

**Máster Profesor/a de Educación Secundaria  
Obligatoria y Bachillerato, Formación  
Profesional y Enseñanzas de Idiomas**

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS



**TFM**

“Mejora educativa para Estadística  
bidimensional en 1º de Bachillerato”

TUTOR UJI: PABLO JUAN VERDOY

TUTORA MATER DEI: ROCÍO MORENO DURÁN

**JOAQUÍN GIL FENOLLOSA**

## RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Máster correspondiente al Máster Universitario en Formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas, se realiza según la Modalidad 1: “Mejora educativa”.

Con este trabajo se pretende desarrollar una mejora a una unidad didáctica, y aplicarla durante la segunda fase del periodo del prácticum. Después se evaluarán los resultados obtenidos y se analizarán los pros y contras, con el fin de maximizar el beneficio en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Con el uso de la hoja de cálculo, se pretende introducir el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza, mediante la realización de tres tipos de actividades: una práctica utilizando la hoja de cálculo que se realiza en el aula de informática, otra de trabajo autónomo puntuable y, la última, consistente en la resolución de los problemas en clase simultáneamente en la pizarra y utilizando dicha hoja de cálculo en la pizarra digital.

Además, es necesario adaptarse a las nuevas necesidades de los alumnos y fomentar el uso de las nuevas tecnologías, logrando así captar la atención de un alumnado cada vez más desmotivado.

Con la PRÁCTICA 1 (USO DE LA HOJA DE CÁLCULO) se pretende que conozcan las posibilidades que les ofrece la hoja de cálculo, así como su transversalidad con otras asignaturas y campos de aplicación.

El objeto de la PRÁCTICA 2 (TRABAJO AUTÓNOMO PUNTUABLE), cuya entrega es obligatoria, es motivar al alumno premiando el hecho de esforzarse y realizar el trabajo de manera autónoma, pero sin discriminar a los alumnos con menores capacidades.

A través de la RESOLUCIÓN SIMULTÁNEA DE PROBLEMAS: PIZARRA Y HOJA EXCEL, además de conseguir una mayor motivación por parte del alumnado, logramos dedicar más tiempo a la explicación teórica del problema y menos a la fase de cálculo y, mejorar considerablemente la visualización tanto de gráficas de dispersión, como de las rectas de regresión. También fomentamos nuevamente la utilización de la hoja Excel, el uso del ordenador y la pizarra digital.

Después se analizan los resultados de la implantación de estas medidas, y se concluye que en general han sido muy positivas. También se valoran las dificultades que se han encontrado tanto alumnos como el profesor y se hacen unas propuestas de mejora.

Finalmente, y como conclusión, la implementación de las nuevas tecnologías, la innovación en las metodologías de enseñanza y la formación del profesorado, deberán ir acompañadas del esfuerzo y dedicación por parte del alumno.

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	1
2. CONTEXTUALIZACIÓN .....	2
2.1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO .....	2
2.2. CONTEXTUALIZACIÓN DEL AULA.....	3
3. UNIDAD DIDÁCTICA.....	5
3.1. MARCO TEÓRICO.....	5
3.2. JUSTIFICACIÓN.....	6
3.3. NIVEL EDUCATIVO Y TIEMPO NECESARIO PARA SU APLICACIÓN .....	7
3.4. OBJETIVOS DIDÁCTICOS .....	8
3.5. CONTENIDOS CURRICULARES.....	9
3.6. COMPETENCIAS BÁSICAS .....	9
3.7. CRONOGRAMA Y TEMPORALIZACIÓN.....	10
3.8. METODOLOGÍA Y DESARROLLO DE LAS SESIONES.....	11
3.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD .....	14
4. EVALUACIÓN UNIDAD DIDÁCTICA .....	15
4.1. EVALUACIÓN INICIAL.....	15
4.2. EVALUACIÓN CONTINUA.....	15
4.3. EVALUACIÓN FINAL .....	16
5. MEJORAS INCORPORADAS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS .....	17
5.1. PRÁCTICA 1 (USO DE LA HOJA DE CÁLCULO) .....	17
5.2. PRÁCTICA 2 (TRABAJO AUTÓNOMO PUNTUABLE) .....	20
5.3. RESOLUCIÓN SIMULTÁNEA DE PROBLEMAS: PIZARRA Y HOJA EXCEL.....	23
5.4. RESULTADOS EVALUACIÓN FINAL.....	26
6. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL.....	28
7. BIBLIOGRAFÍA.....	29

## ÍNDICE DE ANEXOS

- ANEXO 1: CONTENIDOS Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN, SEGÚN ANEXO I DEL DECRETO 87/2015, Y SEGÚN ANEXO I DEL REAL DECRETO 1105/2014
- ANEXO 2: PRUEBA INICIAL
- ANEXO 3: ENUNCIADOS EJERCICIOS LIBRO
- ANEXO 4: PRÁCTICA 1 (USO DE LA HOJA DE CÁLCULO)
- ANEXO 5: PRÁCTICA 2 (TRABAJO AUTÓNOMO PUNTUABLE)
- ANEXO 6: PRÁCTICA 3 (PROBLEMAS TIPO EXAMEN)
- ANEXO 7: RESOLUCIÓN SIMULTÁNEA DE PROBLEMAS: PIZARRA Y HOJA EXCEL
- ANEXO 8: EVALUACIÓN FINAL

## 1. INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Fin de Máster correspondiente al Máster Universitario en Formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas, se realiza según la Modalidad 1: “Mejora educativa”.

La Unidad didáctica a desarrollar es “Estadística”, y va dirigida a los alumnos de 1º de bachillerato de la opción de Ciencias Sociales. Esta unidad didáctica se descompone en dos temas, “Estadística unidimensional” y “Estadística bidimensional”. El primero es un tema de repaso de cursos anteriores, pues la estadística se estudia progresivamente desde 1º de la ESO, pero el segundo es la primera vez que aparece en el currículo y es en el que nos vamos a centrar mayormente en el TFM.

La propuesta de mejora consistirá en el uso de la hoja de cálculo en las matemáticas, dando respuesta a un área de mejora identificada durante la primera fase del prácticum, realizada en el Centro Mater Dei, bajo la tutela de la tutora del centro, Rocío Moreno Durán, y el tutor de la UJI, Pablo Juan Verdoy.

Se pretende evaluar el conocimiento conseguido por los alumnos y, de los resultados obtenidos, extraer las conclusiones sobre la consecución o no de los objetivos previstos con la mejora introducida. Mediante un feedback se adoptarán las medidas necesarias, con el objeto de obtener el mayor beneficio posible en el proceso enseñanza-aprendizaje.

En primer lugar, se describen el contexto sociocultural del centro y del aula a la que se dirige la unidad didáctica y a la que se adapta la implementación de la misma.

A continuación, se exponen el marco teórico de la unidad didáctica de Estadística, su justificación, los objetivos y competencias perseguidos, su temporalización y la metodología y desarrollo de las sesiones.

Después se analizan los diferentes aspectos de la evaluación, así como el momento en el que se produce.

Seguidamente, se desarrollan las mejoras introducidas a través de las tres actividades planteadas, justificando cada una de ellas e indicando cuales son los objetivos, contenidos y competencias perseguidos por las mismas. También se procede a su descripción detallada.

Posteriormente se analizan los resultados obtenidos mediante la implantación de las medidas de mejora, así como las dificultades que han surgido. También se extraen unas conclusiones de los resultados de la Evaluación final realizada.

Por último, se indican las conclusiones finales y la valoración personal, seguidas de la bibliografía utilizada y los anexos que se adjuntan al documento.

## 2. CONTEXTUALIZACIÓN

### 2.1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO

#### Origen y evolución histórica:

Este centro comenzó a construirse en 1962. En sus orígenes fue concebido como seminario. Sin embargo, a partir de los años 70, la actividad de formación de futuros sacerdotes, compartió estas instalaciones con otras entidades educativas (CEU San Pablo, CUC, etc.), debido a las grandes dimensiones del recinto.

En el año 1990, se constituyó el Seminario Menor Diocesano Mater Dei, sin ánimo de lucro, como respuesta a su deseo de una educación de calidad para todos, y acorde con los principios del humanismo cristiano.

A partir de ese momento y progresivamente se han ido efectuando remodelaciones y ampliaciones de las instalaciones: laboratorios, aulas específicas, pabellón polideportivo cubierto, habilitación de terrenos para nuevos patios e instalaciones deportivas al aire libre, nuevas dependencias de secretaría y recepción, etc.

A medida que transcurrieron los cursos escolares, y con el fin de que hubiese una continuidad en la enseñanza se construyó un nuevo edificio de Educación Infantil que completase los ya existentes. De esta forma se obtienen los espacios necesarios que deben reunir los centros que imparten enseñanzas no universitarias, según lo establecido en la LOE y en el Real Decreto 1004/1991, de 14 de junio y obteniendo así la preceptiva autorización administrativa de apertura y funcionamiento.

En el curso 2008-2009, con ánimo de garantizar una enseñanza cristiana, de calidad y abierta a todos, se tramitó la solicitud de acceso al Régimen de Conciertos Educativos.

#### Situación geográfica y socio-económica:

El centro docente **Centro Diocesano Mater Dei** se encuentra ubicado en un enclave privilegiado entre las localidades de Castellón de la Plana y Benicasim, junto al ermitorio de la Magdalena y en las estribaciones del Paraje Natural del Desierto de las Palmas.

Esta ubicación a varios kilómetros de estas dos localidades, hace que pese a tratarse de un centro concertado, subvencionado en parte por la Administración, también tenga un coste considerable para los padres superior a la media de los concertados, al tener que quedarse prácticamente la totalidad de los alumnos en el comedor al haber una hora de tiempo únicamente para comer. A ello se añade el coste del transporte bien sea en el autobús escolar o el vehículo privado. Por eso el perfil socioeconómico de las familias es medio-alto o alto, siendo además la mayoría de religión católica.

#### Ideario:

El **Centro Diocesano Mater Dei**, es una institución intrínsecamente unida a la Diócesis de Segorbe-Castellón y ofrece a los alumnos, en estrecha colaboración con las familias, una educación completa, inspirada en una concepción católica del hombre y de la vida.

El colegio Mater Dei tiene unos principios educativos básicos, que son conocidos y aceptados por los alumnos, familias y el profesorado, quienes se obligan solidariamente a su promoción.

Estos principios educativos se entienden como un sistema de acciones encaminadas a estimular y desarrollar las aptitudes personales de cada alumno y a capacitarlo para su desarrollo personal y profesional. Se fomentan aspectos como la colaboración activa, la formación cultural, artística y técnica, así como el desarrollo de los criterios personales como el buen uso de la libertad, la solidaridad y la convivencia.

Todas las actividades docentes y educativas se realizan de acuerdo con los principios fundamentales de la doctrina católica y con el mayor respeto a la libertad de las conciencias.

Además, se atiende de manera especial el desarrollo físico, la formación deportiva, la originalidad, la creatividad y el aprendizaje de las lenguas, donde los alumnos aprenden el castellano y el valenciano, y como mínimo una lengua extranjera.

#### Organización:

En el colegio Mater Dei se forma a los alumnos desde Educación Infantil y Primaria, hasta la ESO y Bachiller. Desde Infantil y hasta Secundaria, el colegio tiene dos líneas, mientras que en Bachiller sólo hay una línea, en la que se cursan las asignaturas comunes, si bien se desdoblan en dos las optativas. Además los alumnos irán con uniforme en Primaria y Secundaria, pudiendo ir vestidos de calle en Bachiller.

A continuación, se adjunta una tabla con el número de alumnos por curso y línea:

<b>N.º Alumnos</b>	<b>GRUPO A</b>	<b>GRUPO B</b>
<b>1º ESO</b>	31	30
<b>2º ESO</b>	34	31
<b>3º ESO</b>	29	30
<b>4º ESO</b>	26	28
<b>1º BACH</b>	17	13
<b>2º BACH</b>	17	18

*Tabla 1: N.º de alumnos*

El Mater Dei es un centro concertado por lo que tiene alta libertad de gestión sujeta a ciertos condicionantes establecidos por la administración.

## 2.2. CONTEXTUALIZACIÓN DEL AULA

La Unidad Didáctica va dirigida a los alumnos de 1º de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas de la Modalidad de Humanidades y Ciencias sociales, formada por 17 alumnos.

Se trata de un grupo bastante homogéneo, no se aprecian diferencias significativas en el estatus socioeconómico y la práctica totalidad son de origen español.

No se aprecian diferencias entre chicas y chicos, y únicamente hay un alumno que asiste a clase, pero ni atiende ni toma apuntes, aunque el comportamiento es bueno. Se da la circunstancia de que lleva pendientes las matemáticas de 4º de la ESO y no parece tener intención de estudiarlas, pensando en que le dejen finalizar los estudios de bachiller sin cursar las matemáticas.

#### Medios técnicos y materiales:

El aula está dotada de pizarra blanca y también cuenta con una pantalla táctil o pizarra digital. Además el centro dispone de aula de informática, con ordenador para todos los alumnos.

#### Cumplimiento de objetivos:

Todos los alumnos tienen que aprobar los exámenes para demostrar la consecución de los conocimientos mínimos exigidos y objetivos marcados. En el caso de las matemáticas, se exige más a los alumnos de la modalidad de Ciencias que a los de Humanidades y Ciencias Sociales. También se valora el comportamiento de los alumnos en clase, aumentando o disminuyendo la nota de los exámenes.

Como el profesorado tiene continuidad a lo largo de los cursos se garantiza el cumplimiento de los objetivos, pues si alguna parte del temario no se explica por alguna razón, se podrá explicar el siguiente curso, pues se vuelve a tener a esos mismos alumnos. Y viceversa, si se cree conveniente se adelanta parte del temario del siguiente curso.

#### Técnicas de comunicación e interacción

El trato entre alumnos y profesores es de respeto y confianza mutuos. Hay una constante comunicación entre profesores y alumnos, así como reuniones generales y personales con los padres de los alumnos. Además, en las tutorías se tratan temas que puedan afectar o resultar de interés a la clase y, el tutor hace un seguimiento más individualizado de sus alumnos.

Los alumnos son participativos en las clases, preguntan y se ofrecen voluntarios en la corrección de ejercicios en la pizarra. Además, se implican en labores de colaboración del centro, como labores administrativas o la limpieza del patio.

#### Control del aula

El control del aula en 1º de bachiller ha sido relativamente sencillo, pues los alumnos prestan atención, y en caso de hablar o consultar dudas con los compañeros lo hacen en voz baja y sin molestar. En general son participativos y no tienen ningún inconveniente en plantear las dudas que van surgiendo.



## 3. UNIDAD DIDÁCTICA

### 3.1. MARCO TEÓRICO

El mundo y la sociedad están cambiando, y con ellos el perfil del alumno presente en las aulas. Vivimos rodeados de nuevas tecnologías y su uso es generalizado y no algo reservado solamente a unos pocos. La educación es algo que también está en continuo proceso de cambio y por ello debemos adaptar la enseñanza a los cambios sociales e incluirlos en la misma. Es necesario adaptarse a las nuevas necesidades de los alumnos, y fomentar el uso de las nuevas tecnologías, logrando así captar la atención de un alumnado cada vez más desmotivado.

De esta forma, a la vez que se desarrolla el contenido del currículo, fomentaremos la consecución de *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología*, así como la *Competencia digital*.

La Ley Orgánica 8/2013 (**LOMCE**), de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, modificó el artículo 6 de la Ley Orgánica 2/2006 (**LOE**), de 3 de mayo, de Educación, para definir el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas.

En línea con la Recomendación 2006/962/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, el Real Decreto 1105/2014 se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, integradas en los elementos curriculares para propiciar una renovación en la práctica docente y en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, el **Real Decreto 1105/2014** completa las normas anteriores con la integración de las **competencias en el currículo**.

Por otra parte, el Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Valenciana, según su art. 1, tiene por objeto y ámbito de aplicación los siguientes:

*“1. El presente decreto tiene por objeto establecer el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, así como desarrollar los aspectos de la ordenación general de estas enseñanzas contenidos en los capítulos III y IV del título I de la Ley Orgánica 2/2006, y en el Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

*2. Este decreto será de aplicación en los centros docentes públicos y privados de la Comunidad Valenciana autorizados para impartir las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria o de Bachillerato, así como en los centros autorizados para impartir ambas enseñanzas, reguladas en la Ley Orgánica 2/2006.”*

La Unidad Didáctica que se va a exponer en el presente apartado va dirigida a los alumnos de 1º de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas de la Modalidad de Humanidades y Ciencias sociales. Para ello se sigue lo dispuesto en la Ley Orgánica el

**Real Decreto 1105/2014** que tiene por objeto establecer el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato y el **Decreto 87/2015**, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Valenciana.

Por otro lado, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) (2003) declara que: “La tecnología es una herramienta esencial para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de manera efectiva; amplía las matemáticas que se pueden enseñar y mejoran el aprendizaje de los estudiantes” (p. 1). La NCTM (2003) razona su uso fundamentalmente en que: “Calculadoras, herramientas de software y otras tecnologías ayudan en la recogida, registro, organización y análisis de datos. (...) los estudiantes pueden ampliar el alcance y la calidad de sus investigaciones matemáticas y encontrar ideas matemáticas en entornos más realistas” (p. 1).

También se consulta el Trabajo fin de máster “Millora educativa per a l’estadística descriptiva bidimensional al Batxillerat”, realizado por Amparo Bernat de la Universidad Jaime I, en el que se aplican mejoras destinadas a integrar las nuevas tecnologías, en concreto mediante un cuestionario online y una práctica mediante hoja de cálculo.

Actualmente, la presencia de las TIC en los centros educativos es una constante y por tanto el uso de sus aplicaciones dentro del aula es cada vez más frecuente por parte de los docentes. En este sentido, uno de los propósitos del presente trabajo es fomentar el uso de las Hojas de Cálculo como recurso didáctico y por tanto proporcionar otra herramienta para desarrollar las clases en un ambiente diferente de la metodología tradicional. Del mismo modo, se pretende motivar a los alumnos con una herramienta diferente para el aprendizaje de las matemáticas.

Las Hojas de Cálculo constituyen una potente herramienta informática, que permiten el desarrollo de actividades didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el curso de 1º de Bachillerato. Pero además cabe destacar su transversalidad con otras asignaturas, así como su aplicación no sólo en la ESO y Bachiller, sino también en la Universidad y en el mundo laboral.

### 3.2. JUSTIFICACIÓN

Según el artículo 2 “Currículo” del Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, que cita:

*“1. La definición de currículo y de los elementos que lo integran será la establecida en el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014.*

*2. Para el conjunto del primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria, para el segundo ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria y para cada uno de los dos cursos de Bachillerato, los contenidos comunes, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables que conforman el currículo básico de las materias del bloque de asignaturas troncales, serán los recogidos en el anexo I del Real Decreto 1105/2014. Los contenidos y criterios de evaluación para cada curso, con los cuales se complementan los establecidos por la normativa básica, las relaciones entre las competencias y los*

*contenidos y criterios de evaluación, así como las recomendaciones de metodología didáctica, son los establecidos en el anexo I del presente decreto.”*

Por lo tanto, los contenidos del bloque de Estadística y Probabilidad de 1º de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias sociales, así como los criterios de evaluación y competencias del currículum, vienen dados en el anexo I del Real Decreto 1105/2014 y en el anexo I del Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell. En el Anexo 1 de la presente memoria se adjuntan ambos.

### 3.3. NIVEL EDUCATIVO Y TIEMPO NECESARIO PARA SU APLICACIÓN

La Unidad didáctica a desarrollar es “Estadística”, y va dirigidas a los alumnos de 1º de bachillerato de la opción de Ciencias Sociales, siguiendo el temario del libro de texto que se sigue en el colegio, y que es “Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I” de la editorial Santillana. Esta unidad didáctica la descompone en dos temas, el Tema 9 “Estadística unidimensional” y el Tema 10 “Estadística bidimensional. El primero es un tema de repaso de cursos anteriores, pues la estadística se estudia progresivamente desde 1º de la ESO, si bien el segundo es la primera vez que aparece en el currículum. El contenido impartido es el siguiente:

#### Estadística unidimensional:

- Variable estadística unidimensional
- Tablas de frecuencias
- Gráficos estadísticos
- Medidas de centralización
- Medidas de posición
- Medidas de dispersión
- Análisis de medidas
- Estadística con ordenador

#### Estadística bidimensional:

- Variable estadística bidimensional
- Tablas de doble entrada, marginales y condicionadas
- Diagramas de dispersión
- Dependencia entre variables. Tablas de contingencia
- Correlación
- Rectas de regresión
- Estimación de resultados
- Estadística con ordenador

Cabe señalar que se trata de un curso en donde los alumnos ya han superado la Educación Secundaria Obligatoria, y por lo tanto se espera que el alumnado esté motivado. Sin embargo, al tratarse de la modalidad de Ciencias sociales, el perfil del mismo es el de un alumno que no va a cursar estudios universitarios de tipo científico-

técnico, por lo que se muestra reticente al aprendizaje de las matemáticas, y cuyo objeto principal será aprobar para cubrir el expediente.

Por este motivo, se hace fundamental no ofrecerles simplemente el contenido del currículo sino también el aprendizaje de una hoja de cálculo, debido a su transversalidad con otras asignaturas y que puedan percibir su utilidad en un futuro, para de este modo lograr su motivación. Además, la Estadística vuelve a formar parte del currículo en Matemáticas en la rama de Ciencias sociales en 2º de bachillerato.

### 3.4. OBJETIVOS DIDÁCTICOS

En el artículo 25 del Real Decreto 1105/2014, se enumeran detalladamente los objetivos generales del Bachillerato.

Los **objetivos** generales que se pretenden lograr con la **Unidad Didáctica** de “Estadística” en 1º de Bachillerato son:

Estadística Unidimensional	Estadística Bidimensional
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construir una tabla agrupando los datos en intervalos</li> <li>• Realizar un histograma y su polígono de frecuencias</li> <li>• Calcular medidas de centralización en variables continuas</li> <li>• Estudiar conjuntamente la media y la desviación típica</li> <li>• Elaborar una tabla de una variable discreta cuando el número de datos es grande</li> <li>• Construir un diagrama de barras adosadas</li> <li>• Interpretar pirámides de población</li> <li>• Analizar datos mediante medidas de posición</li> <li>• Trabajar la estadística unidimensional con calculadora</li> <li>• Interpretar las medidas estadísticas en una variable unidimensional</li> <li>• Interpretar la media y la desviación típica conjuntamente</li> <li>• Calcular medidas estadísticas con ordenador</li> <li>• Realizar gráficos estadísticos con ordenador</li> <li>• Añadir o suprimir datos para obtener una medida estadística determinada</li> <li>• Variar la media de un conjunto de datos al sumar una cantidad fija a todos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estudiar la dependencia mediante tablas de contingencia</li> <li>• Calcular la covarianza</li> <li>• Calcular e interpretar el coeficiente de correlación</li> <li>• Determinar y representar la recta de regresión</li> <li>• Estimar valores utilizando la recta de regresión</li> <li>• Trabajar la estadística bidimensional con calculadora</li> <li>• Agrupar los datos de variables bidimensionales en intervalos</li> <li>• Construir las tablas de frecuencias marginales a partir de la tabla de doble entrada</li> <li>• Interpretar una tabla de doble entrada</li> <li>• Calcular la recta de regresión con la calculadora</li> <li>• Determinar la media de una de las variables a partir de la recta de regresión</li> <li>• Determinar e interpretar el signo del coeficiente de correlación a partir de la recta de regresión</li> <li>• Dibujar gráficos estadísticos bidimensionales con ordenador</li> <li>• Realizar una recta de regresión con ordenador</li> <li>• Representar variables bidimensionales</li> <li>• Calcular el coeficiente de correlación en tablas de doble entrada agrupadas en intervalos</li> </ul>

*Tabla 2: Objetivos generales*

### 3.5. CONTENIDOS CURRICULARES

Los contenidos del bloque de Estadística y Probabilidad de 1º de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias sociales, así como los criterios de evaluación y competencias del currículum, vienen dados en el anexo I del Real Decreto 1105/2014 y en el anexo I del Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell. En el Anexo 1 de la presente memoria se adjuntan ambos.

DECRETO 1105/2014 BOE	DECRETO 87/2015 DOGV	LIBRO DE TEXTO SANTILLANA
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estadística descriptiva bidimensional: Tablas de contingencia.</li> <li>• Distribución conjunta y distribuciones marginales.</li> <li>• Distribuciones condicionadas.</li> <li>• Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas.</li> <li>• Independencia de variables estadísticas.</li> <li>• Dependencia de dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube de puntos.</li> <li>• Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.</li> <li>• Regresión lineal. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas. Coeficiente de determinación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estadística descriptiva bidimensional. Parámetros. Representaciones gráficas.</li> <li>• Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.</li> <li>• Regresión lineal. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas.</li> <li>• Coeficiente de determinación.</li> </ul>	<p><u>Estadística unidimensional.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Variables estadísticas unidimensionales.</li> <li>• Gráficos estadísticos.</li> <li>• Medidas de centralización.</li> <li>• Medidas de posición.</li> <li>• Medidas de dispersión.</li> <li>• Análisis de las medidas estadísticas.</li> </ul> <p><u>Estadística bidimensional.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Variables estadísticas bidimensionales.</li> <li>• Gráficos estadísticos de v. b.</li> <li>• Dependencia entre variables.</li> <li>• Correlación.</li> <li>• Rectas de regresión.</li> <li>• Estimación de resultados.</li> </ul>

Tabla 3: Contenidos curriculares

### 3.6. COMPETENCIAS BÁSICAS

Según el apartado 2 del artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, las **competencias** del currículum serán las siguientes:

Competencias	
Comunicación lingüística	Es la habilidad para expresar e interpretar conceptos, pensamientos, sentimientos, hechos y opiniones de forma oral o escrita (escuchar, hablar, leer y escribir), y de interactuar lingüísticamente de una manera adecuada y creativa en todos los contextos
Competencia matemática y	Integra la habilidad de aplicar los conceptos matemáticos, con el fin de resolver problemas en situaciones cotidianas, junto con

competencias básicas en ciencia y tecnología	la capacidad de aplicar el conocimiento y el método científico para explicar la naturaleza
Competencia digital	Implica el uso seguro y crítico de las tecnologías de la información y la comunicación en la formación, el trabajo y el ocio
Aprender a aprender	Engloba las habilidades necesarias para aprender, organizar el propio aprendizaje y gestionar el tiempo y la información eficazmente, ya sea de forma individual o en grupo
Competencia social y cívica	Recoge los comportamientos que preparan a las personas para participar de una manera eficaz y constructiva en la vida social, profesional y cívica, en una sociedad cada vez más diversificada y plural.
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor	Hace referencia a la habilidad de cada persona para transformar las ideas en actos, poniendo en práctica su creatividad, a la capacidad de innovación y de asunción de riesgos, y a las aptitudes necesarias para la planificación y la gestión de proyectos.
Conciencia y expresiones culturales	Implica apreciar la importancia de la expresión creativa de ideas, experiencias y emociones a través de distintos medios (música, literatura, artes escénicas, artes plásticas... )

Tabla 4: Competencias

La incorporación de las competencias al currículo hace necesario integrarlas en las tareas y actividades didácticas que se desarrollan en el proceso de enseñanza-aprendizaje y, por tanto, tienen una relación directa con la evaluación del alumnado. Esto requiere que los estándares de aprendizaje evaluables hagan referencia no solo a los contenidos propios de las distintas áreas, sino también a la contribución de dichas áreas al logro de las competencias.

En la unidad didáctica de Estadística, las principales competencias a desarrollar son la **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** y la **Competencia digital**, si bien se fomentan también indirectamente el resto de competencias.

### 3.7. CRONOGRAMA Y TEMPORALIZACIÓN

A continuación se adjunta el horario de las clases impartidas de Estadística a los alumnos de 1º de bachillerato, desde el día 25 de abril al 17 de mayo.

HORARIO	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
9:00-10:00				1º BACH C.S.	
10:00-10:55					1º BACH C.S.
11:20-12:15			1º BACH C.S.		
12:15-13:10		1º BACH C.S.			
13:10-14:05					

Tabla 5: Horario

La temporalización de esta Unidad Didáctica consta de 14 sesiones de 55 minutos dónde se alternan aspectos teóricos y aspectos prácticos, así como sesiones en el aula de informática o con pizarra digital.

Se han dedicado 7 clases al primer tema, de las que una se realiza en el aula de informática para usar la hoja Excel; y otras 7 para el segundo tema, de las que en tres de ellas también se proyectan los ejercicios realizados en Excel en la pizarra digital.

Además, se ha realizado una sesión de una hora y media, donde se han evaluado los conocimientos adquiridos a través de un examen que consta de dos preguntas de la materia impartida en Estadística. En el Anexo 8 se adjunta el examen realizado y su resolución.

### 3.8. METODOLOGÍA Y DESARROLLO DE LAS SESIONES

En este apartado se explican la metodología seguida, así como el contenido teórico y práctico y las actividades desarrolladas en cada una de las clases.

Previamente a la explicación teórica, el docente deberá realizar un resumen en el que se incluyen los contenidos teóricos y las actividades a desarrollar en cada una de las clases, con el fin de sacar el máximo aprovechamiento a las mismas. El procedimiento seguido ha sido la explicación de la teoría en la pizarra y la realización de ejercicios de aplicación de la misma. También se mandan actividades para casa y se clase complementan los ejercicios con ejemplos en hoja Excel.

A continuación se desarrolla el contenido y actividades desarrollado en cada una de las clases:

#### Clase 1:

- Presentación del profesor y del bloque de Estadística a impartir.
- Realización de la Prueba inicial, que se adjunta en el Anexo 2.
- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - o Variable estadística unidimensional
  - o Conceptos: Población, muestra e individuo
  - o Tablas de frecuencia
  - o Ejemplo Saber Hacer (Fig 1, Anexo 3)

#### Clase 2:

- Realización de las siguientes actividades:
  - o Actividad 4 (Fig 2, Anexo 3)
  - o Actividad 5 (Fig 2, Anexo 3)

#### Clase 3:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - o Gráficos estadísticos (barras, histogramas, sectores y polígonos de frecuencia)

- Medidas de centralización en variables discretas (Media aritmética, Moda y Mediana)
- Realización de las siguientes actividades:
  - Actividad 6 (Fig 3, Anexo 3)
  - Actividad 7 (Fig 3, Anexo 3)
  - Actividad 8 (Fig 4, Anexo 3)
  - Ejemplo 2 (Fig 5, Anexo 3)
  - Ejemplo: “Obtener la mediana de: 1 ,2, 2, 3, 3, 3”

#### Clase 4:

- Realización de la “Práctica 1” de Excel, en el aula de informática de la siguiente actividad:
  - Estadística con ordenador (Enunciado y resolución en Anexo 4)

#### Clase 5:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Medidas de centralización en variables continuas (Media, Moda y Mediana)
  - Medidas de posición (Cuartiles, Percentiles y Diagramas de caja)
- Realización de las siguientes actividades:
  - Ejemplo Saber Hacer (Fig 6, Anexo 3)
  - Ejemplo 3 (Fig 7, Anexo 3)

#### Clase 6:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Medidas de dispersión (Rango, Desviación media, Varianza, Desv. Típica, Coeficiente de variación)
- Realización de las siguientes actividades:
  - Ejemplo 4 (Fig 8, Anexo 3)
  - Actividad 16 (Fig 9, Anexo 3)

#### Clase 7:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Análisis de las medidas estadísticas)
- Realización de las siguientes actividades:
  - Actividad 39 (Fig 10, Anexo 3)
  - Actividad 42 (Fig 11, Anexo 3)
- Les mando para hacer en casa la “Práctica 2” que contiene 3 ejercicios, y es puntuable (+1 punto en la nota del examen), y se adjunta en el Anexo 5.

#### Clase 8:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Variable estadística bidimensional
  - Tablas de doble entrada



- Tablas de frecuencias marginales
- Tablas de frecuencias condicionadas
- Realización de las siguientes actividades:
  - Ejemplo 2 (Fig 12, Anexo 3)
  - Ejemplo 3 (Fig 13, Anexo 3)
  - Ejemplo 4 (Fig 14, Anexo 3)

#### Clase 9:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Gráficos estadísticos (Diagrama de dispersión)
  - Dependencia entre variables cuantitativas
- Realización de las siguientes actividades:
  - Ejemplo 5 (Fig 15, Anexo 3)
  - Ejemplo 6 (Fig 16, Anexo 3)
  - Ejemplo 7 (Fig 17, Anexo 3)

#### Clase 10:

- Explicación de dudas de la “Práctica 2” mandada (Anexo 5)

#### Clase 11:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Dependencia entre variables cuantitativas
- Realización de las siguientes actividades:
  - Ejemplo Saber Hacer (Fig 18, Anexo 3)

#### Clase 12:

- Realización de las siguientes actividades:
  - Ejemplo 9 (Fig 19, Anexo 3)
  - Ejemplo 10 (Fig 19, Anexo 3)
- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Covarianza
  - Coeficiente de correlación
  - Ejemplo Saber Hacer (Fig 20, Anexo 3)
- Les propongo “Práctica 3” que tiene 2 ejercicios tipo examen, en el aula virtual (se adjuntan en el Anexo 6).

#### Clase 13:

- Realización de las siguientes actividades:
  - Ejemplo 13 (Fig 21, Anexo 3)
  - Ejemplo 14 (Fig 21, Anexo 3)
- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - Rectas de regresión
  - Ejemplos Saber Hacer y 8 (Fig 22 y 23, Anexo 3)

#### Clase 14:

- Explicación teórica de los siguientes puntos:
  - o Posiciones relativas de las dos rectas de regresión
- Realización de las siguientes actividades:
  - o Ejercicio 2 de la “Práctica 3” (Anexo 6)
- Recojo práctica.
- Despedida y agradecimientos

#### Evaluación final:

- Realización de prueba escrita formada por dos preguntas, una de estadística unidimensional y la otra de bidimensional (Anexo 8)

Nota 1: Las **prácticas 1, 2 y 3**, se adjuntan en los Anexos 4, 5 y 6, la resolución mediante **Excel** de los ejemplos Saber hacer (fig.20), 13 y 14 (fig.21), Saber hacer (fig.22) y Ejemplo 8 (fig.23), se adjuntan en el Anexo 7.

Nota 2: La totalidad del material propuesto y sus soluciones, así como el archivo Excel, queda a disposición de los alumnos en el Aula virtual del Mater Dei.

### 3.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En el caso de los alumnos de 1º de bachiller, que es el que hemos desarrollado en el TFM, no hay ningún alumno con necesidades especiales. En general se observa que al ser alumnos de la modalidad de “Ciencias Sociales”, la mayoría únicamente tienen como objetivo aprobar y no muestran un interés especial por las matemáticas.

Para tratar de motivarles, se les manda una práctica puntuable (“Práctica 2”) que es obligatorio entregar para poder presentarse al examen y que vale un punto, tanto si se hace bien como si se hace mal, el objetivo buscado es que se vean obligados a ver todo el contenido explicado. Por lo tanto el examen (90 % de la nota de Estadística) valdrá 9 puntos, pues todos parten con un punto positivo.

Existe un alumno en la clase de 1º que lleva pendiente las matemáticas de 4º de la ESO, asiste a clase y, aunque su comportamiento es bueno, ni toma apuntes ni muestra ningún tipo de interés. Le he pedido que al menos me entregue una hoja justificando por qué no ha hecho la práctica para poder presentarse al examen, y también le sumo un punto.

Señalar que se realizan exámenes adaptados en el centro, que se diferencian del resto por tener la letra más grande, y contener alguna pista para la resolución de los ejercicios.

## 4. EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En las prácticas que se han tenido en cuenta los siguientes aspectos de la evaluación:

- Evaluación de contenidos: para comprobar el nivel de adquisición de los principales conceptos y procedimientos.
- Evaluación por competencias: para evaluar el grado de adquisición de las competencias.
- Rúbricas de evaluación: se dan los criterios para la observación y el registro del grado de avance de los alumnos, de acuerdo con los estándares de aprendizaje.

Además, se realizan tres evaluaciones en función del momento en que se producen y que se desarrollan a continuación.

### 4.1. EVALUACIÓN INICIAL

La finalidad principal de la prueba inicial (Anexo 2), es conocer los conocimientos que tiene el alumnado de cursos anteriores, pues aunque se dedica un tema a repasar la estadística unidimensional, sabremos si hay que hacerlo con más o menos detenimiento.

Además se hace alguna cuestión no relacionada con las matemáticas directamente, pero que nos sirve para evaluar las capacidades de los alumnos.

También, se pregunta a los alumnos sobre su conocimiento en el uso de algunos programas como Excel, Geogebra y R.

Finalmente se les consulta, en caso de saberlo, que estudios universitarios desean cursar, para comprobar si están relacionados con las matemáticas y saber el grado de motivación que pueden tener en su estudio, al poder resultarles útiles en un futuro.

### 4.2. EVALUACIÓN CONTINUA

Mediante la evaluación continua, lo que se pretende evaluar es la asimilación por parte de los alumnos de la materia impartida en las clases, así como obligarles a ir estudiando y realizando los problemas y que no lo dejen todo para el final. Además nos servirá para corregir aquellos aspectos que veamos que no dan los resultados esperados.

Para ello se irán realizando problemas en clase y se les irá preguntando. Además se realizará una práctica puntuable (Práctica 2) que se adjunta en el Anexo 5.

La prueba consta de 3 ejercicios, que abarcan toda la temática impartida, tanto de estadística unidimensional como bidimensional. Se trata de problemas largos, y en los que se pregunta absolutamente todo lo tratado, de tal forma que el alumno que realice la práctica completa, no deberá tener ningún problema para aprobar.

Su presentación, es obligatoria, y a todos los alumnos que la presenten se les añade un punto en la nota de estadística, independientemente de que esté bien o no, y el que no quiera hacerla al menos deberá entregar una hoja en la que se justifique por qué no lo ha hecho. Se pretende de esta forma, ver en qué partes muestran más dificultades los alumnos para repasarlas y en el caso de no hacerla conocer el motivo, así como fomentar la responsabilidad y toma de decisiones.

### 4.3. EVALUACIÓN FINAL

Mediante la evaluación final, lograremos saber el grado de consecución de los objetivos buscados, tanto por parte del alumno como del profesor, pues será momento también de hacer un feedback con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La evaluación final consistirá en un examen (Anexo 8) sobre el contenido de Estadística, que consta de dos preguntas.

El examen tendrá un peso total del 90 %, pues el 10 % restante se obtiene con la realización de la práctica 2. Indicar también, que como las notas se introducen en ITACA, la actitud sirve para redondear la nota a un número entero, por lo tanto afecta hasta en un 10 %, que redondea al alza o a la baja la nota obtenida anteriormente.

A continuación, se adjunta una tabla resumen con los aspectos que se evalúan, así como su peso en la nota final:

EVALUACIÓN INICIAL		
ÍTEM A EVALUAR	MÉTODO	VALORACIÓN
Prueba inicial: - Conocimientos Previos - Capacidades - Conocimiento software (Excel, Geogebra, R)	- Se realiza un test inicial por escrito en el que se formulan cuestiones sobre los aspectos señalados	-
EVALUACIÓN CONTINUA		
ÍTEM A EVALUAR	MÉTODO	VALORACIÓN
- Asistencia - Actitud - Práctica 1 (Aula informática) - Ejercicios de clase - Práctica 2 - Práctica 3 (Modelo examen)	- Observación diaria - Observación diaria - Uso de hoja de cálculo - Clase magistral + Hoja de cálculo - Trabajo autónomo + Corrección - Trabajo autónomo + Corrección	- (* ) - - <b>10 %</b> -
EVALUACIÓN FINAL		
ÍTEM A EVALUAR	MÉTODO	VALORACIÓN
- Examen	- Consta de una prueba escrita con un problema de Estadística unidimensional y otro de bidimensional	<b>90 %</b>

Tabla 6: Resumen evaluación

(\*) Sirve para redondear la nota hasta un número entero, para poder poner la nota en el programa ITACA.

## 5. MEJORAS INCORPORADAS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

La principal propuesta de mejora, sería la introducción del uso del ordenador (competencia digital), en concreto el de la hoja de cálculo (Excel o cualquier otra versión libre) en la clase de matemáticas, pues el perfil del alumnado es de la Modalidad de Humanidades y Ciencias sociales y dado que no estudiarán carreras técnicas, puedan sacar el máximo provecho de las matemáticas.

Es importante también, resaltar la transversalidad con otras asignaturas, para que se motiven y no vean las matemáticas como una imposición, sino como algo que les pueda resultar útil en otros campos de aplicación.

Si bien todavía hoy existe cierta reticencia por parte de algunos profesores al uso de la hoja de cálculo, bien por no saber utilizarla o por desconocer gran parte de las posibilidades que ofrece, el uso de la misma es algo fundamental y que debería conocer cualquier estudiante de matemáticas en la actualidad.

En este apartado, vamos a justificar las mejoras incorporadas, ver los objetivos didácticos, los contenidos y las competencias básicas que se buscan con cada actividad, también se describen dichas actividades y se analizan los resultados y las dificultades con las que nos hemos encontrado, tanto alumnos como profesores, en la realización de las mismas. Además, haremos propuestas de mejora.

Finalmente se adjunta el examen realizado, así como los resultados obtenidos y las conclusiones de los mismos.

### 5.1. PRÁCTICA 1 (USO DE LA HOJA DE CÁLCULO)

#### **Justificación**

En la actualidad el uso de las nuevas tecnologías es cada vez más generalizado, máxime entre los jóvenes, que cada vez muestran más interés y capacidades en el manejo de las mismas.

Resulta por tanto clave, que conozcan las posibilidades que les ofrece la hoja de cálculo no sólo en el campo de la Estadística o las matemáticas, sino en el resto de campos como puedan ser la física, ingeniería, economía, administración de empresas, etc.

Se trata por lo tanto con esta práctica de presentar la hoja Excel al alumnado, para que pueda conocer las posibilidades que le brinda, y sea el mismo quien posteriormente muestre interés por las misma y por iniciativa propia decida seguir ampliando sus conocimientos de la hoja de cálculo.

#### **Objetivos didácticos**

- Presentar la hoja de cálculo al alumno
- Repasar conceptos básicos de estadística unidimensional
- Calcular medidas estadísticas con ordenador

- Realizar gráficos estadísticos con ordenador.

### **Contenidos:**

Estadística unidimensional:

- Variables estadísticas unidimensionales.
- Gráficos estadísticos.
- Medidas de centralización.
- Medidas de dispersión.

### **Competencias básicas**

Principales:

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.

Secundarias:

- Aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

### **Descripción de la actividad**

Previamente a la realización de esta práctica, se ha tenido en cuenta que el software que se utiliza en el aula de informática del colegio es libre, y no coincide exactamente con la hoja Excel, si bien esto no ha supuesto mayor problema por la similitud y compatibilidad entre ambas.

Además, se les facilita la solución para que a los alumnos que no les dé tiempo a terminarla completamente, puedan disponer de ella.

La realización de la actividad se realiza paso por paso junto con los alumnos para que puedan ir comprobando las posibilidades de la Hoja de Cálculo. Antes de iniciar con la realización de la Hoja de Cálculo, es necesario tener una sesión donde se les indique unos conceptos básicos de la estadística para su total comprensión. Durante el desarrollo de la actividad, se les hacen las indicaciones teóricas necesarias.

La práctica tiene dos partes, en la primera hay que calcular medidas estadísticas con ordenador y en la segunda, realizar gráficos estadísticos con ordenador.

Tanto el enunciado, como el procedimiento completo de la resolución, y la salida de la hoja Excel se adjuntan en el Anexo 4.

### **Resultados**

Los alumnos se han mostrado muy interesados en la práctica, el hecho de haber ido al aula de informática a dar la clase de matemáticas y hacerlo de una forma diferente, en este caso usando una hoja de cálculo, ha provocado un extra de motivación en ellos. Muchos se han sorprendido de las altas prestaciones que ofrece el programa.

Mediante la hoja de cálculo, consiguen además tener rápidamente una visualización gráfica de los conceptos matemáticos que a través de sus expresiones analíticas es más complicado entender para los alumnos.

Todo esto hace que vea las matemáticas de una forma más atractiva al usar las nuevas tecnologías, por lo que el alumno se mostrará menos reticente al aprendizaje de las matemáticas.

Por lo tanto, podríamos calificar esta actividad como muy positiva.

### **Dificultades**

Profesor:

- Al ser usuario de Excel, y haber utilizado el libre office en el aula de informática, se necesita una pequeña adaptación. Para facilitar esta cuestión, se carga el archivo realizado en Excel con el libre office en lugar de hacerlo nuevamente.
- Problemas con el proyector, coincidiendo además que justo el día de la práctica el encargado de mantenimiento del aula de informática no estaba en el centro.
- Dificultades para conseguir reservar el aula de informática, siempre está ocupada y sólo se ha podido dar allí una clase.

Alumnos:

- La mayoría era la primera vez que utilizaban una hoja de cálculo, por lo que he pasado por las mesas para aclarar dudas y a los que presentaban más dificultades les ponía con otro compañero.
- Algunos, al no tener el nivel básico de conocimientos de Estadística, además de aprender a usar la hoja Excel tenían que aprender conceptos teóricos nuevos.

### **Propuestas de mejora**

- Mayor disponibilidad del aula de informática.
- Elaboración de un manual básico de Excel, con los comandos e instrucciones necesarias para realizar la práctica, para facilitar su realización al alumno.
- Disponer de dos profesores, uno que haga la explicación desde su ordenador y el otro que vaya aclarando dudas por las mesas.

## 5.2. PRÁCTICA 2 (TRABAJO AUTÓNOMO PUNTUABLE)

### **Justificación**

La práctica se propone por su interés didáctico, y es la que se realiza en el bloque de Estadística de la asignatura “Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas” del máster y que es impartida por el profesor Gil Lorenzo.

Tal y como ya se ha comentado anteriormente en el apartado 4.2 “Evaluación continua”, la prueba consta de 3 ejercicios, que abarcan toda la temática impartida, tanto de estadística unidimensional como bidimensional. Se trata de problemas largos, orientados a repasar con profundidad toda la temática, y de tal forma que el alumno que la realice no deberá tener ningún problema para aprobar.

Mediante esta práctica, que será puntuable, se pretende motivar al alumno premiando el hecho de esforzarse y realizar el trabajo de manera autónoma.

Conforme se vaya avanzando en los conceptos teóricos en clase, el alumno irá disponiendo progresivamente de las herramientas necesarias para resolver la práctica, lo que le obligará a llevar un seguimiento continuo de la asignatura para poder desarrollar la práctica.

Su presentación, es obligatoria, y a todos los alumnos que la presenten se les añade un punto en la nota del examen, independientemente de que esté bien o no, pues se pretende valorar el esfuerzo sin discriminar a los alumnos con menores capacidades.

Por lo tanto, el que no quiera hacerla al menos deberá entregar una hoja en la que se justifique por qué no la ha hecho. Se pretende, además, ver en qué partes muestran más dificultades los alumnos para repasarlas, y en el caso de no hacerla conocer el motivo, así como fomentar la responsabilidad y toma de decisiones.

### **Objetivos didácticos**

#### **Estadística unidimensional:**

- Construir una tabla agrupando los datos en intervalos
- Realizar un histograma y su polígono de frecuencias
- Calcular medidas de centralización en variables continuas
- Estudiar conjuntamente la media y la desviación típica
- Elaborar una tabla de una variable discreta cuando el número de datos es grande
- Analizar datos mediante medidas de posición
- Interpretar las medidas estadísticas en una variable unidimensional
- Interpretar la media y la desviación típica conjuntamente

#### **Estadística bidimensional:**

- Estudiar la dependencia mediante tablas de contingencia
- Calcular la covarianza
- Calcular e interpretar el coeficiente de correlación
- Determinar y representar la recta de regresión



- Estimar valores utilizando la recta de regresión
- Agrupar los datos de variables bidimensionales en intervalos
- Construir las tablas de frecuencias marginales a partir de la tabla de doble entrada
- Interpretar una tabla de doble entrada
- Determinar la media de una de las variables a partir de la recta de regresión
- Determinar e interpretar el signo del coeficiente de correlación a partir de la recta de regresión
- Representar variables bidimensionales
- Calcular el coeficiente de correlación en tablas de doble entrada agrupadas en intervalos

### **Contenidos:**

#### **Estadística unidimensional:**

- Variable estadística unidimensional
- Tablas de frecuencias
- Gráficos estadísticos
- Medidas de centralización
- Medidas de posición
- Medidas de dispersión
- Análisis de medidas

#### **Estadística bidimensional:**

- Variable estadística bidimensional
- Tablas de doble entrada, marginales y condicionadas.
- Diagramas de dispersión
- Dependencia entre variables. Tablas de contingencia
- Correlación
- Rectas de regresión
- Estimación de resultados

### **Competencias básicas**

#### Principales:

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Aprender a aprender.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

#### Secundarias:

- Comunicación lingüística.
- Competencias sociales y cívicas.
- Competencia digital.

### **Descripción de la actividad**

Respecto a esta práctica, cabe señalar, que antes que día antes de su entrega se les facilitó la solución a los alumnos, para que pudieran comprobar si lo que habían hecho era correcto y en caso de estimarlo oportuno corregirlo. Además, se dedicó una clase a resolver las dudas que iban surgiendo en la resolución de la práctica y se les devolvió la práctica corregida, con anotaciones sobre los aspectos a revisar.

La Práctica 2 consta de tres ejercicios: el primero y el tercero de variable unidimensional continua y discreta respectivamente, y el segundo de variable bidimensional discreta.

En el Anexo 5 se adjuntan tanto el enunciado completo de los tres problemas, como su resolución.

### **Resultados**

En general, los alumnos se han mostrado interesados en la práctica, pues 15 de los 17 han resuelto la práctica totalidad. Sólo ha habido un alumno, que no la entrega, pero si entrega una hoja con la siguiente justificación “No lo he hecho porque no sé” y su compañero de mesa que la presenta, pero se limita a copiar los enunciados y poco más.

Evidentemente, este alumno es el que se ha comentado anteriormente en atención a la diversidad, y como al resto de compañeros también se le va a poner un punto más a la nota del examen, al haber presentado al menos la justificación.

Se pretende con esta práctica que el alumno, además de asumir la responsabilidad de realizar un trabajo de manera autónoma, sienta que se valora su esfuerzo independientemente de si realiza correctamente o no la práctica.

Por lo tanto, podríamos calificar esta actividad como positiva. Coincide además que los alumnos que mejor la han hecho, son curiosamente los que mejores notas han sacado en el examen.

### **Dificultades**

Profesor:

- Disparidad de criterios al calcular los percentiles, según cursos y editoriales.
- Las tablas de frecuencia bidimensionales se plantean por columnas en lugar de como una matriz, por indicación de la tutora del centro, con el fin de no liarles. Me ha parecido mucho menos intuitivo y que se pierde la visualización de la variable bidimensional.

Alumnos:

- Interpretar correctamente el enunciado de las preguntas (a veces se les preguntan unidades y responden en porcentaje, o no saben qué se les pregunta exactamente).
- Medidas de posición: mediana, cuartiles y percentiles.
- Representación del diagrama de sectores.

- Realización de las tablas de frecuencias agrupadas, a la hora de decidir el número y amplitud de los intervalos, y de adoptar la marca de posición.
- Concepto de recta de regresión.

### **Propuestas de mejora**

- Enunciados con menos datos, pues al no utilizar la hoja Excel, les lleva mucho tiempo.
- Enunciados más adaptados, para que entiendan exactamente lo que se les pide.
- Aunque se han aclarado dudas y se les ha facilitado la solución en el aula virtual, resolverla íntegramente en clase, utilizando también la hoja de cálculo.

Finalmente, y debido a la inquietud que manifestaron por la extensión de las tablas de datos de los enunciados, se **adopta ya una mejora**, y para tranquilizarles se les manda la Práctica 3 no evaluable, con dos problemas similares a los que se van a encontrar en el examen con el fin de que puedan hacerse una idea del tipo de preguntas y su duración. El enunciado y su resolución detallada se encuentra en el Anexo 6.

### **5.3. RESOLUCIÓN SIMULTÁNEA DE PROBLEMAS: PIZARRA Y HOJA EXCEL**

La resolución de problemas utilizando simultáneamente la pizarra blanca y la hoja Excel, proyectada en la pizarra digital, se ha aplicado en las siguientes actividades de Estadística bidimensional:

- Ejemplo Saber Hacer (Fig 20, Anexo 3)
- Ejemplo 13 (Fig 21, Anexo 3)
- Ejemplo 14 (Fig 21, Anexo 3)
- Ejemplos Saber Hacer y 8 (Fig 22 y 23, Anexo 3)

Los problemas resueltos con Excel han sido facilitados al alumno a través del aula virtual, para que puedan practicar en casa.

### **Justificación**

En la parte de Estadística bidimensional, al ser en este curso la primera vez que entra en el temario, se ha decidido la resolución simultánea de los problemas manualmente en la pizarra y con la hoja Excel proyectada en la pizarra digital.

Al utilizar la hoja Excel, además de conseguir una mayor motivación por parte del alumnado, conseguimos dedicar más tiempo a la explicación teórica del problema y menos a la fase de cálculo, que siempre resulta repetitiva y algo tediosa en Estadística.

Además, conseguimos mejorar considerablemente la visualización, tanto de gráficas de dispersión, como de las rectas de regresión al utilizar las herramientas de gráficos de Excel, lo que facilita la comprensión del alumno.

También fomentamos nuevamente la utilización de la hoja Excel, el uso del ordenador y la pizarra digital entre el alumnado, y que los alumnos puedan observar tanto las

ventajas como las desventajas de resolver los problemas haciendo uso o no de las nuevas tecnologías.

### **Objetivos didácticos**

#### **Estadística bidimensional:**

- Estudiar la dependencia mediante tablas de contingencia
- Calcular la covarianza
- Calcular e interpretar el coeficiente de correlación
- Determinar y representar la recta de regresión
- Estimar valores utilizando la recta de regresión
- Trabajar la estadística bidimensional con calculadora
- Agrupar los datos de variables bidimensionales en intervalos
- Construir las tablas de frecuencias marginales a partir de la tabla de doble entrada
- Interpretar una tabla de doble entrada
- Determinar la media de una de las variables a partir de la recta de regresión
- Determinar e interpretar el signo del coeficiente de correlación a partir de la recta de regresión
- Dibujar gráficos estadísticos bidimensionales con ordenador
- Realizar una recta de regresión con ordenador
- Representar variables bidimensionales
- Calcular el coeficiente de correlación en tablas de doble entrada agrupadas en intervalos

### **Contenidos:**

#### **Estadística bidimensional:**

- Variable estadística bidimensional
- Tablas de doble entrada, marginales y condicionadas
- Diagramas de dispersión
- Dependencia entre variables. Tablas de contingencia
- Correlación
- Rectas de regresión
- Estimación de resultados
- Estadística con ordenador

### **Competencias básicas**

#### Principales:

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.

#### Secundarias:

- Aprender a aprender.

- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

### **Descripción de la actividad**

Mediante esta actividad, se realizan los problemas más completos del tema, que consisten en obtener las rectas de regresión, cuyas expresiones analíticas vienen dadas por:

- Recta de regresión de y sobre x:  $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$
- Recta de regresión de x sobre y:  $x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \cdot (y - \bar{y})$

Para ello es necesario obtener previamente:

- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i}{N}$  (Media de x)
- $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot y_i}{N}$  (Media de y)
- $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$  (Covarianza)
- $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2$  (Varianza de x)
- $\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot y_i^2}{N} - \bar{y}^2$  (Varianza de y)

Los enunciados de todas las actividades realizadas se encuentran en el Anexo 3, y su resolución mediante hoja Excel se adjunta en el Anexo 7. El archivo Excel ha sido puesto a disposición de los alumnos en el Aula virtual.

### **Resultados**

Mediante esta metodología de resolución de los problemas, se pretende combinar las dos anteriores. Por una parte, se fomenta el trabajo autónomo, pues muchas de las actividades se mandan para casa y luego se resuelven en clase. Pero por otra, también se utiliza la hoja de cálculo en su resolución, lo que les permite establecer una conexión entre las dos formas de realizar los ejercicios.

Se trata entonces de que alumno vea, que los dos procedimientos son igualmente válidos y que no son excluyentes, sino que se complementan perfectamente. También les puede servir la utilización de la hoja de cálculo para comprobar que los resultados obtenidos en los ejercicios resueltos a mano son correctos.

Por lo tanto, podríamos calificar esta actividad como positiva, pues se refuerzan mediante la utilización de la hoja de cálculo los conocimientos teóricos adquiridos y se facilita la resolución de problemas.

### **Dificultades**

Profesor:

- La principal dificultad, ha sido la imposibilidad de disponer del aula de informática, al estar siempre llena. Si bien lo que a priori parece una dificultad,

posiblemente haya sido una **ventaja**, pues en lugar de hacer un ejercicio de este tema mediante la hoja Excel, se han resuelto varios, debido a que al proyectarlos el profesor no se pierde tanto tiempo y se han acabado dedicando más de una sesión a la resolución de ejercicios por esta metodología.

- La preparación de las clases requiere de una mayor dedicación para la preparación del material, y a tener que transportar continuamente el portátil.

Alumnos:

- La principal dificultad, es que al no realizar ellos la hoja de cálculo, aunque ven los resultados, no adquieren la pericia en el manejo de la hoja de cálculo.
- Inseguridad cuando el coeficiente de correlación sale negativo.
- Concepto de recta de regresión.

### **Propuestas de mejora**

- Hacer al menos una de las sesiones de rectas de regresión en el aula de informática.
- Enseñar el programa libre Geogebra, que también permite hacer Rectas de regresión.
- Elaborar un manual básico de Excel, con los comandos e instrucciones necesarias para realizar la práctica.

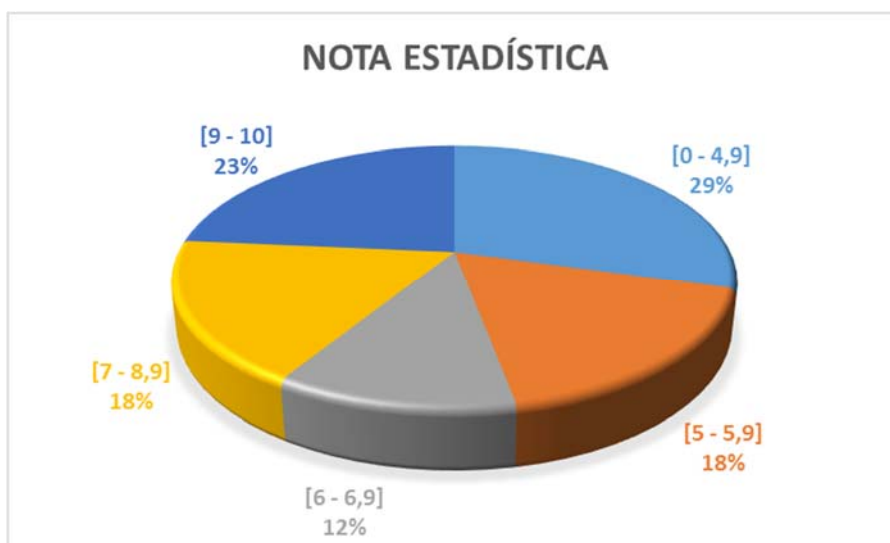
## 5.4. RESULTADOS EVALUACIÓN FINAL

### **Resultados**

El examen escrito ha tenido una duración de una hora y media. Ha sido realizado por la totalidad de los alumnos de la clase, que son 17 y los resultados han sido los siguientes:

Alumno	Nota Examen (sobre 10)	Nota Examen (sobre 9)	Nota Práctica	Nota Estadística (sobre 10)
1	5,8	5,3	+1	6,3
2	1,3	1,1	+1	2,1
3	6,3	5,6	+1	6,6
4	7,5	6,8	+1	7,8
5	7,5	6,8	+1	7,8
6	10,0	9,0	+1	10,0
7	8,8	7,9	+1	8,9
8	9,6	8,6	+1	9,6
9	4,8	4,3	+1	5,3
10	5,4	4,9	+1	5,9
11	0,8	0,8	+1	1,8
12	3,8	3,5	+1	4,5
13	4,6	4,1	+1	5,1
14	1,7	1,5	+1	2,5
15	10,0	9,0	+1	10,0
16	10,0	9,0	+1	10,0
17	0,0	0,0	+1	1,0
Nota Media (sobre 10)				6,2

*Figura 15: Resultados del examen*



*Figura 16: Diagrama de sectores de los resultados del examen*

Finalmente, pese a haber introducido mejoras en la forma de dar la clase para tratar de motivar al alumno, haber dado todas las prácticas resueltas, e incluso haber facilitado una práctica similar a la del examen, el porcentaje de suspensos es de un 29 %.

Por lo tanto, esto es un indicador de que hay que seguir haciendo mejoras, pero también debe ser el alumnado el que cambie su actitud y hábitos de estudio. Prueba de ello, es que de los alumnos que aprueban, el mayor porcentaje (23 %) está entre los que sacan entre un 9 y un 10, lo que indica que sí se ha hecho llegar la asignatura al que realmente quiere aprender.

## 6. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL

En general la valoración que tengo de la fase de prácticas y la implementación del uso de la hoja Excel en la Unidad Didáctica de Estadística ha sido muy buena, pues el asumir durante unas semanas el rol de profesor me ha permitido tener una idea clara del día a día en las aulas, y poder conocer de primera mano la respuesta de los alumnos frente a las distintas metodologías utilizadas.

Una de las mayores dificultades encontradas, ha sido el escaso conocimiento inicial de los alumnos de la hoja de cálculo, y la falta de disponibilidad del aula de informática, pues sólo la he podido utilizar una vez en tres semanas. Me ha sorprendido el hecho de que ha sido la primera vez que utilizan el ordenador en la clase de matemáticas, e incluso el desconocimiento también en el uso de la calculadora por parte de los alumnos.

Otra dificultad con la que me he encontrado, debido a la falta de experiencia, ha sido que pese a haber llevado muy bien planificadas las clases, el tiempo necesario para realizar cualquier actividad siempre es superior al previsto inicialmente. Pese a ello, creo que ha sido razonable explicar en 15 sesiones los dos temas de Estadística y haber realizado el examen, aunque me hubiera gustado disponer de algo más de tiempo para hacer más ejercicios.

Debido a que el uso de las TIC es cada vez mayor en la sociedad actual, así como la transversalidad de las hojas de cálculo, e incluso bases de datos y procesadores de texto, podría ser necesario introducirlas como una parte del currículo obligatorio de los alumnos, y no simplemente como una herramienta auxiliar a las asignaturas, para adquirir la competencia digital. Han pasado de ser un complemento a ser un requisito indispensable en el mundo laboral, por lo que el sistema educativo debería incluirlas sistemáticamente en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Finalmente, quisiera hacer una reflexión personal, en cuanto a que además de implementar el uso de las nuevas tecnologías, innovar continuamente en las metodologías de enseñanza y formar cada vez más al profesorado, hemos de acompañar todos estos esfuerzos con una educación basada en valores como el esfuerzo, la dedicación y el respeto hacia los demás. Sólo así, con la implicación de todos los que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, lograremos alcanzar los objetivos buscados.



## 7. BIBLIOGRAFÍA

Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A. & Del Río, J. (2016) *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I*. Madrid: Ed. Santillana.

Lorenzo, G. "Práctica de Estadística". SAP 504 Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Universidad Jaime I. 2017.

Bernat, A. "Millora educativa per a l'estadística descriptiva bidimensional al Batxillerat". TFM. Universidad Jaime I. 2014.

N.C.T.M. (2003): El uso de la tecnología en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Ley Orgánica 2/2006 (LOE), de 3 de mayo, de Educación.

Recomendación 2006/962/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006.

Ley Orgánica 8/2013 (LOMCE), de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunitat Valenciana

## **ANEXO 1:**

CONTENIDOS Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN, SEGÚN ANEXO I DEL DECRETO 87/2015, Y SEGÚN ANEXO I DEL REAL DECRETO 1105/2014



Estadística y Probabilidad de 1º de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias sociales: Contenidos, Criterios de evaluación y Estándares de aprendizaje evaluables, según Anexo I del Real Decreto 1105/2014.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<b>Bloque 4. Estadística y Probabilidad</b>		
<p>Estadística descriptiva bidimensional: Tablas de contingencia. Distribución conjunta y distribuciones marginales. Distribuciones condicionadas. Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas. Independencia de variables estadísticas. Dependencia de dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube de puntos. Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal. Regresión lineal. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas. Coeficiente de determinación. Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades. Variables aleatorias continuas. Función de densidad y de distribución. Interpretación de la media, varianza y desviación típica. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.</p>	<p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con la economía y otros fenómenos sociales y obtener los parámetros estadísticos más usuales mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando la dependencia entre las variables.</p> <p>2. Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y de realizar predicciones a partir de ella, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos económicos y sociales.</p> <p>3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.</p> <p>4. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.</p> <p>5. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.</p>	<p>1.1. Elabora e interpreta tablas bidimensionales de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.</p> <p>1.2. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos más usuales en variables bidimensionales para aplicarlos en situaciones de la vida real.</p> <p>1.3. Halla las distribuciones marginales y diferentes distribuciones condicionadas a partir de una tabla de contingencia, así como sus parámetros para aplicarlos en situaciones de la vida real.</p> <p>1.4. Decide si dos variables estadísticas son o no estadísticamente dependientes a partir de sus distribuciones condicionadas y marginales para poder formular conjeturas.</p> <p>1.5. Usa adecuadamente medios tecnológicos para organizar y analizar datos desde el punto de vista estadístico, calcular parámetros y generar gráficos estadísticos.</p> <p>2.1. Distingue la dependencia funcional de la dependencia estadística y estima si dos variables son o no estadísticamente dependientes mediante la representación de la nube de puntos en contextos cotidianos.</p> <p>2.2. Cuantifica el grado y sentido de la dependencia lineal entre dos variables mediante el cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal para poder obtener conclusiones.</p> <p>2.3. Calcula las rectas de regresión de dos variables y obtiene predicciones a partir de ellas.</p> <p>2.4. Evalúa la fiabilidad de las predicciones obtenidas a partir de la recta de regresión mediante el coeficiente de determinación lineal en contextos relacionados con fenómenos económicos y sociales.</p> <p>3.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.</p> <p>3.2. Construye la función de probabilidad de una variable discreta asociada a un fenómeno sencillo y calcula sus parámetros y algunas probabilidades asociadas.</p> <p>3.3. Construye la función de densidad de una variable continua asociada a un fenómeno sencillo y calcula sus parámetros y algunas probabilidades asociadas.</p> <p>4.1. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica.</p> <p>4.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica y las aplica en diversas situaciones.</p> <p>4.3. Distingue fenómenos que pueden modelizarse mediante una distribución normal, y valora su importancia en las ciencias sociales.</p> <p>4.4. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica, y las aplica en diversas situaciones.</p> <p>4.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida.</p> <p>5.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.</p> <p>5.2. Razona y argumenta la interpretación de informaciones estadísticas o relacionadas con el azar presentes en la vida cotidiana.</p>

Tabla 2

**ANEXO 2:**

PRUEBA INICIAL

Nombre: \_\_\_\_\_

1.- ¿Quieres cursar estudios Universitarios? SI NO Titulación \_\_\_\_\_

2.- Define con tus propias palabras qué es la Estadística y la Probabilidad. Indica alguna diferencia.

3.- Dados los siguientes valores: 1, 2, 2, 3, 3, 3

Calcula la media, la moda y la mediana

4.- Si un ciclista sube el Desierto de las Palmas que tiene una longitud de 10 km a una velocidad de 10 km/h y baja esos mismos 10 km a 20 km/. ¿Cuál es la velocidad media?

- a) 13,33 km/h      b) 15 km/h      c) 17,5 km/h

(Solución: a)

5.- Rellenar la casilla vacía a la izquierda con la figura más lógica (a b c d) de la derecha.

	<b>a</b>		<b>b</b>	
	<b>c</b>		<b>d</b>	

Solución: \_\_\_\_

	<b>a</b>		<b>b</b>	
	<b>c</b>		<b>d</b>	

Solución: \_\_\_\_

(Solución: d, c)

6.- ¿Sabes manejar la hoja Excel? SI NO Nivel: \_\_\_\_\_

¿Conoces el software R? SI NO Nivel: \_\_\_\_\_

¿Conoces el software Geogebra? SI NO Nivel: \_\_\_\_\_

¿Tu calculadora tiene funciones de estadística? ¿Sabes utilizarlas? SI NO Nivel: \_\_\_\_\_

### **ANEXO 3:**

ENUNCIADOS EJERCICIOS LIBRO

La totalidad de las Figuras han sido tomadas del libro de texto “Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I” de la editorial Santillana.

**SABER HACER**

**Construir una tabla agrupando los datos en intervalos**

► En una encuesta sobre hábitos alimenticios, se ha preguntado a 24 personas por su peso, en kilogramos, y se han obtenido estas respuestas.  
61 39 80 45 57 66 77 39 57 59 54 58 69 73 81 72 69 41 53 52 63 43 68 49

Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de la misma longitud. ¿Qué porcentaje de personas pesan menos de 57 kg?

**PRIMERO.** Se calcula el número de intervalos en los que se agrupan estos datos mediante una aproximación de la raíz cuadrada del número de datos.  
 $\sqrt{N} = \sqrt{24} = 4,9 \approx 5 \rightarrow$  Hay que considerar 5 intervalos.

**SEGUNDO.** Se halla la amplitud de cada intervalo mediante el cociente de la diferencia entre el valor máximo, *Máx*, y el mínimo, *Mín*, y el número de intervalos.  
$$\frac{Máx - Mín}{\sqrt{N}} = \frac{81 - 39}{\sqrt{24}} = 8,57$$

El primer número entero mayor que este cociente, 9, es la amplitud de los intervalos, comenzando por el valor mínimo, 39 kg.

**TERCERO.** Se determinan los intervalos y se elabora la tabla.

Al completar la tabla, conviene indicar también las marcas de clase, es decir, los puntos medios de cada intervalo para calcular las distintas medidas estadísticas.

Peso	$x_i$	$f_i$	$h_i = \frac{f_i}{N}$	$F_i = \sum_{j=1}^i f_j$	$H_i = \sum_{j=1}^i \frac{f_j}{N}$
[39, 48)	43,5	5	0,21	5	0,21
[48, 57)	52,5	4	0,17	9	0,38
[57, 66)	61,5	6	0,25	15	0,63
[66, 75)	70,5	6	0,25	21	0,88
[75, 84)	79,5	3	0,12	24	1
<b>Total</b>		<b>N = 24</b>	<b>1</b>		

El porcentaje de personas que pesan menos de 57 kg corresponde a los intervalos [39, 48) y [48, 57) con frecuencia relativa acumulada 0,38; el 38% del total.

Figura 1

**ACTIVIDADES**

4. En una clase con 30 alumnos se realiza una encuesta sobre el número de aplicaciones para el *smartphone* que han comprado en el último mes, y se han obtenido estas respuestas.

5 2 3 1 6      6 2 0 1 3      0 1 1 2 3  
2 0 1 1 3      3 2 1 3 1      5 2 1 4 3

Organiza estos datos en una tabla de frecuencias.

5. Completa la tabla de frecuencias de la estatura del grupo de personas que aparece a continuación.

Estatura (cm)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195)
N.º de personas	40	85	25

¿Qué porcentaje de personas miden entre 165 y 175 cm?

Figura 2



### ACTIVIDADES

6. En el polideportivo del barrio se ha formado un equipo juvenil de atletismo. Los miembros de este equipo tienen las siguientes edades.

16 17 14 16 13      15 15 17 17 14  
16 16 16 14 15      13 15 16 14 15

Representa estos datos en un gráfico que consideres apropiado utilizando sus frecuencias relativas.

7. Sobre un total de 722 703 coches, los cinco modelos más vendidos en 2013 son los siguientes.

Representalos como consideres más adecuado.

Modelo	Unidades
Citroën C4	23837
Renault Mégane	23310
Seat Ibiza	23141
Nissan Qashqai	20372
Volkswagen Polo	20283

Figura 3

### ACTIVIDADES

8. Completa la tabla de frecuencias y dibuja el histograma y el polígono de frecuencias.

Peso	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)
$f_i$	25	30	15	5

9. El número de veces que asistieron al cine 20 personas fueron:

12 15 33 8 19      7 16 11 6 21  
24 25 14 9 31      26 15 9 10 11

Agrupar los datos en intervalos de amplitud 5 y dibuja un histograma.

Figura 4

### EJEMPLO

- 2 En una encuesta realizada a 100 parejas se les pregunta el número de hijos que tienen, obteniendo los resultados de la tabla. Calcula e interpreta las medidas de centralización.

N.º de hijos	$f_i$	$F_i$
0	40	40
1	30	70
2	20	90
3	10	100

**Moda:** la frecuencia mayor es 40, que corresponde a 0 hijos  $\rightarrow Mo = 0$  hijos

Lo más frecuente entre las parejas encuestadas es no tener hijos.

**Mediana:** al haber 100 datos, hay que fijarse en el primer valor que cumple que  $F_i > 50$ . Así, los dos valores centrales son 1  $\rightarrow Me = 1$  hijo

Hay tantas parejas con 1 o más hijos como con 1 hijo o menos.

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{40 \cdot 0 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3}{100} = 1 \text{ hijo}$$

Las parejas tienen de media 1 hijo.

Figura 5

→ SABER HACER

🔑 **Calcular medidas de centralización en variables continuas**

► Calcula e interpreta la moda, la mediana y la media para los datos de esta encuesta sobre hábitos alimenticios.

Peso (kg)	(39, 48)	(48, 57)	(57, 66)	(66, 75)	(75, 84)
$f_i$	5	4	6	6	3

**PRIMERO.** Se hallan las marcas de clase de cada intervalo,  $x_i$ , se completa la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas y con el producto de la marca de clase por la frecuencia correspondiente.

Peso (kg)	$x_i$	$f_i$	$F_i$	$f_i \cdot x_i$
(39, 48)	43,5	5	5	217,5
(48, 57)	52,5	4	9	210
(57, 66)	61,5	6	15	369
(66, 75)	70,5	6	21	423
(75, 84)	79,5	3	24	238,5
Total		$N = \sum_{i=1}^5 f_i = 24$		$\sum_{i=1}^5 f_i \cdot x_i = 1458$

**SEGUNDO.** Se calculan las medidas de centralización aplicando las definiciones correspondientes.

$$\text{Media} \rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i \cdot x_i}{24} = \frac{217,5 + 210 + 369 + 423 + 238,5}{24} = \frac{1458}{24} = 60,75 \text{ kg}$$

**Mediana** → La primera frecuencia acumulada tal que  $F_i > \frac{N}{2}$  es  $F_3 = 15$ , que corresponde al intervalo mediano [57, 66).

**Moda** → La frecuencia mayor es 6, que corresponde a [57, 66) y [66, 75), que son los dos intervalos modales.

La mayoría de la gente pesa entre 57 y 75 kg, mientras que el peso medio es de 60,75 kg, valor que pertenece al intervalo mediano.

Figura 6

**EJEMPLO**

3 Se ha realizado una encuesta de satisfacción a la salida de una sesión de cine y los resultados se presentan en la tabla.

Grado de satisfacción	$f_i$
Nada satisfecho = 0	10
Poco satisfecho = 1	12
Satisfecho = 2	33
Muy satisfecho = 3	25
Genial = 4	20

Halla e interpreta los cuartiles y el percentil 90.

Se calculan las frecuencias acumuladas  $F_i$ .

$$F_1 = 10 \quad F_2 = 22 \quad F_3 = 55 \quad F_4 = 80 \quad F_5 = 100$$

$Q_1$  → 25% de 100 es 25 y de las frecuencias acumuladas la primera que es mayor que 25 es  $F_3 = 55 > 25 \rightarrow Q_1 = 2$

$Q_2$  → 50% de 100 es 50 y de las frecuencias acumuladas la primera que es mayor que 50 es  $F_3 = 55 > 50 \rightarrow Q_2 = 2$

$Q_3$  → 75% de 100 es 75 y de las frecuencias acumuladas la primera que es mayor que 75 es  $F_4 = 80 > 75 \rightarrow Q_3 = 3$

$P_{90}$  → 90% de 100 es 90 y de las frecuencias acumuladas la primera que es mayor que 90 es  $F_5 = 100 > 90 \rightarrow P_{90} = 4$

Se puede deducir que el 25% de los encuestados presenta un grado de satisfacción menor o igual que 2, igual que el 50% de los encuestados, luego al menos un 25% está satisfecho. El 75% no llega a genial pero como  $P_{90} = 4$ , al menos el 10% de la gente se lo pasó genial.

Figura 7

**EJEMPLO**

4 Las tablas muestran el gasto semanal en ocio de dos grupos, A y B, de estudiantes. Calcula e interpreta las medidas de dispersión de cada grupo.

Gasto (€)	$x_i$	$f_i$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
[0, 6)	3	7	567
[6, 12)	9	7	63
[12, 18)	15	7	63
[18, 24)	21	7	567
<b>Total</b>		<b>28</b>	<b>1260</b>

Gasto (€)	$x_i$	$f_i$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
[4, 8)	6	5	180
[8, 12)	10	5	20
[12, 16)	14	20	20
<b>Total</b>		<b>30</b>	<b>280</b>

$$\bar{x}_A = \frac{7 \cdot 3 + 7 \cdot 9 + 7 \cdot 15 + 7 \cdot 21}{28} = 12$$

$$\bar{x}_B = \frac{5 \cdot 6 + 5 \cdot 10 + 20 \cdot 14}{30} = 12$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1260}{28} = 45 \rightarrow \sigma = 6,71$$

$$\sigma_B^2 = \frac{280}{30} = 9,33 \rightarrow \sigma = 3,05$$

$$CV_A = \frac{6,71}{12} = 0,56$$

$$CV_B = \frac{3,05}{12} = 0,25$$

La media en los dos grupos es 12 €, pero las medidas de dispersión indican que el valor de la media es más representativo de los estudiantes del segundo grupo que de los del primer grupo.

Figura 8

**ACTIVIDADES**

16. Calcula las medidas de dispersión de estos datos.

Datos ( $x_i$ )	1	2	3	4	5
Frec. ( $f_i$ )	1	5	7	2	1

17. Calcula las medidas de dispersión de estos datos.

Datos ( $x_i$ )	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)
Frec. ( $f_i$ )	5	6	4	2

Figura 9

39. Añade un dato a este conjunto para que la media sea 6.  
 \*\*\* ¿Varía la mediana?

3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 7

Figura 10

42. Dados los siguientes datos encuentra la cantidad  
 \*\*\* tal que sumada o restada a cada dato haga que la media sea 1.

$x_i$	1	2	3	4	5
$f_i$	2	1	3	2	2

Figura 11

**EJEMPLO**

2 Esta tabla muestra el número de personas por hogar,  $X$ , y el número de coches en cada uno,  $Y$ .

$Y \backslash X$	1	2	3	4	Total
1	7	10	11	16	44
2	0	2	6	7	15
3	0	0	1	5	6
Total	7	12	18	28	65

a) ¿Cuántos hogares están formados por 3 miembros?

b) ¿En cuántos hogares hay 2 coches?

c) ¿Cuántos hogares están formados por 4 miembros y tienen 2 coches?

a) De los encuestados, 18 hogares están formados por 3 miembros.

b) Hay 15 hogares en los que tienen 2 coches.

c) De los hogares formados por 4 miembros, en 7 de ellos tienen 2 coches.

Figura 12

**EJEMPLO**

- 3 Determina las tablas de frecuencia marginales de esta tabla de doble entrada.

Y \ X	1	2	3	4	Total
1	7	10	11	16	44
2	0	2	6	7	15
3	0	0	1	5	6
Total	7	12	18	28	65

Se consideran los valores de las variables  $X$  e  $Y$  por separado, y sus frecuencias.

Tabla de frecuencias marginales de  $X$

X	1	2	3	4	Total
Frec.	7	12	18	28	65

Tabla de frecuencias marginales de  $Y$ .

Y	1	2	3	Total
Frec.	44	15	6	65

Figura 13

**EJEMPLO**

- 4 La tabla de doble entrada recoge datos relativos al color del pelo,  $X$ , y al color de los ojos,  $Y$ , de una muestra.

Y \ X	Moreno	Castaño	Pelirrojo	Rubio	Total
Azul	2	1	0	6	9
Verde	3	8	3	7	21
Marrón	15	12	6	5	38
Negro	14	6	1	1	22
Total	34	27	10	19	90

- a) Determina la tabla de frecuencia para la variable  $Y$ , condicionada a  $X = \text{Moreno}$ .  
 b) Escribe la tabla de frecuencia para la variable  $X$ , condicionada a  $Y = \text{Verde}$ .

a) Se consideran los valores de la variable  $Y$  de individuos morenos.

Y/X = Moreno	Azul	Verde	Marrón	Negro	Total
Frecuencia	2	3	15	14	34

b) Se consideran los valores de  $X$  de individuos con los ojos verdes.

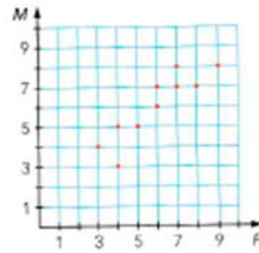
X/Y = Verde	Moreno	Castaño	Pelirrojo	Rubio	Total
Frecuencia	3	8	3	7	21

Figura 14

### EJEMPLO

- 5 Esta tabla refleja las notas de una evaluación de un grupo de alumnos en Física y Matemáticas. Dibuja su diagrama de dispersión.

Física (F)	6	7	9	6	4
Matemáticas (M)	7	8	8	6	3
Física (F)	7	3	8	4	5
Matemáticas (M)	7	4	7	5	5



Se representa con un punto cada dato de la variable, siendo la primera coordenada la nota obtenida en Física, y la segunda, la nota obtenida en Matemáticas.

Figura 15

### EJEMPLO

- 6 Esta tabla refleja el número de aciertos en 4 preguntas de Ciencias, X, y 2 de Actualidad, Y, a un grupo de gente. Dibuja su diagrama de dispersión.

Y \ X	0	1	2	3	4
0	0	3	0	2	1
1	3	0	1	1	3
2	2	1	0	2	1

Se dibujan en unos ejes cartesianos los pares de valores como si todos tuvieran la misma frecuencia y después se duplica el tamaño de los que tienen frecuencia 2: (0, 2), (3, 0) y (3, 2) y se triplica el tamaño de los que tienen frecuencia 3: (0, 1), (1, 0) y (4, 1).

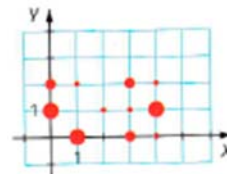
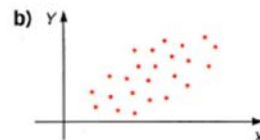
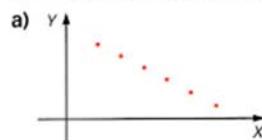


Figura 16

### EJEMPLO

- 7 Decide si las variables representadas en estos diagramas de dispersión presentan algún tipo de dependencia.



- a) La nube de puntos se ajusta completamente a una recta cuya pendiente es negativa: existe dependencia lineal exacta y negativa entre las variables.  
b) La nube de puntos se aproxima poco a una recta y cuando X crece, Y también crece: existe dependencia lineal débil y positiva entre las variables.

Figura 17

**SABER HACER**

**Estudiar la dependencia mediante tablas de contingencia**

▶ Se quiere estudiar si el género de los estudiantes, X, influye a la hora de cursar carreras de ciencias o de letras, Y.

Y \ X	Hombre	Mujer	Total
Ciencias	28	42	70
Letras	52	78	130
Total	80	120	200

**PRIMERO.** Se calculan las tablas marginales y las condicionadas.

Y/X = H	$f_i$	Y/X = M	$f_i$	Y	$f_i$
C	28	C	42	Ciencias	70
L	52	L	78	Letras	130
<b>Total</b>	<b>80</b>	<b>Total</b>	<b>120</b>	<b>Total</b>	<b>200</b>

X/Y = C	H	M	Total	X/Y = L	H	M	Total	X	H	M	Total
$f_i$	28	42	70	$f_i$	52	78	130	$f_i$	80	120	200

**SEGUNDO.** Se comprueba si las filas y las columnas son proporcionales entre sí.

$$\frac{28}{70} = \frac{52}{130} = \frac{80}{200} \quad \frac{42}{70} = \frac{78}{130} = \frac{120}{200} \quad \frac{28}{80} = \frac{42}{120} = \frac{70}{200} \quad \frac{52}{80} = \frac{78}{120} = \frac{130}{200}$$

Si son proporcionales, luego el género y el tipo de carrera escogida son independientes.

Figura 18

**ACTIVIDADES**

9. ¿Tener mascota, X, influye para aprobar Matemáticas, Y?

Y \ X	Si	No
Aprobado	10	15
Suspenso	30	45

10. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno para que sean independientes.

Y \ X	A	B	Total
C			175
D			325
Total	200	300	

Figura 19

**SABER HACER**

**Calcular la covarianza**

▶ Calcula la covarianza de estos datos.

Y \ X	1	2	3	4	Total
1	7	10	11	16	44
2	0	2	6	7	15
3	0	0	1	5	6
Total	7	12	18	28	65

**PRIMERO.** A partir de las tablas marginales, se determina la media de cada una de las variables.

$$\bar{x} = 3,031 \quad \bar{y} = 1,415$$

**SEGUNDO.** Se halla la covarianza con los datos de cada variable y sus frecuencias.

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ij} \cdot x_i \cdot y_j}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{293}{65} - 3,031 \cdot 1,415 = 4,508 - 4,289 = 0,219$$

Figura 20

## ACTIVIDADES

13. Representa el diagrama de dispersión y halla el coeficiente de correlación de esta variable.

X	39	43	40	40	42	41	42	38	39	44
Y	167	184	177	168	185	173	180	164	170	194

¿Qué relación puedes describir entre ellas?

14. La tabla muestra la renta per cápita en miles de euros, X, y la esperanza de vida en años, Y, en 8 países.

X	12	40	34	6	30	42	2	15	9
Y	65	79	75	63	74	82	60	62	62

¿Qué relación puedes describir entre ellas?

Figura 21

## SABER HACER

### Determinar y representar la recta de regresión

- Se quiere determinar cómo influye la velocidad en los accidentes de tráfico. Para ello se ha tomado nota del número de vehículos que circulan a velocidad mayor que 120 km/h en una autovía y los accidentes que se producen en ella. Halla la recta de regresión y represéntala con el diagrama de dispersión.

N.º de vehículos	7	15	18	20
N.º de accidentes	4	8	10	13

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$
7	4	49	16	28
15	8	225	64	120
18	10	324	100	180
20	13	400	169	260
<b>Totales</b>	<b>60</b>	<b>998</b>	<b>349</b>	<b>588</b>

**PRIMERO.** Se construye una tabla de frecuencias con las columnas necesarias para calcular las medidas estadísticas.

**SEGUNDO.** Se calcula la media de cada variable, la varianza de X y la covarianza.

$$\bar{x} = \frac{60}{4} = 15 \quad \bar{y} = \frac{35}{4} = 8,75 \quad \sigma_x^2 = \frac{998}{4} - 15^2 = 24,5$$

$$\sigma_{xy} = \frac{588}{4} - 15 \cdot 8,75 = 15,75$$

**TERCERO.** Se determina la recta de regresión de Y sobre X a partir de su ecuación.

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y - 8,75 = \frac{15,75}{24,5}(x - 15) \rightarrow y = 0,643x - 0,893$$

**CUARTO.** Se representan el diagrama de dispersión y la recta de regresión obtenida.

Figura 22

### EJEMPLO

- 8 Determina la recta de regresión de X sobre Y sabiendo que  $\bar{x} = 15$ ;  $\bar{y} = 8,75$ ;  $\sigma_x^2 = 24,5$ ;  $\sigma_y^2 = 10,688$  y  $\sigma_{xy} = 15,75$ .

Como se conocen todas las medidas estadísticas que se necesitan, se determina la recta de regresión de X sobre Y a partir de su ecuación.

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) \rightarrow x - 15 = \frac{15,75}{10,688}(y - 8,75) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1,474y + 2,106$$

Figura 23



## **ANEXO 4:**

PRÁCTICA 1 (USO DE LA HOJA DE CÁLCULO)

## Estadística con ordenador

### Calcular medidas estadísticas con ordenador

La tabla muestra las notas en un examen de matemáticas. Complétala y calcula la media, la varianza y la desviación típica con ayuda del ordenador.


**PRIMERO.** Se copia la tabla en una hoja de cálculo y se añaden las columnas necesarias para el resto de frecuencias y para obtener las medidas estadísticas.

Notas	$x_i$	N.º alumnos $f_i$	$F_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
[0, 2)		2			
[2, 4)		3			
[4, 6)		7			
[6, 8)		9			
[8, 10)		4			
Total					

**SEGUNDO.** Se completa la tabla. Se escriben las marcas de clase en la columna B.

Para las frecuencias acumuladas se escribe en la celda C2 la expresión  $=\text{SUMA}(C\$2:C2)$  y se copia en el resto de la columna.

Para completar la columna E y la columna F se escriben en E2 y F2 las expresiones  $=C2*B2$  y  $=C2*B2^2$  respectivamente y se copia en el resto de la columna.

La fila 7 se rellena seleccionando las tres casillas y pinchando en el icono .

Notas	$x_i$	N.º alumnos $f_i$	$F_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
[0, 2)	1	2	2	2	2
[2, 4)	3	3	5	9	27
[4, 6)	5	7	12	35	175
[6, 8)	7	9	21	63	441
[8, 10)	9	4	25	36	324
Total		25		145	969

**TERCERO.** Se calculan las medidas estadísticas.

- En la celda I3 se escribe  $=E7/C7$
- En la celda I4 se escribe  $=F7/C7-I3^2$
- En la celda I5 se escribe  $=\text{RAIZ}(I4)$

Notas	$x_i$	N.º alumnos $f_i$	$F_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
[0, 2)	1	2	2	2	2
[2, 4)	3	3	5	9	27
[4, 6)	5	7	12	35	175
[6, 8)	7	9	21	63	441
[8, 10)	9	4	25	36	324
Total		25		145	969
				$\bar{x}$	5,8
				$\sigma^2$	5,12
				$\sigma$	2,26

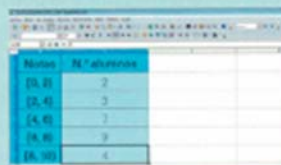
## Estadística con ordenador


### Realizar gráficos estadísticos con ordenador

Realiza un histograma con las notas del examen de Matemáticas que vienen recogidas en esta tabla.

**PRIMERO.** Se copia la tabla en una hoja de cálculo y se seleccionan las celdas que ocupan.

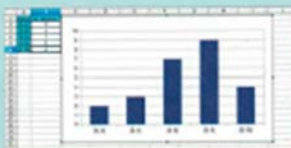
Notas	N.º alumnos
[0, 2)	2
[2, 4)	3
[4, 6)	7
[6, 8)	9
[8, 10)	4



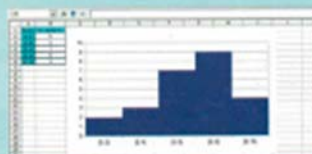
**SEGUNDO.** Se pincha con el cursor sobre el icono  para elegir el gráfico. En este caso, para dibujar un histograma elegimos **Columna**.



**TERCERO.** Se pulsa en **Siguiente** hasta llegar al cuarto paso, **Elementos de gráfico**, donde se desmarca la opción **Mostrar leyenda** y se selecciona **Finalizar**.



**CUARTO.** Se coloca el puntero sobre una de las barras y se presiona el botón derecho del ratón. A continuación se selecciona **Formato de series de datos...**, se sustituye **100%** por **0%** en **configuración/espacio**, para que las barras estén pegadas. Después se pulsa **Aceptar** y aparece el gráfico que se pretendía.



Partimos de la siguiente tabla con los datos de entrada:

VARIABLE		
Notas		Nº alumnos
Intervalos	$x_i$	$f_i$
[0,2[	1	2
[2,4[	3	3
[4,6[	5	7
[6,8[	7	9
[8,10[	9	4
		25

Figura 1: Datos de partida

Después, construimos la tabla de frecuencias completa:

VARIABLE								
Notas		Nº alumnos						
Intervalos	$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	
[0,2[	1	2	2	0,08	0,08	2	2	
[2,4[	3	3	5	0,12	0,2	9	27	
[4,6[	5	7	12	0,28	0,48	35	175	
[6,8[	7	9	21	0,36	0,84	63	441	
[8,10[	9	4	25	0,16	1	36	324	
		25				145	969	

Figura 2: Tabla de frecuencias

A continuación, obtenemos la media, la varianza y la desviación típica.

$\bar{X} =$	5,80	Media	
$\sigma^2 =$	5,12	Varianza	
$\sigma =$	2,26	Desviación típica	

Figura 3: Cálculo de parámetros

Además, se obtienen la media, la varianza y la desviación típica, directamente a partir de los datos con las funciones que incorpora la hoja Excel:

Comprobación con funciones de Excel directamente					
1	5	5	7	7	
1	5	5	7	9	
3	5	7	7	9	
3	5	7	7	9	
3	5	7	7	9	
$\bar{X} =$	5,8				
$\sigma^2 =$	5,12				
$\sigma =$	2,26				

Figura 4: Cálculo alternativo de parámetros

Finalmente realizamos la representación de los datos mediante un histograma de frecuencias absolutas y un diagrama de sectores:



Figura 5: Histograma

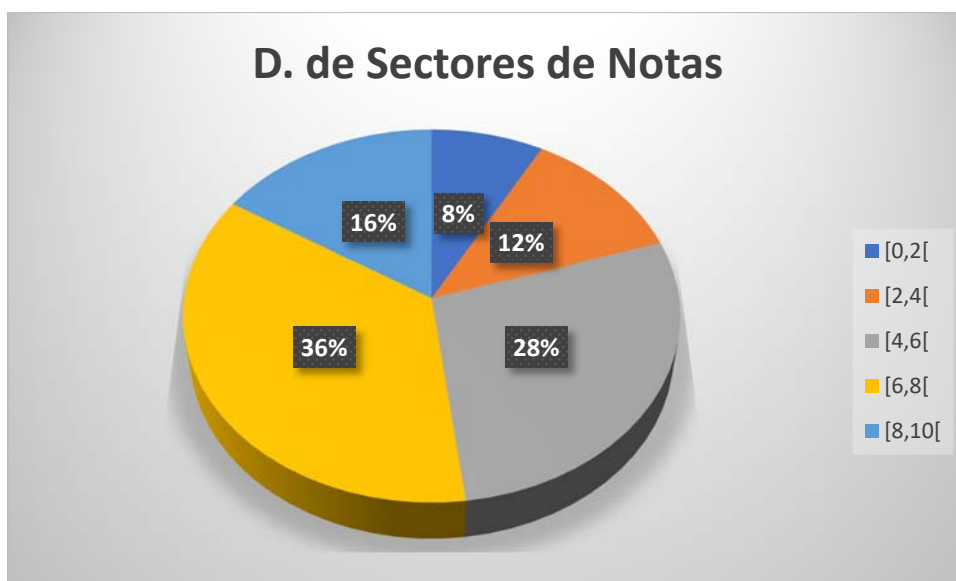


Figura 6: Diagrama de sectores

**Nota:** En la siguiente página, se adjunta la salida de la hoja Excel.

# PRÁCTICA 1: AULA INFORMÁTICA

## VARIABLE

Notas		Nº alumnos					
Intervalos	$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
[0,2[	1	2	2	0,08	0,08	2	2
[2,4[	3	3	5	0,12	0,2	9	27
[4,6[	5	7	12	0,28	0,48	35	175
[6,8[	7	9	21	0,36	0,84	63	441
[8,10[	9	4	25	0,16	1	36	324
		25				145	969

$$\bar{x} = 5,80 \text{ Media}$$

$$\sigma^2 = 5,12 \text{ Varianza}$$

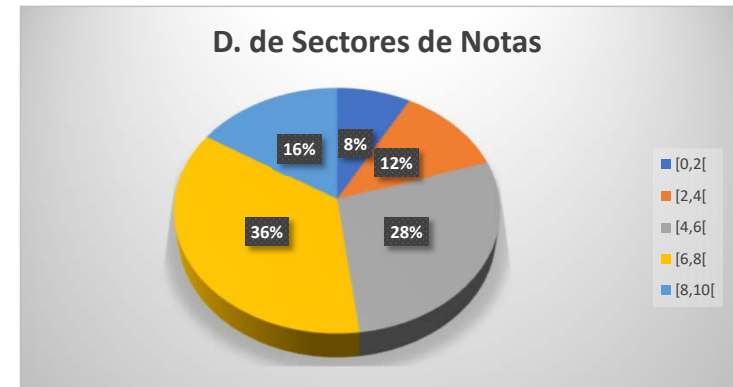
$$\sigma = 2,26 \text{ Desviación típica}$$

## GRÁFICO

Notas	Nº alumnos
Intervalos	$f_i$
[0,2[	2
[2,4[	3
[4,6[	7
[6,8[	9
[8,10[	4



## D. de Sectores de Notas



Comprobación con funciones de Excel directamente				
1	5	5	7	7
1	5	5	7	9
3	5	7	7	9
3	5	7	7	9
3	5	7	7	9
$\bar{x} =$	5,8			
$\sigma^2 =$	5,12			
$\sigma =$	2,26			

## **ANEXO 5:**

PRÁCTICA 2 (TRABAJO AUTÓNOMO PUNTUABLE)

La siguiente práctica se propone por su interés didáctico, y ha sido realizada en el bloque de Estadística de la asignatura SAP 504 “Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas” del Máster Universitario en Formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas, y que es impartida por el profesor Gil Lorenzo.

1.- En un hospital se desea hacer un estudio de los pesos de los neonatos. Para ello, se toman los datos siguientes:

3,2	3,7	4,2	4,6	3,7	3,0	2,9	3,1	3,0	4,5
4,1	3,8	3,9	3,6	3,2	3,5	3,0	2,5	2,7	2,8
3,0	4,0	4,5	3,5	3,5	3,6	2,9	3,2	4,2	4,3
4,1	4,6	4,2	4,5	4,3	3,2	3,7	2,9	3,1	3,5

Se pide:

- Organizar los datos de manera adecuada.
- Sabemos que los niños de menos de 3 kilos nacen prematuramente. ¿Qué porcentaje de niños prematuros nacen entre estos 40?
- Normalmente los niños que pesan más de 3,5 kilos no necesitan estar en la incubadora. ¿Cuántos están en esta situación?
- Representa gráficamente la información recogida, mediante un histograma y un diagrama de sectores.

2) Las siguientes calificaciones son los resultados de 25 alumnos en las asignaturas Matemáticas y Física:

<b>Matemáticas</b>	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10
<b>Física</b>	3	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10

Se pide:

- Organizar los datos de manera adecuada.
- ¿Qué porcentaje de alumnos tiene más de un 6 en las dos asignaturas?
- ¿Qué porcentaje de alumnos tiene más de un 6 en Matemáticas de los que han aprobado Física?
- ¿Qué porcentaje de alumnos tiene más de un 6 en Física de los que han aprobado Matemáticas?
- Representa gráficamente y comenta el resultado. ¿Hay alguna relación entre las dos variables?
- En caso afirmativo, encuentra la expresión analítica que se aproxima a esta relación de puntos.
- Obtener el coeficiente de correlación. ¿Existe dependencia lineal entre las variables?
- Si un alumno saca un 4 en Física, ¿qué valor se espera que saque en Matemáticas en función de los datos recogidos?



3) Cien alumnos que se presentaron al examen de Matemáticas, obtuvieron las siguientes calificaciones:

7	3	2	4	5	1	8	6	1	5
3	8	9	4	8	1	0	2	4	1
2	5	6	5	4	7	1	3	0	5
2	6	7	6	5	10	2	4	7	4
0	2	1	5	6	4	3	5	2	3
4	3	3	2	2	5	7	7	6	5
6	1	0	5	7	8	5	2	3	10
9	4	4	1	7	2	6	3	4	5
4	7	6	3	5	0	2	8	2	7
8	0	3	1	1	4	6	5	5	6

Se pide:

- Obtener la tabla de frecuencias completa.
- ¿Qué porcentaje de alumnos sacaron un 5?
- ¿Cuántos alumnos sacaron una nota superior a 6?
- ¿Qué porcentaje aprobó?
- ¿Cuál fue la nota media del examen? ¿Cuánto vale la desviación típica?
- ¿Cuál fue la nota más frecuente del examen? ¿Y la mediana?
- Representa gráficamente la frecuencia absoluta con un diagrama de barras.
- Representa gráficamente la frecuencia relativa con un diagrama de sectores.
- Representa gráficamente la frecuencia absoluta acumulada con un polígono de frecuencias.
- Si se hubiera querido suspender exactamente al 20% de la gente que se presentó, a partir de qué nota se hubiera tenido que aprobar?
- Si se hubiera querido aprobar exactamente al 20% de la gente que se presentó, a partir de qué nota se hubiera tenido que aprobar?

## SOLUCIÓN

### EJERCICIO 1

a) Organizar los datos de manera adecuada.

Tenemos 40 datos, luego  $N=40$

Nº de intervalos:  $\sqrt{N} = \sqrt{40} = 6,32 \rightarrow$  Tomamos 6 intervalos

Amplitud de los intervalos:  $a_i = \frac{\text{Recorrido}}{\text{nº intervalos}} = \frac{4,6-2,5}{6} = \frac{2,1}{6} = 0,35 \rightarrow$  Tomamos 0,5 (al tomar 0,5 en lugar de 0,35 el último intervalo no tendrá datos, así que tomamos 5 intervalos)

Peso (kg)	$x_i$	$f_i$	$h_i$	$F_i$	$H_i$
[2.5 , 3.0[	2,75	6	0,15	6	0,15
[3.0 , 3.5[	3,25	10	0,25	16	0,4
[3.5 , 4.0[	3,75	11	0,275	27	0,675
[4.0 , 4.5[	4,25	8	0,2	35	0,875
[4.5 , 5.0[	4,75	5	0,125	40	1
		40	1		

Donde:

$x_i$  = marca de posición

$f_i$  = frecuencia absoluta

$h_i$  = frecuencia relativa =  $f_i/N$

$F_i$  = frecuencia absoluta acumulada

$H_i$  = frecuencia relativa acumulada

b) Sabemos que los niños de menos de 3 kilos nacen prematuramente. ¿Qué porcentaje de niños prematuros nacen entre estos 40?

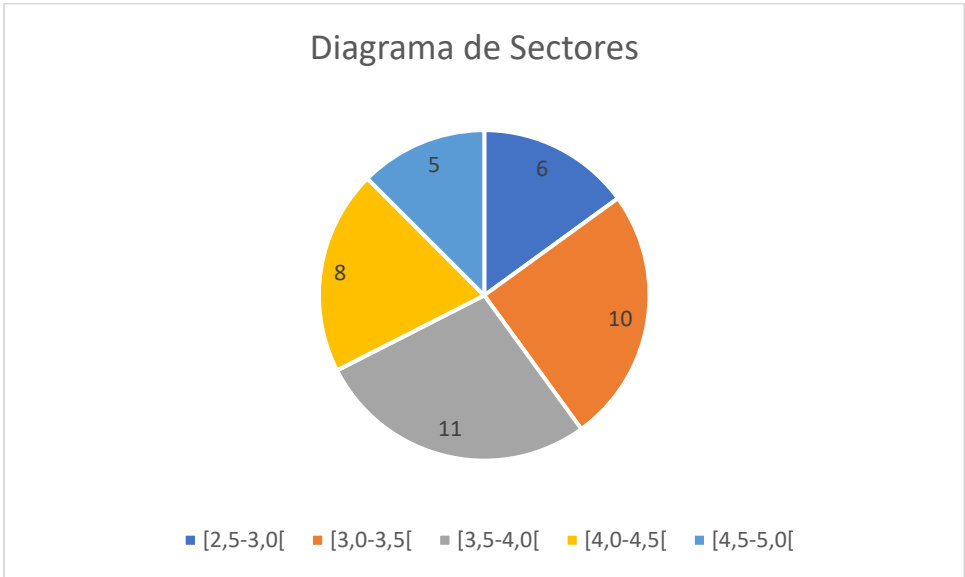
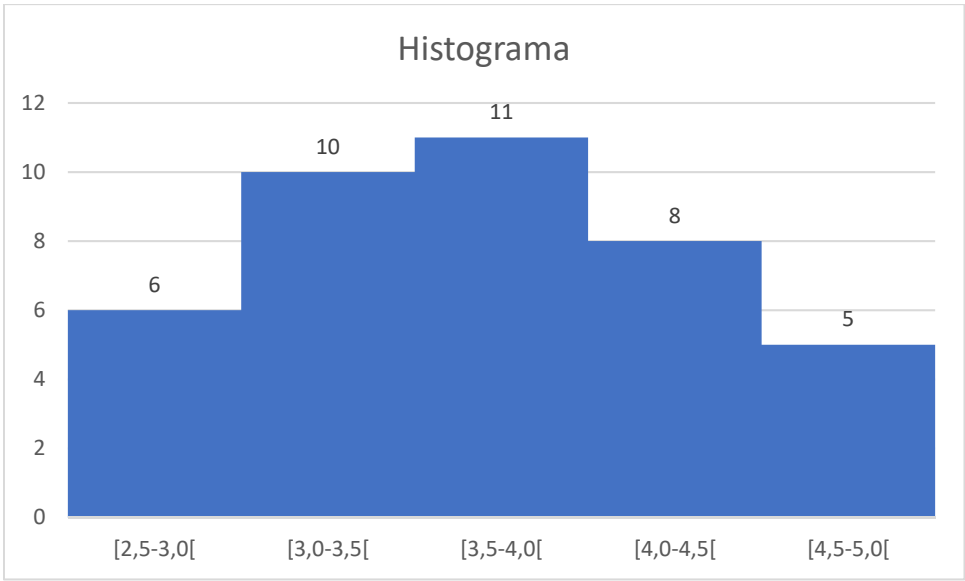
$h_1 \cdot 100 = 0,15 \cdot 100 = 15\%$  son prematuros (Recordar que  $h_1 = f_1/N = 6/40 = 0,15$ )

c) Normalmente los niños que pesan más de 3,5 kilos no necesitan estar en la incubadora. ¿Cuántos están en esta situación?

$N - F_2 = 40 - 16 = 24$

(o también  $f_3 + f_4 + f_5 = 11 + 8 + 5 = 24$ )

d) Representa gráficamente la información recogida, mediante un histograma y un diagrama de sectores.



## EJERCICIO 2

a) Organizar los datos de manera adecuada.

Mates $x_i$	Física $y_i$	$f_i$	$h_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
4	3	1	0,04	4	3	16	9	12	16	9
5	5	2	0,08	10	10	25	25	50	50	50
5	6	1	0,04	5	6	25	36	30	25	36
6	7	2	0,08	12	14	36	49	84	72	98
7	7	4	0,16	28	28	49	49	196	196	196
7	8	3	0,12	21	24	49	64	168	147	192
8	7	2	0,08	16	14	64	49	112	128	98
8	8	4	0,16	32	32	64	64	256	256	256
9	8	3	0,12	27	24	81	64	216	243	192
9	10	2	0,08	18	20	81	100	180	162	200
10	10	1	0,04	10	10	100	100	100	100	100
		<b>25</b>	<b>1</b>	<b>183</b>	<b>185</b>			<b>1404</b>	<b>1395</b>	<b>1427</b>

Donde:

$x_i$  = notas de matemáticas

$y_i$  = notas de física

$f_i$  = frecuencia absoluta

$h_i$  = frecuencia relativa =  $f_i/N$

b) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene más de un 6 en las dos asignaturas?

El número de alumnos que tienen más de un 6 en las dos asignaturas es:

$4 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 = 19$ . Como tenemos 25 alumnos, el porcentaje es  $(19/25) \cdot 100 = 76\%$

(también lo podemos hacer directamente a partir de las frecuencias relativas:

$(0,016 + 0,012 + 0,08 + 0,016 + 0,012 + 0,08 + 0,04) \cdot 100 = 0,76 \cdot 100 = 76\%$ )

c) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene más de un 6 en Matemáticas de los que han aprobado Física?

El número de alumnos que han aprobado física es:  $25 - 1 = 24$ .

De estos 24, veamos cuántos han sacado más de un 6 en matemáticas:

$$4 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 = 19.$$

Como tenemos 24 alumnos que han aprobado física, el porcentaje es  $(19/24) \cdot 100 = 79,16\%$

Nota: no confundir con el número de alumnos que tienen más de un 6 en Matemáticas y más de un 5 en Física.

d) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene más de un 6 en Física de los que han aprobado Matemáticas?

El número de alumnos que han aprobado matemáticas es:  $25 - 1 = 24$ .

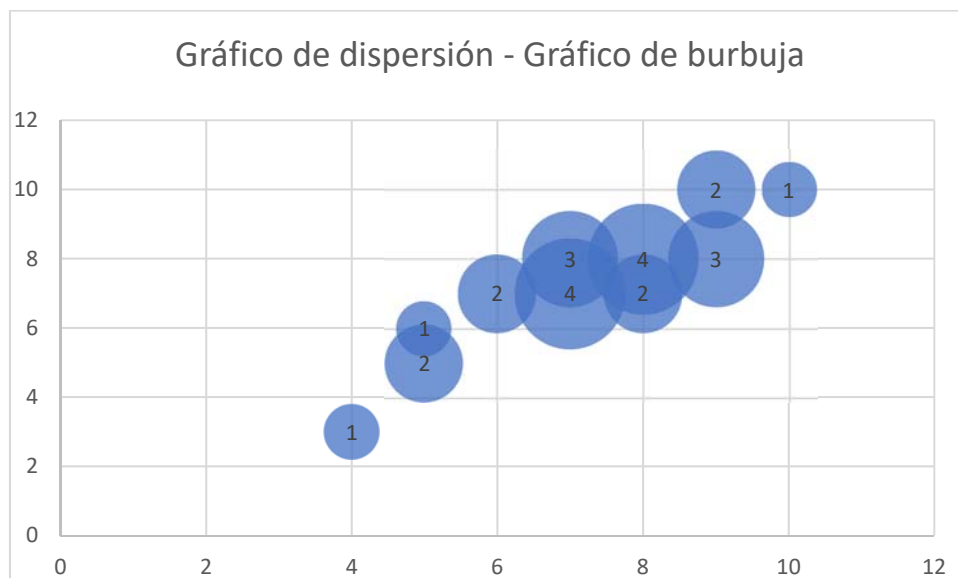
De estos 24, veamos cuántos han sacado más de un 6 en física:

$$2 + 4 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.$$

Como tenemos 24 alumnos que han aprobado matemáticas, el porcentaje es  $(21/24) \cdot 100 = 87,5\%$

Nota: no confundir con el número de alumnos que tienen más de un 6 en Física y más de un 5 en Matemáticas.

e) Representa gráficamente y comenta el resultado. ¿Hay alguna relación entre las dos variables?



Existe una dependencia lineal fuerte, pues aunque los valores no se ajustan a una recta, se encuentran muy cerca. Además, esta dependencia es positiva, al ser la pendiente positiva.

f) En caso afirmativo, encuentra la expresión analítica que se aproxima a esta relación de puntos.

La expresión analítica será la recta de regresión de y sobre x, cuya ecuación viene dada por la siguiente expresión:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$$

donde:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i}{N} = \frac{1404}{25} = 7,32 \quad (\text{Media de } x)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot y_i}{N} = \frac{1395}{25} = 7,40 \quad (\text{Media de } y)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1404}{25} - 7,32 \cdot 7,4 = 1,99 \quad (\text{Covarianza})$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1395}{25} - 7,32^2 = 2,22 \quad (\text{Varianza de } x)$$

La recta de regresión de y sobre x, viene dada por:

$$y - 7,4 = \frac{1,99}{2,22} \cdot (x - 7,32) \rightarrow y = 0,89x + 0,82$$

g) Obtener el coeficiente de correlación. ¿Existe dependencia lineal entre las variables?

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1,99}{1,49 \cdot 1,52} = 0,88 \quad (\text{y cumple que: } -1 \leq r_{xy} \leq 1)$$

El valor 0,88 es próximo a 1, por lo tanto y tal y como se ha comentado anteriormente, existe una dependencia lineal fuerte positiva.

h) Si un alumno saca un 4 en Física, ¿qué valor se espera que saque en Matemáticas en función de los datos recogidos?

Como la recta tiene un buen ajuste utilizamos la ecuación:  $y = 0,89x + 0,82$

Como  $y = 4$ , sustituyendo en la ecuación y despejando x:

$$4 = 0,89x + 0,82 \rightarrow 3,18 = 0,89x \rightarrow x = 3,57$$

Por lo tanto, la nota de Matemáticas será un 3,57.

### EJERCICIO 3

a) Obtener la tabla de frecuencias completa.

$x_i$	$f_i$	$h_i$	$F_i$	$H_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2$	$x_i^2 \cdot f_i$
0	6	0,06	6	0,06	0	0	0
1	10	0,10	16	0,16	10	1	10
2	13	0,13	29	0,29	26	4	52
3	11	0,11	40	0,40	33	9	99
4	13	0,13	53	0,53	52	16	208
5	16	0,16	69	0,69	80	25	400
6	11	0,11	80	0,80	66	36	396
7	10	0,10	90	0,90	70	49	490
8	6	0,06	96	0,96	48	64	384
9	2	0,02	98	0,98	18	81	162
10	2	0,02	100	1	20	100	200
	100	1			423		2401

Donde:

$x_i$  = marca de posición

$f_i$  = frecuencia absoluta

$h_i$  = frecuencia relativa =  $f_i/N$

$F_i$  = frecuencia absoluta acumulada

$H_i$  = frecuencia relativa acumulada

b) ¿Qué porcentaje de alumnos sacaron un 5?

$$h_6 \cdot 100 = 0,16 \cdot 100 = 16 \% \text{ sacan un 6 (Recordar que } h_6 = f_6/N = 16/100 = 0,16)$$

c) ¿Cuántos alumnos sacaron una nota superior a 6?

$$N - F_7 = 100 - 80 = 20 \quad (\text{o también } f_8 + f_9 + f_{10} + f_{11} = 10 + 6 + 2 + 2 = 20)$$

d) ¿Qué porcentaje aprobó?

$$(1 - H_5) \cdot 100 = (1 - 0,53) \cdot 100 = 47 \%$$

$$(\text{o también } h_6 + h_7 + h_8 + h_9 + h_{10} + h_{11} = (0,16 + 0,11 + 0,10 + 0,06 + 0,02 + 0,02) \cdot 100 = 47 \%)$$

e) ¿Cuál fue la nota media del examen? ¿Cuánto vale la desviación típica?

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i}{N} = \frac{423}{100} = 4,23 \quad (\text{Media})$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{2401}{100} + 4,23^2 = 6,12 \quad (\text{Varianza})$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2,47$$

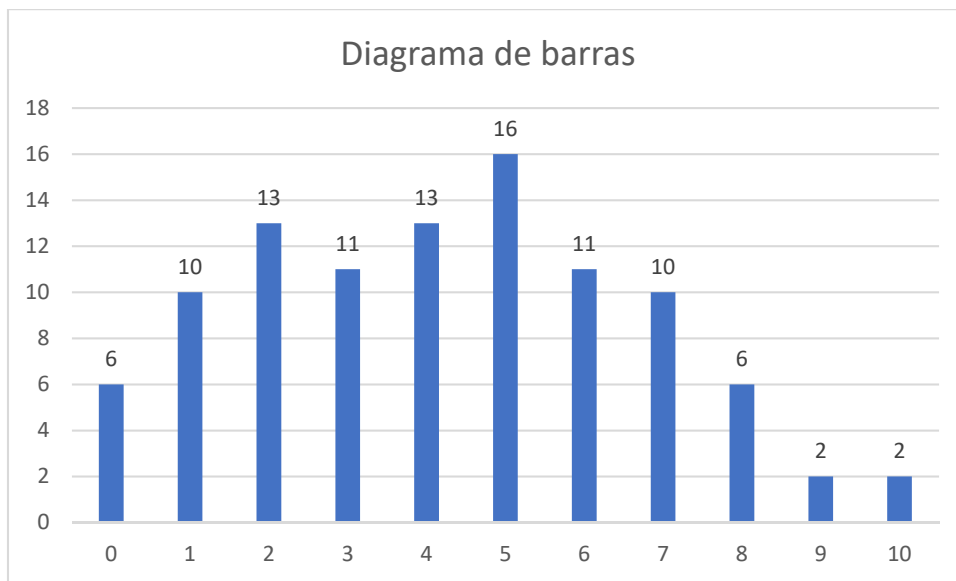
(Desviación típica)

f) ¿Cuál fue la nota más frecuente del examen? ¿Y la mediana?

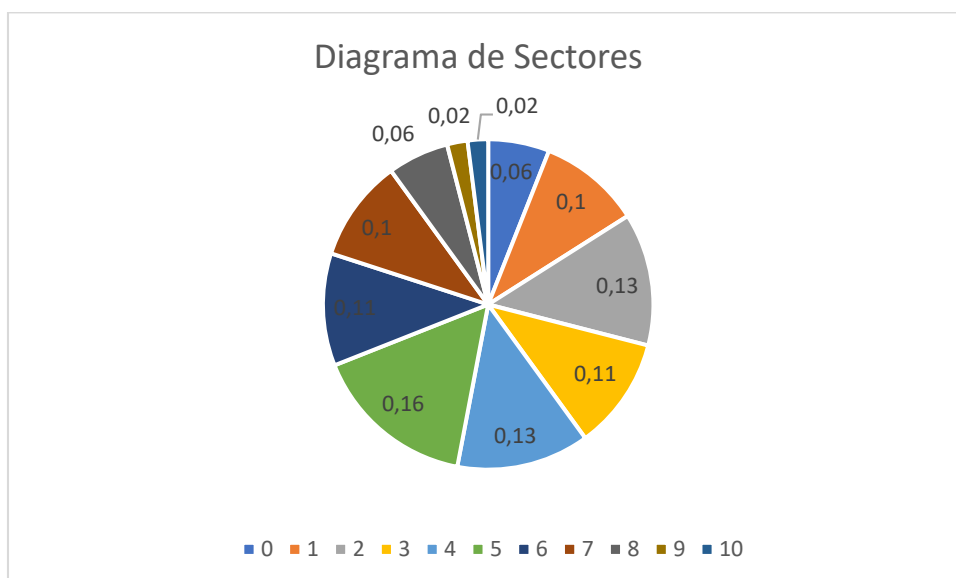
Moda:  $M_o = 5$  (la nota que tiene mayor frecuencia absoluta  $f_i=16$ )

Mediana:  $M_e = 4$  (Busco en la tabla de frecuencias absolutas acumuladas el  $F_i > N/2 \rightarrow F_i > 50 \rightarrow F_5 = 53$  y tomo el  $x_5=4$ )

g) Representa gráficamente la frecuencia absoluta con un diagrama de barras.

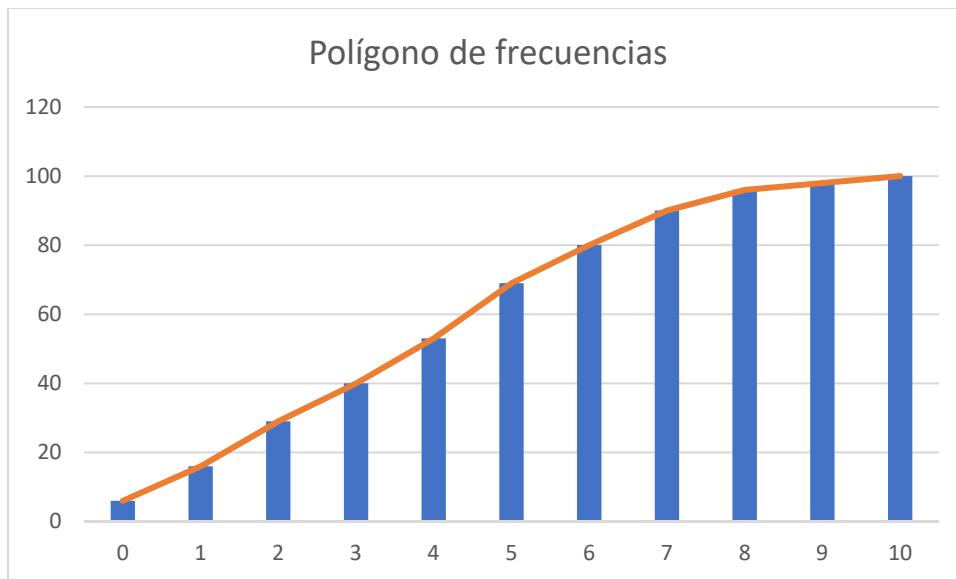


h) Representa gráficamente la frecuencia relativa con un diagrama de sectores.





i) Representa gráficamente la frecuencia absoluta acumulada con un polígono de frecuencias.



j) Si se hubiera querido suspender exactamente al 20% de la gente que se presentó, a partir de qué nota se hubiera tenido que aprobar?

Lo que se pide es el percentil 20, pues son el 20 % de las notas más bajas.

Percentil 20:  $P_{20} = 2$  (Busco en la tabla de frecuencias absolutas acumuladas el  $F_i > \frac{20 \cdot N}{100} = \frac{20 \cdot 100}{100} = 20 \rightarrow F_i > 20 \rightarrow F_3 = 29$  y tomo el  $x_3=2$ )

k) Si se hubiera querido aprobar exactamente al 20% de la gente que se presentó, a partir de qué nota se hubiera tenido que aprobar?

Aprobar al 20 %, es suspender al 80 %, luego lo que se pide es el percentil 80, pues son el 80 % de las notas más bajas (suspensos) y el 20 % de las más altas (aprobados).

Percentil 80:  $P_{80} = \frac{6+7}{2} = 6,5$  (Busco en la tabla de frecuencias absolutas acumuladas el  $F_i > \frac{80 \cdot N}{100} = \frac{80 \cdot 100}{100} = 80 \rightarrow F_i > 80 \rightarrow F_8 = 90$ , pero como  $F_7 = 80$  y tomo la media de  $x_8=7$  y de  $x_7=6$ )

## **ANEXO 6:**

PRÁCTICA 3 (PROBLEMAS TIPO EXAMEN)

1. De una muestra de 75 pilas eléctricas, se han obtenido estos datos sobre su duración:

Tiempo (en horas)	Número de pilas
(25, 30]	3
(30, 35]	5
(35, 40]	21
(40, 45]	28
(45, 55]	12
(55, 70]	6

- Dibujar el histograma y el polígono de frecuencias. **(1 punto)**
- Calcular la media aritmética, la mediana y la moda. **(1,5 puntos)**
- Calcular la varianza y la desviación típica. **(1 punto)**
- Calcular el coeficiente de variación e interpretar el resultado. **(1 punto)**

2. Se han estudiado los errores cometidos por un grupo de 117 personas en una prueba de ortografía  $X$ , y en otra de cálculo numérico  $Y$ . Los resultados están recogidos en la siguiente tabla:

$X(x_i)$ \ $Y(y_j)$	0	1	2	3	4
0	24	6	1	0	0
1	11	19	2	3	0
2	7	8	6	2	0
3	2	3	3	7	1
4	1	0	2	4	5

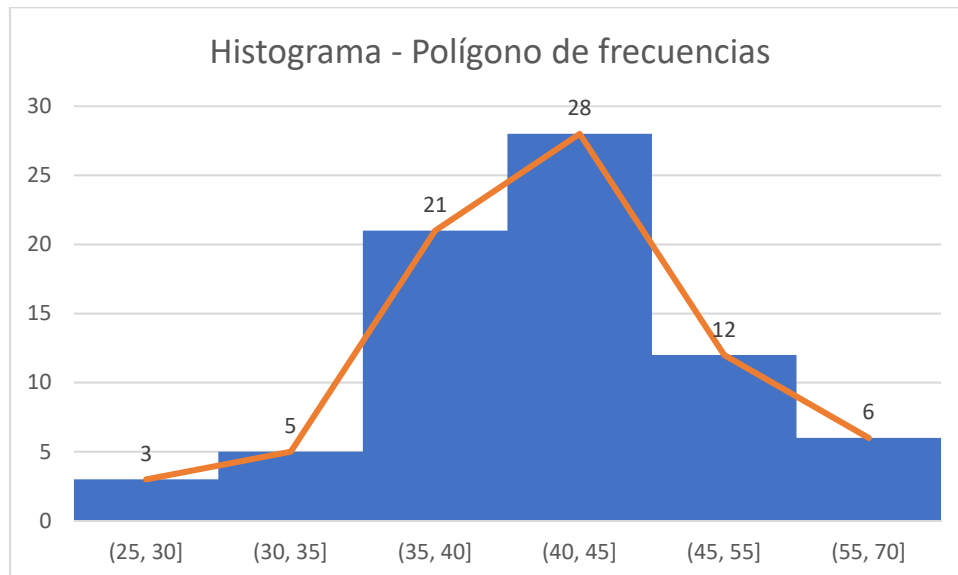
- Calcular las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales. **(2 puntos)**
- Hallar la covarianza. **(1 punto)**
- Calcula el coeficiente de correlación lineal e interprétalo. **(1 punto)**
- Halla la recta de regresión de  $Y$  sobre  $X$ . Para una persona que haya cometido 1 error ortográfico, ¿cuántos errores se pueden esperar en cálculo numérico? **(1,5 puntos)**

## SOLUCIÓN

### EJERCICIO 1

Tiempo (horas)	$x_i$	$f_i$ (Nº de pilas)	$F_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
(25, 30]	27,5	3	3	82,5	2268,75
(30, 35]	32,5	5	8	162,5	5281,25
(35, 40]	37,5	21	29	787,5	29531,25
(40, 45]	42,5	28	57	1190	50575
(45, 55]	50	12	69	600	30000
(55, 70]	62,5	6	75	375	23437,5
		75		3197,5	141093,75

a) Dibujar el histograma y el polígono de frecuencias. (1 punto)



b) Calcular la media aritmética, la mediana y la moda. (1,5 puntos)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i}{N} = \frac{3197,5}{75} = 42,63 \quad (\text{Media})$$

Mediana:  $Me = 4$  (Busco en la tabla de frecuencias absolutas acumuladas el  $F_i > N/2 \rightarrow F_i > 37,5 \rightarrow F_4 = 54$  y tomo el  $x_4 = 42,5$ )

Moda:  $Mo = 42,5$  (la marca de posición que tiene mayor frecuencia absoluta  $f_i = 28$ )

c) Calcular la varianza y la desviación típica. (1 punto)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{141093,75}{10075} + 42,63^2 = 63,93 \quad (\text{Varianza})$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 8,00 \quad (\text{Desviación típica})$$

**d)** Calcular el coeficiente de variación e interpretar el resultado. **(1 punto)**

$CV = \sigma/\bar{x} = 8/42,63 = 0,19$ . Como CV está próximo a cero, resulta que la variable “duración de las pilas” es bastante homogénea y, por tanto, la media representa muy bien la población.

EJERCICIO 2

Ortografía $x_i$	Calc. Numér. $y_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
0	1	11	0	11	0	1	0	0	11
0	2	7	0	14	0	4	0	0	28
0	3	2	0	6	0	9	0	0	18
0	4	1	0	4	0	16	0	0	16
1	0	6	6	0	1	0	0	6	0
1	1	19	19	19	1	1	19	19	19
1	2	8	8	16	1	4	16	8	32
1	3	3	3	9	1	9	9	3	27
1	4	0	0	0	1	16	0	0	0
2	0	1	2	0	4	0	0	4	0
2	1	2	4	2	4	1	4	8	2
2	2	6	12	12	4	4	24	24	24
2	3	3	6	9	4	9	18	12	27
2	4	2	4	8	4	16	16	8	32
3	0	0	0	0	9	0	0	0	0
3	1	3	9	3	9	1	9	27	3
3	2	2	6	4	9	4	12	18	8
3	3	7	21	21	9	9	63	63	63
3	4	4	12	16	9	16	48	36	64
4	0	0	0	0	16	0	0	0	0
4	1	0	0	0	16	1	0	0	0
4	2	0	0	0	16	4	0	0	0
4	3	1	4	3	16	9	12	16	9
4	4	5	20	20	16	16	80	80	80
		<b>117</b>	<b>136</b>	<b>177</b>			<b>330</b>	<b>332</b>	<b>463</b>

a) Calcular las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales. (2 puntos)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i}{N} = \frac{136}{117} = 1,16 \quad (\text{Media de } x)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot y_i}{N} = \frac{177}{117} = 1,51 \quad (\text{Media de } y)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{332}{117} - 1,16^2 = 1,49 \quad (\text{Varianza de } x)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{463}{117} - 1,51^2 = 1,67 \quad (\text{Varianza de } y)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = 1,22 \quad (\text{Desviación típica})$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = 1,29 \quad (\text{Desviación típica})$$

**b) Hallar la covarianza. (1 punto)**

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{330}{117} - 1,16 \cdot 1,51 = 1,06 \quad (\text{Covarianza})$$

**c) Calcula el coeficiente de correlación lineal e interprétalo. (1 punto)**

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1,06}{1,22 \cdot 1,29} = 0,67 \quad (\text{y cumple que: } -1 \leq r_{xy} \leq 1)$$

El valor 0,67 es más próximo a 1 que a 0, por lo tanto, existe una dependencia lineal fuerte positiva.

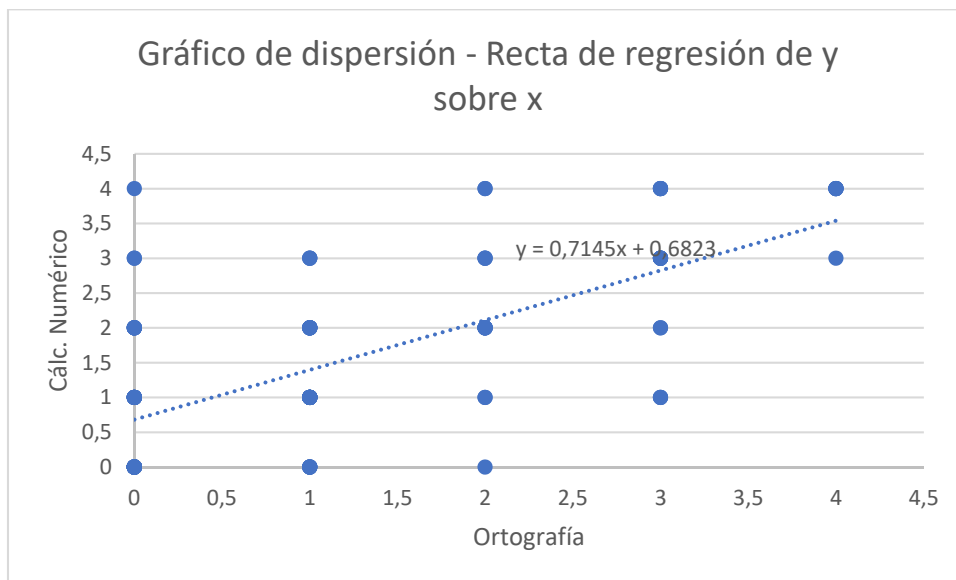
**d) Halla la recta de regresión de Y sobre X. Para una persona que haya cometido 1 error ortográfico, ¿cuántos errores se pueden esperar en cálculo numérico? (1,5 puntos)**

La expresión analítica será la recta de regresión de y sobre x, cuya ecuación viene dada por la siguiente expresión:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$$

y sustituyendo los valores obtenidos anteriormente, queda:

$$y - 1,51 = \frac{1,06}{1,49} \cdot (x - 1,16) \quad \rightarrow y = 0,71x + 0,68$$



Como la recta tiene un buen ajuste utilizamos la ecuación:  $y = 0,71x + 0,68$

Como  $x = 1$ , sustituyendo en la ecuación obtengo y:

$$y = 0,71 \cdot 1 + 0,68 = 1,39$$

Por lo tanto, la nota de Cálculo. Numérico será un 1,39.

## **ANEXO 7:**

### RESOLUCIÓN SIMULTÁNEA DE PROBLEMAS: PIZARRA Y HOJA EXCEL

- Ejemplos Saber Hacer y 8 (Fig 22 y 23, Anexo 3)
- Ejemplo Saber Hacer (Fig 20, Anexo 3)
- Ejemplo 13 (Fig 21, Anexo 3)
- Ejemplo 14 (Fig 21, Anexo 3)



A continuación se realizan detalladamente los **Ejemplos Saber Hacer y 8** (Fig 22 y 23, Anexo 3), en los que nos piden obtener y representar las rectas de regresión partiendo de los siguientes datos:

**SABER HACER**

**Determinar y representar la recta de regresión**

▶ Se quiere determinar cómo influye la velocidad en los accidentes de tráfico. Para ello se ha tomado nota del número de vehículos que circulan a velocidad mayor que 120 km/h en una autovía y los accidentes que se producen en ella. Halla la recta de regresión y represéntala con el diagrama de dispersión.

N.º de vehículos	7	15	18	20
N.º de accidentes	4	8	10	13

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$
7	4	49	16	28
15	8	225	64	120
18	10	324	100	180
20	13	400	169	260
<b>Totales</b>	<b>60</b>	<b>998</b>	<b>349</b>	<b>588</b>

**PRIMERO.** Se construye una tabla de frecuencias con las columnas necesarias para calcular las medidas estadísticas.

**SEGUNDO.** Se calcula la media de cada variable, la varianza de  $X$  y la covarianza.

$$\bar{x} = \frac{60}{4} = 15 \quad \bar{y} = \frac{35}{4} = 8,75 \quad \sigma_x^2 = \frac{998}{4} - 15^2 = 24,5$$

$$\sigma_{xy} = \frac{588}{4} - 15 \cdot 8,75 = 15,75$$

**TERCERO.** Se determina la recta de regresión de  $Y$  sobre  $X$  a partir de su ecuación.

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y - 8,75 = \frac{15,75}{24,5}(x - 15) \rightarrow y = 0,643x - 0,893$$

**CUARTO.** Se representan el diagrama de dispersión y la recta de regresión obtenida.

Figura 1: Enunciado Saber Hacer (Figura 22 del Anexo 3)

**EJEMPLO**

**8** Determina la recta de regresión de  $X$  sobre  $Y$  sabiendo que  $\bar{x} = 15$ ;  $\bar{y} = 8,75$ ;  $\sigma_x^2 = 24,5$ ;  $\sigma_y^2 = 10,688$  y  $\sigma_{xy} = 15,75$ .

Como se conocen todas las medidas estadísticas que se necesitan, se determina la recta de regresión de  $X$  sobre  $Y$  a partir de su ecuación.

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) \rightarrow x - 15 = \frac{15,75}{10,688}(y - 8,75) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1,474y + 2,106$$

Figura 2: Enunciado ejemplo 8 (Figura 23 del Anexo 3)

Para ello partimos de la siguiente tabla con los datos de entrada:

Vehículos	Accidentes
$x_i$	$y_i$
7	4
15	8
18	10
20	13

Figura 3: Datos de partida

Después, construimos la tabla de frecuencias completa:

Vehículos	Accidentes								
$x_i$	$y_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
7	4	1	7	4	49	16	28	49	16
15	8	1	15	8	225	64	120	225	64
18	10	1	18	10	324	100	180	324	100
20	13	1	20	13	400	169	260	400	169
		4	60	35			588	998	349

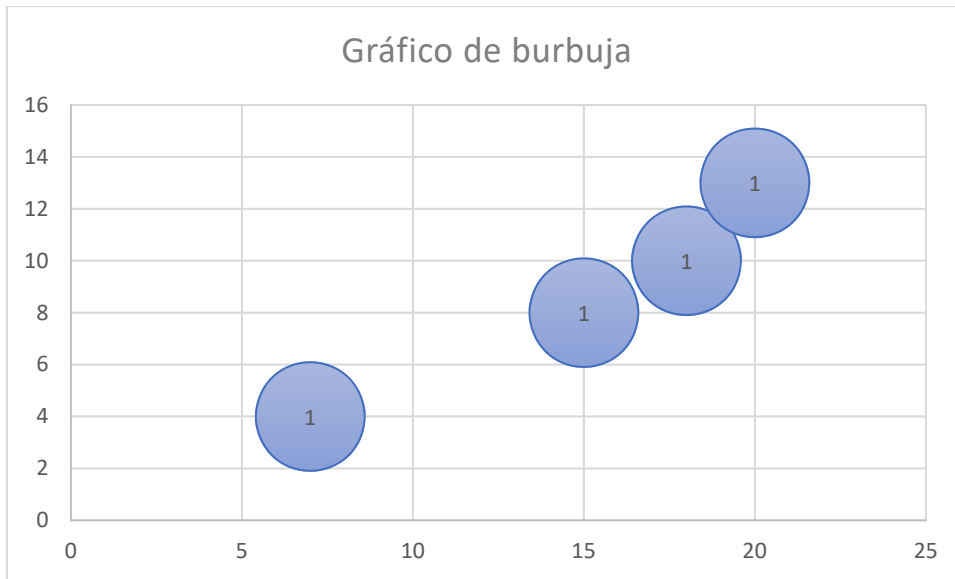
Figura 4: Tabla de frecuencias

A continuación, obtenemos las medias, la covarianza, las varianzas y las desviaciones típicas de las variables.

$\bar{X} =$	<b>15,00</b>	Media de y	
$\bar{Y} =$	<b>8,75</b>	Media de x	
$\sigma_{xy} =$	<b>15,75</b>	Covarianza	
$\sigma_x^2 =$	<b>24,50</b>	Varianza de x	
$\sigma_y^2 =$	<b>10,69</b>	Varianza de y	
$\sigma_x =$	<b>4,95</b>	Desv. Típica de x	
$\sigma_y =$	<b>3,27</b>	Desv. Típica de y	
$r =$	<b>0,97</b>	Coef. de correlación	
	<b>0,9474</b>	Coef. determinacion	

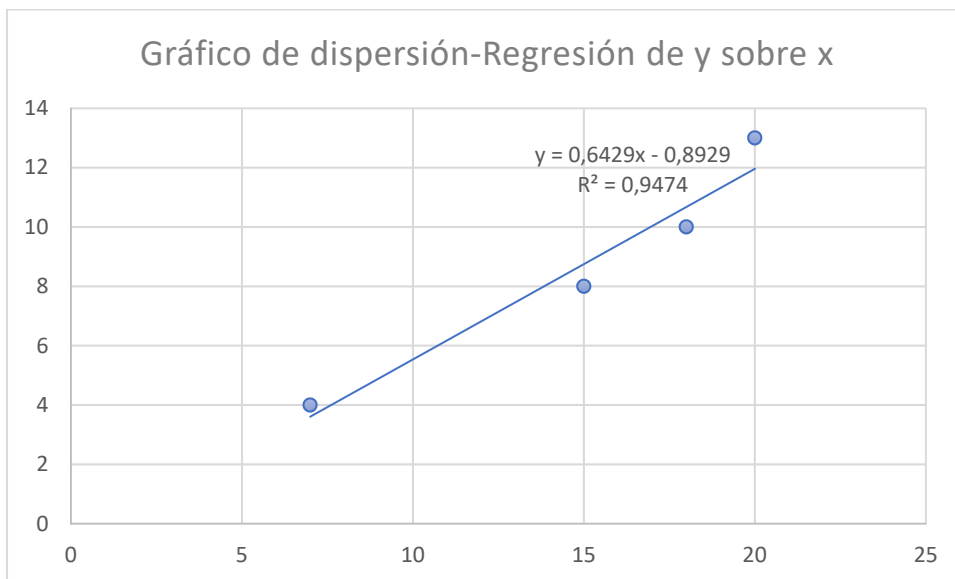
Figura 5: Cálculo de parámetros

Después, realizamos la representación de los datos mediante un gráfico de dispersión:



*Figura 6: Gráfico de dispersión (de tipo burbuja)*

Finalmente realizamos la representación de las dos rectas de regresión:



*Figura 7: Recta de regresión de y sobre x*

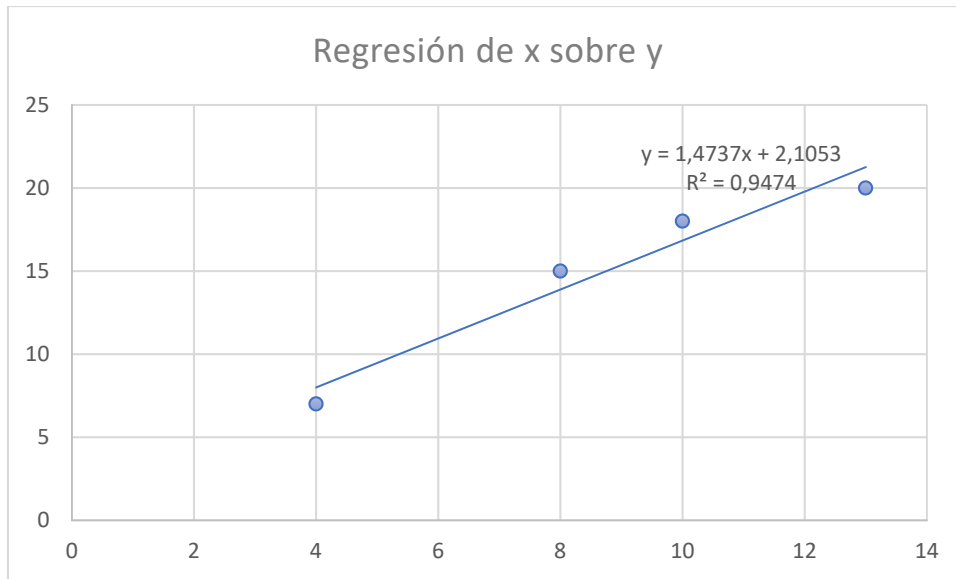


Figura 14: Recta de regresión de x sobre y

Señalar que en el gráfico de la recta de regresión de x sobre y, donde figura la letra y debería aparecer la x, y viceversa. Esto es debido a que la hoja Excel sólo dibuja la recta de regresión de y sobre x, por lo que para calcular la de x sobre y, debemos intercambiar las variables, es decir, las y pasan a ser x, y viceversa. Una vez obtenida la recta de regresión, deshacemos el intercambio de variables.

A continuación se adjuntan el resto de enunciados, así como la resolución mediante hoja Excel de los cuatro ejemplos. El archivo Excel ha sido puesto a disposición de los alumnos en el Aula virtual.

**SABER HACER**

**Calcular la covarianza**

▶ Calcula la covarianza de estos datos.

**PRIMERO.** A partir de las tablas marginales, se determina la media de cada una de las variables.

$\bar{x} = 3,031$        $\bar{y} = 1,415$

**SEGUNDO.** Se halla la covarianza con los datos de cada variable y sus frecuencias.

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ij} \cdot x_i \cdot y_j}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{293}{65} - 3,031 \cdot 1,415 = 4,508 - 4,289 = 0,219$$

Y \ X	1	2	3	4	Total
1	7	10	11	16	44
2	0	2	6	7	15
3	0	0	1	5	6
Total	7	12	18	28	65

Figura 15: Enunciado Saber Hacer (Figura 20 del Anexo 3)

## ACTIVIDADES

13. Representa el diagrama de dispersión y halla el coeficiente de correlación de esta variable.

X	39	43	40	40	42	41	42	38	39	44
Y	167	184	177	168	185	173	180	164	170	194

¿Qué relación puedes describir entre ellas?

14. La tabla muestra la renta per cápita en miles de euros, X, y la esperanza de vida en años, Y, en 8 países.

X	12	40	34	6	30	42	2	15	9
Y	65	79	75	63	74	82	60	62	62

¿Qué relación puedes describir entre ellas?

Figura 16: Enunciado Actividades 13 y 14 (Figura 21 del Anexo 3)

# COVARIANZA: SABER HACER (Tema 10, p. 249 libro)

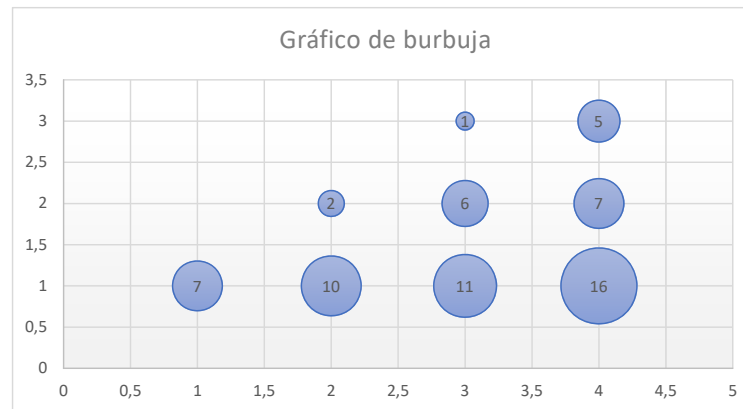
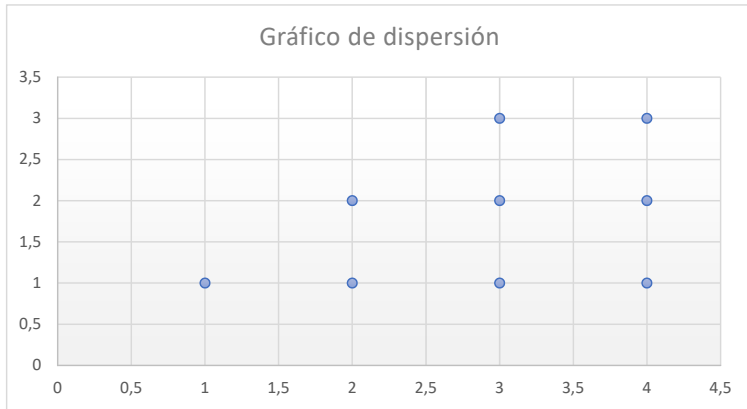
## VARIABLE BIDIMENSIONAL

	X	Y								
	$x_i$	$y_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
1	1	1	7	7	7	1	1	7	7	7
2	2	1	10	20	10	4	1	20	40	10
3	2	2	2	4	4	4	4	8	8	8
4	3	1	11	33	11	9	1	33	99	11
5	3	2	6	18	12	9	4	36	54	24
6	3	3	1	3	3	9	9	9	9	9
7	4	1	16	64	16	16	1	64	256	16
8	4	2	7	28	14	16	4	56	112	28
9	4	3	5	20	15	16	9	60	80	45
			65	197	92			293	665	158

$\bar{x}$ =	3,03	Media de x
$\bar{y}$ =	1,42	Media de y
$\sigma_{xy}$ =	0,22	Covarianza
$\sigma_x^2$ =	1,05	Varianza de x
$\sigma_y^2$ =	0,43	Varianza de y
$\sigma_x$ =	1,02	Desv. Típica de x
$\sigma_y$ =	0,65	Desv. Típica de y
r =	0,33	Coef. De correlación

0,1064 coef determinacion

## GRÁFICO



## COEFICIENTE DE CORRELACIÓN - RECTAS DE REGRESIÓN: EJERCICIO 13 (Tema 10, p. 250 libro)

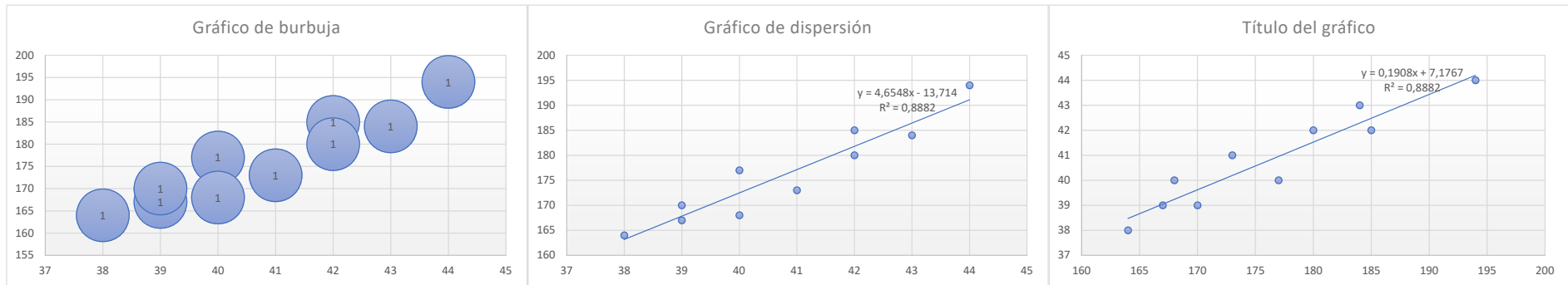
### VARIABLE BIDIMENSIONAL

	X	Y								
	$x_i$	$y_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
1	39	167	1	39	167	1521	27889	6513	1521	27889
2	43	184	1	43	184	1849	33856	7912	1849	33856
3	40	177	1	40	177	1600	31329	7080	1600	31329
4	40	168	1	40	168	1600	28224	6720	1600	28224
5	42	185	1	42	185	1764	34225	7770	1764	34225
6	41	173	1	41	173	1681	29929	7093	1681	29929
7	42	180	1	42	180	1764	32400	7560	1764	32400
8	38	164	1	38	164	1444	26896	6232	1444	26896
9	39	170	1	39	170	1521	28900	6630	1521	28900
10	44	194	1	44	194	1936	37636	8536	1936	37636
			10	408	1762			72046	16680	311284

$\bar{x}$ =	40,80	Media de y
$\bar{y}$ =	176,20	Media de x
$\sigma_{xy}$ =	15,64	Covarianza
$\sigma_x^2$ =	3,36	Varianza de x
$\sigma_y^2$ =	81,96	Varianza de y
$\sigma_x$ =	1,83	Desv. Típica de x
$\sigma_y$ =	9,05	Desv. Típica de y
r =	0,94	Coef. De correlación

0,8882 coef determinacion

### GRÁFICO



Nota: en este gráfico donde pone y pondremos x, y viceversa.

## COEFICIENTE DE CORRELACIÓN - RECTAS DE REGRESIÓN: EJERCICIO 14 (Tema 10, p. 250 libro)

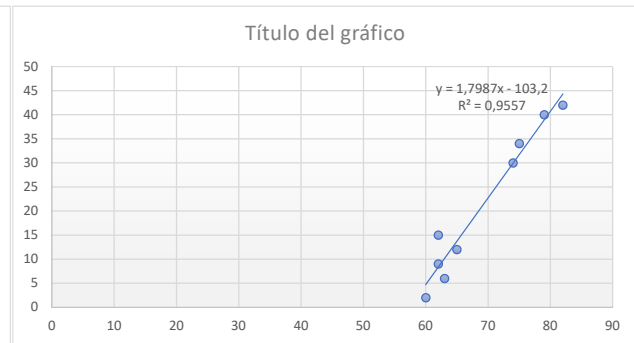
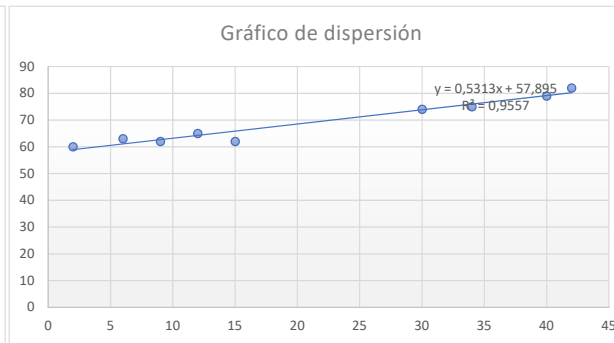
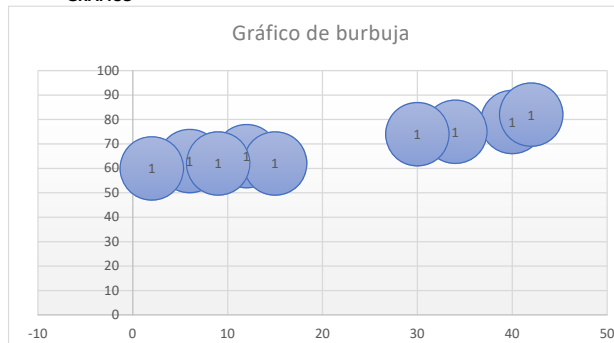
### VARIABLE BIDIMENSIONAL

	Renta p. cápita	Esperanza vida								
	$x_i$	$y_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
1	12	65	1	12	65	144	4225	780	144	4225
2	40	79	1	40	79	1600	6241	3160	1600	6241
3	34	75	1	34	75	1156	5625	2550	1156	5625
4	6	63	1	6	63	36	3969	378	36	3969
5	30	74	1	30	74	900	5476	2220	900	5476
6	42	82	1	42	82	1764	6724	3444	1764	6724
7	2	60	1	2	60	4	3600	120	4	3600
8	15	62	1	15	62	225	3844	930	225	3844
9	9	62	1	9	62	81	3844	558	81	3844
			9	190	622			14140	5910	43548

$\bar{x}$ =	21,11	Media de y
$\bar{y}$ =	69,11	Media de x
$\sigma_{xy}$ =	112,10	Covarianza
$\sigma_x^2$ =	210,99	Varianza de x
$\sigma_y^2$ =	62,32	Varianza de y
$\sigma_x$ =	14,53	Desv. Típica de x
$\sigma_y$ =	7,89	Desv. Típica de y
$r$ =	0,98	Coef. De correlación

0,9557 coef determinación

### GRÁFICO



Nota: en este gráfico donde pone y pondremos x, y viceversa.



## RECTAS DE REGRESIÓN: SABER HACER Y EJEMPLO 8 (Tema 10, p. 251-252 libro)

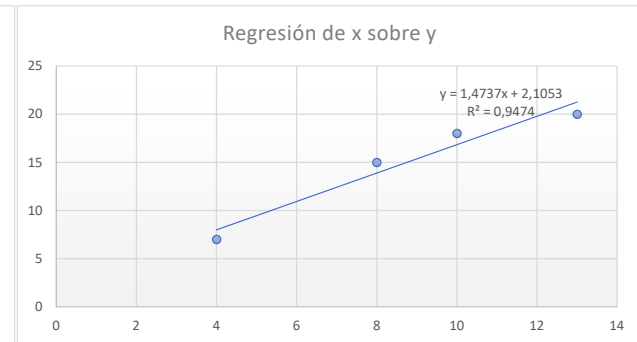
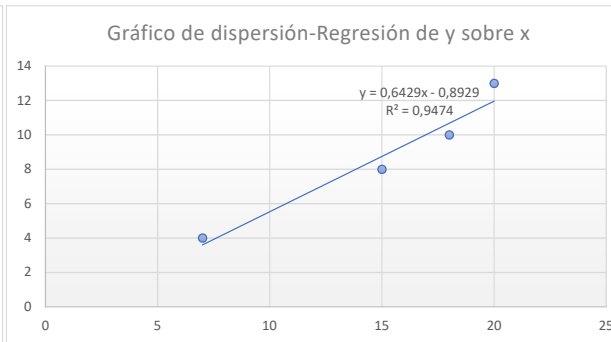
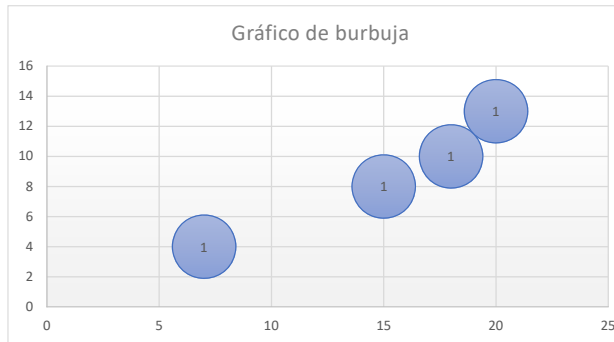
### VARIABLE BIDIMENSIONAL

	Vehículos	Accidentes								
	$x_i$	$y_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
1	7	4	1	7	4	49	16	28	49	16
2	15	8	1	15	8	225	64	120	225	64
3	18	10	1	18	10	324	100	180	324	100
4	20	13	1	20	13	400	169	260	400	169
			4	60	35			588	998	349

$\bar{X}$ =	15,00	Media de y
$\bar{Y}$ =	8,75	Media de x
$\sigma_{xy}$ =	15,75	Covarianza
$\sigma_x^2$ =	24,50	Varianza de x
$\sigma_y^2$ =	10,69	Varianza de y
$\sigma_x$ =	4,95	Desv. Típica de x
$\sigma_y$ =	3,27	Desv. Típica de y
$r$ =	0,97	Coef. de correlación

0,9474 Coef. determinación

### GRÁFICOS



Nota: en este gráfico donde pone y pondremos x, y viceversa.

**ANEXO 8:**

EVALUACIÓN FINAL

### EXAMEN PROPUESTO

1. En una clase de 25 alumnos, las notas obtenidas en el examen de selectividad han sido las siguientes:

Intervalo de Notas	Número de alumnos
(0, 2]	1
(2, 4]	4
(4, 6]	6
(6, 8]	9
(8,10]	5

- a) Calcular la media aritmética, la mediana, la moda y el primer cuartil. **(2 puntos)**
- b) Calcular la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación. **(1,5 puntos)**
- c) Dibujar el histograma de frecuencias absolutas acumuladas y el diagrama de sectores de las frecuencias absolutas. **(1,5 puntos)**

2. Se han estudiado las alturas de ola necesarias para desplazar los bloques de escollera de un dique, y los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Altura de ola (metros)	Peso de la escollera (toneladas)
2	1
3	1,5
5	3
7	4,5
9	6

Sabiendo que el peso de la escollera es función de la altura de ola, se pide:

- a) Hallar la covarianza. **(1,25 puntos)**
- b) Calcular el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo. **(1,25 puntos)**
- c) Hallar el peso de la escollera necesaria cuando la altura de ola sea de 5,75 metros. **(1,25 puntos)**
- d) ¿Qué altura de ola sería necesaria para desplazar un bloque de 7,5 toneladas? **(1,25 puntos)**

## SOLUCIÓN

### EJERCICIO 1

Intervalo de Notas	$x_i$	$f_i$ (Nº de alumnos)	$F_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
(0, 2]	1	1	1	1	1
(2, 4]	3	4	5	12	36
(4, 6]	5	6	11	30	150
(6, 8]	7	9	20	63	441
(8,10]	9	5	25	45	405
		25		151	1033

a) Calcular la media aritmética, la mediana, la moda y el primer cuartil. **(2 puntos)**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i}{N} = \frac{151}{25} = 6,04 \quad (\text{Media})$$

Mediana:  $Me = 7$  (Busco en la tabla de frecuencias absolutas acumuladas el  $F_i > N/2 \rightarrow$

$$F_i > 12,5 \rightarrow F_4 = 20 \text{ y tomo el } x_4 = 7)$$

Moda:  $Mo = 7$  (la marca de posición que tiene mayor frecuencia absoluta  $f_4 = 9$ )

Cuartil 1:  $Q_1 = 5$  (Busco en la tabla de frecuencias absolutas acumuladas el  $F_i > \frac{25 \cdot N}{100} = \frac{25 \cdot 25}{100} = 6,25 \rightarrow F_i > 6,25 \rightarrow F_3 = 11$  y tomo el  $x_3 = 5$ )

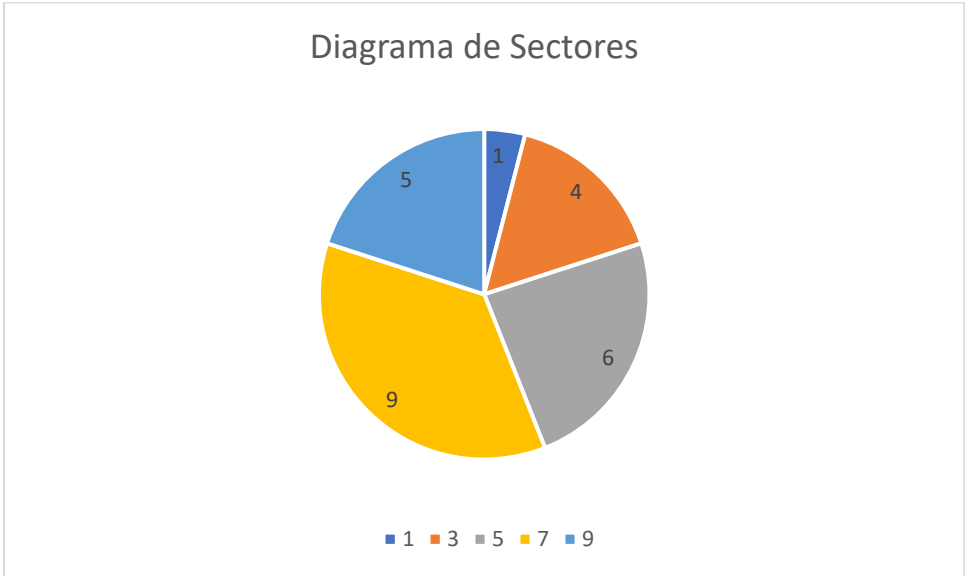
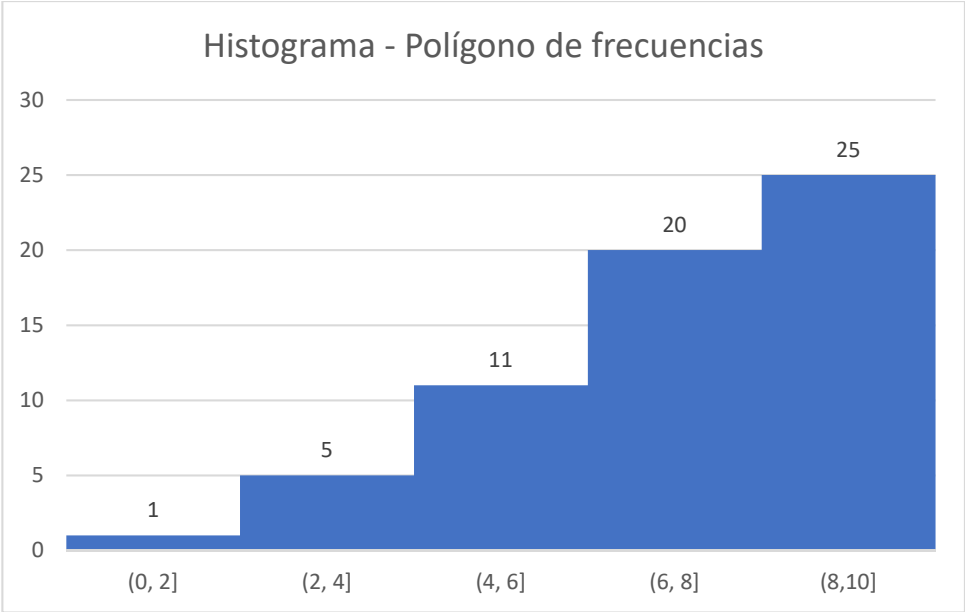
b) Calcular la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación. **(1,5 puntos)**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1033}{25} - 6,04^2 = 4,84 \quad (\text{Varianza})$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2,20 \quad (\text{Desviación típica})$$

$$CV = \sigma / \bar{x} = 2,20 / 6,04 = 0,36.$$

c) Dibujar el histograma de frecuencias absolutas acumuladas y el diagrama de sectores de las frecuencias absolutas. **(1,5 puntos)**



## EJERCICIO 2

Altura de ola (m) $x_i$	Peso escollera (t). $y_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$f_i \cdot x_i \cdot y_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot y_i^2$
2	1	1	2	1	4	1	2	4	1
3	1,5	1	3	1,5	9	2,25	4,5	9	2,25
5	3	1	5	3	25	9	15	25	9
7	4,5	1	7	4,5	49	20,25	31,5	49	20,25
9	6	1	9	6	81	36	54	81	36
		<b>5</b>	<b>26</b>	<b>16</b>			<b>107</b>	<b>168</b>	<b>68,5</b>

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i}{N} = \frac{26}{5} = 5,20 \quad (\text{Media de } x)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot y_i}{N} = \frac{16}{5} = 3,20 \quad (\text{Media de } y)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{168}{5} - 5,20^2 = 6,56 \quad (\text{Varianza de } x)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{68,5}{5} - 3,20^2 = 3,46 \quad (\text{Varianza de } y)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = 2,56 \quad (\text{Desviación típica})$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = 1,86 \quad (\text{Desviación típica})$$

a) Hallar la covarianza. **(1,25 puntos)**

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{107}{5} - 5,20 \cdot 3,20 = 4,76 \quad (\text{Covarianza})$$

b) Calcula el coeficiente de correlación lineal e interprétalo. **(1,25 puntos)**

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{4,76}{2,56 \cdot 1,86} = 0,999 \quad (\text{y cumple que: } -1 \leq r_{xy} \leq 1)$$

El valor 0,999 es prácticamente 1, por lo tanto, existe una dependencia lineal exacta positiva (o muy fuerte).

c) Hallar el peso de la escollera necesaria cuando la altura de ola sea de 5,75 metros. **(1,25 puntos)**

La expresión analítica será la recta de regresión de y sobre x, cuya ecuación viene dada por la siguiente expresión:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$$

y sustituyendo los valores obtenidos anteriormente, queda:

$$y - 3,20 = \frac{4,76}{6,56} \cdot (x - 5,20) \quad \rightarrow y = 0,73x - 0,57$$

Como  $x = 5,75$ , sustituyendo en la ecuación obtengo  $y$ :

$$y = 0,73 \cdot 5,75 - 0,57 = 3,63$$

Por lo tanto, el peso necesario será de 3,63 toneladas.

**d) ¿Qué altura de ola sería necesaria para desplazar un bloque de 7,5 toneladas? (1,25 puntos)**

Despejando la  $x$  en la ecuación  $y = 0,73x - 0,57$

Nos queda que:  $x = 1,37y + 0,78$

Como  $y = 7,5$ , sustituyendo en la ecuación obtengo  $x$ :

$$x = 1,37 \cdot 7,5 + 0,78 = 11,06$$

Por lo tanto, sería necesaria una ola de 11,06 metros.