 \underset{B=\{u_1,u_2,u_3\}\text{ Base}}{\longrightarrow} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, -\alpha_1 - \alpha_3 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \to \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

Generador: Al ser $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ lliure amb 3 vectors, $(dimV = 3) \to B'$ és base.

ii) $M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to x_B = M_B^{B'} \cdot x_{B'} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \to$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1' + x_2' + 3x_3' &= x_1 \\ -x_1' - x_3' &= x_2 \\ x_1' + x_2' + 3x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\}.$$

iii) $v_B = M_B^{B'} \cdot v_{B'} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \to v_B = (2, 1, 4).$

13. Es consideren les bases de $\mathbb{Q}^3$, $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ i $B' = \{(1,0,1), (2,1,0), (3,2,1)\}$

En demana:

i) Les equacions del canvi de base de B a B' i de B' a B.

ii) Les coordenades respecte de B del vector $u = (-4, -2, 5)_{B'}$.

iii) Les coordenades respecte de B' del vector $v = (7, 8, 1)_B$.

Sol.: i) Equacions del canvi de base de B a B'.

$$M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_B = M_B^{B'} \cdot x_{B'} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1' + 2x_2' + 3x_3' = x_1 \\ x_1' + 2x_3' = x_2 \\ x_1' + x_3' = x_3 \end{array}\right\}.$$

Les equacions del canvi de base de B' a B.

$(1,0,0) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(2,1,0) + \alpha_3(3,2,1) \to \alpha_1 = \frac{1}{2},\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -\frac{1}{2}$.

$(0,1,0) = \alpha_1'(1,0,1) + \alpha_2'(2,1,0) + \alpha_3'(3,2,1) \to \alpha_1' = -1,\ \alpha_2' = -1,\ \alpha_3' = 1$.

$(0,0,1) = \alpha_1''(1,0,1) + \alpha_2''(2,1,0) + \alpha_3''(3,2,1) \to \alpha_1'' = \frac{1}{2},\ \alpha_2'' = -1,\ \alpha_3'' = \frac{1}{2}$.

Per la qual cosa

$$M_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to x_{B'} = M_{B'}^{B} \cdot x_B \to \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1' \\ x_1 - x_2 - x_3 = x_2' \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_3' \end{array}\right\}.$$

ii) $u_B = M_B^{B'} \cdot u_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \to u_B = (7,8,1)_B$.

iii) $v_{B'} = M_{B'}^{B} \cdot v_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \to v_{B'} = (-4,-2,5)_{B'}$.

14. Siga $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del $\mathbb{R}$-espai vectorial V. Es consideren els conjunts: $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i $B'' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ on

    $v_1 = u_2 + 3u_4$, $v_2 = -u_1 + u_2$, $v_3 = -2u_1 - u_3 + 2u_4$, $v_4 = -u_1 - u_2 - u_3 + u_4$.

    $w_1 = 2u_1 - 2u_2 + u_4$, $w_2 = u_1 + u_2 + u_3$, $w_3 = 3u_1 + u_3 - u_4$, $w_4 = -2u_2 - u_3 + u_4$.

    i) Demostreu que B' i B'' són bases de V.

    ii) Trobeu la matriu canvi de base de B' respecte de B''.

    iii) Determineu les coordenades respecte de B' del vector $x = (2,1,0,-1)_{B''}$.

    Sol.: i)

$$\begin{array}{r} v_1=(0,1,0,3)\\ v_2=(-1,1,0,0)\\ v_3=(-2,0,-1,2)\\ v_4=(-1,-1,-1,1)\end{array} \sim \begin{array}{r} v_4=(-1,-1,-1,1)\\ v_2=(-1,1,0,0)\\ v_3=(-2,0,-1,2)\\ v_1=(0,1,0,3)\end{array} \sim \begin{array}{r} (-1,-1,-1,1)\\ (0,-2,-1,1)\\ (0,2,-1,0)\\ (0,1,0,3)\end{array} \sim \begin{array}{r} (-1,-1,-1,1)\\ (0,-2,-1,1)\\ (0,0,-2,1)\\ (0,0,-1,7)\end{array} \sim$$

$$\begin{array}{r} (-1,-1,-1,1)\\ (0,-2,-1,1)\\ (0,0,-2,1)\\ (0,0,0,1)\end{array} \text{ Base.}$$

$$\begin{array}{r} w_1=(2,-2,0,1)\\ w_2=(1,1,1,0)\\ w_3=(3,0,1,-1)\\ w_4=(0,-2,-1,1)\end{array} \sim \begin{array}{r} (2,-2,0,1)\\ (0,-4,-2,1)\\ (0,6,2,-5)\\ (0,-2,-1,1)\end{array} \sim \begin{array}{r} (2,-2,0,1)\\ (0,-4,-2,1)\\ (0,0,-4,-14)\\ (0,0,0,1)\end{array} \text{ Base.}$$

També és possible demostrar que els sistemes són lliures aplicant la definició i com l'espai vectorial és de dimensió 4, aleshores ja formen base.

ii) Per calcular $M_{B'}^{B''}$, cal posar en columna les coordenades dels vectors de B'' respecte dels vectors de B'.

Sabem que $M_{B'}^{B''} = M_{B'}^{B} \cdot M_{B}^{B''}$

$$M_B^{B''} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular la inversa de la matriu $M_B^{B'}$ per obtenir $M_{B'}^{B}$. És a dir:

$$\boxed{\left[M_B^{B'}\right]^{-1} = \frac{\left[Adj(M_B^{B'})\right]^t}{det(M_B^{B'})}}$$

$$det(M_B^{B'}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ja què el determinant és no nul, existeix inversa.

$$a_{11}=0 \rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a_{12}=-1 \rightarrow A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$a_{13}=-2 \rightarrow A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad a_{14}=-1 \rightarrow A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$a_{21} = 1 \to A_{21} = 1$, $a_{22} = 1 \to A_{22} = 3$, $a_{23} = 0$, $A_{23} = -3$, $a_{24} = -1 \to A_{24} = 3$,

$a_{31} = 0 \to A_{31} = -2$, $a_{32} = 0 \to A_{32} = -6$, $a_{33} = -1$, $A_{33} = 7$, $a_{34} = -1 \to A_{34} = -8$,

$a_{41} = 1 \to A_{41} = 0$, $a_{42} = 0 \to A_{42} = -1$, $a_{43} = 2$, $A_{43} = 1$, $a_{44} = 1 \to A_{44} = -1$.

Aleshores $Adj(M_B^{B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \left[Adj(M_B^{B'})\right]^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ -3 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & -8 & -1 \end{pmatrix} = M_{B'}^B$.

Per la qual cosa:

$$M_{B'}^{B''} = M_{B'}^B \cdot M_B^{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ -3 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) $x_{B'} = M_{B'}^{B''} \cdot x_{B''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \to$

$x_{B'} = (0, -6, 3, -5)$.

15. Quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^n$ són $\mathbb{R}$-subespais vectorials?. D'aquells que ho siguen, calculeu la dimensió i trobeu una base.

i) $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 \in \mathbb{Q}\}$.

ii) $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 = 0\}$.

iii) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$.

iii) $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0\}$.

Sol.: i) A no pot ser subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ ja què donat $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ i $(1, 1, \ldots, 1) \in A \to \sqrt{2}(1, 1, \ldots, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2}) \notin A$, ja què $x_1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

ii) $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 = 0\}$ és un $\mathbb{R}$-subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ ja què compleix les dues condicions: a) $B \neq \emptyset$ perquè $(0, 0, \ldots, 0) \in B$.

b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\forall x, y \in B \Rightarrow \alpha x + \beta y \in B$.

$\left.\begin{array}{l} x \in B \to x = (0, x_2, \ldots, x_n) \\ y \in B \to y = (0, y_2, \ldots, y_n) \end{array}\right\} \to \alpha x + \beta y = \alpha(0, x_2, \ldots, x_n) + \beta(0, y_2, \ldots, y_n) =$
$(0, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) = (0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in B$.

Una base la formada per $(0, 1, 0, \ldots, 0, 0), (0, 0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$. Dimensió de B és $n - 1$.

iii) C no és subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ ja què donats $(0,1,1,\dots,1) \in C, (1,0,1,\dots,1) \in C \to (1,1,2,\dots,2) \notin C$, ja què $x_1 = 1 \neq 0 \wedge x_2 = 1 \neq 0$.

iv) D serà subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i s'expresa $D \leq \mathbb{R}^n$ si a) $D \neq \varnothing$ perquè $(0,0,\dots,0) \in D$. i b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\forall x, y \in D \Rightarrow \alpha x + \beta y \in D$.

$\left.\begin{array}{r} x \in D \to x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0 \\ y \in D \to y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \ / \ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \wedge y_1 - y_2 = 0 \end{array}\right\} \to \alpha x + \beta y =$ $(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) \in D$ si la suma de les tres primeres components és zero i la diferència de les dues primeres també és zero.

$\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3) = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$

$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) = 0.$

Per trobar una base: Si $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D \to x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0 \to x_1 = x_2 \wedge x_3 = -2x_1 \to$

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_1, x_1, -2x_1, \dots, x_n) = x_1(1,1,-2,0,\dots,0) + x_4(0,0,0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,0,\dots,0,1)$.

Per la qual cosa la base formada per $n-2$ vectores. Aleshores $dim(D) = n-2$.

16. En el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre 2, considerem el conjunt:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+2b \\ a+b & 2a \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostreu que H és un subespai vectorial i calculeu una base.

Sol.: $H \leq M_2(\mathbb{R})$ sii a) $H \neq \varnothing$ $\quad b) \forall A, B \in H \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A + \beta B \in H$.

a) $H \neq \varnothing$ ja què la matriu nula és de H.

b) $A \in H \to A = \begin{pmatrix} a & a+2b \\ a+b & 2a \end{pmatrix}$, $B \in H \to B = \begin{pmatrix} c & c+2d \\ c+d & 2c \end{pmatrix}$

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a & a+2b \\ a+b & 2a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & c+2d \\ c+d & 2c \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & (\alpha a + \beta c) + 2(\alpha b + \beta d) \\ (\alpha a + \beta c) + (\alpha b + \beta d) & 2(\alpha a + \beta c = \end{pmatrix} \in H.$$

Per trobar una base:

$$\begin{pmatrix} a & a+2b \\ a+b & 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Base de H la formada per dues matrius: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Per la qual cosa $dim(H) = 2$.

17. En l'espai vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, considerem el subconjunt $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ p(x) = p'(x)(1+x)\}$.

i) Demostreu que $S \leq \mathbb{R}_3[x]$ i calculeu una base B de S.

ii) Trobeu dues bases distintes de $\mathbb{R}_3[x]$ que continguen a B.

Sol.: i) $S \leq \mathbb{R}_3[x]$ sii a) $S \neq \varnothing$ $\quad b) \forall p(x), q(x) \in S \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha p(x) + \beta q(x) \in S$.

$p(x) \in S \rightarrow p(x) = p'(x)(1+x)$, $q(x) \in S \rightarrow q(x) = q'(x)(1+x)$.

$\alpha p(x)+\beta q(x) = \alpha(p'(x)(1+x))+\beta(q'(x)(1+x)) = [\alpha(p'(x)) + \beta(q'(x)]\,(1+x) =$
$= [(\alpha p(x))' + (\beta q(x))']\,(1+x) = [\alpha p(x) + \beta q(x)]'\,(1+x) \in S$ ja què $\alpha p(x) + \beta q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$.

Per trobar una base:

Si $p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \rightarrow p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d_3 \in S \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d_3 =$
$= (3ax^2+2bx+c)(1+x) \rightarrow ax^3+bx^2+cx+d_3 = 3ax^3+(3a+2b)x^2+(2b+c)x+c \rightarrow$
$a = 0, b = 0, c = d$.

Per la qual cosa $p(x) = cx + c = c(1+x)$ i $B = \{1+x\}$ base de S.

ii) Ja què $dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$, qualsevol conjunt format per quatre polinomis de distint grau (menor o igual que 3) formen una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Per tant: $B_1 = \{1, 1+x, x^2, x^3\}$ i $B_2 = \{2, 1+x, x^2+1, x^3+x\}$ formen dues bases de $\mathbb{R}_3[x]$ que contenen a B.

18. i) Trobeu un sistema generador del subespai S de $\mathbb{R}^3$, les equacions paramètriques del qual són:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + 2\mu + 3\rho \\ y = \lambda - \mu \\ z = -\lambda - \rho \end{array}\right\}.$$

ii) Trobeu també les equacions implícites del subespai S.

Sol.: i) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \lambda + 2\mu + 3\rho, y = \lambda - \mu, z = -\lambda - \rho\}$.

Si $(x,y,z) \in S \rightarrow (x,y,z) = (\lambda + 2\mu + 3\rho, \lambda - \mu, -\lambda - \rho) = \lambda(1,1,-1) + \mu(2,-1,0) + \rho(3,0,-1)$.

Per la qual cosa un sistema generador de S és $\{(1,1,-1), (2,-1,0), (3,0,-1)\}$.

ii) Les equacions implícites les trobarem al eliminar els paràmetres. És a dir, resolent el sistema anterior com a incògnites els paràmetres.

Per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \\ -1 & 0 & -1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & 3 & x-y \\ 0 & 2 & 2 & x+z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & 3 & x-y \\ 0 & 0 & 0 & x+2y+3z \end{pmatrix}.$$

Les equacions implícites s'obtenen exigint que $rang(A/B) = rang(A) \rightarrow$

$x + 2y + 3z = 0$.

19. En el $\mathbb{R}^4$-espai vectorial siguen $S, T \leq \mathbb{R}^4$ tal que:
$S = \langle (1,2,0,0), (1,0,0,1) \rangle$, $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+t = 0, 3y+4t = 0\}$.
Trobeu la base i dimensió de S, T, $S+T$, $S \cap T$.

Sol.: Ja què els vectors $B_1 = \{(1,2,0,0), (1,0,0,1)\}$ són linealment independents i $dim(S) = 2$, formen base.

$T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+t = 0, 3y+4t = 0\}$.

$$\left.\begin{array}{r} y+t = -x \\ 3y+4t = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1}{3}t, \quad y = \frac{-4}{3}t.$$

Si $(x,y,z,t) \in T \rightarrow (x,y,z,t) = (\frac{1}{3}t, \frac{-4}{3}t, z, t) = t(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 0, 1) + z(0,0,1,0)$.

Base de T és $B_2 = \left\{(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 0, 1), (0,0,1,0)\right\}$ i $dim(T) = 2$.

Base de $S+T$. Considerem els vectors de les bases de S i de T i determinem els que siguen L.I.

$$\begin{array}{c} (1,2,0,0) \\ (1,0,0,1) \\ (0,0,1,0) \\ (1,-4,0,3) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,2,0,0) \\ (0,-2,0,1) \\ (0,0,1,0) \\ (0,-6,0,3) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,2,0,0) \\ (0,-2,0,1) \\ (0,0,1,0) \\ (0,0,0,0) \end{array} \rightarrow B_3 = \{(1,2,0,0), (1,0,0,1), (0,0,1,0)\}$$

és base de $S+T$.

Per la qual cosa $dim(S+T) = 3$.

Base de $S \cap T$. Si $(x,y,z,t) \in S \cap T \rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x,y,z,t) \in S \rightarrow (x,y,z,t) = \alpha(1,2,0,0) + \beta(1,0,0,1) \\ (x,y,z,t) \in T \rightarrow (x,y,z,t) = \lambda(0,0,1,0) + \mu(1,-4,0,3 \end{array}\right.$

Aleshores, $(\alpha+\beta, 2\alpha, 0, \beta) = (\mu, -4\mu, \lambda, 3\mu) \rightarrow \lambda = 0$, $\alpha = -2\mu$, $\beta = 3\mu \rightarrow$ $(x,y,z,t) = -2\mu(1,2,0,0) + 3\mu(1,0,0,1) = \mu(1,-4,0,3)$.

Per tant $B_4 = \{(1,-4,0,3)\}$ és base de $S \cap T$. La $dim(S \cap T) = 1$.

20. Siga $\mathbb{K}^5$ un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ la base canònica.
Siga $W \leq \mathbb{K}^5$ tal que $W = \langle e_1+e_2, e_1-e_3, e_1+e_2+e_3, e_1+2e_3, e_1+e_4+e_5 \rangle$.
Siva $V \leq \mathbb{K}^5$ tal que $V = \langle e_1, e_2, e_3, e_2+e_3, e_1+e_2+2e_4+e_5 \rangle$.

i) Trobeu una base de $W+V$.

ii) Trobeu una base de $W \cap V$.

iii) Comproveu la regla de les dimensions per a aquests subespais.

Sol.: i) En primer lloc determinarem la dimensió.

$$\begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (1,0,-1,0,0) \\ (1,1,1,0,0) \\ (1,0,2,0,0) \\ (1,0,0,1,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,-1,2,0,0) \\ (0,-1,0,1,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,3,0,0) \\ (0,0,1,1,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,1,1) \end{array} \rightarrow$$

$dim(W) = 4.$

El mateix per al subespai V.

$$\begin{array}{c} (1,0,0,0,0) \\ (0,1,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (1,1,0,2,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,0,0,0,0) \\ (0,1,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,1,0,2,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,0,0,0,0) \\ (0,1,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,2,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,0,0,0,0) \\ (0,1,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,2,1) \end{array} \rightarrow$$

$dim(V) = 4.$

Per trobar una base de la suma cal veure els vectors de les bases de W i de V i determinar els que siguen L.I.

$$\begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (1,0,-1,0,0) \\ (1,1,1,0,0) \\ (1,0,0,1,1) \\ (1,0,0,0,0) \\ (0,1,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (1,1,0,2,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,-1,0,1,1) \\ (0,1,0,0,0) \\ (0,1,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,2,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,1,1,1) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,2,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,1,1) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,2,1) \end{array} \sim \begin{array}{c} (1,1,0,0,0) \\ (0,1,1,0,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,1,1) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,0,0) \\ (0,0,0,0,1) \end{array} \rightarrow$$

$dim(W+V) = 5.$

Aleshores una base de $W+V$ seria:

$\{(1,1,0,0,0),(1,0,-1,0,0),(1,1,1,0,0),(1,0,0,1,1),(1,1,0,2,1)\}.$

ii) Per trobar una base de $W \cap V$ cal veure els vectors que pertanyen als dos.

$$\text{Si } x \in W \cap V \rightarrow \begin{cases} x \in W \rightarrow x = \alpha(1,1,0,0,0) + \beta(1,0,-1,0,0) + \gamma(1,1,1,0,0) + \delta(1,0,0,1,1 \\ x \in V \rightarrow x = \lambda(1,0,0,0,0) + \mu(0,1,0,0,0) + \nu(0,0,1,0,0) + \xi(1,1,0,2,1 \end{cases}$$

$(\alpha+\beta+\gamma+\delta, \alpha+\gamma, -\beta+\gamma, \delta, \delta) = (\lambda+\xi, \mu+\xi, \upsilon, 2\xi, \xi) \rightarrow \xi = \delta = 0,$ $\lambda = \alpha+\beta+\gamma,\ \mu = \alpha+\gamma,\ \nu = -\beta+\gamma.$

$(\lambda+\xi, \mu+\xi, \upsilon, 2\xi, \xi) = (\lambda, \mu, \upsilon, 0, 0) = \lambda(1,0,0,0,0) + \mu(0,1,0,0,0) + \nu(0,0,1,0,0) \rightarrow$ $dim(W \cap V) = 3.$

iii) Es complix la regla de les dimensions $dim(W+V) = dim(W) + dim(V) - dim(W \cap V) \rightarrow 5 = 4+4-3.$

21. Considerem en $\mathbb{R}^3$ els subespais S i T tal que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y - z = 0\}$, $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0,\ x + z = 0\}.$

Demostreu que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$ i descomposeu el vector $(1,2,3)$ segons S i T .

Sol.: $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$ sii a) $\mathbb{R}^3 = S + T$ b) $S \cap T = \varnothing$.

a) Si $(x,y,z) \in S \to (x,y,z) = (x,y,y) = x(1,0,0) + y(0,1,1) \to B = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$ base de S.

Si $(x,y,z) \in T \to (x,y,z) = (x,0,-x) = x(1,0,-1) \to B' = \{(1,0,-1)\}$ base de T.

$$\begin{matrix} (1,0,0) \\ (0,1,1) \\ (1,0,-1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (1,0,0) \\ (0,1,1) \\ (0,0,1) \end{matrix} \to dim(S+T) = 3 \to \mathbb{R}^3 = S + T\ .$$

b) Si $(x,y,z) \in S \cap T \to \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \in S \to (x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) \\ (x,y,z) \in T \to (x,y,z) = \lambda(1,0,-1) \end{array} \right.$

$(\alpha,\beta,\beta) = (\lambda,0,-\lambda) \to \alpha = \beta = \lambda = 0 \to S \cap T = \varnothing$.

$$(1,2,3) = \rho(1,0,0) + \sigma(0,1,1) + \delta(1,0,-1) \to \left\{ \begin{array}{c} 1 = \rho + \delta \\ 2 = \sigma \\ 3 = \sigma - \delta \end{array} \right. \to$$

$\rho = 2$, $\sigma = 2$, $\delta = -1$.

$(1,2,3) = 2(1,0,0) + 2(0,1,1) + (-1)(1,0,-1) = (2,2,2) + (-1,0,1)$.

22. Siguen els subespais de $\mathbb{R}_3[x]$, $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ p(x) = p'(x)(1+x)\}$, $T = \{a + bx^2 + cx^3 \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

i) Demostreu que $\mathbb{R}_3[x] = S \oplus T$ i escriviu el vector $x^2 + 2x + 1$ coma a suma d'un vector de S i un de T. Raoneu si aquesta descomposició és única.

ii) Determineu un subespai vectorial W de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $dim(W + T) = 4$ i $dim(W \cap T) = 2$.

Sol.: i) $\mathbb{R}_3[x] = S \oplus T$ sii a) $\mathbb{R}_3[x] = S + T$ b) $S \cap T = \varnothing$.

a) Segons l'exercici 17, $B_1 = \{1 + x\}$ és base de S.

$T = \{a + bx^2 + cx^3 \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\} = \langle 1, x^2, x^3 \rangle \to B_2 = \{1, x^2, x^3\}$ és base de T.

$$\begin{matrix} (1,1,0,0) \\ (1,0,0,0) \\ (0,0,1,0) \\ (0,0,0,1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (1,1,0,0) \\ (0,1,0,0) \\ (0,0,1,0) \\ (0,0,0,1) \end{matrix} \to dim(S+T) = 4 = dim(\mathbb{R}_3[x]).$$

b) $r(x) \in S \cap T \to \left\{ \begin{array}{l} r(x) \in S \to r(x) = \alpha(1,1,0,0) \\ r(x) \in T \to r(x) = \lambda(1,0,0,0) + \mu(0,0,1,0) + \rho(0,0,0,1) \end{array} \right.$

$(\alpha,\alpha,0,0) = (\lambda,0,\mu,\rho) \to \alpha = \lambda = \mu = \rho = 0 \to S \cap T = \varnothing$.

$1 + 2x + x^2 = \alpha(1,1,0,0) + (\lambda,0,\mu,\rho) = (\alpha+\lambda,\alpha,\mu,\rho) = (1,2,1,0) \to \alpha = 2$, $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $\rho = 0$.

Per la qual cosa $1+2x+x^2=(2+2x)+(-1+x^2)\in S+T$.

La descomposició és única ja què la suma és directa.

ii) Si tenim en compte la regla de les dimensions, $dim(W+T)=dim(W)+dim(T)-dim(W\cap T)=4\rightarrow dim(W)=3$.

Elegim $W=\left\langle 1,1+x,x^2\right\rangle$. Aleshores $W+T=\mathbb{R}_3[x]=\left\langle 1,1+x,x^2,x^3\right\rangle$, $W\cap T=\left\langle 1,x^2\right\rangle$.

23. Estudieu si les següents aplicacions entre $\mathbb{R}$-espais vectorials són lineals. En les lineals, classifiqueu-les calculant prèviament el nucli i la imatge.

i) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3$ / $f(x)=(0,x^2,x)$

ii) $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ / $f((x,y,z))=(x+3y,3x-y)$.

iii) $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ / $f((x,y,z))=xy+z$.

iv) $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ / $f((x,y))=(x+y,x-3)$.

v) $f:\mathbb{R}_3[x]\rightarrow\mathbb{R}_3[x]$ / $f(p(x))=xp'(x)-p(x)$.

vi) $f:M_n(\mathbb{R})\rightarrow M_n(\mathbb{R})$ / $f(A)=2(A+A^t)$.

vii) $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ / $f(a+bi)=bi$.

viii) Estudieu l'aplicació anterior suposant que $\mathbb{C}=\mathbb{C}$-espai vectorial.

Sol.: i) Una aplicació f és lineal sii $f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=\lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$ $\forall(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

L'aplicació no és lineal. Contraexemple: $f(1)+f(2)\neq f(1+2)$.

En efecte, $f(1)+f(2)=(0,1,1)+(0,4,2)=(0,5,3)\neq(0,9,3)=f(3)$.

ii) $f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')=((\lambda x+\mu x')+3(\lambda y+\mu y'),3(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y'))=$

$(\lambda(x+3y)+\mu(x'+3y'),\lambda(3x-y)+\mu(3x'-y'))=(\lambda(x+3y),\lambda(3x-y))+(\mu(x'+3y'),\mu(3x'-y'))=$

$\lambda(x+3y,3x-y)+\mu(x'+3y',3x'-y')=\lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$.

$Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ f((x,y,z))=(0,0)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x+3y,3x-y)=(0,0)\right\}=$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+3y=0,3x-y)=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x=0,y=0,\forall z\in\mathbb{R}\right\}=\{(0,0,z)\}\rightarrow$

$Ker(f)=\langle(0,0,1)\rangle\neq(0,0,0)$

Per la qual cosa f no és injectiva.

$Im(f)=f(x,y,z)=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ /\ \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x+3y,3x-y)=(\alpha,\beta)\right\}\rightarrow$

$x=\dfrac{\alpha+3\beta}{10},y=\dfrac{3\alpha-\beta}{10},\forall z$

Això vol dir què $Im(f)=\mathbb{R}^2$ i per la qual cosa f és suprajectiva. Aleshores f és epimorfisme.

També $Im(f) = f(x,y,z) = (x+3y, 3x-y) = x(1,3) + y(3,-1)$.

Com $\{(1,3),(3,-1)\}$ és base, $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

iii) L'aplicació no és lineal. Contraexemple: $f(1,1,1) + f(1,2,0) \neq f(2,3,1)$.

iv) L'aplicació no és lineal. Contraexemple: $f(1,1) + f(2,1) \neq f(3,2)$.

v) Una aplicació f és lineal sii $f(\lambda p(x)+\mu q(x)) = \lambda f(p(x))+\mu f(q(x))$ $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$f(\lambda p(x) + \mu q(x)) = x(\lambda p(x) + \mu q(x))' - (\lambda p(x) + \mu q(x)) = x(\lambda p'(x) + \mu q'(x)) - (\lambda p(x) + \mu q(x)) = x\lambda p'(x) + x\mu q'(x)) - \lambda p(x) - \mu q(x)) =$
$\lambda(xp'(x) - p(x)) + \mu(xq'(x) - q(x)) = \lambda f(p(x)) + \mu f(q(x))$.

$Ker(f) = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ f(p(x)) = 0\} =$
$= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ xp'(x) - p(x) = 0\} =$
$\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ x(3ax^2 + 2bx + c) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0\} =$
$= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ 2ax^3 + bx^2 - d = 0\} = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ a = b = d = 0, \ \forall c\} =$
$= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ p(x) = cx \ \forall c \in \mathbb{R}\} = \langle x \rangle \neq \{0\} \rightarrow f$ no és injectiva.

$Im(f) = f(p(x)) = 2ax^3 + bx^2 - d = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \rightarrow$Identificant $a = \alpha/2$, $b = \beta$, $c = 0$, $d = -\delta$.

Aleshores $Im(f) = \langle 1, x^2, x^3 \rangle \neq \mathbb{R}_3[x] \rightarrow f$ no és suprajectiva.

Els polinomis de $\mathbb{R}_3[x]$ que no tenen terme de primer grau són els únics que tenen antiimatge.

Per la qual cosa f és un endomorfisme.

vi) $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \ / \ f(A) = 2(A + A^t)$.

L'aplicació f és lineal sii $f(\lambda A+\mu B) = \lambda f(A)+\mu f(B)$ $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$f(\lambda A + \mu B) = 2\left[(\lambda A + \mu B) + (\lambda A + \mu B)^t\right] = 2\left[\lambda A + \mu B + \lambda A^t + \mu B^t\right] = 2\left[\lambda(A + A^t) + \mu(B + B^t)\right] =$
$= \lambda\left[2(A + A^t)\right] + \mu\left[2(B + B^t)\right] = \lambda f(A) + \mu f(B)$.

$Ker(f) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ f(A) = 0\} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ 2(A + A^t) = 0\} =$
$= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = -A\} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A \ antisimètrica\} \neq 0 \rightarrow f$ no és injectiva.

$Im(f) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \exists A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ f(A) = B\} =$
$= \{B \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \exists A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ 2(A + A^t) = B\}$.

Desenvolupem $2(A+A^t) = B \rightarrow A+A^t = \dfrac{B}{2} \rightarrow (A+A^t)^t = (B/2)^t \rightarrow A^t+A = \dfrac{B^t}{2} \rightarrow \dfrac{B}{2} = \dfrac{B^t}{2} \rightarrow B = B^t \rightarrow B$ simètrica.

Aleshores $Im(f) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ B \ simètrica\} \neq M_n(\mathbb{R}) \rightarrow f$ no és suprajectiva.

Per la qual cosa f és un endomorfisme.

vii) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \ / \ f(a+bi) = bi$.

L'aplicació f és lineal sii $f(\lambda(a+bi) + \mu(c+di)) = \lambda f(a+bi) + \mu f(c+di)$ $\forall a+bi, c+di \in \mathbb{C}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$f(\lambda(a+bi)+\mu(c+di)) = f((\lambda a+\mu c)+(\lambda b+\mu d)i)) = (\lambda b+\mu d)i = (\lambda b)i+(\mu d)i =$ $\lambda(bi) + \mu(di) =$

$\lambda f(a+bi) + \mu f(c+di)$.

$Ker(f) = \{a+bi \in \mathbb{C} \ / \ f(a+bi) = 0\} = \{a+bi \in \mathbb{C} \ / \ bi = 0\} = \{a+bi \in \mathbb{C} \ / \ b = 0\} =$ $\{a \ / \ a \in \mathbb{R}\} \neq 0 \rightarrow f$ no és injectiva.

$Im(f) = \{c+di \in \mathbb{C} \ / \ \exists a+bi \in \mathbb{C} \ / \ f(a+bi) = c+di\} = \{c+di \in \mathbb{C} \ / \ bi = c+di\}$.

Desenvolupem $bi = c+di \rightarrow$ Identificant $d = b$, $c = 0$.

$Im(f) = \{c+di \in \mathbb{C} \ / \ d = b, \ c = 0\} = \{di \in \mathbb{C} \ / \ d \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{C} \rightarrow f$ no és suprajectiva.

Per la qual cosa f és un endomorfisme.

viii) Estudieu l'aplicació anterior suposant que $\mathbb{C} = \mathbb{C}$-espai vectorial.

L'aplicació f és lineal sii $f((\lambda+\mu i)(a+bi) + (\alpha+\beta i)(c+di)) =$

$= (\lambda+\mu i)f(a+bi) + (\alpha+\beta i)f(c+di) \ \forall a+bi, c+di, \lambda+\mu i, \alpha+\beta i \in \mathbb{C}$.

L'aplicació no és lineal. Contraexemple: $f(i(1+i)) \neq if(1+i)$.

24. Siga $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per:

$$f(1,0,0) = (1,0,0,1), \qquad f(0,1,0) = (0,-1,0,0), \qquad f(0,0,1) = (-1,0,0,-1).$$

i) Trobeu la imatge per f d'un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

ii) Determineu una base de $Ker(f)$ i una de $Im(f)$.

iii) Completeu la base de $Ker(f)$ obtesa en l'apartat anterior fins obtenir una base de $\mathbb{R}^3$.

Sol.: i) $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \rightarrow f\ (x,y,z) = xf(1,0,0) +$ $yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = x(1,0,0,1) + y(0,-1,0,0) + z(-1,0,0,-1) =$

$= (x-z, -y, 0, x-z) \rightarrow f\ (x,y,z) = (x-z, -y, 0, x-z)$.

ii) $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0,0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x-z, -y, 0, x-z) = (0,0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z, \ y = 0\} =$

$= \langle (1,0,1) \rangle$.

$Im(f) = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\} =$

$= \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \;/\; (x-z,-y,0,x-z) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\} = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \alpha=\delta, \gamma=0, \forall\beta$
$= \{(\alpha,\beta,0,\alpha) \in \mathbb{R}^4\} = \{\alpha(1,0,0,1)+\beta(0,1,0,0)\} = \langle(1,0,0,1),(0,1,0,0)\rangle$.

iii) $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

25. Trobeu una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que el seu nucli siga generat pels vectors $(-1,0,0,1)$ i $(1,3,2,0)$ i la seua imatge ho siga pels vectors $(1,1,1)$ i $(0,-2,1)$.

Sol.: Sabem que $\{(-1,0,0,1),(1,3,2,0)\}$ és una base de $Ker(f)$ ja què són L.I. i generen el nucli.

Completem aquesta base amb dos vectors per tenir una base de $\mathbb{R}^4$.

Siga $B = \{(-1,0,0,1),(1,3,2,0),(0,0,1,0),(0,1,0,0)\}$ (és base de $\mathbb{R}^4$ ja què els 4 vectors són independents).

Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(-1,0,0,1) = (0,0,0)$, $f(1,3,2,0) = (0,0,0)$, $f(0,0,1,0) = (1,1,1)$, $f(0,1,0,0) = (0,-2,1)$.

Així $\forall(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \to (x,y,z,t) = \alpha(-1,0,0,1)+\beta(1,3,2,0)+\gamma(0,0,1,0)+\delta(0,1,0,0) \to \begin{cases} x=-\alpha+\beta \\ y=3\beta+\delta \\ z=2\beta+\gamma \\ t=\alpha \end{cases} \to$

$\alpha=t$, $\beta=x+t$, $\gamma=-2x+z-2t$, $\delta=-3x+y-3t$.

Aleshores $(x,y,z,t) = t(-1,0,0,1)+(x+t)(1,3,2,0)+(-2x+z-2t)(0,0,1,0)+(-3x+y-3t)(0,1,0,0)$.

$f(x,y,z,t) = (-2x+z-2t)f(0,0,1,0)+(-3x+y-3t)f(0,1,0,0) = (-2x+z-2t)(1,1,1)+(-3x+y-3t)(0,-2,1) = (-2x+z-2t, 4x-2y+z+4t, -5x+y+z-5t)$.

i) Per construcció f és lineal ja què B és una base de $\mathbb{R}^4$.

ii) Per la construcció $Im(f) = \langle(1,1,1),(0,-2,1)\rangle \to dim(Im(f)) = 2$ ja què $(1,1,1)$ i $(0,-2,1)$ són independents.

26. i) Trobeu un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que:

a) $f(1,0,0)$ siga proporcional a $(0,0,1)$. b) $f^2 = f$.

c) $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+z=0\}$.

ii) Estudieu si aquest endomorfisme és únic.

Sol.: i) $f(1,0,0) = \alpha(0,0,1)$.

$Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+z=0\} = \{(x,y,-x)\} = \langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle$.

Com $\{(1,0,0),(1,0,-1),(0,1,0)\}$ formen base de $\mathbb{R}^3$ per ser independents, $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x,y,z) = a(1,0,0)+b(1,0,-1)+c(0,1,0) \to$

$(x, y, z) = (a + b, c, -b) \rightarrow a = x + z, b = -z, c = y.$

$(x, y, z) = (x + z)(1, 0, 0) + (-z)(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) \rightarrow$

$f(x, y, z) = (x + z)f(1, 0, 0) + (-z)f(1, 0, -1) + yf(0, 1, 0) = (x + z)f(1, 0, 0) =$

$= (x + z)(0, 0, \alpha) = (0, 0, \alpha(x + z)).$

Però com $f^2 = f \rightarrow f(x, y, z) = f(f(x, y, z)) = f(0, 0, \alpha(x + z)) = (0, 0, \alpha^2(x + z)) =$

$= (0, 0, \alpha(x + z)) \rightarrow \alpha^2(x + z) = \alpha(x + z)\ \forall x, z \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha^2 = \alpha.$

Si $\alpha = 0 \longrightarrow f$ és l'aplicació idènticament nul·la, la qual cosa és impossible ja què $Ker(f) = \langle(1, 0, -1), (0, 1, 0)\rangle$.

Si $\alpha = 1 \longrightarrow f$ és tal que $f(x, y, z) = (0, 0, x + z)\ \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ i a més a més f és única.

Part I

TEMA 9. MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS

1. MATRIUS. PRIMERES DEFINICIONS

Suposem dos conjunts finits: $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definició 1. *Una* **matriu** *de grandària $m \times n$ sobre un cos $\mathbb{k}$ és una aplicació* $\begin{array}{ccc} A : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ (i, j) & \rightsquigarrow & a_{ij} \end{array}$ *tal que $A(i, j) = (a_{ij}) = A$, on $card(I) = m =$ nombre de $files$, $card(J) = n =$ nombre de columnes.*

Notació: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ indicarà que A és una matriu de grandària $m \times n$ o una matriu $m \times n$ sobre el cos $\mathbb{k}$.

Definició 2. *Anomenem* **diagonal principal** *d'una matriu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ els elements $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}$ on $p =$ mínim (m, n).*

Definició 3. *Direm que dues matrius són iguals si, i sols si, són iguals els escalars que ocupen el mateix lloc.*

És a dir, $(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \ \forall i \ \ \forall j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$.

1.1. Tipus de matrius.

1. **Matriu fila** és aquella matriu que sols té una fila. La seua grandària serà $1 \times n$.
2. **Matriu columna** és aquella matriu que sols té una columna. La seua grandària serà $m \times 1$.
3. **Matriu quadrada** és aquella matriu que té igual nombre de files que de columnes. És a dir, $m = n$.
4. **Matriu rectangular** és aquella matriu on el nombre de files és distint al nombre de columnes. És a dir, $m \neq n$.
5. **Matriu triangular superior** és aquella matriu on tots els elements situats per davall de la diagonal principal són nuls. És a dir, $a_{ij} = 0 \quad i > j$.
6. **Matriu triangular inferior** és aquella matriu on tots els elements situats per damunt de la diagonal principal són nuls. És a dir, $a_{ij} = 0 \quad i < j$.
7. **Matriu diagonal** és aquella matriu on tots els elements no situats en la diagonal principal són nuls. És a dir, $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$.

8. **Matriu escalar** és aquella matriu diagonal on tots els elements de la diagonal principal són iguals. És a dir, $a_{ij} = 0 \quad i \neq j \wedge a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{pp} = \lambda$ on $p = \textit{mínim}\ (m, n)$.

9. **Matriu identitat** és aquella matriu quadrada on tots els elements de la diagonal principal són iguals a la unitat i la resta són nuls. És a dir, seria la matriu quadrada i escalar, on l'element de la diagonal principal seria la unitat del cos.

10. **Matriu nul·la** és aquella matriu on tots els seus elements són nuls.

11. **Matriu trasposada** és aquella matriu que resulta de canviar les files per les columnes.

12. **Matriu simètrica** és aquella matriu quadrada on els elements no situats en la diagonal principal són simètrics.

13. **Matriu antisimètrica** és aquella matriu quadrada on els elements no situats en la diagonal principal són simètrics i a més a més canviats de signe. El que vol dir que tots els elements de la diagonal principal són nuls.

2. L'ESPAI VECTORIAL DE LES MATRIUS

Suposem $M_{m\times n}(\mathbb{k})$ el conjunt de les matrius de grandària $m \times n$ sobre $\mathbb{k}$. És a dir, $M_{m\times n}(\mathbb{k}) = \{A \ / \ A = (a_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n\}$.

Proposició 1. $M_{m\times n}(\mathbb{k}) = \mathbb{k} - e.v.$

Demostració:
i) $(M_{m\times n}(\mathbb{k}), +)$és un grup abelià.

Definim
$$\begin{array}{rcl} + : M_{m\times n}(\mathbb{k}) \times M_{m\times n}(\mathbb{k}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{k}). \\ ((a_{ij}), (b_{ij})) & \rightsquigarrow & (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}). \end{array}$$

1. $+$ és una llei de composició interna ja que en sumar dos matrius ens dóna una matriu de la mateixa grandària.

2. Associativa. $\{(a_{ij}) + (b_{ij})\} + (c_{ij}) = (a_{ij}) + \{(b_{ij}) + (c_{ij})\}$.

   $\{(a_{ij}) + (b_{ij})\} + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (\{a_{ij} + b_{ij}\} + c_{ij}) = (a_{ij} + \{b_{ij} + c_{ij}\}) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij}) + \{(b_{ij}) + (c_{ij})\}$.

3. Neutre. $(a_{ij}) + (e_{ij}) = (e_{ij}) + (a_{ij}) = (a_{ij})$.

   $(a_{ij}) + (e_{ij}) = (a_{ij}) \rightarrow (a_{ij} + e_{ij}) = (a_{ij}) \rightarrow a_{ij} + e_{ij} = a_{ij} \rightarrow e_{ij} = 0 \rightarrow (e_{ij}) = (0)$.

   $(e_{ij}) + (a_{ij}) = (a_{ij}) \rightarrow (e_{ij} + a_{ij}) = (a_{ij}) \rightarrow e_{ij} + a_{ij} = a_{ij} \rightarrow e_{ij} = 0 \rightarrow (e_{ij}) = (0)$.

   L'element neutre és la matriu nul·la.

4. Simètric. $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = (0)$.
   $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (0) \to (a_{ij} + b_{ij}) = (0) \to a_{ij} + b_{ij} = 0 \to b_{ij} = -a_{ij} \to (b_{ij}) = -(a_{ij})$.
   $(b_{ij}) + (a_{ij}) = (0) \to (b_{ij} + a_{ij}) = (0) \to b_{ij} + a_{ij} = 0 \to b_{ij} = -a_{ij} \to (b_{ij}) = -(a_{ij})$.
   El simètric d'una matriu és la seua matriu oposada.

5. Commutatiu. $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$.
   $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$.

Definim la llei de composició externa:

$$\begin{array}{rcl} \circ : \mathbb{k} \times M_{m\times n}(\mathbb{k}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{k}) \\ (\alpha, (a_{ij})) & \rightsquigarrow & \alpha \circ (a_{ij}) \end{array} \quad \text{on } \alpha \circ (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}).$$

La llei $\circ$ és externa, ja que en multiplicar un escalar per una matriu ens dóna una nova matriu de la mateixa grandària.

ii) Demostrarem que aquesta llei externa compleix els axiomes dels espais vectorials.

A-1. $(k_1+k_2)\circ(a_{ij}) = \{k_1 \circ (a_{ij})\} + \{k_2 \circ (a_{ij})\}$. $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{k}\ \forall (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.
$(k_1 + k_2) \circ (a_{ij}) = ((k_1 + k_2)a_{ij}) = (k_1a_{ij}) + (k_2a_{ij}) = \{k_1 \circ (a_{ij})\} + \{k_2 \circ (a_{ij})\}$.

A-2. $(k_1k_2) \circ (a_{ij}) = k_1 \{k_2 \circ (a_{ij})\}\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{k}\ \ \forall (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.
$(k_1k_2) \circ (a_{ij}) = (\{k_1k_2\} (a_{ij})) = (\{k_1k_2\} a_{ij}) = (k_1 \{(k_2a_{ij})\}) = k_1 \{k_2 \circ (a_{ij})\}$.

A-3. $k \circ \{(a_{ij}) + (b_{ij})\} = k \circ (a_{ij}) + k \circ (b_{ij})\ \forall k \in \mathbb{k}\ \ \forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.
$k \circ \{(a_{ij}) + (b_{ij})\} = k \circ (a_{ij} + b_{ij}) = (k \{a_{ij} + b_{ij}\} = (ka_{ij} + kb_{ij}) = (ka_{ij}) + (kb_{ij}) = k \circ (a_{ij}) + k \circ (b_{ij})$.

A-4. $1_{\mathbb{k}} \circ (a_{ij}) = (a_{ij})$ sent $1_{\mathbb{k}}$ l'element unitat del cos $\mathbb{k}$ $\forall (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.
$1_{\mathbb{k}} \circ (a_{ij}) = (1_{\mathbb{k}}a_{ij}) = (a_{ij})$.

Proposició 2. *$Dim(M_{m\times n}(\mathbb{k})) = m \times n$.*

Demostració:

Si designem per I_{ij} la matriu tal que tots els seus elements són nuls salvat el que ocupa el lloc ij que val 1.

$I_{ij} = \{I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{1n}, I_{21}, I_{22}, \ldots, I_{2n}, \ldots, I_{m1}, I_{m2}, \ldots, I_{mn}\} =$

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\\ \ldots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&\cdots&0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Aquest sistema és base ja què:

i) És sistema generador. $\forall(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k}) \Rightarrow (a_{ij})$ és combinació lineal de I_{ij}.
$\forall(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k}) \longrightarrow (a_{ij}) = a_{11}I_{11} + a_{12}I_{12} + \ldots + a_{1n}I_{1n} + a_{21}I_{21} + a_{22}I_{22} + \ldots + a_{2n}I_{2n} + \ldots + a_{m1}I_{m1} + a_{m2}I_{m2} + \ldots + a_{mn}I_{mn} = \sum\limits_{i,j} a_{ij}I_{ij}$.

ii) És sistema lliure. $\sum\limits_{i,j} a_{ij}I_{ij} = (0) \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i \quad \forall j$.
$\sum\limits_{i,j} a_{ij}I_{ij} = (0) \longrightarrow (a_{ij}) = (0) \longrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i \quad \forall j$.

3. MATRIU ASSOCIADA A UNA APLICACIÓ LINEAL

Suposem $V, V' = \mathbb{k} - e.v.\ /\ dim(V) = n \wedge dim(V') = m$.

Suposem $\pounds(V, V')$ el conjunt de les aplicacions lineals entre $V, V' \wedge f \in \pounds(V, V')$.

Siga $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de $V \wedge B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de V'.

Pel teorema d'existència i unicitat de les aplicacions lineals del tema anterior, l'aplicació f queda determinada de manera inequívoca en el moment en què siguen coneguts els vectors $f(u_i) \in V'$.

Així, suposem que $f(u_i) = w_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}v_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. És a dir,

$f(u_1) = w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m$.
$f(u_2) = w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m$.
$\vdots$
$f(u_n) = w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m$.
$f(u_1) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$.
$f(u_2) = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$.
$\vdots$
$f(u_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$.

En escriure les coordenades d'aquests vectors en columna, obtenim la matriu associada a l'aplicació lineal f en les bases B i B' .

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_n) \end{array} \end{array} = M(f;B,B').$$

3.1. Equacions d'una aplicació lineal. Suposem que $x \in V \quad \forall x \rightarrow x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)_B \rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, on $x_i \in \Bbbk$.

Suposem que $f(x) = y = (y_1,y_2,\ldots,y_m)_{B'} \rightarrow y = \sum_{j=1}^{m} y_j v_j$, on $y_j \in \Bbbk$.

$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i) = x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m) + \ldots. + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)v_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)v_2 + \ldots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)v_m = y_1v_1 + y_2v_{2+} \ldots + y_mv_m.$

En identificar, obtindrem el sistema:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n. \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n. \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Aquestes són les equacions de l'aplicació lineal f.

Matricialment serien:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exercici 1. *Si* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \ f((x,y,z)) = (x+y, y+z)$.
Siga $B = \{(1,1,1),(0,1,-1),(1,0,0)\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$.
Siga $B' = \{(1,2),(0,1)\}$ *una base de* $\mathbb{R}^2$.
Trobeu la matriu associada a l'aplicació lineal f *respecte a les bases* B *i* B'.

Solució:
$f(1,1,1) = (2,2) = \alpha(1,2) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha = 2,\ \beta = -2.$
$f(0,1,-1) = (1,0) = \alpha'(1,2) + \beta'(0,1) \longrightarrow \alpha' = 1,\ \beta' = -2.$
$f(1,0,0) = (1,0) = \alpha''(1,2) + \beta''(0,1) \longrightarrow \alpha'' = 1,\ \beta'' = -2.$
$A = M(f;B,B') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Si volguérem calcular la matriu associada a l'aplicació lineal f respecte a les bases $B = B_c$ =Base canònica i B', ens donaria una altra matriu:
$f(1,0,0) = (1,0) = \alpha(1,2) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha = 1,\ \beta = -2.$
$f(0,1,0) = (1,1) = \alpha'(1,2) + \beta'(0,1) \longrightarrow \alpha' = 1,\ \beta' = -1.$
$f(0,0,1) = (0,1) = \alpha''(1,2) + \beta''(0,1) \longrightarrow \alpha'' = 0,\ \beta'' = 1.$
$A' = M(f; B_c, B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Si volguérem calcular la matriu associada a l'aplicació lineal f respecte a les bases B i $B' = B'_c$ =Base canònica, ens donaria una altra matriu:
$f(1,1,1) = (2,2) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha = 2,\ \beta = 2.$
$f(0,1,-1) = (1,0) = \alpha'(1,0) + \beta'(0,1) \longrightarrow \alpha' = 1,\ \beta' = 0.$
$f(1,0,0) = (1,0) = \alpha''(1,0) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha'' = 1,\ \beta'' = 0.$
$A'' = M(f; B, B'_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Si volguérem calcular la matriu associada a l'aplicació lineal f respecte a les bases $B = B_c =$ Base canònica i $B' = B'_c$ =Base canònica, ens donaria una altra matriu:
$f(1,0,0) = (1,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0.$
$f(0,1,0) = (1,1) = \alpha'(1,0) + \beta'(0,1) \longrightarrow \alpha' = 1,\ \beta' = 1.$
$f(0,0,1) = (0,1) = \alpha''(1,0) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha'' = 0,\ \beta'' = 1.$
$A''' = M(f; B_c, B'_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
En traure les equacions de f utilitzant aquesta matriu, obtindríem:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y+z \end{pmatrix}$. És a dir, $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$.
Més endavant veurem la relació que existeix entre aquestes matrius.

4. ISOMORFISME ENTRE APLICACIONS LINEALS I MATRIUS

Teorema 1. *Suposem* $V, V' = \mathbb{k} - e.v.\ /\ dim(V) = n \wedge dim(V') = m$.
Suposem $\mathcal{L}(V, V')$ *el conjunt de les aplicacions lineals entre* $V, V' \wedge f \in \mathcal{L}(V, V')$.
Siga $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *una base de* $V \wedge B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ *una base de* V'.
$\Rightarrow \mathcal{L}(V, V') \simeq M_{m\times n}(\mathbb{k})$.

Demostració:
Definim $\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{L}(V,V') & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{k}). \\ f & \rightsquigarrow & \Psi(f) = (a_{ij}) \end{array}$
on $(a_{ij}) \in M(f; B, B')$ (matriu associada a f en les bases B *i* B').
Caldrà demostrar que Ψ és un isomorfisme.
i) Ψ està ben definida, ja que $(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.
ii) Ψés lineal.
$\Psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g)$.

$(\alpha f + \beta g)(u_i) = (\alpha f)(u_i) + (\beta g)(u_i) = \alpha\{f(u_i)\} + \beta\{g(u_i)\} = \alpha\sum_{j=1}^{m} a_{ji}v_j + \beta\sum_{j=1}^{m} b_{ji}v_j = \sum_{j=1}^{m}(\alpha a_{ji} + \beta b_{ji})v_j \longrightarrow \Psi(\alpha f + \beta g) = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})$.

$$\left.\begin{array}{l} f(u_i) = w_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}v_j \longrightarrow \Psi(f) = (a_{ij}). \\ g(u_i) = w_i' = \sum_{j=1}^{m} b_{ji}v_j \longrightarrow \Psi(g) = (b_{ij}). \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha\Psi(f)+\beta\Psi(g) = \alpha(a_{ij})+\beta(b_{ij}) =$$

$(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})$.

iii) Ψés injectiva.

$ker(\Psi) = \{f \ / \ f \in \pounds(V,V') \ / \ \Psi(f) = (0)\} \rightarrow \{f \ / \ f \in \pounds(V,V') \ / \ (a_{ij}) = (0)\} = \{f \ / \ f \in \pounds(V,V') \ / \ a_{ij} = 0\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Però } f(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}v_j = 0. \\ \text{Com què } a_{ij} = 0 = a_{ji}. \end{array}\right\} \longrightarrow f(u_i) = 0 \quad \forall u_i \rightarrow f = 0.$$

Per la qual cosa $ker(\Psi) = 0$ i Ψ és injectiva.

iv) Ψ és suprajectiva.

Ψ serà suprajectiva quan $\forall (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\Bbbk) \quad \exists f \in \pounds(V,V') \ / \ \Psi(f) = (a_{ij})$.

Si $\Psi(f) = (a_{ij})$,les columnes d'aquesta matriu seran les coordenades de cada vector de la base de V , i per la qual cosa $f \in \pounds(V,V')$.

Proposició 3. $Dim(\pounds(V,V')) = dim(V) \times dim(V')$.

Demostració:

Com que Ψ és un isomorfisme, $\pounds(V,V') \simeq M_{m\times n}(\Bbbk) \rightarrow dim(\pounds(V,V')) = dim(M_{m\times n}(\Bbbk)) = m \times n = dim(V') \times dim(V) = dim(V) \times dim(V')$.

5. PRODUCTE DE MATRIUS

5.1. Matrius quadrades. Si $\pounds(V,V) = End(V)$, pel teorema anterior tenim que $\pounds(V,V) \simeq M_n(\Bbbk)$.

Donades $f, g \in \pounds(V,V)$, estudiarem la matriu associada a $g \circ f$.

$f(u_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}u_j$ (sols existeix una base). $g(u_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}u_j$.

$(g \circ f)(u_i) = g[f(u_i)] = g\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}g(u_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left(\sum_{t=1}^{n} b_{tj}u_t\right) = \sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{tj}a_{ji}\right)u_t = \sum_{t=1}^{n} c_{ti}u_t$.

La matriu associada a $g \circ f$ serà $(c_{it}) = C = BA$,on B és la matriu associada a g i A és la matriu associada a f.

Definició 4. *Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$. Si $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$,definim* **producte de dues matrius quadrades** *AB,a una nova matriu $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ tal que $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$.*

5.2. Matrius rectangulars.

Definició 5. *Si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k}) \wedge B = (b_{jt}) \in M_{n\times p}(\mathbb{k})$, definim* **producte de dues matrius rectangulars** *AB, a una nova matriu $C = (c_{it}) \in M_{m\times p}(\mathbb{k})$ tal que $c_{it} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jt}$.*

Nota 1.
1. *Sols podrem calcular el producte de dues matrius rectangulars quan el nombre de columnes de la primera siga igual que el nombre de files de la segona.*
2. *El producte de dues matrius quadrades sempre es podrà calcular.*
3. *El producte de dues matrius no és commutatiu, ja que tampoc ho és la composició de dues aplicacions lineals.*
4. *És possible demostrar que $(End(V), +, \cdot)$ és un anell.*

6. ANELL DE LES MATRIUS QUADRADES

Proposició 4. *$(M_n(\mathbb{k}), +, \cdot)$ és un anell unitari.*

Demostració:
i) $(M_n(\mathbb{k}), +)$ és un grup abelià.
Constitueix un cas particular quan s'estudià l'espai vectorial de les matrius rectangulars de grandària $m \times n$.
ii) $(M_n(\mathbb{k}), \cdot)$és un semigrup unitari.
Definim:

$$\begin{array}{lcl} \cdot : M_n(\mathbb{k}) \times M_n(\mathbb{k}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{k}). \\ ((a_{ij}), (b_{ij})) & \rightsquigarrow & (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (a_{ij} \cdot b_{ij}) = (c_{ij}). \end{array} \quad \text{on } c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}.$$

Aquesta és un llei de composició interna ja que el resultat de multiplicar dues matrius quadrades sempre ens dóna una nova matriu quadrada.

Serà associativa ja que la composició d'aplicacions és associativa.

Si $\Psi(f) = (a_{ij}) = A, \Psi(g) = (b_{ij}) = B,\ \Psi(h) = (c_{ij}) = C$, sabem que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, el que representa $A(BC) = (AB)C$.

L'element neutre (unitari) és la matriu unitat, ja que $AI = IA = A$.

La segona llei és distributiva respecte a la primera, ja que $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$, el que representa $A(B + C) = AB + AC$.

7. GRUP LINEAL

Suposem $A \in M_n(\mathbb{k})$.

Definició 6. *Direm que la matriu quadrada A és* **regular o inversible** *si, i sols si, $\exists B \in M_n(\mathbb{k})$ / $AB = BA = I$.*

Nota 2. *Com que $(M_n(\mathbb{k}), +, \cdot)$ és un anell, $(M_n(\mathbb{k}), \cdot)$ és un semigrup, que vol dir que no tots els elements tenen invers.*

Definició 7. *A aquells elements que tenen invers, són anomenats* **elements unitat** *o simplement* **unitats**. *El conjunt de les unitats de les matrius quadrades es representa per:*
$U(M_n(\mathbb{k})) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) \ / \ \exists B \in M_n(\mathbb{k}) \ / \ AB = BA = I\}$.

Proposició 5. *$U(M_n(\mathbb{k}), \cdot)$ és un grup anomenat* **grup lineal.**

8. MATRIUS I CANVI DE BASE

8.1. I) Matrius associades en distintes bases. Suposem $V, V' = \mathbb{k}\text{−}e.v. \ / \ dim(V) = n \wedge dim(V') = m$.

Suposem $\mathcal{L}(V, V')$ el conjunt de les aplicacions lineals entre $V, V' \wedge f \in \mathcal{L}(V, V')$.
Siga $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de $V \wedge B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de V'.
Suposem $f(u_i) = w_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} v_j$ (1) $\longrightarrow \Psi(f) = (a_{ij}) = A \in M(f; B, B')$.
Caldrà esbrinar què li passarà a la matriu de f en canviar les bases.
És a dir, si $B_1 = \{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$ una base de $V \wedge B_1' = \{v_1', v_2', \ldots, v_m'\}$ una base de V'.
Suposem $f(u_i') = w_i' = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ji} v_j'$ (2) $\longrightarrow \Psi(f) = (b_{ij}) = B \in M(f; B_1, B_1')$.
Si $u_i' = \sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} u_t$, (3) sent $P = (p_{it}) \in M_n(\mathbb{k})$ la matriu del canvi de base de B a B_1 .
Si $v_j' = \sum\limits_{j=1}^{m} q_{rj} v_r$, (4) sent $Q = (q_{jr}) \in M_m(\mathbb{k})$ la matriu del canvi de base de B' a B_1'.

Cal demostrar:
i) $AP = QB$. *ii)* P i Q són inversibles o regulars.
Esquema:

$$\begin{array}{ccc} B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} & \xrightarrow{A} & B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}. \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1}. \\ B_1 = \{u_1', u_2', \ldots, u_n'\} & \xrightarrow{B} & B_1' = \{v_1', v_2', \ldots, v_m'\}. \end{array}$$

Notació: $B = Q^{-1}AP$ o $M(f; B_1, B_1') = M(B_1, B) \cdot M(f; B, B') \cdot M(B', B_1')$.
Demostració:

i) Per (3) $\longrightarrow f(u_i') = f(\sum_{t=1}^{n} p_{ti} u_t) = \sum_{t=1}^{n} p_{ti} f(u_t) \overset{(1)}{=} \sum_{t=1}^{n} p_{ti} (\sum_{j=1}^{m} a_{jt} v_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{t=1}^{n} a_{jt} p_{ti} \right) v_j \longrightarrow$ $\Psi(f) = AP \in M(f, B_1, B')$.

Per (2) $\longrightarrow f(u_i') = \sum_{j=1}^{m} b_{ji} v_j' \overset{(4)}{=} \sum_{j=1}^{m} b_{ji} \left(\sum_{j=1}^{m} q_{rj} v_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} q_{rj} b_{ji} \right) v_j \longrightarrow$ $\Psi(f) = QB \in M(f, B_1, B')$.

ii) Com que $B_1' = \{v_1', v_2', \ldots, v_m'\}$ és base de V', $\forall v_r \in V'$ es pot posar com a combinació lineal dels vectors de la base. És a dir, $v_r = \sum_{l=1}^{m} q_{lr}' v_l'$.

Però per (4) $\longrightarrow v_j' = \sum_{j=1}^{m} q_{rj} v_r$.

Aleshores $\left.\begin{array}{l} v_r = \sum_{l=1}^{m} q_{lr}' v_l' \\ v_j' = \sum_{j=1}^{m} q_{rj} v_r \end{array}\right\} \to v_j' = \sum_{j=1}^{m} q_{rj} \left(\sum_{l=1}^{m} q_{lr}' v_l' \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{m} q_{lr}' q_{rj} \right) v_l' \to$ $Q'Q = I$ ja que $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

De manera anàloga demostrarem que $QQ' = P'P = PP' = I$.

Oservació: $Q'Q = I \to Q' = Q^{-1}$

Per a finalitzar, si $AP = QB \to Q^{-1}(AP) = Q^{-1}(QB) \to Q^{-1}AP = \underbrace{(Q^{-1}Q)}_{I}B =$ B.

Per a recordar: $f(x) = y \to AX = Y$.

$X = PX'$, on P és la matriu canvi de base.

$Y = QY'$, on Q és la matriu canvi de base.

En substituir queda: $AX = Y \to A(PX') = QY' \to (AP)X' = QY' \to$ $(Q^{-1}AP)X' = Y' \to Q^{-1}AP = B$.

Exercici 2. *Si* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \ f((x, y, z)) = (x + y, y + z)$.

Siga $B = \{(1,1,1), (0,1,-1), (1,0,0)\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$.

Siga $B' = \{(1,2), (0,1)\}$ *una base de* $\mathbb{R}^2$.

i) Trobeu la matriu associada a l'aplicació lineal f respecte a les bases B i B'.

ii) Trobeu la matriu associada a l'aplicació lineal f respecte a les bases B_1 i B_1', bases canòniques.

iii) Utilitzant la matriu de l'apartat anterior, comproveu la definició de f.

Solució:

i) Ja està fet anteriorment. $A = M(f; B, B') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

ii) Aplicant la teoria i de manera indirecta:

$$\begin{array}{ccc} B = \{(1,1,1), (0,1,-1), (1,0,0)\} & \xrightarrow{A} & B' = \{(1,2), (0,1)\}. \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1}. \\ B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} & \xrightarrow{B} & B_1' = \{(1,0), (0,1)\}. \end{array}$$

$(1,0,0)=\alpha(1,1,1)+\beta(0,1,-1)+\gamma(1,0,0)\to\alpha=0,\beta=0,\gamma=1.$
$(0,1,0)=\alpha'(1,1,1)+\beta'(0,1,-1)+\gamma'(1,0,0)\to\alpha'=\frac{1}{2},\beta'=\frac{1}{2},\gamma'=-\frac{1}{2}.$
$(0,0,1)=\alpha''(1,1,1)+\beta''(0,1,-1)+\gamma''(1,0,0)\to\alpha''=\frac{1}{2},\beta''=-\frac{1}{2},\gamma''=-\frac{1}{2}.$

$$P=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}.$$

$$B=Q^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Aplicant la teoria, però de manera directa ens donaria: $A'''=M(f;B_c,B'_c)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

iii) $BX=Y\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y+z\end{pmatrix}.$

Definició 8. *Suposem $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.*
Direm que A i B són dues **matrius equivalents** *($A\cong B$) si, i sols si, $\exists P\in M_n(\mathbb{k})$ i regular, $\exists Q\in M_m(\mathbb{k})$ i regular tal que $B=Q^{-1}AP$.*

Proposició 6. *La relació d'equivalència entre matrius és un relació binària d'equivalència.*

Demostració:
i) Reflexiva. $A\cong A$, ja que $\exists I\ /\ A=I^{-1}AI$, on I (identitat) és una matriu quadrada i regular.
ii) Simètrica. Si $A\cong B\Rightarrow B\cong A$.
$A\cong B\to\exists P,Q$ quadrades i regulars tals que $B=Q^{-1}AP\to BP^{-1}=(Q^{-1}AP)P^{-1}\to BP^{-1}=Q^{-1}A(PP^{-1})\to BP^{-1}=Q^{-1}A\to Q(BP^{-1})=Q(Q^{-1}A)\to QBP^{-1}=(QQ^{-1})A\to A=\left(Q^{-1}\right)^{-1}BP^{-1}=M^{-1}BN\to B\cong A$. Ja què $M=Q^{-1}$ i $N=P^{-1}$ són quadrades i regulars.
iii) Transitiva. Si $A\cong B\wedge B\cong C\Rightarrow A\cong C$.

$$\left.\begin{array}{l}A\cong B\to\exists P,Q\text{ quadrades i regulars }/\ B=Q^{-1}AP.\\B\cong C\to\exists R,S\text{ quadrades i regulars }/\ C=S^{-1}BR.\end{array}\right\}\to C=S^{-1}(Q^{-1}AP)R\to$$

$C=(S^{-1}Q^{-1})A(PR)=(QS)^{-1}A(PR)=M^{-1}AN\to A\cong C$. Ja que $M=QS$ i $N=PR$ són quadrades i regulars.

8.2. II) Matriu associada en canviar la base. Suposem $V=\mathbb{k}-e.v.\ /\ dim(V)=n$.

Suposem $\mathcal{L}(V,V)$ el conjunt de les aplicacions lineals entre V. $\wedge\ f \in \mathcal{L}(V,V) = End(V)$.

Siga $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de V.

Suposem $f(u_i) = w_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} u_j$ (1) $\longrightarrow \Psi(f) = (a_{ij}) = A \in M(f; B, B)$.

Caldrà esbrinar què li passarà a la matriu de f en canviar la base.

És a dir, si $B_1 = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ una base de V.

Suposem $f(u'_i) = w'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji} u'_j$ (2) $\longrightarrow \Psi(f) = (b_{ij}) = B \in M(f; B_1, B_1)$.

Si $u'_i = \sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} u_t$, (3) sent $P = (p_{it}) \in M_n(\mathbb{k})$ la matriu del canvi de base de B a B_1 .

Cal demostrar:

$i)$ $AP = PB$. $\qquad$ $ii)$ P és inversible o regular.

Esquema:

$$\begin{array}{ccc} B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} & \xrightarrow{A} & B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}. \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1}. \\ B_1 = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\} & \xrightarrow{B} & B_1 = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}. \end{array}$$

Notació: $B = P^{-1}AP$ o $M(f; B_1, B_1) = M(B_1, B) \cdot M(f; B, B) \cdot M(B, B_1)$.

Demostració:

$i)$ Per (3) $\longrightarrow f(u'_i) = f(\sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} u_t) = \sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} f(u_t) \overset{(1)}{=} \sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jt} u_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{t=1}^{n} a_{jt} p_{ti} \right) u_j \longrightarrow \Psi(f) = AP \in M(f, B_1, B)$.

Per (2) $\longrightarrow f(u'_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji} u'_j \overset{(3)}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji} \left(\sum\limits_{t=1}^{n} p_{tj} u_t \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_{tj} b_{ji} \right) u_j \longrightarrow \Psi(f) = PB \in M(f, B_1, B)$.

$ii)$ Com què $B_1 = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_m\}$ és base de V, $\forall u_t \in V$ es pot posar com a combinació lineal dels vectors de la base. És a dir, $u_t = \sum\limits_{l=1}^{n} p'_{lt} u'_l$.

Però per (3) $\longrightarrow u'_i = \sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} u_t$.

Aleshores: $\left. \begin{array}{l} u_t = \sum\limits_{l=1}^{n} p'_{lt} u'_l \\ u'_i = \sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} u_t \end{array} \right\} \to u'_i = \sum\limits_{t=1}^{n} p_{ti} (\sum\limits_{l=1}^{n} p'_{lt} u'_l) \to \sum\limits_{l=1}^{n} (\sum\limits_{l=1}^{n} p'_{lt} p_{ti}) u'_l \to P'P = I$

ja que $i, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

De manera anàloga demostrarem que $PP' = I$.

Per a recordar: $f(x) = y \to AX = Y$.

$X = PX'$, $Y = PY'$,on P és la matriu canvi de base.

En substituir queda: $AX = Y \to A(PX') = PY' \to (AP)X' = PY' \to (P^{-1}AP)X' = Y' \to P^{-1}AP = B$.

Nota 3. *Si* $u'_i = \sum_{t=1}^{n} p_{ti}u_t$, (3) *sent* $P = (p_{it}) \in M_n(\mathbb{k})$ *la matriu del canvi de base de* B *a* $B_1 \Rightarrow X = PX'$. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{B_1} \rightarrow x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = x'_1(p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \ldots + p_{n1}u_n) + x'_2(p_{12}u_1 + p_{22}u_2 + \ldots + p_{n2}u_n) + \ldots + x'_n(p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \ldots + p_{nn}u_n) = (p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \ldots + p_{1n}x'_n)u_1 + (p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \ldots + p_{2n}x'_n)u_2 + \ldots + (p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \ldots + p_{nn}x'_n)u_n$.

En identificar obtenim:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \ldots + p_{1n}x'_n. \\ x_2 = p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \ldots + p_{2n}x'_n. \\ \vdots \\ x_n = p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \ldots + p_{nn}x'_n. \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \rightarrow$$

$X = PX'$.

Exercici 3. *Si* $f \in End(\mathbb{k}^3)$ / $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1 + e_2$, $f(e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3$, *on* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *és la base canònica de* $\mathbb{k}^3$. *Trobeu la matriu associada a* f *en la base* $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *on* $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_1 + e_3$.

Solució: $M(f; B_1B_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -.1 \end{pmatrix}$.

Definició 9. *Suposem* $A, B \in M_n(\mathbb{k})$.

Direm que A *i* B *són dues* **matrius semblants** $(A \sim B)$ *si, i sols si,* $\exists P \in M_n(\mathbb{k})$ *i regular, tal que* $B = P^{-1}AP$.

Proposició 7. *La relació de semblança entre matrius és un relació binària d'equivalència.*

La demostració com a exercici.

Definició 10. *Suposem* $A, B \in M_n(\mathbb{k})$.

Direm que A *i* B *són dues* **matrius congruents** $(A \equiv B)$ *si, i sols si,* $\exists Q \in M_n(\mathbb{k})$ *i regular tal que* $B = Q^tAQ$.

Proposició 8. *La relació de congruència entre matrius és un relació binària d'equivalència.*

La demostració com a exercici.

9. MATRIU TRANSPOSADA

Suposem $A \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.

Definició 11. *Anomenem* **matriu trasnposada** *de la matriu* A, *i se representa per* A^t, *aquella matriu que resulta de la matriu* A *en canviar files per columnes.*

És a dir, si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k}) \rightarrow A^t = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{k})$.

Propietats:

1. $(A^t)^t = A$.

   Si $A = (a_{ij}) \rightarrow A^t = (a_{ji}) \rightarrow (A^t)^t = (a_{ij}) = A$.

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$.

   Si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k}) \rightarrow A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}) = C$.

   $(A+B)^t = C^t = (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (a_{ij})^t + (b_{ij})^t = A^t + B^t$.

3. $(kA)^t = kA^t \quad \forall k \in \mathbb{k} \wedge A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.

   $(kA)^t = (k(a_{ij}))^t = (ka_{ij})^t = (ka_{ji}) = (k(a_{ji})) = k(a_{ij})^t = kA^t$.

4. $(AB)^t = B^tA^t$ on $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$, $\quad B = (b_{jk}) \in M_{n\times p}(\mathbb{k})$.

   $AB = (a_{ij})(b_{jk}) = (c_{ik}) \in M_{m\times p}(\mathbb{k})$ on $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

   $(AB)^t = (c_{ik})^t = (c_{ki}) \in M_{p\times m}(\mathbb{k})$ on $c_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj}a_{ji}$.

   $B^tA^t = (b_{jk})^t(a_{ij})^t = (b_{kj})(a_{ji}) = (c_{ki})$ on $c_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj}a_{ji}$.

5. Si A és regular $\Rightarrow A^t$ és regular i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

   Si A és regular $\rightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{k}) \;/\; AB = BA = I$.

   $(AB)^t = B^tA^t = I^t = I \rightarrow A^t$ és regular.

   $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I \rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

   Idem per a BA.

6. Si $A \cong B \Rightarrow A^t \cong B^t$.

   Suposem $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{k}) \wedge A \cong B \rightarrow \exists P \in M_n(\mathbb{k})$ i regular, $\exists Q \in M_m(\mathbb{k})$ i regular tal que $B = Q^{-1}AP$.

   $B^t = (Q^{-1}AP)^t = P^tA^t(Q^{-1})^t = \left((P^t)^{-1}\right)^{-1} A^t(Q^{-1})^t = M^{-1}A^tN$, on $M = (P^t)^{-1}$ i $N = (Q^{-1})^t = (Q^t)^{-1}$ són quadrades i regulars $\rightarrow A^t \cong B^t$.

7. Si $A \sim B \Rightarrow A^t \sim B^t$.

   Suposem $A, B \in M_n(\mathbb{k}) \wedge A \sim B \rightarrow \exists P \in M_n(\mathbb{k})$ i regular, tal que $B = P^{-1}AP$.

   $B^t = (P^{-1}AP)^t = P^tA^t(P^{-1})^t = \left((P^t)^{-1}\right)^{-1} A^t(P^{-1})^t = \left((P^{-1})^t\right)^{-1} A^t(P^{-1})^t = M^{-1}A^tM$, on $M = (P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$ i M és regular.

10. MATRIU SIMÈTRICA. MATRIU ANTISIMÈTRICA

Suposem $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$.

Definició 12. *Direm que A és una* **matriu simètrica** *si, i sols si, $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, \forall j$.*
És a dir, A és simètrica $\Leftrightarrow A = A^t$.

Definició 13. *Direm que A és una* **matriu antisimètrica** *si, i sols si, $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, \forall j$.*
És a dir, A és antisimètrica $\Leftrightarrow A = -A^t$.

Nota 4. *Si A és antisimètrica $\Rightarrow a_{ii} = 0 \quad \forall i$. Ja que $a_{ii} = -a_{ii} \to 2a_{ii} = 0 \to a_{ii} = 0 \quad \forall i$, si la característica dels cos $\mathbb{k}$ és distinta de dos.*

Proposició 9. *Qualsevol matriu quadrada es pot descompondre en suma d'una matriu simètrica i una antisimètrica.*
És a dir, $\forall A, \quad A \in M_n(\mathbb{k}) \Rightarrow A = S + T$ on S és simètrica i T és antisimètrica.

Desmostració:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } S \text{ és simètrica} \to S^t = S. \\ \text{Si } T \text{ és antisimètrica} \to T^t = -T.\end{array}\right\} \to S^t + T^t = S - T.$$

Si suposem que $A = S + T$, obtenim:
$S^t + T^t = A^t = S - T$.
Per la qual cosa:

$$\left.\begin{array}{l}A = S + T. \\ A^t = S - T.\end{array}\right\} \to A + A^t = 2S \to \boxed{S = \frac{1}{2}(A + A^t) \wedge T = \frac{1}{2}(A - A^t)}.$$

És evident que $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$.

11. RANG D'UNA MATRIU

Caldrà recordar unes definicions prèvies a la definició del rang d'una matriu.

En el tema segon, en estudiar les dimensions dels subespais es va definir:
$rang(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}) = dim < v_1, v_2, \ldots, v_n >$. És a dir, el rang d'un sistema de vectors és la dimensió del subespai generat per aquests. També, el rang d'un sistema de vectors és el major nombre de vectors linealment independents del sistema.

En el tema tercer, definirem $rang(f) = dim\ (Im(f)) \quad$ on $f \in \mathcal{L}(V, V')$.

Definició 14. *Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$, definim* **rang de files** *de la matriu A, el rang del sistema de vectors fila de la matriu.*

Definició 15. *Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$, definim* **rang de columnes** *de la matriu A, el rang del sistema de vectors columna de la matriu.*

Proposició 10. *El rang de files d'una matriu coincideix amb el rang de columnes.*

Definició 16. *Anomenem* **rang d'un matriu** *A, el rang de files i que coincideix amb el rang de columnes.*

Exemple 1. *Trobeu el rang de la matriu A tal que:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució: $rang(A) = 3$.

Teorema 2. *$A \in M_n(\Bbbk)$, A és regular $\Leftrightarrow rang(A) = n$.*

La demostració més endavant.

12. DETERMINANTS

12.1. Introducció. Ja sabem que qualsevol tema en matemàtiques pot ser tractat de distintes formes. Una d'aquestes seria a partir de la definició de les funcions multilineals. Arribaríem a definir el determinant com qualsevol aplicació n-lineal alternada.

Nosaltres estudiarem els determinants de la manera més pràctica possible. Els determinants són aplicacions entre les matrius quadrades i el conjunt dels nombres reals. Estudiarem les seus propietats i els sistemes d'equacions utilitzant els determinants per a resoldre'ls.

12.2. Definició de determinant per recurrència. Suposem $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$.

i) Si $A = (a) \in M_1(\Bbbk) \rightarrow det(A) = |A| = a$.

ii) Si $A = (a_{ij}) \in M_2(\Bbbk) \rightarrow det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

iii) Si $A = (a_{ij}) \in M_3(\Bbbk) \rightarrow det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$.(Regla de Sarrus).

*iv)*Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk) \rightarrow det(A) = |A| \overset{i-\grave{e}sima\ fila}{=} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \overset{j-\grave{e}sima\ columna}{=} a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$.

on A_{ij} és **l'adjunt** de l'element a_{ij}, sent $A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$. on D_{ij} és **el menor complementari** de l'element a_{ij}, sent D_{ij} el determinant que resulta de la matriu A en suprimir la i-èsima fila i la j-èsima columna.

Aquesta definició de determinant té una forma en particular, ja que en primer lloc s'ha definit el determinant d'una matriu quadrada de grandària 1×1. Després, suposant coneguts els determinants de matrius de grandària $(n-1) \times (n-1)$, s'han definit els determinants de les matrius de grandària $n \times n$. És per això que aquestes definicions s'anomenen per recurrència.

Exercici 4. *1. Trobeu $|A|$, on $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Solució: 88.*

2. *Trobeu* $|A|$, *on* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. *Solució: -8.*

12.3. Propietats dels determinants.

1. *Det*$(I) = |I| = 1$, on I és la matriu identitat.
2. En canviar dues files (columnes) de lloc, el determinant canvia de signe.
3. En multiplicar tots els elements d'una fila (columna) per un escalar k, el determinant d'aquesta nova matriu queda multiplicat per l'escalar k.
4. Si la i-èsima fila (j-èsima columna) d'una matriu s'expressa com a suma de dos vectors fila (columna), aleshores el determinant de la matriu és la suma dels determinants de les dues matrius tals que la i-èsima fila (j-èsima columna) és un dels vectors fila (columna), sense modificar la resta.
5. Si una matriu té dues files (columnes) iguals, el seu determinant és zero.
6. Si una de les files (columnes) d'una matriu és nul·la, el seu determinant és zero.
7. Si una fila (columna) d'una matriu és múltiple d'una altra, el seu determinant és zero.
8. En general, un determinant d'una matriu és nul, si els seus vectors fila (columna) són linealment dependents.
9. El determinant d'una matriu no varia si a una fila (columna) li sumem una combinació lineal de les restants.
10. El valor numèric d'un determinant no varia en canviar files per columnes.
11. El determinant d'un producte de matrius quadrades és el producte dels determinants.

Exemple 2. *1.* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0.$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & 30 & -21 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -7 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, *ja què en substituir la tercera columna* $\overset{3}{A}$ *per* $\overset{3}{A} - 2\overset{1}{A}$ *queda:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -207.$

8. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & -5 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -9 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 2580.$

9. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-x^2 & 1-x & 1-x \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 1-x & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & x-1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} (1+x)(1-x) & 1-x & 1-x \\ x-1 & 1-x & 0 \\ 1-x & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$

$$-\begin{vmatrix} (1+x)(1-x) & 1-x & 1-x \\ -(1-x) & 1-x & 0 \\ 1-x & 0 & -(1-x) \end{vmatrix} = -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2+x & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1-x)^3(3+x).$$

13. CÀLCUL DE LA INVERSA D'UNA MATRIU

Teorema 3. *Si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k}) \wedge |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{(adj(A))^t}{|A|}$.

Lema 1. *i)* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$. *És a dir, la suma dels productes dels elements de la i-èsima fila de la matriu A pels adjunts dels elements d'una altra fila diferent de la i-èsima és zero.*

ii) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = det(A) = |A|$. *És a dir, la suma dels productes dels elements de la i-èsima fila de la matriu A pels seus adjunts és el determinant de la matriu A.*

Demostració:

La segona part ja està demostrada, ja que correspon a la definició de determinant.

Per a demostrar la primera part, definim una matriu B que s'obté de la matriu A en substituir la k-èsima fila de la matriu A per la i-èsima fila de la matriu A.

És a dir, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Evidentment $|B| = 0$, *ja que té dues files iguals.*

Si $B = (b_{ij})$, *la k-èsima fila seria:*

$\begin{pmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$.

En desenvolupar el determinant de la matriu B per la k-èsima fila obtindríem:

$|B| = b_{k1}B_{k1} + b_{k2}B_{k2} + \ldots + b_{kj}B_{kj} + \ldots + b_{kn}B_{kn} = a_{i1}B_{k1} + a_{i2}B_{k2} + \ldots + a_{ij}B_{kj} + \ldots + a_{in}B_{kn} = 0$.

Però $B_{kj} = (-1)^{k+j}D'_{kj} \wedge A_{kj} = (-1)^{k+j}D_{kj}$, on $D'_{kj} = D_{kj}$. Per la qual cosa $|B| = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{ij}A_{kj} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \to \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0.(si\ i \neq j)$

Definició 17. *Definim* **matriu adjunta de la matriu** *A, i se representa per* $adj(A)$, *a la matriu que resulta de la matriu A en substituir cada element de la matriu A pel seu adjunt.*

És a dir, els elements de la matriu adjunta estan formats pels adjunts de cada element de la matriu A. Així, $adj(A) = (A_{ij})$

Demostració del teorema:

Pel lema, agrupant *i)* i *ii)*, obtenim: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik}|A|$, on $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}$.

Si $C = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = A_{ji} \to C = (A_{ji}) = (A_{ij})^t = (adj(A))^t$

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = \delta_{ik}|A| \to AC = I|A|$.

Si $|A| \neq 0 \to A(adj(A))^t = I|A| \to \dfrac{A(adj(A))^t}{|A|} = I \to \boxed{A^{-1} = \dfrac{(adj(A))^t}{|A|}}$.

Teorema 4. *Si $A \in M_n(\mathbb{k})$.*
A és regular o inversible $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow rang(A) = n$.

Demostració:
$\rightarrow$) Si A és regular o inversible $\rightarrow \exists A^{-1}/AA^{-1} = A^{-1}A = I \rightarrow |AA^{-1}| = |I| = 1 \rightarrow |A|\,|A^{-1}| = 1 \rightarrow |A| \neq 0$.

$\leftarrow$) Suposem $|A| \neq 0$. Sabem que $AC = I\,|A| \rightarrow \dfrac{A\,(adj(A))^t}{|A|} = I \rightarrow AA^{-1} = I \rightarrow A$ és regular.

$\leftrightarrow$ Si $rang(A) = n \leftrightarrow$ el major nombre de vectors linealment independent és n. El que vol dir que cap dels n vectors depén dels altres $\leftrightarrow |A| \neq 0$.

14. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

14.1. Sistema homogeni.

Definició 18. ***Un sistema homogeni*** *de* n *equacions amb* m *incognites sobre el cos $\mathbb{k}$ és un sistema d'equacions polinòmiques de la forma:*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{array}\right\},\ \text{on } a_{ij} \in \mathbb{k}.$$

Aquest sistema es pot representar per: $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

També matricialment per: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AX = 0.$

On A és la matriu dels coeficients i X la matriu de les incògnites.

Definició 19. *Direm que $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathbb{k}^m$ és* ***solució del sistema*** *si, i sols si, en substituir aquests elements per les incògnites, satisfan cadascuna de les equacions del sistema.*

És a dir, $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathbb{k}^m$ és ***solució del sistema*** *si, i sols si, $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.*

Nota 5. *Òbviament $(0, 0, \ldots, 0)$ sempre és solució del sistema homogeni, anomenada* ***solució trivial.***

Teorema 5. *Si definim l'aplicació $\Psi : \mathbb{k}^m \longrightarrow \mathbb{k}^n$ tal que:*
$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = (a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1m}\lambda_m, a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2m}\lambda_m, \ldots, a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots + a_{nm}\lambda_m)$.

Tesi: i) Ψ *és lineal* *ii)* $Ker(\Psi)$ *és el conjunt de les solucions del sistema homogeni.*

Demostració:

i) $\Psi(\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)+\beta(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)) = \alpha\Psi((\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)+\beta\Psi((\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m))$.

$\Psi(\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)+\beta(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)) = \Psi((\alpha\lambda_1+\beta\mu_1,\alpha\lambda_2+\beta\mu_2,\ldots,\alpha\lambda_m+\beta\mu_m)) = (a_{11}(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)+a_{12}(\alpha\lambda_2+\beta\mu_2)+\ldots+a_{1m}(\alpha\lambda_m+\beta\mu_m),+a_{21}(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)+a_{22}(\alpha\lambda_2+\beta\mu_2)+\ldots+a_{2m}(\alpha\lambda_m+\beta\mu_m)+\ldots+a_{n1}(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)+a_{n2}(\alpha\lambda_2+\beta\mu_2)+\ldots+a_{nm}(\alpha\lambda_m+\beta\mu_m)) =$

$(\alpha(a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\ldots+a_{1m}\lambda_m)+\beta(a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+\ldots+a_{1m}\mu_m),\alpha(a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\ldots+a_{2m}\lambda_m)+\beta(a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+\ldots+a_{2m}\mu_m),\ldots,\alpha(a_{n1}\lambda_1+a_{n2}\lambda_2+\ldots+a_{nm}\lambda_m)+\beta(a_{n1}\mu_1+a_{n2}\mu_2+\ldots+a_{nm}\mu_m)) =$

$(\alpha(a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\ldots+a_{1m}\lambda_m),\alpha(a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\ldots+a_{2m}\lambda_m),\ldots,\alpha(a_{n1}\lambda_1+a_{n2}\lambda_2+\ldots+a_{nm}\lambda_m))+(\beta(a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+\ldots+a_{1m}\mu_m),\beta(a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+\ldots+a_{2m}\mu_m),\beta(a_{n1}\mu_1+a_{n2}\mu_2+\ldots+a_{nm}\mu_m)) =$

$\alpha((a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\ldots+a_{1m}\lambda_m),(a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\ldots+a_{2m}\lambda_m),\ldots,(a_{n1}\lambda_1+a_{n2}\lambda_2+\ldots+a_{nm}\lambda_m))+\beta((a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+\ldots+a_{1m}\mu_m),(a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+\ldots+a_{2m}\mu_m),\ldots,(a_{n1}\mu_1+a_{n2}\mu_2+\ldots+a_{nm}\mu_m)) =$

$= \alpha\Psi((\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)+\beta\Psi((\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m))$.

ii) $Ker(\Psi) = \left\{(c_1,c_2,\ldots,c_m)\in\Bbbk^m \;/\; \Psi(c_1,c_2,\ldots,c_m) = (0,0,\overset{(n}{\ldots},0)\right\} =$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (c_1,c_2,\ldots,c_m)\in\Bbbk^m \;/\; (a_{11}c_1+a_{12}c_2+\ldots+a_{1m}c_m, a_{21}c_1+a_{22}c_2+ \\ \overset{(n}{\ldots}+a_{2m}c_m,\ldots,a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\ldots+a_{nm}c_m) = (0,0,\overset{(n}{\ldots},0) \end{array} \right\} =$$

$= \left\{(c_1,c_2,\ldots,c_m)\in\Bbbk^m \;/\; \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = 0\right\} \rightarrow (c_1,c_2,\ldots,c_m)$ és solució del sistema.

Nota 6. *Si* $Ker(\Psi) = \overline{0} \rightarrow dim(Im(\Psi)) = m \rightarrow \Bbbk^m \simeq \Psi(\Bbbk^m) \leq \Bbbk^n \rightarrow m \leq n$.

És a dir, si $m > n \rightarrow Ker(\Psi) \neq \overline{0} \rightarrow \exists$ solució no trivial.

En altres paraules, quan el nombre d'incògnites siga superior al nombre d'equacions, el sistema homogeni té infinites solucions.

14.2. Sistema d'equacions.

Definició 20. ***Un sistema*** *de* n equacions *amb* m incògnites *sobre el cos* $\Bbbk$ *és un sistema d'equacions polinòmiques de la forma:*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right\}, \text{ on } a_{ij}\in\Bbbk,\ b_i\in\Bbbk,\ i\in\{1,2,\ldots,n\},$$

$j\in\{1,2,\ldots,m\}$.

Aquest sistema es pot representar per: $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,n.$

També matricialment per: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow$
$AX = B$

On A és la matriu dels coeficients, X la matriu de les incògnites, B la matriu dels segons termes i $(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$ *la matriu ampliada.*

Definició 21. *Direm que $(c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{k}^m$ és* **solució del sistema** *si, i sols si, en substituir aquests elements per les incògnites, satisfan cadascuna de les equacions del sistema.*

És a dir, $(c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{k}^m$ és **solució del sistema** *si, i sols si, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Teorema 6. *En les mateixes condicions del teorema anterior, demostrarem que si $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ és una solució particular del sistema, aleshores el conjunt de les solucions vindrà donat per:* $(x_1, x_2, \dots, x_m) = (c_1, c_2, \dots, c_m) + Ker(\Psi)$.

Demostració:

Donat el sistema: $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Si $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ és una solució particular del sistema $\rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

En igualar obtenim: $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x_j - c_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \rightarrow$ $\left.\begin{matrix} a_{11}(x_1 - c_1) + a_{12}(x_2 - c_2) + \dots + a_{1m}(x_m - c_m) = 0 \\ a_{21}(x_1 - c_1) + a_{22}(x_2 - c_2) + \dots + a_{2m}(x_m - c_m) = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}(x_1 - c_1) + a_{n2}(x_2 - c_2) + \dots + a_{nm}(x_m - c_m) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$
$(x_1 - c_1, x_2 - c_2, \dots, x_m - c_m) = (0, 0, \dots, 0) \rightarrow$

$(x_1 - c_1, x_2 - c_2, \dots, x_m - c_m) \in Ker(\Psi) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) - (c_1, c_2, \dots, c_n) \in Ker(\Psi) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n) + Ker(\Psi)$.

15. TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Teorema 7. *Un sistema $AX = B$* té solució $\Leftrightarrow$ $rang(A) = rang(A, B)$.

on (A, B) és la matriu ampliada.

Lema 2. *$rang(A) = rang(A,B) \Leftrightarrow B$ és $C.L.(\overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A})$.*

Demostració:

$\leftrightarrow$) Cal recordar que: $rang(A) = rang(A_1, A_2, \ldots, A_n) = rang(\overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A}) \wedge$ $rang\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = dim < v_1, v_2, \ldots, v_n >$.

Suposem $W_1 =< \overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A} > \wedge\ W_2 =< \overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A}, B >$.

És fàcil demostrar que $W_1 \leq W_2$.

Com que $dimW_1 = dim(< \overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A} >) = rang(\overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A}) = rang(A) = rang(A,B) = dim(< \overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A}, B >) = dimW_2 \rightarrow W_1 \simeq W_2 \leftrightarrow B$ és $C.L.(\overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A})$.

Demostració del teorema:

$\leftrightarrow$) Suposem $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \Bbbk^m$ és ***solució del sistema*** *$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad i =$*

$$1,2,\ldots,n \rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1m}c_m = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2m}c_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nm}c_m = b_n \end{array}\right\} \rightarrow c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} +$$

$$\ldots + c_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow c_1\overset{1}{A} + c_2\overset{2}{A} + \ldots + c_n\overset{m}{A} = B \rightarrow B \text{ és } C.L.(\overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots, \overset{m}{A}) \leftrightarrow$$

$rang(A) = rang(A,B)$.

Teorema 8. *Si $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \Bbbk^m$ és* ***solució del sistema*** *$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow$* el conjunt de les solucions depén de $m - r$ paràmetres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-r}$, *on $r = rang(A)$.*

Demostració:

Sabem que $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (c_1, c_2, \ldots, c_m) + Ker(\Psi)$.

$\Psi : \Bbbk^m \longrightarrow \Bbbk^n$ és lineal $\rightarrow dimKer(\Psi) + dim(Im(\Psi)) = m \rightarrow dimKer(\Psi) + \underbrace{rang(A)}_{r} = m \rightarrow dimKer(\Psi) = m - r$.

Suposem $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-r}\}$ una base del $Ker(\Psi)$, on $v_i = (d_{1i}, d_{2i}, \ldots, d_{mi}), \quad i = 1,2,\ldots,m-r$.

Aleshores $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (c_1, c_2, \ldots, c_m) + Ker(\Psi) = (c_1, c_2, \ldots, c_m) + < v_1, v_2, \ldots, v_{m-r} >= (c_1, c_2, \ldots, c_m) + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{m-r} v_{m-r} = (c_1, c_2, \ldots, c_m) + \lambda_1(d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{m1}) + \lambda_2(d_{12}, d_{22}, \ldots, d_{m2}) + \ldots + \lambda_{m-r}(d_{1\ m-r}, d_{2\ m-r}, \ldots, d_{m\ m-r}) =$
$(c_1, c_2, \ldots, c_m) + (\lambda_1 d_{11}, \lambda_1 d_{21}, \ldots, \lambda_1 d_{m1}) + (\lambda_2 d_{12}, \lambda_2 d_{22}, \ldots, \lambda_2 d_{m2}) + \ldots$
$+ (\lambda_{m-r} d_{1\ m-r}, \lambda_{m-r} d_{2\ m-r}, \ldots, \lambda_{m-r} d_{m\ m-r})$.

En sumar i identificar queda:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = c_1 + \lambda_1 d_{11} + \lambda_2 d_{12} + \ldots + \lambda_{m-r} d_{1\ m-r} \\ x_2 = c_2 + \lambda_1 d_{21} + \lambda_2 d_{22} + \ldots + \lambda_{m-r} d_{2\ m-r} \\ \vdots \\ x_m = c_m + \lambda_1 d_{m1} + \lambda_2 d_{m2} + \ldots + \lambda_{m-r} d_{m\ m-r} \end{array}\right\}$$

Exercici 5. *Trobeu el rang de la matriu* $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Recordem que $rang(A)$ és el nombre màxim de vectors fila (columna) linealment independents. També anomenem $rang(A)$ l'ordre del major menor no nul.

Primer procediment:

Escriurem tots els menors d'ordre màxim (en aquest cas d'ordre 3).

$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ 0.

Com que cap d'ells és no nul, aleshores el $rang(A)$ no pot ser 3.

Si algun d'ells fóra no nul, el $rang(A)$ seria 3.

Un menor d'ordre 2 és: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \rightarrow rang(A) = 2.$

Segon procediment:

Cal buscar un menor d'ordre una unitat inferior a l'ordre màxim i ampliar-lo.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, s'amplia i obtindrem:

$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Per la qual cosa el $rang(A)$ és 2.

Tercer procediment:

Mètode de reducció en cascada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rang(A) \text{ és } 2.$$

16. DISCUSSIÓ DE LES SOLUCIONS D'UN SISTEMA

Definició 22. *Un sistema és* ***incompatible*** *si, i sols si, no té solució.*

Definició 23. *Un sistema és* ***compatible*** *si, i sols si, té solució.*

Definició 24. *Un sistema és* **compatible determinat** *si, i sols si, té una única solució.*

Definició 25. *Un sistema és* **compatible indeterminat** *si, i sols si, té infinites solucions.*

Siga $AX = B$ un sistema donat matricialment. Si $rang(A) = r \wedge rang(A, B) = r'$. Aleshores:

i) Si $r \neq r' \longrightarrow$ *sistema incompatible.*

ii) Si $r = r' \longrightarrow$*sistema compatible* $\begin{cases} r = r' = m \rightarrow \textit{determinat.} \\ r = r' < m \rightarrow \textit{indeterminat.} \end{cases}$

Exemple 3. *Discutiu les solucions dels sistemes:*

1. $\left.\begin{array}{r} x + y + z - t = 2 \\ 2y \qquad - t = 1 \\ x - y + z \qquad = 1 \\ 3x - y + 3z - t = 4 \end{array}\right\}$

   Solució: Sistema compatible indeterminat. Infinites solucions. Nombre de paràmetres a determinar, 2. $(x, y, z, t) = (\lambda, \mu, \mu - \lambda + 1, 2\mu - 1)$. O bé $(x, y, z, t) = (\frac{-2\lambda+\mu+3}{2}, \frac{\mu+1}{2}, \lambda, \mu)$. O bé $(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 1) + ker(\Psi) = (1, 1, 1, 1) + \lambda(1, 0, -1, 0) + \mu(0, 1, 1, 2)$.

   O bé $(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 1) + \alpha(1, 1, 0, 2) + \beta(-1, 0, 1, 0)$

2. $\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \qquad = 0 \end{array}\right\}$

   Solució: Sistema compatible determinat. Única solució $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

3. $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ x_1 + \qquad x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\}$

   Solució: Sistema compatible indeterminat. Infinites solucions. Nombre de paràmetres a determinar, 1. $(x_1, x_2, x_3) = (-\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$.

17. SISTEMES DE CRÀMER

Definició 26. *Un sistema de* n equacions *amb* m incògnites *sobre el cos* $\Bbbk$ *és un* **Sistema de Cràmer** *si, i sols si, el nombre d'equacions coincideix amb el nombre d'incògnites i, a més a més, la matriu dels coeficients és regular.*

És a dir, un sistema de n equacions *amb* m incògnites *sobre el cos* $\Bbbk$ *és un* **Sistema de Cràmer** *si, i sols si, i)* $n = m$ *ii)* $|A| \neq 0$.

Teorema 9. *Un sistema de Cràmer sempre té una única solució. És a dir, qualsevol sistema de Cràmer és compatible determinat. A més a més la solució ve donada per:* $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

$$Sent\ \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad Sent\ \Delta = |A|.$$

Demostració:

Suposem el sistema de Cràmer: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, on $|A| \neq 0$.

Com que $A \in M_n(\mathbb{k}) \wedge |A| \neq 0 \to rang(A) = n = rang(A, B) \to$ el sistema és compatible determinat.

Demostrem que $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Per una part, en desenvolupar el determinant Δ_j pels elements de la j-èsima columna queda:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}.$$

En posar matricialment el sistema de Cràmer queda:

$$AX = B \to X = A^{-1}B \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{(adj(A))^t}{|A|} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{jj} & \cdots & A_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}{|A|} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} |A| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{jj} & \cdots & A_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La component j-èsima seria: $x_j |A| = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj} = \Delta_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$.

Exercici 6. *Comproveu que els següents sistemes són sistemes de Cràmer i trobeu la solució:*

1. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{aligned}\right\}$ *Solució:* $(x_1, x_2, x_3) = (4, -2, 3)$.

2. $\left.\begin{aligned} x + 3y + 5z + 2t = 2 \\ -y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 9z + 6t = -3 \\ 3x + 2y + 4z + 8t = -1 \end{aligned}\right\}$ *Solució:* $(x, y, z, t) = (\frac{-29}{10}, \frac{7}{4}, \frac{-7}{20}, \frac{7}{10})$.

18. MÈTODES NUMÈRICS DE RESOLUCIONS DE SISTEMES

En resoldre un sistema, $AX = B$, de *n equacions* amb *m incògnites* amb $|A| \neq 0$, podem utilitzar distints mètodes i si utilitzem un ordinador es podrà resoldre en un nombre determinat d'operacions:

		$+$	$(n+1)(n!-1)$
CRAMER:	Nombre d'operacions:	$\cdot$	$(n+1)nn!$
		$:$	n
		Total	$(n+1)(n+1)!-1$
		$+$	$(n+1)n! + n(n+1)$
INVERSA	Nombre d'operacions:	$\cdot$	$n^2 n! + 2n^2$
		$:$	1
		Total	$(n+1)! + n^2 n! + 3n^2 + n + 1$

Si $n = 10$, per Cràmer obtindríem 439.084.799 operacions i per la inversa 402.797111 operacions.

Si un ordinador realitza unes 1000 operacions per segon, li costaria per Cràmer 121 hores i 111 hores aplicant la inversa. Aproximadament 5 dies de treball ininterrompudament.

En utilitzar el mètode de Gauss que seguidament exposarem, obtindríem:

$$\begin{array}{llcr} & & + & \dfrac{n(n^2-1)}{3} + \dfrac{n(n-1)}{2} \\ GAUSS & \text{Nombre d'operacions:} & \cdot & \dfrac{n(n^2-1)}{3} + \dfrac{n(n-1)}{2} \\ & & \vdots & \dfrac{n(n-1)}{2} + n \\ & & Total & \dfrac{2n(n^2-1)}{3} + \dfrac{3n(n-1)}{2} + n \end{array}$$

Si $n = 10$, per Gauss obtindríem 805 operacions. L'ordinador tardaria menys d'un segon.

A més d'aquests problemes està el de les errades d'arrodoniment. Per exemple en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10t = 31 \end{array}\right\} \quad \text{La solució és } x = y = z = t = 1.$$

En canviar lleugerament els segons termes quedaria:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 7y + 8z + 7t = 32'1 \\ 7x + 5y + 6z + 5t = 22'9 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33'1 \\ 7x + 5y + 9z + 10t = 30'9 \end{array}\right\} \quad \text{La solució és } x = \frac{46}{5},\ y = -\frac{63}{5},\ z = \frac{9}{2},\ t = -\frac{11}{10}.$$

En canviar lleugerament els coeficients quedaria:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 7y + 8'1z + 7'2t = 32 \\ 7'08x + 5'04y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 5'98y + 9'89z + 9t = 33 \\ 6'99x + 4'99y + 9z + 9'98t = 31 \end{array}\right\} \quad \text{La solució és } x = -81,\ y = 137,\ z = -34,\ t = 22.$$

Per la qual cosa resulta força interessant reduir el nombre d'operacions per a reduir les errades d'arrodoniment.

18.1. Mètode de Gauss. El mètode consisteix en transformar els sistema $AX = B$ en un altre sistema equivalent $MX = N$, on M és una matriu triangular (inferior o superior).

Suposem un sistema de n *equacions* amb m *incògnites* sobre el cos $\mathbb{k}$, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

En desenvolupar-lo quedaria:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ (2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ (3) & a_{31}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n) & a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right\} \text{Si } a_{11} \neq 0.$$

En fer les següents transformacions, el sistema quedaria:
$(2') = (2) + (1)(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$, $(3') = (3) + (1)(-\frac{a_{31}}{a_{11}}), \ldots, (n') = (n) + (1)(-\frac{a_{n1}}{a_{11}})$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ (2') & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2m}x_m = b'_2 \\ (3') & a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3m}x_m = b'_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n') & a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nm}x_m = b'_n \end{array}\right\} \text{Si } a'_{22} \neq 0.$$

En fer les següents transformacions, el sistema quedaria:
$(3'') = (3') + (2')(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}), \ldots, (n'') = (n') + (2')(-\frac{a'_{n2}}{a'_{22}})$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ (2') & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2m}x_m = b'_2 \\ (3'') & a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3m}x_m = b''_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n'') & a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nm}x_m = b''_n \end{array}\right\}$$

Successivament, obtindrem:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ (2') & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2m}x_m = b'_2 \\ (3'') & a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3m}x_m = b''_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n^{n-1}) & a^{n-1}_{nm}x_m = b^{n-1}_n \end{array}\right\}$$

Exemple 4. *Utilitzant el mètode de Gauss, resoleu el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 5z + 2t = 2 \\ -y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 9z + 6t = -3 \\ 3x + 2y + 4z + 8t = -1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & -7 & -11 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -18 & -7 \\ 0 & 0 & -32 & -26 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -18 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

La solució serà:
$10t = 7 \to t = \frac{7}{10}$ $\quad 16z + 18t = 7 \to 16z + 18\frac{7}{10} = 7 \to z = -\frac{7}{20}$.
$y - 3z - 4t = 0 \to y = 3(-\frac{7}{20}) + 4(\frac{7}{10}) \to y = \frac{7}{4}$.
$x + 3y + 5z + 2t = 2 \to x = 2 - 3(\frac{7}{4}) - 5(-\frac{7}{20}) - 2(\frac{7}{10}) \to x = -\frac{29}{10}$.

El tema quedaria ja acabat, però desenvoluparé els determinants utilitzant les funcions multilineals alternades.

19. ANNEX

Suposem $V_1, V_2, \dots, V_n, W$ $\quad n+1-\Bbbk$ *e.v.*

Definició 27. *Direm que l'aplicació* $f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W$ *és una* ***n-lineal*** *si és lineal en cada component.*

És a dir, $f(v_1, \dots, v_{i-1}, av_i'+bv_i'', v_{i+1}, \dots, v_n) = af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots, v_n) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i'', v_{i+1}, \dots, v_n) \quad \forall a, b \in \Bbbk, \quad \forall v_i', v_i'' \in V_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Definició 28. *Suposem* $V_1 = V_2 = \ldots V_n = V$, $W = \Bbbk \quad n+1-\Bbbk$ *e.v.*

Direm que l'aplicació $f : V \times V \times \ldots \times V \longrightarrow \Bbbk$ *és una* ***forma n-lineal*** *si és lineal en cada component.*

Es representa per $f \in \mathcal{L}(V^n, \Bbbk)$.

Suposem $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ una base de V i $v_i = \sum\limits_{j=1}^{m} k_{ij}e_j$, aleshores l'**expressió coordenada** de la forma n-lineal f seria:

$$f((v_1, v_2, \dots, v_n)) = f\left((\sum_{j_1=1}^{m} k_{1j_1}e_{j_1}), (\sum_{j_2=1}^{m} k_{2j_2}e_{j_2}), \dots, (\sum_{j_n=1}^{m} k_{nj_n}e_{j_n}) \right) =$$

$$= \sum_{1 \le j_1, j_2, j_n \le m} k_{1j_1}k_{2j_2} \dots k_{nj_n} f((e_{j_1}, e_{j_2} \dots, e_{j_n})).$$ (en total són m^n sumans).

Òbviament f queda totalment determinada en donar els elements $f((e_{j_1}, e_{j_2} \dots, e_{j_n}))$ on $j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Tanmateix, si ens donen escalars $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n} \in \Bbbk$ on $j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\exists!$ forma lineal g tal que $g((e_{j_1}, e_{j_2} \dots, e_{j_n})) = a_{j_1}a_{j_2} \dots a_{j_n}$.

Només cal definir $g((v_1, v_2, \dots, v_n)) = \sum\limits_{1 \le j_1, j_2, j_n \le m} k_{1j_1}k_{2j_2} \dots k_{nj_n} a_{j_1}a_{j_2} \dots a_{j_n}$.

Exemple 5. *Si* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

i) Demostreu que f *és bilineal.*

ii) Trobeu l'expressió coordenada de f *on* $B = \{(1,1,1), (0,1,-1), (1,2,1)\}$ *és una base de* $\mathbb{R}^3$.

$f((1,1,1), (1,1,1)) = 1.1 + 1.1 + 1.1 = 3.$

$f((1,1,1), (0,1,-1)) = 1.0 + 1.1 + 1.(-1) = 0 = f((0,1,-1), (1,1,1)).$

$f(((1,1,1), (1,2,1) = 1.1 + 1.2 + 1.1 = 4 = f((1,2,1), (1,1,1)).$

$f((0,1,-1, (0,1,-1)) = 1.1 + (-1).(-1) = 2.$

$f((0,1,-1), (1,2,1)) = 1.2 + (-1).1 = 1 = f((1,2,1)), (0,1,-1)).$

$f((1,2,1), (1,2,1)) = 1.1 + 2.2 + 1.1 = 6.$

La matriu associada a la forma bilineal en la base B *serà:*

$$M(f, B, B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definició 29. *Si* $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definim el ***conjunt de les substitucions (permutacions)*** *de* I_n*,el conjunt de totes les aplicacions bijectives de* I_n *en* I_n.

És a dir, $\sum_n = \{\alpha \ / \ \alpha : I_n \longrightarrow I_n \quad \alpha \text{ aplicació bijectiva}\}$.

$Card(\sum_n) = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.$

Exemple 6. *Si* $I_3 = \{1,2,3\} \rightarrow \sum_3 = \{\alpha \ / \ \alpha : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} \quad \alpha \text{ aplicació bijectiva}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$.

on $\alpha_1(1) = 1, \alpha_1(2) = 2, \alpha_1(3) = 3$. *Es representa per* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\alpha_2(1) = 1, \alpha_2(2) = 3, \alpha_2(3) = 2$. *Es representa per* $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\alpha_3(1) = 2, \alpha_3(2) = 1, \alpha_3(3) = 3$. *Es representa per* $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\alpha_4(1) = 2, \alpha_4(2) = 3, \alpha_4(3) = 1$. *Es representa per* $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha_5(1) = 3, \alpha_5(2) = 1, \alpha_5(3) = 2$. *Es representa per* $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\alpha_6(1) = 3, \alpha_6(2) = 2, \alpha_6(3) = 1$. *Es representa per* $\alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

També per mitjà dels diagrames d'arbre.

Nota 7. *Es podria demostrar que* $(\sum_3, \circ)$ *és un grup, anomenat grup de les substitucions.*

Definició 30. *Si* $f \in \pounds(V^n, \mathbb{k})$ *i* $\alpha \in \sum_n$, *definim* ***aplicació transformada de*** f ***mitjançant*** α, *i se representa per* f^α, *a:*

$f^\alpha : V^n \longrightarrow \mathbb{k} \ / \ f^\alpha((v_1, v_2, \ldots, v_n)) = f((v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \ldots, v_{\alpha(n)}))$

Per exemple, si $\alpha = (\ 2 \quad 1 \quad 3\ )$, *sabem que* $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 3$.

$f^\alpha((v_1, v_2, v_3)) = f((v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, v_{\alpha(3)})) = f((v_2, v_1, v_3))$.

Teorema 10. *Si* $f \in \pounds(V^n, \mathbb{k})$ *i* $\alpha \in \sum_n \Rightarrow$ *i)* $f^\alpha \in \pounds(V^n, \mathbb{k})$ *ii)* $(f^\alpha)^\beta = f^{\alpha\beta}$.

Demostració:

i) Siga $\alpha(j) = i \wedge v_i = av_i' + bv_i''$ on $a, b \in \mathbb{k}, \quad v_i', v_i'' \in V_i$

$f^\alpha((v_1, \ldots, v_{i-1}, av_i' + bv_i'', v_{i+1}, \ldots, v_n)) = f((v_{\alpha(1)}, \ldots v_{\alpha(j-1)}, v_{\alpha(j)}, v_{\alpha(j+1)}, \ldots, v_{\alpha(n)})) =$

$\underset{f \text{ lineal}}{=} af((v_{\alpha(1)}, \ldots v_{\alpha(j-1)}, v_i', v_{\alpha(j+1)}, \ldots, v_{\alpha(n)})) + bf((v_{\alpha(1)}, \ldots v_{\alpha(j-1)}, v_i'', v_{\alpha(j+1)}, \ldots, v_{\alpha(n)})) =$

$af^\alpha((v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) + bf^\alpha((v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_n))$.

ii) $(f^\alpha)^\beta((v_1, v_2, \ldots, v_n)) = f^\alpha((v_{\beta(1)}, v_{\beta(2)}, \ldots, v_{\beta(n)})) = f((v_{\alpha(\beta(1))}, v_{\alpha(\beta(2))}, \ldots, v_{\alpha(\beta(n))})) =$

$f((v_{(\alpha\beta)(1)}, v_{(\alpha\beta)(2)}, \ldots, v_{(\alpha\beta)(n)})) = f^{\alpha\beta}((v_1, v_2, \ldots, v_n))$.

Definició 31. *Anomenem* **signatura** *d'una substitució (permutació) a la següent aplicació:*
$\varepsilon : \sum_n \longrightarrow \{-1,1\}\ /\ \varepsilon(\alpha) = (-1)^{I(\alpha)}$.

Teorema 11. *on $I(\alpha)$ és el nombre total d'inversions.*
Per exemple,donada la permutació $\alpha = (\ 3\quad 2\quad 1\ ) \in \sum_3 \to \varepsilon(\alpha) = (-1)^3 = (-1)$.

Definició 32. *Si $i < j$, direm que forma* **inversió** *si $\alpha(j)$ ocupa un lloc anterior al de $\alpha(i)$.*

Definició 33. *Anomenem* **transposició** *a les substitucions (permutacions) que sols canvien un par d'elements entre si. Aleshores, la signatura de qualsevol transposició val -1. És a dir, $\varepsilon(\tau) = -1$.*
És equivalent a dir que si en una permutació es canvien dos elements entre si, la permutació canvia de classe.

Per exemple, donada la permutació $\alpha = (\ 3\quad 2\quad 1\ ) \in \sum_3$.
$(\ 3\quad 2\quad 1\ ) \underset{\tau_1}{\rightarrow} (\ 3\quad 1\quad 2\ ) \underset{\tau_2}{\rightarrow} (\ 1\quad 3\quad 2\ ) \underset{\tau_3}{\rightarrow} (\ 1\quad 2\quad 3\ )$ ordre natural.
De tal manera que $\alpha = \tau_1 \times \tau_2 \times \tau_3 = \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

Definició 34. *Direm que la forma n-lineal $f \in \mathcal{L}(V^n, \Bbbk)$ és* **simètrica** *si, i sols si, $f^\alpha = f \quad \forall \alpha \in \sum_n$.*

Definició 35. *Direm que la forma n-lineal $f \in \mathcal{L}(V^n, \Bbbk)$ és* **antisimètrica** *si, i sols si, $f^\alpha = \varepsilon(\alpha) f \quad \forall \alpha \in \sum_n$.*
És a dir, $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\ f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$.

Definició 36. *Direm que la forma n-lineal $f \in \mathcal{L}(V^n, \Bbbk)$ és* **alternada** *si, i sols si, sent $v_i = v_j \quad i \neq j \Rightarrow f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$.*

Lema 3. *Suposem $f \in \mathcal{L}(V^n, \Bbbk)$.*
f és antisimètrica $\Leftrightarrow f^\tau = -f \quad \forall \tau$ transposició de $\sum_n$.
Demostració:
$\rightarrow$) Com que $\varepsilon(\tau) = -1$, i per hipòtesi f és antisimètrica $\rightarrow f^\tau = \varepsilon(\tau) f = -f$.
$\leftarrow$) Donada $\alpha \in \sum_n \rightarrow \alpha = \tau_1 \times \tau_2 \times \tau_3 \times \ldots \times \tau_t \quad \tau_i$ transposicions en $\sum_n \quad 1 \leq i \leq t. \rightarrow \varepsilon(\alpha) = (-1)^t$.
$f^\alpha = f^{\tau_1 \times \tau_2 \times \tau_3 \times \ldots \times \tau_t} = (f^{\tau_1})^{\tau_2 \times \tau_3 \times \ldots \times \tau_t} \underset{Per\ hipòtesi}{=} (-f)^{\tau_2 \times \tau_3 \times \ldots \times \tau_t} = \left((-1)^2 f\right)^{\tau_3 \times \ldots \times \tau_t} = (-1)^t f = \varepsilon(\alpha) f$.

Teorema 12. *Suposem $f \in \mathcal{L}(V^n, \Bbbk) \wedge$ caract$(\Bbbk) \neq 2$.*
f és antisimètrica $\Leftrightarrow f$ és alternada.

Demostració:

$\rightarrow$) Considerem la n-tupla $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$ amb $v_i = v_j, \quad i < j$.

Per hipòtesi f és antisimètrica $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \\ \text{Com que } v_i = v_j \end{array}\right\}$

$\rightarrow 2f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$.

En ser $caract(\mathbb{k}) \neq 2 \rightarrow f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0 \rightarrow f$ és alternada.

$\leftarrow$) Si f és alternada $\rightarrow f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i+v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i+v_j, v_{j+1} \ldots, v_n) \underset{f \text{ és } n-lineal}{=}$ $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n)+f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)+f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)+$ $f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)+f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) =$ $0 \rightarrow f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \rightarrow f$ és antisimètrica.

20. DETERMINANTS

Definició 37. *Suposem $V = \mathbb{k} -$ e.v. de dimensió n. Suposem $f \in \pounds(V^n, \mathbb{k})$.*

*Anomenem **funció determinant** o simplement **determinant** sobre V a tota aplicació f n-lineal alternada.*

*Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V i $v_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ aleshores **l'expressió coordenada** de la funció determinant D seria:*

$D((v_1, v_2, \ldots, v_n)) = det((v_1, v_2, \ldots, v_n)) = \sum_{1 \leq j_1, j_2, j_n \leq n} x_{1j_1} x_{2j_2} \ldots x_{nj_n} D((e_{j_1}, e_{j_2} \ldots, e_{j_n}))$.

Con que D és alternada, $D((e_{j_1}, e_{j_2} \ldots, e_{j_n})) = 0$, sempre que algun subíndex coincidisca, és a dir, sempre que $j_k = j_l \quad k \neq l$.

Si considerem $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ tal que són tots distints, és a dir $\alpha \in \sum_n$. o $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$. o $\alpha(1) = j_1, \alpha(2) = j_2, \ldots, \alpha(n) = j_n$.

Aleshores $D((v_1, v_2, \ldots, v_n)) = \sum_{\alpha \in \sum_n} x_{1\alpha(1)} x_{2\alpha(2)} \ldots x_{n\alpha(n)} D((e_{\alpha(1)}, e_{\alpha(2)} \ldots, e_{\alpha(n)}) =$ $\sum_{\alpha \in \sum_n} x_{1\alpha(1)} x_{2\alpha(2)} \ldots x_{n\alpha(n)} D^{\alpha}((e_1, e_2, \ldots, e_n)) =$

$\underset{D \text{ alt.} \Leftrightarrow \text{ant.}}{=} \sum_{\alpha \in \sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{1\alpha(1)} x_{2\alpha(2)} \ldots x_{n\alpha(n)} D((e_1, e_2, \ldots, e_n)) \underset{D((e_1, e_2, \ldots, e_n)) = k \in \mathbb{k}}{=} k \sum_{\alpha \in \sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{1\alpha(1)} x_{2\alpha}$

En definitiva, $det((v_1, v_2, \ldots, v_n)) = k \sum_{\alpha \in \sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{1\alpha(1)} x_{2\alpha(2)} \ldots x_{n\alpha(n)}$.

21. DETERMINANT D'UNA MATRIU

Suposem $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tal que $v_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Considerem $A = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$.

Definició 38. *Anomenem **determinant de la matriu** A l'escalar:*

$det(A) = |A| = \sum_{\alpha \in \sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{1\alpha(1)} x_{2\alpha(2)} \ldots x_{n\alpha(n)}$.

Exemple 7. *1. Si* $A = (x_{ij}) \in M_2(\Bbbk) \to det(A) = |A| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$.

2. Si $A = (x_{ij}) \in M_3(\Bbbk) \to det(A) = |A| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha_i \in \sum_3} \varepsilon(\alpha_i) x_{1\alpha_i(1)} x_{2\alpha_i(2)} x_{3\alpha_i(3)} =$
$\sum_{i=1}^{6} \varepsilon(\alpha_i) x_{1\alpha_i(1)} x_{2\alpha_i(2)} x_{3\alpha_i(3)} = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{21}x_{32}x_{13} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{23}x_{32}x_{11} - x_{12}x_{21}x_{33}$.*(Regla de Sarrus).*

A partir d'ara ja podem demostrar formalment qualsevol de les propietats enunciades dels determinants (i de les matrius).

Per exemple, demostrarem que el determinant d'una matriu no varia si a una fila (columna) li sumem una combinació lineal de les restants.

En efecte, si $f \in \pounds(V^n, \Bbbk)$ és una forma n-lineal alternada, considerem:

$f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + \sum_{j \neq i} k_j v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, k_1 v_1 + \ldots + k_{i-1} v_{i-1} + v_i + k_{i+1} v_{i+1} + \ldots + k_n v_n, v_{i+1}, \ldots, v_n) = k_1 \underbrace{f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_1, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{0} +$
$+ k_2 \underbrace{f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_2, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{0} + \ldots + k_{i-1} \underbrace{f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{0} +$
$f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) +$
$+ k_{i+1} \underbrace{f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{0} + \ldots + k_n \underbrace{f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_n, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{0} =$
$f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$.

Teorema 13. *El valor numèric d'un determinant no varia en caviar files per columnes. Equival a dir que el determinant d'una matriu quadrada és igual que el determinant de la seua matriu transposada. És a dir,* $A \in M_n(\Bbbk) \Rightarrow |A| = |A^t|$.

Demostració:

Suposem $A = (x_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$. Suposem $A^t = (y_{ij}) \ / \ y_{ij} = x_{ji}$.

$|A^t| = \sum_{\alpha \in \sum_n} \varepsilon(\alpha) y_{1\alpha(1)} y_{2\alpha(2)} \cdots y_{n\alpha(n)} = \sum_{\alpha \in \sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{\alpha(1)1} x_{\alpha(2)2} \cdots x_{\alpha(n)n}$.

Com que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \exists j \in \{1, 2, \ldots, n\} \ / \ \alpha(j) = i \to j = \alpha^{-1}(i) \wedge x_{\alpha(j)j} = x_{i\alpha^{-1}(i)}$, resulta:

$|A^t| = \sum_{\alpha \in \sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{1\alpha^{-1}(1)} x_{2\alpha^{-1}(2)} \cdots x_{n\alpha^{-1}(n)}$.

Com que $\alpha \in \sum_n \to \alpha^{-1} \in \sum_n \wedge (\alpha\alpha^{-1})(i) = \alpha\left(\alpha^{-1}(i)\right) = \alpha(j) = i \to \alpha\alpha^{-1} = I$ (aplicació identitat)$\to \varepsilon(\alpha\alpha^{-1}) = 1 \to \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\alpha^{-1}) = 1 \to \varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha^{-1}) = 1 \vee \varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha^{-1}) = -1$ (els dos positius i iguals a 1 o els dos negatius i iguals a -1), resulta:

$|A^t| = \sum\limits_{\alpha^{-1}\in\sum_n} \varepsilon(\alpha^{-1}) x_{1\alpha^{-1}(1)} x_{2\alpha^{-1}(2)} \dots x_{n\alpha^{-1}(n)} = \sum\limits_{\beta\in\sum_n} \varepsilon(\beta) x_{1\beta(1)} x_{2\beta(2)} \dots x_{n\beta(n)} =$
$|A|$.

(Si $\alpha \in \sum_n$, resulta que també $\alpha^{-1} \in \sum_n$ ja que si α és bijectiva, també α^{-1} és bijectiva).

Nota 8. *Donada la matriu* $A = (x_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$, *podem desenvolupar el seu determinant per files o per columnes. És a dir,* $|A| = \sum\limits_{\alpha\in\sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{1\alpha(1)} x_{2\alpha(2)} \dots x_{n\alpha(n)}$
$\vee \qquad |A| = \sum\limits_{\alpha\in\sum_n} \varepsilon(\alpha) x_{\alpha(1)1} x_{\alpha(2)2} \dots x_{\alpha(n)n}$.

Teorema 14. *El determinant d'un producte de matrius quadrades és el producte dels determinants. És a dir,*
Si $A, B \in M_n(\Bbbk) \Rightarrow |AB| = |A|\,|B|$.

Demostració:
$A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk), \quad B = (b_{ij}) \in M_n(\Bbbk), \quad C = (c_{ij}) = AB.$
La fila i-èsima de C seria: $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ii}, \dots, c_{in}) = (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{ii}b_{i1} + \dots + a_{in}b_{n1}, a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{ii}b_{i2} + \dots + a_{in}b_{n2}, \dots, a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \dots + a_{ii}b_{ii} + \dots + a_{in}b_{ni}, \dots, a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \dots + a_{ii}b_{in} + \dots + a_{in}b_{nn}) =$
$a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1i}, \dots, b_{1n}) + a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2i}, \dots, b_{2n}) + \dots + a_{ii}(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ii}, \dots, b_{in}) + \dots + a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{ni}, \dots, b_{nn}) =$
$a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \dots + a_{ii}B_i + \dots + a_{in}B_n.$
$|AB| = |C| = D((C_1, C_2, , \dots, C_n)) = det((C_1, C_2, , \dots, C_n)) =$
$= det((\sum\limits_{j_1}^{n} a_{1j_1}B_{j_1}, \sum\limits_{j_2}^{n} a_{2j_2}B_{j_2}, \dots, \sum\limits_{j_n}^{n} a_{nj_n}B_{j_n})) = \sum\limits_{1\le j_1, j_2, j_n \le n} a_{1j_1}a_{2j_2} \dots a_{nj_n} D((B_{j_1}, B_{j_2} \dots, B_{j_n})).$
Con que D és alternada, $D((B_{j_1}, B_{j_2} \dots, B_{j_n})) = 0$, sempre que algun subíndex coincidisca, és a dir, sempre que $j_k = j_l \quad k \neq l$.
Resulta: $|C| = \sum\limits_{\alpha\in\sum_n} a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)} D((B_{\alpha(1)}, B_{\alpha(2)} \dots, B_{\alpha(n)}) =$

$$= \sum_{\alpha\in\sum_n} a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)} D^{\alpha}((B_1, B_2, \dots, B_n)) = \underbrace{\sum_{\alpha\in\sum_n} a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)} \varepsilon(\alpha)}_{|A|}$$

$$\underbrace{D((B_1, B_2, \dots, B_n))}_{|B|} = |A|\,|B|.$$

Proposició 11. *i)* $|AB| = |BA| \qquad$ *ii)* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ *si* A *és regular.*

Demostració:
i) $|AB| = |A|\,|B| = |B|\,|A| = |BA|$.
ii) Com que $AA^{-1} = I \rightarrow |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}| = |I| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

1. PROBLEMES TEMA 9. MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS

1. Siga M_n ($\mathbb{R}$) el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les matrius quadrades. Considerem els conjunts S i T de matrius simètriques i antisimètriques.

i) Demostreu que són subespais vectorials de M_n ($\mathbb{R}$) tal que M_n ($\mathbb{R}$) $= S \oplus T$.

ii) Calculeu la $dim(S)$ i $dim(T)$.

iii) Trobeu la descomposició de la matriu: $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Sol.: i) $S = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ X^t = X\}$.

$S \leq M_n$ ($\mathbb{R}$) sii a) $S \neq \varnothing$. b) $\alpha A + \beta B \in S \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall A, B \in S$.

a) $S \neq \varnothing$ ja què $0 \in S$. b) $A, B \in S \to A^t = A,\ B^t = B$.

$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B \to \alpha A + \beta B \in S$.

$T = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ X^t = -X\}$.

$T \leq M_n$ ($\mathbb{R}$) sii a) $T \neq \varnothing$. b) $\alpha A + \beta B \in T \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall A, B \in T$.

a) $T \neq \varnothing$ ja què $0 \in T$. b) $A, B \in T \to A^t = -A,\ B^t = -B$.

$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha(-A) + \beta(-B) = -\alpha A - \beta B = -(\alpha A + \beta B) \in T$.

$$M_n\ (\mathbb{R}) = S \oplus T \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ M_n(\mathbb{R}) = S + T \\ ii)\ S \cap T = 0 \end{cases}$$

i) $M_n(\mathbb{R}) = S + T$.

$\subset$) Si $X \in M_n(\mathbb{R}) \to X = \frac{1}{2}(X + X^t) + \frac{1}{2}(X - X^t) \in S + T$.

$\supset$) Com $S, T \in M_n(\mathbb{R}) \to S + T \leq M_n(\mathbb{R}) \to S + T \subset M_n(\mathbb{R})$.

ii) $S \cap T = 0$.

Siga $X \in S \cap T \to \begin{cases} X \in S \to X^t = X \\ X \in T \to X^t = -X \end{cases} \to X = -X \to 2X = 0 \to X = 0 \to S \cap T = 0$.

ii) Anem a calcular la $dim(S)$ i $dim(T)$.

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in S \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

$$\to \begin{cases} a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j \to \binom{n}{2} = \dfrac{n^2 - n}{2} \to \\ a_{ii} = a_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, n \to n \end{cases}$$

$\to dim(S) = \dfrac{n^2-n}{2} + n = \dfrac{n^2+n}{2}$.

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in T \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = -a_{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ i \neq j \to \binom{n}{2} = \dfrac{n^2-n}{2} \\ \qquad a_{ii} = -a_{ii},\ i = 1,2,\ldots,n \to a_{ii} = 0 \to 0 \end{array} \right. \to dim(T) = \frac{n^2-n}{2}.$$

iii) La descomposició de la matriu $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ com a suma d'una matriu simètrica i una antisimètrica:

$$X = \frac{1}{2}(X + X^t) + \frac{1}{2}(X - X^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ 11 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{2} & 4 \\ \frac{11}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 4 & \frac{9}{2} & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in S + T.$$

2. Determineu dues matrius $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ tal que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} i & -1 \\ i+1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad -2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Sol.: $\left.\begin{array}{r} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} i & -1 \\ i+1 & 1 \end{pmatrix} \\ -2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} \end{array}\right\} \to: \left.\begin{array}{r} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} i & -1 \\ i+1 & 1 \end{pmatrix} \\ -4X + 2Y = \begin{pmatrix} 10 & -2i \\ 4 & 2+2i \end{pmatrix} \end{array}\right\} \to$

$$-X = \begin{pmatrix} 10+i & -1-2i \\ 5+i & 3+2i \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -10-i & 1+2i \\ -5-i & -3-2i \end{pmatrix}.$$

$$-2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 5 & -i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -10-i & 1+2i \\ -5-i & -3-2i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -15-2i & 2+3i \\ -8-2i & -5-3i \end{pmatrix}.$$

3. Considerem la matriu: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Proveu que el conjunt de matrius que commuten amb A és un subespai vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

ii) Calculeu la seua dimensió i una base.

iii) Determineu un subespai suplementari, H, dels subespai anterior. Determineu la matriu A com a suma de dues matrius que pertanyen, respectivament, als subespais anteriors.

Sol.: i) Siga $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Siga $S = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ AX = XA\}$.

$$S \leq M_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow i) \ S \neq \varnothing \quad ii) \ \alpha X + \beta Y \in S \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \forall X, Y \in S.$$

En efecte, $S \neq \varnothing$ ja què $0 \in S$ $(A0 = 0 = 0A)$.

Si $\forall X, Y \in S \rightarrow AX = XA$ i $AY = YA$. $\quad A(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X) + A(\beta Y) = \alpha(AX) + \beta(AY) = \alpha(XA) + \beta(YA) = (\alpha X)A + (\beta Y)A = (\alpha X + \beta Y)A \rightarrow \alpha X + \beta Y \in S$.

ii) Siga $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S \rightarrow AX = XA \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+c = 2a+b \\ 2b+d = a+b \\ a+c = 2c+d \\ b+d = c+d \end{cases} \rightarrow c = b,$ $a = b + d$.

Per la qual cosa $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d & b \\ b & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Base de S és $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad dim(S) = 2$.

iii) Sabem que $dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$.

Pel teorema de la base incompleta: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de $M_2(\mathbb{R})$.

Aleshores $H = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow M_2(\mathbb{R}) = S \oplus H$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & \lambda \\ \lambda+\alpha & \mu+\beta \end{pmatrix}$.

En resoldre el sistema: $2 = \lambda + \mu, 1 = \lambda, 1 = \lambda + \alpha, 1 = \mu + \beta \to \lambda = \mu = 1$, $\alpha = \beta = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4. Siga $V = \mathbb{R}$-espai vectorial i $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Siga h l'aplicació lineal definida per:

$$h(v_1) = v_2, \qquad h(v_2) = v_3, \qquad h(v_3) = v_1.$$

i) Trobeu la matriu associada de h en la base B.

ii) Trobeu la matriu associada de h en la base $B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_1 + v_2 + v_3\}$.

Sol.: i) Per trobar-la posarem en columna la imatge per h dels vectors que formen la base B.

És a dir $M_B^{h(B)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

ii) La base $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

La base $B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_1 + v_2 + v_3\} = \{(1,1,0), (1,0,-1), (1,1,1)\}$.

$h(v_1 + v_2) = h(v_1) + h(v_2) = (0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(1,1,1)$

$h(v_1 - v_3) = h(v_1) - h(v_3) = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0) = \alpha'(1,1,0) + \beta'(1,0,-1) + \gamma'(1,1,1)$

$h(v_1 + v_2 + v_3) = h(v_1) + h(v_2) + h(v_3) = (1,1,1) = \alpha''(1,1,0) + \beta''(1,0,-1) + \gamma''(1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ -\beta + \gamma = 1 \end{array}\right\} \to a = 1, \beta = -1, \gamma = 0.$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha' + \beta' + \gamma' = -1 \\ \alpha' + \gamma' = 1 \\ -\beta' + \gamma' = 0 \end{array}\right\} \to a' = 3, \beta' = -2, \gamma' = -2.$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 1 \\ \alpha'' + \gamma'' = 1 \\ -\beta'' + \gamma'' = 1 \end{array}\right\} \to a'' = 0, \beta'' = 0, \gamma'' = 1.$$

Per la qual cosa $M_{B'}^{h(B')} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

5. Siga $f : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}.$

i) Proveu que f és una aplicació lineal.

ii) Determineu la matriu associada en les bases canòniques.

iii) Calculeu el nucli i la imatge de f.

iv) Calculeu, si és possible $f^{-1}(I)$, essent I la matriu identitat.

Sol.: i) f és lineal sii $f(\lambda(ax^3+bx^2+cx+d)+\mu(a'x^3+b'x^2+c'x+d')) = \lambda f(ax^3+bx^2+cx+d)+\mu f(a'x^3+b'x^2+c'x+d')$.

En efecte: $f(\lambda(ax^3+bx^2+cx+d)+\mu(a'x^3+b'x^2+c'x+d')) = f((\lambda a+\mu a')x^3+(\lambda b+\mu b')x^2+(\lambda c+\mu c')x+(\lambda d+\mu d')) =$

$$\begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' & (\lambda b+\mu b')-(\lambda c+\mu c') \\ (\lambda c+\mu c')-(\lambda b+\mu b') & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' & (\lambda b-\lambda c)+(\mu b'-\mu c') \\ (\lambda c-\lambda b)+(\mu c'-\mu b') & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b-\lambda c \\ \lambda c-\lambda b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a' & \mu b'-\mu c' \\ \mu c'-\mu b' & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' & b'-c' \\ c'-b' & 0 \end{pmatrix} =$$

$= \lambda f(ax^3+bx^2+cx+d)+\mu f(a'x^3+b'x^2+c'x+d')$.

ii) $B=\{1,x,x^2,x^3\}$ base canònica de $\mathbb{R}_3[x]$.

$B' = \left\{ I_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canònica de $M_2(\mathbb{R})$.

Hem de calcular: $M_{B'}^{f(B)}$

$f(1) = f(0x^3+0x^2+0x+1) = f(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0I_{11}+0I_{12}+0I_{21}+0I_{22} = (0,0,0,0)$.

$f(x) = f(0x^3+0x^2+x+0) = f(0,0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0I_{11}-1I_{12}+I_{21}+0I_{22} = (0,-1,1,0)$.

$f(x^2) = f(0x^3+x^2+0x+0) = f(0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0I_{11}+I_{12}-I_{21}+0I_{22} = (0,1,-1,0)$.

$f(x^3) = f(x^3+0x^2+0x+0) = f(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_{11}+0I_{12}+0I_{21}+0I_{22} = (1,0,0,0)$.

Per la qual cosa $M_{B'}^{f(B)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) $Ker(f) = \left\{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ f(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} =$

$= \left\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} =$

$= \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ a = 0, b = c\} = \{bx^2 + bx + d \ / \ b, d \in \mathbb{R}\} =$

$= \{b(x^2 + x) + d \ / \ b, d \in \mathbb{R}\} = \langle x^2 + x, 1\rangle$.

$Im(f) = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ \exists p(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in \mathbb{R}_3[x] \ / \\ f(p(x)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \right\} =$

$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ \begin{pmatrix} a' & b'-c' \\ c'-b' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} =$

$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ d = 0, b = -c\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \ / \ a, c \in \mathbb{R}\right\} =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

iv) $f^{-1}(I) = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ f(p(x)) = I\} =$

$= \left\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

La qual cosa és impossible ja què $0 \neq 1$.

Aleshores $\nexists f^{-1}(I)$.

6. Siguen els endomorfismes f i g definits per:
   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (x - y, x - z, 0, x)$.
   $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y, z, t) = (x + t, x - y)$.
   Trobeu les matrius associades a f, g, i $g \circ f$ en les bases canòniques.
   Sol.: Siga C_k la base canònica de $\mathbb{R}^k$ on $K = 2, 3, 4$.
   S'ha de calcular $M_{C_4}^{f(C_3)}$.
   $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 0, 0, 0)$, $f(0, 0, 1) = (0, -1, 0, 0)$.
   Per la qual cosa $M_{C_4}^{f(C_3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

S'ha de calcular $M_{C_2}^{g(C_4)}$.

$g(1,0,0,0) = (1,1)$, $g(0,1,0,0) = (0,-1)$, $g(0,0,1,0) = (0,0)$, $g(0,0,0,1) = (1,0)$.

Per la qual cosa $M_{C_2}^{g(C_4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

S'ha de calcular $M_{C_2}^{(g\circ f)(C_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. En $\mathbb{R}^3$, siguen els endomorfismes f i g definits per:

$$f(x,y,z) = (x, x-z, z-y) \qquad g(x,y,z) = (0,x,y).$$

Trobeu les matrius associades, respecte de la base $B = \{(1,1,1),(1,0,1),(2,1,0)\}$, de les següents aplicacions lineals:

$3f + 2g, \quad f^2, \quad g\circ f, \quad f\circ g.$

Sol.: Es tracta de trobar $M_B^{f(B)}$.

$$f(1,1,1) = (1,0,0) = \alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(2,1,0) \to \left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha+\beta+2\gamma \\ 0 = \alpha+\gamma \\ 0 = \alpha+\beta \end{array} \right. \to$$

$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$.

$$f(1,0,1) = (1,0,1) = \alpha'(1,1,1)+\beta'(1,0,1)+\gamma'(2,1,0) \to \left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha'+\beta'+2\gamma' \\ 0 = \alpha'+\gamma' \\ 1 = \alpha'+\beta' \end{array} \right. \to$$

$\alpha' = 0, \beta' = 1, \gamma' = 0$.

$$f(2,1,0) = (2,2,-1) = \alpha''(1,1,1)+\beta''(1,0,1)+\gamma''(2,1,0) \to \left\{ \begin{array}{l} 2 = \alpha''+\beta''+2\gamma'' \\ 2 = \alpha''+\gamma'' \\ -1 = \alpha''+\beta'' \end{array} \right. \to$$

$\alpha'' = \frac{1}{2}, \beta'' = -\frac{3}{2}, \gamma'' = \frac{3}{2}$.

Per la qual cosa $M_B^{f(B)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Es tracta de trobar $M_B^{g(B)}$.

$$g(1,1,1)=(0,1,1)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(2,1,0)\rightarrow\left\{\begin{array}{l}0=\alpha+\beta+2\gamma\\1=\alpha+\gamma\\1=\alpha+\beta\end{array}\right.\rightarrow$$

$\alpha=\dfrac{3}{2},\beta=-\dfrac{1}{2},\gamma=-\dfrac{1}{2}.$

$$g(1,0,1)=(0,1,0)=\alpha'(1,1,1)+\beta'(1,0,1)+\gamma'(2,1,0)\rightarrow\left\{\begin{array}{l}0=\alpha'+\beta'+2\gamma'\\1=\alpha'+\gamma'\\0=\alpha'+\beta'\end{array}\right.\rightarrow$$

$\alpha=1,\beta=-1,\gamma=0.$

$$g(2,1,0)=(0,2,1)=\alpha''(1,1,1)+\beta''(1,0,1)+\gamma''(2,1,0)\rightarrow\left\{\begin{array}{l}0=\alpha''+\beta''+2\gamma''\\2=\alpha''+\gamma''\\1=\alpha''+\beta''\end{array}\right.\rightarrow$$

$\alpha=\dfrac{5}{2},\beta=-\dfrac{3}{2},\gamma=-\dfrac{1}{2}.$

Per la qual cosa $M_B^{g(B)}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$

$$M_B^{(3f+2g)(B)}=3M_B^{f(B)}+2M_B^{g(B)}=3\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{9}{2}&2&\frac{25}{2}\\\frac{1}{2}&2&\frac{9}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$M_B^{f^2(B)}=M_B^{f(B)}M_B^{f(B)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&1&\frac{9}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{9}{4}\end{pmatrix}.$$

$$M_B^{(g\circ f)(B)}=M_B^{g(B)}M_B^{f(B)}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}&0&\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}&-1&\frac{9}{4}\\-\frac{1}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

$$M_B^{(f\circ g)(B)}=M_B^{f(B)}M_B^{g(B)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}&0&\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}&-1&\frac{9}{4}\\-\frac{1}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

8. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Siguen $B_1=\{v_1,v_2\}$ i $B_2=\{w_1,w_2,w_3\}$ dos bases de V i W respectivament.

   Suposem l'aplicació lineal $f:V\rightarrow W$ tal que $f(v_1)=w_1-w_2+w_3$, $f(v_2)=w_1+3w_3$.

   Si $D_1=\{v_1+v_2,2v_2-v_1\}$ i $D_2=\{w_1+w_2,w_1,w_1+w_2+w_3\}$ dues noves bases de V i W respectivament. Trobeu:

i) L'equació matricial de f respecte de les bases B_1 i B_2.

ii) Matrius de canvi de base de B_1 a D_1 i de B_2 a D_2.

iii) L'equació matricial de f respecte de les bases B_1 i D_2.

iv) L'equació matricial de f respecte de les bases D_1 i D_2.

Esquema:

$$\begin{array}{ccc} B_1 = \{(1,0),(0,1)\} & \xrightarrow{A} & B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1}. \\ D_1 = \{(1,1),(-1,2)\} & \xrightarrow{B} & D_2 = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\} \end{array}$$

Sol.: i) Es tracta de calcular $A = M(f, B_1, B_2) = M_{B_2}^{f(B_1)}$.

Es pot considerar B_1 i B_2 les bases canòniques.

Aleshores $f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3 = (1,-1,1)$, $f(v_2) = w_1 + 3w_3 = (1,0,3)$.

$$A = M(f, B_1, B_2) = M_{B_2}^{f(B_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) Per trobar la matriu canvi de base de B_1 a D_1 cal posar en columna les coordenades de D_1 en funció de les de B_1.La representarem per $M_{B_1}^{D_1}$

$$v_1 + v_2 = (1,1),\ 2v_2 - v_1 = (-1,2). \qquad P = M_{B_1}^{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per trobar la matriu canvi de base de B_2 a D_2 cal posar en columna les coordenades de D_2 en funció de les de B_2.La representarem per $M_{B_2}^{D_2}$

$w_1 + w_2 = (1,1,0)$, $w_1 = (1,0,0)$, $w_1 + w_2 + w_3 = (1,1,1)$.

$$Q = M_{B_2}^{D_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) $Q^{-1}A = M(f, B_1, D_2) = M_{D_2}^{f(B_1)} = M_{D_2}^{B_2} M_{B_2}^{f(B_1)}$.

Per trobar la inversa d'una matriu es pot fer per diversos procediments: 1) Aplicant el canvi de base. 2) Per la fórmula. 3) Pel mètode de reducció en cascada.

1) $(1,0,0) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(1,1,1) \rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$.

$(0,1,0) = \alpha'(1,1,0) + \beta'(1,0,0) + \gamma'(1,1,1) \rightarrow \alpha' = 1, \beta' = -1, \gamma' = 0$.

$(0,0,1) = \alpha''(1,1,0) + \beta''(1,0,0) + \gamma''(1,1,1) \rightarrow \alpha'' = -1, \beta'' = 0, \gamma'' = 1$.

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $Q^{-1} = \dfrac{(Adj(Q))^t}{|Q|}$. Es calcula.

3) $(Q\ I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (I\ Q^{-1})$

Per la qual cosa $M_{D_2}^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aleshores $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

iv) Es tracta de calcular $B = M(f, D_1, D_2) = M_{D_2}^{f(D_1)}$.

Es pot calcular per vos procediments diferents: El primer, directament i el segon indirectament.

Directament la matriu seria aquella que resultara en posar en columna les coordenades de les images dels vectors de la base D_1.

$D_1 = \{(1,1), (-1,2)\}$ $\quad D_2 = \{(1,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$ $\quad f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3$, $f(v_2) = w_1 + 3w_3$.

Calculem en primer lloc les equacions de l'aplicació lineal f.

$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \to f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1) \to f(x,y) = x(1,-1,1) + y(1,0,3) = (x+y, -x, x+3y)$.

$f(1,1) = (2,-1,4) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(1,1,1) \to \alpha = -5, \beta = 3, \gamma = 4$.

$f(-1,2) = (1,1,5) = \alpha'(1,1,0) + \beta'(1,0,0) + \gamma'(1,1,1) \to \alpha' = -4, \beta' = 0, \gamma' = 5$.

$$B = M(f, D_1, D_2) = M_{D_2}^{f(D_1)} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Indirectament en utilitzar les matrius anteriors: $B = M(f, D_1, D_2) = M_{D_2}^{f(D_1)} = M_{D_2}^{B_2} M_{B_2}^{f(B_1)} M_{D_1}^{B_1} =$

$$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$.

   i) Trobeu la matriu associada a f en les bases $B = \{(1,1,1),(0,1,-1),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $B' = \{(1,2),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   ii) Classifiqueu f.

   Sol.: $f(1,1,1) = (2,2) = \alpha(1,2) + \beta(0,1) \to \alpha = 2, \beta = 2$.

   $f(0,1,-1) = (1,0) = \alpha'(1,2) + \beta'(0,1) \to \alpha' = 1, \beta' = -2$.

   $f(1,0,0) = (1,0) = \alpha''(1,2) + \beta''(0,1) \to \alpha'' = 1, \beta'' = -2$.

   Per la qual cosa $M(f,B,B') = M_{B'}^{f(B)}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

   ii) $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x+y, y+z) = (0,0)\} =$
   $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -y, z = -y\} = \{(-y,y,-y) \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,-1)\rangle$.

   Per la qual cosa f no és injectiva.

   $Im(f) = f(x,y,z) = (x+y, y+z) = x(1,0) + y(1,1) + z(0,1)$.Pelmètode de reducció en cascada:

   $$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}.$$

   La dimensió de $Im(f) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$, ens indica que f és epimorfisme.

10. Considerem l'homomorfisme:

    $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0,1) = (0,1)$, $f(0,1,1) = (0,2)$, $f(1,1,0) = (1,1)$.

    i) Determineu la matriu associada a f en les bases canòniques.

    ii) Siga $V \leq \mathbb{R}^3 \ / \ V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z = 0\}$. Determineu $f(V)$.

    Sol.: i) $M(f, C_3, C_2) = M_{C_2}^{f(C_3)}$. Es pot comprovar que $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ és base.

    $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

    $(1,0,0) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,0) \to \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$.

    $(0,1,0) = \alpha'(1,0,1) + \beta'(0,1,1) + \gamma'(1,1,0) \to \alpha' = -\frac{1}{2}, \beta' = \frac{1}{2}, \gamma' = \frac{1}{2}$.

    $(0,0,1) = \alpha''(1,0,1) + \beta''(0,1,1) + \gamma''(1,1,0) \to \alpha'' = \frac{1}{2}, \beta'' = \frac{1}{2}, \gamma'' = -\frac{1}{2}$.

$M(f,C_3,B) = M_B^{f(C_3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$f(1,0,0) = \alpha f(1,0,1)+\beta f(0,1,1)+\gamma f(1,1,0) = \frac{1}{2}(0,1)+(-\frac{1}{2})(0,2)+\frac{1}{2}(1,1) = (\frac{1}{2},0)$.

$f(0,1,0) = \alpha' f(1,0,1)+\beta' f(0,1,1)+\gamma' f(1,1,0) = -\frac{1}{2}(0,1)+\frac{1}{2}(0,2)+\frac{1}{2}(1,1) = (\frac{1}{2},1)$.

$f(0,0,1) = \alpha'' f(1,0,1)+\beta'' f(0,1,1)+\gamma'' f(1,1,0) = \frac{1}{2}(0,1)+\frac{1}{2}(0,2)+(-\frac{1}{2})(1,1) = (-\frac{1}{2},1)$.

Aleshores $M(f,C_3,C_2) = M_{C_2}^{f(C_3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ y+z \end{pmatrix}$.

ii) $f(V) = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (x',y')\} =$
$= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (x',y')\}$.
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to x+y-z = 0$.

$f(x,y,z) = (x',y') \to \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x' \\ y+z = y' \end{cases}$

Del sistema: $\begin{cases} x+y-z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x' \\ y+z = y' \end{cases} \to x' = 0, y' = y+z = \alpha \to$

$\to f(V) = \langle (0,1) \rangle$.

11. Considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definides per:
$f(1,0,1) = (0,1)$, $f(0,0,-1) = (1,1)$, $f(2,1,1) = (1,0)$.
$g(x,y) = (x,x,y) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
i) Calculeu les matrius associades a f i g en les bases canòniques.
ii) Determineu $g^{-1}(H)$ i $f(H)$, essent $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y+z = 0\}$.
iii) Calculeu $(g \circ f)(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Sol.: i) Tenim que trobar $M(f,C_3,C_2) = M_{C_2}^{f(C_3)}$ i $M(g,C_2,C_3) = M_{C_3}^{g(C_2)}$.

Es pot comprovar que $\{(1,0,1),(0,0,-1),(2,1,1)\}$ és base de $\mathbb{R}^3$.
$(1,0,0)=\alpha(1,0,1)+\beta(0,0,-1)+\gamma(2,1,1)\to\alpha=1,\beta=1,\gamma=0$.
$(0,1,0)=\alpha'(1,0,1)+\beta'(0,0,-1)+\gamma'(2,1,1)\to\alpha'=-2,\beta'=-1,\gamma'=1$.
$(0,0,1)=\alpha''(1,0,1)+\beta''(0,0,-1)+\gamma''(2,1,1)\to\alpha''=0,\beta''=-1,\gamma''=0$.
$f(1,0,0)=(0,1)+(1,1)=(1,2)$.
$f(0,1,0)=-2(0,1)-(1,1)+(1,0)=(0,-3)$.
$f(0,0,1)=-(1,1)$.
Aleshores $M(f,C_3,C_2)=M_{C_2}^{f(C_3)}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-3&-1\end{pmatrix}$.
$g(1,0)=(1,1,0)$ i $g(0,1)=(0,0,1)$.
Aleshores $M(g,C_2,C_3)=M_{C_3}^{g(C_2)}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
ii) $g^{-1}(H)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ g(x,y)\in H\right\}$.
$H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-y+z=0\right\}=\{(x,x+z,z)\}=\{x(1,1,0)+z(0,1,1)\}=$
$\langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle$.
$g(x,y)\in H\to(x,x,y)=\lambda(1,1,0)+\mu(0,1,1)\to\mu=0,y=0,x=\lambda$.
Per la qual cosa $g^{-1}(H)=\langle(1,0)\rangle$.

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\2x-3y-z\end{pmatrix}.$$

$f(H)=\left\{(x',y')\in\mathbb{R}^2\ /\ \exists\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ f(x,y,z)=(x',y')\ \right\}=\left\{(x',y')\in\mathbb{R}^2\ /\ x-y+z=(\right.$
$H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-y+z=0\right\}$

$$\left\{\begin{array}{r}x-y+z=0\\x-z=x'\\2x-3y-z=y'\end{array}\right.\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&0&-1&x'\\2&-3&-1&y'\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-2&x'\\0&-1&-3&y'\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-2&x'\\0&0&-5&x'+y'\end{pmatrix}$$

Per la qual cosa: $-5z=x'+y'\to z=-\dfrac{x'+y'}{5},y=\dfrac{3x'-2y'}{5},x=\dfrac{4x'-y'}{5}$.
En definitiva, $f(H)=\{(x-z,2x-3y-z)\ /\ x-y+z=0\}=\{(x-z,2x-3y-z)\ /\ x+z=$
$\{(x-z,-x-4z)\ \}=\langle(1,-1),(-1,-4)\rangle$.
També

$f(H) = \alpha f(1,1,0)+\beta f(0,1,1) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$

iii) Calculeu $(g \circ f)(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Ja què $(g \circ f)(x,y,z) = g[f(x,y,z)]$, en utilitzar matrius associades obtenim:

$M((g \circ f), C_3, C_3) = M_{C_3}^{g(C_2)} M_{C_2}^{f(C_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

També $(g \circ f)(x,y,z) = g[f(x,y,z)] = g(x-z, 2x-3y-z) =$
$= (x-z, x-z, 2x-3y-z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

12. Donats els sistemes d'equacions lineals:

$$\text{i)} \begin{cases} x+2y+z-t=1 \\ 2x-3y+z+t=2 \\ x+9y+2z-4t=1 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -2x+3y-3z=3 \\ -3x+8y-7z=1 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x+2y-2z=1 \\ -x+3y-z=2 \end{cases}$$

Comproveu que un té solució única, l'altre infinites solucions i l'altre no té solució

Sol.: i) La matriu ampliada seria:

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rang(A) = rang(A,B) = 2 <$ *nombre d'incògnites* $= 4 \rightarrow$ *Sistema compatible indeterminat*. Infinites solucions.

$$\text{ii)}\ (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 8 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 0 & 14 & -10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

$rang(A) = 2$, $rang(A,B) = 3 \rightarrow$ *Sistema incompatible*. No té solució.

$$\text{iii)}\ (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$rang(A) = rang(A,B) = 3 =$ *nombre d'incògnites* $\rightarrow$ *Sistema compatible determinat*. Solució única.

13. Discutiu i resoleu, segons els valors dels paràmetres, els següents sistemes:

$$\text{i)}\begin{cases} \lambda x+y+z+t=\lambda \\ x+y+z=0 \\ x+y+z+\lambda t=\lambda \\ \lambda x-\lambda y=\lambda \end{cases} \qquad \text{ii)}\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$$

$$\text{iii)}\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases} \qquad \text{iv)}\begin{cases} \lambda x+y+z=\lambda^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3\lambda \end{cases}$$

$$\text{v)}\begin{cases} x+y+z=ab \\ x-y-az=b \\ 2x-y+az=2b \end{cases} \qquad \text{vi)}\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Sol.: i) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim$

$\underbrace{\sim}_{Si\ \lambda\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Discussió:

1) Si $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1 \rightarrow rang(A) = rang(A,B) = 4 =$ *nombre d'incògnites* $\rightarrow$ *Sistema compatible determinat.*

2) Si $\lambda = 1 \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rang(A) = rang(A,B) =$ $3 <$ *nombre d'incògnites* $\rightarrow$ *Sistema compatible indeterminat.*

3) Si $\lambda = 0 \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rang(A) = rang(A,B) = 2 <$ *nombre d'incògnites* $\rightarrow$ *Sistema compatible indeterminat.*

Per la qual cosa, si $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1 \rightarrow x = 1,\ y = 0,\ z = -1,\ t = 1$ és la solució.

Si $\lambda = 1 \rightarrow x = \dfrac{1-z}{2},\ y = \dfrac{-1-z}{2},\ t = 1$ són les infinites solucions.

Si $\lambda = 0 \rightarrow x = t$, $y = -z - t$ són les infinites solucions.

ii) $(A, B) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & -(a-1)(a+1)^2 \end{pmatrix}.$

Discussió:

1) Si $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \rightarrow rang(A) = rang(A, B) = 3 = nombre\ d'incògnites \rightarrow$ *Sistema compatible determinat.*

2) Si $a = 1 \rightarrow (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rang(A) = rang(A, B) = 1 <$ *nombre d'incògnites* $\rightarrow$ *Sistema compatible indeterminat.*

3) Si $a = -2 \rightarrow (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow rang(A) = 2, rang(A, B) = 3 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

Per la qual cosa, si $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \rightarrow z = \dfrac{(a+1)^2}{a+2}$, $y = \dfrac{1}{a+2}$, $x = -\dfrac{a+1}{a+2}$ és la solució.

Si $a = 1 \rightarrow x + y + z = 1 \rightarrow x = 1 - y - z = 1 - \lambda - \mu$ són les infinites solucions.

iii) $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & -1 & -m-m^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & 1 & m(m+1) \end{pmatrix}.$

Discussió:

1) Si $m \neq 1 \rightarrow rang(A) = rang(A, B) = 3 = nombre\ d'incògnites \rightarrow$ *Sistema compatible determinat.*

2) Si $m = 1 \rightarrow (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ $rang(A) = 2, rang(A, B) = 3 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

Per la qual cosa, si $m \neq 1 \rightarrow z = m^2 + m$, $y = \dfrac{-m}{m-1}$, $z = 1 - m^2 + \dfrac{m}{m-1}$ és la solució.

iv) $(A,B) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3\lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 3\lambda - 6 \\ 0 & 1+\lambda & 1-\lambda & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix}$.

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3\lambda - 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3\lambda - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$.

Discussió:

1) Si $\lambda \neq 2 \rightarrow rang(A) = 3, rang(A,B) = 4 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

2) Si $\lambda = 2 \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rang(A) = rang(A,B) =$ $3 =$ *nombre d'incògnites* $\rightarrow$ *Sistema compatible determinat.*

Per la qual cosa, si $\lambda = 2 \rightarrow x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ és la solució.

v)$(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ab \\ 1 & -1 & -a & b \\ 2 & -1 & a & 2b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ab \\ 0 & 2 & 1+a & ab-b \\ 0 & -3 & a-2 & 2b-2ab \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ab \\ 0 & 2 & 1+a & ab-b \\ 0 & 0 & 1-5a & b(a-1 \end{pmatrix}$

Discussió:

1) Si $a \neq \dfrac{1}{5} \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ab \\ 0 & 2 & 1+a & ab-b \\ 0 & 0 & 1-5a & b(a-1) \end{pmatrix}$.

Per la qual cosa $(1-5a)z = b(a-1) \rightarrow z = \dfrac{b(a-1)}{1-5a}$

$2y + (1+a)z = ab - b \rightarrow 2y = b(a-1) - (1+a)z = b(a-1) - (1+a)\dfrac{b(a-1)}{1-5a} =$
$b(a-1)(1 - \dfrac{1+a}{1-5a}) = b(a-1)(\dfrac{-6a}{1-5a})$
$\rightarrow y = \dfrac{-3ab(a-1)}{1-5a}$.

$x + y + z = ab \rightarrow x = ab - y - z = ab + \dfrac{3ab(a-1)}{1-5a} - \dfrac{b(a-1)}{1-5a} = \dfrac{b(1-3a-2a^2)}{1-5a}$.

2) Si $a = \dfrac{1}{5} \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ab \\ 0 & 2 & \frac{6}{5} & b(\frac{-4}{5}) \\ 0 & 0 & 0 & b(\frac{-4}{5}) \end{pmatrix}$.

2.1) $b = 0 \rightarrow rang(A) = 2, rang(A,B) = 2 \rightarrow$ *Sistema compatible indeterminat.*

Per la qual cosa $y = \frac{-3}{5}z$, $x = \frac{-2}{5}z$ $\quad \forall z \in \mathbb{R}$ són les infinites solucions.

2.2) $b \neq 0 \rightarrow rang(A) = 2, rang(A,B) = 3 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

$$\text{vi)}(A,B) = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & b-ab & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & b-a \end{pmatrix}.$$

Discussió:

1) Si $b \neq 0$

1.1) Si $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \rightarrow rang(A) = rang(A,B) = 3 =$ *nombre d'incògnites* $\rightarrow$ *Sistema compatible determinat.*

1.2) Si $a = 1 \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$.

1.2.1) Si $b \neq 1 \rightarrow rang(A) = 1, rang(A,B) = 2 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

1.2.2) Si $b = 1 \rightarrow rang(A) = 1 = rang(A,B) < 3 \rightarrow$ *Sistema compatible indeterminat.*

1.3) Si $a = -2 \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & b & 2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}$.

1.3.1) Si $b \neq -2 \rightarrow rang(A) = 2, rang(A,B) = 3 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

1.3.2) Si $b = -2 \rightarrow rang(A) = 2 = rang(A,B) < 3 \rightarrow$ *Sistema compatible indeterminat.*

2) Si $b = 0 \rightarrow (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & -a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1) Si $a \neq 1 \rightarrow rang(A) = 2, rang(A,B) = 3 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

2.2) Si $a = 1 \rightarrow rang(A) = 1, rang(A,B) = 2 \rightarrow$ *Sistema incompatible.*

Per la qual cosa, si $b \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -2 \rightarrow z = \frac{b-a}{(a+2)(1-a)}$,

$y = \dfrac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \quad x = \dfrac{a-b}{(a+2)(a-1)}.$

Si $a = 1 \wedge b = 1 \to x + y + z = 1 \to x = 1 - y - z \quad \forall y, z \in \mathbb{R}$.

Si $a = -2 \wedge b = -2 \to x = z = -1 - 2y \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

14. Determineu els valors del paràmetre λ perquè el sistema homegeni següent siga compatible indeterminat i trobeu les solucions per a aquests valors de λ.

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$$

Sol.: Un sistema homogeni sempre és compatible. Per ser indeterminat cal que el determinant de la matriu dels coeficients siga zero.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to 2\lambda - 2 = 0 \to \lambda = 1.$$

Per Gauss, la solució és: $x = 3\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$.

15. Considerem els sistemes d'equacions lineals:

$$S = \begin{cases} 2x + y - (3+2\lambda)z = 0 \\ x - y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad S' = \begin{cases} x + (\mu+1)z = 0 \\ (\mu-1)x + y + \mu(\mu-1)z = 0 \end{cases}$$

Calculeu els conjunts de solucions de tots dos sistemes i els valors de λ i μ que fan els sistemes equivalents, és a dir, amb les mateixes solucions.

Sol.: Els dos sistemes són compatibles indeterminats ja què $rang(A) = 2 < 3 =$ *nombre d'incògnites*.

En el sistema S :

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \mu+1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3-2\lambda \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \to y = 3z, x = \lambda z \to (\lambda z, 3z, z)$ és la solució.

En el sistema S' :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu+1 \\ \mu-1 & 1 & \mu(\mu-1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu+1 \\ 0 & 1 & 1-\mu \end{pmatrix} \to y = (\mu-1)z, x = -(\mu+1)z \to (-(\mu+1)z, (\mu-1)z, z)$ és la solució.

Els sistemes equivalents tenen les mateixes solucions. Per la qual cosa:

$$(\lambda z, 3z, z) = (-(\mu+1)z, (\mu-1)z, z) \to \begin{cases} \mu - 1 = 3 \\ -(\mu+1) = \lambda \end{cases} \to \mu = 4, \lambda = -5.$$

16. Justifiqueu que el sistema T té infinites solucions i expliqueu com s'obtenen.

$$T = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

Aplicació: Si el sistema anterior admet les solucions $(3,2,4)$ i $(2,3,0)$. Quan valdran els determinants: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$?

Sol.: Al ser un sistema homogeni és sempre compatible. Com el rang de la matriu dels coeficients és menor o igual a 2 i el nombre d'incògnites és 3, aleshores el sistema és compatible indeterminat. Per obtenir les infinites solucions consideraríem el subespai vectorial U de $\mathbb{R}^3$ tal que

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0\}$ i calcularíem una base.

Aplicació: Si $(3,2,4)$ és solució del sistema $T \longrightarrow \begin{cases} 3a_{11} + 2a_{12} + 4a_{13} = 0 \\ 3a_{21} + 2a_{22} + 4a_{23} = 0 \end{cases} \longrightarrow$ $a_{13} = -\frac{3}{4}a_{11} - \frac{2}{4}a_{12}, \quad a_{23} = -\frac{3}{4}a_{21} - \frac{2}{4}a_{22}$.

Si $(2,3,0)$ és solució del sistema $T \longrightarrow \begin{cases} 2a_{11} + 3a_{12} = 0 \\ 2a_{21} + 3a_{22} = 0 \end{cases} \longrightarrow a_{11} = -\frac{3}{2}a_{12}, \quad a_{21} = -\frac{3}{2}a_{22}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2}a_{12} & a_{12} \\ -\frac{3}{2}a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & -\frac{3}{4}a_{11} - \frac{1}{2}a_{12} \\ a_{22} & -\frac{3}{4}a_{21} - \frac{1}{2}a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & -\frac{3}{4}a_{11} \\ a_{22} & -\frac{3}{4}a_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & -\frac{1}{2}a_{12} \\ a_{22} & -\frac{1}{2}a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{3}{4}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

17. Trobeu una base i les equacions paramètriques del subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors que verifiquen el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 5t = 0 \\ 4x + 7y + 3z - 9t = 0 \\ x + 4y + 6z - 12t = 0 \end{cases}$$

Sol.: Per Gaus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -13 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 13 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la qual cosa utilitzant el paràmetre $t = \lambda, \quad z = \frac{8}{5}\lambda, \quad y = \frac{3}{5}\lambda, \quad x = 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Siga $W \leq \mathbb{R}^4$ tal que $W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z = \dfrac{8}{5}\lambda, \quad y = \dfrac{3}{5}\lambda, \quad x = 0\right\} = \left\{(0, \dfrac{3}{5}\lambda, \dfrac{8}{5}\lambda, \lambda\right\} = \left\langle(0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{5}, 1)\right\rangle$.

Base de W és $\left\{(0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{5}, 1)\right\}$.

Part I

TEMA 10. AUTOVALORS

1. VECTOR PROPI. AUTOVALOR. ESPECTRE

Suposem $f \in End(V)$.

Definició 1. *Si $x \in V \ / \ x \neq \overline{0}$, direm que x és* **un vector propi de** *f (o* **autovector***) si, i sols si, $\exists \lambda \in \mathbb{k} \ / \ f(x) = \lambda x$.*

Nota 1. *Sempre el vector nul és un vector propi ja que $f(\overline{0}) = \lambda \overline{0} = \overline{0}$. Nosaltres l'hem exclòs de la definició, ja que un espai vectorial amb sols el vector nul com a vector propi no interessa. A més del vector nul, cal que hi hagen altres vectors propis.*

Definició 2. *Si $\lambda \in \mathbb{k}$, direm que λ és* **un autovalor de** *f (o* **valor propi***) si, i sols si, $\exists x \in V \ / \ x \neq \overline{0} \ / \ f(x) = \lambda x$.*

Definició 3. *Anomenem* **espectre de** *f el conjunt dels autovalors de f. Es representa per $\sigma(f)$.*

És a dir, $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{k} \ / \ \exists x \in V \ / \ x \neq \overline{0} \ / \ f(x) = \lambda x\}$.

Observació: Aquestes definicions no garanteixen l'existència d'autovalors.

Exemple 1. *Suposem l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \ f((x,y)) = (y, -x)$.*

$\lambda \in \mathbb{R}$ és autovalor si, i sols si, $f((x,y)) = \lambda(x,y)$.

$f((x,y)) = (y,-x) = \lambda(x,y) \to y = \lambda x \wedge -x = \lambda y \to y = \lambda(-\lambda y) \to y + \lambda^2 y = 0 \to y(1+\lambda^2) = 0$.

Com que y no té per què valdre 0, a la força $1 + \lambda^2 = 0 \to \lambda \notin \mathbb{R}$.

1.1. Proposicions.

Proposició 1. *Si $V(\lambda) = \{x \in V \ / \ x \neq \overline{0} \ / \ \exists \lambda \in \mathbb{k} \ / \ f(x) = \lambda x\}$, és el conjunt dels vectors propis de f.*

Aleshores cal demostrar: i) $V(\lambda) \neq \overline{0}$ ii)$V(\lambda) \neq \phi$ iii)$V(\lambda) \leq V$.

Demostració:

i) Per la mateixa definició de $V(\lambda)$.

ii) $V(\lambda) \neq \phi$ ja que $\overline{0} \in V(\lambda)$.

iii) $V(\lambda) \leq V$ ja que $\forall x, y \in V(\lambda) \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \to \alpha x + \beta y \in V(\lambda)$.

En efecte, $x \in V(\lambda) \to f(x) = \lambda x$ $y \in V(\lambda) \to f(y) = \lambda y$.

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \lambda(\alpha x + \beta y) \to \alpha x + \beta y \in V(\lambda)$.

Proposició 2. *Dos autovalors distints de f no tenen cap vector propi comú.*

És a dir, si $\lambda, \mu \in \sigma(f) \ / \ \lambda \neq \mu \Rightarrow V(\lambda) \cap V(\mu) = \{\overline{0}\}$.

Demostració:
Suposem $x \in V(\lambda) \cap V(\mu)$. Caldrà demostrar que $x = \overline{0}$.
Si $x \in V(\lambda) \cap V(\mu) \to x \in V(\lambda) \wedge x \in V(\mu) \to f(x) = \lambda x \wedge f(x) = \mu x$.
Quan restem obtenim $\overline{0} = (\lambda - \mu)x \to x = \overline{0}$ (ja que $\lambda \neq \mu$).

Proposició 3. $V(\lambda) = ker(f - \lambda I_d)$

Demostració:
$V(\lambda) = \{x \in V \ / \ x \neq \overline{0} \ / \ \exists \lambda \in \mathbb{k} \ / \ f(x) = \lambda x\} = \{x \in V \ / \ x \neq \overline{0} \ / \ f(x) - \lambda x = \overline{0}\} = \{x \in V \ / \ (f - \lambda I_d)(x) = \overline{0}\} = ker(f - \lambda I_d)$.

Nota 2. *Com que $V(\lambda) \neq \overline{0}$, aleshores $ker(f - \lambda I_d) \neq \overline{0}$, i per la qual cosa l'aplicació $f - \lambda I_d$ no és injectiva.*

Nota 3. *Com que $V(\lambda) = ker(f - \lambda I_d) \to dim(V(\lambda)) = dim(ker(f - \lambda I_d))$.*
A més a més, $dim(V) = n = dim(Im(f - \lambda I_d)) + dim(ker(f - \lambda I_d)) \to$
$\to dim(ker(f - \lambda I_d)) = n - rang(f - \lambda I_d)$

Proposició 4. *Vectors propis de valors propis diferents són linealment independents.*
És a dir,

$$\left.\begin{array}{l} v_i \in V(\lambda_i) - \{\overline{0}\} \ / \ i \in \{1, 2, \ldots, m\} \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \sigma(f) \\ \lambda_h \neq \lambda_k \qquad h \neq k \end{array}\right\} \Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \text{ és L.I.}$$

Demostració:
Per inducció completa.
Si $m = 1 \to \{v_1\}$ és L.I., ja que $v_1 \neq \overline{0}$.
Si $m = 2 \to \{v_1, v_2\}$ és L.I., ja que si $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}_{(1)} = \overline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

En efecte, quan apliquem f a l'expressió (1) queda: $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \overline{0} \to \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = \overline{0} \underset{v_i \in V(\lambda_i) - \{\overline{0}\}}{\longrightarrow} \alpha_1(\lambda_1 v_1) + \alpha_2(\lambda_2 v_2) = \overline{0}$.

En multiplicar (1) per λ_2 i restar d'aquesta última obtindrem:
$\alpha_1(\lambda_2 - \lambda_1)v_1 = \overline{0} \to \alpha_1 = 0$ ja que $v_1 \neq \overline{0} \wedge \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \quad (\lambda_2 \neq \lambda_1)$
En substituir en (1) queda: $\alpha_2 v_2 = \overline{0} \to \alpha_2 = 0$ ja que $v_2 \neq \overline{0}$.

Suposem que el teorema és vàlid per a $m = h$. És a dir, suposem que $\{v_1, v_2, \ldots, v_h\}$ és linealment independent.

Demostrarem que també és vàlid per a $m = h + 1$.
És a dir, demostrarem que $\{v_1, v_2, \ldots, v_h, v_{h+1}\}$ és L.I.
Si $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_h v_h + \alpha_{h+1} v_{h+1}}_{(2)} = \overline{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, h, h+1$.

En aplicar f a l'expressió (2) queda:

$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_h v_h + \alpha_{h+1} v_{h+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_h f(v_h) + \alpha_{h+1} f(v_{h+1}) = \overline{0} \underset{v_i \in V(\lambda_i) - \{\overline{0}\}}{\longrightarrow} \alpha_1(\lambda_1 v_1) + \alpha_2(\lambda_2 v_2) + \ldots + \alpha_h(\lambda_h v_h) + \alpha_{h+1}(\lambda_{h+1} v_{h+1}) = \overline{0}$.

En multiplicar (2) per λ_{h+1} queda:

$\alpha_1 \lambda_{h+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{h+1} v_2 + \ldots + \alpha_h \lambda_{h+1} v_h + \alpha_{h+1} \lambda_{h+1} v_{h+1} = \overline{0}$.

En restar ordenadament obtenim:

$(\alpha_1 \lambda_{h+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{h+1} v_2 + \ldots + \alpha_h \lambda_{h+1} v_h + \alpha_{h+1} \lambda_{h+1} v_{h+1}) - (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_h \lambda_h v_h + \alpha_{h+1} \lambda_{h+1} v_{h+1}) == \alpha_1(\lambda_{h+1} - \lambda_1) v_1 + \alpha_2(\lambda_{h+1} - \lambda_2) v_2 + \ldots + \alpha_h(\lambda_{h+1} - \lambda_h) v_h = \overline{0} \underset{\{v_1, v_2, \ldots, v_h\}\ L.I.}{\longrightarrow} \alpha_1(\lambda_{h+1} - \lambda_1) = \alpha_2(\lambda_{h+1} - \lambda_2) = \ldots = \alpha_h(\lambda_{h+1} - \lambda_h) = 0 \to \alpha_i = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, h$ (ja que $\lambda_{h+1} - \lambda_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, h$).

En substituir aquests valors en (2) queda:

$\alpha_{h+1} v_{h+1} = \overline{0} \to \alpha_{h+1} = 0$, ja que $v_{h+1} \neq \overline{0}$.

2. EQUACIÓ CARACTERÍSTICA

Si recordem la definició d'autovalor, l'escalar $\lambda \in \mathbb{k}$ és autovalor de $f \Leftrightarrow f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (f - \lambda I_d)(x) = \overline{0} \Leftrightarrow f - \lambda I_d$ no és injectiva.

En traduir aquesta aplicació en les matrius associades, resulta:

$\lambda \in \mathbb{k}$ és autovalor de $f \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow$ el sistema homogeni té solució no trivial, ja que els vectors que formen la matriu X són no nuls $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$, on $A \in M_n(\mathbb{k})$ matriu associada a f, I la matriu identitat, $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{k})$ la matriu columna dels vectors propis de f.

Definició 4. *A l'equació $|A - \lambda I| = 0$ s'anomena* ***equació característica****.*

En definitiva l'espectre de f és el conjunt de les solucions d'aquesta equació.

Tanmateix s'hauria pogut introduir aquesta equació utilitzant els vectors propis i podríem concloure que els vectors propis són aquells en què les seues components constitueixen una solució no nul·la del sistema homogeni anterior.

3. POLINOMI CARACTERÍSTIC

Siga $p : \mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k} \ /\ p(\lambda) = |A - \lambda I| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{k}$.

Definició 5. *Aquesta aplicació resulta ser un polinomi de grau n amb indeterminada λ, anomenat* ***polinomi característic****.*

És a dir, $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0$ *on* $b_0 = |A|$.

Proposició 5. *El polinomi característic no depèn de la base.*

Demostració:

Suposem $f \in End(V)$ i $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V.

Siga $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ el polinomi característic de f obtingut a partir de la matriu associada A.

Suposem $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una altra base de V.

Siga $q(\lambda) = |B - \lambda I|$ el polinomi característic de f obtingut a partir de la matriu associada B.

Caldrà demostrar que $p(\lambda) = q(\lambda)$.

En efecte, com que les matrius A i B són matrius associades al mateix endomorfisme f, resulta que són semblants, és a dir, $\exists P \in M_n(\mathbb{k})$ (quadrada) i regular tal que $B = P^{-1}AP$.

Per la qual cosa, $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP = P^{-1}(A - \lambda I)P$.

$q(\lambda) = |B - \lambda I| = \left|P^{-1}(A - \lambda I)P\right| = \left|P^{-1}\right| |A - \lambda I| \, |P| = |A - \lambda I| = p(\lambda)$

Ja que $(P^{-1}P) = I \rightarrow \left|P^{-1}P\right| = 1 \rightarrow \left|P^{-1}\right| |P| = 1$.

Nota 4. *El polinomi característic és el polinomi característic de f, ja que depèn única i exclusivament de f i no de la base.*

L'equació característica té n solucions, algunes de les quals segurament estan repetides.

Així, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ són les r solucions no repetides de l'equació característica i $m_1, m_2, \ldots, m_r$ el nombre de vegades que es repeteix cada solució.

En descomposar factorialment, el polinomi quedaria:

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{m_r} = 0, \text{ on } \sum_{i=1}^{r} m_i = n$$

Definició 6. *Anomenem* ***multiplicitat aritmètica (algebraica)*** *d'un autovalor, el nombre de vegades que resulta ser solució de l'equació característica. Es representa per $m(a)$ o per m_i (el corresponent a l'autovalor λ_i).*

4. CÀLCUL DELS VECTORS PROPIS

Suposem $f \in End(V)$.

Per trobar els vectors propis de f , seguirem els següents passos:

i) Calcularem el polinomi característic $p(\lambda) = |A - \lambda I|$.

ii) Trobarem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ / $p(\lambda_j) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$.

iii) Resoldrem el sistema homogeni $(A - \lambda_j I)X = 0 \quad \forall \lambda_j \quad j = 1, 2, \ldots, m$.

La justificació d'aquests tres passos, caldrà trobar-la en la pròpia definició de $V(\lambda)$.

Exemple 2. *Siga $f \in End(\mathbb{R}^3)$ / $f((x,y,z)) = (2x - y, 9x + 4y + 6z, -8x - 3z)$. Trobeu els vectors propis de f.*

Solució:

Com que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \to$
$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(-3 + \lambda) = 0 \to \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3.$

Són els tres autovalors de f.

Si $\lambda_1 = 1 \to (A - \lambda_1 I)X = 0 \to (A - I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 9x + 3y + 6z = 0 \\ -8x - 4z = 0 \end{array}\right\} \to (x, y, z) = (x, x, -2x) = x(1, 1, 2)$

$V(\lambda_1) = V(1) = \{(x, y, z) \ / \ (x, y, z) = (x, x, -2x) = x(1, 1, 2)\}$

Base de $V(\lambda_1) = \{(1, 1, 2)\}$ $\quad v_1 = (1, 1, 2)$.

Si $\lambda_2 = -1 \to (A - \lambda_2 I)X = 0 \to (A + I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ 9x + 5y + 6z = 0 \\ -8x - 2z = 0 \end{array}\right\} \to (x, y, z) = (x, 3x, -4x) = x(1, 3, -4)$

$V(\lambda_2) = V(-1) = \{(x, y, z) \ / \ (x, y, z) = (x, 3x, -4x) = x(1, 3, -4)\}$

Base de $V(\lambda_2) = \{(1, 3, -4)\}$ $\quad v_2 = (1, 3, -4)$.

Si $\lambda_3 = 3 \to (A - \lambda_3 I)X = 0 \to (A - 3I)X = 0 \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} -x - y = 0 \\ 9x + y + 6z = 0 \\ -8x - 6z = 0 \end{array}\right\} \to (x, y, z) = (x, -x, \frac{-4}{3}x) = x(1, -1, \frac{-4}{3}) = x'(3, -3, -4)$

$V(\lambda_3) = V(3) = \{(x, y, z) \ / \ (x, y, z) = (x, -x, \frac{-4}{3}x) = x(1, -1, \frac{-4}{3}) = x'(3, -3, -4)\}$

Base de $V(\lambda_3) = \{(3, -3, -4)\}$ $\quad v_3 = (3, -3, -4)$.

Més endavant veurem que la matriu dels vectors propis, la representem per C. En aquest cas $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ i $D = C^{-1}AC$. En aquest cas $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. DIAGONALITZACIÓ DE MATRIUS

Suposem $f \in End(V)$ i $A \in M_n(\mathbb{k})$ la matriu associada a f.

Diagonalitzar f és trobar una base de l'espaci vectorial V, respecte de la qual la matriu associada a f siga diagonal.

Definició 7. *Direm que f* ***és diagonalitzable*** *si existeix una base de V tal que la seua matriu associada siga diagonal.*

Definició 8. *Direm que la matriu A associada a f* ***és diagonalitzable*** *si existeix una matriu P, quadrada i regular tal que $D = P^{-1}AP$ siga una matriu diagonal, on $P \in M_n(\mathbb{k})$.*

És a dir, A ***és diagonalitzable*** *si $\exists\ D\ /\ A$ i D són semblants.*

5.1. Teorema de caracterització de les matrius diagonalitzables.

Suposem $f \in End(V)$ i $A \in M_n(\mathbb{k})$ la matriu associada a f.

Teorema 1. *A és diagonalitzable $\Leftrightarrow$ A té n vectors propis linealment independents.*

En aquest cas $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ *on $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ són autovalors i D és semblant a A.*

Si, a més a més, C és una matriu, les columnes de la qual, són vectors propis linealment independents, aleshores $D = C^{-1}AC$.

Demostració:

$\leftarrow$) Suposem que la matriu A tinga n vectors propis linealment independents.

Siguen aquests $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linealment independents, corresponents als autovalors $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no neccessàriament distints.

$$\text{Si } v_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} \quad i \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Com que les columnes de C corresponen a vectors linealment independents, $|C| \neq 0$ i C és regular o inversible.

La columna i-èsima de AC serà:

$$A\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} = Av_i = \lambda_i v_i \qquad \text{(ja que } f(v_i) = \lambda_i v_i).$$

Aleshores, $AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$.

Però $CD = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix} =$ $AC \to D = C^{-1}AC$.

Per la qual cosa, A és diagonalitzable.

$\to$) Suposem A és diagonalitzable, és a dir, suposem $\exists C$ regular / $D = C^{-1}AC$

Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són les columnes de $C \to AC = CD \to Av_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Per la qual cosa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són vectors propis linealment independents (ja que C és inversible i $|C| \neq 0$.

Corollary 1. *Si $A \in M_n(\mathbb{k})$ / A té n autovalors distints $\Rightarrow$ A és diagonalitzable.*

Nota 5. *Pot donar-se el cas que alguns dels autovalors siguen iguals. Aleshores la matriu diagonal seria:*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \overset{m_1}{\ddots} & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \overset{m_2}{\ddots} & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & & & \overset{m_r}{\ddots} & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}, \text{ on } \sum_{j=1}^{r} m_j = n$$

Definició 9. *Anomenem **multiliplicat algebraica** (o **aritmètica**) dels autovalors λ_i el nombre de vegades que són solució del polinomi característic. Es representa per m_i.*

Definició 10. *Anomenem* **multiliplicat geomètrica** *dels autovalors* λ_i *la dimensió del subespai* $V(\lambda_i)$. *Es representa per* r_i.

És a dir, $\boxed{r_i = n - rang(A - \lambda_i I)}$.

Nota 6. 1. *Qualsevol matriu quadrada* $A \in M_n(\mathbb{k})$ *que no tinga* n *autovalors distints, perquè tinga arrels imaginàries o, si totes són reals, una al menys siga múltiple, no sempre és diagonalitzable.*

2. *La condició necessària i suficient perquè* $A \in M_n(\mathbb{k})$ *siga diagonalitzable és que* $m_i = r_i$. *(Sense demostració, encara que la utilitzarem en els problemes).*

Exercici 1. *Si* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ / $f((x,y,z)) = (x+y-z, z, y)$.

i) Trobeu el polinomi característic, els autovalors i els vectors propis de f.

ii) Serà diagonalitzable la matriu associada a f*? Per què?*

Solució:

$i)$ La matriu associada a f és: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Polinomi característic:

$p(\lambda) = |A - \lambda I| \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(1-\lambda)^2(\lambda+1)$.

Autovalors:

$p(\lambda) = 0 \to -(1-\lambda)^2(\lambda+1) = 0 \to \lambda_1 = 1$, amb $m_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$, amb $m_2 = 1$.

Vectors propis:

Si $\lambda_1 = 1 \to (A - \lambda_1 I)X = 0 \to (A - I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to y - z = 0, \forall x \to$

$(x,y,y) = x(1,0,0) + y(0,1,1)$.

Si $\lambda_2 = -1 \to (A - \lambda_2 I)X = 0 \to (A + I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 2x + y - z = 0,\ y + z = 0$

$\to x = z,\ y = -z \to (x,y,z) = (z,-z,z) = z(1,-1,1)$.

Aleshores la matriu dels vectors propis és: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Si $\lambda_1 = 1 \rightarrow$amb $m_1 = 2$ i $r_1 = n - rang(A - I)$.

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow rang \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow r_1 = 2.$$

Si $\lambda_2 = -1 \rightarrow m_2 = 1$ i $r_2 = n - rang(A + I)$.

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rang \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow r_2 = 1.$$ La matriu A és diagonalitzable.

Aleshores $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Es compleix que : $D = C^{-1}AC$, ja que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Teorema 2. *Tota matriu quadrada, A, anula el seu polinomi característic.*

És a dir, si $f \in End(V)$, $A \in M_n(\mathbb{k})$ la matriu associada a f i $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ el seu polinomi característic $\Rightarrow p(A) = 0$.

Demostració:

Cal recordar:

i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$ si $i \neq k$.

ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = det(A) = |A|$ si $i = k$.

És a dir, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik}\,|A|$ on $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$.

Si $C = (c_{ij}) = (adj(A))^t = (A_{ij})^t = (A_{ji})$ obtenim:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = \delta_{ik}\,|A| \rightarrow AC = I\,|A| \rightarrow A(adj(A))^t = I\,|A|$.

En aplicar aquesta expressió a la matriu $(A - \lambda I)$ queda:

(1) $(A - \lambda I)\,[adj\,(A - \lambda I)]^t = I\,|A - \lambda I| \rightarrow (A - \lambda I)\; q(\lambda) = p(\lambda)$ on $q(\lambda)$ és un polinomi de grau $n-1$ respecte a la indeterminada λ.

En efecte, $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$.

$adj\,(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ on $A_{ij} = (-1)^{i+j}\; D_{ij}$ i D_{ij} és el menor complementari de l'element a_{ij}.

$$(adj\,(A-\lambda I))^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Cada A_{pq} és un polinomi de grau $n-1$ respecte a la indeterminada λ.

Per la qual cosa caldrà pensar que la matriu $(adj\,(A-\lambda I))^t$és un polinomi, $q(\lambda)$, de grau $n-1$ respecte a la indeterminada λ.

Per exemple: $\begin{pmatrix} -\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda^2-7\lambda-4 \\ 4\lambda^2+5\lambda-2 & -3\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\lambda +$
$+\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0.$

Si suposem que $q(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0$, l'expressió (1) quedaria:
$(A-\lambda I)\;\; q(\lambda) = p(\lambda) \rightarrow (A-\lambda I)\;\; \left(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0\right) =$
$= I\left[(-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right] \rightarrow$
$AB_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + AB_2\lambda^2 + AB_1\lambda + AB_0 - B_{n-1}\lambda^n - \ldots - B_2\lambda^3 - B_1\lambda^2 - B_0\lambda =$
$= (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$

En igualar els coeficients:

$$\left.\begin{aligned} -B_{n-1} &= (-1)^n \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ AB_2 - B_1 &= a_2 \\ AB_1 - B_0 &= a_1 \\ AB_0 &= a_0 \end{aligned}\right\}$$

En multiplicar la enèsima per A^n, la següent per A^{n-1}, la segona per A^2, la primera per A i l'última per A^0 queda:

$$\left.\begin{aligned} -A^nB_{n-1} &= (-1)^nA^n \\ A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} &= a_{n-1}A^{n-1} \\ &\vdots \\ A^3B_2 - A^2B_1 &= a_2A^2 \\ A^2B_1 - AB_0 &= a_1A \\ AB_0 &= a_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{En sumar queda: } (-1)^nA^n + a_{n-1}A^{n-1} +$$

$\ldots + a_2A^2 + a_1A + a_0 = 0 \rightarrow p(A) = 0.$

Una altra demostració:

De (1) $\rightarrow p(\lambda) = q(\lambda)\,(A-\lambda I) = \left(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0\right)(A-\lambda I) =$
$B_{n-1}A\lambda^{n-1} + \ldots + B_2A\lambda^2 + B_1A\lambda + B_0A - B_{n-1}\lambda^n - \ldots - B_2\lambda^3 - B_1\lambda^2 - B_0\lambda.$

Si les matrius A i B són de la mateixa grandària quedaria:
$p(A) = B_{n-1}A^n + \ldots + B_2A^3 + B_1A^2 + B_0A - B_{n-1}A^n - \ldots - B_2A^3 - B_1A^2 - B_0A = 0$.

Nota 7. *De $p(\lambda) = q(\lambda)\,(A - \lambda I)$, no puc deduir, en substituir λ per A que*

$p(A) = q(A)\,(A - A) = 0$, ja que és possible trobar polinomis $p(\lambda)$ i $q(\lambda)$ amb coeficients matricials tals que $r(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda)$, però que $r(A) \neq p(A)q(A)$.

Nota 8. *Cal recordar que les matrius no commuten front la multiplicació.*

Exercici 2. *Comproveu que es verifica el teorema de Cayley-Hamilton per a la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.1. Aplicació del teorema de Cayley-Hamilton. Una de les aplicacions del teorema es troba en el càlcul de la inversa d'una matriu regular.

Suposem $A \in M_n(\mathbb{k})$ / A és regular.

Com que $p(A) = 0 \to (-1)^nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + \ldots + b_2A^2 + b_1A + b_0I = 0 \to$
$b_0I = -\left((-1)^nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + \ldots + b_2A^2 + b_1A\right) \to$
$\to I = -\frac{1}{b_0}\left[A\left((-1)^nA^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \ldots + b_2A + b_1I\right)\right] \to$
$I = A\underbrace{\left[-\frac{1}{b_0}\left((-1)^nA^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \ldots + b_2A + b_1I\right)\right]}_{A^{-1}}$

Per la qual cosa:

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{b_0}\left(b_nA^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \ldots + b_2A + b_1I\right)}$$

on $b_0 = |A| \wedge b_n = (-1)^n$.

Exemple 3. *Trobeu la matriu inversa, utilitzant aquest mètode per a la matriu*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Sol.: $A^{-1} = A$.

PROBLEMES TEMA 10. AUTOVALORS. DIAGONALITZACIÓ DE MATRIUS

1. a) Demostreu que una matriu quadrada i la seua tansposada tenen els mateixos autovalors.

   b) Demostreu que si λ és un valor propi d'A, llavors λ^n és un valor propi de A^n.

   c) Demostreu que si λ és un valor propi d'A i A és regular, llavors $\frac{1}{\lambda}$ és un valor propi de A^{-1}.

   Sol.: a) Siga $A \in M_n(K)$. El polinomi característic de la matriu A és $p(\lambda) = |A - \lambda I|$.

   El polinomi característic de la matriu A^t és $q(\lambda) = |A^t - \lambda I|$.

   $q(\lambda) = |A^t - \lambda I| = |A^t - \lambda I^t| = |A^t - (\lambda I)^t| = |(A - \lambda I)^t| = |A - \lambda I| = p(\lambda)$.

   Aquestes igualtats són certes ja que $I = I^t$ i el determinant d'una matriu coincideix amb el determinant de la seua matriu transposada.

   Aleshores, hem demostrat que el polinomi característic de la matriu A i el de la matriu A^t coincideixen i per la qual cosa A i A^t tenen els mateixos autovalors.

   b) Sabem que λ és un autovalor de la matriu A. Això significa que $\exists x \in V, x \neq \overline{0} / Ax = \lambda x$.

   Per inducció completa demostrarem que $A^n x = \lambda^n x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Si $n = 1$, es verifica que $Ax = \lambda x$ ja que λ és autovalor d'A.

   Suposem que és cert per a $n = h$. És a dir $A^h x = \lambda^h x$ és cert per hipòtesi d'inducció.

   Caldrà demostrar que també és cert per a $n = h + 1$. És a dir: $A^{h+1}x = \lambda^{h+1}x$.

   $A^{h+1}x = (A \cdot A \cdot \overset{(h+1}{\ldots} \cdot A)x = \left[(A \cdot A \cdot \overset{(h}{\ldots} \cdot A) \cdot A\right] x = (A^h \cdot A)x = (A^h x)(Ax) = (\lambda^h x)(\lambda x) = (\lambda^h \lambda)x = \lambda^{h+1}x$.

   c) Sabem que λ és un autovalor de la matriu A. Això significa que $\exists x \in V, x \neq \overline{0} / Ax = \lambda x$.

   Sabem que A és regular, per la qual cosa $\exists\, A^{-1} \in M_n(K) \,/\, A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = I$.

   Com $Ax = \lambda x \rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x) \rightarrow (A^{-1}A)x = \lambda(A^{-1}x) \rightarrow x = \lambda(A^{-1}x) \rightarrow \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x \rightarrow \frac{1}{\lambda}$ -es autovalor de A^{-1}, ja que al ser A regular, $\lambda \neq 0$ i per tant $\exists \frac{1}{\lambda}$ amb el vector $x \in V$, $x \neq \overline{0}$.

2. Suposem que A i B són matrius semblants:

   a) Demostreu que A^n i B^n sóm semblants per a tot $n \in \mathbb{N}$.

   b) Si A és regular, proveu que B és regular i que A^{-1} i B^{-1} són semblants.

Sol.: a) Com A i B són matrius semblants$\longleftrightarrow$ $\exists P \in M_n(K), P$ regular / $B = P^{-1}AP$.

Cal demostrar per inducció completa que: $B^n = P^{-1}A^nP \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = 1$, per hipòtesi $B = P^{-1}AP$.

Suposem que és cert per a $n = h$. És a dir, $B^h = P^{-1}A^hP$, hipòtesi d'inducció.

Cal demostrar que és certa per a $n = h + 1$. És a dir, $B^{h+1} = P^{-1}A^{h+1}P$.

$B^{h+1} = P^{-1}A^{h+1}P \rightarrow B^hB = (P^{-1}A^hP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^h(PP^{-1})AP = P^{-1}A^hAP = P^{-1}A^{h+1}P$.

b) Com A i B són matrius semblants$\longleftrightarrow$ $\exists P \in M_n(K), P$ regular / $B = P^{-1}AP$.

Com $B = P^{-1}AP \rightarrow |B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}|\,|A|\,|P| = \dfrac{1}{|P|}|A|\,|P| = |A| \neq 0 \rightarrow B$ és regular.

Com $B = P^{-1}AP \rightarrow B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} \rightarrow P^{-1}A^{-1}((P))^{-1} = P^{-1}A^{-1}P, \quad P$ regular$\rightarrow$ A^{-1} i B^{-1} són semblants.

3. Considerem la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es demana:

a) Calculeu el polinomi característic i els autovalors.

b) Comproveu que es verifica que la traça d'A és la suma dels autovalors i que $Det(A)$ és el producte dels autovalors.

Sol.: a) $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$
$(1-\lambda)(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$.

Aleshores, el polinomi característic és $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$.

Els autovalors: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ amb multiplicitat geomètrica :

$m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = 2$.

b) Traça(A) = suma dels elements situats a la diagonal principal d'$A = 1 + 0 + 2 + 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_3 = 4$.

$$Det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Producte d'autovalors$=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_3 = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 2 = -4$.

4. Calculeu el polinomi característic, els autovalors i els autovectors de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 3-\lambda & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -3 \\ -6 & 3-\lambda & -6 \\ -2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -3-\lambda & -3 \\ 6 & -6 & -6 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & -6 \\ \lambda & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3-\lambda & -3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & -6 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (\lambda-1)\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} + (\lambda-1)6\lambda =$$

$$= \lambda(2-\lambda)(-1)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} + (\lambda-1)6\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+3) + 6\lambda(\lambda-1) =$$

$$= \lambda(\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda+3)+6\right] = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Aleshores el polinomi característic d'A és $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)$.

Els autovalors: $\lambda_1 = 0, m_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 1, m_2 = 1 \qquad \lambda_3 = -1, m_3 = 1$.

Anem a determinar el autovectors de la matriu A.

Si $\lambda_1 = 0 \to V(\lambda_1) = V(0) = \left\{u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / f(u) = \lambda_1 u\right\}$.

Com $f(u) = \lambda_1 u \to (f - \lambda_{1)}u = 0 \to (A - \lambda_1 I)X = 0$, on X és el vector columna de (x, y, z, t).

Com $\lambda_1 = 0$, $\quad AX = 0 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ -y + z - t = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} z = 2x \\ t = 2x - y \end{array} \right.$$

$V(0) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z = 2x, t = 2x - y\} = \{(x, y, 2x, 2x - y)\} =$
$= \{x(1, 0, 2, 2) + y(0, 1, 0, -1)\}$. Base de $V(0)$ és $\{(1, 0, 2, 2), (0, 1, 0, -1)\}$.

Si $\lambda_2 = 1 \to V(\lambda_2) = V(1) = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / f(u) = \lambda_2 u\}$.

Com $f(u) = \lambda_2 u \to (f - \lambda_{2)}u = 0 \to (A - \lambda_2 I)X = 0$, on X és el vector columna de (x, y, z, t).

Com $\lambda_2 = 1$, $\quad (A - I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 2 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 2 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & -6 & 8 & -6 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \simeq$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ -4y + 5z - 3t = 0 \\ -z + 3t = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ -4y + 5z - 3t = 0 \\ z = 3t \end{array} \right.$$

$V(1) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 3, y = 3t, z = 3t\} = \{(3t, 3t, 3t, t)\} = \{t(3, 3, 3, 1)\}$.
Base de $V(1)$ és $\{(3, 3, 3, 1)\}$.

Si $\lambda_3 = -1 \to V(\lambda_3) = V(-1) = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / f(u) = \lambda_3 u\}$.

Com $f(u) = \lambda_3 u \to (f - \lambda_{3)}u = 0 \to (A - \lambda_3 I)X = 0$, on X és el vector columna de (x, y, z, t).

Com $\lambda_3 = -1$, $\quad (A+I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -5 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - z = 0 \\ 6y - 7z + 9t = 0 \\ -z + 3t = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{array} \right.$$

$V(-1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = t, y = 2t, z = 3t\} = \{(t,2t,3t,t)\} = \{t(1,2,3,1)\}$.
Base de $V(-1)$ és $\{(1,2,3,1))\}$.

5. Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(e_1) = 3e_1 + 4e_2$ i $f(e_2) = 4e_1 - 3e_2$, essent $\{e_1, e_2\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

   Calculeu els valors propis i els subespais de vectors propis de f. És diagonalitzable aquest endomorfisme?

   Sol.: $\left. \begin{array}{l} f(e_1) = 3e_1 + 4e_2 \\ f(e_2) = 4e_1 - 3e_2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(1,0) = (3,4) \\ f(0,1) = (4,-3) \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

   El polinomi característic: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$.

   Autovalors: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5$, amb multiplicitat airtmètica $m_1 = m_2 = 1$.

   Els vectors propis:

   Si $\lambda_1 = 5 \rightarrow V(5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (A - 5I)X = 0\}$.

   $(A - 5I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 2y.$

   Aleshores $V(5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\} = \{(2y,y)\} = \{y(2,1)\} =< (2,1) >$.

   Si $\lambda_2 = -5 \rightarrow V(-5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (A + 5I)X = 0\}$.

   $(A + 5I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -2x = y.$

   Aleshores $V(-5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2x = y\} = \{(x,-2x)\} = \{x(1,-2)\} = \;=< (1,-2) >$.

   Com $A \in M_2(\mathbb{R})$ i A té 2 autovalors distints, resulta que A és diagonalitzable i per tant també f és diagonalitzable.

6. Siga $B = \{u, v\}$ una base d'un K-espai vectorial V de dimensió 2, i siga f un endomorfisme de V definit per: $f(u) = u$, $f(v) = u - 2v$.

   Estudieu si f és diagonalitzable.

   Sol.: $\left.\begin{array}{l} f(u) = u \\ f(v) = u - 2v \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1,0) = (1,0) \\ f(0,1) = (1,-2) \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   El polinomi característic: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)$.

   Autovalors: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, amb multiplicitat aritmètica $m_1 = m_2 = 1$.

   Com $A \in M_2(\mathbb{K})$ i A té 2 autovalors distints, resulta que A és diagonalitzable i per tant també f és diagonalitzable.

7. Siga f un endomorfiosme de $\mathbb{R}^3$ que admet per vectors propis a $(0,1,-2)$, $(1,0,4)$ i $(1,0,-2)$.

   a) Es pot afirmar que f és diagonalitzable?

   b) Sabent que $f(0,1,0) = (2,1,2)$, calculeu els valors propis de f, i si és possible, determineu la matriu diagonal.

   Sol.: a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0 \rightarrow$ Els vectors $(0,1,-2)$, $(1,0,4)$ i $(1,0,-2)$ són $L.I.$

   Aleshores la matriu associada a f, A, té 3 vectors propis $L.I.$ i A és diagonalitzable i f és diagonalitzable.

   b) Com $\{(0,1,-2),(1,0,4),(1,0,-2)\}$ és $L.I.$ i $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, resulta ser base.

   Per la qual cosa $(0,1,0) = \alpha(0,1,-2) + \beta(1,0,4) + \gamma(1,0,-2) \rightarrow a = 1, \beta = 1/3, \gamma = -1/3$.

   $(0,1,0) = 1 \cdot (0,1,-2) + \frac{1}{3} \cdot (1,0,4) + (-\frac{1}{3}) \cdot (1,0,-2)$.

   Al ser $(0,1,-2)$, $(1,0,4)$ i $(1,0,-2)$ vectors propis resulta que:

   $f(0,1,-2) = \lambda_1(0,1,-2)$, $f(1,0,4) = \lambda_2(1,0,4)$ i $f(1,0,-2) = \lambda_3(1,0,-2)$.

   $(2,1,2) = f(0,1,0) = 1 \cdot f(0,1,-2) + \frac{1}{3} \cdot f(1,0,4) + (-\frac{1}{3}) \cdot f(1,0,-2) = \lambda_1(0,1,-2) + \frac{1}{3}\lambda_2(1,0,4) + (-\frac{1}{3})\lambda_3(1,0,-2)$.

   $\left\{\begin{array}{llll} 2 = & & \frac{1}{3}\lambda_2 & -\frac{1}{3}\lambda_3 \\ 1 = & \lambda_1 & & \\ 2 = & -2\lambda_1 & +\frac{4}{3}\lambda_2 & +\frac{2}{3}\lambda_3 \end{array}\right. \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2.$ (autovalors de f).

   La matriu diagonal: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

8. a) Comproveu que les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenen el mateix polinomi característic, però no són semblants.

b) Són semblants les matrius diagonals $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Sol.: a) Polinomi característic d'A, $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$
$= (\lambda - 1)^2$.

Polinomi característic de B, $q(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$.

Aleshores les matrius A i B tenen el mateix polinomi característic.

Demostrarem que A i B no són semblants per reducció a l'absurde.

Suposem que A i B foren semblants, aleshores $\exists P \in M_2(\mathbb{R}^2), P$ regular tal que $A = P^{-1}BP = P^{-1}P = I$ ja que$B = I$.

Però $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Per la qual cosa A i B no són semblants.

b) Polinomi característic de D, $p(\lambda) = |D - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$
$-(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.

Polinomi característic de D', $q(\lambda) = |D' - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$
$-(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

Aleshores D i D' no són semblants ja que no tenen el mateix polinomi característic.

9. Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ que respecte de la base canònica té per matriu:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Trobeu els autovalors de f.

b) Comproveu si f és diagonalitzable i trobeu una base respecte de la qual la matriu de f siga diagonal. Trobeu també la matriu P, matriu de pas de la base canònica a aquesta nova base.

c) Comproveu que A anul·la al seu polinomi característic.

d) Trobeu A^n.

Sol.: a) Polinomi característic $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$
$-\lambda(3-\lambda)^2 + 2(3-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

Autovalors: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ amb multiplicitat aritmètica $m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

b) Com els autovalors d'A són distints, A és diagonalitzable i per tant també f.

Anem a trobar una base respecte de la qual la matriu de f siga diagonal.

Si $\lambda_1 = 1 \to (A - \lambda_1 I)X = 0 \to (A - I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + y = 0, z = 0$.

$V(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, z = 0\} = \{(x,-x,0)\} = \{x(1,-1,0)\} =$
$=< (1,-1,0) >$.

Si $\lambda_2 = 2 \to (A - \lambda_2 I)X = 0 \to (A - 2I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + 2y = 0, z = 0$.

$V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y = 0, z = 0\} = \{(-2y,y,0)\} = \{y(-2,1,0)\} =$
$=< (-2,1,0) >$.

Si $\lambda_3 = 3 \to (A - \lambda_3 I)X = 0 \to (A - 3I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = 0, y = 0, \forall z$.

$V(3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0, \forall z\} = \{(0,0,z)\} = \{z(0,0,1)\} =< (0,0,1) >$
.

Aleshores una base respecte de la qual la matriu de f siga diagonal és $B = \{(1,-1,0), (-2,1,0), (0,0,1)\}$.

La matriu de pas seria $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

NOTA: Es pot comprovar que $D = P^{-1}AP$ on $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Sabem que $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

$$p(A) = -(A-I)(A-2I)(A-3I) = -\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Ja que $D = P^{-1}AP \rightarrow PD = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})(AP) = AP \rightarrow PDP^{-1} = (AP)P^{-1} = A(PP^{-1}) = A$.

$A^2 = (PDP^{-1})^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

Es pot demostrar per inducció que: $A^n = PD^nP^{-1}$.

Aleshores $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} & 0 \\ -1 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & -2+2^{n+1} & 0 \\ 1-2^n & 2-2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

10. Estudieu si les següents matrius són semblants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Es pot observar que les dues matrius tenen les mateixes files però en un altre ordre. Aplicant propietats dels determinants s'obté que són iguals però de signe diferent. És a dir $|A| = -|B|$.

A més a més, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -9 & -23 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & -23 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 78 \neq 0.$$

Suposem que A i B són semblants, aleshores $\exists P \in M_4(\mathbb{R})/P$ regular tal que
$B = P^{-1}AP \rightarrow |B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}|\,|A|\,|P| = \frac{1}{|P|}\,|A|\,|P| = |A|$.
Absurd ja que $|A| = -|B|$. Per la qual cosa A i B no són semblants.

11. Estudieu si són diagonalitzables les següents matrius. En cas afirmatiu determineu una base de vectors propis i calculeu la matriu de pas (matriu regular P que permet la diagonalització).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Per a la matriu A

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda(-\lambda^3 + \lambda) - (\lambda^2 - 1) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Autovalors $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ amb $m_1 = m_2 = 2$.

$$\text{Si } \lambda_1 = 1 \rightarrow (A - I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores $rang\,(A - I) = 2 \rightarrow dim(V(1)) = 4 - rang\,(A - I) = 4 - 2 = 2 = m_1$.

$$\text{Si } \lambda_2 = -1 \rightarrow (A + I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores $rang\,(A + I) = 2 \rightarrow dim(V(-1)) = 4 - rang\,(A + I) = 2 = m_2$.

Per la qual cosa A és diagonalitzable.

Anem a determinar una base de vectors propis.

$$\text{Si } \lambda_1 = 1 \rightarrow (A - I)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x+t=0 \\ -y+z=0 \end{matrix}$$

$V(1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / -x+t=0, -y+z=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x=t, y=z\} =$
$= \{(x,y,y,x) \in \mathbb{R}^4\} = \{x(1,0,0,1) + y(0,1,1,0)\} = \langle (1,0,0,1),(0,1,1,0) \rangle$.

Si $\lambda_2 = -1 \rightarrow (A+I)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+t=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$V(-1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+t=0, y+z=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / -x=t, -y=z\} =$
$= \{(x,y,-y,-x) \in \mathbb{R}^4\} = \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,-1,0)\} = \langle (1,0,0,-1),(0,1,-1,0) \rangle$.

La base de vectors propis és $S = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}$.

La matriu dels vectors propis, matriu regular és $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es pot comprovar que $D = P^{-1}AP$.

Per a la matriu B

$$p(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Autovalors: $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 2$ $\qquad \lambda_2 = 2$, $m_2 = 1$.

Si $\lambda_1 = 1 \rightarrow (B - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aleshores $rang\,(B-I) = 1 \rightarrow dim(V(1)) = 3 - rang\,(B-I) = 3-1 = 2 = m_1$.

Si $\lambda_2 = 2 \rightarrow (B - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aleshores $rang\,(B-2I)=2 \rightarrow dim(V(2))=3-rang\,(B-2I)=1=m_2$.

Per la qual cosa la matriu B és diagonalitzable.

Anem a determinar una base de vectors propis.

Si $\lambda_1=1 \rightarrow (B-I)X=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow z=0, \forall x, \forall y$.

$V(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ z=0,\forall x,\forall y\}=\{(x,y,0)\}=\{x(1,0,0)+y(0,1,0)\}=$ $\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$.

Si $\lambda_2=2 \rightarrow (B-2I)X=0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow x=0, -y+2z=0, \forall z$.

$V(2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x=0,-y+2z=0,\forall z\}=\{(0,2z,z)\}=\{z(0,2,1)\}=$ $\langle(0,2,1)\rangle$.

La base de vectors propis és $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,2,1)\}$.

La matriu dels vectors propis, matriu regular és $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es pot comprovar que $D=P^{-1}BP$.

Per a la matriu C

$$p(\lambda)=|C-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^4.$$

Autovalors: $\lambda_1=2$, $m_1=4$.

Si $\lambda_1=2 \rightarrow (C-2I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aleshores $rang(C-2I)=2 \rightarrow dim(V(2)=4-rang(C-2I)=2\neq m_1=4$.

Per la qual cosa C no és diagonalitzable.

12. Estudieu si les matrius A i B s6n diagonalitzables en $\mathbb{R}$ i en $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ -6 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Polinomi característic: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$
$-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

Autovalors: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. $\quad m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

La matriu A te tres autovalors distints en $\mathbb{R}$ i per tant en $\mathbb{C}$. Aleshores A és diagonalitzablen en $\mathbb{R}$ i en $\mathbb{C}$.

Polinomi característic: $p(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & 5 \\ -6 & -(5+\lambda) & -3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$= \lambda(5-\lambda)(5+\lambda) - 30 - 84 + 20(5+\lambda) + 5(5-\lambda) - 42\lambda = -\lambda^3 + 1$.

Per Ruffini, $-\lambda^3 + 1 = -(\lambda-1)(\lambda - (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(\lambda - (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$.

Ja que $-\lambda^3 + 1 = -(\lambda-1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$.

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \to \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Autovalors: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_{3}= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

La matriu B no és diagonalitzable en $\mathbb{R}$, ja que hi ha autovalors que no s6n reals.

La matriu B te tres autovalors distints en $\mathbb{C}$, aleshores és diagonalitzable en $\mathbb{C}$.

13. Donada la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a aquesta matriu és diagonalitzable. Elegiu un d'aquests valors i escriviu la matriu de pas (matriu dels vectors propis).

b) Estudieu si per algun valor de paràmetre a el vector $u = (-1, 1, 2, 0)$ és un vector propi d'A.

c) Per a $a = 4$, escriviu A^4 com a combinació lineal de $\{I, A, A^2, A^3\}$.

Sol.: a) Polinomi característic: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -6 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -6 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda-a)$.

Cassos: *i)* $a = 1$, *ii)* $a = 2$, *iii)* $a \neq 1$ i $a \neq 2$.

*i)*Si $a = 1 \to p(\lambda) = (1-\lambda)^3(\lambda-2)$.

Autovalors: $\lambda_1 = 1$ amb $m_1 = 3, \lambda_2 = 2$ amb $m_2 = 1$.

$$\lambda_1 = 1 \to (A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores $rang(A-I) = 2 \to dim(V(1)) = 4 - rang(A-I) = 2 \neq m_1 = 3 \to A$ no és diagonalitzable.

ii) Si $a = 2 \to p(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda-2)^2$.

Autovalors: $\lambda_1 = 1$ amb $m_1 = 2, \lambda_2 = 2$ amb $m_2 = 2$.

$$\lambda_1 = 1 \to (A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$\to dim(V(1)) = 4 - rang(A - I) = 4 - 2 = 2 = m_1$.

$$\lambda_2 = 2 \to (A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$\to dim(V(2)) = 4 - rang(A - I) = 4 - 2 = 2 = m_2$.

Aleshores $rang(A-2I) = 2 \to dim(V(2)) = 4 - rang(A-I) = 4-2 = 2 = m_2$.

Per la qual cosa la matriu A és diagonalitzable.

Ara calcularem els vectors propis:

$V(1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ y = 0, 2x - 6y + z = 0, \forall t\} \to \{(x, 0, -2x, t) \in \mathbb{R}^4\} = \{x(1,0,-2,0) + t(0,0,0,1)\} = \langle(1,0,-2,0),(0,0,0,1)\rangle$.

$V(2) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ -x + 3y = 0, t = 0, \forall z\} \to \{(3y, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4\} = \{y(3,1,0,0) + z(0,0,1,0)\} = \langle(3,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$.

La matriu de pas: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriu diagonal: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Es compleix: $D = C^{-1}AC$.

iii) Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \to p(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda-a)$.

Autovalors: $\lambda_1 = 1$ amb $m_1 = 2, \lambda_2 = 2$ amb $m_2 = 2, \lambda_3 = a$ amb $m_3 = 1$.

$$\lambda_1 = 1 \to (A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores $rang(A-I) = 2$, $\forall a \in \mathbb{R} \to dim(V(1)) = 4 - rang(A-I) = 2 = m_1$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Ja que $dim(V(1)) = 2$ i $a \neq 1$ i $a \neq 2 \to \lambda_2 = 2, \lambda_3 = a$ amb $m_2 = m_3 = 1 \to A$ és diagonalitzable $\forall a \in \mathbb{R} - \{1,2\}$.

b) El vector $u = (-1,1,2,0)$ és un vector propi d'$A \leftrightarrow Au = \lambda u \leftrightarrow (A-\lambda I)u =$

$$0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -6 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} -1+\lambda+3 = 0 \\ 2-\lambda = 0 \\ -2-6+2(a-\lambda) = 0 \end{cases}$$

Aquest sistema és incompatible. per la qual cosa el vector $u = (-1,1,2,0)$ no és un vector propi d'A per a cap valor d'a.

c) Si $a = 4 \to p(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda-4) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 21\lambda^2 - 22\lambda + 8$.

En aplicar el teorema de Cayley-Hamilton:

$p(A) = 0 \to A^4 - 8A^3 + 21A^2 - 22A + 8I = 0 \to A^4 = 8A^3 - 21A^2 + 22A + 8I$.

14. Apliqueu el teorema de Cayley Hamilton per trobar la inversa de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Polinomi característic: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$(1-\lambda)^2(3-\lambda)-(1-\lambda)+2(1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)+1\right] = (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$.

Pel teorema de Cayley Hamilton:

$p(A) = 0 \to -A^3 + 5A^2 - 8A + 4I = 0 \to I = A(\frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I) \to$

$\to A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I.$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

15. Calculeu les potències enèsimes de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; E = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Polinomi característic:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(13-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 15\lambda + 14 =$$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 14).$

Autovalors: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 14, \quad m_1 = m_2 = 1.$

Com els autovalors d'A són distints, aleshores A -es diagonalitzable.

Per calcular la matriu de pas P :

$$\lambda_1 = 1 \to (A - I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + 4y = 0.$$

$V(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 4y = 0\} = \{(-4y, y)\} = \{y(-4,1)\} = \langle(-4,1)\rangle.$

$$\lambda_2 = 14 \to (A - 14I)X = 0 \to \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 3x - y = 0.$$

$V(14) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - y = 0\} = \{(x, 3x)\} = \{x(1,3)\} = \langle(1,3)\rangle.$

Per la qual cosa $P = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ i es compleix: $D = P^{-1}AP$ on

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

Ja sabem que $A^n = PD^nP^{-1} \to A^n = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{12 + 14^n}{13} & \dfrac{-4 + 4\cdot 14^n}{13} \\ \dfrac{-3 + 3\cdot 14^n}{13} & \dfrac{1 + 12\cdot 14^n}{13} \end{pmatrix}.$$

Polinomi característic:

$$p(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 =$$

$= -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$.

Autovalors: $\lambda_1 = -1, m_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, m_2 = 1$.

$$\lambda_1 = -1 \to (B+I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to x+y+z=0.$$

$V(-1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x-y\} =$
$= \{(x,y,-x-y)\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1)\} = \langle (1,0,-1),(0,1,-1) \rangle$.

$$\lambda_2 = 5 \to (B-5I)X = 0 \to \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{r} -2x+y+z=0 \\ -y+z=0 \end{array} \right. \to x = y = z$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$V(5) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\} = \{(x,x,x)\}\,\{x(1,1,1)\} = \langle (1,1,1) \rangle$.

Resulta que B és diagonalitzable ja que $dim(V(-1)) = 2 = m_1$ i a més a més $dim(V(5)) = 1 = m_2$.

La matriu de pas és $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es compleix que $D = P^{-1}BP$ on $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ i $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Aleshores $B^n = PD^nP^{-1} \to$

$$\to B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2(-1)^n + 5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1} + 5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1} + 5^n}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1} + 5^n}{3} & \frac{2(-1)^n + 5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1} + 5^n}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1} + 5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1} + 5^n}{3} & \frac{2(-1)^n + 5^n}{3} \end{pmatrix}.$$

Polinomi característic:

$$p(\lambda) = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda) =$$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda-1)^2(\lambda-4).$

Autovalors: $\lambda_1 = 1, m_1 = 2 \quad \lambda_2 = 4, m_2 = 1.$

$$\lambda_1 = 1 \to (C - I)X = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + y + z = 0.$$

$V(1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x - y\} =$

$= \{(x,y,-x-y)\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1)\} = \langle (1,0,-1),(0,1,-1) \rangle .$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 4 \to (C - 4I)X = 0 \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right. . \to x = y = z.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$V(4)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\} = \{(x,x,x)\} = \{x(1,1,1)\} = \langle (1,1,1) \rangle .$

Ja que $dim(V(1)) = 2 = m_1$ i $dim(V(4)) = 2 = m_2 \to C$ és diagonalitzable sent la matriu de pas:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Es compleix que $D = P^{-1}CP$, on $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

i $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

Per la qual cosa:

$$C^n = PD^nP^{-1} \to C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} \\ \frac{-1+4^n}{3} & \frac{2+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} \\ \frac{-1+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} & \frac{2+4^n}{3} \end{pmatrix}.$$

Polinomi característic:

$$p(\lambda) = |E - \lambda I| = \begin{vmatrix} -(7+\lambda) & -6 \\ 12 & 10-\lambda \end{vmatrix} = -(7+\lambda)10-\lambda+72 = (\lambda-1)(\lambda-2).$$

Autovalors: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, m_1 = m_2 = 1$.

Ja que els autovalors d'E són distints, E és diagonalitzable.

Per trobar la matiru de pas, P :

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow (E-I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 4x+3y=0.$$

$$\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$V(1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x+3y=0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -\tfrac{4}{3}x\} = \{(x, -\tfrac{4}{3}x)\} =$$
$$= \{x(1, -\tfrac{4}{3})\} = \langle (1, -\tfrac{4}{3}) \rangle = \langle (3,-4) \rangle.$$

$$\lambda_2 = 2 \rightarrow (E-2I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3x+2y=0.$$

$$\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$V(2)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x+2y=0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \tfrac{-3}{2}x\} = \{(x, \tfrac{-3}{2}x)\} =$$
$$= \{x(1, \tfrac{-3}{2})\} = \langle (1, \tfrac{-3}{2}) \rangle = \langle (2,-3) \rangle.$$

Per tant la matriu $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Es compleix que: $D = P^{-1}EP$ on $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Aleshores $E^n = PD^nP^{-1} \rightarrow E^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 9-2^{n+3} & 6-3\cdot 2^{n+1} \\ -12+3\cdot 2^{n+2} & -8+9\cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

16. Estudieu per a quins valors reals de t la matriu A és diagonalitzable en $\mathbb{R}$, essent:

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & t^2-10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Polinomi característic:

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} t+3-\lambda & t^2-10 \\ 1 & t+1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(2t+4) + (4t+13).$

$\lambda^2 - \lambda(2t+4) + (4t+13) = 0 \to \lambda = (t+2) \pm \sqrt{t^2-9}.$

Cassos: a) Si $t^2 - 9 > 0 \longleftrightarrow (t \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[) \to$ La matriu A té dos autovalors reals distints i per tant és diagonalitzable en $\mathbb{R}$.

b) Si $t^2 - 9 < 0 \longleftrightarrow (t \in]-3, 3[) \to$ El polinomi característic no té solucions reals i per tant A no és diagonalitzable en $\mathbb{R}$.

c) Si $t^2 - 9 = 0 \to t = 3, t = -3$.

c-1) Si $t = 3 \to A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, p(\lambda) = (\lambda - 5)^2.$

Autovalors: $\lambda_1 = 5, m_1 = 2 \to A - 5I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ $rang(A - 5I) = 1 \to dim(V(5)) = 2 - rang(A - 5I) = 1 \neq m_1 = 2.$

Per la qual cosa la matriu A no és diagonalitzable.

c-2) Si $t = -3 \to A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, p(\lambda) = (\lambda + 1)^2.$

Autovalors: $\lambda_1 = -1, m_1 = 2 \to A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ $rang(A + I) = 1 \to dim(V(-1)) = 2 - rang(A + I) = 1 \neq m_1 = 2.$

Per la qual cosa la matriu A no és diagonalitzable.

En resum: A és diagonalitzable en $\mathbb{R}$ si $t \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

17. Estudieu per a quins valors dels paràmetres a i b la següent matriu és diagonalitzable:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$

Sol.: Polinomi característic:

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\lambda) & b \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(1+\lambda)(a-\lambda).$

Cassos: 1) Si $a \neq 5$ i $a \neq -1 \to$ la matriu A tè tres autovalors distints i per tant és diagonalitzable.

2) Si $a = 5 \to A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, p(\lambda) = -(5-\lambda)^2(1+\lambda).$

Autovalors: $\lambda_1 = 5, m_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, m_2 = 1.$

$A - 5I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rang(A - 5I) = 2, \forall b \in \mathbb{R} \rightarrow dim(V(5)) = 3 - rang(A - 5I) = 1 \neq m_1 = 2.$

Per la qual cosa la matriu A no és diagonalitzable.

3) Si $a = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, p(\lambda) = (5 - \lambda)(1 + \lambda)^2.$

Autovalors: $\lambda_1 = 5, m_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, m_2 = 2.$

$A + I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3-1) Si $b = 0$.

$rang(A + I) = 1 \rightarrow dim(V(-1)) = 3 - rang(A + I) = 2 = m_2$ i $\lambda_1 = 5, m_1 = 1$. Per tant A és diagonalitzable.

3-2) Si b$\neq$ 0.

$rang(A + I) = 2 \rightarrow dim(V(-1)) = 3 - rang(A + I) = 1 \neq 2 = m_2$. Per tant A no és diagonalitzable.

18. Sabem que el polinomi característic de la matriu A és:

$p(x) = x^4 + x^3 - 46x^2 - 4x + 168 = (x - 2)(x + 2)(x - 6)(x + 7).$

a) Estudieu si la matriu A és regular i si és diagonalitzable.

b) Si fos possible, diagonalitzeu A^3 i A^{-1}.

Sol.: a) Polinomi característic: $p(x) = x^4 + x^3 - 46x^2 - 4x + 168 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = -7, m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1.$

Ja que els autovalors de la matriu A són reals i distints, A és diagonalitzable en $\mathbb{R}$.

Per demostrar que A és regular caldrà veure si $\exists A^{-1}$.

Pel teorema de Cayley-Hamilton:

$p(A) = 0 \rightarrow A^4 + A^3 - 46A^2 - 4A + 168I = 0 \rightarrow I = A(\frac{-1}{168}A^3 + \frac{-1}{168}A^2 + \frac{23}{84}A + \frac{1}{42}I).$

Aleshores $\exists A^{-1}$i val $A^{-1} = \frac{-1}{168}A^3 + \frac{-1}{168}A^2 + \frac{23}{84}A + \frac{1}{42}I.$

b) Al ser A diagonalitzable, $\exists D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ matriu diagonal tal que

$D = P^{-1}AP.$

$D^3 = P^{-1}A^3P \rightarrow A^3$ és diagonalitzable i la matriu diagonal és

$$D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 216 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -343 \end{pmatrix}.$$

Per a diagonalitzar A^{-1}, com $D = P^{-1}AP \rightarrow D^{-1} = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = D = P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P \rightarrow A^{-1}$ és diagonalitzable on

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

19. Siga f un endomorfisme d'un espai vectorial V tal que:

$f(u) = u, f(v) = v, f(w) = u$, essent $B = \{u, v, w\}$ una base de V.

Estudieu si f és diagonalitzable i, en cas afirmatiu, determineu una base de vectors propis i la matriu diagonal.

Sol.: $$\left.\begin{array}{l} f(u) = u = 1\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w \\ f(v) = v = 0\cdot u + 1\cdot v + 0\cdot w \\ f(w) = u = 1\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Polinomi característic: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2.$

Autovalors: $\lambda_1 = 0, m_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, m_2 = 2.$

Si $\lambda_2 = 1 \rightarrow A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A - I) = 1 \rightarrow dim(V(1)) = 2 = m_2.$

Ja que si $\lambda_1 = 0, m_1 = 1$. Resulta que A és diagonalitzable i per tant també f és diagonalitzable.

Anem a determinar una base de vectors propis i la matriu diagonal.

$$(A - I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = 0.$$

$V(1) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0, \forall x, \forall y\right\} = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\right\} = \{x(1,0,0) + y(0,1,0)\} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle.$

$$AX = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x + z = 0, y = 0.$$

$V(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0, y = 0\} = \{(x, 0, -x) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, 0, -1)\} = \langle (1, 0, -1) \rangle$.

La base de vectors propis és $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.

La matriu diagonal és $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

20. D'un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ sabem que els subespais S i T tenen com a valors propis 1 i $\frac{1}{2}$, respectivament, on:

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$

$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0, \quad x - z = 0\}$.

a) Estudieu si l'endomorfisme és diagonalitzable i, en cas afirmatiu, calculeu la matriu diagonal.

b) Calculeu la matriu $M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$, essent A la matriu de l'endomorfisme en la base canònica.

c) Calculeu la matriu $N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I$.

Sol.: a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\} = S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -y - z\} = \{(-y - z, y, z)\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)\}$.

$V(1) = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \to f(-1, 1, 0) = 1 \cdot (-1, 1, 0) \quad f(-1, 0, 1) = 1 \cdot (-1, 0, 1)$.

$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0, \quad x - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\} = \{(x, x, x)\} = \{x(1, 1, 1)\}$.

$V(1/2) = \langle (1, 1, 1) \rangle \to f(1, 1, 1) = \frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

NOTA És possible trobar l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / f \ lineal \ / \ f(x, y, z) = \left(\frac{5x - y - z}{6}, \frac{-x + 5y - z}{6}, \frac{-x - y + 5z}{6} \right)$.

L'endomorfisme f és diagonalitzable ja que $\lambda_1 = 1, m_1 = 2, \lambda_2 = \frac{1}{2}, m_2 = 1$ i el polinomi característic $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - \frac{1}{2})$, on $dim(V(1)) = 2 = m_1$ i $dim(V(2)) = 1 = m_2$. sent $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Pel teorema de Cayley-Hamilton $p(A) = 0 \to (A - I)^2(A - \frac{1}{2}I) = 0$.

$M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I = 2(A - I)^3(A - \frac{1}{2}I) = 2(A - I)(A - I)^2(A - \frac{1}{2}I) = 2(A - I)0 = 0$.

c) Com A és una matriu d'autovalors $\lambda_1 = 1, m_1 = 2, \lambda_2 = \frac{1}{2}, m_2 = 1$, aleshores A^{-1} té com autovalors $\lambda_1 = 1, m_1 = 2, \lambda_2 = 2, m_2 = 1$.

El polinomi característic de A^{-1} és $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$.

Pel teorema de Cayley-Hamilton $p(A^{-1}) = 0 \to (A^{-1} - I)^2(A^{-1} - 2I) = 0 \to (A^{-1})^3 - 4(A^{-1})^2 + 5(A^{-1}) - 2I = 0 \to A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} - 2I = 0.$

$N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} - 2I + 6I = 0 + 6I = 6I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

Per finalitzar, calcularem les equacions de l'aplicació lineal f.(veure la nota)

És possible demostrar que $\{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$ és base de $\mathbb{R}^3$.

Aleshores $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / (x,y,z) = \alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1) + \gamma(1,1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} x = -\alpha - \beta + \gamma \\ y = \alpha + \gamma \\ z = \beta + \gamma \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3}(-x + 2y - z) \\ \beta = \frac{1}{3}(-x - y + 2z) \\ \gamma = \frac{1}{3}(x + y + z) \end{array}.$$

Aleshores $f(x,y,z) = \alpha f(-1,1,0) + \beta f(-1,0,1) + \gamma f(1,1,1) = \alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1) + \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}(-x + 2y - z)(-1,1,0) + \frac{1}{3}(-x - y + 2z)(-1,0,1) + \frac{1}{3}(x + y + z)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \left(\frac{5x - y - z}{6}, \frac{-x + 5y - z}{6}, \frac{-x - y + 5z}{6}\right).$

Part I

TEMA 11. FORMES BILINEALS I QUADRÀTIQUES

1. FORMES BILINEALS I MATRIUS

Definició 1. *Anomenem* **forma bilineal de** V, *tota aplicació* $f : V \times V \longrightarrow V$ / f *és lineal en cadascuna de les dues components. És a dir,*

$$f(av_1' + bv_1'', v_2) = af(v_1', v_2) + bf(v_1'', v_2) \quad \forall v_1', v_1'', v_2 \in V \quad \forall a, b \in \Bbbk.$$
$$f(v_1, av_2' + bv_2'') = af(v_1, v_2') + bf(v_1, v_2'') \quad \forall v_1, v_2', v_2'' \in V \quad \forall a, b \in \Bbbk.$$

El conjunt de les formes bilineals el representem per $\mathcal{L}(V \times V, \Bbbk) = BI(V, \Bbbk)$.

Proposició 1. $\{BI(V, \Bbbk), +, \circ\}$ *és un* $\Bbbk - e.v.$ *de dimensió* n^2.

En efecte, cal demostrar que:
i) $(BI(V, \Bbbk), +)$ és un grup abelià, on
$+ : BI(V, \Bbbk) \times BI(V, \Bbbk) \longrightarrow BI(V, \Bbbk)$ / $(f+g)(v, w) = f(v, w) + g(v, w)\ \forall v, w \in V$.
ii) L'aplicació: $\circ : \Bbbk \times BI(V, \Bbbk) \longrightarrow BI(V, \Bbbk)$ / $(\alpha f)(v, w) = \alpha f(v, w)\ \forall \alpha \in \Bbbk\ \forall v, w \in V$ compleix els quatre axiomes de l'espai vectorial.
La dimensió és n^2, com ja veurem més endavant.

1.1. Expressió coordenada.. Si $f \in BI(V, \Bbbk)$ i $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V.

Sabem que si $v \in V \rightarrow v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$

Sabem que si $w \in V \rightarrow v = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$

Aleshores:

$$\boxed{f(v, w) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{a_{ij}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j}$$

Aquesta és la expressió coordenada de la forma bilineal f.
Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$, on $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, matricialment obtindríem:

$$f(v, w) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^tAY.$$

D'aquesta manera, una forma bilineal queda perfectament determinada en conèixer els $n \times n$ escalars $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Exercici 1. *1. Demostreu que el producte escalar de dos vectors és una forma bilineal.*
És a dir, si
$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ / $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. *Cal demostrar que f és una forma bilineal.*

1. Indiqueu quines de les següents aplicacions són formes bilineals:

i) $f(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$ *on* $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

ii) $f(x, y) = x_1x_2 + y_1y_2$ *on* $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

1.2. Teorema. Isomorfisme entre les formes bilineals i les matrius quadrades.
Definim $\phi : BI(V, \Bbbk) \longrightarrow M_n(\Bbbk)$ / $\phi(f) = A$.
És a dir, la imatge per mitjà de ϕ d'una forma bilineal és igual a la seua matriu associada.
Cal demostrar que ϕ és un isomorfisme.
La demostració és pareguda a la que ja hem vist en el tema de les matrius, en estudiar l'isomorfisme entre el conjunt de les aplicacions lineals i el conjunt de les matrius rectangulars.

2. CANVI DE BASE

Suposem:
$f \in BI(V, \Bbbk)$, $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V, $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una nova base de V.
Si A és la matriu associada a f en la base B i A' la matriu associada a f en la nova base B'. El que pretenem veure és la relació que puga haver-hi entre les matrius A *i* A'.
Pel primer tema sabem que $u_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}e_j$, on $P = (pij)$ és la matriu canvi de base.
De manera esquemàtica:

$$\begin{array}{c} B \\ \uparrow P \\ B' \end{array} \quad \text{on } X = PX', \quad Y = PY'.$$

Aleshores, $f(v, w) = X^tAY = (PX')^t A(PY') = \left((X')^t P^t\right) A(PY') =$

$$= (X')^t \left(\underbrace{P^tAP}_{A'}\right) Y' = (X')^t A'Y'.$$ És a dir, $A' = P^tAP$ i les matrius A *i* A' són congruents.

Exemple 1. *Si* $f \in BI(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ / $f(e_1, e_1) = 0$, $f(e_1, e_2) = 2$, $f(e_2, e_1) = 1$, $f(e_2, e_2) = -1$, *on* $B = \{e_1, e_2\}$ *és una base de* $\mathbb{R}^2$.

i) Trobeu la matriu associada de f respecte a la base B. Trobeu $f(v_1, v_2)$, on $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = 2e_1 + 3e_2$.

ii) Si $B' = \{u_1, u_2\}$ és una nova base de $\mathbb{R}^2$, on $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = 2e_1 + 3e_2$. Trobeu la matriu de f respecte a la nova base B'.

Solució: *i)* $A = (a_{ij})$, on $a_{ij} = f(e_i, e_j) \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$f(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 13.$

També $f(v_1, v_2) = f(2e_1 - e_2, 2e_1 + 3e_2) = 4f(e_1, e_1) + 6f(e_1, e_2) - 2\, f(e_2, e_1) - 3f(e_2, e_2) = 13$.

ii) Com que $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

També $A' = (a'_{ij})$, on $a'_{ij} = f(u_i, u_j)$.

$f(u_1, u_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4.$

$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7.$

$f(u_2, u_1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2.$

$f(u_2, u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 9.$

Definició 2. *Ja que dues matrius congruents són equivalents, el seu rang coincidirà. Definim* **rang** *de f el rang de qualsevol matriu associada a f.*

Definició 3. *Direm que f* **és regular** *si, i sols si, $rang(f) = dimV = n$.*

3. TIPUS DE FORMES BILINEALS

Definició 4. *Direm que f és una forma bilineal* **simètrica** *si, i sols si, A és simètrica.*

Definició 5. *Direm que f és una forma bilineal* **antisimètrica** *si, i sols si, A és antisimètrica.*

Nota 1. *Una forma bilineal antisimètrica és equivalent a una forma bilineal alternada.*

Definició 6. *Direm que f és una forma bilineal* **degenerada** *si, i sols si, $rang(A) < n$, si, i sols si, $|A| = 0$, si, i sols si, A és no regular (singular).*

Definició 7. *Direm que f és una forma bilineal* **no degenerada** *si, i sols si, $rang(A) = n$, si, i sols si, $|A| \neq 0$, si, i sols si, A és regular.*

4. NUCLI D'UNA FORMA BILINEAL

Suposem $f \in BI(V,\mathbb{k})$ no simètrica.

Definició 8. *Definim* **nucli a l'esquerra de** $f = ker(ef) = \{v \in V \ / \ f(v,w) = 0, \ \forall w \in V\}$.

Definició 9. *Definim* **nucli a la dreta de** $f = ker(df) = \{v \in V \ / \ f(w,v) = 0, \ \forall w \in V\}$.

Suposem $f \in BI(V,\mathbb{k})$ simètrica.

Definició 10. *Definim* **nucli de** $f = ker(f) = \{v \in V \ / \ f(w,v) = 0, \ \forall w \in V\}$. *En aquest cas, el nucli a l'esquerra coincideix amb el nucli a la dreta.*

Exemple 2. *Donada la forma bilineal* $f \in BI(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \ / \ f(x,y) = 2x_1y_1 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + x_3y_3$, *on* $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3)$. *Trobeu el nucli a l'esquerra i el nucli a la dreta de* f.

Solució:

Com que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$ker(ef) = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y) = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^3\} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 2x_1 + x_3 = 0, \ 2x_2 + x_3 = 0.$

En resoldre el sistema queda:

$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}\lambda, \ x_3 = \lambda.$

$ker(ef) = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}\lambda, \ x_3 = \lambda\} = \{(-\frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{2}\lambda, \lambda)\} = \{\lambda(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)\} = \{\mu(1,1,-2)\}.$

$ker(df) = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(y,x) = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^3\} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 2x_1 = 0, \ 2x_3 = 0, \ x_1 + x_3 = 0.$

En resoldre el sistema queda:

$x_1 = x3 = 0, \ x_2 = \lambda.$

$ker(df) = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 = x_3 = 0, \ x_2 = \lambda\} = \{(0,\lambda,0)\} = \{\lambda(0,1,0)\}.$

5. DEFINICIONS

Suposem $f \in BI(V,\mathbb{k})$ simètrica. És a dir, $f \in BI^S(V,\mathbb{k})$.

Definició 11. *Direm que dos vectors* x *i* y *són* **conjugats** *respecte de* f *si, i sols si,* $f(x,y) = 0$.

Definició 12. *Direm que un vector x de V és* **conjugat amb un s.e.v.** *U si, i sols si, és conjugat amb tots els vectors de U. És a dir, $x \in V$ és conjugat amb $U \Leftrightarrow f(x,y) = 0 \quad \forall y \in U$.*

Perquè un vector $x \in V$ siga conjugat amb un s.e.v.U ,és condició necessària i suficient que siga conjugat amb tots els vectors que formen la base d'U.

Definició 13. *Direm que els subespais vectorials $U, W \leq V$ són* **conjugats** *si, i sols si, tots els vectors d'U són conjugats amb tots els vectors de W. És a dir, $U, W \leq V$ són conjugats $\Leftrightarrow f(x,y) = 0 \quad \forall x \in U,\ \forall y \in W$.*

Per a que dos subespais vectorials U, W siguen conjugats, és condició necessària i suficient que tots els vectors d'una base d'U siguen conjugats amb tots els vectors que formen la base de W.

Exercici 2. *1. Si $f \in BI(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \ / \ f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_2$, on $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.*

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de

$$\mathbb{R}^3 \ / \ \left.\begin{array}{l} e_1 = 2u_1 + u_2 \\ e_2 = u_1 - u_3 \\ e_3 = u_1 + u_3 \end{array}\right\}.$$

Trobeu la matriu de la forma bilineal referida a la base B'.

Solució: $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

2. Si $f \in BI(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \ / \ f(x,y) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3$, on $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Trobeu: i) L'expressió coordenada de f, en la notació matricial. ii) $Rang(f)$. iii) $Ker(f)$. iv) En $\mathbb{R}^3$,es considera el canvi de base $\left\{\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2' = -x_1 - x_3 \\ x_1' = -x_2 - x_3 \end{array}\right.$, *on (x_1', x_2', x_3') són les coordenades d'un vector en una certa base B. Trobeu l'expressió matricial de la forma quadràtica q associada a f en la base B.*

Solució: $Rang(f) = 2$, $\quad Ker(f) = \lambda(1, -1, 1)$.

3. Si $f \in BI(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \ / \ f(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$, on $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Trobeu: i) La matriu de f en la base $B = \{e_1, e_2\} = \{(1,1), (1,2)\}$. ii) La matriu de f en la base $B' = \{e_1', e_2'\} = \{(1,-1), (3,1)\}$. iii) La matriu de pas P de B a B'. iv) La relació entre les matrius dels dos primers apartats.

Solució: i) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ *ii)* $A' = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 32 \end{pmatrix}$ *iii)* $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ *iv) Són congruents.*

6. DIAGONALITZACIÓ ORTOGONAL

Treballar amb matrius ortogonals té sempre uns avantatges. Per exemple, en les transformacions ortogonals, que són les transformacions que conserven el producte escalar. Veurem la diagonalització de matrius i trobarem una matriu de pas ortogonal.

Suposem $A \in M_n(\mathbb{k})$.

Definició 14. *Direm que A és una* **matriu ortogonal** *si, i sols si, $A^{-1} = A^t$. És a dir, A és una* **matriu ortogonal** *si, i sols si, $AA^t = I = A^tA$.*

Suposem $A \in M_n(\mathbb{k})$ ortogonal.

Proposició 2. *1. $|A| = \pm 1$.*

En efecte, com que $A \in M_n(\mathbb{k})$ és ortogonal $\to AA^t = I \to |AA^t| = |I| \to |A|\,|A^t| = 1 \to |A|^2 = 1 \to |A| = \pm 1$.

Nota 2. *Les matrius, on el seu determinant és 1, s'anomenen* **matrius directes.**

Nota 3. *Les matrius, on el seu determinant és -1, s'anomenen* **matrius inverses.**

2. $A^{-1} \wedge A^t$ són ortogonals.

Com que $A \in M_n(\mathbb{k})$ és ortogonal $\to A^{-1} = A^t \to \left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} \to \left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t \to A^{-1}$ és ortogonal.

Com que $A \in M_n(\mathbb{k})$ és ortogonal $\to AA^t = I \to \left(AA^t\right)^t = I \to \left(A^t\right)^t A^t = I \to A^t$ és ortogonal.

3. Si $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ són ortogonals $\Rightarrow AB$ és ortogonal.

$A, B \in M_n(\mathbb{k})$ són ortogonals $\to A^{-1} = A^t \wedge B^{-1} = B^t$.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t \to AB$ és ortogonal.

4. Les matrius ortogonals formen un grup per a la multiplicació de matrius.

6.1. Diagonalització de matrius simètriques reals. Per a diagonalitzar matrius simètriques amb elements reals seran útils els següents resultats que no demostrarem:

i) Els autovalors d'una matriu simètrica, són reals. ii) Els vectors propis d'una matriu simètrica, associats a autovalors distints, són ortogonals. iii) Tota matriu simètrica ès diagonalitzable en sentit estricte. iv) És possible trobar una base B de vectors propis ortonormal, respecte al producte escalar, per a l'endomorfisme de matriu associada A. La matriu de l'endomorfisme en la base B, és la matriu diagonal i la matriu de pas P és ortogonal.

Nota 4. *Una* ***base ortonormal*** *està constituïda per vectors ortogonals i unitaris.*

Exemple 3. *Diagonalitzeu les matrius simètriques i trobeu la matriu de pas P, ortogonal.*

$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad ii)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Solució:

$$i)\ p(\lambda) = |A - \lambda I| \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2(\lambda - 3).$$

$$p(\lambda) = 0 \rightarrow -(1+\lambda)^2(\lambda-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ (doble)}, & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \text{ (simple)}, & m_2 = 1 \end{cases}.$$

Si $\lambda_1 = -1 \rightarrow (A - \lambda_1 I)X = 0 \rightarrow (A + I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x + z = 0 \quad \forall y.$

$V(\lambda_1) = \{(x, y, z) \ / \ x + z = 0, \ \forall y\} = \{(-z, y, z)\} = \{z(-1, 0, 1) + y(0, 1, 0)\}.$

Si $\lambda_2 = 3 \rightarrow (A - \lambda_2 I)X = 0 \rightarrow (A - 3I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -x + z = 0, \ y = 0.$

$V(\lambda_2) = \{(x, y, z) \ / \ -x + z = 0, \ y = 0\} = \{(x, 0, x)\} = \{x(1, 0, 1)\}.$

La matriu dels vectors propis serà:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es pot comprovar que $D = C^{-1}AC$, ja que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Però la matriu C no és ortogonal.

El que farem ara serà trobar una matriu ortogonal en la qual D és diagonal.

En aquest cas resulta que la base $B = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, formada pels vectors propis és ja ortogonal (per pura causalitat), ja que $e_1 e_2 = e_1 e_3 = e_2 e_3 = 0$, on $e_1 = (-1, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1)$.

Si normalitzem aquests vectors, obtindrem una nova base:

$B' = \left\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\}$ que ja és una base ortogonal.

Per la qual cosa, $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ és una matriu ortogonal, ja que:

$P^{-1} = P^t$ (o $PP^t = I$).

ii) $p(\lambda) = |B - \lambda I| \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(2-\lambda).$

$p(\lambda) = 0 \rightarrow (1+\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ (doble)}, & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \text{ (simple)}, & m_2 = 1 \end{cases}$

Si $\lambda_1 = -1 \rightarrow (A - \lambda_1 I)X = 0 \rightarrow (A+I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x+y+z = 0 \rightarrow x = -y-z.$

$V(\lambda_1) = \{(x,y,z) \ / \ x = -y-z\} = \{(-y-z, y, z)\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1)\}.$

Si $\lambda_2 = 2 \rightarrow (A - \lambda_2 I)X = 0 \rightarrow (A - 2I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = y = z.$

$V(\lambda_2) = \{(x,y,z) \ / \ x = y = z\} = \{(x,x,x)\} = \{x(1,1,1)\}.$

La matriu dels vectors propis serà:

$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Es pot comprovar que $D = C^{-1}BC$, ja que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Però la matriu C no és ortogonal.

El que farem ara serà trobar una matriu ortogonal en la qual D és diagonal.

Ni tan sols la base $B = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$, formada pels vectors propis és ortogonal ja que $e_1 e_2 = 1$, on $e_1 = (-1,1,0)$, $e_2 = (-1,0,1)$, $e_3 = (1,1,1)$.

Calcularem la base ortogonal i després la normalitzarem per obtenir la matriu de pas P, ortogonal.

Elegim un vector de $V(\lambda_1)$, per exemple $e_1 = (-1,1,0)$.

Calcularem un altre vector, de components (x,y,z) tal que $\begin{cases} (x,y,z) \in V(\lambda_1) \\ (x,y,z) \perp (-1,1,0) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}(x,y,z) \in V(\lambda_1) \rightarrow x+y+z=0 \\ (x,y,z) \perp (-1,1,0) \rightarrow -x+y=0\end{array}\right\} \rightarrow x = y,\ z = -2x \rightarrow (x,x,-2x) = x(1,1,-2)$.

Aleshores, una base ortogonal seria: $B = \{(-1,1,0),(1,1,-2),(1,1,1)\}$, ja que segons la teoria, vectors propis d'una matriu simètrica, associats a autovalors distints, són ortogonals, i per la qual cosa, e_3 és ortogonal a e_1 i a e_2.

Però, si posem aquests vectors per columnes, obtindrem la matriu:

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, que no és ortogonal, ja que $MM^t \neq I$.

Sí que compleix que $D = M^{-1}BM$, ja que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si normalitzem els vectors de la base $B = \{(-1,1,0),(1,1,-2),(1,1,1)\}$,ens donarà una nova base $B' = \left\{(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}),(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\right\}$.

Aleshores, la matriu de pas $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ és ortogonal.

A més a més, $D = P^{-1}BP = P^tBP$.

7. FORMES QUADRÀTIQUES

Suposem $f \in BI(V,\mathbb{k})$

Definició 15. *Anomenem* **forma quadràtica** *associada a una forma bilineal f, tota aplicació $q : V \longrightarrow \mathbb{k}$ / $q(x) = f(x,x) \quad \forall x \in V$*

De tal manera que tota forma bilineal f, defineix una única forma quadràtica q. $(\forall f\ \exists! q)$. A l'inrevés no és cert.

Notació: $q \in Q(V;\mathbb{k})$.

Nota 5. *Si $g \in BI(V,\mathbb{k})$ / $g(x,y) = f(y,x)$, aleshores les dues formes bilineals ens determinen la mateixa forma quadràtica q, ja que $q(x) = f(x,x) = g(x,x)$.*

Nota 6. *Si $h \in BI(V,\mathbb{k}) \wedge$ alternada, aleshores f i $f+h$ ens determinen la mateixa forma quadràtica q, ja que $(f+h)(x,x) = f(x,x) + \underbrace{h(x,x)}_{0} = f(x,x)$.*

7.1. Caracterització de les formes quadràtiques.

Qualsevol forma quadràtica, q, compleix les següents propietats que les caracteritzen:

P-1: $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{k}, \quad \forall x \in V$.

En efecte, $q(\alpha x) = f(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 f(x,x) = \alpha^2 q(x)$.

P-2: $q(\overline{0}) = 0 \quad 0 \in \mathbb{k}, \quad \overline{0} \in V$.

En efecte, $q(\overline{0}) = q(0x) = 0^2 q(x) = 0$.

P-3: $q(x+y) = q(x) + q(y) + f(x,y) + f(y,x)$.

En efecte, $q(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = q(x) + q(y) + f(x,y) + f(y,x)$.

8. FORMA POLAR ASSOCIADA A UNA FORMA QUADRÀTICA

Si $q \in Q(V;\mathbb{k})$, sabem que $\exists\ g \in BI(V,\mathbb{k})\ /\ g$ és una forma bilineal associada a q $(q(x) = g(x,x))$ i que no és la única.

Doncs bé, entre totes les formes bilineals que determinen la forma quadràtica q, $\exists!$ que és simètrica i la qual reb el nom de **forma polar associada a** q.

Teorema 1. $\boxed{f(x,y = \frac{1}{2}[g(x,y) + g(y,x)]}$ *és la forma polar associada a* q.

Equivalent a dir que $\boxed{f(x,y = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]}$

Demostració:

i) $f \in BI(V,\mathbb{k})\ /\ f$ és simètrica.

$f \in BI(V,\mathbb{k})$, si $f(ax' + by', y) = af(x',y) + bf(y',y) \quad \forall a,b \in \mathbb{k}, \quad x',y',y \in V$.

En efecte, $f(ax' + by', y) = \frac{1}{2}[g(ax' + by', y) + g(y, ax' + by')] =$

$\underset{g \in BI(V,\mathbb{k})}{=} \frac{1}{2}[ag(x',y) + bg(y',y) + ag(y,x') + bg(y,y')] = \frac{1}{2}a\,(g(x',y) + g(y,x')) +$

$+\frac{1}{2}b\,(g(y',y) + g(y,y')) = af(x',y) + bf(y',y)$.

(Faltaria demostrar la linealitat en la segona component).

f és simètrica si $f(x,y) = f(y,x)$.

$f(x,y) = \frac{1}{2}[g(x,y) + g(y,x)] = \frac{1}{2}[g(y,x) + g(x,y)] = f(y,x)$.

ii) q està associada a f.

En efecte, $f(x,x) = \frac{1}{2}[g(x,x) + g(x,x)] = g(x,x) = q(x)$.

iii) Demostrem que $f(x,y = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

Per ser f simètrica i per la tercera propietat de la caracterització de les formes quadràtiques, obtenim:

$q(x+y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y) \rightarrow f(x,y = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

iv) La unicitat de f és deguda a la unicitat de q.

9. EXPRESSIÓ COORDENADA D'UNA FORMA QUADRÀTICA

Suposem $f \in BI^S(V,\mathbb{k}) \wedge q \in Q(V;\mathbb{k})$.

Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és una base de V i $x \in V\ /\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Aleshores, $q(x) = f(x,x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j =$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n}) x_1 + (x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n}) x_2 + \ldots +$$
$$+ (x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_n a_{nn}) x_n = x_1^2 a_{11} + x_2^2 a_{22} + \ldots + x_n^2 a_{nn} +$$
$$+ 2x_1 x_2 a_{12} + 2x_1 x_3 a_{13} + \ldots + 2x_1 x_n a_{1n} + 2x_2 x_3 a_{23} + \ldots + 2x_2 x_n a_{2n} + \ldots =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_{ii} + 2 \sum_{i<j}^{n} x_i x_j a_{ij}.$$

Nota 7. *Treballarem sempre en formes bilineals simètriques. Sabem transformar una matriu qualsevol en una altra matriu simètrica.*

Per exemple, si $q(v) = q((x,y,z)) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 4yz$, *on* $q \in Q(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

La matriu associada a q *és* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Podem transformar-la en una matriu simètrica

$$A = \frac{1}{2}(B + B^t) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nota 8. *Les formes quadràtiques són polinomis de segon grau en cadascuna de les seues variables. Per tot això, les circumferències, el·lipses, paràboles,... són formes quadràtiques.*

10. ISOMORFISME ENTRE LES FORMES BILINEALS SIMÈTRIQUES I LES FORMES QUADRÀTIQUES

Definim $\Psi : BI^S(V, \mathbb{k}) \longrightarrow Q(V, \mathbb{k}) \ / \ \Psi(f) = q$. És a dir, $(\Psi(f))(v) = f(v,v) = q(v) \quad \forall v \in V$.

Teorema 2. *Ψ és un isomorfisme.*

Demostració:

i) $\Psi(f) = q$ és una forma quadràtica. *ii)* Ψ és bijectiva. *iii)* Ψ és lineal.

En efecte:

i) $\Psi(f) = q$ és una forma quadràtica si compleix les tres propietats que caracteritzen les formes quadràtiques.

P1. $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{k}, \quad \forall x \in V$.

$q(\alpha x) = \Psi(f)(\alpha x) = f(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 f(x,x) = \alpha^2 q(x) = \alpha^2 \Psi(f)(x)$.

P2. $q(\overline{0}) = 0$.

És un cas particular quan $\alpha = 0$.

P3. $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y)$.

$q(x+y) = \Psi(f)(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y)$.

$ii)\Psi$ ¿és injectiva, ja que $\Psi(f) = \Psi(g) \Rightarrow f = g$.

Com que $f, g \in BI^S(V, \mathbb{k})$, caldrà demostrar que $f(v,v') = g(v,v') \quad \forall v, v' \in V$.

En efecte, $\Psi(f)(v) = \Psi(g)(v) \rightarrow f(v,v) = g(v,v) \quad \forall v \in V$.

$f(v,v') = \frac{1}{2}\left[f(v+v', v+v') - f(v,v) - f(v',v')\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[g(v+v', v+v') - g(v,v) - g(v',v')\right] = g(v,v')$.

Ψ és suprajectiva, ja que $\forall q \in Q \quad \exists f \in BI^S(V,\mathbb{k}) \;/\; \Psi(f) = q$.

És suficient agafar $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y) \in Q$, ja que $\Psi(f)(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y) = q(x+y)$.

$iii)$ Ψ és lineal, ja que $\Psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \quad \forall f, g \in BI^S(V, \mathbb{k})$.

En efecte, $\Psi(\alpha f + \beta g)(v) = (\alpha f + \beta g)(v,v) = (\alpha f)(v,v) + (\beta g)(v,v) = \alpha f(v,v) + \beta g(v,v) = \alpha\left(\Psi(f)\right)(v) + \beta\left(\Psi(g)\right)(v) = \left(\alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g)\right)(v)$.

Resumint:

$$\left.\begin{array}{r} BI^S(V,\mathbb{k}) \simeq c \\ BI(V,\mathbb{k}) \simeq M_n(\mathbb{k}) \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{BI^S(V,\mathbb{k}) \simeq M_n^S(\mathbb{k}) \simeq Q(V,\mathbb{k})}.$$

Proposició 3. *$Q(V,\mathbb{k})$ és un $\mathbb{k}$-espai vectorial de dimensió $n \times n$.*

La llei suma $+ : Q(V,\mathbb{k}) \times Q(V,\mathbb{k}) \longrightarrow Q(V,\mathbb{k}) \;/\; (q+q')(x) = q(x) + q'(x) \quad \forall x \in V$.

La llei externa $\circ : \mathbb{k} \times Q(V,\mathbb{k}) \longrightarrow Q(V,\mathbb{k}) \;/\; (\alpha q)(x) = \alpha q(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{k} \quad \forall x \in V$.

La demostració com a exercici.

11. CLASSIFICACIÓ DE LES FORMES QUADRÀTIQUES

Suposem $q \in Q(V,\mathbb{k}) \wedge f \in BI^S(V,\mathbb{k})$ la forma polar associada a q.

Definició 16. *Una forma quadràtica, q, direm que és* **definida positiva** *si, i sols si, $q(x) > 0 \quad \forall x \in V,\ x \neq \overline{0}$.*

Definició 17. *Una forma quadràtica, q, direm que és* **definida negativa** *si, i sols si, $q(x) < 0 \quad \forall x \in V,\ x \neq \overline{0}$.*

Nota 9. *Qualsevol forma quadràtica definida és no degenerada.*

Definició 18. *Una forma quadràtica, q, direm que és* **semidefinida positiva** *si, i sols si, $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in V$.*

Definició 19. *Una forma quadràtica, q, direm que és* **semidefinida negativa** *si, i sols si, $q(x) \leq 0 \quad \forall x \in V$.*

Nota 10. *Qualsevol forma quadràtica semidefinida és degenerada.*

Definició 20. *Una forma quadràtica, q, direm que és* **indefinida** *si, i sols si,* $q(x) > 0 \vee\ q(x) < 0 \vee q(x) = 0$.

Nota 11. *La classificació de les formes bilineals simètriques coincideix amb la de les formes quadràtiques, ja que ambdues són isomorfes.*

12. MÈTODES DE CLASSIFICACIÓ

12.1. Mètode de Jacobi. Suposem $q \in Q(V, \Bbbk)$, $f \in BI^S(V, \Bbbk)$ la forma polar associada a q i A la matriu associada a f.

Definició 21. *Anomenem* **menors principals** *els menors amb diagonal continguda en la diagonal principal de la matriu A. Es representen per A_i'.*

Per exemple, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Hi hauran:
Tres menors principals de grandària 1. $A_1' \to |a_{11}|, |a_{22}|, |a_{33}|$.
Tres menors principals de grandària 2.
$A_2' \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.
Un menor principal de grandària 3. $A_3' \to |A|$.

Definició 22. *Representarem per A_i els* **menors principals conduents**, *formats a partir de l'element a_{11} de la matriu A afegint cada vegada una fila i una columna adjacent.*

Per exemple, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$A_1 = |a_{11}|$, $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $A_3 = |A|$.

i) Si $|A| \neq 0 \to$ Caldrà veure els conduents.
 * Si $A_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow q$ és definida positiva.
 * Si $A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0, \ldots, A_n = \begin{cases} > 0 \text{ si } n = \dot{2} \\ < 0 \text{ si } n = \dot{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow q$ és definida negativa.
 * En els altres cassos q és indefinida.

ii) Si $|A| = 0 \to$ Caldrà veure els menors principals.
 * Si $A_i' \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow q$ és semidefinida positiva.

* Si $A'_1 \leq 0,\ A'_2 \geq 0,\ A'_3 \leq 0, \ldots, A'_n = \begin{cases} \geq 0 \text{ si } n = \dot{2} \\ \leq 0 \text{ si } n = \dot{2}+1 \end{cases} \Rightarrow q$ és semidefinida negativa.

* En els altres cassos q és indefinida.

12.2. Simetrització-diagonalització.

Transformacions elementals. Suposem $q \in Q(V, \Bbbk)$, $f \in BI^S(V, \Bbbk)$ la forma polar associada a q i A la matriu associada a f.

Aquest mètode consisteix a formar la matriu $(A \quad I_n)$, on I_n és la matriu identitat, i utilitzant transformacions elementals de files i les mateixes transformacions en les columnes, convertirem la matriu anterior en una del tipus $(D \quad P^t)$, on D és la matriu diagonal i P^t la transposada de la matriu de pas P.

Cal dir que D i A són matrius congruents, és a dir, $D = P^tAP$.

Després de diagonalitzar la forma quadràtica, suposem que $q(v) = q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$.

i) Si $a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$ q és definida positiva.

Si $a_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$ q és definida negativa.

ii) Si $a_{ii} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$ q és semidefinida positiva.

Si $a_{ii} \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$ q és semidefinida negativa.

iii) En altre cas q és indefinida.

Si $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$ q és no degenerada.

Si $\exists i = 1, 2, \ldots, n \ / \ a_{ii} = 0 \Rightarrow$ q és degenerada.

Exemple 4. *Si* $q \in Q(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ / \ q(v) = q((x, y, z,)) = xy + xz + yx - 2y^2 + 2yz + zx + 2zy - z^2$.

Exercici 3. *Classifiqueu-la, utilitzant el mètode de les transformacions elementals.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow a \\ \leftarrow b \\ \leftarrow c \end{array} \sim \begin{array}{c} b' = b + 2a \\ c' = c + a \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ m & n & p & & & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} n' = n + 2m \\ p' = p + m \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow a' \\ \leftarrow b' \\ \leftarrow c' \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ m' & n' & p' & & & \end{pmatrix}$$

$$c'' = 3b' - 2c' \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} p'' = 3n' - p'$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{on } P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

Es verifica que $D = P^tAP$

Com que $X = PX' \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow x = -2z',\ y = y' + 3z',\ z = x' + 2y' + 4z' \rightarrow$

$$x' = -x - 2y + z,\ y' = \tfrac{3}{2}x + y,\ z' = -\tfrac{1}{2}x \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La nova base en la qual D ,és diagonal serà $B' = \{(0,0,1),(0,1,2),(-2,3,4)\}$.

Una vegada diagonalitzada la forma quadràtica, per a classificar-la seguiríem l'anterior procediment:

Així, doncs, la forma quadràtica q, és indefinida no degenerada.

Nota 12. *Poden haver moltes bases en les quals la matriu siga diagonal.*

Lagrange-Gauss. Suposem $f \in BI^S(V,\mathbb{k})$, on $dim(V) = 3 \wedge q \in Q(V,\mathbb{k})$.
Aquest mètode consisteix a construir reiteradamet quadrats perfectes.
És a dir, $q(x) = f(x,x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 =$

$$= a_{11}x_1^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 =$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2}{a_{11}}x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\right) + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 =$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2}{a_{11}}x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \frac{1}{a_{11}^2}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2\right) + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +$$

$$+ 2a_{23}x_2x_3 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 = a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\right)^2 +$$

$$+ a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 =$$

$$= a_{11}(x')^2 + \underbrace{a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2}_{(1)}.$$

En (1) faríem com abans.

En definitiva, $\boxed{q(x) = a_{11}(x_1 + ax_2 + bx_3)^2 + cx_2^2 + dx_3^2 + ex_2x_3}$.

Exemple 5. *Si* $q \in Q(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ / $q(v) = q((x,y,z,)) = xy + xz + yx - 2y^2 + 2yz + zx + 2zy - z^2$.

Exercici 4. *Classifiqueu-la, utilitzant el mètode de Lagrange-Gauss.*

$q((x,y,z,)) = -z^2 - 2y^2 + 2xy + 2xz + 4yz = -(z + ax + by)^2 + cx^2 + dy^2 + exy =$
$= -z^2 - a^2x^2 - b^2y^2 - 2axz - 2byz - 2abxy + cx^2 + dy^2 + exy.$

Si identifiquem:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = -a^2 + c \\ -2 = -b^2 + d \\ 2 = -2ab + e \\ 2 = 2a \\ 4 = -2b \end{array}\right\} \to a = -1,\ b = -2,\ c = 1,\ d = 2,\ e = 6.$$

$$q((x,y,z,)) = -(z - x - 2y)^2 + \underbrace{x^2 + 2y^2 + 6xy}_{(1)}$$

$(1) = x^2 + 2y^2 + 6xy = (x + my)^2 + ny^2 = x^2 + 2mxy + m^2y^2 + ny^2.$

Si identifiquem: $\left.\begin{array}{r} 2 = m^2 + n \\ 6 = 2m \end{array}\right\} \to m = 3,\ n = -7.$

$$q((x,y,z,)) = -(\underbrace{-x - 2y}_{x'} + z)^2 + (\underbrace{x + 3y}_{y'})^2 - 7\underbrace{y}_{z'}{}^2 = -(x')^2 + (y')^2 - 7(z')^2.$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

La forma quadràtica q, és indefinida no degenerada.

Exercici 5. *Si* $q \in Q(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ / $q(v) = q((x,y,z,)) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$.

Classifiqueu-la, utilitzant tots els mètodes estudiats anteriorment
Solució: q és indefinida no degenerada.

Nota 13. *No existeix una única matriu diagonal associada a una forma quadràtica, però sempre obtindrem la següent afirmació demostrada per Silvester:* Totes les matrius diagonals tenen igual nombre d'elements positius.

Definició 23. *Anomenem* ***índex*** *de la forma quadràtica, el nombre d'elements positius que figuren en la matriu diagonal.*

Definició 24. *Anomenem* **signatura** *de la forma quadràtica, la diferència entre els termes positius i negatius de qualsevol matriu diagonal associada a la forma quadràtica.*

Nota 14. *Nosaltres utilitzarem aquests mètodes de classificació de les formes quadràtiques, encara que no siguen les úniques.*

13. FORMES QUADRÀTIQUES RESTRINGIDES

Si $q \in Q(V;\Bbbk) \wedge S \leq V$, sabem que $q(v) = X^tAX$, on A és la matriu simètrica associada a q, $v \in V$.

Definició 25. *Anomenem* ***forma quadràtica restringida a*** S *a* $q(v) = X^tAX$, *on* $v \in S$.

Exemple 6. $q \in Q(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ / $q((x,y,z)) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xz + yz$.
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y - z = 0\}$. *Obteniu la forma restringida.*

Solució:
Com que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y - z = 0\} = S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z\}$.
Si $y = z \to q((x,y,z)) = q((x,y,y)) = x^2 + y^2 - 3y^2 - 2xy + y^2 = x^2 - y^2 - 2xy$.
$q(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy = (x+ay)^2 + by^2 = x^2 + 2axy + a^2y^2 + by^2$.
Si identifiquem:

$$\left.\begin{array}{r} -1 = a^2 + b \\ -2 = 2a \end{array}\right\} \to a = -1, \ b = -2.$$

$$q(x,y) = (x-y)^2 - 2y^2 = (x')^2 - 2(y')^2, \text{ on } \left.\begin{array}{c} x' = x - y \\ y' = y \end{array}\right\}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La forma quadràtica restringida el subespai és indefinida no degenerada.

PROBLEMES TEMA 11. FORMES BILINEALS I QUADRÀTIQUES

1. Donada l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

   a) Demostreu que és una forma bilineal.

   b) Trobeu la matriu de f respecte a la base canònica C.

   c) Trobeu la matriu de f respecte a la base $B = \{(2,1), (1,-1)\}$.

   d) Determineu la matriu de canvi de base de B a C i comproveu que es verifica la relació de congruència entre les matrius dels apartats b) i c).

   Sol.: a) Cal demostrar que

   i) $f(\lambda(x_1, x_2) + \mu(x_1', x_2'), (y_1, y_2)) = \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x_1', x_2'), (y_1, y_2))$.

   ii) $f((x_1, x_2), \lambda(y_1, y_2) + \mu(y_1', y_2')) = \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x_1, x_2), (y_1', y_2'))$.

   En efecte:

   $f(\lambda(x_1, x_2) + \mu(x_1', x_2'), (y_1, y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_1', \lambda x_2 + \mu x_2'), (y_1, y_2)) =$
   $= 2(\lambda x_1 + \mu x_1')y_1 - 3(\lambda x_1 + \mu x_1')y_2 + (\lambda x_2 + \mu x_2')y_2 =$
   $= 2\lambda x_1y_1 + 2\mu x_1'y_1 - 3\lambda x_1y_2 - 3\mu x_1'y_2 + \lambda x_2y_2 + \mu x_2'y_2 =$
   $= \lambda(2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2) + \mu(2x_1'y_1 - 3x_1'y_2 + x_2'y_2) =$
   $= \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x_1', x_2'), (y_1, y_2))$. Igualment l'apartat ii).

   b) $f((1,0),(1,0)) = 2, \quad f((1,0),(0,1)) = -3, \quad f((0,1),(1,0)) = 0, \quad f((0,1),(0,1)) = 1$.

   Aleshores $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   c) $f((2,1),(2,1)) = 3, \quad f((2,1),(1,-1)) = 9, \quad f((1,-1),(2,1)) = 0, \quad f((1,-1),(1,-1)) = 6$.

   Aleshores $A' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

   d) Per determinar la matriu de canvi de base de B a C cal posar els vectors de C com a combinació lineal dels vectors de B.

   És a dir, $(1,0) = \alpha(2,1) + \beta(1,-1) \quad (0,1) = \alpha'(2,1) + \beta'(1,-1)$.

   $$\left.\begin{matrix} 1 = 2\alpha + \beta \\ 0 = \alpha - \beta \end{matrix}\right\} \to \alpha = \tfrac{1}{3}, \beta = \tfrac{1}{3} \qquad \left.\begin{matrix} 0 = 2\alpha' + \beta' \\ 1 = \alpha' - \beta' \end{matrix}\right\} \to \alpha' = \tfrac{1}{3}, \beta' = -\tfrac{2}{3}$$

   Aleshores $M_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Esquema:
   $$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{A'} & B \\ \uparrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{A} & C \end{array}$$

   $$(M_B^C)^t A' M_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

NOTA: També es pot fer utilitzant la inversa de la manera següent:

$$(M_C^B \;/\; I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \backsimeq \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \backsimeq \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \backsimeq$$

$$\backsimeq \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \backsimeq \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \backsimeq (I \;/\; M_B^C)\,.$$

2. Donada la forma bilineal:

$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$.

Trobeu:

a) La matriu de f en la base $B = \{u_1, u_2\} = \{(1,1),(1,2)\}$.

b) La matriu de f en la base $B' = \{u'_1, u'_2\} = \{(1,-1),(3,1)\}$.

c) La matriu de pas P de B a B' i la relació entre les matrius dels dos primers apartats.

Sol.: a) $f(u_1, u_1) = f((1,1),(1,1)) = 4 \quad f(u_1, u_2) = f((1,1),(1,2)) = 1$.

$f(u_2, u_1) = f((1,2),(1,1)) = 7 \quad f(u_2, u_2) = f((1,2),(1,2)) = 3$.

Aleshores $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

També: La matriu de f en la base canònica és $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -4.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 20.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 32.$$

Aleshores $A' = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 32 \end{pmatrix}$. També es pot fer de la primera manera.

c) Per trobar la matriu de pas P de B a B' ($P = M_B^{B'}$) cal posar els vectors de B' com a combinació lineal dels vectors de B.

$(1,-1) = \alpha(1,1) + \beta(1,2) = (\alpha+\beta, \alpha+2\beta) \to \alpha = 3, \beta = -2.$

$(3,1) = \alpha'(1,1) + \beta'(1,2) = (\alpha'+\beta', \alpha'+2\beta') \to \alpha' = 5, \beta' = -2.$

Aleshores $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Anem a comprovar la igualtat: $A' = P^tAP$.

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 15 & 29 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 32 \end{pmatrix} = A'.$$

3. Una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ està definida respecte a la base $B = \{u, v\}$ per:

$f(u,u) = 0$, $f(u,v) = 2$, $f(v,u) = 1$, $f(v,v) = -1$.

Trobeu la matriu de f respecte a la base $B' = \{u-v, 2u+3v\}$.

Sol.: $f(u-v, u-v) = f(u,u) - f(u,v) - f(v,u) + f(v,v) = -4.$

$f(u-v, 2u+3v) = 2f(u,u) + 3f(u,v) - 2f(v,u) + 3f(v,v) = 7.$

$f(2u+3v, u-v) = 2f(u,u) - 2f(u,v) + 3f(v,u) - 3f(v,v) = 2.$

$f(2u+3v, 2u+3v) = 4f(u,u) + 6f(u,v) + 6f(v,u) + 9f(v,v) = 9.$

Aleshores $A' = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

També:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{A} & B \\ \uparrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{A'} & B' \end{array} \qquad \left(M_B^{B'}\right)^t A \, M_B^{B'} = A'.$$

On $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ja que:

$u' = u - v = \alpha u + \beta v \to \alpha = 1, \beta = -1$ i $v' = 2u + 3v = \alpha' u + \beta' v \to \alpha' = 2, \beta' = 3.$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Donada la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$,

$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_1y_3$.

a) Determineu la matriu de f en la base $B = \{(1,1,0), (1,1,1), (0,1,1)\}$.

b) Proveu que f no és simètrica, trobant vectors u i v amb $f(u, v) \neq f(v, u)$.

Sol.: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Aleshores la matriu de f en la base B és $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Com A no és simètrica, aleshores la forma bilineal f tampoc és simètrica.

Sabem que $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_1y_3$.

$f(u,v) = f((u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)) = u_1v_1 - u_2v_2 + 2u_1v_3$.

$f(u,v) = f(v,u) \Leftrightarrow u_1v_1 - u_2v_2 + 2u_1v_3 = v_1u_1 - v_2u_2 + 2v_1u_3 \Leftrightarrow u_1v_3 = v_1u_3$.

Per la qual cosa $f(u,v) \neq f(v,u) \Leftrightarrow u_1v_3 \neq v_1u_3$.

Per exemple $\left.\begin{array}{l} f((0,1,1),(1,0,0)) = 0 \\ f((1,0,0),(0,1,1)) = 2 \end{array}\right\} \to f((0,1,1),(1,0,0)) \neq f((1,0,0),(0,1,1))$.

5. En $\mathbb{R}^2$ siga la forma bilineal $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_2 + x_2y_1$.

   Proveu que f no és simètrica, però que coincideixen el nucli per l'esquerra i per la dreta.

   Sol.: Directament la matriu de f associada en al base canònica és:

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Com A no és simètrica, aleshores f no és simètrica.

   Nucli per la dreta:

   $Ker(df) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / f(y,x) = 0, \forall y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

   $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x_1 = 0, x_2 = 0$.

   Aleshores $Ker(df) = \{(0,0)\}$.

   Nucli per l'esquerra:

   $Ker(ef) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0, \forall y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

   $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \to x_1 = 0, x_2 = 0$.

   Aleshores $Ker(ef) = \{(0,0)\}$.

6. En $\mathbb{R}^3$ considerem la forma bilineal

   $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3)$.

   Demostreu que f és un **producte escalar**, és a dir, f és simètrica i definida positiva.

   Sol.: Al desenvolupar la forma bilineal f ens queda:

   $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

   Aleshores la matriu de f en la base canònica és: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Com A és simètrica, aleshores f és simètrica.

f definida: $f((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)) = 0 \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$.

En efecte, $f((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)) = 0 \Leftrightarrow x_1x_1 + (x_2 - x_3)(x_2 - x_3)+$
$+(x_1 + x_3)(x_1 + x_3) = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

f és positiva $f((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)) \geq 0 \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

En efecte, $f((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)) = x_1^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2 \geq 0 \, \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

7. Siga V un espai vectorial de dimensió $n \neq 0$ i f una forma bilineal.

   Suposem que existeix una base B de V, on $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, que verifica: $f(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.

   Proveu que f és simètrica.

   Sol.: En les condicions de l'enunciat, la matriu de f en la base canònica seria:

   $$A = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(v_2,v_2) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}.$$ És a dir, una matriu diagonal d'ordre n.

   Per la qual cosa A és simètrica i f és una forma bilineal simètrica.

8. Siga $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \; / \; f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$.

   Comproveu que f és una forma bilineal simètrica i calculeu la forma quadràtica associada.

   Sol.: Per a que f siga una forma bilineal s'ha de complir dos condicions:

   i) $f(\lambda(x_1,x_2)+\mu(x_1',x_2'),(y_1,y_2)) = \lambda f((x_1,x_2),(y_1,y_2))+\mu f((x_1',x_2'),(y_1,y_2))$.

   ii) $f((x_1,x_2),\lambda(y_1,y_2)+\mu(y_1',y_2')) = \lambda f((x_1,x_2),(y_1,y_2))+\mu f((x_1,x_2),(y_1',y_2'))$.

   $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall (x_1,x_2),(x_1',x_2'),(y_1,y_2),(y_1',y_2') \in \mathbb{R}^2$.

   En efecte, demostrem i):

   $f(\lambda(x_1,x_2) + \mu(x_1',x_2'),(y_1,y_2)) = f((\lambda x_1 + \mu x_1', \lambda x_2 + \mu x_2')),(y_1,y_2)) =$
   $= (\lambda x_1 + \mu x_1')y_2 + (\lambda x_2 + \mu x_2')y_1 = \lambda(x_1y_2 + x_2y_1) + \mu(x_1'y_2 + x_2'y_1) =$
   $= \lambda f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + \mu f((x_1',x_2'),(y_1,y_2))$.

   Demostrem ii):

   $f((x_1,x_2),\lambda(y_1,y_2) + \mu(y_1',y_2')) = f((x_1,x_2),(\lambda y_1 + \mu y_1', \lambda y_2 + \mu y_2')) =$

$= x_1(\lambda y_2 + \mu y_2') + x_2(\lambda y_1 + \mu y_1') = \lambda(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \mu(x_1 y_2' + x_2 y_1') =$
$= \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x_1, x_2), (y_1', y_2'))$.

La matriu de f associada a la base canònica és:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Com A és simètrica, f és simètrica.

La forma quadràtica associada:

$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ q(x,y) = f((x,y),(x,y)) = xy + yx = 2xy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

9. Donada la forma quadràtica $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $q(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4xy$.

a) Trobeu la forma bilineal simètrica associada.

b) Comproveu que q complix les propietats que caractertizen a les formes quadràtiques.

Sol.: a) De dos maneres:

Primera: $q(u) = f(u,u)$, sent la matriu associada a f en les bases canòniques, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 & -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 - 2x_2 y_1 - 2x_1 y_2 + 2x_2 y_2$.

Segona: Fent ús del teorema corresponent a la forma polar associada a una forma quadràtica:

$f(u,v) = \frac{1}{2}[q(u+v) - q(u) - q(v)] \to f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) =$
$= \frac{1}{2}[q((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) - q((x_1,x_2)) - q((y_1,y_2))] =$
$= \frac{1}{2}[q((x_1+y_1, x_2+y_2)) - q((x_1,x_2)) - q((y_1,y_2))] =$
$= \frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2 + 2(x_2+y_2)^2 - 4(x_1+y_1)(x_2+y_2) - x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_2] =$
$= \frac{1}{2}[x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 + 2x_2^2 + 2y_2^2 + 4x_2y_2 - 4x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2 - 4y_1y_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_2] =$
$= \frac{1}{2}[2x_1y_1 + 4x_2y_2 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2] = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2$.

b) P1: $\quad q(\alpha u) = \alpha^2 q(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^2$.

$q(\alpha u) = \alpha^2 q(u) \to q(\alpha(x,y)) = q((\alpha x, \alpha y)) = (\alpha x)^2 + 2(\alpha y)^2 - 4(\alpha x)(\alpha y) =$
$= \alpha^2 x^2 + 2\alpha^2 y^2 - 4\alpha^2 xy = \alpha^2(x^2 + 2y^2 - 4xy) = \alpha^2(q(x,y)) = \alpha^2 q(u)$.

P2: $\quad q(0,0) = 0$.

$q(0,0) = 0^2 + 2 \times 0^2 - 4 \times 0 \times 0 = 0$.

P3: $q(u+v) = q(u) + q(v) + f(u,v) + f(v,u), \quad u, v \in \mathbb{R}^2$.
$q(u+v) = q((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = q((x_1+y_1, x_2+y_2)) =$
$= (x_1+y_1)^2 + 2(x_2+y_2)^2 - 4(x_1+y_1)(x_2+y_2) =$
$= x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 + 2x_2^2 + 2y_2^2 + 4x_2y_2 - 4x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2 - 4y_1y_2 =$
$= (x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2) + (y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_1y_2) + 2x_1y_1 + 4x_2y_2 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2 =$
$= q(x_1,x_2) + q(y_1,y_2) + (x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2) +$
$+(y_1x_1 + 2y_2x_2 - 2y_2x_1 - 2x_2y_1) = q(x_1,x_2) + q(y_1,y_2) + f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) +$
$+f((y_1,y_2),(x_1,x_2)) = q(u) + q(v) + f(u,v) + f(v,u)$.

10. Donada la forma quadràtica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida per:
$q(x,y,z) = x^2 + xy + xz - 2zy$.
Trobeu:
a) La forma bilineal simètrica associada (**forma polar**).
b) La matriu de q en la base canònica.
Sol.: De dos maneres:
Primera: La matriu associada a q en la base canònioca:
$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ja que $q(x,y,z) = f((x,y,z),(x,y,z)) =$
$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + xy + xz - 2zy.$
Aleshores:
$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & \frac{1}{2}x_1 - x_3 & \frac{1}{2}x_1 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$
$= (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)y_1 + (\frac{1}{2}x_1 - x_3)y_2 + (\frac{1}{2}x_1 - x_2)y_3 =$
$= x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}y_1x_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}y_1x_3 - x_3y_2 - y_3x_2$.
Segona:
$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \frac{1}{2}[q((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) - q(x_1,x_2,x_3) - q(y_1,y_2,y_3)] =$
$= \frac{1}{2}[q((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)) - q(x_1,x_2,x_3) - q(y_1,y_2,y_3)] =$

$= \frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2+(x_1+y_1)(x_2+y_2)+(x_1+y_1)(x_3+y_3)-2(x_3+y_3)(x_2+y_2)-$
$-x_1^2-x_1x_2-x_1x_3+2x_3x_2-y_1^2-y_1y_2-y_1y_3+2y_3y_2] =$
$= \frac{1}{2}[2x_1y_1+x_1y_2+y_1x_2+x_1y_3+y_1x_3-2x_3y_2-2y_3x_2] =$
$= x_1y_1+\frac{1}{2}x_1y_2+\frac{1}{2}y_1x_2+\frac{1}{2}x_1y_3+\frac{1}{2}y_1x_3-x_3y_2-y_3x_2.$

$f((1,0,0),(1,0,0)) = 1 \quad f((1,0,0),(0,1,0)) = \dfrac{1}{2} \quad f((1,0,0),(0,0,1)) = \dfrac{1}{2}.$

$f((0,1,0),(1,0,0)) = \dfrac{1}{2} \quad f((0,1,0),(0,1,0)) = 0 \quad f((0,1,0),(0,0,1)) = -1.$

$f((0,0,1),(1,0,0)) = \dfrac{1}{2} \quad f((0,0,1),(0,1,0)) = -1 \quad f((0,0,1),(0,0,1)) = 0.$

Aleshores $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Proveu que l'aplicació $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; / q(x,y) = x^2+1$ no és una forma quadràtica.

    Sol.: L'aplicació q no és una forma quadràtica ja que $q(0,0) = 0^2+1 = 1 \neq 0$.

12. Siga f una forma bilineal no necessàriament simètrica.

    Siga $q : V \to K \; / \; q(u) = f(u,u)$.

    a) Proveu que q és la forma quadràtica associada a la forma bilineal simètrica g donada per:

    $g(u,v) = \dfrac{f(u,v)+f(v,u)}{2}$.

    b) $f(u,v) = \dfrac{1}{4}q(u+v) - \dfrac{1}{4}q(u-v) \quad \forall u,v \in V \Leftrightarrow f$ és simètrica.

    c) $q = 0 \Leftrightarrow f$ és antisimètrica.

    Sol.: a) $g(u,v) = \dfrac{f(u,v)+f(v,u)}{2} \to g(u,u) = \dfrac{f(u,u)+f(u,u)}{2} = \dfrac{2f(u,u)}{2} =$
    $f(u,u) = q(u)$ cvd.

    b) $f(u,v) = \dfrac{1}{4}q(u+v) - \dfrac{1}{4}q(u-v) = \dfrac{1}{4}f((u+v),(u+v)) - \dfrac{1}{4}f((u-v),(u-v)) =$
    $= \dfrac{1}{4}[f(u,u)+f(u,v)+f(v,u)+f(v,v)] - \dfrac{1}{4}[f(u,u)-f(u,v)-f(v,u)+f(v,v)] =$
    $= \dfrac{1}{4}[2f(u,v)+2f(v,u)] = \dfrac{1}{2}[f(u,v)+f(v,u)] \Leftrightarrow f(u,v) = \dfrac{1}{2}[f(u,v)+f(v,u)] \Leftrightarrow$
    $\Leftrightarrow 2f(u,v) = f(u,v)+f(v,u) \Leftrightarrow f(u,v) = f(v,u) \Leftrightarrow f$ és simètrica.

    c) $q = 0 \Leftrightarrow f$ és antisimètrica.

    $\to$) Si $q = 0 \to q(u) = 0, \quad \forall u \in V$.

En particular $q(u+v)=0 \rightarrow f((u+v),(u+v))=0 \rightarrow \underbrace{f(u,u)}_{q(u)=0}+f(u,v)+$

$+f(v,u)+\underbrace{f(v,v)}_{q(v)=0}=0 \rightarrow f(u,v)+f(v,u)=0 \rightarrow f(u,v)=-f(v,u)\ \forall u,v \in V.$

Per la qual cosa f és antisimètrica.

$\leftarrow$) Si f és antisimètrica$\rightarrow f(u,u)=0 \quad \forall u \in V \rightarrow q(u)=0 \quad \forall u \in V \rightarrow q=0.$

13. En $\mathbb{R}^4$ siga la forma quadràtica $q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_4^2+x_1x_2-4x_3x_4$.

Ens demana:

a) Trobeu la matriu de q en la base canònica.

b) Si f és la forma polar de q, determineu $f(u,v)$ per a $u=(1,1,1,1)$ i $v=(0,0,-1,-1)$.

Sol.: a) Directament la matriu de q en la base canònica seria:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{També es pot fer:}$$

$$q(x,y,z,t)=f((x,y,z,t),(x,y,z,t))=\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=$$

$=x^2+t^2+xy-4zt.$

$$\text{b) } f(u,v)=f((1,1,1,1),(0,0,-1,-1))=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=$$

$=3.$

14. En $\mathbb{R}^3$ siga la forma quadràtica $q(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2$.

a) Trobeu la matriu de q en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

b) Trobeu la matriu de q en la base $B=\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),(0,0,1)\}$.

c) Si f és la forma polar de q, trobeu $f(u,v)$ per a $u=(2,2,0)$, $v=(0,2,2)$.

Sol.: a) Directament la matriu de q en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ seria:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $q(x,y,z) = f((x,y,z),(x,y,z)) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4xy.$

$$f((\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$f((\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f((\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0),(0,0,1)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f((\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f((\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0),(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

$$f((\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0),(0,0,1)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f((0,0,1),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f((0,0,1),(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f((0,0,1),(0,0,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Aleshores $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

NOTA: També es podria fer utilitzant les matrius de canvi de base.

$$A' = \left(M_C^B\right)^t A \left(M_C^B\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Si f és la forma polar de q, trobeu $f(u,v)$ per a $u = (2,2,0)$, $v = (0,2,2)$.

$$f((2,2,0),(0,2,2)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8.$$

15. Siga $B = \{u,v\}$ una base d'un $\mathbb{R}$ espai vectorial V.

Siga f una forma bilineal de V definida per:

$f(u+v,u+v) = 4$, $f(u+v,u-v) = f(u-v,u+v) = 2$, $f(u-v,u-v) = -4$.

a) Trobeu la matriu de f en la base B.

b) Calculeu l'expressió coordenada de la forma quadràtica associada.

c) Determineu una base de V amb vectors conjugats respecte de f (base ortogonal si f és un producte escalar).

Sol.: a) $f(u+v,u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) = 4$.

$f(u+v,u-v) = f(u,u) - f(u,v) + f(v,u) - f(v,v) = 2$.

$f(u-v,u+v) = f(u,u) + f(u,v) - f(v,u) - f(v,v) = 2$.

$f(u-v,u-v) = f(u,u) - f(u,v) - f(v,u) + f(v,v) = -4$.

Sistema de 4 equacions amb 4 incògnites. En resoldre'l per Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Aleshores queda:

$$\left.\begin{array}{r} f(u,u)+f(u,v)+f(v,u)+f(v,v)=4 \\ f(u,v)+f(v,v)=1 \\ f(v,u)+f(v,v)=1 \\ f(v,v)=-1 \end{array}\right\} \rightarrow f(u,u)=1, \quad f(u,v)=2,$$

$$,f(v,u)=2, \quad f(v,v)=-1 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $q(x,y)=f((x,y),(x,y))=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^2-y^2+4xy.$

c) Es vol determinar una base de V, B', amb vectors conjugats respecte de f.

Considerem $B'=\{u,w\}$ amb u com el primer vector de components $(1,0)$ en la base B i $w=xu+yv=(x,y)$ en la base B i que siga cppnjugat amb u respecte de f, és a dir, $f(u,w)=0$.

$\left.\begin{array}{r} u=(1,0)_B \\ w=xu+yv=(x,y)_B \end{array}\right\} \rightarrow$ Cal determinar les components x,y ambl a condició de que $f(u,w)=0$ i $y\neq 0$ per tal que els vectors siguen L.I. i per tant B' siga una base de V.

$f(u,w)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2y \\ 2y-y \end{pmatrix}=x+2y=0 \rightarrow$ $x=-2y$.

Si $y=1 \rightarrow x=-2$. Per tant $B'=\{u,-2u+v\}$ base de V amb vectors conjugats.

16. Siga q la forma quadràtica de $\mathbb{R}^3$ definida per: $q(x,y,z)=2x^2-y^2+4xy-yz$.

a) Trobeu les equacions del canvi de base de manera que la matriu associada a q en dita base siga diagonal.

b) Trobeu una base ortogonal.

Sol.: La matriu associada a q en la base canònica és:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilitzarem transformacions elementals per a determinar una base de manera que la matriu associada a q en dita base siga diagonal.

El mètode consisteix en formar la matriu (A/I) i utilitzant transformacions elementals de files i les mateixes transforcacions en les columes, convertir la matriu en una del tipus (D/P^t) on D és la matriu diagonal i P^t la transposada de la matriu de pas P.

$$(A/I)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{2^a fila-1^a fila.}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{2^a colum - 1^a colum.}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-6(3^a fila)+2^a fila.}{\simeq}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -6 \end{array}\right) \simeq \underset{-6(3^a colum)+2^a colum.}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right) \simeq$$

$\simeq (D/P^t)$.

Aleshores $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

La nova base en la qual la matriu és diagonal D és

$B = \{(1,0,0),(-1,1,0),(-1,1,-6)\}$.

Per la qual cosa la matriu canvi de base de C a B és $P = M_C^B$.

Les equacions de canvi de base de C a B :

$$x_C = M_C^B\ x_B \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = x' - y' - z' \\ y = y' + z' \\ z = -6z' \end{cases}$$

Les equacions de canvi de base de B a C : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + \frac{1}{6}z \\ z' = -\frac{1}{6}z \end{cases}$

A més a més la base B està formada per vectors conjugats de la forma bilineal associada a q (base ortogonal).

NOTA:

En C, $q(x) = (x_C)^t A (x_C)$.

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 - y^2 + 4xy - yz.$$

En B, $q(x) = (x_B)^t D (x_B)$.

$$q(x',y',z') = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2(x')^2 - 3(y')^2 + 3(z')^2,$$

on $x' = x + y, y' = y + \frac{1}{6}z, z' = -\frac{1}{6}z$.

17. Considerem en $\mathbb{R}^3$ la forma quadràtica: $q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz$.

 a) Trobeu la matriu de q en la base $B = \{(1,1,1),(1,0,-1),(-1,1,0)\}$. Trobeu l'expressió coordenada de la forma bilineal associada a q en aquesta base.

 b) Trobeu la matriu diagonal de q. Classifiqueu q.

c) Són ortogonals els vectors $u = (1,1,0)$ i $v = (5,-2,0)$?

Sol.: a) La matriu associada de q en la base canònica és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ Compleix } q(x) = (x_C)^t A(x_C).$$

Anomenem A' la matriu de q en la base B. Es compleix $q(x) = (x_B)^t A'(x_B)$.
Sabem que $x_C = M_C^B\ x_B$. Aleshores $q(x) = (x_C)^t A(x_C) =$
$= (M_C^B\ x_B)^t A(M_C^B\ x_B) = (x_B)^t (M_C^B)^t A M_C^B (x_B) = (x_B)^t A'(x_B)$.
Identificant tindrem que $A' = (M_C^B)^t A M_C^B$ on M_C^B és la matriu canvi de base de C a B. (Cal posar B en C.L. de C)

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'expressió coordenada de la forma bilineal associada a q en aquesta base seria:

$$f((x_1,x_2,x_3)_B,(y_1,y_2,y_3)_B) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11y_1 + 2y_3 \\ y_2 + y_3 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \end{pmatrix} = 11x_1y_1 + 2x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 +$$
$$+ x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

b) $$(A/I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{2^a fila - 1^a fila \\ 3^a fila - 1^a fila}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{\substack{2^a colum - 1^a colum \\ 3^a colum - 1^a colum}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{intercanvi\ 2^a fila\ i\ 3^a fila}{\simeq}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \underset{intercanvi\ 2^a colum\ i\ 3^a colum}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{3^a fila + 2^a fila}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \underset{3^a colum + 2^a colum}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$\simeq (D/P^t)$. Aleshores:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per la qual cosa D és la matriu diagonal en la nova base de $\mathbb{R}^3$, $B' = \{(1,0,0),(-1,0,1),(-2,1,1)\}$ i $P = M_C^{B'}$.

Classificació de q. Ja que $d_{11} = 1 > 0$, $d_{22} = 1 > 0$, $d_{33} = 2 > 0 \Rightarrow q$ és definida positiva.

NOTA. Per saber la matriu de q en la base B' faríem:

$$q(x',y',z') = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x')^2 + (y')^2 + 2(z')^2.$$

c) Els vectors $u = (1,1,0)$ i $v = (5,-2,0)$ seran ortogonals si i sols si $f(u,v) = 0$.

$$f(u,v) = f((1,1,0),(5,-2,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0.$$

18. Classifiqueu les següents formes quadràtiques:

a) $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$.

b) $q(x,y,z) = x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

c) $q(x,y) = 2x^2 + 6y^2 + 3xy$.

d) $q(x,y,z) = 3y^2 + 2xz$.

Sol.: a) $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$.

Matriu associada en la base canònica: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Mètode de Jacobi:

$|A| = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} = -7 \neq 0$. Per tant cal estudiar els menors principals conduents.

$A_1 = 1, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_3 = |A| = -7.$

Ja que $A_1 = 1 > 0$, $A_2 = -3 < 0$, $A_3 = |A| = -7 < 0 \Rightarrow q$ és indefinida.

Mètode de les transformacions elementals:

$$(A/I)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{2^a fila-2(1^a fila)\\3^a fila-1^a fila}}{\simeq}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&3-&-1&-2&1&0\\0&-1&2&-1&0&1\end{pmatrix}\simeq$$

$$\underset{\substack{2^a colum-2(1^a colum)\\3^a colum-1^a colum}}{\simeq}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&-3&-1&-2&1&0\\0&-1&2&-1&0&1\end{pmatrix}\simeq$$

$$\underset{-3(\ 3^a fila)+\ 2^a fila}{\simeq}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&-3&-1&-2&1&0\\0&0&-7&1&1&-3\end{pmatrix}\simeq$$

$$\underset{-3(\ 3^a colum)+\ 2^a colum}{\simeq}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&-3&0&-2&1&0\\0&0&21&1&1&-3\end{pmatrix}\simeq(D/P^t).$$

Ja que $d_{11}=1>0,\quad d_{22}=-3<0,\quad d_{33}=21>0\Rightarrow q$ és indefinida i no degenerada.

Mètode de Lagrange Gauss:

$q(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz=(x+ay+bz)^2+cy^2+dz^2+eyz=$
$=x^2+a^2y^2+b^2z^2+2axy+2bxz+2abyz+cy^2+dz^2+eyz=$
$=x^2+(a^2+c)y^2+(b^2+d)z^2+2axy+2bxz+(2ab+e)yz.$

Identificant coeficients:

$$\left.\begin{array}{r}a^2+c=1\\b^2+d=3\\2a=4\\2b=2\\2ab+e=2\end{array}\right\}\rightarrow c=-3,d=2,a=2,b=1,e=-2.$$

Aleshores $q(x,y,z)=(x+2y+z)^2-3y^2+2z^2-2yz.$

$-3y^2+2z^2-2yz=-3(y+mz)^2+nz^2=-3y^2+(-3m^2+n)z^2-6myz.$

Identificant coeficients:

$$\left.\begin{array}{r}-3m^2+n=2\\-6m=-2\end{array}\right\}\rightarrow n=\tfrac{7}{3},m=\tfrac{1}{3}.$$

$-3y^2+2z^2-2yz=-3(y+\frac{1}{3}z)^2+\frac{7}{3}z^2$

Aleshores $q(x,y,z)=(x+2y+z)^2-3(y+\frac{1}{3}z)^2+\frac{7}{3}z^2\rightarrow D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&\frac{7}{3}\end{pmatrix}.$

Ja que $d_{11}=1>0,\quad d_{22}=-3<0,\quad d_{33}=\frac{7}{3}>0\Rightarrow q$ és indefinida i no degenerada.

b) $q(x,y,z) = x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

Mètode de Jacobi:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$. Cal estudiar els menors principals.

Menors principals de grandària 1: $A'_1 \to a_{11} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = -3$.

Menors principals de grandària 2: $A'_2 \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$,

$, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -9.$

Menors principals de grandària 3: $A'_3 \to |A| = 0$.

Per la qual cosa q és indefinida.

Mètode de les transformacions elementals:

$$(A/I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{2^a fila + 1^a fila \\ 3^a fila - 1^a fila}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{\substack{2^a colum + 1^a colum \\ 3^a colum - 1^a colum}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{3^a fila - 2(2^a fila)}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{3^a colum - 2(2^a colum)}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \simeq (D/P^t).$$

Ja que $d_{11} = 1 > 0, \quad d_{22} = -1 < 0, \quad d_{33} = 0 \Rightarrow q$ és indefinida i degenerada.

Mètode de Lagrange Gauss.

$q(x,y,z) = x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz = (x + ay + bz)^2 + cy^2 + dz^2 + eyz =$
$= x^2 + (a^2 + c)y^2 + (b^2 + d)z^2 + 2axy + 2bxz + (2ab + e)yz.$

Identificant coeficients:

$$\left.\begin{array}{c} a^2 + c = 0 \\ b^2 + d = -3 \\ 2a = -2 \\ 2b = 2 \\ 2ab + e = -6 \end{array}\right\} \to c = -1, d = -4, a = -1, b = 1, e = -4.$$

Aleshores $q(x,y,z) = (x + y + z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz$.

$-y^2 - 4z^2 - 4yz = -(y+mz)^2 + nz^2 = y^2 + (-m^2+n)z^2 - 2myz.$

Identificant coeficients:

$\left.\begin{array}{r} -m^2+n=-4 \\ -2m=-4 \end{array}\right\} \to n=0, m=2.$

$-y^2 - 4z^2 - 4yz = -(y+2z)^2.$

Aleshores $q(x,y,z) = (x+y+z)^2 - (y+2z)^2 \to D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ja que $d_{11} = 1 > 0, \quad d_{22} = -1 < 0, \quad d_{33} = 0 \Rightarrow q$ és indefinida i degenerada.

c) $q(x,y) = 2x^2 + 6y^2 + 3xy.$

Matriu associada en la base canònica: $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}.$

Mètode de Jacobi:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 6 \end{vmatrix} = \dfrac{39}{4} \neq 0.$ Cal estudiar el menors conduents:

$A_1 = a_{11} = 2 > 0, \quad A_2 = |A| = \dfrac{39}{4} > 0 \Rightarrow q$ és definida positiva.

Mètode de les transformacions elementals:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{2fila-\frac{3}{4}(1fila)}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc} 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{39}{8} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \simeq$$

$$\underset{2colum-\frac{3}{4}(1colum)}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{39}{8} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \simeq (D/P^t).$$

Ja que $d_{11} = 2 > 0, \quad d_{22} = \frac{39}{8} > 0 \Rightarrow q$ és definida positiva.

Mètode de Lagrange Gauss:

$q(x,y) = 2x^2 + 6y^2 + 3xy = 2(x+ay)^2 + by^2 = 2x^2 + (2a^2+b)y^2 + 4axy.$

Identificant coeficients:

$\left.\begin{array}{r} 2a^2+b=6 \\ 4a=3 \end{array}\right\} \to a = \frac{3}{4}, b = \frac{39}{8}$

Aleshores $q(x,y) = 2(x+\frac{3}{4}y)^2 + \frac{39}{8}y^2 \to D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{39}{8} \end{pmatrix} \to$

$\to d_{11} = 2 > 0, \quad d_{22} = \frac{39}{8} > 0 \Rightarrow q$ és definida positiva.

d) $q(x,y,z) = 3y^2 + 2xz.$

Matriu associada en la base canònica: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Mètode de Jacobi:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$ Cal estudiar els menors conduents.

$A_1 = a_{11} = 0$; $A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $A_3 = |A| = -3 < 0 \to q$ és indefinida.

Mètode de les transformacions elementals:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{1^a fila+3^a fila}{\simeq} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq$$

$$\underset{1^a colum+3^a colum}{\simeq} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{1^a fila-2(3^a fila)}{\simeq} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \simeq$$

$$\underset{1^a colum-2(3^a colum)}{\simeq} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$d_{11} = 2 > 0,\quad d_{22} = 3 > 0,\quad d_{33} = -2 < 0 \to q$ és indefinida no degenerada.

Mètode de Lagrange Gauss:

$q(x, y, z) = 3y^2 + 2xz.$

Aquest mètode estarà acabat si aconseguim escriure el terme $2xz$ com a suma de dos quadrats.

$$\left.\begin{array}{l} (x + \frac{1}{2}z)^2 = x^2 + \frac{1}{4}z^2 + xz \\ (x - \frac{1}{2}z)^2 = x^2 + \frac{1}{4}z^2 - xz \end{array}\right\} \to (x + \tfrac{1}{2}z)^2 - (x - \tfrac{1}{2}z)^2 = 2xz.$$

Per la qual cosa: $q(x, y, z) = (x+\frac{1}{2}z)^2 + 3y^2 - (x-\frac{1}{2}z)^2 \to D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$d_{11} = 1 > 0,\quad d_{22} = 3 > 0,\quad d_{33} = -1 < 0 \to q$ és indefinida no degenerada.

19. Donada la família de formes quadràtiques:

$q_\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + (\lambda + 1)z^2 + 2\lambda yz + 2xz.$

a) Trobeu la matriu de la família.

b) Classifiqueu les formes quadràtiques segons els valors del paràmetre λ.

Sol.: a) Matriu associada en la base canònica: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}.$

b) Mètode de Jacobi:

$$(A/I) = (A/I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{3^a fila - 1^a fila}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{3^a colum - 1^a colum}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{3^a fila - \lambda(2^a fila)}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 & -1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{3^a colum - \lambda(2^a colum)}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) & -1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \to D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Aleshores: $d_{11} = 1 > 0, \quad d_{22} = 1 > 0, \quad d_{33} = \lambda(1-\lambda)$.

Cassos: i) Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1 \to d_{11} = 1 > 0,\ d_{22} = 1 > 0,\ d_{33} = 0 \to q$ és semidefinida positiva.

ii) Si $0 < \lambda < 1 \to \lambda(1-\lambda) > 0$. Per tant $d_{11} = 1 > 0,\ d_{22} = 1 > 0,\ d_{33} > 0 \to q$ és definida positiva.

iii) Si $\lambda < 0$ o $\lambda > 1 \to \lambda(1-\lambda) < 0$. Per tant $d_{11} = 1 > 0,\ d_{22} = 1 > 0,\ d_{33} < 0 \to q$ és indefinida no degenerada.

20. Siga l'aplicació:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R} \quad / \quad f[(p(x), q(x))] = \int_0^1 p(x) \times q(x)dx.$$

a) Comproveu que f és una forma bilineal simètrica

b) Trobeu la matriu de f respecte de la base canònica.

c) Trobeu la matriu de f respecte de la base $B = \{1+x, 1-x, 1+x^2\}$.

d) Trobeu l'expressió coordenada de la forma quadràtica associada a f.

e) Determineu el rang i signatura de la forma quadràtica associada a f.

f) Trobeu una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sol.: a) f simètrica$\longleftrightarrow f[(p(x), q(x))] = f[(q(x), p(x))]$.

$$f[(\lambda p(x), q(x))] = \int_0^1 p(x) \times q(x)dx = \int_0^1 q(x) \times p(x)dx = f[(q(x), p(x))].$$

Anem a demostrar que f és una forma bilineal.

$$f[(\lambda p(x) + \mu p'(x), q(x))] = \int_0^1 (\lambda p(x) + \mu p'(x)) \cdot q(x)dx = \int_0^1 (\lambda p(x)q(x) + \mu p'(x)q(x))dx =$$

$= \int_0^1 (\lambda p(x)q(x)dx + \int_0^1 \mu p'(x)q(x))dx = \lambda \int_0^1 (p(x)q(x)dx + \mu \int_0^1 p'(x)q(x))dx =$
$= \lambda f[(p(x), q(x))] + \mu f[(p'(x), q(x))]$.
A més a més, $f[(p(x), \lambda q(x) + \mu q'(x))] \underset{f \text{ simètrica}}{=} f[(\lambda q(x) + \mu q'(x)), p(x)] =$
$= \lambda f(q(x), p(x)) + \mu f(q'(x), p(x)) \underset{f \text{ simètrica}}{=} \lambda f(p(x), q(x)) + \mu f(p(x), q'(x))$

b) Siga $C = \{1, x, x^2\}$ la base canònica de $\mathbb{R}_2[x]$ i siga A la matriu associada a f en la base C.

$f(1,1) = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1 \quad f(1,x) = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad f(1,x^2) = \int_0^1 x^2dx =$
$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.
$f(x,1) = \int_0^1 xdx = [x]_0^1 = \frac{1}{2} \quad f(x,x) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} \qquad f(x,x^2) = \int_0^1 x^3dx =$
$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$.
$f(x^2,1) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} \quad f(x^2,x) = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4} \qquad f(x^2,x^2) = \int_0^1 x^4dx =$
$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$.

Aleshores $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

c) Siga A' la matriu de f respecte de la base $B = \{1+x, 1-x, 1+x^2\} \rightarrow$
$\rightarrow f(x,y) = (x_B)^t A' y_B$.
En la base C $f(x,y) = (x_C)^t A y_C = (M_C^B x_B)^t A\, M_C^B y_B = (x_B)^t (M_C^B)^t A\, (M_C^B y_B) =$
$= (x_B)^t A' y_B$. Per tant $A' = (M_C^B)^t A\, M_C^B$.

$$\left.\begin{array}{l} 1+x = 1\times 1 + 1\times x + 0\times x^2 \\ 1-x = 1\times 1 + (-1)\times x + 0\times x^2 \\ 1+x^2 = 1\times 1 + 0\times x + 1\times x^2 \end{array}\right\} \rightarrow M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{25}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{25}{12} & \frac{7}{12} & \frac{28}{15} \end{pmatrix}.$$

d) Siga $p(x) = a + bx + cx \in \mathbb{R}_2[x] \rightarrow p(x) = (a,b,c)$.

$$q(p(x)) = q(a,b,c) = f((a,b,c),(a,b,c)) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + \tfrac{1}{3}b^2 + \tfrac{1}{5}c^2 + ab + \tfrac{2}{3}ac + \tfrac{1}{2}bc.$$

e) El $rang(q)$ és el rang de qualsevol matriu simètrica associada a q.

Aleshores $rang(q) = rang \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = 3$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2160} \neq 0.$

La signatura de q és la diferència entre els termes positius i negatius de qualsevol matriu diagonal associada a q.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{2^a fila - \frac{1}{2}(1^a fila) \\ 3^a fila - \frac{1}{3}(1^a fila)}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq$$

$$\underset{\substack{2^a colum - \frac{1}{2}(1^a colum) \\ 3^a colum - \frac{1}{3}(1^a colum)}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq$$

$$\underset{3^a fila - 2^a fila}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{array}\right) \simeq$$

$$\underset{3^a colum - 2^a colum}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{array}\right) = (D/P^t) \to D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix}.$$

Per la qual cosa $sig(q) = 3$.

f) De l'apartat anterior s'obté que

$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix} \to P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu del canvi de base.

Per la qual cosa $B' = \{1, -\frac{1}{2} + x, \frac{1}{6} - x + x^2\}$ és una base ortogonal.

NOTA: Això ho podem comprovar en calcular i comprovar que:

$f(1, -\frac{1}{2} + x) = f(1, \frac{1}{6} - x + x^2) = f(-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{6} - x + x^2) = 0.$

21. Siga $M_2(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre 2 sobre el cos $\mathbb{R}$. Considerem l'aplicació:

$f : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad / \quad f(X,Y) = tr(X \times Y) - tr(X) \times tr(Y).$

a) Demostreu que f és una forma bilineal.

b) Trobeu la seua matriu associada en la base canònica.

c) Determineu, en dita base, l'expressió coordenada de f.

d) Determineu el subespai ortogonal a la matriu identitat I.

Sol.: a) Cal saber que la traça d'una matriu quadrada d'ordre n és la suma dels elements de la diagonal principal.

També que: 1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ 2) $tr(k \times A) = k \times tr(A)$ 3) $tr(A \times B) = tr(B \times A)$.

Per a que f siga una forma bilineal, cal demostrar que:

i) $f(\lambda X + \mu X', Y) = \lambda f(X,Y) + \mu f(X',Y)$

ii) $f(X, \lambda Y + \mu Y') = \lambda f(X,Y) + \mu f(X,Y') \quad \forall X, X', Y, Y' \in M_2(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

i) $f(\lambda X + \mu X', Y) = tr[(\lambda X + \mu X') \cdot Y] - tr(\lambda X + \mu X') \cdot tr(Y) =$

$= tr\left[(\lambda X) \times Y + (\mu X') \times Y\right] - [\lambda tr(X) + \mu tr(X')] \times tr(Y) =$

$= tr\left[\lambda(X \times Y) + \mu(X' \times Y)\right] - [\lambda tr(X) + \mu tr(X')] \times tr(Y) =$

$= tr\left[\lambda(X \times Y) + \mu(X' \times Y)\right] - \lambda tr(X) \times tr(Y) - \mu tr(X') \times tr(Y) =$

$= tr(\lambda(X \times Y)) + tr(\mu(X' \times Y)) - \lambda tr(X) \times tr(Y) - \mu tr(X') \times tr(Y) =$

$= \lambda tr(X \times Y) + \mu tr(X' \times Y) - \lambda tr(X) \times tr(Y) - \mu tr(X') \times tr(Y) =$

$= \lambda[tr(X \times Y) - tr(X) \times tr(Y)] + \mu[tr(X' \times Y) - tr(X') \times tr(Y)] =$

$= \lambda f(X,Y) + \mu f(X',Y)$.

ii) Idem.

b) La matriu associada a f en la base canònica de $M_2(\mathbb{R})$, $C = \{I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}\}$, on

$$I_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$f(I_{11}, I_{11}) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] - tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \times 1 = 0.$$

$$f(I_{11}, I_{12}) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] - tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \times 0 = 0.$$

$f(I_{11}, I_{21}) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] - tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \times 0 = 0.$

$f(I_{11}, I_{22}) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] - tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \times 1 = -1.$

De manera semblant es calcula:

$f(I_{12}, I_{11}) = 0, \quad f(I_{12}, I_{12}) = 0, \quad f(I_{12}, I_{21}) = 1, \quad f(I_{12}, I_{22}) = 0.$

$f(I_{21}, I_{11}) = 0, \quad f(I_{21}, I_{12}) = 1, \quad f(I_{21}, I_{21}) = 0, \quad f(I_{21}, I_{22}) = 0.$

$f(I_{22}, I_{11}) = -1, \quad f(I_{22}, I_{12}) = 0, \quad f(I_{22}, I_{21}) = 0, \quad f(I_{22}, I_{22}) = 0.$

Aleshores $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

c) Expressió coordenada de f en la base canònica de $M_2(\mathbb{R})$:

$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 I_{11} + x_2 I_{12} + x_3 I_{21} + x_4 I_{22} = (x_1, x_2, x_3, x_4).$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = y_1 I_{11} + y_2 I_{12} + y_3 I_{21} + y_4 I_{22} = (y_1, y_2, y_3, y_4).$

$f\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\right] = f\left[(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)\right] =$

$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$

$= -x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 - x_4 y_1.$

d) $V \leq M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad V$ és ortogonal a $< I > \Leftrightarrow f(X, I) = 0, \quad \forall X \in V.$

Siga $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V \to f(X, I) = f\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \to$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 = -x_4.$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V \underset{x_1=-x_4}{\longrightarrow} X = \begin{pmatrix} -x_4 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$
$+x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Aleshores $V = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

22. Siga q la forma quadràtica sobre $\mathbb{R}^4$ definida respecte a la base canònica per: $q(x,y,z,t) = x^2 - 3y^2 - 4z^2 + \alpha t^2 + 2\beta xy \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
a) Trobeu la forma bilineal associada a q.
b) Determineu el rang de q en funció dels paràmetres α i β.
c) Descomponeu q com a suma de quadrats i trobeu la seua signatura.
d) Classifiqueu q.

Sol.: a) La matriu associada en la base canònica: $A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

La forma bilineal associada a q :

$$f[(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + \beta y_2 \\ \beta y_1 - 3y_2 \\ -4y_3 \\ \alpha y_4 \end{pmatrix} = x_1(y_1+\beta y_2)+x_2(\beta y_1-3y_2)+x_3(-4y_3)+$$
$+x_4(\alpha y_4) = x_1y_1 + \beta x_1y_2 + \beta x_2y_1 - 3x_2y_2 - 4x_3y_3 + \alpha x_4y_4.$

NOTA: També es pot calcular a partir de l'expressió: $f[(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)] =$
$= \frac{1}{2}[q(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4) - q(x_1,x_2,x_3,x_4) - q(y_1,y_2,y_3,y_4)]$.

b) El $rang(q)$ és el rang de qualsevol matriu simètrica associada a q.

Aleshores $rang(q) = rang \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -3-\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \to -3-\beta^2 \neq 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Aleshores, $rang(q) = \begin{cases} 3 & \text{Si } \alpha = 0 \\ 4 & \text{Si } \alpha \neq 0 \end{cases}$

c) $(A/I) = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$

$$\underset{2^a fila - \beta(1^a fila)}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\beta^2 & 0 & 0 & -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{2^a colum - \beta(1^a colum)}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\beta^2 & 0 & 0 & -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (D/P^t).$$

Per tant, $q(x, y, z, t) = x^2 - (3+\beta^2)y^2 - 4z^2 + \alpha t^2$.

La signatura de q és la diferència entre els termes positius i negatius de qualsevol matriu diagonal associada a q.

Per la qual cosa $sig(q) = \begin{cases} -2 & \text{Si } \alpha < 0 \\ -1 & \text{Si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{Si } \alpha > 0 \end{cases}$

d) Com $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to d_{11} = 1 > 0,\ d_{22} = -3-\beta^2 < 0,\ d_{33} =$ $-4 < 0,\ d_{44} = \alpha$. Per tant:

Si $\alpha \neq 0 \to q$ és una forma quadràtica indefinida i no degenerada.

Si $\alpha = 0 \to q$ és una forma quadràtica indefinida i degenerada.

PROBLEMES OPCIONALS

TEMA 1 : *LÒGICA PROPOSICIONAL*

1. Si p, q i r són tres proposicions, demostreu que $((p\wedge\neg q)\wedge\neg r) \vee (p \wedge (q\wedge\neg r)) = p\wedge\neg r$.

   i) Utilitzant les taules de veritat.

   ii) Utilitzant l'àlgebra de Boole de la commutació substituint $\wedge$ per $\cdot$, $\vee$ per $+$, $\neg$ per $-$.

2. Si p, q i r són tres proposicions:

   i) Efectueu un càlcul booleà per saber si les relacions següents són certes o falses:

   $a)$ $pq \Rightarrow p$ $\quad b)$ $p+q \Rightarrow q$ $\quad c)$ $pq \Rightarrow p+q$ $\quad d)$ $p+q \Rightarrow pq$.

   ii) Suposem que $p \Rightarrow q$. Efectueu un càlcul booleà per a saber si les relacions següents són certes o falses:

   $a)$ $p+q \Rightarrow q$ $\quad b)$ $p+q \Rightarrow p$ $\quad c)$ $p+q \Rightarrow pq$ $\quad d)$ $q \Rightarrow p$ $\quad e)$ $p+r \Rightarrow q+r$ $\quad f)$ $pr \Rightarrow qr$.

3. Si p, q, r són tres proposicions, indiqueu entre les noves proposicions, aquelles que siguen tautologies:

   $$\begin{array}{lll} p \rightarrow p, & \overline{p} \rightarrow p, & p \rightarrow (p+q), \\ p \rightarrow (pq), & (pq) \rightarrow p, & p(p \rightarrow q) \\ p(q \rightarrow p), & (p \rightarrow p)q, & (q \rightarrow q)p \\ (p \rightarrow p)p, & (p \rightarrow p) \leftrightarrow (\overline{q}+q), & ((p \leftrightarrow q)(q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r) \\ (p \leftrightarrow q) \rightarrow ((p+r) \leftrightarrow (q+r)), & ((p+r) \leftrightarrow (q+r)) \rightarrow (p \leftrightarrow q). & \end{array}$$

4. Suposem $(B,+,\cdot,-)$ l'àlgebra de Boole de la commutació, on $B = \{0,1\}$.

   Definim en B l'operació $\leftrightarrow$: $B \times B \longrightarrow B \quad / \quad (a,b) \rightsquigarrow a \leftrightarrow b = ab + \overline{a}\overline{b}$.

   i) Demostreu que $(B,\leftrightarrow)$ és un grup commutatiu.

   ii) Utilitzant aquesta estructura, demostreu que: a) $p \leftrightarrow r = q \leftrightarrow r$ equival a $p = q$ $\quad$ b) $p \Leftrightarrow q$ equival a $p = q$.

   Nota: Sabem que $p \Leftrightarrow q$ vol dir que $p \leftrightarrow q$ és una tautologia, que també podem expresar per $(p \leftrightarrow q) = 1$ o $p \leftrightarrow q = 1$.

5. Si considerem els enunciats a : "hui és diumenge", b : "demà serà dijous", c : "ahir fou dissabte".

i) Demostreu que a, b, c no són proposicions, però poden ser intrepretades com a funcions proposicionals sobre cert conjunt universal E. Determineu aquest conjunt universal.

ii) Entre les funcions proposicionals següents, quines són iguals a 1 o a 0?.

$a+b,\quad a \to c,\quad a \to b,\quad ab,\quad ac,\quad a+c$
$(a+b)\overline{b},\quad (a+c)\overline{c},\quad (a+b) \to b,\quad (a+b) \to c,\quad (a+b) \to a,\quad (a+c) \to c$
$a \leftrightarrow b,\quad a \leftrightarrow c.$

6. Deduïu que la conclusió és consequència lògica de les premises. Demostreu la conclusió utilitzant les regles d'inferència:

   Si el rellotge està avançat, aleshores Joan aplegà abans de les deu i va veure sortir el cotxe d'Andrés. Si Andrés diu la veritat, aleshores Joan no va veure sortir el cotxe d'Andrés. Andrés diu la veritat o estava en l'edifici en el moment del crim. El rellotge està avançat. Per la qual cosa, Andrés estava en l'edifici en el moment del crim.

7. Demostreu: $x > 6$.
   $p_1 : x > 5 \to x = 6 \ \vee x > 6$
   $p_2 : x \neq 5 \wedge x \not< 5 \to x > 5$
   $p_3 : x < 5 \to x \neq 3+4$
   $p_4 : x = 3+4 \wedge x \neq 6$
   $p_5 : x = 3+4 \wedge x \neq 5.$

8. Si definim el connectiu "no i", per $(p \uparrow q) \Leftrightarrow (\overline{p \wedge q})$ per a les proposicions p, q. Utilitzant sols aquest connectiu, representeu:

   $\overline{p},\qquad p \vee q,\qquad p \wedge q,\qquad p \to q,\qquad p \leftrightarrow q.$

9. Si definim el connectiu "no o", per $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p \vee q})$ per a les proposicions p, q. Utilitzant sols aquest connectiu, representeu:

   $\overline{p},\qquad p \vee q,\qquad p \wedge q,\qquad p \to q,\qquad p \leftrightarrow q.$

10. Demostreu que:
    i) $\overline{(p \uparrow q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \downarrow \overline{q})$.
    ii) $\overline{(p \downarrow q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \uparrow \overline{q})$.
    iii) És cert que $(p \uparrow q) \uparrow r \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow r)$?.
    iv) És cert que $(p \downarrow q) \downarrow r \Leftrightarrow p \downarrow (q \downarrow r)$?.
    v) Trobeu $(p \uparrow q) \downarrow r,\qquad (p \downarrow q) \uparrow r,\qquad (p \uparrow q) \downarrow (p \uparrow q),\qquad (p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow q).$

11. Demostreu: $x > y$.

$p_1 : x \neq y \rightarrow x > y \vee x < y$
$p_2 : x > y \vee x < y \rightarrow x \neq 4$
$p_3 : x < y \rightarrow \urcorner(x \neq y \rightarrow x \neq 4)$
$p_4 : x \neq y.$

12. Cas de ser vàlids els següents raonaments, demostreu la conclusió utilitzant les regles d'inferència.

    i) L'animal té ales o no és un osell. Si l'animal és un osell, aleshores posa ous. L'animal no té ales. Per la qual cosa, no posa ous.

    ii) El sistema inclou altres nombres a més dels naturals o la substracció no és sempre possible en aquest sistema de nombres. Si la substracció és sempre possible en aquest sistema de números, aleshores el sistema inclou els sencers negatius. El sistema no inclou altres nombres que els naturals. Per la qual cosa, el sistema no inclou el sencers negatius.

    iii) Si Joan guanya, aleshores Lluis o Esteban seran segons. Si Lluis és segón, aleshores Joan no guanyarà. Si Pere és segón, aleshores Esteban no serà segón. Per la qua cosa, si Joan guanya, aleshores Pere no serà segón.

13. Demostreu que els conjunts de premisses següents són inconsistents, deduint una contradicció per a cadascun:

    i) $p_1 : \urcorner q \rightarrow r$
    $p_2 : \urcorner r \vee s$
    $p_3 : \urcorner(p \vee q)$
    $p_4 : \urcorner p \rightarrow \urcorner s.$

    ii) $p_1 : r \rightarrow r \wedge q$
    $p_2 : \urcorner s \vee r$
    $p_3 : \urcorner t \vee \urcorner q$
    $p_4 : s \wedge t.$

    iii) Joan està en la biblioteca i no ocorre que Tomàs està en classe d'Història o que Lluís està en classe d'Història. Si Pere està en el laboratori de Química, aleshores Lluís està en classe d'Història. Si Miguel està en la casse de Geometria, aleshores Tomàs està en classe d'Història. Si Joan està en la biblioteca, aleshores Pere està en el laboratori de Química o Miguel està en la casse de Geometria.

    Nota: A vegades no es troba aquesta contradicció i caldria estudiar la taula de veritat. Si alguna fila és certa, aleshores el sistema de premisses seria consistent.

    iv) Si Joana és jove, aleshores Rosa és vella. Si Rosa és vella, aleshores Marta és jove. Marta no és jove.

14. Simbolitzeu els raonaments següents, utilitzant símbols lògics i aritmètics i escriviu una deducció completa de la conclusió:

    i) Per a cada nombre sencer y, y és par si, i sols si, $y + 1$ és impar. Per a cada nombre sencer x, si x és igual a $5 + 1$, aleshores x és par. $5 + 1$ no és impar. Per la qual cosa, 5 no és igual a $5 + 1$.

    ii) Cada nombre sencer x divisible per 12 és divisible per quatre. Cada nombre sencer y divisible per quatre és par. El nombre sencer z és divisible per dos o no és par. Quince no és divisible per dos. Per la qual cosa, quince no és divisible per dotze.

$$\text{iii)}\quad \begin{array}{ll} p_1 : \forall x \forall y & x > y + 3 \rightarrow x > y \\ p_2 : \forall z \forall u & (u - 3 < z \rightarrow 3 + z > u) \\ p_3 : (3+3) - 3 < 4 & \\ c \ : 3 + 4 > 3. & \end{array}$$

15. Decidiu quina de les proposicions p, q, r, s,les quals interveneixen en les premises següents, és implicació lògica (es dedueix lògicament) de les premises p_1, p_2 i p_3 :

$p_1 : \urcorner (p \vee q)$
$p_2 : r \rightarrow q$
$p_3 : \urcorner r \rightarrow s.$

Demostreu que aquesta conclusió es dedueix lògicament de les premises donades: siga utilitzant les propietats de l'Àlgebra de Boole de les proposicions lògiques, siga utilitzant les regles d'inferència.

16. Donades les proposicions p i q, es defineix el connector $(/)$ amb el criteri següent: "La proposició composta p/q sols és falsa quan són certes simultàniament les dues proposicions que la integren i certa en els demés casos".

i) Definiu aquesta operació utilitzant les operacions de l'Àlgebra de Boole de les proposicions. Estudieu l'idempotència i l'associativitat d'aquesta operació. Té element neutre?.

ii) Demostreu, utilitzant les propietats de l'Àlgebra de Boole, l'expressió següent, verificant el resultat amb taules de veritat: $(p/q)/\,[(p/q)/q] \Leftrightarrow q.$

iii) És distributiu el connector $(/)$ respecte a l'operador conjunció?.

17. Estudieu quina de les proposicions p, q,o r que apareixen en les premises següents és implicació lògica de p_1 i p_2:

$p_1 : p \vee (q \wedge r)$
$p_2 : p \rightarrow r.$

Demostreu que aquesta conclusió es dedueix lògicament de les premises donades, utilitzant les propietats de l'Àlgebra de Boole de les proposicions lògiques o les regles d'inferència.

18. Demostreu la certesa dels següents raonaments:

$$\text{i)}\quad \begin{array}{l} p_1 : (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ p_2 : p \vee r \\ c : \ q \vee s. \end{array} \qquad\qquad \text{ii)}\quad \begin{array}{l} p_1 : p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p_2 : q \rightarrow (p \rightarrow r) \\ c : \ (p \vee q) \rightarrow r. \end{array}$$

19. i) De les tres proposicions $t \rightarrow r$, $r \rightarrow t$, $\urcorner t \vee r$, quina o quines es dedueixen del raonament:

$p_1 : p \to q$
$p_2 : q \to \neg s$
$p_3 : p \vee (t \to r)$
$p_4 : s$.

ii) "No és cert que sigues afortunat i irracional. Saps que si resols el problema, aleshores seràs afortunat. A més a més, no pots ser que sigues racional i no dones solució al problema".

Simbolitzeu lògicament l'enunciat i deduiu la conclusió: "eres afortunat si, i sols si, eres racional", on p indica que eres afortunat , q indica que eres racional, r indica que resols el problema.

20. Averigüeu si és possible deduir la següent conclusió a partir de les premises donades:

p_1 : El contracte es cumpleix si, i sols si, les noves finestres estan instal·lades en juny.

p_2 : Si les noves finestres estan instal·lades en juny, se podrà fer la muda el primer de juliol.

p_3 : Si no se pot fer la muda el primer de juliol, caldrà pagar el lloguer de l'apartament de juliol.

p_4 : Si les finestres no estan instal·lades, caldrà pagar el lloguer de l'apartament de juliol.

Conclusió: No se pagarà el lloguer de juliol de l'apartament.

21. Deduiu lògicament la conlcusió a partir de les premises donades:

p_1 : En el natalici de la meva dona li done flors.

p_2 : És el natalici de la meva dona o treballe fins molt tard.

p_3 : No li porte flors a la meva dona.

Conclusió: Avui treballe fins molt tard.

22. Donats els conjunts $A, B \ / \ A \cup B \neq \emptyset$, les premises p_1 , p_2 i les conclusions c_1 , c_2 , c_3 :

$p_1 : \forall x \quad x \in A \vee x \in B$
$p_2 : \neg\exists x \quad x \in A \wedge x \notin B$
$c_1 : \forall x \quad x \in B$
$c_2 : \exists x \quad \neg(x \notin A \to x \notin B)$
$c_3 : c_2 \to c_1$.

i) Estudieu si són o no certs els següents raonaments: r_1 , r_2 , r_3 :

r_1 :	r_2 :	r_3 :
p_1	p_1	p_1
p_2	p_2	p_2
c_1	c_2	c_3

ii) Demostreu els que siguen certs i doneu un contraexemple dels que no ho siguen (us podeu ajudar dels diagrames d'Euler-Venn).

iii) Reformuleu els que siguen certs en forma de teorema, utilitzant les operacions entre conjunts.

iv) Enuncieu el contrarecíproc del raonament r_1.

23. a) Utilitzeu les taules de veritat per a deduir si són o no tautologies les següents proposicions:

    i) $(p \to q) \to (p \to (p \wedge q))$ ii) $((p \wedge q) \vee \neg r) \leftrightarrow p$.

    b) Demostreu que de les quatre prenisses següents es pot deduir t.

    $p_1 : p \wedge q \to s$
    $p_2 : s \wedge r \to t$
    $p_3 : u \to q \wedge r$
    $p_4 : \neg(\neg u \vee \neg p)$.

24. Demostreu si el següent raonament és vertader o fals:

    $p_1 : (p \vee q) \wedge r$
    $p_2 : r \to s$
    $p_3 : s \to \neg p$
    $c\ : q$.

    i) Utilitzant taules de veritat.

    ii) Utilitzant regles d'inferència.

    iii) Transformant les premises mitjançant operacions bàsiques de l'Àlgebra de Boole de les proposicions lògiques i utilitzant les seues propietats.

25. Demostreu per inducció completa:

    i) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

    ii) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

    iii) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

26. a) Donades dues proposicions lògiques p i q, definim una nova partícula connectiva, que representarem per $\otimes$, de la següent forma: $p \otimes q$ sols és certa quan, sent alguna de les dues certa, no ho és simultàniament.

i) Escriviu la proposició $p \otimes q$ utilitzant sols les connectives disjunció i negació i construiu la seua taula de veritat.

ii) Transformeu $p \otimes q$ en una proposició condicional. Demostreu l'equivalència entre ambdues proposicions.

iii) Utilitzant les propietats de l'Àlgebra de Boole, demostreu la següent equivalència:

$(p \otimes (q \otimes p)) \Leftrightarrow q.$

b) Donades les proposicions lògiques p, q, r, construiu una altra proposició lògica t, utilitzant-les les tres, la negació i les partícules connectives, tal que:

t és certa $\Leftrightarrow$ una i sols una de les tres proposicions inicials és certa.

27. Donades les proposicions p i q, definim una nova proposició $p \mathrel{\mathsf{H}} q$ mitjançant l'operació H, de forma que $p \mathrel{\mathsf{H}} q$ no és una proposició certa si alguna de les dues proposicions, p o q ho són.

i) Expresseu, mitjançant les operacions lògiques bàsiques de l'Àlgebra de Boole de les proposicions l'operació H definida.

ii) Raoneu si la següent expressió és correcta o no: $p \mathrel{\mathsf{H}} q \Leftrightarrow \neg(\neg q \to p)$.

iii) Si p simbolitza "pertany al conjunt A" i q simbolitza "pertany al conjunt B", quina operació conjuntivista simbolitza la proposició $p \mathrel{\mathsf{H}} q$ entre els conjunts A i B ?.

iv) Estudieu, raonant la resposta, si l'operació H és commutativa i si és associativa.

TEMA 2 : FUNCIONS BOOLEANES

28. Si $a, b, c, d \in B = \{0, 1\}$, demostreu les següents igualtats i escriviu les seues duals:

i) $a + \overline{ba} = 1.$

ii) $\overline{a + \overline{a}b + \overline{a}c + \overline{a}\overline{\overline{b}}\overline{c}} = 0.$

iii) $a + c = a + \overline{a}\overline{\overline{b}}c(ad + c) + bc.$

iv) $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) = ac + bd.$

29. Si $a, b, c \in B$ i si $e = ab + \overline{c}$ i $f = \overline{\overline{a + b} \cdot (c + \overline{a})}.$

i) Escriviu e i f en forma de suma de mintermes de a, b, c.

ii) Escriviu els complements $\overline{e}$ i $\overline{f}$ en forma de suma de mintermes de a, b, c.

iii) Deduiu del anterior la forma de e i de f com a producte de maxtermes de a, b, c.

30. Si $a, b, c \in B$, demostreu les següents implicacions i examineu els seus recíprocs:

    i) $a + b = a + c \Rightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}\overline{b} = \overline{a}\,\overline{c}$.

    ii) $ab + bc + ca = \overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a \Rightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}\overline{b} = \overline{a}\,\overline{c}$.

    iii) $ab + \overline{c} = 0 \Rightarrow \overline{a}c + \overline{b}c = 1$.

    iv) $a = b + c \Rightarrow \overline{a} = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

31. Si $a, b, x \in B$.

    1) Demostreu les equivalències:

    i) $(a + x = b + x \quad \wedge \quad a + \overline{x} = b + \overline{x}) \Leftrightarrow a = b$.

    ii) $(ax = bx \quad \wedge \quad a\overline{x} = b\overline{x}) \Leftrightarrow a = b$.

    2) Si $ax = bx \wedge a + \overline{x} = b + \overline{x}$, es pot deduir que $a = b$?.

32. Si $a, b, c \in B$.

    i) Demostreu les desigualtats: $ab \leq a \leq a + b$ i $ab \leq b \leq a + b$.

    ii) Si c és un element major o igual que a i que b a la vegada, demostreu que $c \leq a + b \Rightarrow c = a + b$. És a dir, $a + b$ és el menor dels elements superiors a la vegada a a i a b.

    iii) Anàlogament demostreu que ab és el major dels elements menors que a i b a la vegada.

33. Utilitzant les formes normals disjuntives, demostreu:

    i) $a \to b = b \to a \Leftrightarrow a = b$.

    ii) $(a \to b) \to c = a \to (b \to c) \Leftrightarrow a + c = 1$.

34. Dibuixeu els mapes de Karnaugh de les següents expressions booleanes i simplifiqueules gràfica i algebraicament:

    i) $f(a, b, c) = ab + \overline{a + \overline{b}c}$.

    ii) $f(a, b, c) = (\overline{a} + \overline{b} + c)(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})(\overline{a} + b + c)$.

    iii) $f(a, b, c, d) = ac + \overline{(a + \overline{c})(c + d)} + bc\overline{d} + abcd$.

    iv) $f(a, b, c, d) = \sum_4 m(0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15)$.

    v) $f(a, b, c, d) = \overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{d} + cd$.

    vi) $f(a, b, c, d, e) = (\overline{a} + \overline{b} + c + d + e)(a + \overline{b} + c + d + e)(\overline{a} + b + c + d + e)(a + b + c + d + e)$.

    vii) $f(a, b, c, d, e) = \sum_5 m(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 19, 23, 26, 27, 30, 31)$.

35. Donada la funció booleana: $f(a,b,c,d) = \sum_4 m(0,1,2,4,5,6,8,10,11,12,13,14,15)$.

1) Utilitzeu el mètode de Quine-MacCluskey per a escriure f com a suma dels seus implicants primers.

2) i) Idem per a $\overline{f(a,b,c,d)}$.

ii) Del resultat anterior, deduiu una forma de $\sum\prod$ de f.

iii) Apliqueu el mètode dels concensos a l'expressió anterior per tornar a trobar l'expressió de f com a suma dels seus implicants primers.

3) Traçeu la quadrícula de Mac Cluskey i obteniu totes les formes simplificades de $f(a,b,c,d)$.

36. Donada la funció booleana: $f(a,b,c,d) = abc + \overline{a}\overline{b}\,\overline{d}$.

i) Obteniu la funció dual i dibuixeu el mapa de Karnaugh de f^*.

ii) Escriviu f^* com a suma dels seus implicants primers, utilitzant el mètode de Quine o el desl consensos.

iii) Obteniu totes les formes $\sum\prod$ simplificades de f^*.

iv) Obteniu totes les formes $\prod\sum$ simplificades de f.

37. Quatre persones X, Y, Z, T, voten si accepten o rebujen diversos projectes. Un projecte serà acceptat si, i sols si, al menys tres persones ho accepten. Cap persona s'absten de votar. L'univers E és el conjunt dels projectes sotmesos a votació.

Si x : "ser acceptat per X", y : "ser acceptat per Y", z : "ser acceptat per Z", t : "ser acceptat per T", $f(x,y,z,t)$: "ser acceptat el projecte".

1) i) Obteniu una expressió booleana de f.

ii) Simplifiqueu gràficament f.

2) Si sempre que T accepta un projecte, X, Y també ho accepten (no se diu què passa si T el rebuja).

i) Escriviu en forma d'igualtat boolena la relació existent entre x, y i t.

ii) Determineu algebraicament els mintermes nuls.

iii) Simplifiqueu gràficament la nova funció g.

iv) Doneu una condició simple, necessària i suficient per què un projecte siga acceptat.

38. Si $f(a,b,c) = abc + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c$.

i) Construïu un circuit lògic amb tres entràdes a, b, c i una eixida amb un mínim de portes OR, AND, NOT.

ii) Demostreu que la variable booleana a, es pot escriure com una expressió booleana de b, c i f. Construïu un circuit lògic simple amb entrades b, c i f i eixida a. Anàlogament per a les variables b i c.

39. Per un interès publicitari, una editorial organitza un joc educatiu. Per la qual cosa envia a diverses escoles unes fitxes amb quatre preguntes per a contestar amb sí o no. Tots els xiquets que contesten bé al menys tres de les preguntes, rebran un poster.

Les respostes correctes són: Pregunta A_1 : $SÍ$. Pregunta A_2 : NO. Pregunta A_3 : $SÍ$. Pregunta A_4 : $SÍ$. Escrivim a_i :"respon sí a la pregunta A_i", ($i = 1, 2, 3, 4$) i f :"guanya un poster".

i) Expresseu f en funció de a_1, a_2, a_3, a_4 i escriviu f en forma de $\sum \prod$ simplificada.

ii) Construïu un circuit lògic amb quatre entrades a_1, a_2, a_3, a_4 i una eixida f.

40. Si f és una funció booleana de tres variables definida per la taula:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

i) Obteniu la forma normal disjuntiva de $f(x, y, z)$.

ii) Simplifiqueu $f(x, y, z)$ en forma de suma de monomis amb dos literals.

iii) És f simètrica respecte de x, y, z ?.

iv) Demostreu que f és autodual.

v) De les respostes a les preguntes anteriors, deduiu la forma normal conjuntiva de $f(x, y, z)$ i una forma de $f(x, y, z)$ com a producte de monals amb dos literals.

vi) En construir la funció lògica amb portes AND, OR (dos entrades) i NOT (una entrada), decidim substituir cada porta OR per una AND i a l'inrevés, mentre que les portes NOT se mantenen. Quina funció és l'associada a aquest nou diagrama?.

41. Si $f(x, y, z, t) = \sum_4 m(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$.

i) Escriviu $\overline{f(x, y, z, t)}$ i demostreu que $f^* = \overline{f}$.

ii) De l'apartat anterior, deduïu que $f(x,y,z,t) = \overline{x}y+\overline{x}z+\overline{x}t+\overline{y}x+\overline{y}z+\overline{y}t+\overline{z}x+\overline{z}y+\overline{z}t+\overline{t}x+\overline{t}y+\overline{t}z$.

iii) Utilitzeu la quadrícula de MacCluskey per demostrar que $f(x,y,z,t) = x\overline{z}+y\overline{t}+\overline{x}t+\overline{y}z$, i comproveu-lo mitjançant un mapa de Karnaugh.

iv) Demostreu que f és simètrica respecte de x,y,z,t, i deduïu que $f(x,y,z,t) = y\overline{t}+\overline{x}z+x\overline{y}+\overline{z}t$.

TEMA 3 : *CONJUNTS*

42. Demostreu:

i) Si $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D \wedge A \cup C \subseteq B \cup D$.

ii) $A \subseteq B$, si i sols si, $A \cap B = A$.

iii) $A \subseteq B$, si i sols si, $\overline{A} \cup B = E$, on $A,B,C,D \subseteq E$.

43. Demostreu que:

i) $A \subset C \Rightarrow A-(A-C) = A$.

ii) $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$.

iii) $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$.

iv) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

44. Demostreu si es compleixen o no les següents igualtats i implicacions per a $A,B,C \subseteq E$.

i) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$.

ii) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.

iii) $A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.

iv) $A \triangle C = B \triangle C \Rightarrow A = B$.

Són certs els recíprocs d'aquests apartats?.

45. Demostreu les següents igualtats entre conjunts i escriviu el dual:

i) $E = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

ii) $A = A \cap (A \cup B)$.

iii) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

iv) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \emptyset)$.

46. Demostreu si es compleixen o no les següents igualtats per a $A,B \subseteq E$.

i) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

ii) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

47. Demostreu les següents igualtats utilitzant:

a) taules de veritat. b) propietats de l'Àlgebra de Boole.

i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

ii) $A \cup A = A$.

iii) $A \cup (A \cap B) = A$.

iv) $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$.

48. Si $A, B, C \subseteq E$,analitzeu la veracitat o falsetat de les següents igualtats:

i) $A\triangle(B \cap C) = (A\triangle B) \cap (A\triangle C)$.

ii) $A\triangle(B \cup C) = (A\triangle B) \cup (A\triangle C)$.

iii) $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$.

iv) $A \cup (B\triangle C) = (A \cup B)\triangle(A \cup C)$.

49. Simplifiqueu les expressions:

i) $A \cap (B - A)$.

ii) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$.

iii) $(A - B) \cup (A \cap B)$.

iv) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$.

v) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup \ldots$

50. Suposem $A, B \subset E$. Demostreu que $\overline{A \times B} = (\overline{A} \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B})$, on $\overline{A}$ i $\overline{B}$ són els complementaris de A i B, respectivament, en E i $\overline{A \times B}$ el complementari de $A \times B$ en $E \times E$.

51. Demostreu que si $A, B \subset E$:

i) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \phi \Leftrightarrow A = B$.

ii) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

iii) $A \cap B$ i $A \triangle B$ són disjunts.

52. De les 25 persones que es congreguen en una reunió eclesiàstica, 20 són bisbes, 12 cardenals, 17 italians, 8 bisbes i cardenals, 11 cardenals i italians, 12 bisbes i italians. Quants italians són a la vegada bisbes i cardenals?.

53. Demostreu que:

i) $A \cap (B - A) = \phi$.

ii) $(A - B) - C \subset A - (B - C)$.

iii) $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$.

iv) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$, on $A, B, C \subset E$.

54. Dels 200 estudiants de selectiu, 70 estudien matemàtiques, 120 física, 90 química, 50 matemàtiques i física, 30 matemàtiques i química, 40 física i química i 20 les tres assignatures. Ens demanen:

i) És correcta la informació si tots estudien alguna de les tres?.

ii) Quants estudiants estudien matemàtiques o física?.

iii) Quants estudiants no estudien ninguna de les tres assignaturas?.

iv) Quants estudiants estudien matemàtiques o química?.

v) Quants estudiants estudien al menys alguna de les tres?.

vi) Quants estudiants estudien física o química?.

55. Determineu el nombre d'elements que no pertanyen a cap dels conjunts A, B, C sabent que són n elements en total, dels quals la tercera part pertanyen a A, la tercera part a B, la tercera part a C, la quinta part a cada par d'ells i la dècima part als tres.

56. D'una classe de 35 estudiants, uns practiquen el futbol, altres el bàsquet, i altres el tennis. Sabem que 4 practiquen els tres deports, 3 sols practiquen el tennis i bàsquet, 2 sols el futbol i el tennis, 5 sols el futbol, 7 sols el bàsquet i 8 sols el tennis. Quants practiquen sols dos deports?.

TEMA 4 : RELACIONS, FUNCIONS, APLICACIONS

57. En el conjunt $\mathbb{R}$, definim la relació: $a\Re b \leftrightarrow \dfrac{a^2}{a-1} = \dfrac{b^2}{b-1}$.

i) Demostreu que $\Re$ és una relació binària d'equivalència en $\mathbb{R}-\{1\}$.

ii) Trobeu les classes d'equivalència i el conjunt quocient.

58. Considerem $A, B \subset E$. Considerem la família de conjunts:

$$\Psi = \left\{ \begin{array}{c} \phi, \overline{A}\cap\overline{B}, A\cap\overline{B}, \overline{A}\cap B, A\cap B, \overline{A}, \overline{B}, (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B), (\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B}), \\ , A, B, \overline{A}\cup\overline{B}, A\cup\overline{B}, \overline{A}\cup B, A\cup B, E \end{array} \right\}$$

Construïu el diagrama de Hasse que correspon a la família Ψ, si la relació és la d'inclusió.

59. En el conjunt $\mathbb{N}$, definim la relació $a\Re b \Leftrightarrow a/b$ (*a divideix* a b).

Si $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$.

i) Construïu el diagrama de Hasse per al subconjunt A de $\mathbb{N}$.

ii) Trobeu els elements notables del subconjunt A.

60. Suposem $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim en X la relació $\Re$:

$x \Re y \Leftrightarrow$ La divisió de $\underline{x}\ \underline{y}$ per 4 dona de residu un número parell.

(on $\underline{x}\ \underline{y}$ no és el producte de x per y, sinó el nombre de dues xifres que resulta de concatenar x i y, és a dir, $\underline{x}\ \underline{y} = y + 10x$).

i) Dibuixeu el graf de la relació $\Re$.

ii) Trobeu el mínim nombre de fletxes que cal afegir o eliminar al graf anterior perquè siga el graf d'una relació binària d'ordre. A aquesta nova relació representada pel nou graf l'anomenem $\Re'$.

iii) Donada la relació $\Re'$, calculeu el seu diagrama de Hasse.

iv) Trobeu els seus elements màxim, mínim, maximals i minimals, així com les cotes superiors i inferiors del subconjunt $A = \{1, 5\} \subset X$.

v) Donada la relació inicial $\Re$, trobeu el subconjunt $B \subset X$, de cardinalitat màxima, tal que considerant la relació $\Re$ sols en B, done com a resultat una relació binària d'equivalència. Trobeu el conjunt quocient.

vi) Donat el graf inicial de la relació $\Re$, però considerant-lo no dirigit, amb un únic camí entre dos vèrtex relacionats diferents i sense bucles, estudieu si és pla, recorrible, eulerià i hamiltonià, donant el recorregut quan corresponga.

61. En el conjunt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definim la relació: $(x, y) \Re (x', y') \Leftrightarrow x + y' = y + x'$.

i) Demostreu que $\Re$ és una relació binària d'equivalència (RBE).

ii) Trobeu les classes d'equivalència.

iii) Trobeu la classe d'equivalència determinada pel punt (1,1).

iv) Trobeu el conjunt quocient.

62. Si considerem les següents relacions:

Sobre el conjunt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$(x_1, y_1) \Re (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2 \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A.$$

Sobre el conjunt $B = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.

$$(x_1, y_1) \Re' (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 - x_1 = x_2 - y_2 \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B.$$

i) Estudieu les propietats de $\Re$ i de $\Re'$ i indiqueu el tipus de relació que són.

ii) Si alguna de les relacions anteriors és d'equivalència, trobeu el seu conjunt quocient.

iii) Si alguna d'aquestes no és d'equivalència, afegiu les relacions neccesàries entre els seus elements per què sí siga d'equivalència.

63. En el conjunt $\mathbb{Q}$, definim la relació: $x\Re y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \;/\; x = \dfrac{3y+m}{3}$.

    i) Demostreu que $\Re$ és una RBE en $\mathbb{Q}$.

    ii) Trobeu la classe d'equivalència de $2/3$.

64. Donades les relacions:

    i) "es pare de" en el conjunt H dels éssers humans.

    ii) "no és igual a" en el conjunt $\mathbb{Q}$.

    iii) "té la mateixa longitud que" en el conjunt S dels segments del pla.

    Justifiqueu quines són reflexives, simètriques i transitives.

65. i) Determineu el graf de la relació binària d'ordre parcial (RBOP) definida en el conjunt $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, el qual diagrama de Hasse és el de la fig 1.

    ii) Si $B = \{d, e, g\}$, trobeu els elements notables del subconjunt B de A.

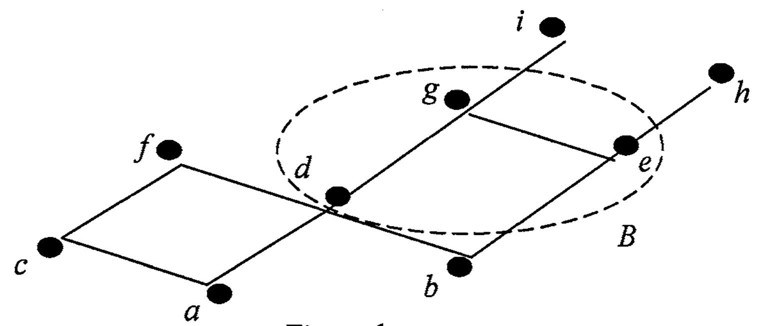


Figure 1

66. Si $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, considerem el producte cartesià $A \times A$ i definim la relació binària, $(a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$. Justifiqueu que és RBE i trobeu les classes d'equivalència.

67. En el conjunt $A = \{1,2,3,4,5\}$, considerem la relació $\Re$, el qual graf és: $G = \{(1,1),(1,4,),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(4,4),(5,5)\}$.

    i) Justifiqueu que $\Re$ és una RBOP.

    ii) Trobeu els elements notables dels subconjunts $B = \{1,3,5\}$, $C = \{1,3,4\}$, $D = \{1,2,3,4\}$.

68. En el conjunt $X = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x \in d(90)\}$, definim la relació binària "és divisor de" "$/$".

    i) Demostreu que és RBOP i dibuixeu el diagrama de Hasse.

    ii) Si $B = \{3,5,15\} \subset X$, trobeu els seus elements notables.

    iii) Trobeu els elements maximals i minimals de X.

iv) En el graf que representa el diagrama de Hasse, raoneu si és pla, poligonal, poligonal regular, eulerià, recorrible, hamiltonià. Acolereu el graf i el mapa si és possible. Trobeu el nombre d'arestes i comproveu, si és possible, la fórmula d'Euler.

69. En el conjunt universal $E = \{1, 2, 3, 4\}$, agafem el subconjunt $A = \{1, 4\} \subset E$.

i) Trobeu el conjunt $P(E)$.

ii) En $P(E)$ definim les relacions:

$$X\Re Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A, \quad X\Re' Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A, \ \forall X \in P(E), \ \forall Y \in P(E).$$

Demostreu que $\Re$ i $\Re'$ són RBE i trobeu les respectives classes d'equivalència.

70. Siga $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En el conjunt $P(A)$ definim la realció $\Re$:

$$X\Re Y \Leftrightarrow X = Y \text{ o be} \sum_{x \in X} x = \sum_{y \in Y} y \quad \text{i} \ card(X) = card(Y) + 1.$$

i) Estudieu quines propietats compleix la relació $\Re$.

ii) És $\Re$ una relació d'ordre?. Si no ho és, afegiu el menor nombre de fletxes a la relació $\Re$ de manera que s'obtinga una altra relació S que siga d'ordre. Doneu una regla que defineisca S.

iii) Dibuixeu el diagrama de Hasse de S i obtenir els seus elements notables.

71. En el conjunt $\mathbb{R}$, definim la relació:

$$a\Re b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + m = b.$$

i) Demostreu que $\Re$ és una RBO.

ii) Suposem $A \subset \mathbb{R}$, on $A = \left\{ x_i \ / \ x_i = \dfrac{i+1}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots \right\}$.

a) És A un conjunt acotat?.

b) Té extrem superior i extrem inferior?.

c) Té element màxim i mínim?.

72. En el conjunt dels punts del pla, dos punts $A(a, b)$ i $B(a', b')$ estan relacionats, si i sols si, la suma de distancies de A i de B a dos punts fixes $F(2, 0)$ i $F'(-2, 0)$ és la mateixa. És a dir:

$$A\Re B \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + b^2} = \sqrt{(a'-2)^2 + b'^2} + \sqrt{(a'+2)^2 + b'^2}.$$

i) Comproveu que $\Re$ és una RBE.

ii) Trobeu les classes d'equivalència.

iii) Trobeu el conjunt quocient.

73. Partició d'un nombre natural positiu m és tot conjunt de naturals positius, iguals o distints, tal que la suma d'aquests és m. Donat $m = 5$, en el conjunt de les seues particions, definim la següent relació:

$$P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow \textit{sumant elements de } P_1 \textit{ obtenim els de } P_2.$$

És a dir, els elements de P_2 podem subdividir-los fins obtenir els de P_1.

i) Dibuixeu el graf associat a la relació.

ii) Demostreu que és una RBO. Estudieu si és total.

iii) Dibuixeu el diagrama de Hasse i trobeu els elements maximals, minimals, màxim i mínim, en cas que existisquen.

iv) Considerant el graf no orientat associat al de Hasse, estudieu si és pla, eulerià i hamiltonià.

74. Donades dues particions d'un conjunt A, P_1 i P_2, es diu que P_1 és més fina que P_2 i se representa per $P_1 \leq P_2$, si cadascun dels elements de P_1 està contingut en algun element de P_2.

i) Verifiqueu que aquesta és una relació d'ordre en el conjunt de les particions d'un conjunt donat A. Comproveu si és d'ordre total.

ii) Si $A = \{1,2,3,4,5\}$, considereu el conjunt $B = \{P_i \ / \ 1 \leq i \leq 4\}$ de les següents particions:

P_1 : $\{1,2\},\{3,4,5\}$; $P_2 : \{1,2\},\{3,4\},\{5\}$; $P_3 : \{1\},\{2\},\{3,4,5\}$
P_4 : $\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}$; $P_5 : \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$; $P_6 : \{1,2,3,4,5\}$;
P_7 : $\{1,2\},\{3\},\{4,5\}$

d'on s'estableix la relació de refinament.

Dibuixeu el diagrama de Hasse de B i estudieu els seus elements maximals, minimals, màxim i mínim, cas d'haver-ne.

iii) Describiu i dibuixeu el diagrama de la relació d'equivalència a què dóna lloc les particions P_5, P_6 i P_7.

75. Considerem f una correspondència entre els conjunts X i Y tal que a un element $x \in X$ li correspón un altre element $y \in Y$ tal que $f(x) = y = x^2$.

En els següents casos, estudieu si f és aplicació i classifiqueu-la:

i) $X = Y = \mathbb{N}$.

ii) $X = \mathbb{N} - \{0\}$, $Y = \{y \in \mathbb{N} \ / \ y = n^2, \ n \in \mathbb{N}\}$.

iii) $X = \mathbb{N}$, $Y = \{y \in \mathbb{N} \ / \ y = n^2, \ n \in \mathbb{N}\}$.

iv) $X = \mathbb{Z} - \{0\}$, $Y = \mathbb{N}$.

v) $X = Y = \mathbb{Z}$.

vi) $X = Y = \mathbb{R}^+$.

vii) $X = \mathbb{R}^+$, $Y = \mathbb{R}$.

viii) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^+$.

ix) $X = Y = \mathbb{R}$.

x) $X = \mathbb{R}^-$, $Y = \mathbb{R}^+$.

76. Siga $E \neq \phi$ i $A \subset E$. S'anomena aplicació característica del subconjunt A a l'aplicació $f_A : E \to \{0,1\}$ tal que $\begin{cases} f_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ f_A(x) = 0 & \text{si } x \in \overline{A} \end{cases}$

Suposem $A, B \subset E$. Demostreu:

i) $f_A = f_B \Leftrightarrow A = B$.

ii) $f_E(x) = 1 \quad \forall x \in E$.

iii) $f_\phi(x) = 0 \quad \forall x \in E$.

iv) $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

v) $f_{E-A}(x) = 1 - f_A(x)$.

vi) $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$.

vii) $f_{A-B}(x) = f_A(x) \cdot f_{\overline{B}}(x) = f_A(x) \cdot f_{1-B}(x)$.

viii) $f_{A+B}(x) = f_A(x) + f_{\overline{B}}(x) - 2 \cdot f_A(x) \cdot f_B(x)$.

77. Suposem $E = \{a, b, c\}$. Si f i g són les aplicacions característiques definides per:

$$\begin{array}{ccc} f : E & \to & \{0,1\} \\ a & \rightsquigarrow & 0 \\ b & \rightsquigarrow & 1 \\ c & \rightsquigarrow & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} g : E & \to & \{0,1\} \\ a & \rightsquigarrow & 1 \\ b & \rightsquigarrow & 0 \\ c & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

i) Obteniu els subconjunts A i B de E les quals aplicacions característiques són f i g.

ii) Determineu les aplicacions $f+g$, $f \cdot g$, $\overline{f}$, $\overline{g}$, $\overline{f} + \overline{g}$, $\overline{f} \cdot \overline{g}$, $\overline{f+g}$, $\overline{f \cdot g}$. Què observeu?.

78. Siga $E \neq \phi$ i $A \subset E$. Siga f_A l'aplicació característica $f_A : E \to \{0,1\}$ tal que $\begin{cases} f_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ f_A(x) = 0 & \text{si } x \in \overline{A}. \end{cases}$

i) Classifiqueu f_A. A més a més, si $im\ f_A = \{0\}$, què podem deduir del conjunt A.?, què es pot deduir si $im\ f_A = \{1\}$?.

ii) Esbrineu en funció de f_A i de f_B l'aplicació característica $f_{A\cap B}$, on $A, B \subset E$.

iii) Suposem que $f_A(x) = 1,\ \ f_A(y) = 0,\ \ f_A(z) = 1$ amb $x, y, z \in E$.

a) Trobeu quins són els conjunts $\{x\} \cap \overline{A}$ i $\{x, y, z\} \cup A$.

b) Raoneu la veritat o falsetat de les següents expressions: $\{x\} \in A$, $\{x, y, z\} \subset A$, $x \in \overline{A}$, $\{\emptyset\} \in P(A)$.

79. De les següents aplicacions, estudieu quines són injectives i quines no:

i) $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow y = sen\ x \end{array}$ ii) $\begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow y = e^x \end{array}$ iii) $\begin{array}{c} \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow y = \dfrac{1}{x-1} \end{array}$

iv) $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow y = x^2 + 1 \end{array}$ v) $\begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \rightsquigarrow y = \sqrt{x} \end{array}$ vi) $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow y = cos\ x \end{array}$

80. Si $A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 3 \leq x \leq 5\}$, $B = \left\{y \in \mathbb{R}\ /\ \frac{2}{3} \leq y \leq 2\right\}$ i f la correspondència entre A i B, tal que $f(x) = y = 4 - \frac{2}{3}x$. Justifiqueu que f és una aplicació i en cas afirmatiu, classifiqueu-la. Escriviu la correspondència inversa de f i justifiqueu si és o no aplicació.

81. Donades les aplicacions:

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\ \ /\ \ f(x){=}x - 5. \qquad g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\ \ /\ \ g(x){=}x^2 + 5.$

i) Trobeu $f \circ g$ i $g \circ f$ si ambdues aplicacions existeixen.

ii) Classifiqueu $g \circ f$.

iii) Calculeu $(g \circ f)^{-1}(6)$.

iv) Existeix $x \in \mathbb{N}\ /\ (g \circ f)(x) = 0$?. Raoneu la resposta.

82. Siguen les aplicacions: $f : A \longrightarrow B,\quad g : C \longrightarrow D$.

Definim l'aplicació: $h : A \times C \longrightarrow B \times D\ \ /\ \ h(a, c) = (f(a), g(c))$.

Demostreu que h és bijectiva si, i sols si, f i g són bijectives.

83. Siguen les aplicacions $f, g, h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que:

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = \dot{2} \\ 1, \text{ si } x = \dot{2} + 1 \end{cases}$$

Trobeu: i) $f \circ g,\quad g \circ f,\quad g \circ h,\quad h \circ g,\quad f \circ (g \circ h),\quad (f \circ g) \circ h$.

ii) $f^2,\quad f^3,\quad g^2,\quad g^3,\quad h^2,\quad h^3,\quad h^{500}$.

84. Donada l'aplicació $f : A \longrightarrow A$.

i) Demostreu que si f és injectiva, f^2 també és injectiva.

ii) Si $A = \mathbb{Q}$ i $f(x) = \dfrac{x-1}{3}$, classifiqueu f i calculeu, si existeix, f^{-1}.

iii) Donada $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \;/\; g((x,y)) = 2x + \frac{y}{2}$. Calculeu $(f \circ g)^{-1}(\frac{2}{3})$.

85. Donades les següents aplicacions reals de variable real, determineu si són o no invertibles; si ho són, determineu la seva inversa.

    i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f = \{(x,y) \;/\; 2x + 3y = 7\}$.

    ii) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = y = x^3$.

    iii) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; h = \{(x,y) \;/\; ax + by = c,$ amb $b \neq 0\}$.

    iv) $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; j(x) = y = x^4 - x$.

    Nota: Una aplicació és invertible si la inversa és aplicació.

86. i) Trobeu la inversa de l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \;/\; f(x) = y = e^{2x+5}$.

    ii) Comproveu que $f \circ f^{-1} = I_{\mathbb{R}^+}, \quad f^{-1} \circ f = I_{\mathbb{R}}$.

    iii) Representeu f i f^{-1} en el mateix par d'eixos cartesians.

87. i) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = y = 5x + 3$, trobeu $f^{-1}(8)$.

    ii) Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = y = |x^2 + 3x + 1|$, trobeu $g^{-1}(1)$.

    iii) Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; h(x) = y = \left|\frac{x}{x+2}\right|$, trobeu $h^{-1}(4)$.

TEMA 5 : ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES. ELS NOMBRES SENCERS

88. Siga $*$ una llei de composició interna en E, i f, g, h, aplicacions bijectives d'E en E. Si definim en E la llei donada per $x \Box y = h(f(x) * g(y))$, demostreu que si $*$ verifica que tot element d'E és simplificable, aleshores també ho verifica la llei $\Box$. Passa el mateix respecte a l'existència d'element neutre?.

89. Es defineixen en $\mathbb{Q}$ les següents lleis de composició:

    $x * y = kxy + k'(x + y)$ on $k, k' \in \mathbb{Q}$.

    i) Estudieu l'assiociativitat d'aquestes lleis. ii) En el cas particular de $k = k' = 1$, trobeu, si existeix, l'element neutre, els elements regulars i els inversibles.

90. Estudieu si $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, donada per $f(x) = -5x$, és un homomorfisme i de quin tipus. Ho és de $(\mathbb{Z}, \cdot)$ en $(\mathbb{Z}, \cdot)$?.

91. Determineu quins dels següents conjunts amb la llei que s'indica té estructura de grup:

    i) $\{-1, 1\}$ amb la multiplicació.

    ii) $\{-1, 0, 1\}$ amb l'addició.

    iii) $\{10n \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$ amb l'addició.

92. Completeu la següent taula de Cayley per a que $(A,*)$ tinga estructura de grup, on $A = \{a,b,c,d\}$. Trobeu tots els subgrups de A.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	
b		a		
c			a	
d				a

93. Resoleu les següents equacions en un grup multiplicatiu $(G,\cdot)$:

i) $axbcx = abx$.

ii) $ax^2bc = axc$.

iii) $axb^2xax = (bx)^2$ (en aquest cas, G és commutatiu).

94. Donada $x * y = ax + by + c$ en $\mathbb{Z}$, trobeu a, b, c de forma que $(\mathbb{Z}, *)$ tinga estructura de grup.

95. Siga $G = \{1,3,5,7,9\}$. Definim la llei $a * b = c$, on c és la xifra de les unitats de $a \cdot b$.

i) Trobeu la taula de Cayley. ii) És grup $(G,*)$?. iii) Trobeu un subgrup de G. És cíclic?.

96. Calculeu en $\sum_6$ les permutacions $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^{-1}, β^{-1}, $(\alpha\beta)^{-1}$, on

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ i $\beta = (2\ 3\ 5)\,(4\ 6)$.

97. Donat $(G,\cdot)$ un grup, demostreu que $Z(G) = \{x \in G \;/\; xg = gx \quad \forall g \in G\}$ és un subgrup de G. (S'anomena centre de G).

98. Siguen $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ i $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ donada per $f(x) = x^2$.

i) Demostreu que f és un endomorfisme.

ii) Trobeu $Ker(f)$, i $Im(f)$.

iii) Trobeu el grup quocient $\mathbb{R}^+/Ker(f)$ i la descomposició canònica de f.

99. Estudieu i construïu la taula multiplicativa de tots els possibles grups d'ordre 4.

100. Siga $(\mathbb{Z},+)$ el grup additiu dels nombres sencers. Calculeu el subgrup generat per l'element 1.

101. Donat $(G,\cdot)$ un grup, estudieu si són certes o falses les següents afirmacions.

i) $\forall a \in G$, $\exists a' \in G \;/\; a \cdot a' \cdot a = 1_G$.

ii) $\exists!\; a \in G \;/\; a \cdot a = a$.

iii) L'aplicació $f : G \to G$ definida per $f(a) = a^{-1}$, és bijectiva.

iv) L'equació $x \cdot x \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot x = 1_G$ té un màxim de n solucions.

102. Proveu que si tots els elements d'un grup són d'ordre dos, aleshores el grup és commutatiu.

103. En el conjunt $\mathbb{Z}$, definim les operacions: $a * b = a + b - 1, \quad a \sharp b = a + b - ab.$

Demostreu que $(\mathbb{Z}, *, \sharp)$ és un domini d'integritat.

104. Siga $(A, +, \cdot)$ un anell unitari. Proveu que el conjunt dels elements de A que tenen simètric respecte de la segona llei, té estructura de grup. (Es coneix amb el nom de grup de les unitats de A). Quin és el grup de les unitats d'un cos?.

105. Siga $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i les següents operacions:

$a * b = xifra\ de\ les\ unitats\ de\ la\ suma\ a + b.$

$a \sharp b = xifra\ de\ les\ unitats\ del\ producte\ a \cdot b.$

i) Demostreu que $(A, *, \sharp)$ és un anell commutatiu unitari.

ii) Trobeu, si existeixen, divisors de zero, idempotents, nilpotents i el grup de les unitats.

106. Un home vol comprar en 36 euros tres classes d'aus. Mirlos, tres per un euro, gallines a 2 euros la peça i pollastres a 3 euros la peça. En vol 36 aus. Quantes peçes ha de comprar de cada classe?

107. Entre automòbils, tricicles i motocicletes hi ha 100 vehicles. El nombre de rodes és 323. Quants vehicles hi ha de cada classe?

108. Trobeu dos números x i y tals que $mcd(x, y) = 18$ i que la successió de quocients que s'obtenen a l'aplicar l'Algoritme d'Euclides és 11, 5, 1, 1, 1, 2.

109. Trobeu el màxim comú divisor de 3.000 i 1404. Escriviu la identitat de Bezout.

110. Resol les equacions diofàntiques: i) $37x + 23y = 10$ ii) $966x + 686y = 70$.

111. Trobeu totes les solucions senceres de l'equació $x^2 - y^2 = 32$.

112. Trobeu dos números a i b tals que a te 21 divisors, b te 10 divisors i $mcd(a, b) = 12$.

113. Quantes vegades cal multiplicar per 30 el número 396 per obtenir el mínim comú múltiple de quatrecents noventa números sencers distints?

114. Trobeu tots els números sencers x que no continguen altres factors primers que 2 i 3 i tals que el número de divisors de x^2 siga el triple que els de x.

115. Trobeu dos números tals que el *mcm* siga 420 i la suma 95.

116. Si el *mcm* de dos números és 297 i la suma dels quadrats és 10.530, trobeu-los.

117. Trobeu el major mòdul respecte del qual els números 28, 52 i 88 són congruents.

118. i) Determineu el residu de la divisió de 10^{1977} per 14. ii) Idem per a la divisió de 1986^{2061} per 7.

119. Determineu les xifres x i y per què el número $n = \underline{7}\ \underline{x}\ \underline{1}\ \underline{y}\ \underline{4}$ siga divisible per 11 i per 101.

120. Demostreu que tot número de la forma $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}$ és divisible per 1001.

TEMA 6 : *SISTEMES DE NUMERACIÓ, RECURRÈNCIA, COMBINATÒRIA*

121. Trobeu el menor número natural n de quatre xifres tal que $n \in [13]$ en $\mathbb{Z}/17$ i $n \in [5]$ en $\mathbb{Z}/12$.

122. Resoleu el següent sistema en $\mathbb{Z}/13$:
$$\left.\begin{array}{r} 2x + 8y = 11 \\ 5x + 6y = 8 \end{array}\right\}$$

123. Resoleu en $\mathbb{Z}/7$ l'equació $5x^2 + x + 1 = 0$.

124. Demostreu que:
   i) Si $a \equiv b(m)$ i d/m, aleshores $a \equiv b(d)$.
   ii) Si $a \equiv b(r)$ i $a \equiv b(s)$, aleshores $a \equiv b(m)$ on $m = mcm(r, s)$.

125. Resoleu les congruències lineals:
   i) $25x + 9 \equiv 29x - 8(7)$.
   ii) $222x \equiv 12(18)$.

126. i) Construïu les taules de sumar i de multiplicar per a $\mathbb{Z}/5$.
   ii) Resoleu l'equació de congruència $3x + 1 \equiv 4(5)$.

127. Trobeu els cinq primers sencers positius que contenen un sols factor primer, són múltiples de 1024, quadrats perfectes i congruents respecte del mòdul 448.

128. Un partit de tennis entre Carlos i Diego s'ha acabat amb el resultat de 3 a 2 a favor de Carlos. De quantes maneres es pot haver obtés aquest resultat?

129. Si tenim set llibres blaus, cinc negres i tres blancs. De quantes maneres diferents es poden alinear en una llibreria si s'han de col·locar junts aquells que tinguen el mateix color? (Suposem que els llibres són distints).

130. Resoleu els sistema d'equacions en m i n :

$$\frac{V_{m,n+2}}{V_{m,n}} = 20 \quad \text{i} \quad V_{m,2} = 110.$$

131. Trobeu el valor de m sabent que se verifica: $V_{m,2} = C_{m,2} + 820$.

132. Un club de senderisme te 27 membres, dels quals 15 són dones i 12 homes. Se crea un comité de 4 persones per estudiar les activitats del proper any. Quants comités distints es poden formar amb dues dones? I al menys amb dues dones?

133. De quantes formes distintes es poden acertar nou resultats en una quiniela de futbol de 15 resultats?

134. Un banc ha d'elegir 5 càrrecs directius: director, subdirector, interventor, tresorer i gerent, entre 8 persones, de les quals 3 són homes $\{A, E, O\}$ i 5 són dones $\{X, Y, Z, V, W\}$. Trobeu de quantes formes es pot fer la elecció si:

a) Els homes A i E no poden estar junts en la mateixa elecció.

b) Entren els tres homes.

c) Entren tres dones i dos homes.

d) Entren al menys tres dones.

135. Trobeu el nombre de successions que es poden formar amb 3 aes, 5 bes i 8 ces. I si no pot haver dos bes consecutives? I si no hi ha dos iguals consecutives?

136. Trobeu la solució de l'equació de recurrència:

$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3sen(\frac{n\pi}{6})$, amb les condicions en frontera: $a_0 = 2$, $a_1 = -1$.

Una vegada encontrada la solució general, trobeu els termes a_3 i a_5.

137. Trobeu les solucions dels següents sistemes de relacions de recurrència.

a) $\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = -2a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 6b_n \end{array}\right\} n \geq 0,\ a_0 = 1,\ b_0 = 0.$

b) $\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1 \end{array}\right\} n \geq 0,\ a_0 = 0,\ b_0 = 1.$

138. Demostreu que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}\right)\binom{2n+2}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)\binom{2n}{n} \qquad \forall n \geq 0.$$

139. Resoleu les equacions de recurrència lineal:

a) $9a_{n+2} + 12a_{n+1} + 4a_n = 0, n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 4.$

b) $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}\ n \geq 3, a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 7.$

c) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n,\ n \geq 0, a_0 = 3.$

d) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n,\ n \geq 0, a_0 = 1.$

140. Trobeu una equació de recurrència per al nombre de cadenes binàries (de zeros i uns) de longitud n que continguen dos zeros consecutius. Resoleu aquesta equació.

141. Un jove disposa de n monedes per comprar llepolies. Li agraden les palometes, que costen una moneda cada bolsa i dos tipus de pastissos que costen 2 monedes cadascun. De quantes maneres pot gastar-se les n monedes?

142. Trobeu el nombre de llistes de longitud n formades amb elements del conjunt $\{0, 1, 2\}$ en les que no apareguen dos zeros consecutius.

TEMA 7 : GRAFS

143. És bipartit el graf de la figura 2?

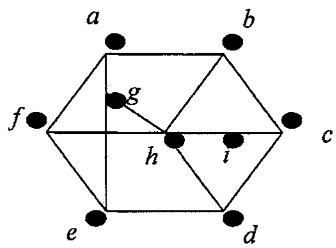


Figure 2

144. De les següents parelles de grafs, quins són isomorfs? Figures 3.1, 3.2, 3.3.

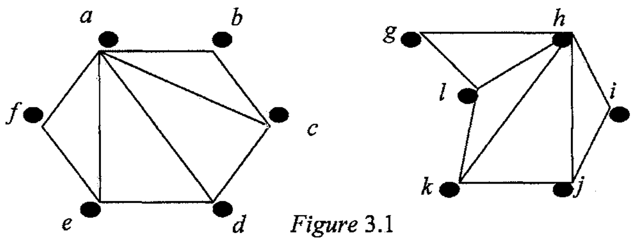


Figure 3.1

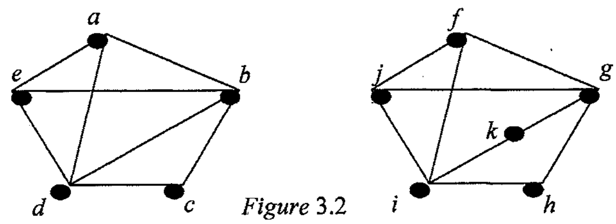


Figure 3.2

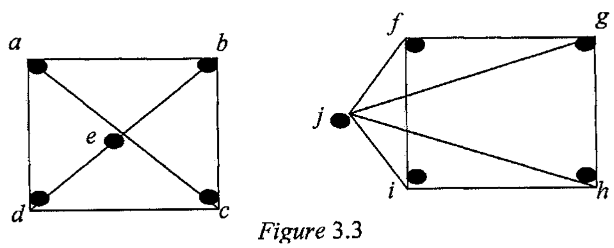


Figure 3.3

145. Quins dels següents grafs de la figura 4 es poden dibuixar sense alçar el llapis del paper.

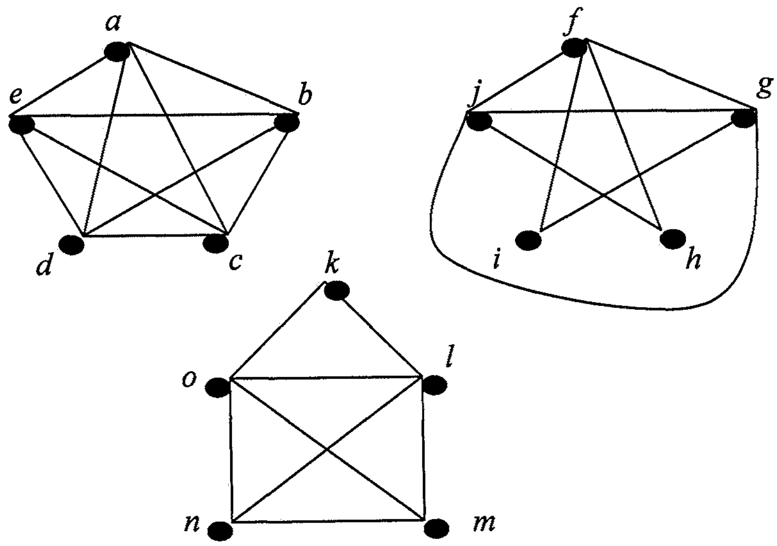


Figure 4

146. La figura 5 representa sis habitacions (1,2,3,4,5,6) i un pasadis (7), comunicats amb 9 portes. És possible un trajecte pel qual es pase una i sols una vegada per cada porta?

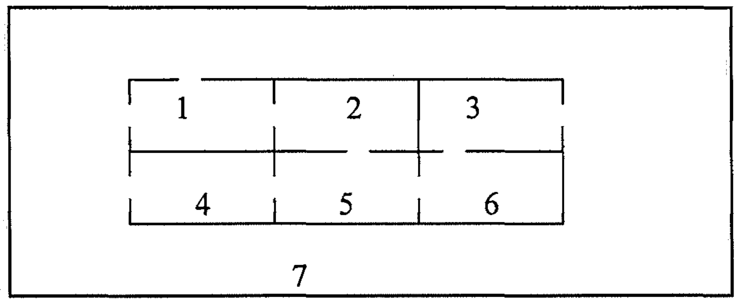


Figure 5

147. Trobeu el camí més curt entre els vèrtexs v i w del graf pesat representat en les figures 6 i 7.

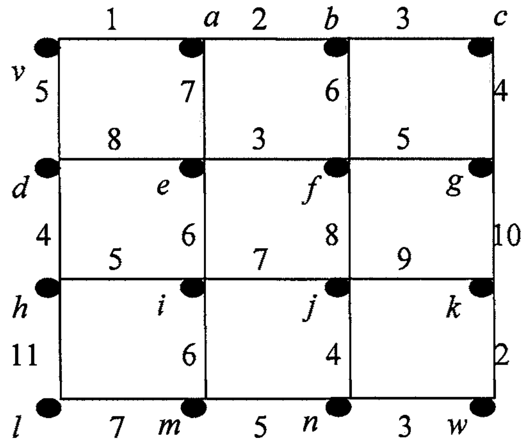


Figure 6

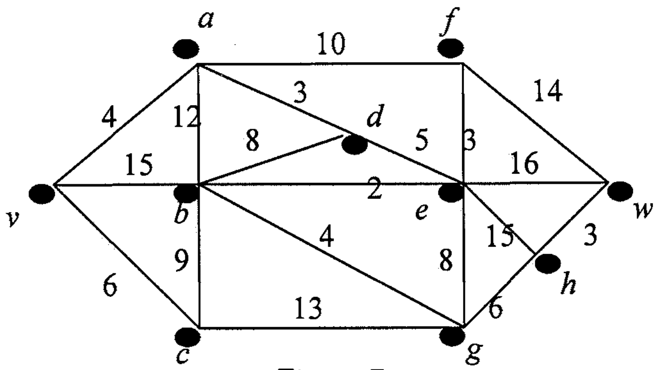


Figure 7

148. Els vèrtexs del graf de la figura 8 representen ciutats i els nombres de les arestes el cost de construcció de la carretera corresponent. Determineu un sistema de camins de menor cost que conecte totes les ciutats. És única aquesta solució?

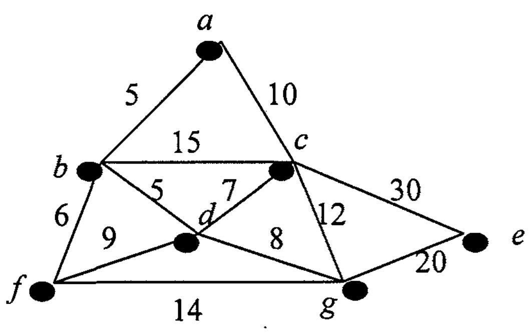


Figure 8

149. Determineu si els grafs de la figura 9 són plans. En cas afirmatiu, dibuixar-los de nou de tal forma que les seues arestes no es creuen. En cas contrari, trobeu un subgraf homeomorf a K_5 o be a $k_{3,3}$.

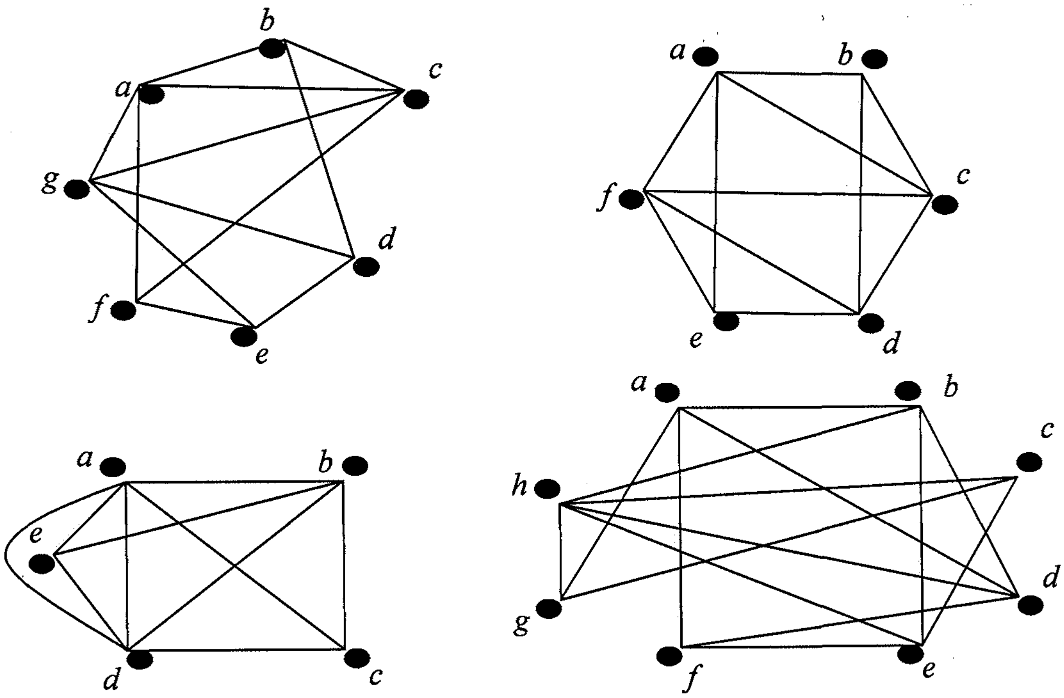


Figure 9

150. Determineu el dual de mapa que representa la figura 10.

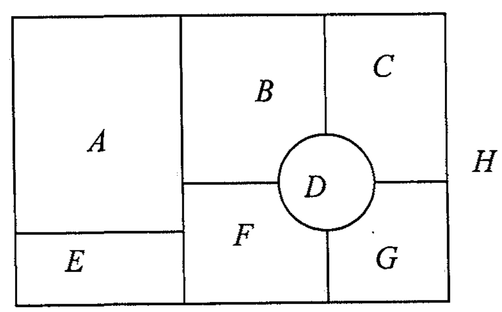


Figure 10

151. Trobeu els arbres generadors minimals que s'obtinguen a l'aplicar l'algoritme de Prim als grafs de la figura 11.

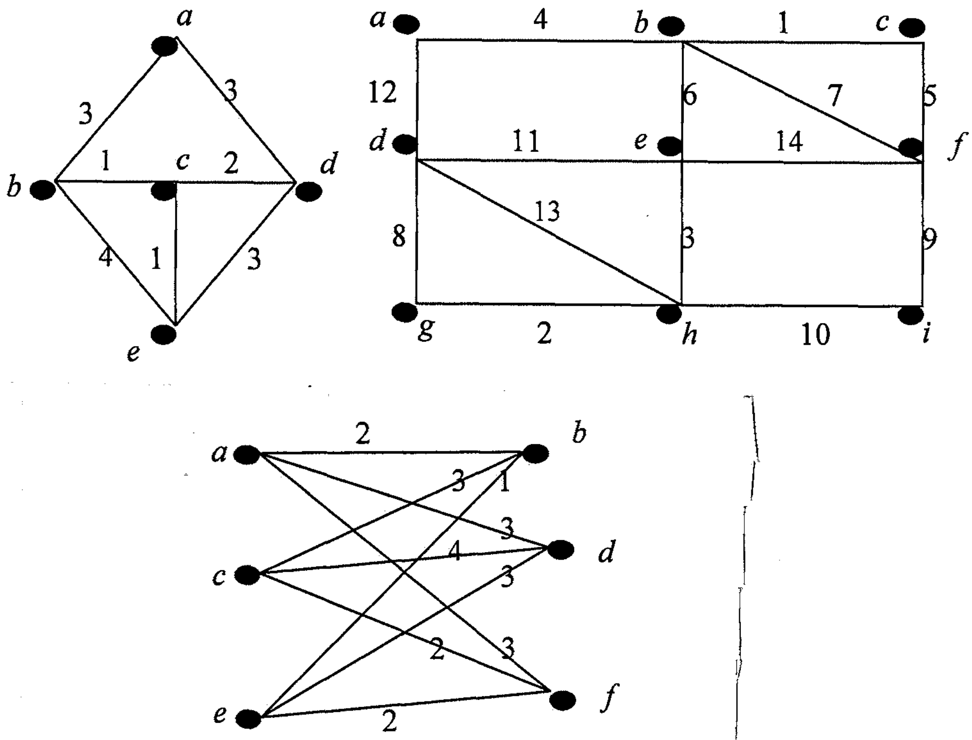


Figure 11

152. Determineu si són o no plans els grafs que representa la figura 12. En el cas pla, dibuixeu de bell nou el graf sense que s'hi creuen les arestes i verifiqueu el teorema d'Euler. En el cas no pla, proveu que el graf és homeomorf a k_5 o $k_{3,3}$.

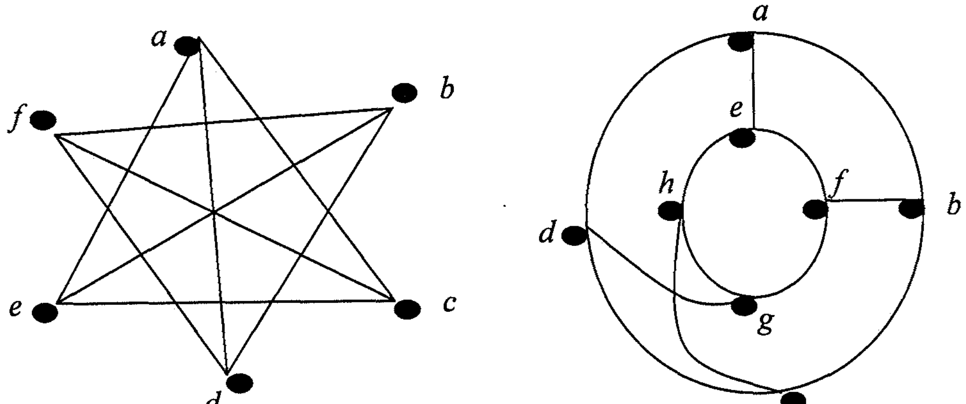


Figure 12

153. Dibuixeu, si és possible, una representació plana de cada graf de la figura 13. Dibuixeu el graf dual dels grafs plans.

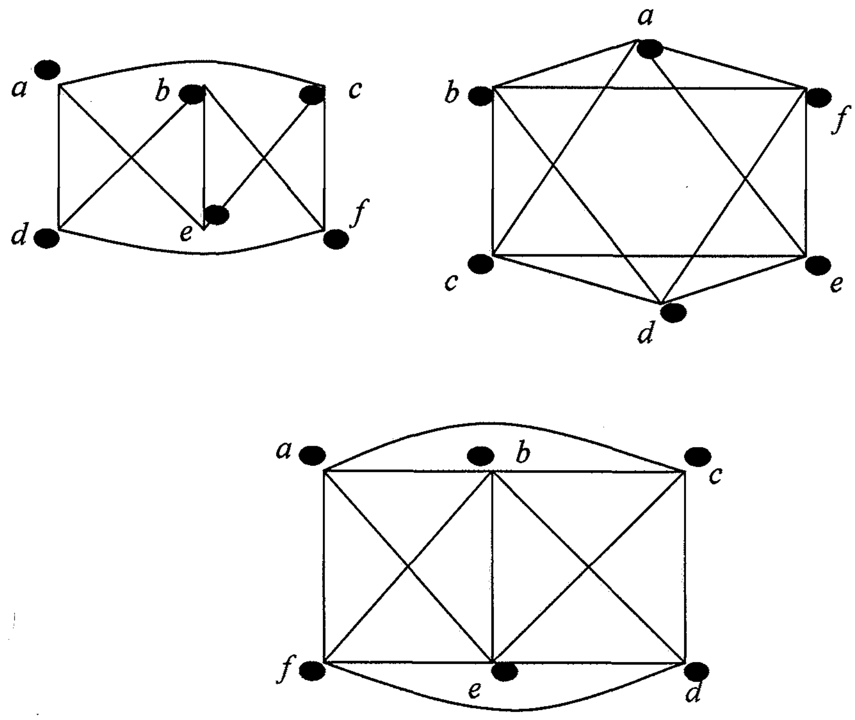


Figure 13

154. Considerem el graf de la figura 14. i) Trobeu els subgrafs obtesos en eliminar cadascun dels vèrtexs. ii) Són conexes, aquests subgrafs? iii) Tenen vèrtexs que siguen punts de tall?

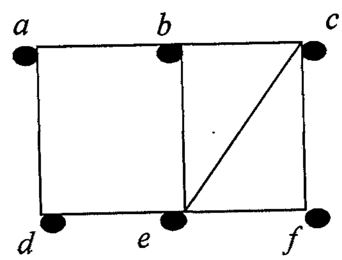


Figure 14

155. Siga la família de conjunts:

$\Omega = \{\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\} \subset P(A)$, on $A = \{1,2,3,4\}$.

En Ω considerem la relació d'inclusió $\subset$ tal que $(\Omega, \subset)$ és parcialment ordenat.

i) Dibuixeu el diagrama de Hasse.

ii) El graf que representa el diagrama anterior: És pla?

iii) Estudieu si aquest graf és eulerià, recorrible o hamiltonià.

iv) És possible aplicar la fórmula d'Euler? Raoneu la resposta.

TEMA 8 : ESPAIS VECTORIALS I APLICACIONS LINEALS

156. Si $\mathbb{R}_3[x]$ és l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual que 3 amb coeficients reals.

Si $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ és la base canònica. Si V és el subespai vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ definit per $V = \langle x^2 + 2x, -x^2 + x, x^2 + x\rangle$. Si W és el subespai de $\mathbb{R}_3[x]$, les equacions del qual en implícites i en la base B són $W = \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Si T és el subespai de $\mathbb{R}_3[x]$ d'equacions paramètriques $T = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \mu + \lambda \end{cases}$ on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Calculeu:

i) $V \cap W$.

ii) $V + W$.

iii) Són V i W suplementaris?

iv) Una base de $W \cap T$.

v) Unes equacions implícites de $V + T$.

157. Siga $\mathbb{R}_3[x]$ un $\mathbb{R}$-espai vectorial dels polinomis en una indeterminada x amb coeficients en $\mathbb{R}$, de grau menor o igual que 3.

Es considera el polinomi:

$$p(x) = ax^3 + bx^3 + cx + d \qquad \text{amb } a \neq 0.$$

i) Demostreu que els polinomis $p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)$ constitueixen una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

ii) Si , $p(x) = 5x^3 + 3x^3 - 2x + 1$, trobeu les coordenades del vector $q(x) = 15x^3 - 21x^3 - 18x + 37$ en la base $B = \{p(x),\ p'(x),\ p''(x),\ p'''(x)\}$.

158. En l'espai vectorial real $\mathbb{R}^3$ es consideren els subespacis vectorials:

$$W_1 = \{(x,y,z)/x+y+z=0\} \qquad W_2 = \{(t,2t,3t)/t \in \mathbb{R}\}.$$

Demostreu que $\mathbb{R}^3$ és suma directa de W_1 i W_2, és a dir, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

159. Determineu una base per a la suma i la intersecció dels subespais:

$$V_1 = \langle(1,2,1,0),(-1,1,1,1)\rangle \quad \text{i} \quad V_2 = \langle(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)\rangle.$$

160. Si $B = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$és una base del $\mathbb{R}$-espai vectorial V. Si consideren els conjunts

$$B' = \{v_1,v_2,v_3,v_4\} \text{ i } B'' = \{w_1,w_2,w_3,w_4\} \quad \text{on:}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2 + 3u_4 & w_1 &= 2u_1 - 2u_2 + u_4 \\ v_2 &= -u_1 + u_2 & w_2 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ v_3 &= -2u_1 - u_3 + 2u_4 & w_3 &= 3u_1 + u_3 - u_4 \\ v_4 &= -u_1 - u_2 - u_3 + u_4 & w_4 &= -2u_2 - u_3 + u_4 \end{aligned}$$

i) Proveu que B' i B''són bases de V.

ii) Trobeu la matriu del canvi de base de B'a B''.

iii) Determineu les coordenades respecte de B'del vector x, les coordenades del qual respecte deB'' són $(2,1,0,-1)$.

161. Si V és un $\mathbb{R}$-e.v. i $B = \{e_1,e_2,e_3\}$ una de les bases.

Si $C = \{u_1,u_2,u_3\}$ tal que, $u_1 = 2e_1 + e_3$, $u_2 = 3e_3$, $u_3 = e_2 - e_3$.

i) Demostreu que C és una base de V .

ii) Trobeu les equacions del canvi de base de B a C.

iii) Trobeu les equacions del canvi de base de B^* a C^*.

iv) Obteniu les coordenades de $3e_1^* + e_2^* - e_2^*$ respecte de la base C^*.

162. En $\mathbb{R}^3$ es consideren els subespais:

$$U = \langle(1,0,1)\rangle, \qquad V = \langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle, \qquad W = \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle.$$

i) Estudieu si U i V són subespais suplementaris. Ídem per a U i W i per a V i W.

ii) Expresseu, si és possible, $(2,1,2)$ com a suma d'un vector de U i un altre de V . És única la descomposició?

iii) Expresseu, si és possible, $(3,0,3)$ com a suma d'un vector de U i un altre de W. És única la descomposició?

163. Siga $W \leq \mathbb{R}^3$ tal que $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ on

$$v_1 = (1,1,-1), \qquad v_2 = (3,8,2), \qquad v_3 = (0,-3-,3), \qquad v_4 = (-2,-2,2).$$

i) Trobeu una base de W.

ii) Proveu que $(3,-17,-23) \in W$ i trobeu les coordenades d'aquest vector en la base de W obtinguda.

iii) Trobeu un subespai V de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = W \oplus V$.

iv) Si $u = (2,7,12)$, escriviu $u = w + v$ amb $w \in W$ i $v \in V$.

164. En l'espai vectorial real $\mathbb{R}^4$ es considera el subespai vectorial V generat pels vectors:

$$v_1 = (1,-1,0,0), \qquad v_2 = (1,1,1,1), \qquad v_3 = (1,0,0,0).$$

i) Trobeu la dimensió i una base del subespai vectorial . Trobeu el valor de per tal que el vector pertanya a .

ii) Trobeu la dimensió i una base del subespai vectorial V d'equacions: $x = y = z + t$.

iii) Determineu $V \cap W$. Trobeu la dimensió d'aquest subespai i doneu una base. Quina és la dimensió de $V + W$?

165. Si considerem $A = \mathbb{R}_2[x]$ i $C = \mathbb{R}_2[x]$ on $\mathbb{R}_2[x]$ és l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual que dos.

Si $f : A \to C$ és l'homomorfisme definit per:

a) Els polinomis $p(x)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ sense terme independent són invariants.

b) El nucli de f és el subespai dels polinomis de $\mathbb{R}_2[x]$ que tenen els tres coeficients iguals.

i) Trobeu la matriu de l'homomorfisme f en la base canònica de $\mathbb{R}_2[x]$, $B = \{1, x, x^2\}$.

ii) Trobeu una base del subespai transformat del subespai d'equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = \lambda - 2\mu + \rho \\ y = \lambda - 2\mu - \rho \\ z = \lambda - 2\mu \end{cases}$$

iii) Trobeu la matriu de l'homomorfisme f en considerar en A la base $B' = \{1 + x + x^2, 1 + x, 1\}$ i en C la base canònica $B = \{1, x, x^2\}$.

166. Si $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ és base de l'e.v. E , $B' = \{s_1, s_2\}$ és base de l' i e.v. F i $B'' = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ és base de l'e.v. G.

Considerem els homomorfismes $f : E \to F$ i $g : F \to G$ definits de forma que:

$$f(e_1) = 4s_1 + s_2, \qquad f(e_2) = 2s_1, \qquad f(e_3) = s_1 + 2s_2, \qquad f(e_4) = s_1 + s_2.$$

$$g(s_1) = c_1 + 2c_2 + c_3 \qquad\qquad g(s_2) = c_2 + c_3 + c_4.$$

167. i) Obtenir el transformat del vector $u = (-1, 2, 1, -1)$ respecte de la base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ mitjançant l'homomorfisme $h = g \circ f$. Estudieu si és un monomorfisme.

ii) Trobeu unes equacions implícites del nucli i de la imatge de h respecte de les bases donades. Obtenir també una base per al nucli i una altra per a la imatge de h.

168. Se considera l'homomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donat per:

$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = e_2 - e_1, \quad f(e_3) = e_3$, sent la $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

Trobeu la descomposició canònica de f.

169. Si considerem els espais vectorials E, F i G, on $E = \mathbb{R}[x]$ és el conjunt dels polinomis de grau menor o igual que 1 , F les matrius simètriques d'ordre 2 i $G = \mathbb{R}^3$.

Definim les aplicacions lineals $f : E \to F$ i $g : F \to G$ de la forma:

$$f(ax + b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} m & n \\ n & p \end{pmatrix} = (m, p, m + p).$$

Si B, B', B'', són les bases canòniques de E, F i G, respectivament.

i) Trobeu les matrius dels homomorfismes f, g i $g \circ f$ en les bases canòniques.

ii) Trobeu el subespai transformat per $g \circ f$ del subespai $V \subset E$ sent el subespai $V = \{ax + a \ / \ a \in \mathbb{R}\}$.

iii) Si en F utilitzem la base $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, trobeu les matrius de f, g i $g \circ f$ en les bases B, C i B''.

170. En l'espai vectorial real $\mathbb{R}^3$ es consideren les formes lineals:

$f_1(x, y, z) = x + y + z, \quad f_2(x, y, z) = x + y, \quad f_3(x, y, z) = -x + z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

i) Demostreu que són independents.

ii) Trobeu la base B de $\mathbb{R}^3$respecte de la qual $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ és dual.

171. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per: $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$.

Trobeu la matriu de l'aplicació respecte a les bases:

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, -1)\} \qquad B_2 = \{(2, 1), (1, 0)\}.$$

172. Suposem $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme i A la seua matriu referida a les bases canòniques:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}.$$

i) Discutiu per a quins valors del paràmetre a, f és un automorfisme.

ii) Trobeu els subespais nucli i imatge.

173. Siga $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$definida per: $f(x,y) = (x+y, 2x+2y, 3x+3y)$. Trobeu:

i) Equacions del subespai imatge.

ii) Equacions del subespai nucli.

iii) Raoneu si el vector $(3,2,1)$ és del nucli.

174. Siga l'aplicació lineal:

$f(1,1,2,1) = (2,0)$, $f(0,2,1,1) = (0,1)$, $f(0,0,2,1) = (1,-1)$, $f(0,0,0,2) = (2,2)$.

i) Classifiqueu-la i estudieu si el vector $x = (-2,0,2,1) \in Ker(f)$.

ii) Trobeu la matriu associada a f respecte a les bases canòniques.

175. Siga $\mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igualque 2 sobre $\mathbb{R}$.

Siga $B = \{1, x, x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Siga f l'aplicació de $\mathbb{R}_2[x]$ en $\mathbb{R}_2[x]$. definida de la següent manera:

Si $P(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ / $P(x) = ax^2 + bx + c$, Aleshores $f(P(x)) = cx^2 + bx + a$.

a) Demostreu que l'aplicació f és lineal. Trobeu la matriu A, matriu de l'aplicació f en la base B. Trobeu A^2.

b) Calculeu $ker(f)$ i la seua dimensió. Calculeu la imatge de t i la seua dimensió.

c) Considerem la base $B' = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$. Trobeu la matriu A', matriu de f en la nova base B'.

TEMA 9 : MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

176. Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

i) Proveu que M és regular i trobeu M^{-1}.

ii) Si $A = I - M$, trobeu A^2.

iii) Determineu k per què $A^2 = kA$.

iv) Deduïu l'expressió A^n, $n \in \mathbb{N}$.

v) Trobeu $\lim\limits_{n \to \infty} B_n = B$ sent $B_n = I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$.

vi) Indiqueu la relació existent entre B i M^{-1}.

177. i) Demostreu que si A és una matriu tal que $A^3-9A^2+24A-18I=0$, existeix inversa de A.

ii) Si, $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, trobeu la inversa per dos procediments.

178. Si $M_{n\times n}$ és el conjunt de les matrius quadrades de dimensió n amb coeficients reals, ens demanen:

i) Demostreu que les matrius simètriques S, (antisimètriques A) són subespais vectorials de $M_{n\times n}$.

ii) Demostreu que $M_{n\times n}=S\oplus A$.

iii) Trobeu la dimensió i una base de S i A.

iv) Descomposeu la matriu $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ en suma d'una matriu simètrica i una altra antisimètrica.

179. Siguen els subespais vectorials:

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\} \qquad V_2=\left\{\begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix}, c,d,e\in\mathbb{R}\right\}.$$

Obtenir una base i trobeu la dimensió dels subespais V_1, V_2, $V_1\cap V_2$, V_1+V_2.

180. Discutiu i resoleu-ho quan siga compatible el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-ay+3z=4 \\ 3x-3y+4z=7 \\ 5x-(a+b)y+7z=8+b \end{cases}$$

181. Estudieu la compatibilitat del sistema, segons els distints valors dels paràmetres a, b, c.

$$\begin{cases} ax+by+z=c \\ x+ay+bz=0 \\ ax+by+az=c \end{cases}$$

182. Donat el sistema:

$$\begin{cases} x+3y-az=4 \\ -ax+y+az=0 \\ -x+2ay=a+2 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$$

Ens demanen:

i) Discutiu-lo segons els valors del paràmetre .

ii) Resoleu-lo quan siga compatible.

183. Obteniu el valor del determinant:

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

184. Resoleu les equacions:

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

185. Trobeu el valor del número natural n tal que:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 \\ n & n^2 & n^3 & 1 \\ n^2 & n^3 & 1 & n \\ n^3 & 1 & n & n^2 \end{vmatrix} = 80^3$$

186. Siga f una aplicació lineal entre $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$ definida per :

$f(e_1) = u_1 - u_2, \quad f(e_2) = u_3, \quad f(e_3) = u_1, \quad f(e) = -u_2 + u_3$

Sent $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ i $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

i) Trobeu la matriu de l'aplicació lineal.

ii) Trobeu el nucli i la imatge de f.

iii) Indiqueu una base del nucli i una altra de la imatge de f.

iv) És injectiva? És suprajectiva?

187. Donada l'aplicació lineal, $f(x,y,z) = (x+y, x+z, y-z)$. Ens demanen:

i) Trobeu el nucli, la imatge, unes bases i dimensions.

ii) Si $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ és la matriu, en les bases canòniques, d'una certa aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Trobeu la matriu de g en les bases:

$\{(-1,0,1), (1,1,1), (1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{(1,0), (1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

iii) Trobeu l'expressió de l'aplicació lineal $g \circ f$ (composició).

TEMA 10 : AUTOVALORS. DIAGONALITZACIÓ DE MATRIUS

188. Si V és un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensió 3 i $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V.

Si $f \in End(V)$ tal que la seua matriu respecte d'aquesta base és:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$ Trobeu els autovalors i els autovectors de f.

189. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trobeu una matriu ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ siga diagonal.

190. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Trobeu els autovalors i comproveu que és diagonalitzable.

ii) Trobeu la matriu de pas que la diagonalitza.

ii) Obteniu l'expressió A^n.

191. Si $f \in End(\mathbb{R}^3)$ està definit per la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ respecte de la base B, on $B = \{(0,0,1), (0,1,1), (-1,0,1)\}$

i) Diagonalitzeu la matriu A.

ii) Trobeu la matriu del canvi de base.

192. Siga la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$, $a \geq 0$.

i) Trobeu els autovalors de la matriu A.

ii) Estudieu la possible diagonalització de la matriu A.

iii) Trobeu els autovectors, la matriu de pas i la matriu diagonal per a $a = 4$.

193. Si $f \in End(\mathbb{R}^3)$. Considerem la base canònica de $\mathbb{R}^3$, i f tal que:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ -x_1 + x_2 + 4x_3) .$$

Trobeu la potència enèsima de la matriu de l'endomorfisme f.

194. Per a la matriu A, trobeu els valors propis i una base per a cada espai propi:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalitzeu la matriu A, obtenir la forma canònica de la forma quadràtica associada i classificar-la.

195. Estudieu per a quins valors dels paràmetres a i b és diagonalitzable (per semblança) la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

TEMA 11 : *FORMES BILINEALS I QUADRÀTIQUES*

196. Es considera la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$definida per:

$$f(x,y) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3$$

sent $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\quad y = (y_1, y_2, y_3)$. Ens demanen:

i) Expressió matricial de f.

ii) Rang i nucli de la forma.

iii) En $\mathbb{R}^3$ es considera el canvi de base

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x'_2 = -x_1 - x_3 \\ x'_3 = -x_2 - x_3 \end{cases}$$

sent (x'_1, x'_2, x'_3) les coordenades d'un vector en certa base B.

Trobeu l'expressió matricial de la forma quadràtica q associada a f en la base B.

197. Es considera en $\mathbb{R}^3$ la família de formes quadràtiques:

$q_a(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3$, $\quad a \in \mathbb{R}$. Ens demanen:

i) Matriu A associada a q_a en la base canònica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

ii) Determineu els valors deλ i μ reals tals que

$C = \{e_1,\ e_1 + \lambda e_2,\ -4ae_1 + ae_2 + \mu e_3\}$ $\quad a \neq 0$ siga una base de vectors conjugats.

iii) Trobeu una matriu P regular tal que la matriu P^tAP siga diagonal.

iv) Determineu els valors de a per als quals q_a és definida positiva i per als que siga semidefinida positiva.

v) Trobeu la dimensió del subespai conjugat de $V = \langle -4ae_1 + ae_2 + \mu e_3 \rangle$ per als distints valors del paràmetre a.

vi) Per a $a = 1$, diagonalitzeu la forma quadràtica pel mètode de Gauss.

198. Diagonalitzeu i classifiqueu les següents formes quadràtiques:

i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$.

ii) $f(x,y,z) = x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

iii) $f(x,y,z) = 3y^2 + 2xz$.

iv) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$.

199. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Estudieu la possible diagonalització per als distints valors del paràmetre a.

ii) Per a $a = -1$, classificar la forma quadràtica associada a la matriu A.

200. Considereu la forma quadràtica q sobre $\mathbb{R}^3$donada per $q(x,y,z) = xy - yz$.

i) Comproveu que efectivament q és una forma quadràtica.

ii) Busqueu una base en la qual la matriu de q siga diagonal i doneu l'expressió de q en la base anterior.

iii) Obteniu la matriu de q en la base canònica i classifiqueu q.

iv) Doneu la relació entre les matrius obtingudes en els apartats ii) i iii).

201. Considerem l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la qual matriu en les bases canòniques és:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) És diagonalitzable? Trobeu la matriu del canvi de base per què aquest endomorfisme diagonalitze.

b) És ortogonal la matriu del canvi?

202. Donada la matriu: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & m \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu els autovalors i estudieu els cassos en què és diagonalitzable.

b) En aquests cassos trobeu la matriu de pas.

c) Definiu un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ la qual matriu associada respecte a la base canònica siga A.

d) Per a $m = 0$, classificar la forma quadràtica associada a aquest endomorfisme.

203. Donada la forma quadràtica $q(x,y,z) = 7x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$.

a) Trobeu la matriu corresponen a q. Trobeu els valors i vectors propis de q, sabent que $\lambda = 4$ és un valor propi.

b) Reduir la forma quadràtica a una suma de quadrats, explicitant la matriu ortogonal del canvi.

c) Clasifiqueu per menors principals la forma quadràtica q.

204. Donada la matriu $B = A \cdot A^t$, on $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}$, construïm la forma quadràtica:

$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ens demanen:

i) Trobeu els valors propis associats a q.

ii) Trobeu una base tal que la matriu diagonal, D, corresponent a q, estiga formada pels valors propis i siga diagonal. Quina seria la matriu cel canvi de base?

iii) Classifiqueu q per nemors principals.

205. Siga $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadràtica, la qual matriu associada a q respecte de la base canònica és:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Estudieu el signe de q.

ii) Trobeu una base d'autovectors.

iii) Trobeu la matriu de q respecte de la nova base.

Bibliografia

ARANDA, J.; FERNANDEZ, J.L.; JIMENEZ, J.; MORILLA, F.
"Fundamentos de Lógica Matemática". Ed. Sanz i Torres. Madrid 2001.

ARVESÚ, J.; MARCELLAN, F., i SANCHEZ, J.
"Problemas Resueltos de Algebra Lineal" Paso a Paso. Ed. Thomson. Madrid, 2005.

ANZOLA, M.; GARUNCHO, J.
"Problemas de Algebra. Tomo II. Algebra Lineal". Ed. Bumar. Madrid, 1976.

BUJALANCE, E.; BUJALANCE, J.A.; COSTA, A.; MARTINEZ, E.
"Elementos de Matemática Discreta". Ed. Sanz i Torres. Madrid 2001.

BUJALANCE, E.; BUJALANCE, J.A.; COSTA, A.; MARTINEZ, E.
"Problemas de Matemática Discreta". Ed. Sanz i Torres. Madrid 2001.

DE BURGOS, J.
"Algebra lineal". Ed. McGraw-Hill. Madrid, 1995.

DE DIEGO, B.; GORDILLO, E., i VALEIRAS, G.
"Problemas de Algebra Lineal". Ed. Deimos. Madrid, 1991.

DE LA VILLA, A.
"Problemas de Algebra". Ed. Clagsa. Madrid, 1991.

FERRANDO, J. C., i GREGORI, V.
"Matemàtica Discreta". Ed. Reverté. 1994.

GALINDO, C.; ORÚS, P., i VINDEL, P.
"Problemes de Matemàtica Discreta". Ed.Publicacions de la UJI. Castelló, 1997.

GARCIA, F.; HERNANDEZ, G., i NEVOT, A.
"Problemas Resueltos de Matemàtica Discreta" Paso a Paso. Ed. Thomson. Madrid, 2003.

GRIMALDI, R.P.
"Matemáticas discreta y combinatoria". Ed. Addison-Wesley.1985.

KENNETH H. ROSEN.
"Matemática Discreta y sus aplicaciones". Ed. Mc Graw-Hill. 5^a Edición. Madrid, 2004.

LIPSCHUTZ, S.
"Matemática discreta. Teoría y problemas". Ed. Shaum. 1989.

LIU, C. L.
"Elementos de matemáticas discretas". Ed. Mc Graw-Hill. 1995.

LORENZO, J. DE.
"Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos". Ed. Tecnos. 1972.

MUÑOZ, F.
"Manual de Algebra Lineal". Ed. Ariel. Barcelona, 1990.

PEERMINGEAT, N.; GLAUDE, D.
"Algebra de Boole. Teoría, métodos de cálculo, aplicaciones". Ed. V. Vives. 1993.

SANZ, P., VAZQUEZ, F.J., i ORTEGA, P.
"Problemas de Algebra Lineal" Un enfoque práctico. Tratamiento con Derive. Ed. Prentice Hall. Madrid, 1998.
STANLEY I. GROSMAN.
"Algebra Lineal con aplicaciones". Ed. Mc Graw-Hill. México, 1992
SUPPES, P., i HILL, S.
"Introducción a la lógica matemática". Ed. Reverté. 1974.
VERA, A., VERA, F., i HERNANDO, J.L.
"Problemas de Algebra I". Ed. Ellacurria. Bilbao, 1989.

Índex

Fe d'errades

Errades que he pogut detectar.

1) En el tema 3, pàgina 82, en la definició 12 cal afegir el subrratllat : Tots aquests conjunts constitueixen, com a elements, juntament amb el ϕ, un altre conjunt ....

2) En el tema 5, pàgina 182, en el teorema 8, en $r = a - qc = ...$, canviar $(-qb)y$ per $(-qy)b$.

3) En el tema 6, pàgina 230, després de posar: Divisibilitat per 7, cal suprimir fins apartat iii) i substituir per:

$3y = \dot{7} + 3 = \{3, 10, 17, 24, 31, ...\} \rightarrow y \in \{1, 8\}$.

Primer cas: Si $y = 1$, $x + 1 = 8 \rightarrow x = 7$. El nombre seria 171171.

Segon cas: Si $y = 8$, $x + 8 = 8 \rightarrow x = 0$. El nombre seria 101808.

Tercer cas: Si $y = 8$, $x + 8 = 17 \rightarrow x = 9$. El nombre seria 191898.

4) En problemes del tema 8, pàgina 310, problema 10 cal substituir $(0, 0, 1, 1)$ per $(0, 0, 1, 0)$