RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE DIVISION AU CYCLE ELEMENTAIRE DANS DEUX TYPES DE SITUATIONS DIDACTIQUES

PAR

P. TEULE-SENSACQ

G. VINRICH

SOMMAIRE

I.R.E.M DE BORDEAUX MAI 1980

I. CADRE DE L'ETUDE (*)

Les instituteurs et les institutrices ont découvert pour la rentrée scolaire de septembre 1978 les nouveaux programmes du cycle élémentaire (cf. B.O n° 30 bis du 27 juillet 1978).

Bien sûr, lors de cette parution, on assiste toujours à la même avalanche de propos et de questions parfois (même souvent) contradictoires :

-*"Qu'y-a-t-il de changé ?"*
-*"c'est un retour en arrière"* - *"c'est toujours pareil"*
-*"c'est certainement plus clair car c'est détaillé !"*
-*"c'est plus contraignant maintenant car c'est plus détaillé !..."*
-*"quoi de neuf ?"* - *"Rien de nouveau"* *etc...*

Notre propos n'est pas du tout de répondre à ces questions car en effet, nous nous sommes intéressés simplement à <u>l'APPRENTISSAGE DE LA DIVISION</u> ; cependant nous espérons que cette étude sur cette notion apportera quelques éclairages et quelques éléments de réponse aux questions que se posent les maîtres.

- *"Quoi de neuf ?"* donc sur la division au cycle élémentaire
- *"comment faut-il faire ?"* *"que nous suggèrent les instructions ?"*

* <u>Rappelons les objectifs.(78)</u>

- *savoir reconnaître des situations relevant de la division euclidienne.*
- *savoir déterminer par des méthodes empiriques le quotient le reste.*

...*/*...

(*) Etude en didactique des mathématiques réalisée à l'IREM avec la précieuse collaboration de G. BROUSSEAU, maître-assistant à l'Université de BORDEAUX-I et grâce à l'observation des enfants de l'école Jules Michelet établissement expérimental de plein exercice sous la tutelle de l'I.R.E.M.

* Rappelons les instructions (78)

Approche de la division

Dans les situations relevant de la division que l'on étudiera, on ne se limitera pas, et cela dès le début, aux cas de diviseurs ou de quotients inférieurs à 10.

On se bornera à des méthodes empiriques de calcul du quotient et du reste à l'élaboration desquelles les enfants participeront. Que ces méthodes procèdent par encadrement du dividende entre multiples du diviseur, ou par additions ou soustractions successives, elles seront validées et utilisées sans que soit imposée une technique unique et une disposition particulière.

L'étude de la technique de la division sera poursuivie et parachevée au cycle moyen.

* Rappelons aussi les anciens programmes (70)

- *Quotient exact*
- *Division avec reste - Quotient entier*
- *Pratique de la division par un nombre d'un chiffre*

Une originalité du nouveau programme réside dans le fait que tant dans les objectifs que dans les instructions, l'on suggère que l'enfant doit procéder avec des METHODES EMPIRIQUES.

Cette expression a fortement attiré notre attention et a été le point de départ de notre étude.

- *"Qu'entend-on par méthodes empiriques ?"*
- *"Est-ce un véritable changement dans l'apprentissage de la division ?"*
- *"Est-ce une ouverture dans les situations pédagogiques ?"*
- *"L'apprentissage sera-t-il de meilleure qualité et le résultat plus fiable ?"*

Il nous a semblé nécessaire avant de préciser le but de notre étude de rappeler dans le paragraphe suivant les différents éléments caractérisant les types d'apprentissage relatifs à la division.

.../...

II. QUELQUES PRECISIONS SUR DIFFERENTS TYPES D'APPRENTISSAGE

Nous distinguerons plus particulièrement trois types de processus d'apprentissage :

- APPRENTISSAGE RATIONNALISE
- APPRENTISSAGE EMPIRIQUE
- APPRENTISSAGE DIALECTIQUE.

1) Qu'entend-on par apprentissage rationnalisé de la division ?

Il repose sur deux principes fondamentaux que nous rappelons ci-dessous :

a) étude séparée du sens et de la technique de la division

L'apprentissage rationnalisé de la division se caractérise par le fait que l'enfant doit en premier lieu savoir reconnaître les situations dans lesquelles il doit faire une division ce qui implique un conditionnement dans l'analyse de l'énoncé.

Le tableau ci-dessous rappelle qu'il convient, dans ce type d'apprentissage, de distinguer opération directe et opération réciproque.

	OPERATION ARITHMETIQUE "DIRECTE"		OPERATION ARITHMETIQUE "INVERSE"	
	1. Multiplication	2. Division	3. Multiplication	4. Division
Exemples de thèmes de présentation	8 pommes par enfant 5 enfants	40 pommes à partager 5 enfants (valeur d'une part)	Après le partage entre 8 enfants , chacun a 5 pommes (preuve de la division)	40 pommes à partager 8 par enfant (calcul du nombre de parts)
Exemples de thèmes d'exploitation	. Contenu de N caisses . Poids de N objets . Longueur de N rubans . Capacité de N récipients . Distance parcourue . Gain journalier, hebdomadaire, mensuel	Contenu d'une caisse Poids d'un objet Longueur d'un ruban Capacité d'un récipient - - -		Nombre de caisses Nombre d'objets Nombre de rubans Nombre de récipients Nombre de jours de travail - Calcul d'une dimension

On n'aborde l'étude de la technique opératoire que lorsque les deux "sens" de l'opération sont connus.

b) Apprentissage rationnalisé de la technique opératoire

La mise en place de l'algorithme de la division tient compte de difficultés opératoires liées exclusivement à l'ordre de grandeur des nombres.

Nous donnons ci-dessous les stades d'acquisition tenant compte de ces difficultés.

PROGRESSION DES DIFFICULTES OPERATOIRES

1er stade

Un chiffre au diviseur et au quotient

sans reste
24 | 6
0 | 4

avec reste
27 | 6
3 | 4

2ème stade

Un chiffre au diviseur, 2 et plus au quotient

le premier chiffre du dividende est égal ou supérieur au diviseur

sans reste partiel
67 | 6
07 | 11
1 |

avec reste partiel
94 | 6
34 | 15
4 |

le premier chiffre du dividende est égal ou supérieur au diviseur

sans reste partiel
246 | 6
06 | 41
0 |

avec reste partiel
2596 | 6
19 | 432
16 |
4 |

3ème stade

Un chiffre au quotient, deux chiffres au diviseur

sans retenue

nombre exact de dizaines
240 | 60
00 | 4

nombres quelconques
278 | 60
38 | 4

avec retenue

égale à 1
276 | 62
28 | 4

supérieure à 1 mais égale au chiffre des dizaines du produit partiel
273 | 65
13 | 4

5 x 4 = 20 ôtés de 23

supérieure à 1 mais égale au chiffre des dizaines du produit partiel plus un
273 | 64
17 | 4

avec essai préalable
273 | 69
66 | ~~4~~3

4ème stade

deux chiffres au quotient et deux chiffres au diviseur

même progression interne

- quant aux retenues

2785 | 61
345 | 45
40 |

2785 | 63
265 |
13 |

2937 | 65
337 | 45
12 |

2951 | 64
391 | 46
07 |

- quant aux essais

4230 | 67
210 | ~~7~~ 6 3
09 |

4212 | 67
192 | ~~7~~ 6 ~~3~~ 2
58 |

2) Quelles sont les caractéristiques d'un apprentissage empirique ?

Les méthodes empiriques essayent d'organiser les relations de l'enfant avec son milieu et les situations pédagogiques relevant de ce type d'apprentissage laissent à l'enfant la possibilité de résoudre ces problèmes par tâtonnement.

Relativement à l'apprentissage de la division, elles ne remettent pas en cause un apprentissage séparé du sens et de la technique.

Cependant un enfant du cycle élémentaire possède, du moins partiellement, la maîtrise des modèles additifs, soustractifs, multiplicatifs ; il est en mesure de résoudre par de tels procédés des situations que l'on a coutume de considérer comme situations de division. Il peut en effet utiliser par exemple

- une liste des multiples successifs d'un nombre
- des additions successives
- des soustractions successives

L'empirisme, en tant qu'attitude scientifique, est la décision d'observer les faits sans formuler d'hypothèses.

Cette philosophie entraîne des principes pédagogiques parmi lesquels nous n'en rappellerons qu'un relatif à la manière de mener l'activité :

Lors de l'organisation d'une phase de synthèse au cours de laquelle les enfants présentent leurs travaux de recherche, l'enseignant "contrôle" le résultat mais ne prend pas position vis-à-vis des méthodes employées, ne valorisant pas un modèle plutôt qu'un autre.

3) En quoi se différencient les apprentissages dialectiques ?

Les situations pédagogiques relevant d'un apprentissage dialectique essayent d'organiser les relations de l'enfant avec son milieu de façon à faire jouer des comportements acquis en vue de la création de comportements nouveaux.

Au cours de ces situations que G. BROUSSEAU appelle dialectiques l'enfant résoud ses problèmes par accommodation, avec des moyens qui peuvent changer d'une situation à l'autre, en adaptant sa stratégie, en formulant et validant ses réponses.

* *"Lorsqu'un enfant, dans une suite de situations comparables (qui réalisent une même structure) a une suite de comportements comparables, on est fondé à estimer qu'il a perçu un certain nombre d'éléments et de relations de cette structure. Il a donc au moins un modèle mental de la situation....*

Mais une situation n'est pas statique, elle évolue dans le temps par suite des échanges successifs d'informations et d'actions entre le sujet et la situation...

Au cours de ces échanges, l'enfant modifie son idée première, crée et éprouve un modèle mental, un langage ou une théorie. C'est un processus dialectique"

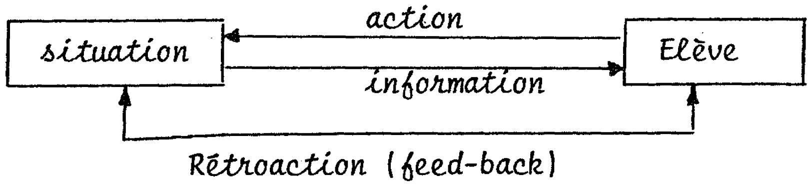
Le processus de mathématisation défini par G. BROUSSEAU est construit sur la base de trois schémas fondamentaux

- une dialectique de l'ACTION
- une dialectique de la FORMULATION
- une dialectique de la VALIDATION

Nous rappelons ci-dessous les principes d'une dialectique de l'action.

* * *". L'enfant est placé devant une certaine situation dont il possède des modèles mentaux plus ou moins satisfaisants.*

Ces modèles lui permettent d'interpréter, de recevoir des informations sur cette situation et à chaque étape il doit prendre une décision et agir à nouveau sur la situation.



.../...

* Processus de mathématisation G. BROUSSEAU

* * Etude locale des processus d'apprentissage G. BROUSSEAU

. La suite des "situations d'action" constitue le processus par lequel l'élève va fabriquer des stratégies, c'est-à-dire "s'apprendre" une méthode de résolution de son problème.

Cette succession d'intéractions entre l'élève et le milieu constitue ce que l'on appelle une dialectique de l'action.

C'est au cours de cette dialectique que l'enfant organise ses stratégies, construit une représentation de la situation qui lui sert de "modèle" pour prendre ses décisions.

La dialectique de l'action aboutit à la création par le sujet de modèles implicites qui règlent cette action, relations selon lesquelles l'élève prend ses décisions sans être capable d'en avoir conscience et à fortiori de les formuler.

Un modèle implicite correspond, en fin d'apprentissage, à des savoir-faire enseignés".

La mise en oeuvre de telles situations nécessite la communication d'une CONSIGNE.

Nous reviendrons sur ce problème lors de la présentation des situations correspondantes.

III. BUT DE L'ETUDE

* Actuellement, tout le monde s'accorde pour dire que l'apprentissage rationnalisé de la division (1er type d'apprentissage décrit dans le paragraphe précédent) n'est pratiquement plus mis en oeuvre dans les classes ; ces modifications de programme, la formation permanente et l'évolution des manuels scolaires ayant plus ou moins obligé les maîtres à abandonner ce type d'apprentissage qui a, il faut cependant le reconnaître, "fait ses preuves" durant plusieurs décenies.

* Le but de notre étude a donc porté essentiellement sur les deux autres types d'apprentissage.

Nous nous sommes attachés à observer ce qui pouvait distinguer les comportements des élèves face à des situations de division relevant d'un apprentissage EMPIRIQUE, des comportements d'élèves face à une situation de division relevant d'un apprentissage DIALECTIQUE (Rappelons que ce dernier doit aboutir à la création par le sujet de modèles implicites puis explicites et validables).

* Précisons que l'étude du processus global d'acquisition d'un modèle de division euclidienne dépasse largement le cadre de notre travail, ce dernier apportant simplement des observations et des informations sur le <u>début</u> de cette acquisition.

IV. PLAN DE L'EXPERIMENTATION

Nous avons proposé aux enfants de C.E_2 (23 élèves) une série de six situations relevant toutes de la même structure mathématique de division euclidienne.

28.4.78 Situation 1

On veut distribuer un gâteau à chacun des 245 enfants d'une colonie de vacances pour le goûter.
Chaque paquet contient 18 gâteaux. Quel est le nombre de paquets qu'il faut ouvrir ?

29.4.78 Situation 2

Le confiseur a fabriqué 310 bonbons au chocolat. Pour les vendre, il veut les ranger dans des boîtes de 16. Trouve le nombre de boîtes qu'il devra se procurer pour pouvoir vendre les bonbons.

2.5.78 Situation 3

Un restaurateur reçoit 187 invités. Il veut mettre 12 personnes par table. Combien de tables devra-t-il placer dans la salle de restaurant ?

2.5.78 Situation 4

Carole a une boîte de 350 perles. Elle fabrique des colliers de 28 perles chacun. Combien de colliers peut-elle fabriquer ?

Les quatre premières situations sont des énoncés "classiques" que l'on peut trouver dans différents manuels scolaires, elles permettent la mise en oeuvre de méthodes EMPIRIQUES pour trouver le quotient et le reste.

.../...

9.5.78 Situation 5

Vous avez une bande de 16 carreaux de largeur On veut la découper de façon à obtenir un rectangle de même largeur qui ne dépasse pas 460 carreaux, mais qui s'en rapproche le plus possible.

11.5.78 Situation 6

Reprise de la situation 5, sans suport matériel avec 3300 carreaux au lieu de 460.

Les deux dernières sont particulièrement construites afin de favoriser chez les enfants une DIALECTIQUE DE L'ACTION avec l'apport d'un matériel (quadrillage pour situation 5).

Quelques remarques sur la mise en oeuvre de ces situations.

* Pour les quatre premières, les énoncés ont été lus par la maîtresse et par un élève puis les enfants se sont mis au travail.
* Pour la cinquième, la mise en oeuvre nécessite de la part du maître une présentation sous forme de CONSIGNE permettant de communiquer aux enfants un projet d'activité dans un langage à leur portée.

  Cette phase est particulièrement importante pour faire "démarrer" la recherche des enfants face à une situation DIALECTIQUE. (Dans ce cas précis, nécessité pour le maître de faire comprendre l'expression : "*Qui s'en approche le plus*")
* Signalons, enfin que durant ces exercices le maître jouant le rôle d'organisateur, s'est contenté de recenser les résultats accompagnés des méthodes utilisées par les enfants ; ce qui signifie qu'aucune «correction» n'a été faite lors des exercices et les enfants n'ont pas reçu de la part du maître des interventions telles que "c'est bien", "c'est nul", "c'est juste", "c'est faux".

Pour chacune des 6 situations décrites ci-dessous nous avons relevé pour chaque enfant :

- d'une part, la réussite ou l'échec à chacune des situations
- d'autre part, le modèle utilisé pour résoudre cette situation. (ce que VERGNAUD appelle la "procédure" de l'enfant).

.../...

<u>Liste de modèles</u> utilisables par les enfants lors de la résolution de problèmes de division euclidienne :

- R : faire n'importe quoi
- A_1 : compter un par un
- A_2 : additions réitérées du diviseur
- A_3 : additions réitérées du diviseur en utilisant comme repère un multiple du diviseur
- S_1 : soustractions réitérées du diviseur
- S_2 : soustractions réitérées du diviseur en utilisant comme repère un multiple du diviseur
- M_1 : multiplications : essais ponctuels sans tenir compte du résultat
- M_2 : multiplications en tenant compte du résultat
- M_3 : M_2 avec vérification (par encadrement) que le nombre trouvé est bien solution
- M_4 : multiplications et additions : utilisation de la distributivité
- M_5 : multiplications : essais en tenant compte du résultat avec appréciation de la différence

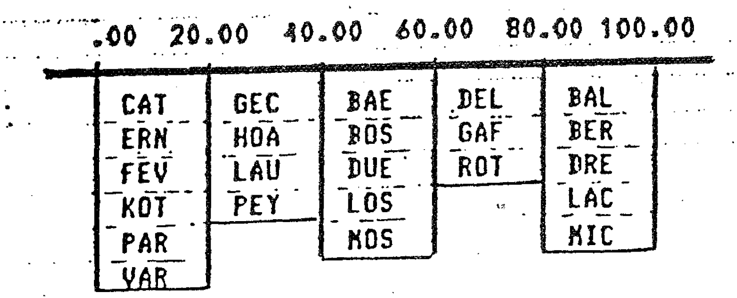
(Voir en annexe des exemples de travaux d'enfants qui illustrent les principaux modèles utilisés).

Pour essayer d'apporter des éléments de réponse à l'objet de notre étude (voir paragraphe III) nous avons analysé les résultats en tenant compte de 3 paramètres :

- REUSSITE à la situation
- MODELE DE RESOLUTION employé
- RANG de la situation.

V. LES PREMIERS RESULTATS

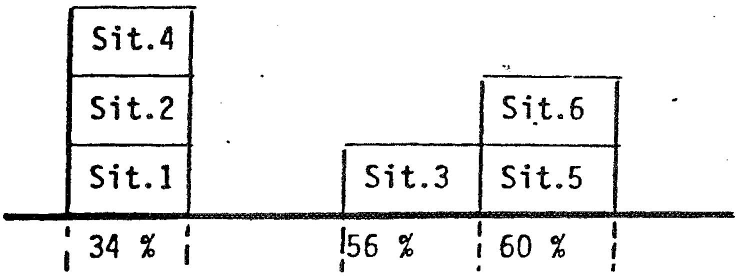
V.1 - En ce qui concerne les enfants



Histogramme pour les enfants par % de réussites.

Moyenne générale ≃ 47 % de réussite

V.2 - En ce qui concerne les situations proposées



Histogramme pour les situations par % de réussites.

Regardons maintenant les modèles utilisés par les enfants pour essayer de résoudre ces situations.

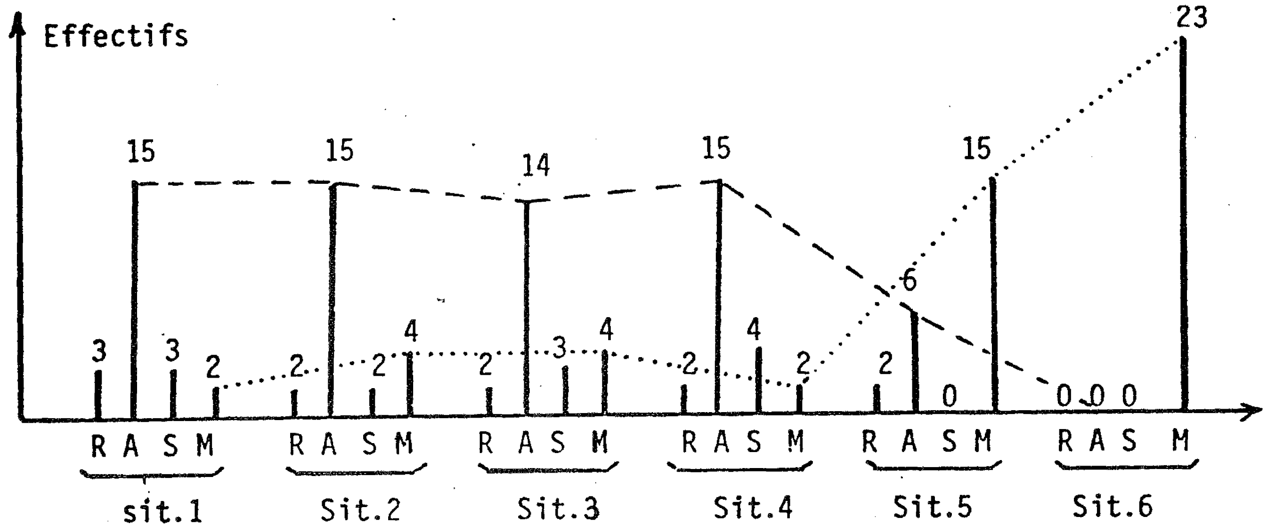
Si nous considérons seulement quatre grandes familles de modèles :

R : faire n'importe quoi

A : modèle additif

S : modèle soustractif

M : modèle multiplicatif



Nous mettons en évidence sur ce schéma l'évolution du modèle additif et du modèle multiplicatif.

On peut constater une très nette progression du modèle multiplicatif à partir de Sit.5 pour finir à 100 % de l'effectif en situation 6 (Tous les enfants utilisent un modèle multiplicatif en Sit.6)

Remarquons que cette progression du modèle multiplicatif se fait au détriment du modèle additif qui est utilisé en majorité dans les quatre premières situations, Sit.1, Sit.2 Sit.3, Sit.4.

.../...

VI. LE FACTEUR REUSSITE DEPEND-IL DU RANG AUQUEL LES SITUATIONS SONT PROPOSEES ?

Une analyse globale de la répartition des réussites et des échecs aux six situations nous permet (à l'aide du Q de Cochran) de conclure à une difficulté inégale des six situations proposées.

Se posent alors au moins trois questions :

Q.1 : Existe-t-il, en fonction du facteur réussite, des "dépendances" entre les situations ?

Q.2 : Pouvons-nous identifier les enfants "en progrès" ?

Q.3 : La répétition d'exercices de même structure entraîne-t-elle une stabilité de comportement au niveau de la réussite ?

VI.1 - "Dépendance" des situations en fonction du facteur réussite

Si nous examinons les effectifs des réussites aux 6 situations nous pouvons nous poser la question suivante :

« Est-ce que les élèves qui réussissent Sit X réussissent aussi Sit Y ? »

Parmi les 15 tableaux à quatre cases que nous pouvons utiliser entre les six situations, nous relevons par exemple les cas suivants :

* Dépendance entre Sit 5 et Sit 6 ?

		Sit 5 R	Sit 5 E	
Sit 6	R	10	4	14
	E	4	5	9
		14	9	23

Utilisons le coefficient de Jane LOEVINGER pour mesurer le degré d'implication.

$$H_{5,6} = \frac{(9 \times 14)-(23 \times 4)}{9 \times 14} = 0,27$$

$H_{5,6}$ est relativement faible. Nous ne pouvons pas affirmer que ceux qui réussissent Sit 5 réussissent aussi Sit.6. Autrement dit, le fait de changer les nombres en les augmentant dans une situation provoque des irrégularités : à savoir, ici il y a autant d'élèves (4) qui réussissent Sit 5 et échouent à Sit 6 que d'élèves qui échouent à Sit 5 et réussissent à Sit 6.

.../...

* Dépendance entre Sit 1 et Sit 3 ?

Sit 3 \ Sit 1	R	E	
R	8	5	13
E	0	10	10
	8	15	23

$$H_{1,3} = \frac{(10 \times 8)-(23 \times 0)}{10 \times 8} = 1$$

Manifestement il y a une implication parfaite entre Sit 1 et Sit 3, à savoir, tous les élèves qui réussissent Sit 1 réussissent aussi Sit 3.

Des 15 coefficeints H mesurant le degré d'implication entre les situations deux à deux, nous retenons les plus significatifs :

$H_{1,3} = 1$	$H_{1,5} = 0{,}59$	$H_{2,5} = 0{,}38$	$H_{4,5} = 0{,}53$
$H_{2,3} = 0{,}56$	$H_{1,6} = 0{,}79$	$H_{2,6} = 0{,}59$	$H_{4,6} = 0{,}38$
$H_{4,3} = 0{,}71$			

Ce qui nous permet d'établir les deux implications suivantes :

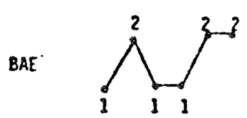
Sit 1, Sit 2, Sit 4 $\Longrightarrow$ Sit 3   Sit 1, Sit 2, Sit 4 $\Longrightarrow$ Sit 5, Sit 6

* Une question se pose : pourquoi Sit 3 se "distingue" de Sit 1, Sit 2 et Sit 4 ?

VI.2 - Etude analytique au niveau de chaque enfant

Etablissons pour chaque enfant sa "courbe de réussite"

Exemple :



Nous obtenons ainsi divers types de courbes que nous avons regroupés de la manière suivante :

.../...

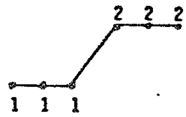
(A) <u>les enfants en "réussite constante"</u>

BER
LAC

(B) <u>les enfants en "progression"</u>

Un seul changement croissant dans la courbe de réussite

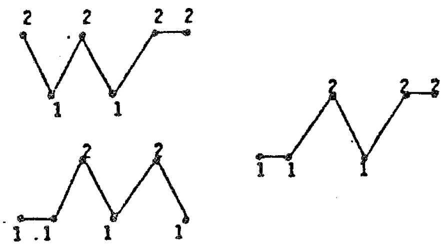
DUE → exemple →
FEV
HOA
VAR



(C) <u>les enfants "irréguliers"</u>

Au moins trois changements dans la courbe de réussite.

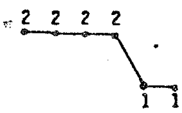
BAE
BOS
DEL → exemple →
GAF
GEC → exemple →
LAU
PEY → exemple →



(D) <u>les enfants en "régression"</u>

Un seul changement décroissant dans la courbe de réussite

ROT



(E) <u>les enfants en "échec constant"</u>

CAT
ERN
PAR

Les six enfants restant ont pu être intégrés dans les catégories ci-dessus.

Nous pouvons ainsi construire l'histogramme suivant en fonction de cinq catégories.

E	D	C	B	A
CAT	LOS	BAE	DUE	BAL
ERN	ROT	BOS	FEV	BER
KOT		DEL	HOA	DRE
PAR		GAF	MOS	LAC
		GEC	VAR	MIC
		LAU		
		PEY		

.../...

Si nous comparons cet histogramme avec celui établi dans le paragraphe "premiers résultats" en fonction du pourcentage de réussites, nous constatons certaines ressemblances, mais aussi certaines différences.

Les deux catégories A et E sont pratiquement inchangées, par contre on trouve des changements dans les trois classes intermédiaires.

En effet, un enfant tel que ROT qui a un pourcentage de réussite assez élevé de 66 % se retrouve dans la catégorie D car il termine sa série des six situations par deux échecs successifs.

Inversement, un enfant tel que HOA qui a un pourcentage de réussite assez faible de 33 % se retrouve dans la catégorie B car il termine sa série des six situations par deux réussites successives.

La classe C étant celle d'effectif maximum, nous pouvons répondre négativement à la question Q_3.

VII. LA REUSSITE DEPEND-ELLE DU MODELE EMPLOYE POUR RESOUDRE LA SITUATION ?

Dans ce paragraphe nous écartons évidemment la procédure R car elle conduit systématiquement à un échec.

. L'analyse globale (à l'aide d'un χ^2) sur l'ensemble des six situations permet de rejeter l'hypothèse H_0 selon laquelle la réussite ne dépend pas du modèle employé.

. Le pavé des résultats met en évidence que le modèle multiplicatif (M) conduit davantage à la réussite que le modèle additif (A) ou soustractif (S). Cependant, cette constatation risque d'être faussée par le fait que le modèle M soit employé très fréquemment lors de la résolution des situations Sit 5 et Sit 6.

. Il est donc indispensable, pour préciser l'influence du modèle sur la réussite, d'effectuer l'analyse sur les quatre premières situations.

. Le fait que dans ce cas, nous ne puissions rejeter H_0 débouche sur une nouvelle hypothèse de travail :

"L'"habillage de la structure mathématique joue un rôle sur le modèle utilisé par l'enfant pour résoudre la situation où intervient cette structure".

En effet, dans Sit 5, il s'agit de papier quadrillé et de carreaux ce qui induit chez les enfants, du fait de la progression suivie au $C.E_2$, l'emploi du modèle multiplicatif.

Remarque méthodologique.
Cette étude est légitime car les maîtres n'ont jamais déclaré aux enfants que ces situations visaient un même objectif. A l'occasion des phases de synthèse, les enfants ont présenté tour à tour leurs solutions sans que les enseignants prennent position vis-à-vis des méthodes employées, ne valorisant pas un modèle plutôt qu'un autre.

VIII. LA PROCEDURE EMPLOYEE DEPEND-ELLE DU RANG DE LA SITUATION

Nous sommes conduits à étudier l'évolution des procédures utilisées par les enfants au cours des six situations - Pour cela on définit pour chaque enfant un profil de comportement par une liste de couples (i, m_j) où

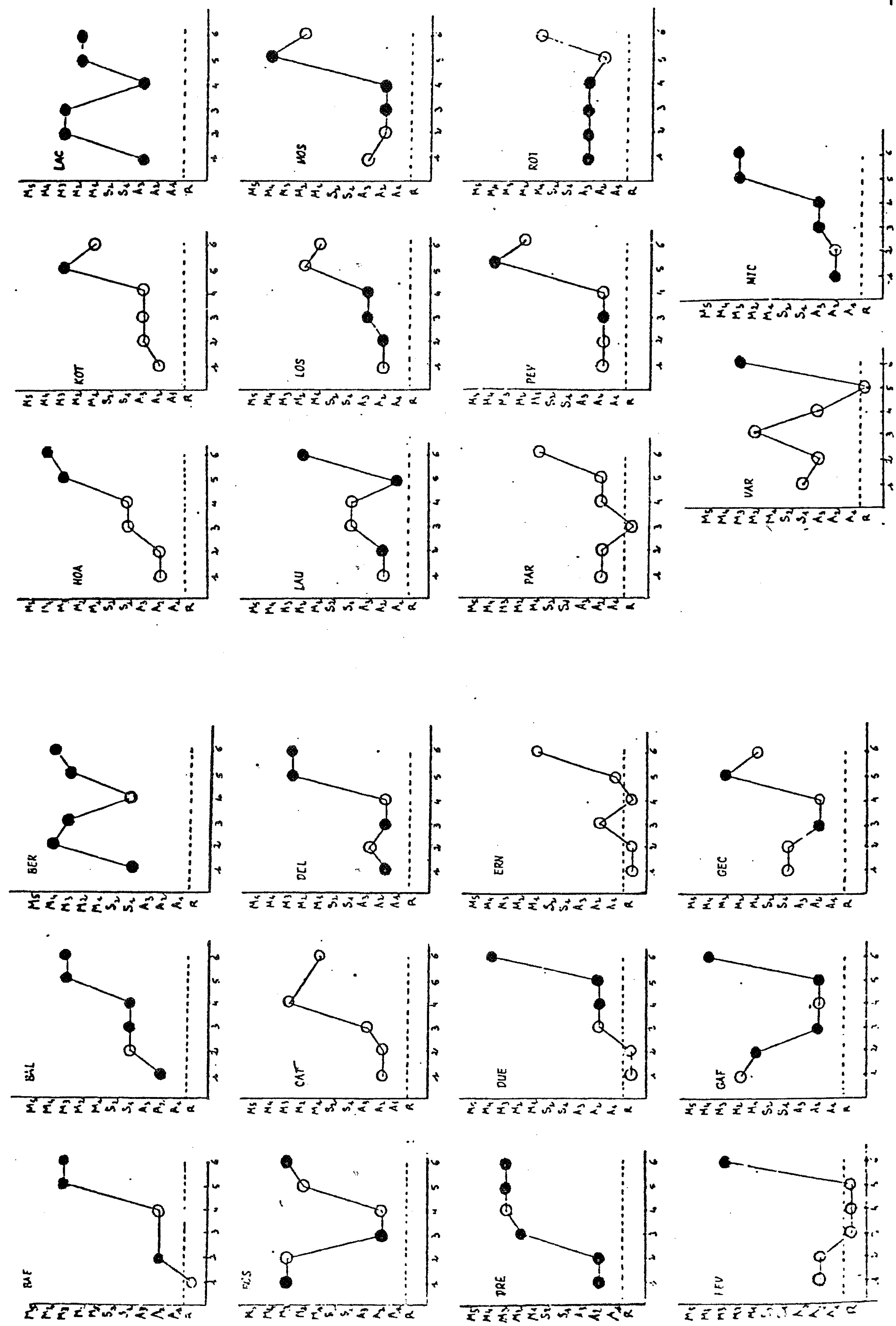
i désigne le rang de la situation

m_j désigne la procédure adoptée

On trace alors pour chaque enfant un graphique en portant en abscisse le rang de la situation et en ordonnée le modèle utilisé.

(Pour faciliter la lecture, on note à l'aide d'un point ● la réussite à la situation).

(voir les graphiques page suivante)

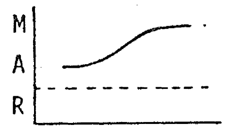
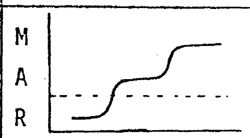
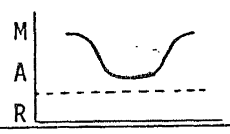
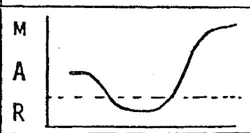
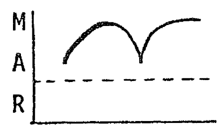
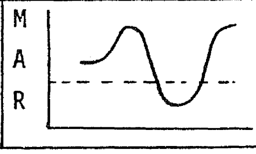

LAC
KOT
HOA
MOS
LOS
LAU
ROT
PEY
PAR
MIC
VAR
BER
BAF
DEL
CAT
ERN
DUE
PRE
GEC
GAF

VIII.1. Un premier commentaire

On note le comportement particulier de BOS qui abandonne un modèle lorsque celui-ci le conduit à un échec.

VIII.2. Essai de classification des profils obtenus

Si nous ne retenons que trois familles de modèles R, A, M (le modèle soustractif pouvant être assimilé au modèle additif) chaque profil est alors caractérisé par le nombre de fois où a été utilisé chacun des modèles R, A, M ce qui permet la classification suivante :

Classe	Modèle	Allure des profils	Classe	Modèle	Allure des profils
C_1	2A 4M 3A 3M 4A 2M 5A 1M		C'_1	R.3A.2M 2R.3A.M 2R.A.R.M	
C_2	2M 2A 2M 2M 3A M		C'_2	2A.R.2A.M 2A.3R.M	
C_3	A.2M.A.2M		C'_3	2A.M.A.R.M	

Les classes C'_i se distinguent des classes C_i par le fait qu'on y relève la présence du modèle R.

VIII.3. Etude de la succession des modèles employés lors de deux situations consécutives

2 / 1	R	A	S	M
R				
A				
S				
M				

L'effectif de la case (X,Y) est le nombre d'enfants ayant utilisé le modèle Y après l'emploi du modèle X. Nous ne donnerons que quelques observations qui résultent de l'étude.

VIII.3.1 - Les cases situées sur la diagonale (A,A) et (M,M) sont les cases de plus fort effectif, ce qui signifie une grande stabilité lors de deux séquences consécutives.

.../...

- la case (A,M) a un effectif important ce qui révèle une perception d'économie dans l'emploi du modèle multiplicatif après utilisation du modèle additif.

- les cases (S,R) et (M,R) d'effectif nul révèlent que ni le modèle soustractif ni le modèle multiplicatif ne sont suivis du modèle R.

VIII.3.2. Afin d' affiner l'étude précédente nous avons étudié la répartition des effectifs des cases (A,A) et (M,M) dans un premier temps puis de la case (A,M).

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	0	0
A_2	0		
A_3	0		

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	0	0	0	0	0
M_2				0	0
M_3					0
M_4	0			0	0
M_5	0	0	0	0	0

- Ces tableaux révèlent à nouveau une grande stabilité de comportement, les cases de plus fort effectif étant situées sur la diagonale.

.Le relevé des observations montre que les modèles A_1 et M_1 ont été utilisés.
L'effectif nul des lignes A_1 et M_1 nous paraît un phénomène particulièrement significatif.
Les enfants n'ont jamais utilisé ces modèles comme stratégie de départ et lorsqu'ils les ont employés ils les ont abandonnés dans la situation suivante.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
A_1					
A_2					
A_3					

- L'effectif très faible de la colonne M_1 met en évidence que l'abandon du modèle additif se fait au profit d'un modèle multiplicatif élaboré.

VIII.4. Etude analytique pour chaque couple de situations (Sit_i, $Sit_{(i+1)}$)

Ce paragraphe a pour objet d'étudier la répartition des modèles pour chacune des cinq paires de situations consécutives et de dégager une liste d'indices informationnels.

Nous citerons parmi ceux-ci : (si $x_{i,j}$ désigne l'effectif de la case située sur la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $j^{\text{ème}}$ colonne)

.../...

- $\sup_{i} x_{ii}$ effectif maximum d'une case de la diagonale
- $\sup_{i \neq j} x_{ij}$ effectif maximum d'une case qui n'est pas sur la diagonale
- $p = \dfrac{\sum_i x_{ii}}{\sum_{i,j} x_{i,j}}$ $\qquad p' = \dfrac{\sum_{i \neq j} x_{ij}}{\sum_{i,j} x_{i,j}}$
- $p/_D = \dfrac{\sup_i x_{ii}}{\sum_i x_{ii}}$ $\qquad p'/_{\bar{D}} = \dfrac{\sup_{i \neq j} x_{i,j}}{\sum_{i \neq j} x_{i,j}}$

Il est en outre important de pouvoir évaluer la probabilité pour les enfants d'utiliser un modèle M ou A sachant qu'antérieurement il a été utilisé un modèle A ou M.

Nous présentons ci-dessous, à titre d'exemple, deux tableaux relatifs aux couples de situations (Sit 1, Sit 2) et (Sit 4, Sit 5)

T_1

Sit 1 \ Sit 2	R	A	S	M
R	2	1	0	0
A	0	13	1	1
S	0	1	1	1
M	0	0	0	2

$\sum_i x_{ii}$	18	5	$\sum_{i \neq j} x_{ij}$
p	78	22	p'
$\sup_i x_{ii}$	13	1	$\sup_{i \neq j} x_{ij}$
$p/_D$	72	20	$p'/_{\bar{D}}$

$p(A_{Sit2}/A_{Sit1}) = 0{,}86$; $p(M_{Sit2}/A_{Sit1}) = 0{,}09$

T_4

Sit 4 \ Sit 5	R	A	S	M
R	1	1	0	0
A	1	4	0	10
S	0	1	0	3
M	0	0	0	2

$\sum_i x_{ii}$	7	16	$\sum_{i \neq j} x_{ij}$
p	30	70	p'
$\sup_i x_{ii}$	4	10	$\sup_{i \neq j} x_{ij}$
$p/_D$	57	62	$p'/_{\bar{D}}$

$p(A_{Sit5}/A_{Sit4})=0{,}26$; $p(M_{Sit5},A_{Sit4})=0{,}66$

. Quelques remarques.

Dans le tableau T_1 la case d'effectif maximum est la case (A,A) qui absorbe 70 % de l'effectif total.

Le tableau T_4 correspond au cas où l'effectif de la diagonale est inférieur à l'effectif réparti sur les autres cases, la case d'effectif maximum étant la case (A,M)

.../...

VIII.5. *"Ouverture" didactique de la situation pédagogique*

Les maîtres cherchant à concevoir la suite des activités didactiques doivent à l'issue des séances prendre un certain nombre de décisions liées au seuil de réussite atteint par les enfants et aux comportements observés.

Nous avons déjà signalé que le choix des situations didactiques dépend de la quantité d'information que les enfants sont susceptibles d'en tirer, choix qui dépend de l'incertitude des sujets vis-à-vis de la situation, incertitude qui est fonction du degré d'ouverture de l'activité.

G. BROUSSEAU appelle situation ouverte une situation à forte entropie qu'il définit comme suit :

"si nous savons énumérer les n issues possibles d'une situation didactique et donner pour chacune la probabilité p_i avec laquelle un sujet donné choisira cette ième issue, l'incertitude du sujet est mesurée par la fonction entropie de Shannon.

$$I = - \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

Cette fonction est maximum lorsque les n issues sont équiprobables."

Dans notre cas, relativement aux 11 comportements possibles, l'incertitude maximum est $I_{max} = 3,46$.

L'entropie relative aux modèles pour chacune des situations est :

$I_{Sit1} = 2,04$ $I_{Sit2} = 3,31$ $I_{Sit3} = 2,24$ $I_{Sit4} = 2,34$ $I_{Sit5} = 2,36$

On obtient donc la chaine suivante :

$$\boxed{Sit5 > Sit4 > Sit2 > Sit3 > Sit1}$$

Ce qui nous intéresse dans ce paragraphe est de pouvoir mesurer la quantité d'information apportée par une activité didactique ; celle-ci peut être évaluée par la variation de l'entropie.

Les calculs ci-dessus montrent que la répétition des situations Sit1, Sit2, Sit3, Sit4, ne modifient pas sensiblement l'incertitude des sujets vis-à-vis du problème.

La quantité d'information apportée par la situation Sit5 est donnée par $I_{Sit5} - I_{Sit6}$.

On trouve $I_{Sit6} = 1,95$ d'où $I_{Sit5} - I_{Sit6} = 0,43$

Le fait que, entre Sit5 et Sit6, l'entropie ait fortement diminué signifie que la résolution de Sit5 abaisse la probabilité de choix d'un certain nombre de comportements au cours de Sit6.

.../...

En réalité, note G. BROUSSEAU, il faut distinguer entropie didactique et incertitude du sujet. Cette dernière est fonction de l'entropie mais au cours d'un apprentissage, on peut faire diminuer l'entropie tout en accroissant l'incertitude du sujet. Le maître propose constamment des situations qui font diminuer l'entropie (comme Sit5 et Sit6).

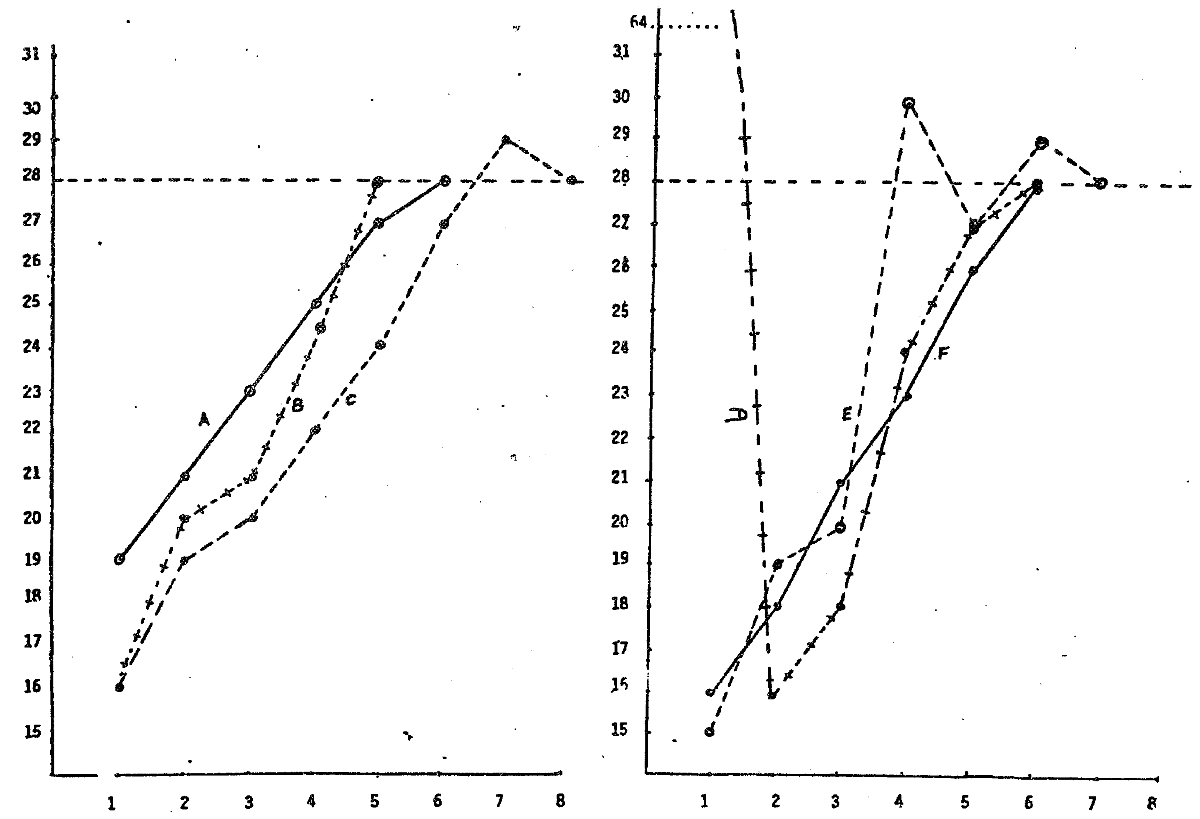
Une fois optimisé le choix du modèle on sollicite de l'enfant un effort de création lors de la recherche d'un procédé de plus en plus économique et dans ce cas, on accroît l'incertitude du sujet en modifiant par exemple l'ordre de grandeur des nombres.

IX. COMMENT LES ENFANTS ORGANISENT-ILS LEURS ESSAIS MUTLIPLICATIFS ? QUELLES CONSEQUENCES EN TIRER ?

Lors de la résolution de la situation Sit 5, des enfants ont utilisé une méthode multiplicative et plus précisément le modèle M_3.

Pour les enfants ayant réussi à la situation en utilisant cette stratégie, nous avons relevé les essais successifs effectués (On rappelle qu'il s'agit de déterminer le plus grand entier x tel que 16 x $\leqslant$ 460)

On obtient pour chaque enfant un profil relatif à la suite des calculs en portant en abscisse le rang de l'essai et en ordonnée la valeur x choisie.



Commentaires :

Pour faciliter la lecture nous avons désigné ces profils à l'aide des lettres A, B, C, D, E, F.

Remarque 1 :

A l'exception de D, le premier essai est un entier n ($n<20$)

Dans le cas de D le premier essai est 64.

La première observation est que les enfants ont une appréciation défectueuse de l'ordre de grandeur du résultat.

Remarque 2 :

A, B, C, F, procèdent avec une quasi-régularité à partir du nombre choisi pour le premier essai en l'augmentant de 2 ou 3. Dans ce cas, le nombre d'essais pour obtenir la solution n'est pas une variable pertinente. La comparaison des profils B et C en est une illustration.

Remarque 3 :

On note sur le profil E les deux essais successifs 16 x 20 et 16 x 30 qui correspondent à une tentative d'encadrement du nombre 460 par des multiples de dix, procédé correspondant à une forme d'économie dans l'évaluation de l'ordre de grandeur du résultat.

Remarque 4 :

Les six enfants ont vérifié que le nombre trouvé est solution. On distinguera les profils A, B, E, F d'une part C et D d'autre part.

Dans le premier cas, les enfants dont les profils A, B, E, F ont vérifié que le nombre trouvé est nombre solution par appréciation de la différence.

Dans le cas de C et D on note une "oscillation" autour du 28.

16 x 27 est trop petit

16 x 29 est trop grand

16 x 28 est solution

Conséquences :

Ceci nous a conduit à proposer les trois situations suivantes, portant sur l'estimation de l'ordre de grandeur d'un produit et d'un quotient.

Sit 7

J'ai 2500 bonbons à partager entre 23 enfants.
Peux-tu prévoir combien de bonbons va recevoir chaque enfant ? Entoure le nombre qui, d'après toi, convient :
15 - 75 - 95 - 108 - 305
Vérifie ta prévision.

Sit 8

On range 18 gâteaux dans un paquet
Combien de paquets peut-on remplir avec 1840 gâteaux ?
Prévois ta réponse et entoure le nombre correspondant.
85 - 100 - 102 - 250 - 275
Vérifie.

Sit 9

Vous avez une bande de 15 carreaux de largeur.
On veut la découper de façon à obtenir un rectangle de même largeur, qui ne dépasse pas 78 carreaux mais qui s'en rapproche le plus possible.
Combien de carreaux aura-t-on sur la longueur ?
10 - 5 - 73 - 83 - 15
Entoure la réponse qui te paraît correcte.
Vérifie.

X. QUELS SONT LES SAVOIR-FAIRE MIS EN PLACE ?

Les activités ultérieures conduisent à la mise en place d'un algorithme de calcul, de recherche du quotient et du reste dans la division.

L'activité mathématique mise en place permet la construction d'un procédé de calcul du quotient et du reste valable pour n'importe quel dividende et n'importe quel diviseur.

La suite des séquences amène les enfants à une recherche du quotient par :

- estimation de l'ordre de grandeur
- ajustement par appréciation de la différence.

La disposition des calculs tient compte du tâtonnement expérimental et se présente de la manière suivante :

Diviseur	Dividende	
42	5725	
42 x 100 = 4200	- 4200	100
	1525	
42 x 20 = 840	- 840	20
	685	
42 x 10 = 420	- 420	10
	265	
42 x 6 = 252	- 242	6
	13	136
Répertoire utilisé	Reste	Quotient

Cette disposition présente certains avantages

* les calculs intermédiaires figurent explicitement et la détection des erreurs est plus facile.
* les zéros intercalés causent moins d'erreurs
* les tâtonnements ne donnent lieu à aucune râture, en effet, si on ne trouve pas du premier coup le plus grand multiple du diviseur, on peut utiliser des quotients partiels dont on fait la somme.
* l'apprentissage plus souple permet de mettre en place une méthode de plus en plus économique progressivement sans mécanisation.

Nous présentons ci-après quelques travaux d'enfants qui illustrent divers procédés de calcul utilisés plus ou moins économiques.

* Trois exemples de répertoires différents utilisés pour résoudre la situation suivante: (*enfants MOS, BOS? LOS le 26.05.78*).

Dans la boîte j'ai 948 cubes. Je veux les distribuer à 4 enfants.
Combien chaque enfant aura-t-il de cubes?

4	948
4 X 200 = 800	− 800
4 X 10 = 40	148
4 X 20 = 80	− 40
4 X 5 = 20	108
4 X 2 = 8	− 80
	028
	− 20
	008
	− 8
	000

Ils doivent avoir chaqun 237 cubes.

4	948
4 x 200 = 800	− 800
4 X 20 = 80	148
4 X 10 = 40	− 80
4 X 7 = 28	068
	− 40
	028
	− 28
	00

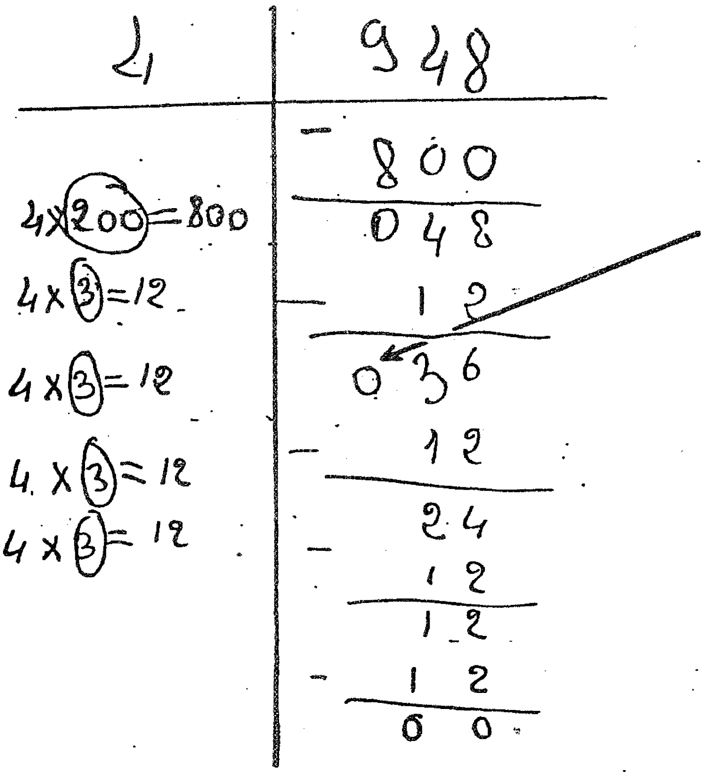
4	948
4 X 200 = 800	− 800
4 X 9 = 36	148
4 X 20 = 80	− 36
4 X 8 = 32	112
	− 80
	032
	− 32
	00

* Un procédé plus économique sur la même situation: (*enfant HOA*)

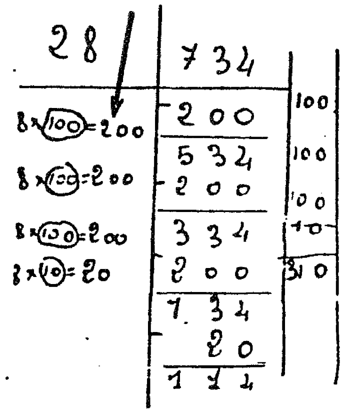
4	948	
4 X 200 = 800	− 800	200
	148	
4 X 30 = 120	− 120	30
4 X 7 = 28	028	
	− 28	7
	00	
		237

* Quelques exemples d'erreurs dans la mise en place de l'algorithme,
(le maître peut parfaitement localiser l'erreur de l'enfant)

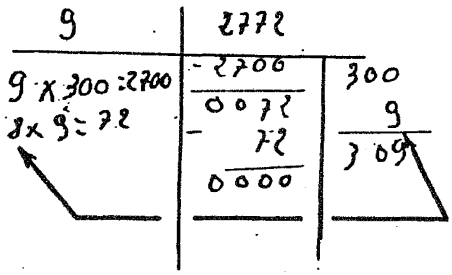
Erreur dans une soustraction: (*enfant* BAE)



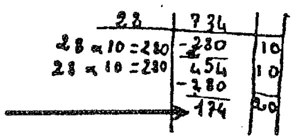
Erreur dans le répertoire (*enfant* BAE)



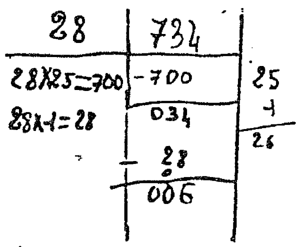
Erreur de report: (*enfant* BAL)



Erreur sur le reste qui est supérieur au diviseur: (*enfant* CAP)



Nous présentons pour terminer un exemple intéressant de réussite (le répertoire est bien adapté à la division proposée et ne coïncide pas avec la méthode traditionnelle) (*enfant* DEL)



XI. S'IL FALLAIT CONCLURE

Nous ne rappellerons que quelques différences observables entre des situations relevant d'un apprentissage EMPIRIQUE et des situations d'action dans le cadre d'un apprentissage DIALECTIQUE.

L'étude des quatre premières situations montre que la répétition d'exercices de même nature n'entraîne pas de modifications sensibles au niveau de la réussite.

* L'analyse des modifications des modèles employés par les enfants au cours des six situations révèle une forte stabilité de comportements lors de la résolution de deux séquences consécutives et permet de déboucher sur une classification des profils de comportements.

Cette étude révèle une rupture lors de la résolution de Sit 5, puisque c'est à cette occasion que les enfants abandonnent le modèle additif au profit du modèle multiplicatif, procédure plus économique.

* L'étude de l'influence du rang sur la procédure suivie montre une opposition totale entre les séquences relevant d'un apprentissage EMPIRIQUE et celles relevant d'un apprentissage DIALECTIQUE.

→ Dans le premier cas, on n'observe pas de modifications importantes au niveau des choix de procédures de résolution et nous pouvons identifier diverses stratégies :

- si les nombres sont "petits" les enfants cherchent au hasard. Le coût d'une telle méthode ne leur apparaissant pas élevé par rapport à la mise en oeuvre d'une stratégie.
- si l'ordre de grandeur des nombres est élevé, l'incertitude des enfants vis-à-vis de la situation étant grande ils résolvent par tâtonnement en faisant des additions et des soustractions.

Donc dans le cas de séquences relevant d'un apprentissage EMPIRIQUE, la répétition de situations relevant d'un même modèle mathématique ne fait pas apparaître de modifications de comportements et elle ne conduit pas les enfants à s'approprier un modèle de plus en plus économique.

→ Dans le cas de situations DIALECTIQUES les enfants utilisent rapidement un modèle multiplicatif ; la différence avec les situations précédentes vient du fait que la répétition abaisse la probabilité de choix d'un certain nombre de compor-

.../...

tements (on observe en particulier que lors de la résolution de Sit 6 tous les enfants utilisent une procédure multiplicative).

L'étude de "l'ouverture" didactique qui peut être mesurée à l'aide de l'entropie relative aux modèles montre que la quantité d'informations apportées par une activité didactique est importante dans le cas de situations DIALECTIQUES et faible dans le cas de séquences relevant d'un apprentissage EMPIRIQUE.

Il apparaît dans cette étude que les situations selon le schéma didactique dit "situation d'action" proposent aux enfants un champ d'application suffisamment différent pour provoquer un changement de modèles.

Cette étude est évidemment partielle et schématique car :

- elle porte sur un faible effectif
- elle ne prend pas en compte l'intégralité du processus d'acquisition du modèle de division euclidienne.

(En effet l'étude et l'analyse a porté essentiellement sur la phase d'ACTION du processus d'apprentissage DIALECTIQUE)

Signalons enfin que ce travail met en évidence la manière dont sont réinvestis les comportements antérieurs en vue de la création de comportements spécifiques à la résolution de situations reconnues comme situations de division.

C'est pour cette raison que, s'il nous paraît particulièrement important et intéressant que les nouveaux programmes mettent l'accent sur des méthodes empiriques de calcul, nous accordons notre préférence à des apprentissages dialectiques prenant en compte les phases d'ACTION de FORMULATION et de VALIDATION.

ANNEXE

* Exemple de modèle A_2 (enfant BAL Situation 1)

On veut distribuer un gâteau à chacun des 245 enfants d'une colonie de vacances pour le goûter.
Chaque paquet contient 18 gâteaux.
Quel est le nombre de paquets qu'il faut ouvrir ?

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ 18 \\ \hline 36 \\ +\ 18 \\ \hline 54 \\ +\ 18 \\ \hline 72 \\ +\ 18 \\ \hline 090 \\ +\ 18 \\ \hline 108 \\ +\ 18 \\ \hline 126 \\ +\ 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 162 \\ +\ 18 \\ \hline 180 \\ +\ 18 \\ \hline 198 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 198 \\ +\ 18 \\ \hline 216 \\ +\ 18 \\ \hline 234 \\ +\ 18 \\ \hline 252 \\ -\ 07 \\ \hline 245 \end{array}$$

il faut ouvrir 14 paquets de gâteau.

* Exemple de modèle A_3 (enfant LAC, Situation 4)

Carole a une boîte de 350 perles :
Elle fabrique des colliers de 28 perles chacun.
Combien de colliers peut-elle fabriquer ?

$28 \times 10 = 280$

$$\begin{array}{r} +28 \\ +28 \\ \hline 336 \end{array}$$

Elle peut se faire 12 colliers