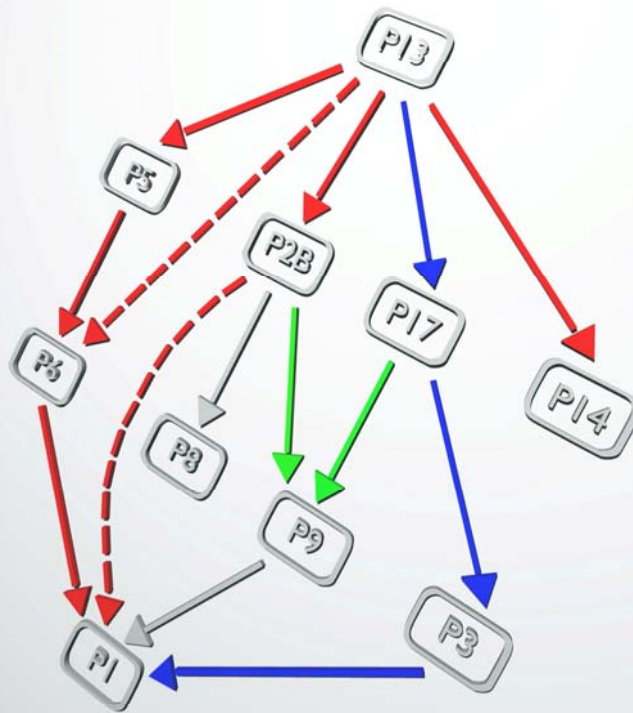


# Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo

Primera aproximación en lengua hispana



Eds: P. Orús, L. Zamora, P. Gregori.



Datos catalográficos

**Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo:** primera aproximación en lengua hispana.

Editores: Pilar Orús, Larisa Zamora y Pablo Gregori

ISBN: 978-84-692-3925-4

DEP. LEGAL:

Editores:

Pilar Orús Báguena  
Profesora Titular de Universidad  
Departamento de Matemáticas  
Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales  
Universitat Jaume I de Castellón, España

Larisa Zamora Matamoros  
Profesora Titular  
Departamento de Matemática  
Facultad de Matemática y Computación  
Universidad de Oriente, Cuba

Pablo Gregori Huerta  
Profesor Contratado Doctor  
Departamento de Matemáticas  
Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales  
Universitat Jaume I de Castellón, España

© Del texto: Los Editores, 2009

© De la presente edición: Departamento de Matemáticas, Universitat Jaume I de Castellón y Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente de Santiago de Cuba, 2009

Impresión: Innovació Digital Castelló, s.l.u.

Diseño de cubierta: Óscar Muñoz Muñoz

ISBN: 978-84-692-3925-4

Depósito legal:

## Presentación

El libro que presentamos es una obra colectiva, fruto de la cooperación de diversos investigadores, instituciones y países, con lenguas diferentes, pero con objetivos comunes. Entre las instituciones que han contribuido de manera decisiva a la existencia de este libro, destacaremos tres: el Grupo Internacional de Análisis Estadístico Implicativo (*Groupe International d'Analyse Statistique Implicative*, [http://math.unipa.it/~grim/asi/asi\\_index.htm](http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_index.htm)), y dos universidades, la Universidad Jaume I de Castellón (España) y la Universidad de Oriente de Santiago de Cuba (Cuba).

El Grupo Internacional de Análisis Estadístico Implicativo (ASI) decidió en 2005, en sus III Jornadas Internacionales, elegir a la Universidad Jaume I de Castellón como sede para celebrar sus siguientes Jornadas Internacionales en 2007. Con dicha decisión se pretendía continuar el objetivo de difundir estas novedosas técnicas de análisis estadístico multivariante a un país de idioma diferente a los que había utilizado habitualmente el ASI en sus publicaciones: el francés, principalmente, por el origen de sus creadores (R. Gras y colaboradores), y el inglés, por obvias razones de necesidad de comunicación científica. El italiano se había incorporado más recientemente a esta labor de difusión del Análisis Implicativo en las mencionadas III Jornadas, celebradas en Palermo, con ese mismo objetivo.

La elección de la Universidad Jaume I (UJI) permitió presentar, por primera vez en España, este método de análisis y sus técnicas a los investigadores de lengua hispana, añadiendo, además, la posibilidad de incorporar, al grupo internacional, investigadores que comparten esta lengua, de países como Cuba y Chile, y que realizan estancias de investigación frecuentes en el Departamento de Matemáticas de la UJI, muy especialmente profesores de la Universidad de Oriente (UO), con la que la Universidad Jaume I tiene establecidos fuertes vínculos de cooperación (en nuestro caso, a través de sus respectivos Departamentos de Matemáticas y de la Facultad de Matemática y Computación). Las actas de las IV Jornadas Internacionales ASI fueron ya una muestra de la cooperación entre estas instituciones y de la incipiente incorporación del español como lengua de las contribuciones presentadas en ellas.

Este libro es un paso más en este objetivo común: es la primera publicación sobre el Análisis Estadístico Implicativo realizada, íntegramente, en lengua hispana. Hemos procedido a realizar una selección y traducción de las últimas aportaciones teóricas y prácticas sobre este método de análisis, presentadas en gran parte en las últimas Jornadas realizadas hasta el momento sobre este tema, y cuyo

interés no vamos a comentar aquí, ya que el profesor Einoshin Suzuki lo hace brillantemente en el prefacio que ha escrito para nuestro libro. Queremos señalar, de forma especial, el interés de dos capítulos: el capítulo colectivo *Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC*, a partir de un trabajo previo de la profesora Larisa Zamora para presentar el ASI en la UO, es una recapitulación y traducción de todos los conceptos teóricos básicos del Análisis Estadístico Implicativo, con ejemplos aclaratorios de cada uno de ellos, utilizando el programa informático *CHIC*, que implementa y grafica los cálculos de las diferentes técnicas del ASI: árboles jerárquicos de similaridad, grafos de implicación y árboles jerárquicos de cohesión. El capítulo del profesor Einoshin Suzuki, *Descubriendo Reglas de Excepción Estructuradas*, basado en una de sus contribuciones al congreso *15th European Conference on Machine Learning (ECML) and the 8th European Conference on Principles and Practice of Knowledge Discovery in Databases (PKDD)*, nos ha sido gentilmente proporcionado para su traducción e inclusión en el libro.

La estructura del libro, articulado en tres partes, está marcada por la naturaleza de los capítulos: las contribuciones teóricas al desarrollo del ASI las encontraremos en la primera parte, y las aplicaciones de este método y sus técnicas a diversos temas y ámbitos aparecerán en la segunda y tercera parte. Si bien, la mayoría de las aplicaciones están realizadas en el ámbito de la didáctica de las Matemáticas (origen del ASI), hemos querido señalar que en la actualidad ya existen aplicaciones en otros campos, diferenciando una tercera parte con los capítulos seleccionados por el interés especial que supone mostrar la utilización del ASI como instrumento metodológico en nuevos ámbitos de investigación científica y social.

Queremos agradecer a todos los autores su disponibilidad y diligencia para proporcionarnos versiones en lengua hispana de sus capítulos, o bien su permiso para poder disponer de los capítulos en versión original, junto con su confianza, para la realización de las traducciones. Agradecemos así mismo a los traductores su excelente, a la vez que desinteresado, trabajo de traducción; por ello hemos querido incluir también su nombre, cuando este trabajo no ha sido hecho por los propios autores. De manera especial queremos agradecer el gran volumen de trabajo de traducción de los compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oriente y de la coordinación ejercida por su directora, la profesora Zamora. Así mismo queremos agradecer su gran contribución al trabajo de edición, realizado principalmente durante su estancia de investigación en la Universidad Jaume I (financiada por las ayudas Bancaja-UJI 2008), en colaboración con el profesor Pablo Gregori, del Departamento de Matemáticas de la UJI. Gracias a todos.

Por último, y de manera especial, queremos agradecer a Régis Gras, profesor emérito de la Université de Nantes, la confianza y apoyo, en todo momento, a nuestro proyecto, y a Einoshin Suzuki, profesor de la Kyushu University, por la cesión de su artículo y la redacción de nuestro prefacio.

Este libro, en habla hispana, junto con *Statistical Implicative Analysis: theory and applications* (Springer, 2007), y el recientemente aparecido *Analyse Statistique Implicative; une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités* (Cépadues, 2009), cumple el objetivo común de ampliar la difusión del Análisis Estadístico Implicativo a un mayor número de investigadores y utilizadores potenciales en diversos ámbitos, a nivel mundial.

Castellón, 2 de Julio de 2009.

Pilar Orús  
Directora del Dpto de Matemáticas  
Universidad Jaume I. Castellón.  
España

Larisa Zamora  
Directora del Dpto de Matemáticas  
Universidad de Oriente. Santiago de Cuba.  
Cuba



## Prefacio (traducción)

El descubrimiento de reglas está reconocido como un campo representativo de la minería de datos, y los criterios de evaluación, que distinguen las reglas "interesantes" de las demás desempeñan un papel crucial en el descubrimiento de reglas. El trabajo de Régis Gras en el campo del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) se remonta a la década de los 70 y es ampliamente reconocido por haber realizado contribuciones significativas a la investigación sobre criterios de evaluación. Este libro contiene, en español, una gran parte de los trabajos presentados en ASI4 (4èmes Rencontres Internationales Analyse Statistique Implicative), siendo ésta la última de la serie de conferencias internacionales que marcan la orientación del ASI, que se celebró del 18 al 21 de octubre de 2007 en el Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón en España. Este libro representa la primera aproximación a una colección completa y detallada de artículos sobre avances recientes del ASI en términos de metodologías y aplicaciones, en un idioma utilizado diariamente por unos 350 millones de personas en todo el mundo.

La intensidad de la implicación, el primer método del ASI en su forma inicial, evalúa el grado de interés de una regla  $Y \rightarrow X$  en términos de la cantidad  $n(\bar{X} \wedge Y)$  de sus contraejemplos, cada uno de los cuales cumple  $\bar{X} \wedge Y$ . Es una medida de interés basada en la probabilidad de obtener una regla cuyo número de contraejemplos es a lo sumo  $n(\bar{X} \wedge Y)$  de los datos disponibles, y ha implicado a un gran número de investigadores y personas de negocios debido a su fundamentación teórica y méritos prácticos. CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) es un programa informático equipado con una interfaz gráfica que permite una fácil utilización de diversas técnicas del ASI para una amplia gama de usuarios, desde expertos en el análisis de datos hasta los profesionales con poca base informática.

El libro contiene explicaciones sobre el ASI y CHIC, así como ejemplos de sus aplicaciones, especialmente en educación, didáctica, y psicología, pero también en bioinformática e ingeniería del conocimiento. Algunas extensiones del ASI en el contexto general de la minería de datos también se presentan.

Este libro será de interés para los creadores de sistemas de minería de datos, así como investigadores, estudiantes y profesionales dedicados a la minería de datos y análisis estadístico de los datos.

Profesor Einoshin Suzuki  
Departamento de Informática,  
Escuela Superior de  
Ciencias de la Información  
e Ingeniería Eléctrica,  
Universidad de Kyushu, Japón



## Preface (original)

Rule discovery is recognized as a representative subject of data mining, and evaluation criteria, which distinguish “interesting” rules from others play a crucial role in rule discovery. Régis Gras’s work on Statistical Implicative Analysis (SIA) dates back to the 1970’s and is widely acknowledged to have made significant contributions to the research on evaluation criteria. This book contains a large part of ASI4 (4èmes Rencontres Internationales Analyse Statistique Implicative), a leading international conference in SIA held during 18-21 October 2007 at Departamento de Matemáticas Universitat Jaume I, Castellón, España, with some new insights, in Spanish language. This book represents the first approach of a collection of comprehensive and detailed reports on recent progress of SIA in terms of methodologies and applications, in a language used daily by approximately 350 million of people world-wide.

Intensity of implication, the first method in SIA in its initial form, evaluates the degree of the interestingness of a rule  $Y \rightarrow X$  in terms of the number  $n(\bar{X} \wedge Y)$  of its counterexamples each of which satisfies  $\bar{X} \wedge Y$ . It is an interestingness measure based on the probability of obtaining a rule of which number of counterexamples is at most  $n(\bar{X} \wedge Y)$  from the given data and has been involving a large number of academic researchers and business persons due to its theoretical beauty and practical merits. CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification), a software equipped with a graphical interface, allows easy use of various techniques in SIA for a wide range of users from experts in data analysis to practitioners with little background on computer science.

The book contains explanations of SIA and CHIC as well as examples of their applications especially in education, didactics, and psychology; but also bioinformatics and knowledge engineering. Extensions of SIA in the context of general data mining are also presented.

This book should be of interest to developers of data mining systems as well as researchers, students, and practitioners devoted to data mining and statistical data analysis.

Professor Einoshin Suzuki  
Department of Informatics,  
Graduate School of  
Information Science  
and Electrical Engineering,  
Kyushu University, Japan

## Índice

Presentación .....	iii
Prefacio(traducción) .....	vii
Preface (original) .....	ix
Índice .....	xi

### **Parte I: Trabajos teóricos**

1. El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen .....	3
2. CHIC: utilización y funcionalidades .....	51
3. Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC.....	65
4. Descubriendo Reglas de Excepción Estructuradas.....	103
5. Regla y R-regla de excepción en Análisis Estadístico Implicativo .....	127
6. Una medida comparativa en didáctica de las matemáticas entre el análisis a priori y la contingencia .....	143
7. Reflexiones sobre el análisis a priori de los cuestionarios basadas en técnicas del Análisis Estadístico Implicativo.....	159

### **Parte II: Aplicación del ASI a la Didáctica de las Matemáticas**

8. Previsión y comunicación de valores a través del gráfico.....	193
9. La comprensión de la divisibilidad en $\mathbb{N}$ . Un análisis implicativo.....	215
10. Aplicación de CHIC al estudio de las funciones elementales .....	235
11. Una investigación sobre la formalización que hacen los alumnos de un problema de la teoría de números .....	265

12. Tratamiento de datos, lógica y estadística elemental en la enseñanza preuniversitaria. Un estudio mediante la aplicación del CHIC.....	279
13. ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?.....	299
14. ¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales .....	329
15. El análisis implicativo como medio de evaluación de los estudiantes futuros maestros de escuela y de su formación en geometría plana .....	353
16. Criterios de adopción y utilización del libro didáctico de matemática en la enseñanza fundamental del nordeste brasileño. ....	375
<b>Parte III: Aplicaciones del ASI en otros ámbitos</b>	
17. “Representaciones” de profesores ordinarios sobre situaciones de corrección y sobre la planificación del curriculum a propósito de la función inversa en la transición liceo/Universidad en Francia.....	403
18. Análisis estadístico implicativo, análisis textual. Un ejemplo de complementariedad.....	427
19. Enfoque bayesiano “oculto” y enfoque frecuentista “ambiguo” en los manuales franceses de Première S y ES.....	447
20. Un método implicativo para el análisis de datos de expresión de genes .....	461
21. Relaciones entre tipos de violaciones de libertades sindicales garantizadas por los convenios de la OIT: Un análisis estadístico implicativo de los resultados de un análisis automático de textos .....	483

# Parte I

## Trabajos teóricos



# **El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen**

Régis Gras, Pascale Kuntz

Traducido por Isabel Alonso Berenguer y Alexander Gorina Sánchez

LINA - Escuela Politécnica de la Universidad de Nantes.

El Chantrerie BP 60601.44306 Nantes cedex

[regisgra@club-internet.fr](mailto:regisgra@club-internet.fr), [pascale.kuntz@polytech.univ-nantes.fr](mailto:pascale.kuntz@polytech.univ-nantes.fr)

**Resumen:** Partiendo de situaciones de didáctica de las matemáticas, el método de análisis estadístico implicativo se desarrolla en correspondencia con los problemas encontrados y las cuestiones planteadas. Su objetivo principal contempla la estructuración de datos, interrelacionando sujetos y variables, la extracción de reglas inductivas entre las variables y, a partir de la contingencia de estas reglas, la explicación y en consecuencia una determinada previsión en distintos ámbitos: psicología, sociología, biología, etc. Es por esto que se crearon los conceptos de intensidad de implicación, cohesión de clases, implicación-inclusión, significación de niveles jerárquicos, contribución de variables suplementarias, etc. De la misma forma, al tratamiento de variables binarias (por ejemplo, descriptores), se añaden progresivamente los de variables modales, frecuenciales y, recientemente, de variables-intervalo y variables difusas.

**Palabras claves:** implicación estadística, inducción, implicación-inclusión, entropía, cohesión, grafo implicativo, árbol jerárquico, nivel significativo, dialéctica, variable binaria, variable modal, variable frecuencial, variable-sobre-intervalo, variable-intervalo, regla, meta-regla, regla generalizada, contribución, tipicidad.

## Preámbulo

Los conocimientos operacionales del hombre se constituyen principalmente según dos componentes: la de los hechos y la de las reglas entre los hechos o entre las mismas reglas. Éstos son aprendizajes que, a través de su cultura y por sus experiencias personales, le permiten una elaboración progresiva de estas formas de conocimientos, a pesar de retrocesos, cuestionamientos y rupturas que surgen alrededor de refutaciones decisivas. Sin embargo, se sabe que éstas contribuyen dialécticamente a garantizarle un equilibrio operatorio. Ahora bien, las reglas se forman inductivamente, de manera relativamente estables en cuanto al número de éxitos, en cuanto a su calidad explicativa o anticipativa, alcanzando un determinado nivel (de confianza) a partir del cual podrán ser usadas. En cambio, cuando este nivel (subjetivo) no es alcanzado, la economía del individuo hará que, inicialmente, se resista a su abandono o a su crítica. En efecto, es costoso sustituir la regla inicial por otra cuando exista un escaso número de negaciones de dicha regla, en la medida en que fue consolidada por un gran número de confirmaciones. Un aumento de este número de instancias negativas, función de la calidad de robustez del nivel de confianza en la regla, conducirá quizás a un reajuste de ésta, o incluso a su abandono. Laurent Fleury (Fleury L. 1996), en su tesis, cita con pertinencia el ejemplo -que retomo- de la regla muy admisible: "todos los Ferrari son rojos". Esta regla, muy robusta, no será entonces abandonada por la observación de uno o dos contraejemplos. Sobre todo porque no haría falta reconsiderarla de manera inmediata.

Así pues, al contrario de lo que es legítimo en matemáticas, donde toda regla (teorema) no sufre de excepción, donde el determinismo es total, las reglas en ciencias humanísticas, más generalmente en las ciencias denominadas "suaves", son aceptables y por tanto aplicables, mientras que el número de contraejemplos siga siendo "admisible", teniendo en cuenta la frecuencia de situaciones donde serán positivas y eficaces. El problema, en el análisis de los datos, consiste entonces en establecer un criterio numérico, relativamente consensual, para definir la noción de nivel de confianza ajustable al nivel de exigencia del usuario de la regla. Que esté establecido sobre bases estadísticas, tiene razones para no sorprender. Que posea una propiedad de resistencia no lineal al ruido (debilidad a los primeros contraejemplos) puede también parecer natural, conforme al sentido "económico" mencionado más arriba. Que se pierda validez si los contraejemplos se repiten, parece también que debe guiar nuestra elección en la modelización del criterio buscado. Este texto presenta la elección epistemológica que hemos hecho.



Como tal es refutable, pero el número de situaciones y aplicaciones donde resultó pertinente y fértil nos conduce a restituir aquí la génesis.

## 1 Introducción

Se adoptaron distintos enfoques teóricos para modelar la extracción y la representación de reglas de inferencia imprecisas (o parciales) entre variables binarias (o atributos o caracteres) que describían a una población de individuos (sujetos u objetos). Pero las situaciones de partida y la naturaleza de los datos no modificaban la problemática inicial. Se trata de descubrir reglas inductivas no simétricas para modelar relaciones del tipo "si  $a$  entonces casi  $b$ ". Es, por ejemplo, la opción de las redes bayesianas (por ej.: Amarger S., Pearl J. 1988) o de los enrejados de Galois (por ej.: Simon A. 2000). Pero, lo más frecuente, la correlación y la prueba de  $\chi^2$  resultan inadecuadas a causa de su carácter simétrico, la probabilidad condicional (Loevinger 1947, Agrawal et al. 1993, Gras et al. 2004 a) sigue siendo el motor de la definición de la asociación, aunque el índice elegido para esta asociación es de tipo multivariado (por ejemplo. Bernard M. 1999).

Además, y según nuestro conocimiento; por una parte, generalmente los desarrollos diferentes e interesantes se centran en la propuesta de un índice de implicación parcial para datos binarios (véase [Lerman et al. 2004] o [Lallich et al. 2005] en las actas del ASI 05), por otra parte, esta noción no se extiende a otros tipos de variables, a la extracción y la representación según un grafo de reglas o según una jerarquía de meta-reglas; estructuras que apuntan a la significación de un todo no reducible a la suma de sus partes<sup>1</sup>, es decir, funcionando como un sistema complejo no lineal. Por ejemplo, se sabe muy bien, por su uso, que el significado de una frase no pasa completamente por el sentido de cada una de las palabras que la componen.

Volvamos de nuevo a lo que creemos fértil en la investigación que desarrollamos. Parecería que, en la literatura, el concepto de índice de implicación

---

<sup>1</sup> Es lo que destaca el filósofo L. Sève: "... en el paso no aditivo, no lineal de las partes al todo, hay aparición de propiedades que no son de ninguna manera precontenidas en las partes y que no pueden pues explicarse por ellas" ("Aparición, complejidad y dialéctica", Odile Jacob, mayo de 2005). F. Wahl afirma de la misma forma: "La idea es que el sistema prima sobre las partes, cada parte definiéndose por su diferencia con otra y por su articulación con todas las otras." (conversación seleccionada por C. David, Nuevo Observador n° 02228 del 16-22 de agosto de 2007).

no está extendido tampoco a la investigación de sujetos y categorías de sujetos responsables de las asociaciones. Ni que esta responsabilidad está cuantificada y conduce, por lo tanto, a una estructuración recíproca del conjunto de los sujetos, condicionada por las relaciones entre variables.

Nuestro propósito es, precisamente, realizar estas extensiones después de haber recordado el paradigma original.

## **2 La intensidad de implicación en el caso binario**

### **2.1 Situación fundamental y original**

Se interrelaciona una población E de objetos o sujetos con variables (caracteres, criterios, éxitos...) formulándose la siguiente pregunta: *¿"en qué medida se puede considerar que de cumplirse la variable<sup>2</sup> a implica que se cumpla la variable b? Dicho de otra forma, ¿los sujetos tienen la tendencia a ser b si se sabe que son a?"*. En las situaciones naturales, humanas o de las ciencias de la vida, donde los teoremas (si a entonces b) en sentido deductivo del término no pueden establecerse a causa de las excepciones que los niegan, es importante para el investigador y el experto *"profundizar en sus datos"* con el fin de lograr reglas suficientemente fiables (de las clases de "teoremas parciales", de las inducciones) para poder conjeturar<sup>3</sup> una posible relación causal, una génesis, para describir, estructurar una población y hacer la hipótesis de una determinada estabilidad con fines descriptivos y, si es posible, predictivos. Pero esta profundización exige la puesta a punto de métodos que la guíen y alejen del tanteo y el empirismo.

### **2.2 Matematización**

Para realizar esta matematización, tal como ocurre con el método de medida de la similaridad de I. C. Lerman (Lerman I. C. 1970, 1981), tal como ocurre con el planteamiento clásico en las pruebas no paramétricas (ej. Fisher, Wilcoxon, etc.), definimos (Gras R. 1979, Gras R. et al.1996) la medida de calidad confirmatoria de la relación implicativa  $a \Rightarrow b$ , a partir de la inverosimilitud de la aparición en los

---

<sup>2</sup> En todo el artículo, la palabra "variable" designa a una variable aislada como premisa (ejemplo: "ser rubia") o a una conjunción de variables aisladas (ej.: "ser rubia y tener menos de 30 años y vivir en París").

<sup>3</sup> "La excepción confirma la regla" nos dice el proverbio popular en el sentido de que no habría excepciones si no hubiese regla.

datos, del número de casos que la invalidan, es decir, para los cuales  $a$  es verificada sin que  $b$  lo sea. Esto equivale a comparar la diferencia entre la contingencia y la teoría si solamente la casualidad interviene<sup>4</sup>. Pero, en el marco del análisis de datos, es esta diferencia la que se tiene en cuenta y no la declaración de un rechazo o admisibilidad de la hipótesis nula. Esta medida se relativiza al número de datos que verifican respectivamente  $a$  y no  $b$ , circunstancia en la cual la implicación se toma precisamente por defecto. Ella cuantifica "el asombro" del experto ante el número inverosímilmente pequeño de contraejemplos, teniendo en cuenta una independencia supuesta entre las variables y los efectivos en juego.

Precisemos. Dado un conjunto finito  $V$  de  $v$  variables:  $a, b, c, \dots$ . En la situación paradigmática clásica, se trata de los resultados (éxito-fracaso) a un ítem de un cuestionario. A un conjunto finito  $E$  de  $n$  sujetos  $x$ , se asocian, por abuso de escritura, las funciones del tipo:  $x \rightarrow a(x)$  donde  $a(x)=1$  (o  $a(x)=$  verdadero) si  $x$  satisface o posee el carácter  $a$  y  $0$  (o  $a(x)=$  falso) en caso contrario. En inteligencia artificial se dirá que  $x$  es un ejemplo o una instancia para  $a$  si  $a(x)=1$  y un contraejemplo en el caso contrario.

La regla " $a \Rightarrow b$ " es lógicamente verdadera si para todo  $x$  de la muestra,  $b(x)$  sólo es nulo cuando  $a(x)$  lo sea también; es decir, si el conjunto  $A$  de los  $x$  para los cuales  $a(x)=1$  está contenido en el conjunto  $B$  de las  $x$  para las cuales  $b(x)=1$ . Sin embargo, esta inclusión estricta es excepcionalmente observada en las experiencias reales. En el caso de un cuestionario de conocimientos, se podrían, en efecto, observar a algunos raros alumnos que tienen éxito en el ítem  $a$  y no lo tienen en el  $b$ , sin que se impugne la tendencia a conseguir  $b$  cuando se ha conseguido  $a$ . Relativo al cardinal de  $E$  (sea  $n$ ), y también de  $A$  (sea  $n_a$ ) y  $B$  (sea  $n_b$ ), es el "peso" de los contraejemplos (sea  $n_{a \wedge \bar{b}}$ ) lo que será necesario tener en cuenta para aceptar estadísticamente conservar o no la cuasi-implicación o la cuasi-regla " $a \Rightarrow b$ ". Así pues, es a partir de la dialéctica "ejemplos-contra-ejemplos" que la regla aparece como el rebasamiento de la contradicción.

---

<sup>4</sup> "...[de acuerdo con Jung] si la frecuencia de las coincidencias no excede de manera significativa la probabilidad que podamos calcular atribullendole únicamente al azar la exclusión de relaciones causales ocultas, no tenemos ninguna razón para suponer la existencia de tales relaciones." , H. Atlan, "Con razón y sin ella. Intercrítica de la ciencia y el mito", Seuil, 1986.

### 2.3 Formalización

Para formalizar esta cuasi-regla, consideremos, como hizo I. C. Lerman para la similaridad, dos partes cualesquiera  $X$  e  $Y$  de  $E$ , elegidas aleatoria e independientemente (ausencia de vínculo a priori entre estas dos partes) y de cardinales iguales a los de  $A$  y  $B$  respectivamente. Sean  $\bar{Y}$  y  $\bar{B}$  los complementos respectivos de  $Y$  y de  $B$  en  $E$  de igual cardinal  $n_{\bar{b}} = n - n_b$ .

Diremos entonces:

**Definición 1:**  $a \Rightarrow b$  es admisible al nivel de **confianza**  $1 - \alpha$  sí y sólo sí:

$$\Pr[\text{Card}(X \cap \bar{Y}) \leq \text{Card}(A \cap \bar{B})] \leq \alpha$$

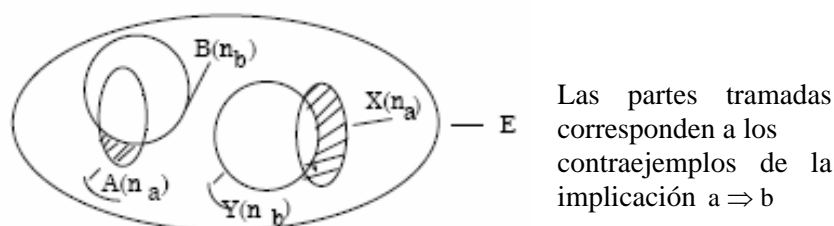


Fig. 1

Se establece (Lerman I. C. et al. 1981) que, para un determinado proceso de tirada, la variable aleatoria  $\text{Card}(X \cap \bar{Y})$  sigue la ley de Poisson de parámetro  $\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}$ . Llegamos al mismo resultado procediendo diferentemente, de la siguiente forma:

Denotemos por  $X$  (resp.  $Y$ ) el subconjunto aleatorio de transacciones binarias donde  $a$  (resp.  $b$ ) aparece, de manera independiente, con la frecuencia  $\frac{n_a}{n}$  (resp.  $\frac{n_b}{n}$ ). Para precisar el método de extracción, por ejemplo, de las transacciones especificadas como variables  $a$  y  $b$ , respectivamente  $A$  y  $B$ , se enuncian las siguientes hipótesis semánticamente admisibles, relativas a la

observación del evento  $[a = 1 \text{ y } b = 0]$ .  $A \cap \bar{B}$ <sup>5</sup> es el subconjunto de las transacciones, contraejemplos de la implicación  $a \Rightarrow b$  :

Hipótesis:

- h1: los tiempos de espera de un evento  $[a \text{ y no } b]$  son variables aleatorias independientes;
- h2: la ley del número de eventos que ocurren en el intervalo de tiempo  $[t, t + T]$  no depende más que de  $T$ ;
- h3: dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente.

Se demuestra entonces (por ejemplo en (Saporta, 2006)) que el número de eventos que se producen durante un período de duración  $n$  fijo sigue una ley de Poisson de parámetro  $c \cdot n$ , donde  $c$  se denomina intensidad del proceso de apariciones por unidad de tiempo.

Ahora bien, para cada transacción supuesta aleatoria, el evento  $[a = 1]$  tiene por probabilidad la frecuencia  $\frac{n_a}{n}$ , el evento  $[b = 0]$  tiene por probabilidad la frecuencia  $\frac{n_{\bar{b}}}{n}$ , y el evento conjunto  $[a = 1 \text{ y } b = 0]$  tiene una probabilidad estimada por la frecuencia  $\frac{n_a}{n} \cdot \frac{n_{\bar{b}}}{n}$  bajo la hipótesis de ausencia de vínculo a priori entre  $a$  y  $b$  (independencia).

Se puede entonces estimar la cadencia  $c$  de este evento por  $\frac{n_a}{n} \cdot \frac{n_{\bar{b}}}{n}$ .

Así para una duración de tiempo  $n$ , las apariciones del evento  $[a \text{ y no } b]$  siguen la ley de Poisson con parámetro  $\lambda = \frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}$ .

Por tanto,  $\Pr[\text{Card}(X \cap \bar{Y}) = s] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!}$ .

---

<sup>5</sup> En lo siguiente denotaremos por  $\bar{V}$  la negación de la variable  $V$  (no  $V$ ) y por  $\bar{P}$  el complemento de  $P$  en  $E$ .

Como consecuencia, la probabilidad para que el azar prevalezca, bajo la hipótesis de ausencia de vínculo a priori entre  $a$  y  $b$ , tiene más contraejemplos que los que se observaron:

$$\Pr[\text{Card}(X \cap \bar{Y}) \leq \text{Card}(A \cap \bar{B})] = \sum_{s=0}^{\text{Card}(A \cap \bar{B})} \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}$$

Pero otros procesos legítimos de tirada conducen a una ley Binomial, o incluso a una ley Hipergeométrica (ella misma no semánticamente adaptada a la situación debido a su simetría). En condiciones de convergencia convenientes, estas dos leyes conducen finalmente a la anterior ley de Poisson.

En los casos donde  $n_{\bar{b}} \neq 0$ , reducimos y centramos esta variable de Poisson a la variable:

$$Q\left(a, \bar{b}\right) = \frac{\text{Card}(X \cap \bar{Y}) - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}}$$

En la realización experimental, el valor observado de  $Q(a, \bar{b})$  es  $q(a, \bar{b})$ . Ella estima una diferencia entre la contingencia ( $\text{Card}(A \cap \bar{B})$ ) y el valor que habría tomado si hubiera habido independencia entre  $a$  y  $b$ .

**Definición 2:**  $q\left(a, \bar{b}\right) = \frac{n_a \wedge \bar{b} - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}}$  es denominado índice de implicación, número

elegido como indicador de la no implicación de  $a$  sobre  $b$ .

En los casos que legitiman convenientemente la aproximación (por ejemplo,  $\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n} \geq 4$ ), la variable  $Q(a, \bar{b})$  sigue aproximadamente la ley Normal centrada reducida. La intensidad de implicación, calidad de la admisibilidad de  $a \Rightarrow b$ , para  $n_a \leq n_b$  y  $n_b \neq n$ , es entonces definida a partir del índice  $q(a, \bar{b})$  por:

**Definición 3:** La intensidad de implicación, que mide la calidad inductiva de a sobre b es:

$$\varphi(a, b) = \begin{cases} 1 - \Pr[Q(a, \bar{b}) \leq q(a, \bar{b})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a, \bar{b})}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt & \text{si } n_b \neq n \\ 0 & \text{si } n_b = n \end{cases}$$

Por lo tanto, la definición de la implicación estadística pasa a ser:

**Definición 4:** La implicación  $a \Rightarrow b$  es admisible al nivel de confianza  $1 - \alpha$  sí y solamente sí:  $\varphi(a, b) \geq 1 - \alpha$ .

Recordemos que esta modelización de la cuasi-implicación mide el asombro de constatar la pequeñez de los contraejemplos respecto al número sorprendente de las instancias de la implicación. Es una medida de la calidad inductiva e informativa de la implicación. Por lo tanto, si la regla es trivial, como cuando B es muy grande o coincide con E, este asombro se vuelve pequeño. Demostramos (Gras R., 1996) por otra parte que esta trivialidad se traduce en una intensidad de implicación muy baja, o incluso nula: Si,  $n_a$  está fija y A está incluida en B,  $n_b$  tiende a n (B “crece” hacia E), entonces  $\varphi(a, b)$  tiende a 0. Definimos entonces, por “continuidad”:  $\varphi(a, b) = 0$  si  $n_b = n$ . Del mismo modo, si  $A \subset B$ ,  $\varphi(a, b)$  puede ser inferior a 1 cuando la confianza inductiva, medida por el asombro estadístico, es insuficiente.

**Observación 1:** La cuasi-implicación, de índice  $q(a, \bar{b})$  no simétrico, no coincide con el coeficiente de correlación  $\rho(a, b)$  que es simétrico y que mide la relación entre las variables a y b. En efecto, demostramos que si  $q(a, \bar{b}) \neq 0$  entonces

$$\frac{\rho(a, b)}{q(a, \bar{b})} = -\sqrt{\frac{n}{n_b n_{\bar{a}}}}$$

**Observación 2:** Recordemos que consideramos no solamente las conjunciones de variables del tipo “a y b” sino también disyunciones como “(a y b) o c...” con el fin de modelar los fenómenos que revelan los conceptos como se hace en aprendizaje o en inteligencia artificial. Los cálculos asociados siguen siendo compatibles con la lógica de proposiciones enlazadas por los conectores.

**Observación 3:** Contrariamente al índice de Loevinger (Loevinger J. 1947) y a la probabilidad condicional  $(\Pr[B|A])^6$  y todas sus derivaciones, la intensidad de implicación varía, no linealmente, con la dilatación de los conjuntos E, A y B y se debilita con la trivialidad (véase Definición 3). Además, resiste los ruidos, en particular en la vecindad de 0 para  $n_{a\wedge\bar{b}}$ , lo que hace estadísticamente creíble la relación que queremos modelar y establecer. Por último, se vio que la inclusión de A en B no garantiza una intensidad máxima, la calidad inductiva puede no ser fuerte, mientras por el contrario  $\Pr[B|A]$  es igual a 1 (Gras et al, 2004a, y Guillet y Hamilton, 2007). En el apartado que sigue, estudiamos más de cerca el problema de la sensibilidad y la estabilidad del índice de implicación en función de escasas variaciones de los parámetros de los que depende  $q(a, \bar{b})$  por el estudio de su diferencial.

**Observación 4:** Otras modelizaciones, además de la de Poisson, son posibles. Citan:

- *una modelización binomial:* considerando las variables duales  $\text{card}(A \cap \bar{Y})$  y  $\text{card}(X \cap \bar{B})$ , donde X e Y son dos partes elegidas de forma independiente en E, respetando las propiedades cardinales respectivas de A y B, todo elemento de E, por ejemplo, tiene la probabilidad  $\frac{n_a}{n} \frac{n_{\bar{b}}}{n}$  de pertenecer a  $A \cap \bar{Y}$ . Por lo tanto:

$$\Pr[\text{card}(A \cap \bar{Y}) = k] = \mathbf{C}_n^k \left( \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n^2} \right)^k \left( 1 - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n^2} \right)^{n-k} = \Pr[\text{card}(X \cap \bar{B}) = k]$$

$$\Pr[\text{card}(A \cap \bar{Y}) = k] = \mathbf{C}_n^k \left( \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n^2} \right)^k \left( 1 - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n^2} \right)^{n-k} = \Pr[\text{card}(X \cap \bar{B}) = k]$$

---

<sup>6</sup> Como dijimos, la probabilidad condicional representa la función más clásica que sirve a la confirmación inductiva de una regla.



- *una modelización hipergeométrica*: puede verse rápidamente considerando las variables aleatorias  $\text{card}(A \cap \bar{Y})$  y  $\text{card}(X \cap \bar{B})$  donde X e Y poseen las mismas propiedades cardinales respectivas que A y B. Se tiene, en efecto:

$$\begin{aligned} \Pr[\text{card}(A \cap \bar{Y}) = k] &= \frac{C_{n_a}^k C_{n-n_a}^{n-n_b-k}}{C_n^{n-n_b}} = \frac{n_a! n_{\bar{a}}! n_b! n_{\bar{b}}!}{k! n! (n_a - k)! (n_{\bar{b}} - k)! (n_{\bar{b}n_a} - k)!} \\ &= \frac{C_{n-n_b}^k C_{n_b}^{n_a-k}}{C_n^{n_a}} = \Pr[\text{card}(X \cap \bar{B}) = k] \end{aligned}$$

Si bien la modelización binomial sigue siendo compatible con la semántica de la implicación, relación binaria no simétrica, no ocurre lo mismo con la modelización hipergeométrica. Por ello, sólo consideraremos el modelo de Poisson y el modelo Binomial.

## 2.4 Estabilidad del índice de implicación

Estudiar la estabilidad de q, equivale a examinar sus pequeñas variaciones en una vecindad de los 4 valores enteros observados  $(n, n_a, n_b \text{ y } n_{a \wedge \bar{b}})$ . Para ello, es posible efectuar distintas simulaciones cruzando las 4 variables enteras de las que q depende ((Fleury, 1996) o (Gras et al, 2004a)). Pero, consideremos estas variables como números reales y a q como una función continuamente diferenciable con relación a las mismas, obligadas a respetar las desigualdades:  $n_a, n_b$  y  $n_{a \wedge \bar{b}} \leq \inf[n_a, n_b]$  y  $\sup[n_a, n_b] \leq n$ . Basta entonces con examinar el diferencial de q conforme a estas variables y conservar la restricción de valores enteros de los parámetros de la relación  $a \Rightarrow b$ .

### Diferencial de q

$$dq = \frac{\partial q}{\partial n} dn + \frac{\partial q}{\partial n_a} dn_a + \frac{\partial q}{\partial n_b} dn_b + \frac{\partial q}{\partial n_{a \wedge \bar{b}}} dn_{a \wedge \bar{b}}$$

Si se quiere estudiar cómo varía q en función de  $n_{\bar{b}}$ , basta con sustituir a  $n_b$  por  $n - n_b$  y cambiar el signo de la derivada de  $n_b$  en la derivada parcial.

En realidad, el interés de este diferencial reside en la estimación del incremento (positivo o negativo) de  $q$ , o sea  $\Delta q$ , con relación a las variaciones respectivas  $\Delta n_a$ ,  $\Delta n_{\bar{b}}$ , o  $\Delta n_b$  y  $\Delta n_{a \wedge \bar{b}}$ . La sensibilidad del índice  $q$  aparece así vinculada con las variaciones locales de los 4 parámetros de los que depende la calidad de la regla.

**Ejemplo: caso donde solo varían  $n_b$  y  $n_{a \wedge \bar{b}}$  (derivada parcial de  $n_a$  nula)**

$$\frac{\partial q}{\partial n_b} = \frac{1}{2} n_{a \wedge \bar{b}} \left( \frac{n_a}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} (n - n_b)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{n_a}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (n - n_b)^{-\frac{1}{2}} > 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial n_{a \wedge \bar{b}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge \bar{b}}}{n}}} > 0$$

Así pues, si los incrementos  $\Delta n_b$  y  $\Delta n_{a \wedge \bar{b}}$  son positivos, el incremento de  $q(a, \bar{b})$  es también positivo. Esto se interpreta así: si el número de ejemplos de  $b$  y el de los contraejemplos de la implicación aumentan, la intensidad de implicación disminuye para  $n$  y  $n_a$  constantes. Es decir, esta intensidad es máxima para los valores observados  $(n_b \text{ y } n_{a \wedge \bar{b}})$  y mínima para los valores  $n_b + \Delta n_b$  y  $n_{a \wedge \bar{b}} + \Delta n_{a \wedge \bar{b}}$ .

### Sensibilidad de la intensidad de implicación

Consideremos la intensidad de implicación  $\varphi$  como función de  $q(a, \bar{b})$ :

$$\varphi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_q^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Se puede entonces examinar como  $\varphi(q)$  varía cuando  $q$  varía en una vecindad de un valor dado  $(a, b)$ , sabiendo como la misma  $q$  varía en función de los 4 parámetros que lo determinan. Derivando la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{d\varphi}{dq} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} < 0$$

Lo que confirma que la intensidad crece cuando  $q$  disminuye, pero la velocidad de crecimiento es precisada por la fórmula, lo que permite estudiar con más precisión las variaciones de  $\varphi(q)$ . La resistencia de la intensidad de implicación a los ruidos podrá entonces ser estimada con ayuda de estas diferentes relaciones.

### **Ejemplo de otro índice de calidad de reglas: estabilidad del índice “confianza”**

Este índice  $c$  es el más conocido e, históricamente después de J. A. Lovinger, el más utilizado gracias al conocimiento común de una publicación anglosajona (Agrawal et al. 1993). Es el origen de varios índices comúnmente empleados que no son más que alternativas que satisfacen tal o cual exigencia semántica. Además, es simple y se interpreta fácil e inmediatamente.

$$c(a,b) = \frac{n_{a \wedge b}}{n_a} \quad \text{o} \quad c(a,b) = 1 - \frac{n_{a \wedge \bar{b}}}{n_a}$$

La primera expresión se interpreta como una frecuencia condicional de los ejemplos de  $b$  cuando  $a$  es conocida.

La sensibilidad de este índice a las variaciones de las frecuencias de los contraejemplos se relaciona con la derivada parcial:

$$\frac{\partial c}{\partial n_{a \wedge \bar{b}}} = -\frac{1}{n_a}$$

Por lo tanto, la confianza crece cuando  $n_{a \wedge \bar{b}}$  disminuye lo que es semánticamente aceptable, pero la velocidad de variación es constante, independientemente de la velocidad de disminución de este número, de variaciones de  $n$  y de  $n_b$ .

El gradiente de  $c$  sólo se expresa con relación a  $n_{a \wedge \bar{b}}$  y a  $n_a$ . Esto puede aparecer como una restricción del papel de los parámetros en la expresión de la sensibilidad del índice.

## **3 Casos de variables modales y frecuenciales**

### **3.1 Situación original**

La investigación de Marc Bailleul (1991-1994) se refiere en particular, a la representación que se hacen los profesores de matemáticas de su propia enseñanza.

Con el fin de ponerlo en evidencia, se les proponen algunas palabras significativas que deben jerarquizar. Sus elecciones ya no son binarias, las palabras elegidas por un profesor cualquiera son ordenadas de menor a mayor representatividad. La interrogación de M. Bailleul se centra entonces en cuestiones del tipo: “si yo elegí tal palabra con tal importancia, entonces yo elijo otra palabra con una importancia al menos igual”. Entonces fue necesario extender el concepto de implicación estadística a otras variables no binarias. Este es el caso de las variables modales que son asociadas a fenómenos donde los valores  $a(x)$  son números del intervalo  $[0,1]$  y que describen grados de pertenencia o satisfacción como es en el caso de la lógica difusa, por ejemplo, los modificadores lingüísticos “quizás”, “un poco”, “a veces”, etc. Esta problemática aparece también en situaciones donde la frecuencia de una variable impone un pre orden sobre los valores asignados por los sujetos a las variables que les son presentadas. Se trata de variables frecuenciales que se asocian a fenómenos donde los valores de  $a(x)$  son reales positivos cualquiera. Se encuentra tal situación cuando se considera el porcentaje de éxito de un alumno en una batería de pruebas referente a ámbitos distintos.

### 3.2 Formalización

- J. B. Lagrange (Lagrange J. B. 1998) demostró que, en el caso modal,
- si  $a(x)$  y  $\bar{b}(x)$  son los valores tomados en  $x$  por las variables modales  $a$  y  $\bar{b}$ , con  $\bar{b}(x) = 1 - b(x)$
  - si  $s_a^2$  y  $s_{\bar{b}}^2$  son las varianzas empíricas de las variables  $a$  y  $\bar{b}$ , entonces el índice de implicación, que él denomina índice de propensión, pasa a ser:

**Definición 5:**  $q(a, \bar{b}) = \frac{\sum_{x \in E} a(x)\bar{b}(x) - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{(n^2 s_a^2 + n_a^2)(n^2 s_{\bar{b}}^2 + n_{\bar{b}}^2)}{n}}}$  es el índice de propensión de

variables modales.

J. B. Lagrange prueba también que este índice coincide con el índice definido anteriormente en el caso binario y para una modelización de Poisson (véase 2.3). El número de modalidades de  $a$  y de  $b$  es precisamente 2, ya que en este caso:

$$n^2 s_a^2 + n_a^2 = n n_{\bar{a}}, \quad n^2 s_b^2 + n_b^2 = n n_{\bar{b}} \quad \text{y} \quad \sum_{x \in E} a(x) \bar{b}(x) = n_{\bar{a} \wedge \bar{b}}.$$

Esta solución aportada al caso modal es también aplicable al caso de las variables frecuenciales, o incluso al de las variables numéricas positivas, bajo la condición de haber normalizado los valores observados sobre las variables, tales como  $a$  y  $b$ , la normalización en  $[0,1]$  es hecha a partir del máximo del valor tomado respectivamente por  $a$  y  $b$  sobre el conjunto  $E$ .

Desde (Gras y Régnier, 2007), mostramos que, para otra modelización del índice de implicación (modelización binomial), el índice de propensión coincide con el índice  $q(\bar{a}, \bar{b})$  del caso binomial.

**Observación:** En [Régnier J.C. y Gras R. 2005.], consideramos las variables categóricas que imponen un orden total entre elecciones presentadas a una población de jueces. Cada uno de ellos debe pedir su elección preferencial entre un conjunto de objetos o proposiciones que se le presentan. Un índice permite medir la calidad del enunciado del tipo: “si el objeto  $a$  es clasificado por los jueces entonces, generalmente, el objeto  $b$  es clasificado en una mejor categoría por los mismos jueces”. La proximidad con la problemática precedente conduce a un índice relativamente próximo al índice de Lagrange, pero mejor adaptado a la situación de variable-categórica.

## 4 Caso de las variables-sobre-intervalos y variables-intervalo

### 4.1 Variables- sobre-intervalo

#### 4.1.1 Situación original

Se busca, por ejemplo, extraer de un conjunto de datos biométricos la regla siguiente, considerando su calidad: “si un individuo pesa entre 65 y 70kg entonces en general mide entre 1.70 y 1.76m “. Una situación comparable se presenta en la investigación de la relación entre intervalos de resultados de alumnos en dos disciplinas diferentes. La situación más general se expresa entonces así: dos variables reales  $a$  y  $b$  toman una serie de valores sobre 2 intervalos finitos  $[a_1, a_2]$  y  $[b_1, b_2]$ . Sea  $A$  (resp.  $B$ ) el conjunto de los valores de  $a$  (resp.  $b$ ) observados sobre  $[a_1, a_2]$  (resp.  $[b_1, b_2]$ ). Por ejemplo, aquí  $a$  representa los pesos de un conjunto de  $n$  sujetos y  $b$  sus estaturas.

Dos problemas se plantean:

- 1° ¿se pueden definir subintervalos adyacentes de  $[a_1, a_2]$  (resp.  $[b_1, b_2]$ .) para que la partición más fina obtenida respete lo mejor posible la distribución de los valores observados en  $[a_1, a_2]$  (resp.  $[b_1, b_2]$ )?
- 2° ¿se pueden encontrar las particiones respectivas de  $[a_1, a_2]$  y  $[b_1, b_2]$  constituidas por uniones de los subintervalos adyacentes precedentes, particiones que maximizan la intensidad de implicación media de los subintervalos de uno sobre los subintervalos de los otros pertenecientes a estas particiones?

Responderemos a estas dos cuestiones, en el marco de nuestra problemática, eligiendo los criterios a optimizar para satisfacer la optimalidad esperada en cada caso. A la primera cuestión, se aportaron numerosas soluciones en otros contextos (por ejemplo, por Lahanier-Reuter D. 1998).

#### 4.1.2 Primer problema

Nos vamos a interesar por el intervalo  $[a_1, a_2]$ , suponiéndolo provisto de una partición inicial trivial de subintervalos de igual longitud, pero no necesariamente de igual distribución de frecuencias observadas sobre estos subintervalos.

Denotemos por  $P_0 = \{A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0p}\}$ , esta partición en  $p$  subintervalos. Se pretende obtener una partición de  $[a_1, a_2]$  en  $p$  subintervalos  $A_{q1}, A_{q2}, \dots, A_{qp}$  de tal forma que en cada subintervalo se tenga una buena homogeneidad estadística (escasa varianza intra-clase) y que estos subintervalos presentan una buena heterogeneidad mutua (fuerte inercia inter-clase). Se sabe que si uno de los criterios es verificado el otro lo es necesariamente (teorema de Koenig-Huyghens). Para ello, se adoptará un método directamente inspirado en el método de las nubes dinámicas concebido por Edwin Diday (Diday E., 1972) (ver también Lebart L. et al. 2000) y adaptado a la situación presente. Se obtiene así la partición optimal deseada.

#### 4.1.3 Segundo problema

Se supone ahora que los intervalos  $[a_1, a_2]$  y  $[b_1, b_2]$  se proveen de particiones optimales  $P$  y  $Q$ , respectivamente, en el sentido de las nubes dinámicas. Sean  $p$  y  $q$  los números respectivos de subintervalos que componen  $P$  y  $Q$ . A partir

de estas dos particiones, es posible generar  $2^{p-1}$  y  $2^{q-1}$  particiones obtenidas por uniones reiteradas de subintervalos adyacentes de P y Q<sup>7</sup> respectivamente.

Se calculan las intensidades de implicación respectivas de cada subintervalo unido o no a otro de la primera partición sobre cada subintervalo unido o no a otro de la segunda, luego se calculan los valores de las intensidades de las implicaciones recíprocas.

Hay pues en total  $2 * 2^{p-1} * 2^{q-1}$  familias de intensidades de implicación, cada una de ellas requiriendo el cálculo de todos los elementos de una partición de  $[a_1, a_2]$  sobre todos los elementos de una de las particiones de  $[b_1, b_2]$  y recíprocamente.

Se elige como *criterio de optimalidad* la media geométrica de las intensidades de implicación, media asociada a cada par de particiones de elementos, unidos o no, definidas inductivamente. Se tienen en cuenta los dos máximos obtenidos (implicación directa y su recíproco) y se retienen las dos particiones asociadas declarando que la implicación de la variable- sobre -intervalo a sobre la variable-sobre-intervalo b es optimal cuando el intervalo  $[a_1, a_2]$  admite la partición correspondiente al primer máximo y que la implicación recíproca óptima está satisfecha para la partición de  $[b_1, b_2]$  correspondiente al segundo máximo.

## 4.2 Variables-intervalos

### 4.2.1 Situación original

Se dispone de los datos proporcionados por una población de n individuos (que pueden ser cada uno ciertos conjuntos de individuos, por ej. una clase de alumnos) según p variables (por ej. notas sobre un año en francés, matemáticas, física..., pero también podría ser: peso, estatura, ancho de pecho...). Los valores tomados por estas variables según cada individuo son intervalos de números reales positivos. Por ejemplo, el individuo x refleja el valor [12; 15,50] en la variable nota de matemáticas. E. Diday hablaría de este sujeto de p variables simbólicas en términos de valores intervalos definidos sobre la población.

---

<sup>7</sup> Es suficiente considerar la arborescencia de la cual  $A_1$  es la raíz, luego de unir o no a  $A_2$  quien será o no unido a  $A_3$ , etc. Hay pues  $2^{p-1}$  ramas en esta arborescencia.

Se busca definir una implicación de intervalos, relativos a una variable  $a$ , constituida por los intervalos observados, hacia otros intervalos igualmente definidos y relativos a otra variable  $b$ . Esto permitirá medir la asociación implicativa, por lo tanto no simétrica, de cierto(s) intervalo(s) de la variable  $a$  con cierto(s) intervalo(s) de la variable  $b$ , de manera que la asociación recíproca será aquella a partir de la cual se retendrá la mejor asociación para cada par de subintervalos en juego, como se hizo en el § 4.1.

Por ejemplo, se dirá que el subintervalo  $[2; 5,5]$  de notas de matemáticas implica generalmente el subintervalo  $[4,25; 7,5]$  de notas de física, estos dos subintervalos pertenecen a una partición óptima, en el sentido de la varianza explicada, de los intervalos respectivos de valores  $[1; 18]$  y  $[3; 20]$  tomados en la población. De igual forma, se dirá que  $[14,25; 17,80]$  de las notas de física implica frecuentemente  $[16,40; 18]$  para las notas de matemáticas.

#### 4.2.2 Algoritmo

Siguiendo la problemática de E. Diday y sus colaboradores, si los valores tomados según los sujetos para las variables  $a$  y  $b$  son de naturaleza simbólica, con frecuencia en los intervalos de  $R^+$ , es posible extender los algoritmos anteriores [Gras R. 17 c, 2001]. Por ejemplo, a la variable  $a$  se le asocian los intervalos de peso y a la variable  $b$  los intervalos de estatura, intervalos debidos a una imprecisión de las medidas. Efectuando la unión de los intervalos  $I_x$  y  $J_x$  descritos por los sujetos  $x$  de  $E$ , según cada una de las variables  $a$  y  $b$  respectivamente, se obtienen dos intervalos  $I$  y  $J$  que cubren todos los valores posibles de  $a$  y  $b$ . Sobre cada uno ellos se pueden definir una partición en un determinado número de intervalos que respetan, como se explicó anteriormente, un determinado criterio de optimalidad. Por lo que, las intersecciones de los intervalos  $I_x$  y  $J_x$  con estas particiones se proveerán de una distribución que tomará en cuenta las amplitudes de las partes comunes. Dicha distribución puede ser uniforme o de otro tipo, discreta o continua. Pero así, regresamos a la búsqueda de reglas entre dos conjuntos de variables subintervalos que toman, como en el § 4.1, sus valores sobre  $[0,1]$ , a partir de los cuales se podrán buscar las implicaciones óptimas.

**Observación:** Cualquiera sea el tipo de variable considerada, se plantea a menudo el problema de superabundancia de las variables  $y$ , por consiguiente, la dificultad de representación. Es por esta razón que definimos una relación de equivalencia



sobre el conjunto de las variables que nos permite sustituir a una clase de equivalencia por una variable denominada líder (Gras et al. 2002), (Couturier et al. 2004).

## 5 La implicación-inclusión

### 5.1 Situación original y problemática

Dos razones nos condujeron a mejorar el modelo formalizado para la intensidad de implicación:

- Cuando el tamaño de las muestras tratadas, y en particular el de E, crece (del orden del millar y más), la intensidad  $\varphi(a,b)$  tiende a no discriminar suficientemente ya que sus valores pueden ser muy próximos a 1, mientras que la inclusión cuya calidad se busca o pretende modelar, dista mucho de ser satisfecha (fenómeno indicado en (Botín A., 1997) que trata de las grandes poblaciones de alumnos a través de investigaciones internacionales);
- El modelo de la cuasi - implicación anterior retiene esencialmente la medida de la fuerza de la regla  $a \Rightarrow b$ . Ahora bien, tener en cuenta la concomitancia de  $b \Rightarrow a$  (negación de la implicación) es indispensable para reforzar la afirmación de una buena calidad de la relación de la cuasi - implicación de a sobre b<sup>8</sup>. Al mismo tiempo, podría permitir corregir la dificultad mencionada anteriormente (si A y B son pequeños con relación a E, sus complementos serán importantes y recíprocamente).

### 5.2 Un índice de inclusión

La solución<sup>9</sup> que aportamos utiliza a la vez la intensidad de implicación y otro índice que da cuenta de la disimetría entre las situaciones  $S_1 = (a \text{ y } b)$  y  $S'_1 = (a \text{ y no } b)$ , (respectivamente  $S_2 = (\text{no } a \text{ y no } b)$  y  $S'_2 = (a \text{ y no } b)$  en virtud de la primera nombrada. La debilidad relativa de las instancias que contradicen la regla y su contrapuesta es también fundamental. Por otra parte, el número de

---

<sup>8</sup> Este fenómeno es indicado por Y. Kodratoff en su artículo publicado en las Actas del Coloquio "Profundización en los datos por el método implicativo", IUFM de Caen, junio de 2000.

<sup>9</sup> J.Blanchard aporta en (Blanchard J. et al., 2005) una respuesta a este problema por una medida "de la divergencia al equilibrio".

contraejemplos  $n_{a \wedge \bar{b}}$  de  $a \Rightarrow b$  es parte de la contrapuesta. Para dar cuenta de la incertidumbre vinculada a una posible selección de la pertenencia a una de las dos situaciones ( $S_1$  o  $S'_1$ , (respectivamente  $S_2$  o  $S'_2$ )), es el concepto de entropía de Shannon (1949) al que hacemos referencia:

$$H(b/a) = -\frac{n_{a \wedge b}}{n_a} \log_2 \frac{n_{a \wedge b}}{n_a} - \frac{n_{a \wedge \bar{b}}}{n_a} \log_2 \frac{n_{a \wedge \bar{b}}}{n_a}$$

es la entropía condicional relativa a los casos (a y b) y (a y no b) cuando se verifica a .

$$H(\bar{a}/\bar{b}) = -\frac{n_{a \wedge \bar{b}}}{n_{\bar{b}}} \log_2 \frac{n_{a \wedge \bar{b}}}{n_{\bar{b}}} - \frac{n_{\bar{a} \wedge \bar{b}}}{n_{\bar{b}}} \log_2 \frac{n_{\bar{a} \wedge \bar{b}}}{n_{\bar{b}}}$$

es la entropía condicional relativa a los casos (no a y no b) y (a y no b) cuando se verifica no b .

Estas entropías, que toman valores en  $[0,1]$ , deberían ser simultáneamente pequeñas pues las disimetrías entre las situaciones  $S_1$  y  $S'_1$  (respectivamente  $S_2$  y  $S'_2$ ) deberían ser simultáneamente fuertes si se desea disponer de un buen criterio de inclusión de A en B. En efecto, las entropías representan la incertidumbre media de experiencias que consisten en observar si b se cumple (respectivamente si no a se cumple) cuando es observado a (respectivamente no b). El complemento a 1 de esta incertidumbre representa la información media recogida por la realización de estas experiencias. Cuanto más importante es esta información, más fuerte es la garantía de la calidad de la implicación y de su contrapuesta. Debemos ahora adaptar este criterio numérico entrópico al modelo esperado en las diferentes situaciones cardinales.

Para que el modelo tenga el significado esperado, debe satisfacer, según nosotros, las dificultades epistemológicas siguientes:

- 1°. deberá integrar los valores de la entropía y, para contrastarlos, por ejemplo, integrar estos valores al cuadrado,
- 2°. como este cuadrado varía de 0 a 1, a fin de indicar el desequilibrio y por tanto la inclusión, a fin de oponerse a la entropía, el valor retenido será el complemento a 1 de su cuadrado tanto que el número de contraejemplos sea inferior a la mitad de las observaciones de a (respectivamente de no b). Más

allá de estos valores, las implicaciones no tienen más sentido inclusivo, se le asignará al criterio el valor 0,

- 3°. a fin de tomar en cuenta las dos informaciones propias en  $a \Rightarrow b$  y  $\text{no } b \Rightarrow \text{no } a$ , el producto dará cuenta de la calidad simultánea de los valores retenidos. El producto tiene la propiedad de cancelarse finalmente a partir de que uno de sus términos se anule, i.e. a partir de que esta cualidad desaparezca,
- 4°. finalmente, el producto tiene dimensión 4 con relación a la entropía, su raíz cuarta será de la misma dimensión.

Pongamos  $\alpha = \frac{n_a}{n}$ , la frecuencia de  $a$  y  $\beta = \frac{n_{\bar{b}}}{n}$ , la frecuencia de  $\text{no } b$ .

Denotemos, en función de la frecuencia  $t = \frac{n_{a\bar{b}}}{n}$  de contraejemplos, los dos términos significativos de las respectivas calidades de la implicación y su contrapuesta:

$$h_1(t) = \begin{cases} H(b/a) = -\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) \log_2 \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) - \frac{t}{\alpha} \log_2 \frac{t}{\alpha}, & \text{si } t \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right] \\ 1, & \text{si } t \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right] \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} H(\bar{a}/\bar{b}) = -\left(1 - \frac{t}{\beta}\right) \log_2 \left(1 - \frac{t}{\beta}\right) - \frac{t}{\beta} \log_2 \frac{t}{\beta}, & \text{si } t \in \left[0, \frac{\beta}{2}\right] \\ 1, & \text{si } t \in \left[\frac{\beta}{2}, \beta\right] \end{cases}$$

De donde la definición permite determinar el criterio entrópico:

**Definición 6:** El índice de inclusión de A, soporte de a, en B, soporte de b, es el número:

$$i(a, b) = \left[ \left(1 - h_1^2(t)\right) \left(1 - h_2^2(t)\right) \right]^{\frac{1}{4}}$$

que integra la información a partir de la realización de un escaso número de contraejemplos, de una parte por la regla  $a \Rightarrow b$  y, de otra, por la regla  $\text{no } b \Rightarrow \text{no } a$ .

### 5.3 El índice de implicación-inclusión

La intensidad de implicación-inclusión (o intensidad entrópica), nueva medida de la calidad inductiva, es el número:

$$\psi(a, b) = [i(a, b) \cdot \varphi(a, b)]^{1/2}$$

que integra a la vez el asombro estadístico y la calidad inclusiva.

La función  $\psi$  según la variable  $t$  admite una representación que tiene la forma indicada por la figura 2, para  $n_a$  y  $n_b$  fijos. Se observará en esta figura la diferencia de comportamiento de la función conforme a la probabilidad condicional  $P(B|A)$ , índice fundamental de las otras modelizaciones de la medida de las reglas, por ejemplo en Agrawal y su escuela. Además de su carácter lineal, por lo tanto poco matizado, esta probabilidad conduce a una medida que decrece muy rápido para los primeros contraejemplos y se resiste entonces, durante mucho tiempo, cuando éstos se vuelven importantes.

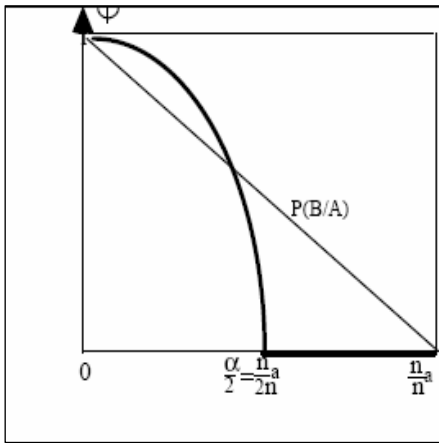


Fig. 2

Se constata que esta representación de la función continua de  $t$  traduce las propiedades esperadas del criterio de inclusión:

- \* "reacción" lenta a los primeros contraejemplos (resistencia al ruido),
- \* "aceleración" del rechazo a la inclusión en la vecindad del equilibrio, o sea  $\frac{n_a}{2n}$ ,
- \* rechazo más allá de  $\frac{n_a}{2n}$  lo que no garantiza la intensidad de la implicación  $\varphi(a, b)$ .

#### Ejemplo 1

	b	$\bar{b}$	Marginal
a	200	400	600
$\bar{a}$	600	2800	3400
Marginal	800	3200	4000

La intensidad de implicación es  $\varphi(a, b) = 0,9999$  (para  $q(a, \bar{b}) = -3,65$ ).

Los valores entrópicos de la experiencia son  $h_1 = 0 = h_2$ .

El valor del coeficiente moderador es  $i(a, b) = 0$ .

Por lo tanto,  $\psi(a, b) = 0$  mientras que  $P(B|A) = 0,3333$ .

Así, las funciones "entrópicas" "moderan" la intensidad de la implicación en el caso donde precisamente la inclusión es mediocre.

Ejemplo 2

	b	$\bar{b}$	Marginal
a	400	200	600
$\bar{a}$	1000	2400	3400
Marginal	1400	2600	4000

La intensidad de implicación es 1 (para  $q(a, \bar{b}) = -8,43$ )  
 Los valores entrópicos de la experiencia son  $h_1 = 0,918$  y  $h_2 = 0,391$ .

El valor del coeficiente moderador es:  $i(a, b) = 0,6035$ . Por lo tanto  $\psi(a, b) = 0,777$ , mientras que  $P(B|A) = 0,66666$ .

**Observación:** La correspondencia entre  $\phi(a, b)$  y  $\psi(a, b)$  no es monótona como lo muestra el siguiente ejemplo:

	b	$\bar{b}$	Marginal
a	40	20	60
$\bar{a}$	60	280	340
Marginal	100	300	400

La intensidad de implicación es inferior al caso anterior ya que:  $q(a, \bar{b}) = -6,47$ .  
 Los valores entrópicos son:  $h_1 = 0,918$  y  $h_2 = 0,353$ .  
 El valor del coeficiente moderador es:  $i(a, b) = 0,608$ .

De aquí que  $\psi(a, b) = 0,78$  mientras que  $P(B|A) = 0,66666$ .

Así, mientras que  $\phi(a, b)$  a decrecido del 1er al 2do ejemplo,  $i(a, b)$  ha crecido al igual que  $\psi(a, b)$ . En cambio, la situación contraria es la más frecuente. Notemos que, en los dos casos, la probabilidad condicional no cambia.

**Observación:** Les remitimos a (Lenca P. et al., 2004) para un estudio comparativo, muy investigado, de los índices de asociación para variables binarias. En particular, las intensidades de implicación clásica y entrópica (inclusión)

presentadas en este artículo son confrontadas con otros índices de acuerdo a las necesidades y las elecciones de los usuarios.

## 6 Grafo de implicación

### 6.1 Problemática

Para la salida de los cálculos de las intensidades de implicación (clásica o entrópica), disponemos de una tabla que interrelaciona las variables, cualquiera sea su naturaleza, y cuyos elementos son números de  $[0; 1]$ . Pero la estructura subyacente entre estas variables no es evidente. El usuario queda desorientado cuando se enfrenta a una tabla de doble entrada que puede presentar un número muy grande de líneas y columnas. No puede abarcar simultáneamente la posible secuencia de las reglas que sustentan la estructura. Asociamos por consiguiente a esta tabla un grafo orientado, ponderado (para las intensidades de implicación), sin ciclos, donde el usuario puede controlar la complejidad de la representación, fijando un límite máximo que tiene en cuenta la calidad implicativa de las reglas.

### 6.2 Algoritmo

La relación definida por la implicación estadística, si bien es reflexiva y no simétrica, no es transitiva evidentemente, tal como la inducción a diferencia de la deducción. Ahora bien, queremos que ella modele la relación de orden parcial entre dos variables (los éxitos en nuestro ejemplo inicial). Por convenio, si  $a \Rightarrow b$  y si  $b \Rightarrow c$ , aceptaremos el cierre transitivo  $a \Rightarrow c$  solamente si  $\psi(a, c) \geq 0,5$ , esto es, si la relación implicativa de  $a$  sobre  $c$  es mejor que la neutralidad al intensificar la dependencia entre  $a$  y  $c$ .

Por ejemplo, suponer que entre las 7 variables  $a, b, c, d, e$  y  $f$  existen, al límite máximo superior 0,5, las siguientes reglas:  $e \Rightarrow c, a, f, b$ ;  $c \Rightarrow a, f$ ;  $b \Rightarrow a, f$ ;  $g \Rightarrow d, f$ ;  $a \Rightarrow f$ .

Se podrá entonces traducir este conjunto de relaciones por el grafo siguiente<sup>10</sup>:

---

<sup>10</sup> Los tratamientos automáticos de los cálculos y gráficos se realizaron con la ayuda del programa informático CHIC (Clasificación Jerárquica, Implicativa y Cohersitiva) disponible bajo Windows 95, 98, NT y XP. Este programa informático, desarrollado a partir de una primera versión establecida por R. Gras y H. Rostam, revisada sobre

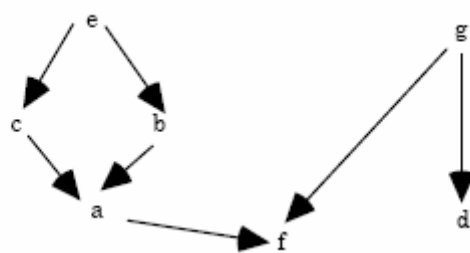


Fig.3

El grafo puede reducirse (resp. ampliarse) si elevamos (resp. reducimos) el límite máximo de consideración de las reglas. Notemos que este grafo no es un enrejado puesto que, por ejemplo, la variable a no implica la variable (a o no a) cuyo soporte es E. A priori, no puede ser un enrejado de Galois. Las opciones de CHIC permiten suprimir variables sin esfuerzo, desplazar su imagen en el grafo a fin de descruzar los arcos o centrarse en determinadas variables cabezas de una clase de “cono” cuyos dos “niveles” se constituyen respectivamente de las variables “padres” y de las variables “hijos”.

## 7 Implicación entre reglas y meta-reglas o R-reglas

### 7.1 Situación original

En didáctica de las matemáticas, una de las cuestiones<sup>11</sup> que se plantea el didacta es reconocer, luego definir la fuente de los obstáculos, tanto didácticos como epistemológicos, con los cuales se topa el estudiante durante su aprendizaje. Ahora bien, estos obstáculos se encuentran sobre la base de concepciones que el alumno se construye. Ellas mismas son estructuradas, por reglas simples o complejas, en un todo que no es la concatenación, sino que se constituye en una

---

Pascal por S. Ag Almouloud, (Ag Almouloud S., 1992), es ahora desarrollada por (Couturier et al., 2005) y constantemente extendido por él a los nuevos conceptos y algoritmos.

<sup>11</sup> Nosotros matematizamos esta cuestión por primera vez en la tesis de (Larher A., 1991) para estructurar y jerarquizar razonamientos de alumnos en situación de prueba matemática

clase micro teórica cognoscitiva, como lo es una teoría matemática de axiomas, teoremas, corolarios, teoremas de teoremas, etc. Esta estructura, que permite superar la simple articulación de las partes a fin de alcanzar un todo significativo, no es de naturaleza jerárquica clásica simétrica, donde las clases de semejanza entre variables se encuentran ajustadas a la vez según particiones, en tipologías cada vez más gruesas. Se presenta más bien según tres esquemas:

1. una regla de tipo  $a \Rightarrow b$  (donde  $a$  y  $b$  pueden ser ellas mismas las reglas) implica una variable  $c$ , donde  $c$  puede interpretarse como una consecuencia de la regla,
2. una variable  $a$  implica una regla  $b \Rightarrow c$  (donde  $b$  y  $c$  pueden ser reglas). La regla  $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$  puede leerse como: de la observación de  $a$  se dedujo la regla  $b \Rightarrow c$ . La intuición puede ser sostenida por el recorrido formal  $(a \text{ y } b) \Rightarrow c$ ,
3. una regla  $a \Rightarrow b$  implica otra regla  $c \Rightarrow d$ . Esta situación es de hecho comparable a la situación donde un teorema tiene por corolario otro teorema o bien un lema conduce a una proposición.

La estructura que parece responder a esta perspectiva es jerárquica, como lo mostraremos más adelante, pero debe ser no simétrica, orientada. Es esta estructura la que buscamos formalizar ahora. Debe permitir pasar al nivel epistemológico superior, el de las operaciones sobre las reglas, bajo forma de meta-reglas o reglas generalizadas (R-reglas). Se encuentra en la estructura contemplada de los elementos de todo punto comparable a las estructuras cognitivas que dan cuenta de la génesis del conocimiento operatorio, en el sentido de Piaget se pasa de un nivel al otro por abstracción reflexiva: se eleva de una representación de los objetos a la de las operaciones sobre los objetos, luego a las operaciones sobre las operaciones. Es también el caso de las matemáticas donde se pasa de objetos elementales matemáticos a las funciones sobre estos objetos, luego a la de las funciones sobre las funciones. Si por ejemplo, en psicología o en sociología, las variables en juego son comportamientos, las reglas generalizadas (reglas de reglas) serán perfiles comportamentales, conductas generales. Es pues un punto de vista jerárquico dinámico al contrario de un punto de vista estático, como lo es una tipología. Más aún, no es en la simple descripción individual de las reglas que constituyen la regla generalizada que se expresa la propiedad **emergente** del todo, propiedad sobre aditiva, casi externa a la “suma” de sus descriptores. Es del análisis de la estructura de todo esto que se interpreta esta propiedad, que sea un perfil, una conducta, una



génesis u otro sistema dinámico no lineal<sup>12</sup> (véase para un ejemplo (Gras R. y Kuntz P., 2005)).

## 7.2 Formalización (para una formalización detallada ver Gras y Kuntz, 2005, y Kuntz, 2005)

Las reglas y reglas generalizadas que deben elaborarse harán referencia a variables que se estructurarán de manera ascendente en clases ajustadas a la vez y orientadas. Pero una regla entre clases de variables sólo toma verdaderamente su sentido bajo la condición de que dentro de cada clase de variables, cuya relación se examina con otras, exista una cierta "**cohesión**" entre las variables que la constituyen; esto debe hacerse respetando el orden instituido en la clase. Se desea así que el "flujo" implicativo de una clase **A** sobre una clase **B** esté alimentado con un "flujo" interno en **A** y alimente a un "flujo" interno en **B** (se elige la palabra flujo por su connotación metafórica hidráulica o termodinámica). Para eso, el concepto de entropía  $H$  permite dar cuenta del desorden entre las variables, definiremos la cohesión entre dos variables por la entropía de la experiencia en dos salidas: implicación o no implicación:

**Definición 7:** La cohesión de la clase (a,b) es el número  $c(a,b)$  tal que:

- . si  $p = \psi(a,b)$  y  $H = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ , entonces  $\text{coh}(a,b) = \sqrt{1-H^2}$ ,
- . si  $p = 1$ , entonces  $\text{coh}(a,b) = 1$ ,
- . si  $p = 0,5$ , entonces  $\text{coh}(a,b) = 0$ .

Intuitivamente, la cohesión mide el desequilibrio de las frecuencias de los eventos  $\bar{a} \vee b$  y  $a \wedge \bar{b}$  a favor del primero.

**Definición 8:** La cohesión de la clase ordenada de variables  $\underline{A} = (a_1, \dots, a_r)$  es entonces definida por extensión:

---

<sup>12</sup> "Es así que se favorecen ahora, como en nuestras redes de autómatas, los procesos dinámicos por informes de los estados, los procedimientos deslocalizados, y en parte estocásticos, de creaciones de significados por informe de las representaciones "Citado por H. Atlan".

$$\text{Coh}(\underline{\mathbf{A}}) = \left[ \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ j \in \{2, \dots, r\}, j > i}} c(a_i, b_j) \right]^{\frac{2}{r(r-1)}}$$

Esta es la media geométrica de las cohesiones de parejas, tal que, se anula cuando una de las cohesiones en juego se anula. A la cohesión corresponde una distancia ultramétrica que permite indicar la jerarquía y justifica, a posteriori, la designación. Esta cohesión permite en efecto la señalización por una función positiva. Basta con elegir para un par  $(x, y)$  reunido al primer nivel  $d(x, y) = 1 - \max[c(x, y), c(y, x)]$ , luego  $d(x, y) = [1 - c(h_{x,y})]$  donde  $c(h_{x,y})$  es la cohesión de la clase más pequeña  $h_{x,y}$  conteniendo  $x$  e  $y$ . Se tiene  $d(x, x) = 0$  y la distancia máxima es  $\leq 1$ . Se demuestra que  $d$  es ultramétrica (máxima inferior), esto justifica el término de jerarquía (Gras et al., 2003 y Gras et al., 2005). La construcción automática de esta jerarquía es obtenida en CHIC.

Finalmente, podemos modelar la implicación estadística de una clase de variables sobre otra clase exigiendo que el modelo integre las informaciones siguientes:

- \* las cohesiones respectivas de las 2 clases,
- \* una intensidad de implicación extrema de los elementos de una clase sobre los de la otra,
- \* los cardinales respectivos de las 2 clases.

Cada una de estas informaciones acredita el índice que retendremos si:

- \* el índice crece con las cohesiones de cada clase y se anula cuando la cohesión de una de ellas es nula,
- \* el índice crece con la conexión extrema (mínima si se le destina un elevado grado de exigencia, máxima si se busca una flexibilidad realista),
- \* el índice disminuye con los cardinales de las clases, tiene en consideración la influencia de una relación máxima.

En lo adelante, denotaremos por  $\underline{\mathbf{A}}$  y  $\underline{\mathbf{B}}$  las clases de variables de elementos genéricos  $a_i$  y  $b_j$ ,  $\text{Coh}(\underline{\mathbf{A}})$  y  $\text{Coh}(\underline{\mathbf{B}})$  sus cohesiones respectivas, la intensidad de implicación de  $\underline{\mathbf{A}}$  sobre  $\underline{\mathbf{B}}$  se da por:

**Definición 9:** La intensidad de implicación de **A** sobre **B** es:

$$\psi(\underline{A}, \underline{B}) = \left[ \sup_{\substack{i \in \{1, \dots, r\}, \\ i \in \{1, \dots, S\}}} \psi(a_i, b_j) \right]^{rs} \cdot [\text{Coh}(\underline{A})\text{Coh}(\underline{B})]^{1/2}$$

Se podrá constatar que este índice satisface las dificultades semánticas anteriormente mencionadas.

Definiendo un método de clasificación descendente clásico por el criterio de cohesión decreciente, se obtendrá, por ejemplo, un árbol como éste:

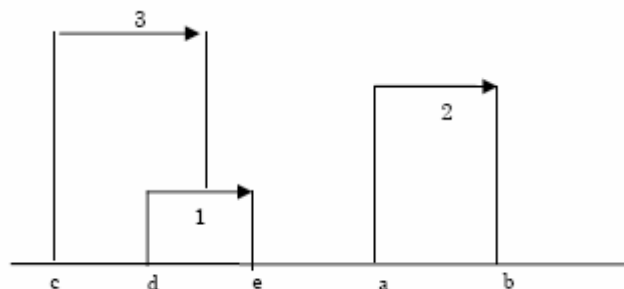


Fig. 4

Las interpretaciones de tales reglas generalizadas son más complejas, como por ejemplo, la ilustrada por la figura 4, la regla  $c \Rightarrow (d \Rightarrow e)$ . Algunas reglas generalizadas son reducibles a representaciones fácilmente interpretables. Por ejemplo,  $c \Rightarrow (d \Rightarrow e)$  se representa lógicamente por  $c \Rightarrow d \Rightarrow e$ .

### 7.3 Aplicación

En el marco de una encuesta de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública (APMEP) aplicada a profesores de matemáticas de clases terminales (series científicas S y ES, literarios LI y tecnológicos TE son las variables suplementarias), recogimos y analizamos (Botín et al., 1999) las respuestas de 311 profesores, a través de las clasificaciones (de 1 a 6) sobre quince objetivos que ellos asignan en su enseñanza (A, B, C... O)<sup>13</sup> y sobre sus opiniones

<sup>13</sup> Por ejemplo, E simboliza el objetivo: “desarrollo de la imaginación y la creatividad”

relativas a diez frases susceptibles a ser expresadas comúnmente como (OP1, OP2,..., OPX)<sup>14</sup>. La variable PER brinda la posibilidad de enunciar los objetivos juzgados no aplicables. Las 26 variables correspondientes no son binarias, excepto PER, sino ordinales (toman los valores (1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0) para los objetivos y (1, 0.5, 0) para las opiniones). Así el análisis integra la intensidad de las actitudes, de una elección prioritaria de un objetivo a una elección más secundaria, o incluso no retenida.

Las frecuencias de las 26 variables son las siguientes:

A: 105.70 B: 8.80 C: 9.70 D: 140.00 E: 21.80 F: 138.70 G: 19.50  
H: 44.80 I: 83.10 J: 108.40 K: 77.60 L: 4.60 M: 90.20 N: 66.60  
O: 33.20 OP1: 81.50 OP2: 147.50 OP3: 242.50 OP4: 229.00 OP5: 190.00  
OP6: 240.00 OP7: 200.00 OP8: 165.00 OP9: 98.00 OPX: 207.00 PER: 254.

La jerarquía orientada obtenida estructura las 26 variables en varias clases que definen R-reglas de extensión, interpretación e intereses variados. Una ayuda a la interpretación puede aportarse si uno recuerda la tautología de lógica formal:  $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \Leftrightarrow (a \text{ y } b) \Rightarrow c$ . Además, relativamente a cada clase máxima, el programa informático CHIC indica cuál variable suplementaria contribuye más a la formación de la clase. Esta información permite mejorar la comprensión y el significado de la clase.

He aquí una parte de la jerarquía, donde nos limitamos a mostrar dos clases máximas.

- si E entonces (si OP8 entonces OP7)) que puede interpretarse así: si un profesor elige E (imaginación y creatividad) entonces en general considera que para que el alumno descubra un carácter de divisibilidad por 4 (OP7), basta que él mismo esté entrenado para encontrar ejemplo y contraejemplo (OP8). Esta regla se constituye por otra parte a un nivel significativo de la jerarquía. Enfatiza sobre la relación entre los comportamientos no dogmáticos del profesor y, en consecuencia, la voluntad de colocar al alumno en una situación de investigación personal. Así, podemos interpretar esta R-regla como el índice de una concepción de apertura didáctica;

---

<sup>14</sup> Por ejemplo, OP4 simboliza: “para rectificar, me gusta un escala (tabla) muy detallada sobre los resultados a obtener”

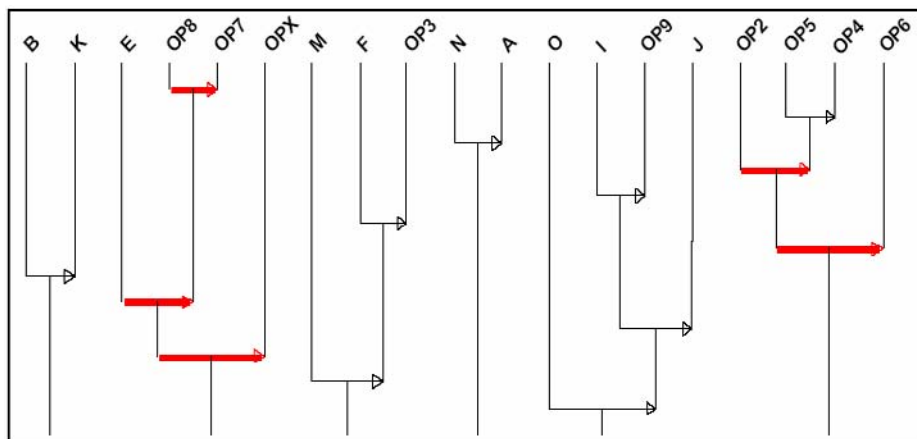


Fig.5: Jerarquía orientada por el cuestionario

- (si OP2 entonces (si OP5 entonces OP4)) entonces OP6). Explícitamente, esta R-Regla se lee de la manera siguiente: si se considera un gran problema indispensable para el examen (OP2), entonces, considerando que la demostración es la única manera rigurosa de hacer matemáticas (OP5), la escala de corrección debe ser precisa. Pero entonces, siendo la premisa de la R-Regla satisfecha, el profesor tiene tendencia a elegir OP6 (la demanda del programa muy definido para saber lo que uno debe o no hacer). Se tiene una concepción de una categoría de profesores muy obediente a la institución y conservadora en sus elecciones pedagógicas. No se sorprendan, la demostración en Francia es el fundamento de la actividad matemática (país de Descartes), siendo muy difícil evaluar; el gran problema es el criterio de evaluación. Se encuentra aquí una ilustración más sintética de las reglas de asociación en las que se basa, de manera homogénea y coherente, la R-Regla, es decir una concepción de la enseñanza muy clásica que exige un apoyo institucional explícito y liberador.

En resumen, se observa que estas dos R-reglas corresponden a dos concepciones opuestas de la misión enseñar, obviamente asociadas a dos perfiles típicos e inconciliables de profesores.

Insistamos sobre el aumento, en cada uno de estos casos, de la riqueza del análisis obtenido por la asociación de las reglas de asociación en las R-reglas. No son ya sino hechos o comportamientos aislados que se extraen, sino más bien

conductas generales, reveladoras de fenómenos más globales, menos singulares o de representaciones psicológicas profundas. Una tipología como las que proporcionan las clasificaciones tradicionales (simétricas), no podría dar cuenta de la dinámica de los hechos o comportamientos subyacentes. Es con toda esta dinámica devuelta por las reglas generalizadas que, apoyada en necesidades (las premisas de las reglas), conduce a aclaraciones vivas de un fragmento de teoría, eventualmente en vía de construcción.

## **8 Niveles significativos de una jerarquía cohesitiva**

### **8.1 Situación original**

Considerando la multiplicidad de niveles de formación de las clases, es indispensable eliminar aquellos que son más pertinentes respecto a la intención clasificadora del investigador atendiendo a los criterios elegidos. Estos niveles aparecen, en aplicaciones psico-didácticas o sociológicas, corresponden a concepciones consistentes y estables, de interés para el experto. Su puesta en evidencia conduce a éste a un estudio más profundo y una interpretación más aseverada de las clases generalizadas obtenidas. Este problema se formula en el momento del análisis de una encuesta presentada a los maestros de matemática sobre los objetivos de la enseñanza de matemáticas tales como los experimentaban (Botín A. y et Gras R. 1999). Las elecciones de base se estructuraron en actitudes cada vez más moderadas al curso de la ascendencia de la jerarquía.

Procedemos entonces de manera comparable a la adoptada originalmente por I. C. Lerman (Lerman I. C. 1981) y relativa a la jerarquía de semejanza, pero reacondicionando su enfoque. Desde el 2004, establecimos otro método de definición de niveles significativos (Gras, Kuntz y Régnier 2004b; Kuntz, 2005) basado en un índice de dicha coherencia. Pero preferimos presentar aquí el método inicial que solo se programa en CHIC.

### **8.2 Pre orden cohesitivo**

Consideremos el conjunto  $V$  de las variables  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  y el conjunto de las parejas  $(a, b)$  de  $V \times V$  tales que  $a \neq b$ . Existe  $m(m-1)$  de tales parejas a las cuales se les asocian sus cohesiones  $c(a, b)$  respectivas.

**Definición 10:** Se llama pre orden inicial y global cohesitivo sobre  $V \times V$  (o pre ordenamiento), al pre orden  $\Omega$  inducido por la aplicación cohesión  $c$  sobre  $V \times V$ .

Sea  $G(\Omega)$  su gráfico en  $V \times V$ . Según los párrafos anteriores, se sigue que:

de una parte, la clase de pre orden correspondiente a  $c = 0$  contiene todas las parejas tales que  $\psi(a, b) \leq 0,5$ ,

por otra parte, si  $n_a \leq n_b$ , entonces  $c(b, a) \leq c(a, b)$ .

Observemos, por el contrario, que si  $c(a, b) \leq c(c, d)$  no se tiene necesariamente  $c(b, a) \leq c(d, c)$  o,  $c(b, a) \geq c(d, c)$ .

### 8.3 Determinación de los niveles significativos

Coloquémoslo a un nivel cualquiera  $k$  de la jerarquía. A este nivel, se forma una clase de  $m_i$  variables ( $2 \leq m_i \leq m$ ) cuya cohesión es menos buena que la de las clases anteriormente formadas, de acuerdo con el algoritmo elegido, y mejor que la de las clases que deben venir.

Sea  $\Pi_k$  la partición sobre  $V$  definida a este nivel, constituida por las clases que ya se formaron allí y, eventualmente, por conjuntos unitarios aún no asociados.  $\Pi_k$  es más fina que  $\Pi_{k+1}$ .

Sea  $S\Pi_k$  el conjunto de las parejas separadas a este nivel y  $R\Pi_k$  el conjunto de las parejas que se reúnen allí por primera vez, quedando entendido que se dirá que el par  $(a, b)$  se reúne si  $a$  y  $b$  pertenecen a la misma clase del tipo  $(\dots((\dots a, \dots) \dots) \dots b) \dots$

El conjunto  $G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$  se constituye de los pares de parejas que al nivel  $k$  respetan el pre orden inicial. Por ejemplo, si  $c(e, f) < c(a, b)$  (pues  $((e, f), (a, b)) \in G(\Omega)$ ) y si al nivel  $k$ ,  $e$  y  $f$  son separados mientras que  $a$  y  $b$  se reúnen en la clases que se forman, el par  $((e, f), (a, b))$  pertenece a  $G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$ .

Como se hizo en el epígrafe 2 para el cardinal de  $A \cap \bar{B}$ , asociamos al cardinal de  $G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$  el índice aleatorio  $\text{card}[G(\Omega^*) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]]$  donde  $\Omega^*$  es un pre ordenamiento aleatorio en el conjunto, provisto de una probabilidad uniforme, de todos los reordenamientos del mismo tipo cardinal que

$\Omega$ . Este índice tiene por esperanza  $\frac{1}{2} \text{card}[S \Pi_k \times R \Pi_k]$  y por varianza  $\text{card}[S \Pi_k \times R \Pi_k] * \text{card}[G(\Omega)]$ .

Sea  $s(\Omega, k)$  el índice centrado reducido obtenido:

$$\frac{\text{card}[G(\Omega^*) \cap [S \Pi_k \times R \Pi_k]] - \frac{1}{2} \text{card}[S \Pi_k \times R \Pi_k]}{\sqrt{\text{card}[S \Pi_k \times R \Pi_k] \cdot \text{card}[G(\Omega)]}}$$

**Definición 11:** Se llama nodo significativo a todo nodo correspondiente a un máximo local de  $s(\Omega, k)$  durante la creación de la jerarquía implicativa. Diremos en este caso que la partición  $\Pi_k$  está en resonancia parcial con  $\Omega$ .

Si además,  $G(\Omega) \cap [S \Pi_k \times R \Pi_k] = S \Pi_k \times R \Pi_k$ , diremos que la partición  $\Pi_k$  está en *resonancia total* con  $\Omega$ . El programa informático de análisis CHIC permite el tratamiento completo de datos cuantitativos, así como la salida del grafo implicativo y la jerarquía implicativa, resaltando los nodos significativos.

## 9 Tipicidad y contribución de los sujetos y de las variables suplementarias

### 9.1 Situación fundamental

Introducimos la noción de variable suplementaria en el análisis implicativo de forma análoga a como se hace en el análisis factorial, es una variable extrínseca, por ejemplo un descriptor, , no interviene directamente en las relaciones expresadas por la clasificación entre las variables principales de  $V$ , no interviene en la estructura de este conjunto bajo la forma gráfica o jerárquica. Por ejemplo, una variable suplementaria podrá representar una categoría de sujetos (edad, sexo, categoría socio - profesional, etc.). Esta noción debe permitir esclarecer la importancia o la superfluidad de estas categorías en la formación de las reglas o clases de reglas. Saber si son los profesores de clases literarias los que adoptan tal actitud frente a los objetivos de la enseñanza de las matemáticas, es más rico, sobre el plan de la información investigado, que la sola definición de la actitud.

Ahora bien, nos parece muy importante en el momento de la elección de las variables sobre las cuales se llevará el análisis, distinguir bien, conjuntamente con el experto, las variables que van a participar en la puesta en evidencia de las reglas



o meta-reglas, variables que denominamos **principales**, de otras variables, denominadas **suplementarias** que son descriptivas de los sujetos y que de hecho son objetivas, pero no vinculadas directamente a sus comportamientos. Introducir las en el análisis arriesgaría mucho, como lo observamos al crear artefactos dentro del gráfico o la jerarquía, ya que ellas juegan ahí un rol atractivo demasiado potente para dejar que las otras variables subjetivas se organicen entre ellas. Como se sabe, los procesos de estructuración inherentes a los métodos de clasificación, perturbarían las razones verdaderas que son la base de las relaciones que deben extraerse. Sin embargo, definir los fenómenos objetivos que juegan un papel indirecto en las estructuras aparecidas es de gran importancia.

Nos interesa por el momento el análisis cohesivo. A un nivel cualquiera de la jerarquía se forma una clase **C** de cohesión no nula. Nuestro objetivo, particularmente en el caso de un nodo significativo, consiste en definir un criterio que permita identificar uno o varios sujetos, luego la categoría de sujetos, o cualquier otra variable suplementaria, contribuyendo más a la constitución de esta clase. El comportamiento de estos sujetos estará así en armonía con el comportamiento estadístico en el inicio de la clase. Se hace un enfoque comparable para estudiar conjuntamente la tipicidad y la contribución de los sujetos y de las variables suplementarias en la constitución de un arco o de un camino del grafo implicativo.

## 9.2 Potencia implicativa de una clase y de un camino

Coloquemos en un nivel  $k$  de la jerarquía donde deben unirse, para formar **C**, dos clases **A** y **B** tales que  $A \Rightarrow B$  en el sentido del epígrafe 8.

**Definición 12:** La pareja  $(a, b)$  tal que:  $\forall i \in \underline{A}, \forall j \in \underline{B} \quad \psi(a, b) \geq \psi(i, j)$  se denomina pareja genérica de **C**. Esta pareja, generalmente única, se obtiene a partir del supremo en el cálculo de la implicación de **A** sobre **B**. El número  $\psi(a, b)$  se denomina implicación genérica de C.

Pero, en cada subclase de **C**, existe igualmente una pareja genérica. Precisamente, si **C** está constituida por  $g$  ( $g \leq k$ ) subclases (**C** incluida), hay  $g$  parejas genéricas en el origen de **C**, a las que les corresponden  $g$  intensidades máximas de intensidades contingentes  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_g$  respectivamente.

En el caso de un camino  $C$  cerrado transitivamente (cada arco del cierre admite una intensidad de implicación al menos igual a 0.50), compuesto de  $g$  nodos,  $C$  presenta  $g(g-1)/2$  arcos transitivos. A cada uno de estos arcos, por ejemplo  $(a,b)$ , se le asocia, como para una clase, la intensidad de implicación  $\psi(a,b)$ , que se le dirá genérica.

**Definición 13:** El vector contingente genérico  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_g)$ , elemento de  $[0,1]^g$ , se llama vector potencia implicativo de  $C$ . El cual traduce una fuerza implicativa interna en  $C$ .

### 9.3 Potencia implicativa de un sujeto sobre una clase o un camino y distancia a esta clase o camino

Un sujeto  $x$  cualquiera verifica o no la implicación de un par genérico de una clase o de un arco de camino con un orden de calidad comparable. Tomando en cuenta la lógica formal y consideraciones semánticas, pondremos, por ejemplo y en función de los valores tomados por  $a$  y  $b$  en  $x$ :

$$\psi_x(a, \bar{b}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \text{ ó } a = 0 \text{ y } b = 1 \\ 0 & \text{si } a = 1 \text{ y } b = 0 \\ p & \text{si } a = b = 0 \text{ con } p \in ]0,1[ \end{cases}$$

En nuestras primeras experiencias, elegíamos  $p=0.5$ , valor neutro. Sin embargo, en el programa informático CHIC, el cálculo de las tipicalidades y de las contribuciones se hace modulando estos valores, a fin de tomar mejor en cuenta la semántica de los valores asignados por  $x$  a  $a$  y a  $b$ .

Así, a  $x$ , podemos asociarle  $g$  números  $\psi_{x,1}, \psi_{x,2}, \dots, \psi_{x,g}$  correspondientes a los valores tomados en  $x$  por las  $g$  implicaciones genéricas de la clase o del camino  $C$ .

**Definición 14:** El vector  $(\psi_{x,1}, \psi_{x,2}, \dots, \psi_{x,g})$ , elemento de  $[0,1]^g$ , es denominado vector contingencia genérica o potencia implicativa de  $x$ . El sujeto (o los sujetos)  $x_t$ , quizás ficticio, donde todos los componentes del vector potencia son  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_g)$ , es denominado sujeto típico óptimo de  $C$ .

En estas condiciones, se puede proveer el espacio de las potencias  $[0,1]^g$  de una métrica del tipo  $\chi^2$  a fin de acentuar los efectos de fuertes implicaciones genéricas.

**Definición 15:** Se denomina distancia implicativa de un sujeto  $x$  a la clase o al camino  $C$  al número:

$$d(x, C) = \left[ \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{i=g} \frac{[\psi_i - \psi_{x,i}]^2}{1 - \psi_i} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Este número no es otro que la distancia  $\chi^2$  entre las distribuciones  $\{1 - \psi_i\}_i$  y  $\{1 - \psi_{x,i}\}_i$  que expresa las diferencias entre las implicaciones genéricas empíricas y la implicación según  $x$ . Es por esta razón que elegimos la palabra **tipicalidad** que vamos a definir más abajo. Ella permite dotar a  $E$  de una  $C$  - estructura topológica discreta de espacio métrico. Si  $\psi_i = 1$  para algún  $i$ , pondremos, por convenio,  $\psi_{x,i} = 1$ . Este convenio no se hace de forma irracional puesto que, en este caso, la implicación genérica es máxima y significativa de una excelente relación implicativa entre sus términos, comprobada por todos o casi todos los sujetos  $x$  de  $E$ . Así, si el denominador se anula, ocurrirá lo mismo con el numerador, salvo excepción, y se podrá de todas formas asignar el valor 0 al cociente.

**Observación:** Dada una clase  $C$ , se puede definir una estructura de espacio métrico sobre  $E$  por el valor de la distancia indicada en  $C$  entre dos sujetos cualesquiera de  $E$ , distancia que mide la diferencia del comportamiento de los sujetos  $x$  e  $y$  de  $C$ :

$$d_C(x, y) = \left[ \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{i=g} \frac{[\psi_{x,i} - \psi_{y,i}]^2}{1 - \psi_i} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Se ve entonces que la distancia de tipicalidad dada más arriba no es más que la especificación de  $d_C$  a los sujetos  $x$  y  $x_i$  respectivamente. La distancia  $d_C$  permite dotar a  $E$  de una  $C$ -estructura topológica discreta. Esta topología es equivalente a la que se definiría sobre el conjunto de los vectores de contingencia

$(\Psi_{x,1}, \Psi_{x,2}, \dots, \Psi_{x,g})$ , subconjunto de un espacio vectorial normado de dimensión  $g$  y de norma:  $\|\bar{x} - \bar{y}\| = d_C(x, y)$ .

El operador simétrico asociado a la forma cuadrática que conduce a esta distancia, tiene por matriz la matriz diagonal de elementos  $[g(1 - \psi_i)]^{-1}$  para  $i = 1, \dots, g$ . Es evidente que la suma de dos de tales vectores sólo tiene un sentido teórico, esto está fuera del contexto en el que trabajamos el ASI.

Una aplicación interesante puede consistir en determinar el o los sujetos que pertenecen a una bola de diámetro dado y de centro en uno de los sujetos predesignados, como por ejemplo, el individuo óptimo. Extendiendo este enfoque métrico, el problema del completamiento de datos ausentes podría proporcionar una solución original.

## 9.4 Tipicalidad y contribución de un sujeto y de una variable suplementaria a una clase o un camino

### 9.4.1 Tipicalidad

Definiremos la medida de tipicalidad a partir de la relación entre la distancia a  $C$  de un sujeto considerado y aquella que es la más grande en el conjunto de los sujetos. Esta distancia máxima es la de los sujetos cuyas  $\psi_{x,i}$  son todas nulas o muy pequeñas. Estos sujetos son pues los sujetos más opuestos a las reglas genéricas. La tipicalidad de un sujeto será entonces tanto más grande, en cuanto más se aleje de estos sujetos, y tendrá pues un comportamiento comparable a aquel del sujeto teórico óptimo. La tipicalidad de una categoría de sujetos o de una variable suplementaria  $G$  se deducirá:

**Definición 16:** La tipicalidad de  $x$  en  $C$  es:  $\gamma(x, C) = 1 - \frac{d(x, C)}{\max_{y \in E} d(y, C)}$ , y la de  $G$  es la

media en  $G$ :  $\gamma(G, C) = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{x \in G} \gamma(x, C)$ .

La tipicalidad de  $x$  es un número de  $[0,1]$  que vale 1 si  $x$  es típico óptimo y 0 si  $x$  está más en desacuerdo con  $C$ . A fin de dar al investigador el medio de saber

o comprobar rápidamente si tal categoría de sujetos que le interesa es estadísticamente determinante en la constitución de una clase implicativa o de un camino transitivo, se elaboró un algoritmo apoyándose en los dos conceptos siguientes: grupo óptimo y categoría determinante.

**Definición 17:** Sea  $E$  la población estudiada. Un grupo óptimo de una clase implicativa o de un camino  $C$ , grupo denotado como  $GO(C)$ , es el subconjunto de  $E$  que concede a  $C$  una tipicalidad más grande que el complementario de  $GO(C)$  y que forma con éste una partición en dos grupos que maximizan la varianza interclase de la serie estadística de las tipicalidades individuales. Dicha partición se dice significativa.

Se demuestra la existencia de este grupo óptimo en (Gras R. y Ratsimba-Rajohn H. 1997). Las propiedades utilizadas son también las que permiten establecer el algoritmo sobre el cual se basan los módulos de los programas informáticos que construyen, automáticamente dentro de CHIC cada subgrupo óptimo.

Consideremos una partición  $\{G_i\}_i$  de  $E$ . Esta partición puede ser definida por una variable suplementaria correspondiente, por ejemplo, a un descriptor de  $E$ . Sean las  $X_i$  partes aleatorias de  $E$  que tienen el mismo cardinal que  $G_i$ , y  $Z_i$  la variable aleatoria  $Card(X_i \cap GO(C))$ .  $Z_i$  sigue una ley Binomial de parámetros:

$$Card G_i \text{ y } \frac{Card GO(C)}{Card E}.$$

**Definición 18:** Se llama categoría más típica de la clase implicativa o del camino  $C$ , la categoría que minimiza el conjunto  $\{p_i\}_i$  de probabilidades  $p_i$  tal que:

$$\forall i, p_i = Prob[Card G_i \cap GO(C) < Z_i]$$

Se dice que una categoría  $G_0$  es determinante al nivel  $\alpha$  si la probabilidad asociada  $p_0$  es inferior a  $\alpha$ .

Así, la significación de una clase o de un camino dado por el experto, le asociará la subpoblación que más aporta en este sentido. Este enfoque es comparable al de I. C. Lerman para el análisis de las similaridades, pero mediante una modelización y conceptos diferentes.

De otra parte, observamos que podemos asociar al subgrupo óptimo una variable binaria que corresponde a la función indicadora de este subconjunto de  $E$ .

De la misma forma, podemos también asociar a la categoría  $G_i$ , o bien a la variable suplementaria correspondiente, una variable binaria cuyo índice de

similaridad  $s = \frac{n_{a \wedge b} - \frac{n_a n_b}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_b}{n}}}$ , al sentido de I. C. Lerman, verifica:  $p_i = \Pr[S \geq s]$ ,

siendo  $S$  el valor aleatorio y  $s$  su realización. Así, minimizar el conjunto de las probabilidades  $\{p_i\}_i$  es equivalente a maximizar el índice de similaridad entre las variables binarias, indicadoras de subconjuntos, asociadas respectivamente una al grupo óptimo  $GO(C)$  y las otras a las diferentes categorías  $\{G_i\}_i$ .

Esta observación permite extender eficazmente el concepto de variable suplementaria más típica a variables numéricas, tomando sus valores sobre  $[0,1]$ . Es suficiente en este caso extraer el mayor de los valores de similaridad entre la variable binaria indicadora definida por el grupo óptimo y las diferentes variables numéricas definidas como suplementarias, el índice se calcula según el principio empleado en el análisis implicativo para las variables numéricas (véase definición 5). Sabemos que su restricción al caso binario coincide con su valor  $s$  en el caso donde las dos variables son binarias.

Así es posible retirar a la vez los individuos y los grupos de individuos típicos de una relación o de un conjunto (clase o camino) de relaciones. Estas son aquellas que están más acorde con la calidad de estas relaciones en el seno de la población  $E$  considerada. Si por ejemplo la relación entre las variables  $a$  y  $b$  es cuantificada por el número  $\psi(a,b) = 0,92$ , los individuos  $x$  que asignan a esta relación el valor  $\psi_x(a,b) = 0,90$  son más típicos que aquellos que le asignan el valor  $0,98$ . La relación entre este concepto y el de contribución que vamos a definir adquiere todo su sentido en el estudio de las variables modales o numéricas.

#### 9.4.2 Contribución

Este concepto se distingue del anterior por el examen de la responsabilidad de los individuos, en tal caso de las variables suplementarias, que pueden ser descriptores, por *la existencia* de una relación de una regla o de una meta-regla entre variables principales. Supongamos, en efecto, que dos variables  $a$  y  $b$  (resp. varias variables de un grafo o bien dos clases de la jerarquía) son reunidas por un arco sobre un grafo a un determinado nivel (resp. en un camino transitivo  $C$  del

grafo o bien en una clase  $C$  en una jerarquía a un determinado nivel). Conociendo el valor  $\psi_{x,i}$  asignado por el individuo a la regla  $i: a \Rightarrow b$  (resp. regla  $i$  del camino  $C$  o bien de la clase  $C$  constituida de  $g$  reglas genéricas) supuesta admisible,

**Definición 19:** Se llama *distancia de  $x$  a  $(a,b)$  o a  $C$* :

$$d(x, C) = \left[ \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{i=g} [1 - \psi_{x,i}]^2 \right]$$

donde  $g = 1$  en el caso del arco  $(a,b)$ . Se llama contribución de  $x$  a  $C$  al número:  $\gamma(x, C) = 1 - d(x, C)$ .

Esta contribución tiene por máximo 1 en el caso donde el individuo  $x$  dio el valor 1 a todas las reglas  $i$ . Esto permite conciliar la semántica y la definición formal. La secuencia de las definiciones y de los algoritmos de cálculo (contribución de una categoría o una variable suplementaria  $G$ , grupo óptimo de individuos, categoría o variable suplementaria más contributiva) se transponen inmediatamente a partir de los principios de la tipicidad. Pero en las situaciones reales, observamos el matiz entre los dos conceptos lo que enriquece la información explotable por el usuario. Sin embargo, el concepto de contribución es el que más se retiene para la interpretación.

## 9.5 Aplicación

Volvamos de nuevo a la ilustración mencionada en el §7.3 (Cuestionario presentado a profesores de matemáticas). Las frecuencias de las variables suplementarias son:

S(científica):155 ES(económica y social):68 LI (literaria):22 TE (cronológica):66

La jerarquía cohesitiva obtenida por CHIC a partir de un número reducido de las variables, a fin de conservar los niveles más significativos, es dada por la figura 5.

Consideremos la clase  $C = [E \Rightarrow (OP8 \Rightarrow OP7)] \Rightarrow OPX$ . Su significado, analizado más detalladamente en (Botín et al., 1999), es fuertemente marcado por la importancia concedida a la imaginación y a la investigación personal, por los profesores de acuerdo con estos objetivos y estas opiniones. La variable más típica para esta clase es S (serie científica) con un riesgo de: 0.00393.

En efecto, 116 de los profesores de  $S$  entre los 155 de esta serie que respondieron al cuestionario, figuran en el grupo óptimo ( $GO$ ) de cardinal 201 relativo a  $C$ . Sea  $X$  una parte aleatoria de igual cardinal (155) que  $S$  y  $Z$  la variable aleatoria igual al cardinal de la intersección de  $X$  y el grupo óptimo  $GO$ . Según un modelo equiprobable de distribución de los profesores,  $Z$  sigue la ley Binomial de parámetros 155 y  $201/311$ , o sea 0.656. La probabilidad para que  $Z$  sea más grande que 116 es el riesgo anunciando, lo que representa 0.00393. Pero para  $S$ , es el par  $(S, (OP8, OP7))$  que es mutuamente específico al nivel  $\beta = 2 \cdot 10^{-5}$ . Encontrar una tal mutualidad específica para  $TE$  con el par  $(TE, (B, K))$  al nivel  $5 \cdot 10^{-7}$  nos confirma, sin sorpresa, que los profesores de las secciones técnicas ( $TE$ ) consideran que las matemáticas deben ser útiles para la vida profesional ( $B$ ) y, en consecuencia, para las otras disciplinas ( $K$ ) que le son más a fines.

Los cálculos de **contribución** a la clase  $C$  muestran que, esta vez, 111 profesores de los 311 encuestados, participan en el grupo óptimo. El número de profesores de  $S$  disminuyó (pasa de 116 a 67) y, sobre todo, su proporción es mucho menor que la anterior en  $GO$ . Esto se experimenta en el nivel que es 0.0251, lo que representa un riesgo 6 veces más elevado que para la tipicalidad. Estos son los profesores encuestados de  $S$  que son los más típicos, es decir, "representativos" del comportamiento general de la propia población encuestada. Pero son lo que menos contribuyen en las relaciones estrictas entre las 4 variables que constituyen  $C$ . Esta observación nos muestra los matices aportados por los dos conceptos: tipicalidad y contribución.

Determinadas relaciones anteriormente mencionadas y comentadas se encuentran en el gráfico de la figura 5. Las contribuciones calculadas en CHIC muestran aún que los profesores de la serie  $S$  contribuyen más al camino:  $E \Rightarrow OP8 \Rightarrow OP7 \Rightarrow OPX$  con un riesgo de error de 0.00746, la transitividad a lo largo de este camino se asegura al nivel 0.75.

## 10 Conclusión

Este panorama del desarrollo del análisis estadístico implicativo muestra, si es necesario, cómo una teoría de tratamiento de datos se construye paso a paso en respuesta a las problemáticas presentadas por los expertos de diferentes ámbitos. Aparece indistintamente de la visión que se tenga, puesto que es directamente aplicable a las situaciones que conducen a su génesis. Las extensiones aportadas a los tipos de datos tratados, a los modos de representación de sus estructuras, a las



relaciones entre los sujetos, sus descriptores y las variables, son el resultado de las interrogantes ávidas de los expertos. Sus respectivas funciones, de revelador y analizador, parecen operar exitosamente en múltiples ámbitos aplicativos.

Se habrá observado que la base teórica es simple, lo que podría ser la razón de su proliferación. Así mismo, si las respuestas a las preguntas de elecciones teóricas primitivas no son aparentes aquí, esta génesis no se hizo sin conflictos entre las respuestas esperadas, la facilidad de su acceso y luego las respuestas fueron fuentes de restauraciones o incluso de modificaciones. Esperamos, que sea este método de análisis de datos el que haya permitido y permitirá aún, mostrar estructuras vivas gracias al enfoque no simétrico, que es su fundamento.

Entre los trabajos posteriores propuestos a nuestro equipo, uno hará una extensión del ASI a las variables vectoriales de respuesta a problemas surgidos en Proteómica. Otro tratará más ampliamente la relación entre el ASI y el tratamiento de los conjuntos borrosos. La función del operador "implicación", de lógica borrosa, será precisada e ilustrada por aplicaciones. A través de otro trabajo, intentaremos construir un método que permitiría solucionar por el ASI el problema de las vacuidades de una tabla de datos. Citemos también el trabajo en curso sobre la investigación de un índice de calidad de un grafo implicativo y de una jerarquía de R-reglas. Finalmente, es evidente que estos trabajos serán llevados a cabo interactivamente con aplicaciones y, en particular, la de la contribución del ASI a la regla de clasificación en las hojas de los árboles de clasificación (Ritschard et al., 2007).

## Bibliografía

- Ag Amouloud, S., (1992). *L'ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la démonstration et de traitement de données didactiques*, thèse de l'Université de Rennes 1, 2 novembre 1992
- Agrawal, R.; Imielinsky, T.; Swami, A. (1993). *Mining association rules between sets of items in large databases*, Proc. of the ACM SIGMOD'93, 1993.
- Amarger, S.; Dubois, D.; Prade, H. (1991). *Imprecise quantifiers and conditional probabilities - in Symbolic and quantitative approaches to uncertainty* (R. KRUSE, P. SIEGEL), Springer-Verlag, 1991, 33-37.
- Aze, J.; Kodratoff, Y. (2001). *Evaluation de la résistance au bruit de quelques mesures d'extraction de règles d'association*, Extraction des connaissances et apprentissage, Hermès, Vol 1, n° 4, 2001, p. 143-154.
- Bailleul, M. (1994). *Analyse statistique implicative: variables modales et contribution des sujets. Application à la modélisation de l'enseignant dans le système didactique*, Thèse de l'Université de Rennes 1, juin 1994.

- Bailleul, M.; Gras, R. (1995). *L'implication statistique entre variables modales, Mathématique, Informatique et Sciences Humaines, E.H.E.S.S. Paris, n°128, (1995), 41-57.*
- Bernard, J-M.; Poitrenaud, S. (1999). *L'analyse implicative bayésienne d'un questionnaire binaire: quasi - implications et treillis de Galois simplifié, Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines, n° 147, 1999, 25-46.*
- Blanchard, J.; Guillet, F.; Briand, H.; Gras, R. (2005). *Ipee: Indice probabiliste d'écart à l'équilibre pour l'évaluation de la qualité des règles, actes Atelier Qualité des Données et des Connaissances, pp. 26-34, 2005.*
- Blanchard, J.; Kuntz, P.; Guillet, F.; Gras, R. (2004). *Mesure de la qualité des règles d'association par l'intensité d'implication entropique, Mesures de qualité pour la fouille de données, RNTI-E-1, p. 33-44, 2004.*
- Bodin, A. (1997). *Modèles sous-jacents à l'analyse implicative et outils complémentaires. Prépublication IRMAR. n°97-32, 1997.*
- Bodin, A.; Gras, R. *Analyse du préquestionnaire enseignants avant EVAPM-Terminales, Bulletin n°425 de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 772-786, Paris.*
- Couturier, R. (2001). *Traitement de l'analyse statistique implicative dans CHIC. Actes des Journées sur la Fouille dans les données par la méthode d'analyse implicative, IUFM Caen, p. 33-50.*
- Couturier, R.; Gras, R. (2005). *CHIC: Traitement de données avec l'analyse implicative, Extraction et Gestion des Connaissances, Volume II, RNTI, Cépaduès, Paris, p.679-684, ISBN 2.85428.683.9.*
- Couturier, R.; Gras, R.; Guillet F. (2004). *Reducing the number of variables using implicative analysis. In International Federation of Classification Societies, IFCS 2004, Springer Verlag: Classification, Clustering, and Data Mining Applications, p. 277-285, ISBN 3-540-22014-3, Chicago.*
- David, J.; Guillet, F.; Gras, R.; Briand, H. (2006). *Conceptual hierarchies matching: an approach based on discovery of implication rules between concepts, In Proc. ECAI 2006, 17th European Conference on Artificial Intelligence, Riva del Garda, Italy, IOS Press.*
- Diday, E. (1972). *Nouvelles méthodes et nouveaux concepts en classification automatique et reconnaissance des formes, Thèse d'Etat, Université de Paris VI, 1972.*
- Fleury, L. (1996). *Extraction de connaissances dans une base de données pour la gestion de ressources humaines, Thèse d'Université, Université de Nantes, 22 novembre 1996.*

- Ganascia, J.G. (1987). *AGAPE et CHARADE: deux techniques d'apprentissage symbolique appliquées à la construction de bases de connaissances*, Thèse d'Etat, Université de Paris Sud, 1987.
- Goodman, R.M.; Smyth, P. (1989). *The induction of probabilistic rule set. The ITRULE algorithm*, Proceedings of sixth international conference on machine learning, 1989, p. 129-132.
- Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Rennes I, 1979.
- Gras, R.; Ag Almouloud, S.; Bailleul, M.; Larher, A.; Polo M.; Ratsimba-Rajohn H.; Totohasina, A. (1996). *L'implication Statistique*, Collection Associée à "Recherches en Didactique des Mathématiques", La Pensée Sauvage, Grenoble, 1996.
- Gras, R.; Briand, H.; Peter, P. (1996). *Structuration sets with implication intensity*, Proceedings of the International Conference on Ordinal and Symbolic Data Analysis - OSDA 95, E.Diday, Y.Chevallier, Otto Opitz, Eds., Springer, Paris 1996, 147-156.
- Gras, R.; Briand, H.; Peter, P.; Philippé, J. (1997). *Implicative statistical analysis*, Proceedings of International Congress I.F.C.S., 96, Kobé, Springer-Verlag, Tokyo, 1997, 412-419.
- Gras, R.; Couturier, R.; Blanchard, J.; Briand, H.; Kuntz, P.; Peter, P. (2004a). *Quelques critères pour une mesure de qualité de règles d'association. Un exemple: l'implication statistique*, Mesures de qualité pour la fouille de données, RNTI-E-1, Cépaduès –Editions, p 3-32, I.S.B.N. 2.85428.646.4.
- Gras, R.; Diday, E.; Kuntz, P.; Couturier, R. (2001). *Variables sur intervalles et variables-intervalles en analyse statistique implicative*, Actes du 8ème Congrès de la Société Francophone de Classification, Université des Antilles-Guyane, Pointe-à-Pitre, 17-21 décembre 2001, pp 166-173.
- Gras, R(egin); Guillet, F.; Gras, R(obin); Philippé, J. (2002). *Réduction des colonnes d'un tableau de données par quasi-équivalence variables*, Extraction des connaissances et apprentissage, Hermès, Volume 1, n°4/2001, p 197-202, ISBN 2-7462-0406-1, 2002.
- Gras, R.; Kuntz, P. (2005). *Discovering R-rules with a directed hierarchy*, *Soft Computing, A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, Volume 1, p. 46-58, ISSN 1432-7643, Springer Verlag, 2005.
- Gras, R.; Kuntz, P. (2007). *Reduction of Redundant Rules in Statistical Implicative Analysis*. Selected Contributions in data Analysis and Classification, P. Brito,

- P. Bertrand, G. Cucumel, E. de Caravilho, eds, Springer, p.367-376, ISBN: 1431-8814.
- Gras, R.; Kuntz, P.; Briand, H. (2001). *Les fondements de l'analyse statistique implicative et quelques prolongements pour la fouille de données*, Mathématiques et Sciences Humaines, n° 154-155, p 9-29, ISSN 0987 6936, 2001.
- Gras R.; Kuntz, P.; Briand, H. (2003). *Hiérarchie orientée de règles généralisées en analyse implicative*, Extraction des Connaissances et apprentissage, Hermès, p 145-157, ISSN 0992-499X, ISBN 2-7462-0631-5, 2003.
- Gras, R.; Kuntz, P.; Couturier, R.; Guillet, F. (2001). *Une version entropique de l'intensité d'implication pour les corpus volumineux*. Extraction des Connaissances et Apprentissage (ECA), vol. 1, n° 1-2, 69-80. Hermès Science Publication, 2001.
- Gras, R.; Kuntz, P.; Régnier, J.C. (2004b). *Significativité des niveaux hiérarchie orientée en analyse statistique implicative*, Classification et fouille de données, Ed M. Chavent et M.Langlais, RNTI-C-1.
- Gras, R.; Larher, A. (1992). *L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données*, Mathématique, Informatique et Sciences Humaines, E.H.E.S.S. Paris, n°120 1992, 5-31.
- Gras, R.; Ratsimaba-Rajohn, H. (1996). *Analyse non symétrique de données par l'implication statistique*. RAIRO- Recherche Opérationnelle, 30-3, AFCET, Paris, 1996, 217-232.
- Gras, R.; Régnier, J.C. (2007). *Différents modèles d'indices d'implication en Analyse Statistique Implicative*, soumis à Revue de Statistiques Appliquée.
- Guillet, F.; Hamilton, H.J. (2007). *Quality Measures in Data Mining*. Guillet F. et Hamilton H.J. (eds.), Springer, ISBN: 978-3-540-44911-9.
- Kuntz, P. (2005). *Classification hiérarchique orientée en ASI*, Quaderni di Ricerca in Didattica of G.R.I.M., Supplemento n.2 al N.15, 53-62.
- Kuntz, P.; Gras, R; Blanchard, J. (2002). *Discovering Extended Rules with Implicative Hierarchies*, Conference on the new frontiers of statistical data mining and knowledge discovery, juin 2002, Knoxville, Tennessee Lagrange J.B., (1998), *Analyse implicative d'un ensemble de variables numériques; application au traitement d'un questionnaire à réponses modales ordonnées*", Revue de Statistique Appliquée., Institut Henri Poincaré, Paris, 1998, 71-93.
- Lahanier-Reuter, D. (1998). *Etude de conceptions du hasard: approche épistémologique, didactique et expérimentale en milieu universitaire*, Thèse de l'Université de Rennes 1, 1998.

- Lallich, S.; Lenca, P.; Vaillant, B. (2005). *Variations autour de l'intensité d'implication*, (2005), Actes ASI 05, Université de Palerme,
- Larher, A. (1991). *Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique*, Thèse de l'Université de Rennes 1, 4 Février 1991.
- Lebart, L.; Morineau, A.; Piron, M. (2000). *Statistique exploratoire multidimensionnelle*, Dunod.
- Lenca, P.; Meyer, P.; Vaillant, P.; Picouet, P.; Lallich, S. (2004). *Evaluation et analyse multi-critères de qualité des règles d'association*, Mesures de qualité pour la fouille de données, RNTI-E-1, Cépaduès, p. 219-246.
- Lerman, I.-C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod, Paris, 1981.
- Lerman, I.C.; Azé, J. (2004). *Indice probabiliste discriminant (de vraisemblance du lien) d'une règle d'association en cas de " très grosses " données*, Mesures de qualité pour la fouille de données, RNTI-E-1, p. 69-94.
- Lerman, I.-C.; Gras, R.; Rostam H. (1981). *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires*, I et II, Mathématiques et Sciences Humaines, 1981, n° 74,, 5-35 et n° 75, 5-47.
- Loevinger, J. (1947). *A systematic approach to the construction and evaluation of tests of abilities*, Psychological Monographs, 61, n° 4.
- Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in intelligent systems*, San Mateo, CA, Morgan Kaufmann.
- Polo-Capra, M. (1996). *Le repère cartésien dans les systèmes scolaires français et italien: étude didactique et application de méthodes d'analyse statistiques multidimensionnelles*, Thèse de l'Université de Rennes 1, 9 Décembre 1996.
- Régnier, J.C.; Gras, R. (2005). *Statistique de rangs et analyse statistique implicative*, Revue de Statistique Appliquée, LIII, p. 5-38.
- Saporta, G. (2006), Probabilités, Analyse de Données et statistique, Ed. Technip, Paris.
- Sebag M.; Schoenauer (1991). *Un réseau de règles d'apprentissage, Induction symbolique-numérique à partir de données*, Cépaduès Editions.
- Shannon, C.E.; Weaver (1949). *The mathematical theory of communication*, Univ. of Illinois Press, 1949.
- Simon, A. (2001). *Outils classificatoires par objets pour l'extraction de connaissances dans des bases de données*, Thèse de l'Université de Nancy 1, 2000.
- Zighed, D.A.; Rakotomalala, R. (2000). *Graphes d'induction: apprentissage et data mining*. Paris: Hermes Science Publications.



# CHIC: utilización y funcionalidades

Raphaël Couturier

Traducido por Larisa Zamora Matamoros y Jorge Díaz Silvera

Laboratoire d'Informatique de l'Université de Franche-Comté (LIFC),  
IUT de Belfort-Montbéliard, BP 527, 90016 Belfort, Francia  
[raphael.couturier@iut-bm.univ-fcomte.fr](mailto:raphael.couturier@iut-bm.univ-fcomte.fr)

**Resumen.** CHIC permite utilizar la mayor parte de los métodos definidos en la teoría del ASI (Análisis Estadístico Implicativo). Tiene por objetivo descubrir las implicaciones más pertinentes entre las variables de un conjunto de datos. Para ello, propone organizar las implicaciones en forma de un árbol jerárquico orientado o un grafo implicativo. Asimismo, permite obtener un árbol de similaridad (no orientado) basado en las semejanzas de las variables. El presente artículo describe las características y uso de CHIC.

## 1 Introducción

El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) ha sido desarrollado por Régis Gras y sus colaboradores. Permite establecer reglas de asociación a partir de un conjunto de datos, cruzando sujetos y variables. El objetivo inicial de este método fue responder a la pregunta: "si un objeto posee cierta propiedad, entonces ¿posee alguna otra?". Efectivamente la respuesta es completamente afirmativa. Sin embargo, es posible constatar que aparecen ciertas tendencias. El ASI tiene por objetivo constatar tales tendencias en un conjunto de propiedades. Comparado con otros métodos estadísticos que permiten generar reglas de asociación, el ASI se distingue por el hecho de que utiliza una medida no lineal que satisface criterios importantes. En primer lugar, esta medida se basa en la intensidad de la implicación que mide el grado de sorpresa inherente a una regla. Así pues, se suprimen las reglas triviales, que son potencialmente evidentes y conocidas por el experto. Esta intensidad de implicación puede ser reforzada por el grado de validez, definido utilizando la entropía de Shannon, si el usuario elige este método de cálculo. En este caso, la medida no tiene en cuenta simplemente la validez de la regla, sino también su contra-recíproca. En efecto, cuando una regla de asociación

se considera válida, es decir, el conjunto de los ítems A es muy próximo al conjunto de los ítems B, entonces es legítimo e intuitivo esperar que la regla contra-recíproca sea válida, es decir, que el conjunto de los ítems no-B sea muy próximo al conjunto de los ítems no-A. Estas dos medidas originales son complementadas por una medida clásica basada en el tamaño del soporte de la regla. Así pues, al combinar las tres medidas, se puede definir una medida pertinente que posee las cualidades de las tres (si se considera la utilización de la teoría entrópica), es decir, se toma en cuenta tanto la resistencia al ruido, como la regla contra-recíproca<sup>1</sup>, como el rechazo de reglas triviales. Para más información el lector interesado puede consultar Gras et al. (2004). A partir de esta medida original, CHIC permite calcular las reglas de asociación a partir de un conjunto de datos. CHIC y el ASI han sido utilizados en un espectro amplio de campos de investigación (Couturier et al., 2004; Froissard, 2005; Couturier, 2005; Orús y Gregori, 2005).

CHIC permite construir dos tipos de árboles y un grafo. El árbol más conocido es el de similaridad. El índice de similaridad fue definido por Lerman, en Lerman (1981), y permite construir una jerarquía ascendente. De manera similar, la intensidad de la implicación puede utilizarse con el fin de construir un árbol jerárquico orientado. Asimismo, CHIC ofrece la posibilidad de generar un grafo original, denominado grafo implicativo, que permite al usuario seleccionar las reglas de asociación y las variables que desea ver aparecer.

En la sección 2 examinamos las variables que pueden tratarse con CHIC, así como las opciones que pueden ayudar al usuario. La sección 3 presenta el árbol de similaridad y el árbol jerárquico. La sección 4 presenta el grafo implicativo. En la sección 5 presentamos otras posibilidades que brinda CHIC. La sección 6 ejemplifica el cálculo con variables intervalos y el cálculo de las tipicalidades y las contribuciones. Por último, la sección 7 cierra este capítulo.

## 2 Variables

Inicialmente, tanto CHIC como el ASI, se concibieron para tratar variables binarias. Posteriormente, el ASI fue enriquecido con la introducción de otros tipos de variables, que CHIC ha incorporado. Actualmente, CHIC ofrece la posibilidad de tratar variables binarias, frecuenciales, variables definidas sobre intervalos y variables-intervalo. El caso de las variables binarias es, evidentemente, el caso más

---

<sup>1</sup> N. del T.: Si la regla es “a implica b”, la contra-recíproca es “no b implica no a”, que es equivalente a nivel lógico.



simple. Las variables frecuenciales, por su parte, toman valores entre 0 y 1. Este tipo de variable permite modelizar las variables modales, para las cuales existe un número fijo de valores incluidos entre 0 y 1, que corresponde a las distintas modalidades. La manera de definir las modalidades es muy importante, porque interviene significativamente en los resultados de CHIC, según los valores de las modalidades estén próximos a 0 ó 1. Esta observación es válida para las variables frecuenciales. El usuario debe prestar gran atención al proceso que utiliza para transformar una variable real en una variable frecuencial. En efecto, se consideran varias estrategias en función de los valores. Si los valores son positivos, éstos se pueden dividir por el valor máximo. Otra posibilidad consiste en considerar que el valor mínimo representa el 0 y que el máximo representa el 1, los demás valores se distribuyen, en este caso, proporcionalmente entre el valor mínimo y el máximo. Si una variable real posee valores negativos y positivos, es posible constituir dos variables, una conteniendo los valores positivos y la otra los valores negativos. En este caso, las anteriores observaciones siguen siendo válidas para las dos variables creadas. Sin embargo, también es posible considerar que el valor mínimo (aunque es negativo) representa al 0 y el valor máximo al 1 y, así, los otros valores se distribuyen proporcionalmente dentro del intervalo  $[0,1]$ .

Las variables sobre intervalos y las variables-intervalos se utilizan para modelar situaciones complejas. Se detallan a continuación. Las variables-intervalo permiten afrontar el problema surgido en la conversión de una variable real en una variable frecuencial, como explicamos anteriormente (ver párrafo siguiente). Utilizando los mismos valores reales, una variable sobre intervalo procede de otro modo. Ésta particiona los valores de la variable en un número fijo de intervalos. El usuario elige el número de intervalos y a continuación el algoritmo de las nubes dinámicas, Diday (1971), construye automáticamente los intervalos que tienen extremos distintos. Este algoritmo tiene la particularidad de construir intervalos minimizando la inercia (varianza) de cada intervalo. Así, un intervalo se representa por una variable binaria y un individuo toma el valor 1 si pertenece a dicho intervalo y 0 si no. Al utilizar tal descomposición, un individuo pertenece a un único intervalo. Así pues, el número de variables crece con este método.

Veamos un ejemplo. Supongamos que disponemos de un conjunto de individuos de los cuales conocemos sus estaturas y pesos. Supongamos también que estos individuos pesan entre 40kg y 140kg y que su talla varía entre 140cm y 200cm. La figura 1 muestra un ejemplo con algunos individuos, sus valores se han tomado arbitrariamente y aún no han sido particionados.

	peso p	talla p	mujer_s	hombre_s
i1	95	200	0	1
i2	43	140	1	0
i3	75	186	0	1
i4	60	174	1	0
i5	110	183	0	1
i6	140	180	0	1
i7	100	176	0	1
i8	79	172	1	0
i9	69	170	1	0
i10	45	165	1	0
i11	65	180	0	1
i12	60	175	0	1
i13	120	175	0	1
i14	80	160	1	0
i15	100	180	0	1
i16	121	175	0	1
i17	97	162	1	0
i18	72	176	0	1
i19	40	160	1	0
i20	57	175	1	0

Fig. 1: *Un ejemplo sencillo de datos con variables sobre intervalos (antes de la partición) y variables suplementarias*

Supongamos que deseamos dividir cada variable en cuatro intervalos, en función de la distribución de las dos variables. Podemos obtener los intervalos  $[40,60[$ ,  $[60,95[$ ,  $[95,110[$ ,  $[110,140]$  que llamaremos respectivamente peso1, peso2, peso3 y peso4 y los intervalos  $[140,160[$ ,  $[165,174[$ ,  $[174, 186[$ ,  $[186,200]$  para las tallas, que llamaremos talla1, talla2, talla3 y talla4 respectivamente. En los cálculos que siguen, se consideran todas las uniones de intervalos de una variable. Así, con la variable talla, obtenemos los intervalos talla12, talla23, talla34, talla1-3, talla2-4 y talla1-4. Los intervalos de la forma “nombreAB” corresponden a la unión de dos intervalos consecutivos, por ejemplo, talla23 corresponde a la unión de los intervalos talla2 y talla3. Los intervalos de la forma “nombreA-B” corresponden a la unión de todos los intervalos entre “nombreA” y “nombreB”, por ejemplo talla1-3 corresponde a la unión de los intervalos talla1, talla2 y talla3. Obviamente, la utilización de las variables sobre intervalos es más interesante cuanto más pequeñas se puedan construir las

particiones, es decir, reuniendo los intervalos para los que se sabe que son naturalmente cercanos unos a otros. CHIC permite utilizar tal algoritmo, que se describe matemáticamente, por ejemplo, en Gras et al. (1996) y Gras (2005).

Con el ejemplo anterior, si otras variables informan sobre los hábitos de los individuos, entonces se pueden obtener informaciones entre esas variables y el peso y la talla de la población estudiada. Por ejemplo, es posible saber que las personas que miden entre 140cm y 180cm tienen mayor atracción por una cosa u otra, o que las personas con tales hábitos pesan principalmente entre 90kg y 150kg. Evidentemente el número de intervalos puede afectar fuertemente a los resultados.

Mientras que para una variable sobre intervalos, un individuo toma el valor 1 para un único intervalo, una variable-intervalo ofrece la particularidad de que un individuo tome valores diferentes sobre varios intervalos. Además, los intervalos pueden ser continuos y pueden representar una descomposición discreta, como ocurre al utilizar un método de descomposición automática como el de las nubes dinámicas, pero también pueden ser definidos por el usuario según sus criterios personales. Tomando el ejemplo anterior de la talla y el peso, un usuario puede preferir elegir que las personas sean delgadas, normales, con sobrepeso ligero, mediano o grande. Sin embargo, una variable-intervalo ofrece la posibilidad de que un individuo pueda tomar distintos valores en los distintos intervalos, pero impone que la suma de estos valores sea inferior o igual a 1. En la mayoría de los casos, la suma será igual a 1, pero no es una obligación. En la práctica, la utilización de variables-intervalo permite clasificar fácilmente un objeto o individuo porque es frecuente que las opiniones diverjan sobre el hecho de que algo o alguien sea más bien pequeño o normal. Por lo tanto, se puede expresar que alguien es esbelto otorgando a dicho individuo 0.75 sobre delgado y 0.25 sobre normal. Hay que resaltar también que este mecanismo permite tener en cuenta las variables difusas que se utilizan con frecuencia en algunos tipos de problemas, Bojadziev y Bojadziev (1996). La utilización de variables difusas proviene, bien de una valoración humana, que por definición es subjetiva, bien de una medida imprecisa que por una razón cualquiera introduce una incertidumbre.

CHIC utiliza el formato CSV (con punto y coma como separador) como formato de datos para los ficheros, utilizado normalmente en las hojas de cálculo. Los individuos se ordenan en la primera columna. Las variables en la primera fila. Los valores de los individuos están representados en una tabla de dos dimensiones, de forma que los valores para cada variable de un individuo se guardan en una fila de la tabla (el primer elemento es el nombre del individuo). Los valores de una variable, para todos los individuos, están dispuestos en las columnas de la tabla (el

primer elemento es el nombre de la variable). Por supuesto, el tipo de los valores difiere en una tabla, según el tipo de variables (binaria, frecuencial,...).

Las variables suplementarias se pueden utilizar en CHIC para explicar la formación de algunas reglas. Este tipo de variable no interviene directamente en el cálculo de las reglas, pero se utiliza en el cálculo de las tipicalidades y las contribuciones.

Veamos un ejemplo. Supongamos que deseamos estudiar el impacto de un nuevo tranvía en una ciudad y que se ha elaborado un cuestionario a tal efecto. Este último reúne numerosas informaciones sobre las necesidades y las aspiraciones de este proyecto. En este tipo de cuestionario, se solicita el sexo de las personas. Por ejemplo, es posible que CHIC, con ese cuestionario, genere reglas como que las personas que trabajan y viven lejos de su lugar de trabajo generalmente están muy interesadas en el proyecto, o que las familias con niños pequeños están involucradas en el proyecto. Utilizando el sexo de las personas como variable suplementaria, es posible saber si las personas responsables de la construcción de las reglas anteriores son sobre todo los hombres, las mujeres o si no hay distinción de sexo.

Antes de ejecutar un cálculo, el usuario debe elegir el tipo de cálculo que desea utilizar. En efecto, es posible elegir el cálculo clásico de la intensidad de implicación o su versión entrópica, como lo indicamos en la introducción. Esta elección del tipo de cálculo influye profundamente sobre las reglas producidas. Generalmente, hay que utilizar la versión entrópica cuando el tamaño de la población es grande. Es más estricta que la versión clásica de la intensidad de implicación, que produce más reglas, pero que no es conveniente con grandes conjuntos de datos.

A continuación presentamos los modos de representaciones gráficas ofrecidos por CHIC. El usuario que desee más información sobre la forma de calcular las reglas podrá consultar, por ejemplo, Gras et al. (2004) y las referencias que encontrará allí.

### **3 Árbol de similaridad y árbol jerárquico**

Una vez CHIC calcula el conjunto de todas las reglas en función de los parámetros elegidos por el usuario, se puede construir un árbol a partir de esas reglas. Este árbol se puede relacionar a un método de clasificación, orientado o no, en función del tipo de cálculo elegido (similaridad o implicación). Sin embargo, las formas de construir cada uno de estos árboles poseen algunas semejanzas. De

aquí en adelante una regla se denomina clase, e incorpora dos variables en su forma más simple. En cada nivel de la clasificación, CHIC elige la clase que posee la mayor intensidad (de similaridad o implicación). A continuación, en cada etapa, CHIC calcula un conjunto de nuevas clases a partir de las clases presentes en la jerarquía. Para crear una nueva clase, se une una clase existente, bien con una variable que no ha sido incorporada hasta el momento, bien con alguna otra clase de la jerarquía. Sin embargo, cada par de variables presentes en la agregación de dos clases debe tener una intensidad válida. Por ejemplo, la formación de la clase ((a, b), c) requiere que las clases (a, c) y (b, c) tengan un sentido según el método de cálculo elegido (similaridad o implicación). La clase ((a, b), c) representa la regla  $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$  en el análisis implicativo y, con el análisis de similaridades, representa el hecho de que a y b sean similares y que esta clase es similar a c. Para más detalles sobre la formación de clases, invitamos al lector interesado a (Lerman, 1981; Gras et al., 1996).

Si el usuario se pregunta por el aspecto del árbol sin alguna o algunas variables, sencillamente puede deseleccionar dichas variables, gracias a la interfaz prevista a tal efecto. Esta posibilidad se ofrece para todas las representaciones de CHIC (árbol o grafo). Desafortunadamente, una modificación (incluso pequeña) referente a qué variables están presentes implica una reconstrucción total del árbol. Esta etapa depende profundamente del número de variables implicadas en el cálculo (el algoritmo tiene una complejidad que depende del factorial del número de variables en el peor de los casos). Antes de ejecutar un análisis, el usuario puede pedir, en las opciones de cálculo, que se resalten los niveles significativos del árbol.

La figura 2 muestra un árbol de similaridad y la figura 3 ilustra un árbol jerárquico. Para el árbol jerárquico, se indican los niveles significativos, los cuales están representados por un trazo rojo (en CHIC) y significa que el nivel indicado es más significativo que el precedente y que el siguiente. Para más detalles sobre su construcción consultar, por ejemplo, a Gras et al. (1996).

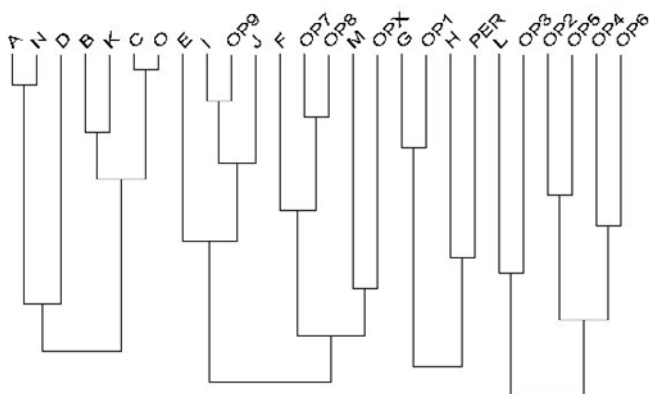


Fig. 2: Un ejemplo de árbol de similaridad

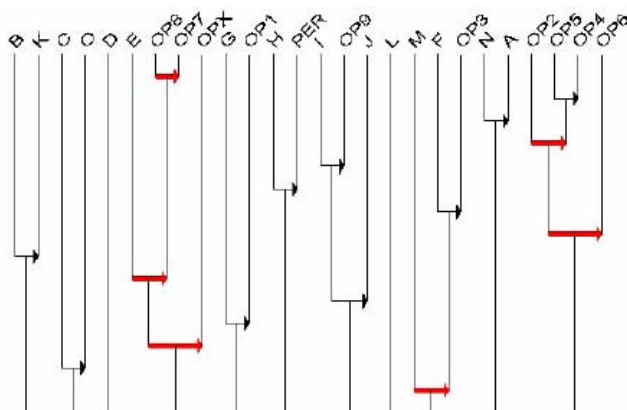


Fig. 3: Un ejemplo de árbol jerárquico

El índice de similaridad se define utilizando bien la teoría clásica, bien la teoría entrópica. Es obvio que la segunda opción es preferible con un gran número de individuos. Además, la construcción del árbol de similaridad con la teoría clásica conduce a una única clase final que reúne todas las otras. Por contra, con la versión entrópica del índice de similaridad, es frecuente que el algoritmo de construcción de clases conduzca a varias clases distintas al final del proceso. El número de clases depende, de hecho, de la similitud de los datos.

#### 4 Grafo implicativo

Como explicamos anteriormente, las dos clasificaciones de CHIC destacan algunas reglas significativas, dejando de lado otras. Parece razonable usar el grafo implicativo cuando no hay variables que se deban destacar sobre otras. Al observar los distintos colores escogidos por CHIC en función del valor de la intensidad de implicación de las reglas, el usuario puede conservar inmediatamente las reglas que son más interesantes correspondiendo a la intensidad más fuerte. En la práctica, hay cuatro niveles disponibles y CHIC propone colores diferentes para su rápida identificación. La figura 4 ilustra un ejemplo de representación de un grafo implicativo.

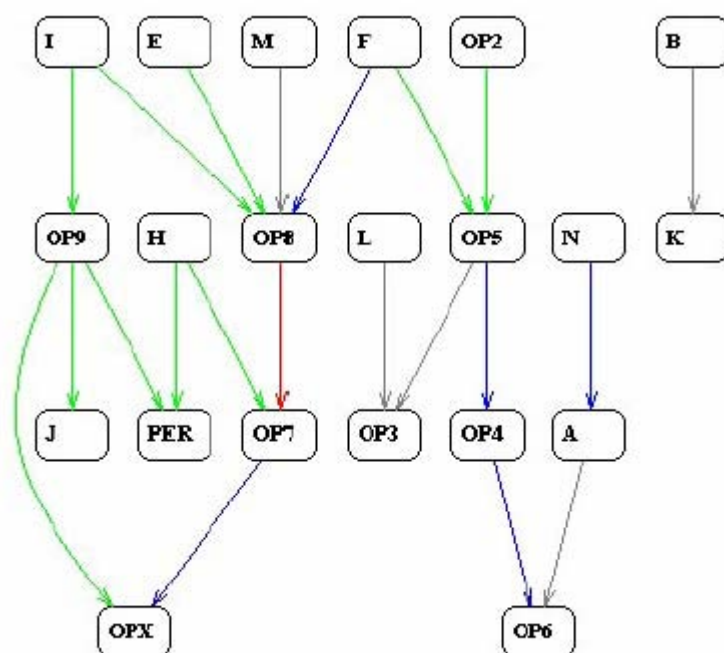


Fig. 4: Un ejemplo de grafo implicativo

Se utiliza una flecha para representar la implicación entre dos variables (la regla  $A \Rightarrow B$  está representada por una flecha entre A y B). Dado que el número de reglas puede ser considerable, el usuario tiene la posibilidad de seleccionar

solamente algunas variables. Así solamente se representan las reglas que involucran las variables elegidas. Por lo tanto, esto reduce el número de reglas. Además, con el fin de hacer el grafo más legible, CHIC utiliza un algoritmo de diseño automático de grafos que intentan minimizar el número de cruces entre las reglas. Por defecto los cierres transitivos no se indican sobre el grafo implicativo. Un simple clic sobre el ratón en la caja de herramientas los muestra. CHIC los calcula sólo una vez al principio de cada nuevo grafo. A continuación, aunque el usuario seleccione o deseccione algunas variables, cambie el nivel de visualización de las reglas, elija indicar o no los cierres transitivos, CHIC re dibuja el grafo sin ningún cálculo adicional. Ello permite al usuario descubrir características importantes de sus datos. Sin embargo, la utilización del procedimiento de dibujo automático del grafo es costosa en recurso de cálculos, por lo que no es deseable su uso sistemático.

## 5 Otras posibilidades

Además de los modos de representación anteriormente descritos, CHIC proporciona algunas herramientas interesantes. Para cada método de representación gráfica, es posible calcular la contribución y tipicalidad de un individuo a una regla dada.

La noción de contribución se define para determinar los individuos que contribuyen bien a la creación de la regla. Estos individuos son más responsables que otros de la formación de la regla. Por ejemplo, si una regla  $A \Rightarrow B$  posee una intensidad implicativa igual a 0.7, entonces los individuos más contributivos son los que tienen el valor 1 para las variables A y B. Por el contrario, la noción de tipicalidad se define por el hecho que ciertos individuos son “típicos” del comportamiento de la población, es decir con una intensidad de implicación similar a la de la regla. Con el ejemplo precedente, los individuos más “típicos” de la regla son los que poseen respectivamente valores próximos a 0.5 y 1 para A y B (estos valores dependen del modo de cálculo elegido para el análisis, clásico o entrópico, y de los cardinales de los conjuntos A y B).

Es fácil darse cuenta de que los conceptos de tipicalidad y contribución son diferentes. De igual forma, el concepto de tipicalidad (respectivamente de contribución) de un conjunto de individuos (o de una categoría de individuos) se define para saber si un conjunto particular de individuos es típico de (respectivamente contributivo a) una regla, una regla generalizada, o un camino.



## 6 Ilustración con las variables sobre intervalo y el cálculo de las tipicalidades y de las contribuciones

Esta parte describe un ejemplo simple y concreto con las dos variables sobre intervalo definidas en la sección 2. La figura 5 muestra un grafo implicativo obtenido a partir de los datos de la figura 1. Las dos variables “peso” y “talla” son particionadas automáticamente en cuatro intervalos por CHIC, siguiendo el método descrito en la sección 2. En este grafo se pueden observar algunas propiedades interesantes. Por ejemplo, se pueden observar las reglas:  $\text{peso1} \Rightarrow \text{talla12}$  y  $\text{talla34} \Rightarrow \text{peso2-4}$ . Debido al reducido número de individuos para este ejemplo, por lo tanto no significativo, y porque los valores se generaron de manera arbitraria, no se puede decir nada más que: "los individuos de poco peso son generalmente pequeños y las personas más grandes no son las más ligeras". Sin embargo, estas reglas muestran una implicación entre las particiones de dos variables. Al considerar que los datos pudieran tener algún sentido para un experto, entonces podríamos calcular la tipicalidad y la contribución de un grupo de individuos. Por ejemplo, con respecto a la regla  $\text{talla34} \Rightarrow \text{peso2-4}$ , CHIC determina que la variable hombre contribuye más a esta regla. Por el contrario, la variable más típica a la regla  $\text{peso1} \Rightarrow \text{talla12}$  es la variable mujer. Estos dos resultados no son sorprendentes teniendo en cuenta los datos.

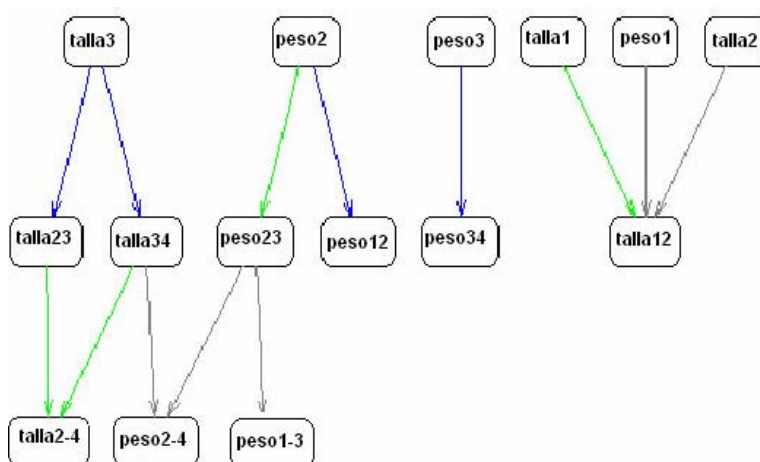


Fig. 5: Un ejemplo de grafo implicativo con variables intervalos

## 7 Conclusion

CHIC permite poner en práctica la mayoría de los métodos y técnicas relacionadas con el ASI. En este capítulo, describimos las características principales de CHIC. En primer lugar enumeramos los tipos de variables que CHIC permite tratar. Se detallan algunas opciones útiles para comprender CHIC. A continuación presentamos los tres principales modos de representación. El árbol de similaridad y el árbol jerárquico proporcionan, respectivamente, una clasificación no orientada y una clasificación orientada. El grafo implicativo, que es, con mucho, el más interactivo, permite al usuario "rebuscar" entre sus datos y así descubrir las reglas que pueden interesar al experto.

## Bibliografía

- Bojadziev, G.; Bojadziev, M. (1996). *Fuzzy sets, fuzzy logic, applications*. World scientific.
- Couturier, R. (2005). *Un système de recommandation basé sur l'a.s.i.* In Troisième rencontre internationale de l'Analyse Statistique Implicative (ASI3), pp. 157–162.
- Couturier, R.; Gras, R.; Guillet, F. (2004). *Reducing the number of variables using implicative analysis*. In International Federation of Classification Societies, IFCS 2004, pp. 277–285. Springer Verlag : Classification, Clustering, and Data Mining Applications.
- Diday, E. (1971). *La méthode des nuées dynamiques*. Revue de statistique appliquée 19(2), 19–34.
- Froissard, G. (2005). *Chic et les études docimologiques*. In Troisième rencontre internationale de l'Analyse Statistique Implicative (ASI3), pp. 187–197.
- Gras, R. (2005). *Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices*. In Troisième rencontre internationale de l'Analyse Statistique Implicative (ASI3), pp. 9–33. Université de Palerme.
- Gras, R.; Ag Almouloud, S.; Bailleul, M.; Lahrer, A.; Polo, M.; Ratsimba-Rajohn, H.; Totohasina, A. (1996). *L'implication Statistique*. La Pensée Sauvage.
- Gras, R.; Couturier, A.; Blanchard, J.; Briand, H.; Kuntz, P.; Meter, P. (2004). *Mesures de qualité pour la fouille de données*, Chapter Quelques critères pour une mesure de qualité de règles d'association. Un exemple : l'implication statistique, pp. 3–32. RNTI-E-1, Cepaduès Editions.

- Lerman, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Dunod.
- Orús, P. ; Gregori,P. (2005). *Des variables supplémentaires et des élèves "fictifs", dans la fouille didactique de données avec CHIC*. In Troisième rencontre internationale de l'Analyse Statistique Implicative (ASI3), pp. 279–291.



# Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC

Larisa Zamora\*, Pablo Gregori\*\*<sup>1</sup>, Pilar Orús\*\*<sup>2</sup>

\*Departamento de Matemática. Facultad de Matemática y Computación.  
Universidad de Oriente, Cuba

\*\* Departament de Matemàtiques, Universitat Jaume I de Castello,  
E-12071 Castellon (España)

\*\*<sup>1</sup>gregori@mat.uji.es

<http://www3.uji.es/~gregori>

\*\*<sup>2</sup>orus@mat.uji.es

**Resumen:** En el presente trabajo se ofrecen la mayoría de conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su implementación a través del sistema informático CHIC (*Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive*). Las técnicas del ASI se presentan en el mismo orden en que se encuentran implementadas en CHIC y se ejemplifican, de forma manual, algunos de los cálculos implementados en dicho sistema, para lo cual se emplean los datos obtenidos en la investigación desarrollada por Pitarch (2002), con estudiantes de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España.

## 1 Introducción

El Análisis Estadístico Implicativo (*Analyse Statistique Implicative*, ASI, en francés) es un *método de análisis no simétrico de datos* que permite, a partir de un conjunto de datos que interrelaciona una población de sujetos u objetos con un conjunto de variables, la extracción y estructuración del conocimiento en forma de normas y reglas generalizadas y, a partir de la contingencia de estas reglas, la explicación y en consecuencia una determinada previsión en distintas ramas del saber.

Su origen es la *modelización estadística de la cuasi-implicación*: cuando la variable o la conjunción de variables “**a**” es observada en la población, entonces generalmente la variable “**b**” lo es también.

Las variables pueden ser de distintos tipos: binaria, modal, frecuencial o de intervalo (normalizadas en el intervalo [0, 1]). Ejemplos de estos tipos de variables son:

- \* *Binaria*: A la pregunta *¿Te gusta la música HIP?*, sólo se puede responder de forma afirmativa o negativa, la variable solo puede tomar los valores: “1” si se responde afirmativamente o “0” en caso contrario. Este tipo de variable es la que emplearemos en el presente trabajo, para mostrar manualmente como ejecutar las fórmulas que serán presentadas.
- \* *Modal*: A la pregunta *¿En una escala de 1 a 5, cómo evaluarías tu gusto por la música HIP?*, donde los extremos de la escala representan carencia total de gusto por la música HIP y gusto máximo por ésta, respectivamente. En este caso estamos en presencia de una variable modal que puede tomar los valores de 1 a 5.
- \* *Frecuencial*: A la pregunta *¿En la semana, cuántos días escuchas la música HIP?*, se debe responder con un valor numérico que representa la frecuencia semanal con que escucha este tipo de música. Estaremos entonces ante una variable frecuencial, que puede tomar, en este ejemplo en particular, los valores desde 0 hasta 7. Observar que a pesar de tomar valores similares las variables modales y frecuenciales, el significado de estos es distinto.
- \* *Intervalo*: A la pregunta *¿Cuál es la edad promedio que tienen los estudiantes de la ESO, a los cuales les gusta la música HIP?* Se debe responder con un valor numérico, que en este caso particular, por referirse a la edad de estudiantes de la ESO, debe pertenecer al intervalo [12, 16] años.

A diferencia de los métodos de análisis simétricos basados, por ejemplo, en una distancia o en una correlación, los conjuntos de reglas obtenidos pueden conducir a hipótesis de causalidad.

Estos conjuntos se estructuran según diferentes características comunes complementarias (grafo implicativo, jerarquía orientada), creándose conceptos tales como: intensidad de implicación, cohesión de clases, niveles significativos, etc. La determinación cuantitativa de los sujetos o descriptores responsables de estas estructuras viene dada por su **contribución** y su **tipicalidad**.

## **El sistema informático CHIC**

El sistema informático CHIC (*Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive*) es un software de análisis de datos, inicialmente concebido por Régis Gras con relación a las técnicas del Análisis Estadístico Implicativo, el cual ha sido sucesivamente desarrollado para las computadoras personales por Saddo Ag Almouloud, Harrisson Ratsimba-Rajohn y, en su versión actual, por Raphaël Couturier (Versión 4.1).

Este software realiza el tratamiento automático de los cálculos estadísticos sobre las variables, obteniendo como resultado distintos gráficos, según los índices de proximidad o distancia, clasificación jerárquica, clasificación implicativa, clasificación cuasi-implicativa o clasificación inclusiva. El CHIC muestra dos tipos de árboles y un grafo. El árbol más conocido es el de similaridad. El índice de similaridad fue definido por Lerman (1981) y permite construir una jerarquía ascendente. De manera similar, la intensidad de la implicación puede utilizarse con el fin de construir un árbol jerárquico orientado. Igualmente, CHIC ofrece la posibilidad de generar un grafo original, denominado grafo implicativo, que permite al usuario seleccionar las reglas de asociaciones y las variables que desea que aparezcan.

Además de mostrar los distintos gráficos, CHIC muestra los cálculos estadísticos que realiza: frecuencias, medias aritméticas, índices de proximidad/distancia, coeficientes de correlación, índices de similaridad, cohesión implicativa, etc.

A partir de los gráficos obtenidos se pueden formar clases de cuasi-equivalencia entre las variables estudiadas. Esta partición del conjunto de los datos, permite llegar a conclusiones acerca de la población tratada, tanto a nivel de clasificación por similaridad, como por la jerarquía, según el grado de implicación entre dichas clases.

## **Datos**

Para ejemplificar los cálculos que deben realizarse, tanto en el Análisis Clasificadorio como en el Análisis Estadístico Implicativo, que veremos más adelante, utilizaremos los datos de la investigación desarrollada por Pitarch en el 2002, en la cual se analizó el razonamiento de los alumnos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), utilizando simultáneamente el tratamiento de la

información, el trabajo lógico y la estadística descriptiva (elemental). En esta investigación se trabajó con variables binarias, ya que en el cuestionario que le fue aplicado a 20 alumnos de la ESO, se les preguntaba si les gustaba o no un cierto tipo de música, Hip hop (HIP), Opera (OPE), Máquina (MAQ), etc. (Ver anexo #1)

## 2 Análisis Clasificadorio

El Análisis Clasificadorio tiene, como propósito esencial, agrupar aquellos objetos que reúnan características similares, es decir, es una técnica de análisis exploratorio diseñada para revelar las agrupaciones (clusters) naturales dentro de una colección de datos.

Ya que su objetivo es agrupar objetos similares, se necesita alguna medida para evaluar las diferencias y similitudes entre objetos. El concepto de similaridad es fundamental. La similaridad es una medida de correspondencia o semejanza entre los objetos que van a ser agrupados. La estrategia más común consiste en medir la equivalencia en términos de la distancia entre los pares de objetos. Los objetos con distancias reducidas entre ellos son más parecidos entre sí, que aquellos que tienen distancias mayores y se agruparán, por tanto, dentro del mismo cluster. De esta manera, cualquier objeto puede compararse con cualquier otro, a través de la medida de similaridad.

Para realizar este análisis con el sistema informático CHIC, se parte de considerar un conjunto **I** formado por **n** individuos y un conjunto **A** formado por **p** características,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ , se supone además que:

$$A_i = \{x \in I : a_i(x) = 1\}, \text{ Card}(I) = n \text{ y } \text{Card}(A_i) = n_{a_i}.$$

A diferencia de los métodos de clasificación usualmente empleados (ver Everitt, 1974), el CHIC calcula los índices de similaridad en términos de una probabilidad, cuyo cálculo obedece al modelo asumido para la variable aleatoria  $\text{Card}(X_i \cap X_j)$  objeto de investigación, que según Bodín (1997), depende de dos situaciones:

1. Si el conjunto formado por los individuos objeto de la investigación coincide con la población entera objeto de estudio ( $E$ ), es decir, las conclusiones a las cuales arribaremos como resultado de la investigación no se puede generalizar a un conjunto de individuos mayor que  $E$ ,
2. Si el conjunto formado por los individuos objeto de la investigación es un subconjunto de una población mayor  $E$ ,



y en cada una de estas situaciones, dependerá de la forma en que se seleccionen los individuos que poseen las características investigadas.

En dependencia del modelo asumido, las leyes de distribución que puede seguir la variable de interés,  $\text{Card}(X_i \cap X_j)$  son: Hipergeométrica, Binomial y Poisson. CHIC brinda la posibilidad al usuario de que seleccione el tipo de ley con la cual desea realizar los cálculos, Binomial o Poisson únicamente.

Otro aspecto a destacar, lo cual constituye un aporte del CHIC al análisis clasificatorio, lo constituye el hecho de que este sistema informático permite determinar los nodos significativos, es decir, los nodos correspondientes a una clasificación compatible lo mejor posible con los valores y la calidad del agrupamiento obtenido.

## 2.1 Árbol de Similitud

Para cada pareja de variables  $(a_i, a_j)$  se calculan los Índices de Proximidad o Similitud (Lerman, 1970):

$$s(a_i, a_j) = \Pr[\text{Card}(X_i \cap X_j) \leq K] \quad (1)$$

donde  $K := \text{Card}(A_i \cap A_j)$ , es decir, el valor observado de la cantidad de co-presencias entre  $a_i$  y  $a_j$ . El cálculo de estas probabilidades dependerá de la ley asumida, sin embargo, CHIC, independientemente del tipo de ley seleccionada, Poisson o Binomial, realiza la aproximación de éstas a la Normal y devuelve:

$$s(a_i, a_j) = \Pr \left[ \frac{\text{Card}(X_i \cap X_j) - \frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}} \leq K_c \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{K_c} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad (1a)$$

$$\text{donde } K_c := \frac{K - \frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}}.$$

Los  $s(a_i, a_j)$  obtenidos mediante (1) representan las similitudes de cada pareja  $(a_i, a_j)$  al nivel cero de la jerarquía.

**Ejemplo**

Por limitaciones de espacio, para la ejemplificación de los cálculos, mostraremos únicamente los resultados asociados a las variables: HIP, PUN, JAZ, HEA y REG. Para estas variables,  $n_{HIP} = 11$ ,  $n_{PUN} = 11$ ,  $n_{JAZ} = 10$ ,  $n_{HEA} = 10$ ,  $n_{REG} = 10$  representan la cantidad de individuos a los que les gusta estos tipos de músicas, respectivamente, y  $n=20$ . En la tabla 1 se muestran los valores de las variables seleccionadas para el análisis, la cual representa una submatriz de la matriz de datos mostrada en el anexo 1, y en la tabla 2 las copresencias ( $Card(A_i \cap A_j)$ ), las copresencias estandarizadas ( $K_c$ ) y los índices de similaridad  $s(a_i, a_j)$  al nivel cero de la jerarquía, calculado bajo la aproximación a la distribución Normal.

	HIP	JAZ	HEA	REG	PUN
al1	1	0	0	0	1
al2	1	1	1	1	1
al3	1	0	0	1	1
al4	0	1	1	0	0
al5	1	1	1	1	1
al6	0	0	0	1	0
al7	1	1	1	1	1
al8	0	1	0	1	0
al9	1	0	0	0	1
al10	0	0	0	0	0
al11	0	1	1	1	1
al12	1	1	1	1	1
al13	1	0	1	1	1
al14	0	0	0	1	0
al15	0	1	0	1	0
al16	1	1	1	1	1
al17	1	0	0	1	0
al18	0	0	0	1	0
al19	1	1	1	1	1
al20	0	0	1	1	0

Tab. 1: Submatriz de la matriz de datos

Variables		Card( $A_i \cap A_j$ )	$K_c$	$s(a_i, a_j)$
HIP	PUN	10	1,61	0,9458524
HIP	JAZ	6	0,21	0,5844148
HIP	HEA	7	0,64	0,7387844
HIP	REG	8	1,07	0,8567890
PUN	JAZ	7	0,64	0,7387844
PUN	HEA	8	1,07	0,8567890
PUN	REG	8	1,07	0,8567890
JAZ	HEA	8	1,34	0,9101438
JAZ	REG	8	1,34	0,9101438
HEA	REG	8	1,34	0,9101438

Tab. 2: Valores de copresencias, copresencias estandarizadas e índices de similaridad

Una vez obtenidos estos índices de similaridad al nivel cero, las agrupaciones se hacen como en la clasificación clásica:

- Se construye una primera matriz con los Índices de Similaridad  $s(a_i, a_j)$ , obtenidos a partir de las combinaciones de todas las variables y según la fórmula (1) o (1a).
- Se buscan los nuevos Índices de Similaridad al combinar la clase  $(a_i, a_j)$ , con mayor índice en el paso anterior, con (Lerman, 1970):
  - cada variable aislada:  $s((a_i, a_j), a_k) = \{\text{Max}[s(a_i, a_k); s(a_j, a_k)]\}^2$ ,
  - con clases previamente formadas:

$$s((a_i, a_j), (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3})) = \left\{ \text{Max} \left[ \begin{array}{l} s(a_i, a_{k1}); s(a_i, a_{k2}); s(a_i, a_{k3}); \\ s(a_j, a_{k1}); s(a_j, a_{k2}); s(a_j, a_{k3}) \end{array} \right] \right\}^{2 \times 3},$$

- y en general:

$$s(C_1, C_2) = \left\{ \text{Max} [s_i \mid s_i = s(a_j, a_k) \forall a_j \in C_1, a_k \in C_2] \right\}^{\text{Card } C_1 \times \text{Card } C_2},$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos clases previamente formadas.

Para los datos del ejemplo y las variables que hemos seleccionado para mostrar, se obtiene:

Nivel cero de la jerarquía:

	HIP	JAZ	HEA	REG	PUN
HIP	1,0000000	0,5844148	0,7387844	0,8567890	<b>0,9458524</b>
JAZ	0,5844148	1,0000000	0,9101438	0,9101438	0,7387844
HEA	0,7387844	0,9101438	1,0000000	0,9101438	0,8567890
REG	0,8567890	0,9101438	0,9101438	1,0000000	0,8567890
PUN	<b>0,9458524</b>	0,7387844	0,8567890	0,8567890	1,0000000

Matriz de similaridad al nivel cero

Nivel uno de la jerarquía: Se unen las variables HIP y PUN, pues son las que tienen mayor índice de similaridad (0,9458524), obteniéndose una nueva matriz de similaridad,

	[HIP,PUN]	JAZ	HEA	REG
[HIP,PUN]	1,0000000	0,5458024	0,7340874*	0,7340874
JAZ	0,5458024	1,0000000	<b>0,9101438</b>	0,9101438
HEA	0,7340874*	<b>0,9101438</b>	1,0000000	0,9101438
REG	0,7340874	0,9101438	0,9101438	1,0000000

Matriz de similaridad al nivel uno

- Este valor se obtiene del siguiente análisis:

$$s((\text{HIP, PUN}), \text{HEA}) = \{\text{Max}[s(\text{HIP, HEA}), s(\text{PUN, HEA})]\}^2$$

$$= \{\text{Max}[0,7387844; 0,8567890]\}^2 = \{0,8567890\}^2 = 0,7340874$$

Nivel dos de la jerarquía: Se unen las variables HAZ y HEA, pues son las que tienen mayor índice de similaridad (0,9101438), obteniéndose una nueva matriz de similaridad,

	[HIP,PUN]	[JAZ,HEA]	REG
[HIP,PUN]	1,0000000	0,5388843**	0,7340874
[JAZ,HEA]	0,5388843**	1,0000000	<b>0,8283617</b>
REG	0,7340874	<b>0,8283617</b>	1,0000000

Matriz de similaridad al nivel dos

- \*\* Este valor se obtiene del siguiente análisis:

$$\begin{aligned}
 s((\text{HIP}, \text{PUN}), (\text{JAZ}, \text{HEA})) &= \\
 &= \{ \text{Max}[s(\text{HIP}, \text{JAZ}); s(\text{HIP}, \text{HEA}); s(\text{PUN}, \text{JAZ}); s(\text{PUN}, \text{HEA})] \}^{2 \times 2} \\
 &= \{ \text{Max}[0,5844148; 0,7387844; 0,7387844; 0,8567890] \}^{2 \times 2} \\
 &= \{0,8567890\}^{2 \times 2} = 0,5388843
 \end{aligned}$$

*Nivel tres de la jerarquía:* A este nivel se unen la clase ya formada [JAZ,HEA] con la variable REG, pues son las que tienen mayor índice de similaridad (0,8283617), obteniéndose una nueva matriz de similaridad,

	<b>[HIP,PUN]</b>	<b>[[JAZ,HEA],REG]</b>
<b>[HIP,PUN]</b>	1,0000000	0,3955882
<b>[[JAZ,HEA], REG]</b>	0,3955882	1,0000000

*Matriz de similaridad al nivel tres*

$$\begin{aligned}
 s((\text{HIP}, \text{PUN}), ((\text{JAZ}, \text{HEA}), \text{REG})) &= \\
 &= \left\{ \text{Max} \left[ \begin{array}{l} s(\text{HIP}, \text{JAZ}); s(\text{HIP}, \text{HEA}); s(\text{HIP}, \text{REG}); \\ s(\text{PUN}, \text{JAZ}); s(\text{PUN}, \text{HEA}); s(\text{PUN}, \text{REG}); \end{array} \right] \right\}^{2 \times 3} \\
 &= \left\{ \text{Max} \left[ \begin{array}{l} 0,5844148; 0,7387844; 0,8567890; \\ 0,7387844; 0,8567890; 0,8567890 \end{array} \right] \right\}^6 \\
 &= 0,3955882
 \end{aligned}$$

la representación grafica de estos resultados se muestra en la figura 1 a continuación:

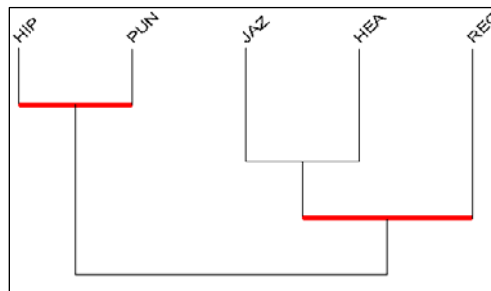


Fig. 1: *Árbol de similaridad*

## 2.2 Nodos significativos

Los nodos significativos de un árbol de similaridad (jerárquico) son los nodos correspondientes a una clasificación compatible lo mejor posible con los valores y la calidad de los valores de similaridad.

**Definición 1:** Se llama **preorden inicial y global  $\Omega$**  sobre **AxA**, al preorden inducido por la aplicación S (similaridad) sobre **AxA**.

$$G_S(\Omega) = \{((a, b); (c, d)) : s(a, b) < s(c, d)\}$$

Sea  $S\Pi_k$  el conjunto de pares separados al nivel k y  $R\Pi_k$  el conjunto de pares que ya se han reunido hasta este nivel k.  $G_S(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$  está formado por los pares de parejas que al nivel k respetan el preorden inicial. Por ejemplo, si se tiene:  $s(e, f) < s(a, b)$ , entonces  $((e, f); (a, b)) \in G_S(\Omega)$ , y si al nivel k, e y f están aún separados, mientras que a y b se reúnen en la clase formada, la pareja  $((e, f), (a, b)) \in G_S(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$ .

Ahora bien, el cardinal de este último conjunto es función de este nivel k, y es un indicador del acuerdo entre el preorden inicial  $\Omega$  y el preorden  $\Pi_k$  inducido.

Al cardinal de  $G_S(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$  se le asocia el índice aleatorio  $G_S(\Omega^*) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$ , donde  $\Omega^*$  es un preorden aleatorio en general, provisto de una probabilidad uniforme, de todos los preordenes del mismo tipo cardinal que  $\Omega$ .

Este índice tiene:

- por esperanza:  $\frac{1}{2} s_k r_k$ , y
- por varianza:  $\frac{s_k r_k (s_k + r_k + 1)}{12}$ ,

siendo:  $\text{Card}[S\Pi_k] = s_k$  y  $\text{Card}[R\Pi_k] = r_k$ . El índice centrado se define como:

$$S(\Omega, k) = \frac{\text{Card}[G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]] - \frac{1}{2} s_k r_k}{\sqrt{\frac{s_k r_k (s_k + r_k + 1)}{12}}}$$

Como en el análisis de las semejanzas de Lerman (Lerman, 1970) este índice sirve de "*estadística global de los niveles*". Sus variaciones son consideradas para significar la constitución de un **nivel significativo**, ya que este "indicador de acuerdo" entre el preorden inicial y el definido por la división  $\Pi_k$  se vuelve

máximo cuando se alcanza un determinado acuerdo, acuerdo que no puede ser sino provisional a causa de la evolución ascendente de la jerarquía.

**Definición 2:** Se llama **nivel significativo** a todo nivel que corresponde a un máximo local de  $S(\Omega, k)$  durante la construcción de la jerarquía. En este caso se dirá que la división  $\Pi_k$  está en **resonancia parcial** con  $\Omega$ . Si, además,  $G(\Omega) \cap [S \Pi_k \times R \Pi_k] = [S \Pi_k \times R \Pi_k]$ , diremos que la división  $\Pi_k$  está en **resonancia total** con  $\Omega$ .

Se llama **nodo significativo** cualquier nodo formado a un nivel que corresponde a un máximo local de  $v(\Omega, k)$ , donde:

$$v(\Omega, k) = S(\Omega, k) - S(\Omega, k - 1).$$

Como ya se mencionó, CHIC determina los nodos significativos para la clasificación obtenida, los cuales se muestran gráficamente con trazos gruesos y rojos (figura 1). Para el ejemplo desarrollado, los nodos significativos se dan al nivel 1, 3 y 4. Veamos cómo se determinaron estos nodos.

Denotemos por:

- $t = \text{Card}(A)$ ,  $I_k = \{j \mid a_j \in R \Pi_k\}$ ,
- $a_j$  los elementos del preorden inicial  $\Omega$ , con  $i = 1, \dots, 2 * C_2^t$ ,
- $P_l = \{a_j \in \Omega \mid s(a_j) = s_l\}$ , donde  $s_l$  es un valor cualquiera que puede tomar el índice de similaridad, y  $l = 1, \dots, d$ , siendo  $d$  la cantidad de valores diferentes que toma este índice de similaridad.
- $f_i^k = \text{Card}(a_j \mid j \notin I_k, j < i, s(a_j) = s(a_i))$ ,

A partir de los índices de similaridad que se muestran en la tabla 2, se puede determinar el preorden inicial y global  $\Omega$  sobre  $A^* \times A^*$ , donde  $A^* \subset A$  y

$A^* = \{\text{HIP, JAZ, HEA, REG, PUN}\}$ , el cual, para su mejor visualización, será representado por cinco columnas o pilas, cada una de las cuales contiene a los pares de variables que poseen igual índice de similaridad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} (\text{JAZ, HIP}) \\ (\text{HIP, JAZ}) \end{array} \right] < \left[ \begin{array}{l} (\text{JAZ, PUN}) \\ (\text{HEA, HIP}) \\ (\text{PUN, JAZ}) \\ (\text{HIP, HEA}) \end{array} \right] < \left[ \begin{array}{l} (\text{REG, PUN}) \\ (\text{HEA, PUN}) \\ (\text{REG, HIP}) \\ (\text{PUN, REG}) \\ (\text{PUN, HEA}) \\ (\text{HIP, REG}) \end{array} \right] < \left[ \begin{array}{l} (\text{REG, HEA}) \\ (\text{REG, JAZ}) \\ (\text{HEA, JAZ}) \\ (\text{HEA, REG}) \\ (\text{JAZ, REG}) \\ (\text{JAZ, HEA}) \end{array} \right] < \left[ \begin{array}{l} (\text{PUN, HIP}) \\ (\text{HIP, PUN}) \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$G_s(\Omega) = \left\{ \left\{ \left( (JAZ, HIP), (JAZ, PUN) \right); \dots; \left( (JAZ, HIP), (HIP, PUN) \right); \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ \left( (HIP, JAZ), (JAZ, PUN) \right); \dots; \left( (HIP, JAZ), (HIP, PUN) \right); \dots; \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ \left( (JAZ, HEA), (PUN, HIP) \right), \left( (JAZ, HEA), (HIP, PUN) \right) \right\} \right\} \right\}$$

$$t = \text{Card}(A^*) = 5, \quad m = \text{Card}(\Omega) = 2 * C_2^5 = 20, \quad y$$

$$\text{Card}(G_s(\Omega)) = \frac{m * (m-1)}{2} - \sum_{i=1}^d \frac{\text{Card}(P_i) * (\text{Card}(P_i) - 1)}{2} = 152.$$

El  $\text{Card}[G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]]$  se puede calcular empleando la fórmula siguiente:

$$\text{Card}[G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]] = \sum_{j=1}^{r_k} i_j - \frac{r_k * (r_k + 1)}{2} - \sum_{j=1}^{r_k} f_j^k,$$

o contando directamente en  $\Omega$ , los pares que pertenecen a  $G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$ , lo cual se logra sumando todos los elementos que se encuentran a la izquierda de la pila que contiene al par que se une al nivel k-ésimo y que no se encuentran en el conjunto  $R\Pi_k$ .

**Nivel 1 de la jerarquía:** Sólo se han reunido las variables HIP y PUN. Por tanto

$$R\Pi_1 = \{(HIP, PUN)\}$$

$$S\Pi_1 = \left\{ \begin{array}{l} (JAZ, HIP); (HIP, JAZ); (JAZ, PUN); (HEA, HIP); (PUN, JAZ); (HIP, HEA) \\ (REG, PUN); (HEA, PUN); (REG, HIP); (PUN, REG); (PUN, HEA); \\ (HIP, REG); (REG, HEA); (REG, JAZ); (HEA, JAZ); (HEA, REG); \\ (JAZ, REG); (JAZ, HEA); (PUN, HIP) \end{array} \right\}$$

$$\text{Card}(S\Pi_1) = 19, \quad \text{Card}(R\Pi_1) = 1, \quad I_1 = \{20\}, \quad f_1^1 = 1, \quad y$$

$$\text{Card}[G(\Omega) \cap [S\Pi_1 \times R\Pi_1]] = 18$$

**Nivel 2 de la jerarquía:** Se añade el par (JAZ, HEA) a los reunidos.

$$R\Pi_2 = \{(HIP, PUN); (JAZ, HEA)\}$$

$$S\Pi_2 = \left\{ \begin{array}{l} (JAZ, HIP); (HIP, JAZ); (JAZ, PUN); (HEA, HIP); (PUN, JAZ); (HIP, HEA) \\ (REG, PUN); (HEA, PUN); (REG, HIP); (PUN, REG); (PUN, HEA); \\ (HIP, REG); (REG, HEA); (REG, JAZ); (HEA, JAZ); (HEA, REG); \\ (JAZ, REG); (PUN, HIP) \end{array} \right\}$$

$$\text{Card}(S\Pi_2) = 18, \quad \text{Card}(R\Pi_2) = 2, \quad I_2 = \{20, 18\}, \quad f_1^2 = 1, \quad f_2^2 = 5, \quad y$$

$$\text{Card}[G(\Omega) \cap [S\Pi_2 \times R\Pi_2]] = 29$$



**Nivel 3 de la jerarquía:** Se forma la clase ((JAZ, HEA), REG), y por ello,

$$R\Pi_3 = \{(HIP, PUN); (JAZ, HEA); (JAZ, REG); (HEA, REG)\}$$

$$S\Pi_3 = \left\{ \begin{array}{l} (JAZ, HIP); (HIP, JAZ); (JAZ, PUN); (HEA, HIP); (PUN, JAZ); (HIP, HEA) \\ (REG, PUN); (HEA, PUN); (REG, HIP); (PUN, REG); (PUN, HEA); \\ (HIP, REG); (REG, HEA); (REG, JAZ); (HEA, JAZ); (PUN, HIP) \end{array} \right\}$$

Card(S\Pi<sub>3</sub>) = 16, Card(R\Pi<sub>3</sub>) = 4, I<sub>3</sub> = {20, 18, 17, 16}, f<sub>1</sub><sup>3</sup> = 1, f<sub>2</sub><sup>3</sup> = 3, f<sub>3</sub><sup>3</sup> = 3, f<sub>4</sub><sup>3</sup> = 3 y Card[G(\Omega) \cap [S\Pi<sub>3</sub> \times R\Pi<sub>3</sub>]] = 51.

**Nivel 4 de la jerarquía:** A este nivel se forma la clase ((HIP, PUN), ((JAZ, HEA), REG)), y por consiguiente

$$R\Pi_4 = \left\{ \begin{array}{l} (HIP, PUN); (JAS, HEA); (JAZ, REG); (HEA, REG); (HIP, JAZ); \\ (HIP, HEA); (HIP, REG); (PUN, JAZ); (PUN, HEA); (PUN, REG) \end{array} \right\}$$

$$S\Pi_4 = \left\{ \begin{array}{l} (JAZ, HIP); (JAZ, PUN); (HEA, HIP); (REG, PUN); (HEA, PUN); \\ (REG, HIP); (REG, HEA); (REG, JAZ); (HEA, JAZ); (PUN, HIP) \end{array} \right\}$$

Card(S\Pi<sub>4</sub>) = 10, Card(R\Pi<sub>4</sub>) = 10, I<sub>4</sub> = {20, 18, 17, 16, 2, 6, 12, 5, 11, 10}, f<sub>1</sub><sup>4</sup> = 1, f<sub>2</sub><sup>4</sup> = 3, f<sub>3</sub><sup>4</sup> = 3, f<sub>4</sub><sup>4</sup> = 3, f<sub>5</sub><sup>4</sup> = 1, f<sub>6</sub><sup>4</sup> = 2, f<sub>7</sub><sup>4</sup> = 3, f<sub>8</sub><sup>4</sup> = 2, f<sub>9</sub><sup>4</sup> = 3, f<sub>10</sub><sup>4</sup> = 3, y Card[G(\Omega) \cap [S\Pi<sub>4</sub> \times R\Pi<sub>4</sub>]] = 38

En la tabla 3 se resumen los valores obtenidos, así como los valores del índice centrado y de la función  $v(\Omega, k)$ , y en la figura 2 se muestra el grafico de esta última función:

Nivel	s <sub>k</sub>	r <sub>k</sub>	Card[G(\Omega) \cap [S\Pi <sub>k</sub> \times R\Pi <sub>k</sub> ]]	S(\Omega, k)	v(\Omega, k)
1	19	1	18	1,474087	1,474087
2	18	2	29	1,385870	-0,088217
3	16	4	51	1,795331	0,409462
4	10	10	38	-0,907115	-2,702446

Tab. 3: Valores del índice centrado y de la función  $v(\Omega, k)$

Según la definición 2 los nodos significativos serían los que surgen a los niveles 1 y 3, ya que estos se corresponden con un máximo local de  $v(\Omega, k)$  (figura 2).

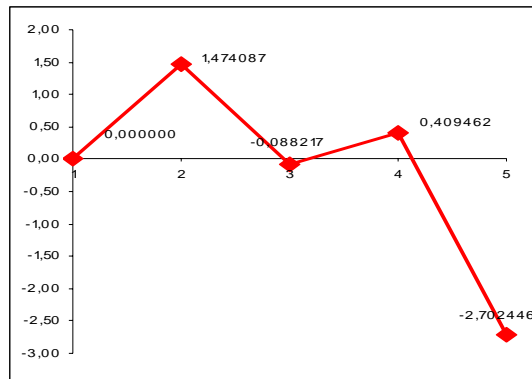


Fig. 2: Grafica de los valores de  $v(\Omega, k)$

En la figura 1 del árbol de similaridad obtenido en la sección 2.1, se pueden apreciar estos nodos con trazos más gruesos.

### 3 Análisis Estadístico Implicativo

Al igual que en el análisis clasificatorio, en el ASI se parte de considerar un conjunto  $I$  formado por  $n$  individuos y un conjunto  $A$  formado por  $p$  características,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ , se supone también que:

$$A_i = \{x \in I : a_i(x) = 1\}, \text{ Card}(I) = n, \text{ Card}(A_i) = n_{a_i} \text{ y } \text{Card}(\overline{A_i}) = n - n_{a_i}.$$

El análisis se desarrolla a través del cálculo de los índices de implicación y de cohesión, el cual se explicará brevemente a continuación. En el análisis cohesivo, se pueden determinar la tipicidad y contribución de sujetos y variables, así como los nodos significativos, en la formación de las clases. Los índices de implicación y de cohesión se definen en términos de una probabilidad, al igual que explicamos para el cálculo del índice de similaridad, la diferencia está en la variable aleatoria de interés, que ahora es  $\text{Card}(X_i \cap \overline{X_j})$ , es decir, la cantidad de individuos que poseen la característica  $a_i$ , pero no poseen la característica  $a_j$ . Todo lo explicado anteriormente para la variable aleatoria  $\text{Card}(X_i \cap X_j)$  es también válido para  $\text{Card}(X_i \cap \overline{X_j})$ .

### La Intensidad de la implicación entre variables

En lógica matemática, la regla " $a_i \Rightarrow a_j$ " es verdadera si para todo  $x$ ,  $a_j(x)$  sólo es nulo cuando  $a_i(x)$  lo sea también; es decir si el conjunto  $A$  de los  $x$  por los cuales  $a_i(x)=1$  está contenido en el conjunto  $B$  de los  $x$  para los cuales  $a_j(x)=1$ . Sin embargo, esta inclusión estricta se observa excepcionalmente en la realidad. En el caso de un cuestionario de conocimientos se podrían observar a algunos raros alumnos que vencen el ítem  $a_i$  y no consiguen vencer el  $a_j$ , sin que se contradiga la tendencia a tener  $a_j$  cuando se tiene  $a_i$ . La formalización matemática de esta situación se expresa a través de la cuasi-implicación  $a_i \rightarrow a_j$  (Gras, 1999).

La cuasi-implicación  $a_i \rightarrow a_j$  significa que "cuando  $a_i$  está presente entonces generalmente  $a_j$  está también presente."

La medida de la relación implicativa se evalúa a partir de la inverosimilitud de la aparición, en los datos, del número de casos que la invalidan, es decir, cuantifica "el asombro" del experto ante el número inverosíblemente pequeño de contraejemplos, en comparación con los que se podrían observar en caso de una ausencia de relación (independencia).

En la jerarquía dirigida, el árbol que se forma no está necesariamente conectado, lo cual significa que esta jerarquía sólo contiene clases importantes de acuerdo a la medida de calidad adoptada.

Los **nodos** internos del árbol dirigido, los cuales representan la jerarquía dirigida, describen relaciones implicativas complejas, llamadas **R-reglas**, entre los atributos de **A**.

- Cuando  $R \rightarrow a_i$ ,  $a_i$  puede ser interpretada como **una consecuencia de R**.
- La R-regla  $a_i \rightarrow R$ , significa que una R-regla **R puede ser deducida de la observación de  $a_i$** .
- La R-regla  $R' \rightarrow R''$ , significa que la **propiedad  $R''$  es el corolario de una propiedad previamente definida  $R'$** .

El objetivo de la Intensidad Implicativa es expresar la inverosimilitud ("asombro") del número de contraejemplos que invalidan la regla  $a_i \rightarrow a_j$ , para lo

cual se compara el número de contraejemplos observados con el número de contraejemplos esperado bajo la hipótesis de ausencia de relación.

Supongamos que seleccionamos aleatoriamente, de  $I$ , dos subconjuntos  $U$  y  $V$  con  $n_{a_i}$  y  $n_{a_j}$  elementos respectivamente. Sea  $X_{a_i \wedge \bar{a}_j} = \text{Card}(U \cap \bar{V})$  la variable aleatoria asociada con el número de contraejemplos en este modelo aleatorio.

**Definición 3:** La regla  $a_i \rightarrow a_j$  se dice **admisibile** al nivel de confianza  $1 - \alpha$  si:

$$P[X_{a_i \wedge \bar{a}_j} \leq n_{a_i \wedge \bar{a}_j}] \leq \alpha \quad (2)$$

donde  $n_{a_i \wedge \bar{a}_j} = \text{Card}(A_i \cap \bar{A}_j)$  es el número de contraejemplos a la regla  $a_i \rightarrow a_j$  observados en la muestra.

Esto significa que el número de contraejemplos observados es pequeño. La distribución de  $X_{a_i \wedge \bar{a}_j}$  depende del patrón de selección aleatorio asumido para seleccionar los conjuntos, pudiendo ser Binomial, Hipergeométrica o Poisson, como se detalla a continuación. Para más información ver Bodín (1997).

Con el objetivo de simplificar la notación en el desarrollo siguiente, nos referiremos a las variables (características)  $a_i$  y  $a_j$  como  $a$  y  $b$ , y a los conjuntos  $A_i = \{x \in I \mid a_i(x) = 1\}$  y  $A_j = \{x \in I \mid a_j(x) = 1\}$  como **A** y **B** respectivamente.

*1<sup>ro</sup>. Modelo de la hipótesis de ausencia de relación*

**Forma de extraer los individuos:** Se observan  $n_a$  y  $n_b$  individuos, bajo el supuesto de que en  $I$  existen otros individuos que poseen las característica  $a$  y  $b$ .

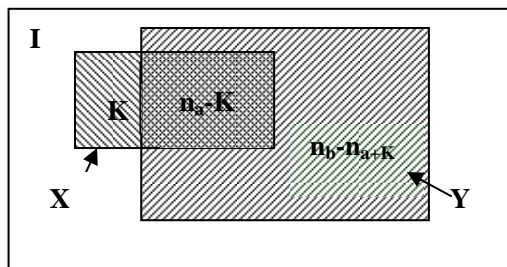
**Modelo Probabilístico:** De  $I$  se extraen de forma independiente, dos conjuntos  $X$  e  $Y$  de tamaños  $n_a$  y  $n_b$  respectivamente. Sean:

$$\Omega = \{(X, Y) \mid X \subset I, Y \subset I, \text{Card}(X) = n_a, \text{Card}(Y) = n_b\}, \quad K_0 = \text{Card}(A \cap \bar{B}) \quad \text{y}$$

$K = \text{Card}(X \cap \bar{Y})$  la variable aleatoria correspondiente.

Según el modelo probabilístico asumido, tenemos  $C_{n_a}^n C_{n_b}^n$  formas diferentes de extraer estos pares de conjuntos  $(X, Y) \in \Omega$ , y de ellos solo  $C_{n_b}^n C_{n_a - K_0}^{n_b} C_{K_0}^{n - n_b}$  son favorables a la ocurrencia del evento  $K = K_0$ , por lo tanto:

$$P(K = K_0) = \frac{C_{n_b}^n C_{n_a - K_0}^{n_b} C_{K_0}^{n - n_b}}{C_{n_a}^n C_{n_b}^n} = \frac{C_{n_b}^{n_b} C_{n_a - K_0}^{n - n_b}}{C_{n_a}^n},$$



lo cual muestra que bajo la hipótesis de ausencia de relación,  $K$  sigue la ley hipergeométrica de parámetros  $n, n_a$  y  $n - n_b$ ,  $K \sim H(n, n_a, n - n_b)$ .

Los modelos siguientes surgen bajo el supuesto de que el conjunto  $I$  de individuos haya sido seleccionado de un conjunto mayor de individuos, que denotaremos por  $\zeta$ .

2<sup>do</sup>. Modelo de la hipótesis de independencia entre  $a$  y  $b$ .

**Caso 1:** El cardinal de  $\zeta$  es un valor finito  $N$ .

**Forma de extraer los individuos:** Se extraen  $n$  individuos de una población  $\zeta$  de tamaño  $N$ , donde  $N$  y  $n$  se consideran conocidos, mientras que  $n_a, n_b$  y  $n_{a \wedge b}$  son valores observados.

**Modelo Probabilístico:** Del conjunto  $\zeta$  de tamaño  $N$ , se extrae una muestra  $I$  de tamaño  $n$ . En esta muestra  $I$ , se observan los individuos que poseen las características  $a$  ( $n_a$ ) y  $b$  ( $n_b$ ) y los que poseen  $a$  y no  $b$  ( $n_{a \wedge \bar{b}}$ ).

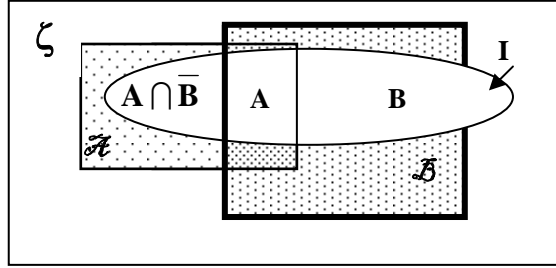
Existen  $C_n^N$  formas posibles de extraer de  $\zeta$  una muestra  $I$  de tamaño  $n$ , y de ellos los que verifican que  $K = K_0$  son:  $C_{K_0}^{N_{a \wedge \bar{b}}} C_{n - K_0}^{N - N_{a \wedge \bar{b}}}$ , donde  $N_{a \wedge \bar{b}} = \{x \in \zeta \mid a(x) = 1 \wedge b(x) = 0\}$

Por lo tanto,  

$$P(K = K_0) = \frac{C_{K_0}^{N_{a\wedge\bar{b}}} C_{n-K_0}^{N-N_{a\wedge\bar{b}}}}{C_n^N}$$
 es

decir, bajo este modelo  $K$  sigue la ley hipergeométrica de parámetros  $N$ ,  $n$  y  $N_{a\wedge\bar{b}}$ ,

$K \sim H(N, n, N_{a\wedge\bar{b}})$ , donde, bajo la hipótesis de independencia se tiene que  $\frac{N_{a\wedge\bar{b}}}{N} = \frac{N_a}{N} * \frac{N_{\bar{b}}}{N}$ .



**Caso 2:** El cardinal de  $\zeta$  es un valor infinito.

En este caso se pueden extraer infinitas muestras de tamaño  $n$  de la población  $\zeta$ , y en cada una de estas extracciones, la probabilidad de obtener  $K = K_0$  es la misma. Para una muestra de tamaño  $n$  esta probabilidad se estimaría a través de

$p = \frac{n_{a\wedge\bar{b}}}{n}$  la cual, bajo la hipótesis de independencia, se puede escribir como

$$p = \frac{n_a}{n} \frac{n_{\bar{b}}}{n} = \hat{p}(a)\hat{p}(\bar{b}).$$

Por lo tanto,

$P(K = K_0) = C_{K_0}^n p^{K_0} (1-p)^{n-K_0}$  y  $K$  sigue la ley binomial de parámetros  $n$  y  $p$ ,  $K \sim B(n, p)$  (3)

**Caso 3:** El cardinal de  $\zeta$  es un valor infinito y el cardinal de  $I$  es indeterminado.

En este caso se trata de extraer de la población  $\zeta$  de tamaño infinito, una muestra  $I$ , cuyo tamaño es aleatorio.

Denotemos por  $M$  el tamaño de la muestra  $I$ , donde  $M$  es una magnitud aleatoria, entonces:

$$P(K = K_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(M = n) * P(K = K_0 | M = n),$$

para que  $K = K_0$  debe cumplirse que  $n \geq K_0$ , por lo que la expresión anterior puede reescribirse como:

$$P(K = K_0) = \sum_{n \geq K_0}^{\infty} P(M = n) * P(K = K_0 | M = n). \quad (4)$$

Supongamos que la variable aleatoria  $M$  sigue una distribución Poisson de parámetro  $\lambda = n$ , valor observado de  $M$ .

$$P(K = K_0 | M = n) = C_{K_0}^n p^{K_0} (1-p)^{n-K_0}, \text{ con } p = \frac{n_a}{n} \frac{n_b^-}{n} \quad (5)$$

Sustituyendo (3) en (2) y asumiendo que  $M \sim P(n)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} P(K = K_0) &= \sum_{n \geq K_0}^{\infty} \frac{e^{-n} n^n}{n!} * C_{K_0}^n p^{K_0} (1-p)^{n-K_0} \\ &= \frac{e^{-np} (np)^{K_0}}{K_0!} \sum_{n \geq K_0}^{\infty} \frac{e^{-n(1-p)} [n(1-p)]^{n-K_0}}{(n-K_0)!}, \text{ donde el segundo factor} \end{aligned}$$

vale 1, por lo que:

$$P(K = K_0) = \frac{e^{-np} (np)^{K_0}}{K_0!}, \text{ es decir, bajo este caso } K \text{ sigue la ley de}$$

Poisson de media  $np$ ,  $K \sim \text{Poisson}(np)$ , siendo  $np = \frac{n_a n_b^-}{n}$  bajo la hipótesis de independencia.

Bajo los modelos considerados se demuestra que:

$$E(K) = \frac{n_a n_b^-}{n}. \quad (6)$$

**Definición 4:** La **Intensidad Implicativa** de la regla  $a_i \rightarrow a_j$  se define como:

$$\varphi(a_i, a_j) = 1 - P[K \leq n_{a_i \wedge a_j}^-] \text{ si } n_{a_j} \neq n,$$

en caso contrario,  $\varphi(a_i, a_j) = 0$ .

La **regla es retenida para un  $\alpha$  dado** si:  $\varphi(a_i, a_j) \geq 1 - \alpha$ , lo cual es equivalente a decir que la regla es admisible, según la definición 3 dada anteriormente, con confianza  $1 - \alpha$ .

**Definición 5:** El Índice de Implicación de la regla  $a_i \rightarrow a_j$  se define como:

$$q(a_i, \bar{a}_j) = \frac{n_{a_i \wedge \bar{a}_j} - \frac{n_{a_i} n_{\bar{a}_j}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a_i} n_{\bar{a}_j}}{n}}} \quad (7)$$

Se demuestra que:  $\rho(a_i, a_j) = -q(a_i, \bar{a}_j) \sqrt{\frac{n}{n_{a_i} n_{a_j}}}$

Continuaremos nuestra ejemplificación con los datos de Pitarch (2002). Asumiremos que la variable aleatoria  $K = \text{Card}(X \cap \bar{Y})$  sigue una distribución Binomial de parámetros  $n$  y  $p = \frac{n_a}{n}$  (ver (3)) y trabajaremos con las variables HIP, OPE, FLA, HEA, REG, RAP, PUN. En las tablas 4 y 5 se muestran, respectivamente, la sub-tabla con los datos para las variables seleccionadas para la ejemplificación, y algunas de las implicaciones que se pueden formar, así como el cardinal, el valor de  $p$  y el número de contraejemplos de la regla  $a_i \rightarrow a_j$ .

Aplicando la definición 4 a estos datos, y teniendo en cuenta que bajo el modelo Binomial  $P(K = K_0) = \binom{20}{K_0} p^{K_0} (1-p)^{20-K_0}$  obtendremos que:

$$\begin{aligned} \phi(\text{HIP}, \text{OPE}) &= 1 - P[K \leq 9] = 0,282553^1 \\ \phi(\text{HIP}, \text{PUN}) &= 1 - P[K \leq 1] = 0,974314 \\ \phi(\text{FLA}, \text{RAP}) &= 1 - P[K \leq 1] = 0,9308245 \\ \phi(\text{OPE}, \text{RAP}) &= 1 - P[K \leq 0] = 0,878423 \\ \phi(\text{REG}, \text{HIP}) &= 1 - P[K \leq 2] = 0,860566 \\ \phi(\text{REG}, \text{PUN}) &= 1 - P[K \leq 2] = 0,860566 \\ \phi(\text{HEA}, \text{PUN}) &= 1 - P[K \leq 2] = 0,860566 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> En el anexo 2 se ejemplifican estos cálculos para los dos primeros casos.



Conceptos fundamentales del ASI y su soporte computacional CHIC

De acuerdo a la definición 3 y los valores de intensidad implicativa obtenidos, podemos decir que la regla  $HIP \rightarrow PUN$  es admisible al 95% de confiabilidad,  $FLA \rightarrow RAP$  lo es pero al 90%, y el resto, con excepción de la regla  $HIP \rightarrow OPE$  que no es admisible, lo son al 85% de confiabilidad.

	HIP	OPE	FLA	HEA	REG	RAP	PUN
al1	1	1	0	0	0	1	1
al2	1	0	0	1	1	0	1
al3	1	0	0	0	0	1	1
al4	0	1	1	1	1	1	0
al5	1	0	0	1	1	0	1
al6	0	0	1	0	0	1	0
al7	1	0	1	1	1	0	1
al8	0	1	1	0	0	1	0
al9	1	0	1	0	1	1	1
al10	0	0	0	0	0	0	0
al11	0	0	1	1	1	1	1
al12	1	0	0	1	1	0	1
al13	1	0	0	1	0	0	1
al14	0	0	1	0	0	1	0
al15	0	1	1	0	0	1	0
al16	1	0	0	1	1	0	1
al17	1	0	1	0	1	1	0
al18	0	0	0	0	0	0	0
al19	1	1	1	1	1	1	1
al20	0	0	0	1	0	1	0

Tab. 4: Subtabla de datos

$a_i$	$a_j$	$n_{a_i}$	$n_{-a_j}$	$p$	$Card(A_i \cap \bar{A}_j)$
HIP	OPE	11	15	0,41	9
HIP	PUN	11	9	0,25	1
FLA	RAP	10	8	0,20	1
OPE	RAP	5	8	0,10	0
REG	HIP	10	9	0,23	2
REG	PUN	10	9	0,23	2
HEA	PUN	10	9	0,23	2

Tab. 5: Valores de cardinales y probabilidad de la ley Binomial

CHIC muestra los índices de implicación entre variables, en por ciento, con lo cual los valores que muestra para estos casos son: 28, 97, 93, 88 y 86 para las tres últimas reglas. En la figura 3 se muestra el grafo implicativo que se forma a partir de los valores de intensidad implicativa obtenidos entre las variables analizadas.

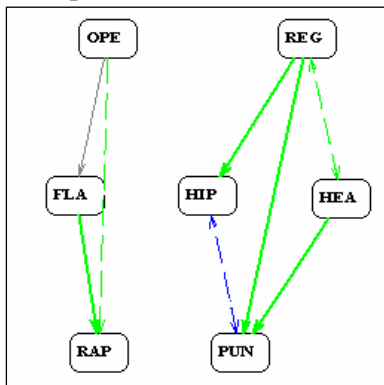


Fig. 3: *Grafo Implicativo*

Es conocido (Bodin, 1997) que para muestras grandes, la intensidad de implicación toma valores poco discriminantes, por lo que se definió un nuevo índice, de implicación-inclusión (también llamado versión entrópica de la implicación, en contraposición a la versión clásica que hemos presentado). No entramos en los detalles de la versión entrópica pues el objetivo de lo que se mide es el mismo.

#### 4 Análisis cohesivo

La cohesión surge como una medida de la calidad implicativa de la R-regla. El objetivo es descubrir R-reglas  $R' \rightarrow R''$  con una fuerte relación implicativa entre las componente de  $R'$  y las de  $R''$ . Por ejemplo, es natural formar la regla  $(a_1 \rightarrow a_2) \rightarrow (a_3 \rightarrow a_4)$  si las relaciones implicativas  $a_1 \rightarrow a_3$ ,  $a_1 \rightarrow a_4$ ,  $a_2 \rightarrow a_3$  y  $a_2 \rightarrow a_4$  son lo suficientemente significativas.

Intuitivamente esto significa que se debe contrastar con el desorden de una experiencia aleatoria, y se plantea que la **Entropía** es bastante conveniente para medir ese desorden.

Se parte de considerar una regla  $a_i \rightarrow a_j$  de orden 1 y definir la variable aleatoria  $Y$  como indicadora del evento:  $X_{a_i \wedge a_j} \geq n_{a_i \wedge a_j}$ , luego:

$$\Pr[Y = 1] = \Pr[X_{a_i \wedge a_j} \geq n_{a_i \wedge a_j}] = \varphi(a_i, a_j) \quad \text{y}$$

$$\Pr[Y = 0] = 1 - \varphi(a_i, a_j),$$

La **Entropía** de este experimento es:

$$E = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p), \quad \text{con } p = \varphi(a_i, a_j), \quad (8)$$

que la podemos interpretar como la cantidad media de información que nos reporta una fuente binaria, con probabilidad de éxito igual a la intensidad implicativa de la regla  $a_i \rightarrow a_j$ , o el valor medio de la incertidumbre de un observador antes de conocer la salida de una fuente binaria en la que puede o no ocurrir el evento  $a_i \rightarrow a_j$ .

Se define el grado de una R-regla como la cantidad de variables involucradas en la regla menos 1, por ejemplo, la R-regla  $R : a_i \rightarrow a_j$  es de orden 1, la R-regla  $R' : R \rightarrow a_k$  es de orden 2, y así sucesivamente.

**Definición 6:** La *Cohesión de una R-regla*  $a_i \rightarrow a_j$  de grado 1 es:

$$\text{Coh}(a_i, a_j) = \begin{cases} \sqrt{1 - E^2} & \text{si } p \geq 0.5 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (9)$$

Si  $\varphi(a_i, a_j) = 0.5$ , la regla  $a_i \rightarrow a_j$  es neutral en el sentido de que da lugar al número de contraejemplos esperado bajo independencia, es decir,

$$n_{a_i \wedge a_j} = E[X_{a_i \wedge a_j}] = \frac{n_{a_i} n_{a_j}}{n}.$$

**Definición 7:** La *Cohesión de la clase* de variables  $R = \{a_1, \dots, a_k\}$  es la media geométrica de las cohesiones de los pares de variables que la conforman,

$$\text{Coh}(R) = \left\{ \prod_{\substack{i,j \\ j>i}} C(a_i, a_j) \right\}^{\frac{2}{k(k-1)}} \quad (10)$$

La implicación estadística de una clase de variables sobre otra, se modeliza a través del siguiente índice:

**Definición 8:** La *intensidad de implicación* de una clase A sobre una clase B es:

$$\Psi(A, B) = \left\{ \sup_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,s}} \varphi(a_i, a_j) \right\}^{r \times s} [\text{Coh}(A)\text{Coh}(B)]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

A continuación se muestran los índices de cohesión al nivel cero (cohesiones de reglas de grado 1), para lo cual se aplicó la fórmula (9).

	HIP	OPE	FLA	HEA	REG	RAP	PUN
HIP	0,000000	0,000000* <sup>1</sup>	0,000000	0,428051	0,777044	0,000000	<b>0,985050</b> * <sup>2</sup>
OPE	0,000000	0,000000	0,547125	0,000000	0,000000	0,845563	0,000000
FLA	0,000000	0,407437	0,000000	0,000000	0,203990	0,931852	0,000000
HEA	0,449992	0,000000	0,000000	0,000000	0,897673	0,000000	0,812648
REG	0,812648	0,000000	0,203990	0,897673	0,000000	0,000000	0,812648
RAP	0,000000	0,580245	0,871122	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
PUN	<b>0,985050</b>	0,000000	0,000000	0,777044	0,777044	0,000000	0,000000

Tab. 6: *Índices de cohesión al nivel cero de la jerarquía*

\*<sup>1</sup> Para el par de variables (HIP, OPE), se tiene del análisis de la Intensidad Implicativa entre variables, que  $\varphi(\text{HIP}, \text{OPE}) = 0,282553$ , lo cual es menor que 0,5, por lo que, según (9)  $\text{Coh}(\text{HIP}, \text{OPE}) = 0$ .

\*<sup>2</sup> Para el par de variables (HIP, PUN), se tiene del análisis de la Intensidad Implicativa entre variables, que  $\varphi(\text{HIP}, \text{PUN}) = 0,974314$ , luego aplicando la fórmula (8) obtenemos un valor de entropía de  $E = 0,17227055$ , por lo que,  $\text{Coh}(\text{HIP}, \text{PUN}) = 0,985050$  según (9).

Observe que la matriz de las cohesiones, no es necesariamente una matriz simétrica, por ejemplo  $\text{Coh}(\text{HIP}, \text{PUN}) = \text{Coh}(\text{PUN}, \text{HIP})$ , pero,

$$\text{Coh}(\text{HIP}, \text{HEA}) = 0,428052 \neq 0,449992 = \text{Coh}(\text{HEA}, \text{HIP}).$$

Una vez obtenidas las cohesiones al nivel cero, comienza el proceso de aglomeración, el cual se fundamenta en que, en cada nuevo nivel o etapa del proceso, se unen variables aisladas, o clases ya formadas con otras clases o variables aisladas cuyas cohesiones sean máximas. A continuación se ejemplifica este proceso para el nivel 1 de la jerarquía ascendente, en el cual, en aras de simplificarla, se han considerado únicamente las variables HIP, OPE, FLA, HEA, REG, RAP y PUN.

De la tabla 6 se observa que la cohesión máxima se da entre las variables “HIP y PUN” y “PUN y HIP” con un índice de cohesión, en ambos casos, igual a **0,985050**, por lo que en el nivel 1 de la jerarquía se han unido las variables (HIP, PUN), (PUN, HIP) y para continuar debemos determinar las intensidades de implicación de estas clases con las variables aisladas, los cuales se muestran en la tabla 7.

Nivel 1	(HIP,PUN)	OPE	FLA	HEA	REG	RAP
(HIP,PUN)	0,000000	0,079237 <sup>*3</sup>	0,024717	0,703684	0,703684	0,016809
OPE	0,032537 <sup>*4</sup>	0,000000	0,547125	0,000000	0,000000	0,845563
FLA	0,020190	0,407437	0,000000	0,000000	0,203990	<b>0,931852</b>
HEA	0,735017	0,000000	0,000000	0,000000	0,897673	0,000000
REG	0,735017	0,000000	0,203990	0,897673	0,000000	0,000000
RAP	0,020998	0,580245	0,871122	0,000000	0,000000	0,000000

Tab. 7: Intensidades de implicación entre clases de variables al nivel 1 de la jerarquía

\*<sup>3</sup> Para el par ((HIP, PUN),OPE) formado por una regla  $R : HIP \rightarrow PUN$  y una variable aislada (OPE), se aplica primero la fórmula (10) para determinar la cohesión de una clase de variables, en este caso de  $R = \{HIP, PUN\}$ , y luego la (11) para determinar el índice. Tener en cuenta que la cohesión de una variable aislada es 1.

$A = \{HIP, PUN\}$	$\varphi(a, b)$	OPE	Cohe(A)	Cohe(B)	$\Psi(A, B)$
$B = \{OPE\}$	HIP	0,282553	0,985050	1	<b>0,079237</b>
	PUN	0,282553			

\*<sup>4</sup> Para el par (OPE,(HIP,PUN)) formado por una variable aislada (OPE) y por la

regla  $R : HIP \rightarrow PUN$ , se procede de forma análoga, pero se debe tener presente que la matriz de los valores de intensidad implicativa entre variables, no es simétrica.

$A = \{OPE\}$	$\varphi(a, b)$	<b>HIP</b>	<b>PUN</b>	<b>Cohe(A)</b>	<b>Cohe(B)</b>	$\Psi(A, B)$
$B = \{HIP, PUN\}$	<b>OPE</b>	0,181060	0,181060	1	0,9850507	<b>0,032537</b>

Partiendo de los resultados mostrados en la tabla 7 se concluye que al nivel 2 de la jerarquía se unen las variables FLA y RAP con un índice de intensidad implicativa máximo e igual a **0,931852**. El proceso se continúa hasta que no existan más clases que puedan ser unidas.

El árbol jerárquico que se obtiene, para este conjunto de variables, se muestra en la figura 4.

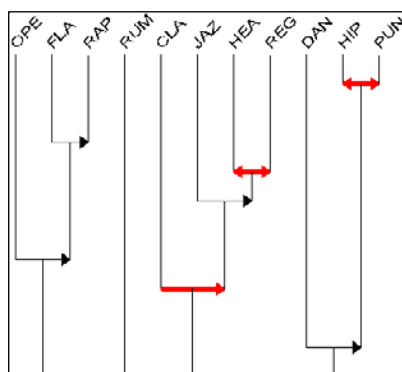


Fig. 4: *Árbol jerárquico cohesivo*

### Nodos Significativos

La determinación de los índices de intensidad implicativa entre clases de variables nos permite construir un árbol jerárquico, al igual que se hizo en la sección 2. Los nodos significativos de este árbol jerárquico son los nodos correspondientes a una clasificación compatible lo mejor posible con los valores y la calidad de los valores de implicación y de cohesión.

El procedimiento empleado para la determinación de los niveles y nodos significativos es el mismo que explicamos en el apartado 2, pero teniendo en cuenta el índice de cohesión. Para la ejemplificación del procedimiento, se empleará el conjunto de variables  $A^* = \{JAZ, HEA, CLA, REG\}$ .

Para el conjunto  $A^*$  y aplicando el procedimiento descrito en el punto 4, se obtiene los índices de cohesión, a partir de los cuales el preorden inicial  $\Omega$  se puede visualizar de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \text{Coh}(\text{JAZ}, \text{CLA}) \\ \text{Coh}(\text{HEA}, \text{CLA}) \\ \text{Coh}(\text{REG}, \text{CLA}) \end{array} \right] < \left[ \begin{array}{l} \text{Coh}(\text{CLA}, \text{HEA}) \\ \text{Coh}(\text{CLA}, \text{JAZ}) \\ \text{Coh}(\text{CLA}, \text{REG}) \end{array} \right] < \left[ \begin{array}{l} \text{Coh}(\text{JAZ}, \text{REG}) \\ \text{Coh}(\text{HEA}, \text{REG}) \\ \text{Coh}(\text{REG}, \text{HEA}) \\ \text{Coh}(\text{REG}, \text{JAZ}) \\ \text{Coh}(\text{HEA}, \text{JAZ}) \\ \text{Coh}(\text{JAZ}, \text{HEA}) \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

luego:

$$G_{\text{Coh}}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} ((\text{JAZ}, \text{CLA}); (\text{CLA}, \text{HEA})); ((\text{JAZ}, \text{CLA}); (\text{CLA}, \text{JAZ})); \dots; \\ ((\text{JAZ}, \text{CLA}); (\text{JAZ}, \text{HEA})); ((\text{HEA}, \text{CLA}); (\text{CLA}, \text{HEA})); \dots; \\ ((\text{HEA}, \text{CLA}); (\text{JAZ}, \text{HEA})); \dots; ((\text{CLA}, \text{REG}); (\text{JAZ}, \text{HEA})) \end{array} \right\},$$

$$\text{Card}(G_{\text{Coh}}(\Omega)) = \frac{m^*(m-1)}{2} - \sum_{i=1}^d \frac{\text{Card}(P_i)^*(\text{Card}(P_i)-1)}{2} = 45,$$

donde,  $t = \text{Card}(A^*) = 4$ ,  $m = \text{Card}(\Omega) = 2 * C_2^4 = 12$ .

**Nivel 1 de la jerarquía:** se reúnen JAZ y HEA en ambas direcciones (figura 6),

$$R\Pi_1 = \{(\text{JAZ}, \text{HEA}); (\text{HEA}, \text{JAZ})\}$$

$$S\Pi_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Coh}(\text{JAZ}, \text{CLA}); \text{Coh}(\text{HEA}, \text{CLA}); \text{Coh}(\text{REG}, \text{CLA}); \text{Coh}(\text{CLA}, \text{HEA}); \text{Coh}(\text{CLA}, \text{JAZ}) \\ \text{Coh}(\text{CLA}, \text{REG}); \text{Coh}(\text{JAZ}, \text{REG}); \text{Coh}(\text{HEA}, \text{REG}); \text{Coh}(\text{REG}, \text{HEA}); \text{Coh}(\text{REG}, \text{JAZ}) \end{array} \right\}$$

$$\text{Card}(S\Pi_1) = 10, \text{Card}(R\Pi_1) = 2, I_1 = \{12, 11\}, f_1^1 = 4, f_2^1 = 4, \text{ y}$$

$$\text{Card}[G(\Omega) \cap [S\Pi_1 \times R\Pi_1]] = 12$$

**Nivel 2 de la jerarquía:** se agrega la variable REG al par anterior

$$R\Pi_2 = \{(\text{JAZ}, \text{HEA}); (\text{HEA}, \text{JAZ}); (\text{REG}, \text{JAZ}); (\text{REG}, \text{HEA})\}$$

$$S\Pi_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Coh}(\text{JAZ}, \text{CLA}); \text{Coh}(\text{HEA}, \text{CLA}); \text{Coh}(\text{REG}, \text{CLA}); \text{Coh}(\text{CLA}, \text{HEA}); \\ \text{Coh}(\text{CLA}, \text{JAZ}); \text{Coh}(\text{CLA}, \text{REG}); \text{Coh}(\text{JAZ}, \text{REG}); \text{Coh}(\text{HEA}, \text{REG}) \end{array} \right\}$$

$$\text{Card}(S\Pi_2) = 8, \text{Card}(R\Pi_2) = 4, I_2 = \{12, 11, 10, 9\}, f_1^2 = 2, f_2^2 = 2, f_3^2 = 2,$$

$$f_4^2 = 2 \text{ y } \text{Card}[G_{\text{Coh}}(\Omega) \cap [S\Pi_2 \times R\Pi_2]] = 24$$

**Nivel 3 de la jerarquía:** se agrega la variable CLA a la clase anterior

$$R\Pi_3 = \left\{ \begin{array}{l} (JAZ, HEA); (HEA, JAZ); (REG, JAZ); (REG, HEA); Coh(CLA, REG) \\ Coh(CLA, JAZ); Coh(CLA, HEA) \end{array} \right\}$$

$$S\Pi_3 = \left\{ \begin{array}{l} Coh(JAZ, CLA); Coh(HEA, CLA); Coh(REG, CLA); Coh(JAZ, REG); \\ Coh(HEA, REG) \end{array} \right\}$$

$$Card(S\Pi_3) = 5, Card(R\Pi_3) = 7, I_3 = \{12, 11, 10, 9, 6, 5, 4\}, f_1^3 = 2, f_2^3 = 2, f_3^3 = 2, f_4^3 = 2, f_5^3 = 0, f_6^3 = 0, f_7^3 = 0 \text{ y } Card[G(\Omega) \cap [S\Pi_3 \times R\Pi_3]] = 21$$

En la tabla 8 se resumen los cardinales de los conjuntos formados y se muestran los valores obtenidos para el índice centrado y la función  $v(\Omega, k)$ .

Nivel	$s_k$	$r_k$	$Card[G_{Coh}(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]]$	$S(\Omega, k)$	$v(\Omega, k)$
1	10	2	12	0,429669	0,429669
2	8	4	24	1,358732	0,929064
3	5	7	21	0,568399	-0,790334

Tab. 8: Valores de índice centrado y de la función  $v(\Omega, k)$

Según la definición 2 habría un solo nodo significativo, el 2, ya que se corresponde con un máximo local de  $v(\Omega, k)$  (figura 5). En la figura 6 se muestra el árbol cohesitivo que se obtiene a partir de estos valores.

Debido a que, por limitaciones de espacio, se ha trabajado con una submatriz de la matriz de datos, el árbol cohesitivo que se muestra en la figura 6, difiere del mostrado en la figura 4, para el cual se trabajó con siete variables.

## 5 Tipicalidad y contribución

El cálculo de la tipicalidad y/o contribución indica cuál es el individuo o variable más típica o más contributiva, y también qué otras categorías pueden conducir a los mismos valores de tipicalidad y/o contribución.

La noción de tipicalidad se define por el hecho de que ciertos individuos son “típicos” del comportamiento de la población, es decir con una intensidad de implicación similar a la de la regla. La noción de contribución se define para determinar los individuos que contribuyen bien a la creación de la regla. Estos individuos son más responsables que otros de la formación de la regla.



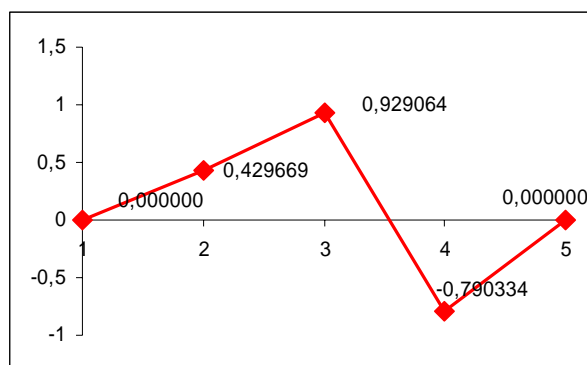


Fig. 5: Gráfico de los valores de  $v(\Omega, k)$

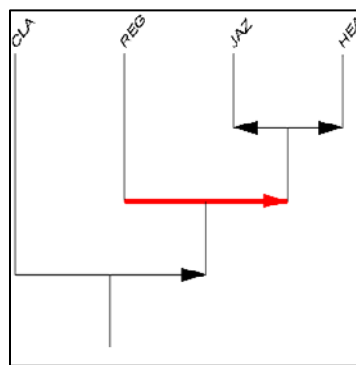


Fig. 6: Árbol cohesitivo

El procedimiento para la determinación de la tipicidad y contribución de los individuos a las clases que se forman en el árbol de similitud y en el cohesitivo es el mismo, las fórmulas se diferencian en el hecho de que en el primero se utiliza el índice de similitud y en el segundo el índice de intensidad implicativa entre variables.

**Definición 9:** Se define como **sujeto típico**, aquél que verifica todas las implicaciones que poseen mayor intensidad de implicación en la formación de las clases.

**Definición 10:** El par  $(a, b)$  tal que:

$$\varphi(a, b) \geq \varphi(i, j) \quad \forall i \in A \text{ y } \forall j \in B,$$

se llama **par genérico de la clase C**. El número  $\varphi(a, b)$  se llama **Implicación Genérica de C**.

Si la clase C tiene g subclases (con C incluida) habrá g implicaciones genéricas:  $(\varphi_1, \dots, \varphi_g)$ . Por consideraciones lógicas y semánticas se define:

$$\begin{aligned} \varphi_x(a, b) &= 1 && \text{si } [a(x)=1 \text{ ó } a(x)=0] \text{ y } b(x)=1, \\ \varphi_x(a, b) &= 0 && \text{si } a(x)=1 \text{ y } b(x)=0, \\ \varphi_x(a, b) &= p && \text{si } a(x)=0 \text{ y } b(x)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Se define la distancia de un individuo  $x$  a la clase  $C$ :

$$d^2(x, C) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g \frac{[\varphi_i - \varphi_{x,i}]^2}{1 - \varphi_i}, \quad (13)$$

donde  $i$  denota una regla de  $C$ .

La **Tipicalidad** del individuo  $x$  se define como:

$$\gamma(x, C) = 1 - \frac{d(x, C)}{\text{Max}_{y \in I} d(y, C)} \quad (14)$$

- $\gamma(x, C) = 1$  si  $x$  es típico optimal.

Si  $x$  es un sujeto típico, por definición, verifica todas las implicaciones que poseen mayor intensidad de implicación en la formación de las clases, esto es,

$$\varphi_{x,i} = \varphi_i, \text{ con } i = 1, \dots, g, \text{ por lo tanto, } d(x, C) = 0 \text{ y } \gamma(x, C) = 1.$$

- $\gamma(x, C) = 0$  si  $x$  es el que está en más desacuerdo con  $C$ .

Si esto ocurre, significa que  $d(x, C) = \text{Max}_{y \in I} d(y, C)$  y por lo tanto,  $\gamma(x, C) = 0$ .

La **Contribución** de un individuo  $x$  a la clase  $C$  se define como:

$$\gamma(x, C) = 1 - \tilde{d}(x, C) \quad (15)$$

$$\text{donde } \tilde{d}^2(x, C) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g [1 - \varphi_{x,i}]^2, \quad (16)$$

es la distancia del individuo  $x$  a la clase  $C$ . Si  $x$  es optimo  $\gamma(x, C) = 1$ , en cuyo caso:  $\varphi_{x,i} = 1 \forall$  regla  $i$ .

A modo de ejemplificación, se mostrará el cálculo de la tipicalidad y contribución de los 20 individuos que participaron en la investigación de Pitarch (2002), pero sólo en la construcción de la clase (HIP,PUN) del análisis clasificatorio y (JAZ,(HEA;REG)) del análisis implicativo.

### Tipicalidad y contribución de individuos en el Análisis clasificatorio

En la sección 2 obtuvimos que el índice de similaridad entre las variables HIP y PUN, que forman la clase  $C$  es:  $s(\text{HIP}, \text{PUN}) = 0,9458524$ . En la tabla 9 se muestran los valores de las variables para cada uno de los sujetos (segunda y

tercera columnas), un índice de similaridad entre las variables, según consideraciones lógicas y semánticas ( $\varphi_x(\text{HIP}, \text{PUN})$ ), calculado a partir de la fórmula (12) tomando  $p=0,5$  (cuarta columna), y las distancias, tipicalidades y contribuciones de los individuos calculadas a partir de las fórmulas (13-16) respectivamente:

x	HIP	PUN	$\varphi_x(\text{HIP}, \text{PUN})$	Tipicalidad		Contribución	
				$d(x, C)$	$\gamma(x, C)$	$d(x, C)$	$\gamma(x, C)$
al1	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al2	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al3	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al4	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al5	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al6	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al7	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al8	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al9	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al10	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al11	0	1	1	0,232697	0,942752 <sup>2</sup>	0	1 <sup>2</sup>
al12	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al13	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al14	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al15	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al16	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al17	1	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al18	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0
al19	1	1	1	0,232697	0,942752	0	1
al20	0	0	0	4,064733	0,000000	1	0

Tab. 9: *Tipicalidad y contribución de los individuos a la formación de la clase (HIP, PUN) del análisis clasificadorio*

<sup>2</sup> Estos resultados difieren de los obtenidos al aplicar el sistema informático CHIC. Observar que la situación se presenta cuando  $a(x)=0$  y  $b(x)=1$ .

### **Tipicalidad y contribución de individuos en el Análisis implicativo**

Para determinar la tipicalidad y contribución de cada sujeto a la formación de las clases del árbol cohesitivo, se sigue el mismo procedimiento explicado para el árbol de similaridad, con la diferencia de que en la fórmula (13) se utiliza el índice de intensidad implicativa entre variables y no el índice de similaridad.

Siguiendo el procedimiento empleado descrito en la sección 4 se obtiene que el índice de intensidad implicativa entre las variables (HEA,REG) es 0,897673, siendo éste par el primer par genérico de a clase  $C=(JAZ,(HEA;REG))$ . El segundo par genérico podría estar formado por las variables (JAZ, HEA) o (JAZ, REG), ya que para ambos pares de variables se tiene un índice igual a 0.897673. Tomaremos para la ejemplificación, que el segundo par genérico es (JAZ, HEA).

En las tablas 10 y 11 se muestran los valores de las tres variables analizadas, para cada uno de los sujetos (segunda, tercera y cuarta columnas), el índice de intensidad implicativa entre las variables, según consideraciones lógicas y semánticas, calculado a partir de la fórmula (12) tomando  $p=0,5$  (quinta y sexta columnas), y las distancias, tipicalidades y contribuciones de los individuos calculadas a partir de las fórmulas (13-16) respectivamente.

## **6 Conclusiones**

El presente trabajo constituye una recopilación y síntesis de los conceptos fundamentales del Análisis Clasificadorio y del Análisis Estadístico Implicativo, tomando como índice de similaridad el índice de Lerman, mientras que en el Análisis Estadístico Implicativo y en el Cohesitivo se han usado los índices de implicación y de cohesión respectivamente, presentadas en los trabajos de R. Gras (se ha omitido la exposición y análisis del índice de implicación-inclusión, también llamado índice de implicación, versión entrópica).

Para realizar esta recopilación nos hemos basado fundamentalmente en los trabajos de R. Gras "*Les fondements de l'analyse statistique implicative*" y A. Bodín "*Analyse implicative : modèles sous-jacents à l'analyse implicative et outils complémentaires*".

Dado que las mayores aportaciones en el campo del Análisis Estadístico Implicativo se encuentran escritas en lengua francesa, con esta presentación de la teoría en lengua española se ha pretendido ser lo más exhaustivo posible, con el objetivo de propiciar la divulgación de la misma entre los investigadores hispanoparlantes.

La teoría presentada va acompañada de una ejemplificación de los cálculos que deben realizarse, para lo cual se emplearon los datos de una investigación realizada por Irene Pitarch en el 2002, con estudiantes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

x	JAZ	HEA	REG	$\varphi_x(\text{HEA,REG})$	$\varphi_x(\text{JAZ,HEA})$	Distancias y Tipicidad			
						(HEA,REG)	(JAZ,HEA)	d(X,C)	Tipicidad
al1	0	0	0	0,5	0,5	1,5455	1,5455	1,2432	0,4272
al2	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al3	0	0	0	0,5	0,5	1,5455	1,5455	1,2432	0,4272
al4	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al5	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al6	0	0	0	0,5	0,5	1,5455	1,5455	1,2432	0,4272
al7	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al8	1	0	0	0,5	0	1,5455	7,8749	2,1703	0,0000
al9	0	0	1	1	0,5	0,1023	1,5455	0,9077	0,5818
al10	0	0	0	0,5	0,5	1,5455	1,5455	1,2432	0,4272
al11	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al12	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al13	0	1	0	0	1	7,8749	0,1023	1,9971	0,0798
al14	0	0	0	0,5	0,5	1,5455	1,5455	1,2432	0,4272
al15	1	0	0	0,5	0	1,5455	7,8749	2,1703	0,0000
al16	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al17	0	0	1	1	0,5	0,1023	1,5455	0,9077	0,5818
al18	0	0	0	0,5	0,5	1,5455	1,5455	1,2432	0,4272
al19	1	1	1	1	1	0,1023	0,1023	0,3199	0,8526
al20	0	1	0	0	1	7,8749	0,1023	1,9971	0,0798

Tab. 10: *Tipicidad de los individuos a la formación de la clase (JAZ,(HEA,REG) del análisis implicativo*

Distancias y Contribución									
x	JAZ	HEA	REG	$\varphi_x(\text{HEA,REG})$	$\varphi_x(\text{JAZ,HEA})$	(HEA,REG)	(JAZ,HEA)	d(X,C)	Contribución
al1	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5000	0,5000
al2	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al3	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5000	0,5000
al4	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al5	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al6	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5000	0,5000
al7	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al8	1	0	0	0	0	0,25	1	0,7906	0,2094
al9	0	0	1	0	1	0	0,25	0,3536	0,6464
al10	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5000	0,5000
al11	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al12	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al13	0	1	0	1	0	1	0	0,7071	0,2929
al14	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5000	0,5000
al15	1	0	0	0	0	0,25	1	0,7906	0,2094
al16	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al17	0	0	1	0	1	0	0,25	0,3536	0,6464
al18	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5000	0,5000
al19	1	1	1	1	1	0	0	0,0000	1,0000
al20	0	1	0	1	0	1	0	0,7071	0,2929

Tab. 11: Contribución de los individuos a la formación de la clase (JAZ,(HEA,REG) del análisis implicativo

## Bibliografía

1. Bodin, A. (1997). *Analyse implicative : modèles sous-jacents à l'analyse implicative et outils complémentaires*. Prépublication IRMAR. No. 97-32, 1997.
2. Chandon, J. L.; Pinson, S. (1981). *Analyse Typologique. Théories et Applications*. Masson, París. ISBN : 2-225-63613-3.
3. Couturier R.; Gras R. (2005). *CHIC:Traitement de données avec l'analyse implicative*. , Extraction et Gestion des Connaissances, Volume II, RNTI, Cépadués, Paris, p.679-684, , ISBN 2.85428.683.9
4. Couturier, R. (2007). *CHIC : utilisation et fonctionnalités*. Laboratoire d'Informatique de l'université de Franche-Comté (LIFC), IUT de Belfort-Montbéliard, BP 527, 90016 Belfort, France. Actas ASI 4. España 2007.
5. Everitt (1974). *Cluster Analysis*. Heinemann Educational for Social Science Research Council. ISBN 0435822977
6. Gras, R. et al. (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
7. Gras R. (1999). *Les fondements de l'analyse statistique implicative*. Quaderni di Ricerca in Didattica, Vol. 9.
8. Gras, R.; Kuntz P.; Régnier J.C. (2004). *Significativité des niveaux d'une hiérarchie orientée*. Classification et fouille de données, RNTI-C-1, Cépadués-Editions, p 39-50, ISBN 2.85428.667.7.
9. Gras, R.; Kuntz, P. (2007). *L'Analyse Statistique Implicative (A.S.I.) en réponse à des problèmes fondateurs*. LINA– Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes. La Chantrerie BP 60601 44306 Nantes cedex. Actas ASI 4. España 2007.
10. Lerman, I.C. (1970). *Sur l'analyse des données préalable à une classification automatique (proposition d'une nouvelle mesure de similarité)*. Mathématiques et Sciences Humaines, 32, p. 5-15.
11. Orús, P.; Pitarch, I. (2000). *Utilisation didactique des tableaux des données et du logiciel CHIC à l'école élémentaire*V. Actes des Journées sur La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative. Caen, pp.85-98.
12. Pitarch, I. (2002). *Estudio sobre la viabilidad y el interés didáctico del tratamiento de la información en la ESO*. Trabajo de investigación del tercer ciclo presentado en la Universitat Jaume I y dirigido por Pilar Orús Báguena. (Ed: UJI, Castellón).

**Anexo 1:** Datos de la investigación realizada por Irene Pitarch en el 2002 con alumnos de la ESO.

	HIP	OPE	MAQ	JAZ	FLA	RUM	HEA	POP	CLA	DAN	REG	HAR	RAP	PUN	SKA
al1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
al2	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
al3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
al4	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
al5	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
al6	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
al7	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
al8	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
al9	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
al10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
al11	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
al12	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
al13	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
al14	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
al15	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
al16	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
al17	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
al18	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
al19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
al20	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1

Matriz de datos de 20x15

Leyenda:

HIP: Hip hop	RUM: Rumba	REG: Reggae
OPE: Opera	HEA: Heavy metal	HAR: Hardcore-Metal
MAQ: Máquina	POP: Pop	RAP: Rap
JAZ: Jazz	CLA: Clásica	PUN: Punk
FLA: Flamenco	DAN: Dance	SKA: Ska



**Anexo 2:** Ejemplificación del cálculo de las Intensidades Implicativas entre variables.

En la siguiente tabla se muestran las probabilidades  $P(K = K_0)$  para valores de  $K_0$  variando desde 0 hasta 9, y para los diferentes valores de la probabilidad de éxito ( $p$ ) en el modelo Binomial. Observar que para las tres últimas parejas de variables el valor de  $p$  es el mismo 0,225, por lo que sólo lo hemos representado una sola vez. (Ver tabla 2a)

	HIP, OPE	HIP, PUN	FLA, RAP	OPE, RAP	REG, HIP
<b>p</b>	0,41250	0,24750	0,20000	0,10000	0,22500
<b><math>K_0</math></b>	<b><math>P(K = K_0)</math></b>				
<b>0</b>	2,3997E-05	0,00338946	0,01152922	0,12157665	0,0061099
<b>1</b>	0,00033698	0,02229609	0,05764608	0,27017034	0,03547683
<b>2</b>	0,00224773	0,06966603	0,13690943	0,28517981	0,0978474
<b>3</b>	0,00946914	0,13748048	0,20536414	0,19011987	0,17044386
<b>4</b>	0,02825632	0,19217578	0,2181994	0,08977883	0,21030572
<b>5</b>	0,06348653	0,20226342	0,17455952	0,03192136	0,1953808
<b>6</b>	0,11143912	0,16631294	0,1090997	0,00886704	0,14180865
<b>7</b>	0,15648898	0,10940187	0,05454985	0,00197045	0,0823405
<b>8</b>	0,17854727	0,05847185	0,02216088	0,00035578	0,03884613
<b>9</b>	0,16715063	0,02564214	0,00738696	5,2708E-05	0,01503721

- \* Para calcular  $\phi(\text{HIP, OPE}) = 1 - P[K \leq 9]$ , basta restarle a uno la suma de las probabilidades que aparecen en la segunda columna de la tabla ( $p=0,41250$ ), desde  $K_0 = 0$ , hasta  $K_0 = 9$ , lo cual da 0,2825533.
- \* Para calcular  $\phi(\text{HIP, PUN}) = 1 - P[K \leq 1]$ , a uno se le resta la suma de las probabilidades que aparecen en la tercera columna de la tabla ( $p=0,24750$ ), desde  $K_0 = 0$ , hasta  $K_0 = 1$ , lo cual da 0,974314.
- \* Para el resto de los casos se procede de forma análoga, pero sumando las probabilidades correspondientes desde  $K_0 = 0$ , hasta 0, 1 ó 2, según sea el caso, y teniendo en cuenta el valor de la  $p$ .



# Descubriendo Reglas de Excepción Estructuradas

Einoshin Suzuki

Traducido por Mailyn Álvarez Caneda y Yenía Peró Fuentes

Departamento de Informática, Graduado de la Escuela de Ciencia  
Informática e Ingeniería Eléctrica, Universidad Kyushu, Japón  
[suzuki@i.kyushu-u.ac.jp](mailto:suzuki@i.kyushu-u.ac.jp)

**Resumen:** En este artículo resumimos una parte de nuestro trabajo de 10 años en el descubrimiento de reglas de excepción estructuradas<sup>1</sup>. Una regla de excepción, definida como un patrón desviacional hacia una regla fuerte, muestra incertidumbre y es a veces muy útil. Las vías de descubrimiento precedentes a este tipo de conocimiento pueden ser clasificadas en, vías no estructuradas, que obtienen reglas de excepción que se desvían de un conjunto de reglas fuertes pre-especificadas por el usuario, y vías estructuradas, que típicamente descubren un conjunto de pares de reglas, cada una de las cuales representa una regla de excepción y su correspondiente regla fuerte. La primera vía no propone exigencias a las reglas de excepción descubiertas, mientras que la última trata de descubrir un conjunto de reglas estructuradas, que se relacionan unas con otras. La última vía espera que la estructura sea capaz de capturar lo interesante en los datos, pero se consideró prohibitiva debido a la búsqueda extra, así como a la confusión de la tendencia aleatoria como una regla. Hemos superado estos problemas con métodos de poda legítimos y con una estimación probabilística. Nuestros métodos han sido validados usando conjuntos de datos médicos bajo la supervisión de un físico y un conjunto de datos de referencia en la comunidad de aprendizaje por computadora. Otros resultados conciernen principalmente a la medida del interés, evaluación de fiabilidad, aplicaciones prácticas, reducción de parámetros, y representación de conocimiento.

---

<sup>1</sup> La mayoría de los contenidos de este artículo provienen de Suzuki (2004b).

## 1 Introducción

En minería de datos y en el análisis estadístico implicativo, una regla (Agrawal et al., 1996, Smyth y Goodman, 1992) es el planteamiento de una regularidad en la forma “si premisa entonces conclusión”, y representa una de las clases más importantes de patrones descubiertos debido a su generalidad y simpleza. El descubrimiento de reglas se ha originado por la inducción de reglas fuertes, cada una de las cuales es una descripción de la regularidad de numerosos objetos con pocos contraejemplos. Sin embargo, rápidamente se vio que el sistema de descubrimiento de reglas produce numerosos patrones, muchos de los cuales son bien conocidos y, por tanto, poco interesantes para el usuario (Frawley et al. 1991, Silberschatz y Tuzhilin, 1996). Las reglas interesantes son relativamente pocas en número, y a menudo se haya entre reglas débiles, cada una de las cuales describe regularidades para un número relativamente pequeño de objetos. El descubrimiento eficiente de tales reglas interesantes es en general un desafío, ya que el número de reglas típicamente se incrementa exponencialmente, en la medida en que el número de objetos, que la regla cubre, decrece.

Para trabajar con este problema, varios investigadores han propuesto medidas para evaluar el interés en una regla descubierta (Adomavicius y Tuzhilin, 1997, Brin et al., 1997, Gras, 1996, Hussain et al., 2000, Klemettinen et al., 1994, Klosgen, 1996, Liu et al., 1999ab, Major y Magano, 1993, Padmanabhan y Tuzhilin, 1998, Piatetsky-Shapiro, 1991, Piatetsky-Shapiro y Matheus, 1994, Silberschatz y Tuzhilin, 1996, Smyth y Goodman, 1992, Suzuki y Shimura, 1996, Suzuki, 1996, 1997, Suzuki y Kodratoff, 1998, Yugami et al., 2000). Tales medidas incluyen varios criterios estadísticos (Brin et al., 1997, Gras, 1996, Klosgen, 1996, Piatetsky-Shapiro, 1991, Smyth y Goodman, 1992), accionabilidad (Adomavicius y Tuzhilin, 1997), y lo inesperado (Hussain et al., 2000, Liu et al., 1999ab, Padmanabhan y Tuzhilin, 1998, Piatetsky-Shapiro y Matheus, 1994, Silberschatz y Tuzhilin, 1996, Suzuki y Shimura, 1996, Suzuki, 1996, 1997, Suzuki y Kodratoff, 1998, Yugami et al., 2000). Entre tales medidas, lo inesperado merece una atención especial, ya que puede revelar situaciones especiales que no son obvias.

La mayoría de los estudios (Hussain et al., 2000, Liu et al., 1999ab, Padmanabhan y Tuzhilin, 1998, Silberschatz y Tuzhilin, 1996, Suzuki y Shimura, 1996, Suzuki, 1996, 1997, Suzuki y Kodratoff, 1998, Yugami et al., 2000) sobre el descubrimiento de reglas tratan de alcanzar lo inesperado encontrando un conjunto de reglas de excepción, cada una de las cuales representa una regularidad diferente

del dominio del conocimiento o a un grupo de reglas fuertes. Consideremos una regla “utilizar un cinturón de pasajero es un riesgo para el niño” la cual representa una excepción del hecho bien conocido de que “utilizar el cinturón de pasajero es seguridad”. Esta regla muestra lo inesperado cuando fue descubierta en un accidente automovilístico unos años atrás, y aún es útil. Debe notarse que la regla de excepción a menudo sugiere acciones útiles (Silberschatz y Tuzhilin, 1996). Considere una regla de excepción que describe a pacientes no curados a pesar de antibióticos efectivos, y otra regla de excepción que describe a pacientes curados de una enfermedad mortal. La primera regla puede sugerir precaución con los antibióticos, mientras que la última puede sugerir tratamiento para enfermedades mortales.

Los métodos de descubrimiento de reglas de excepción pueden ser divididos en dos enfoques, desde el punto de vista de los patrones descubiertos. En la vía no estructurada (Liu et al., 1999a, Padmanabhan y Tuzhilin, 1998, Silberschatz y Tuzhilin, 1996), un método es provisto primero con antecedentes de conocimientos en forma de reglas, luego el método obtiene reglas de excepción cada una de las cuales se desvía de estas reglas y estas reglas de excepción no se relacionan necesariamente unas con otras. Por otro lado, en una vía estructurada (Hussain et al., 2000, Liu et al., 1999b, Suzuki y Shimura, 1996, Suzuki, 1996, 1997, Suzuki y Kodratoff, 1998, Yugami et al., 2000), no se suministran antecedentes de conocimiento y el objetivo del descubrimiento es típicamente un conjunto de pares de reglas cada uno de las cuales consta de una regla de excepción y su correspondiente regla fuerte. Como la regla de excepción está relacionada con su correspondiente regla fuerte, el patrón descubierto puede ser llamado como estructurado.

A pesar de su importancia, existen dos dificultades para una vía indirecta. Primero, la regla de descubrimiento consume tiempo cuando todos los candidatos están siendo investigados. Comparada con una vía no estructurada, la estructurada sufre de investigaciones extras para las reglas fuertes. Sean el número de ejemplos en un grupo de datos y el número de condiciones en una premisa  $n$  y  $M$ , respectivamente, entonces el tiempo de complejidad del descubrimiento de una regla simple es típicamente  $O(n^{M+1})$ , mientras que el descubrimiento de un par de reglas requiere  $O(n^{2M+1})$ . Segundo, ya que la regla de excepción es verdadera para un número relativamente pequeño de ejemplos, la diferencia entre una regla y un patrón aleatorio, el que está definido como una tendencia de ocurrencia coincidentemente, es también un aspecto importante. Sin embargo, la mayoría del tiempo, la evaluación de fiabilidad ha sido ignorada en el descubrimiento del

conocimiento de excepción y tal distinción se dejó a los usuarios. Para paliar estas dificultades, hemos propuesto un método nuevo que emplea una primera búsqueda profunda con podas convenientes y evaluación confidencial, basada en estimaciones de probabilidad simultáneas. Otros resultados conciernen principalmente a la medida del interés, evaluación de fiabilidad, aplicaciones prácticas, reducción de parámetros y representación de conocimiento.

## 2 Descripción del Problema

Asumimos que un ejemplo  $e_i$  es una descripción de un objeto incluido en un conjunto de datos en forma de un registro y ese conjunto de datos contiene  $n$  ejemplos  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Un ejemplo  $e_i$  está representado por una  $m$ -upla  $\langle y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im} \rangle$  donde  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}$  son valores de  $m$  atributos discretos. Aquí se supone que un atributo continuo ha sido convertido en un atributo nominal usando un método existente, como se muestra en (Dougherty et al., 1995). Un evento representando el valor asignado a un atributo será llamado átomo.

Definimos una regla de asociación como una regla para la cual la premisa es representada como una asociación de átomos, y cuya conclusión es un átomo simple. En este artículo consideramos principalmente el problema de encontrar un conjunto de pares de reglas, cada una de las cuales consiste en una regla de excepción asociada a una regla fuerte. Supongamos que una regla fuerte está representada por “si  $Y_\mu$  entonces  $x$ ”, donde  $Y_\mu \equiv y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_\mu$  es una asociación de átomos y  $x$  es un átomo simple. Sea  $Z_\nu \equiv z_1 \wedge z_2 \wedge \dots \wedge z_\nu$  una asociación de átomos y  $x^1$  un átomo simple con el mismo atributo, pero con un valor diferente al del átomo  $x$ , entonces la regla de excepción está representada por “si  $Y_\mu$  y  $Z_\nu$ , entonces  $x^1$ ”. El patrón descubierto en nuestra vía es, entonces, representado por un par de reglas  $r(x, x^1, Y_\mu, Z_\nu)$ , donde  $M$  es un parámetro pre-especificado por el usuario para un número máximo de átomos en una premisa.

$$r(x, x^1, Y_\mu, Z_\nu) \equiv \begin{cases} Y_\mu & \rightarrow x \\ Y_\mu \wedge Z_\nu & \rightarrow x^1 \end{cases} \quad (1)$$

$\mu, \nu \leq M$

Nuestro objetivo es descubrir un conjunto de pares de reglas, posiblemente interesantes, a partir de un conjunto de datos. El conjunto es especificado asumiendo un criterio de evaluación o un conjunto de restricciones.

### 3 Métodos para el Descubrimiento de Pares de Reglas

#### 3.1 MEPRO con su medida de interés

Nuestro primer método para el descubrimiento de pares de reglas, MEPRO, está basado en el sistema de reglas de descubrimiento ITRULE (Smyth y Goodman, 1992). La esencia de ITRULE está en su medida de interés  $J$ , la cual corresponde a la cantidad  $J(x; y)$  de información concentrada por una regla  $x \rightarrow y$ . Sea  $\bar{x}$  la negación del átomo  $x$ .

$$J(x; y) = \Pr(y) j(x; y) \quad (2)$$

$$\text{donde } j(x; y) = \Pr(x/y) \log_2 \frac{\Pr(x/y)}{\Pr(x)} + \Pr(\bar{x}/y) \log_2 \frac{\Pr(\bar{x}/y)}{\Pr(\bar{x})} \quad (3)$$

Definimos nuestra medida de interés de un par de reglas como un producto  $\text{ACEP}(x, Y_\mu, x', Z_\nu)$  de la  $J$  medida de una regla fuerte y la  $J$  medida de una regla de excepción (Suzuki y Shimura, 1996). Nuestra motivación estaba en obtener pares de reglas, cada una de los cuales consistía en reglas con valores de  $J$  medidas grandes. Hemos probado que  $J(x; Y_\mu) + J(x'; Y_\mu \wedge Z_\nu)$  es inapropiada como una medida de interés, ya que es dominada por  $J(x; Y_\mu)$  y  $J(x'; Y_\mu \wedge Z_\nu)$  cuando  $J(x; Y_\mu)$  y  $J(x'; Y_\mu \wedge Z_\nu)$  es grande (Suzuki y Shimura, 1996).

$$\text{ACEP}(X, Y_\mu, x', Z_\nu) \equiv J(x; Y_\mu) J(x'; Y_\mu \wedge Z_\nu) \quad (4)$$

Nos hemos propuesto el descubrimiento de un algoritmo que genere  $K$  pares de reglas, donde  $K$  es un parámetro especificado por el usuario. En el algoritmo, una tarea de descubrimiento es vista como un problema de búsqueda, en el cual un nodo de un árbol de búsqueda representa un par de reglas  $r(x, x', Y_\mu, Z_\nu)$ . Un primer método de búsqueda de profundidad máxima  $D$  se emplea para recorrer este árbol. Sea  $\mu = 0$  y  $\nu = 0$  que representan la condición en que las premisas de un par de reglas  $r(x, x', Y_\mu, Z_\nu)$  no contenga ningún  $y_i$  ni  $z_i$ , respectivamente, entonces

definimos que  $\mu = \nu = 0$  produce un nodo de profundidad 1, y como la profundidad se incrementa en 1, un átomo se agrega a la premisa de la regla general o de excepción. Un nodo de profundidad 2 asume que satisface  $\mu = 1$  y  $\nu = 0$ ; un nodo de profundidad 3,  $\mu = \nu = 1$ ; y un nodo de profundidad  $l (\geq 4)$ ,  $\mu + \nu = l - 1$  ( $\mu, \nu \geq 1$ ). De aquí, un nodo descendiente representa un par de la regla  $r(x, x', Y_{\mu'}, Z_{\nu'})$  donde  $\mu' \geq \mu$  y  $\nu' \geq \nu$ . Conforme al siguiente teorema, una cota superior existe para el ACEP de este par de reglas (Suzuki y Shimura, 1996).

**Teorema 1.** Sea  $H(\alpha) \equiv [\alpha / \{(1 + \alpha) \Pr(\bar{x})\}]^{2\alpha} / \{(1 + \alpha) \Pr(x)\}$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  satisfacen  $H(\alpha_1) > 1 > H(\alpha_2)$ , y  $\text{ACEP} = \text{ACEP}(x, Y_{\mu}, x', Z_{\nu})$ .

Si  $H(\Pr(x', Y_{\mu}, Z_{\nu}) / \Pr(x, Y_{\mu})) < 1$ , entonces:

$$\text{ACEP} < \alpha_2 \Pr(x, Y_{\mu})^2 \left\{ \log_2 \left( \frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{1}{\Pr(x)} \right) + \alpha_1 \log_2 \left( \frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{1}{\Pr(\bar{x})} \right) \right\} \cdot \log_2 \frac{1}{\Pr(x')}$$

en caso contrario,

$$\text{ACEP} \leq \left\{ \Pr(x, Y_{\mu}) \log_2 \left( \frac{p(x, Y_{\mu})}{\Pr(x, Y_{\mu}) + \Pr(x', Y_{\mu}, Z_{\nu})} \frac{1}{\Pr(x)} \right) + \Pr(x', Y_{\mu}, Z_{\nu}) \cdot \log_2 \left( \frac{\Pr(x', Y_{\mu}, Z_{\nu})}{\Pr(x, Y_{\mu}) + \Pr(x', Y_{\mu}, Z_{\nu})} \frac{1}{\Pr(\bar{x})} \right) \right\} \Pr(x', Y_{\mu}, Z_{\nu}) \log_2 \frac{1}{\Pr(x')}$$

Esta cota superior fue empleada en nuestra aproximación por un método de ramificación-salto, el cual garantiza la solución óptima y se espera que sea eficiente en tiempo.

Hemos introducido además restricciones probabilísticas para eliminar cada uno de los pares de reglas con  $\Pr(x' | Z_{\nu})$  grande (Suzuki, 1996). También hemos considerado la incertidumbre desde una perspectiva diferente y propuesto un nuevo criterio probabilístico que considera principalmente el número de contraejemplos (Suzuki y Kodratoff, 1998) desde el punto de vista de la implicación estadística (Gras, 1996). Una limitación de los métodos en esta sección es que ellos no tienen ninguna manera de distinguir patrones aleatorios de reglas.



### 3.2 PADRE con su Evaluación de Fiabilidad Simultánea

Proponemos un método PADRE, en el cual la limitación de la sección anterior es abordada mediante una estimación probabilística.

En el descubrimiento de la regla, la generalidad y precisión pueden ser consideradas como criterios frecuentemente usados para evaluar la bondad de la misma. En el caso de una regla de conjunción  $Y_\mu \rightarrow x$ , estos dos criterios se corresponden respectivamente a la probabilidad  $\Pr(Y_\mu)$  de la premisa y la probabilidad condicional  $\Pr(x|Y_\mu)$  de la conclusión dada la premisa (Smyth y Goodman, 1992). Similar a (Agrawal et al., 1996), especificamos dos umbrales mínimos  $\theta_1^S$  y  $\theta_1^F$  para la generalidad y precisión de la regla fuerte, respectivamente. También fueron especificados dos umbrales  $\theta_2^S$  y  $\theta_2^F$  para la generalidad y precisión de la regla de excepción, respectivamente.

Considérese el caso en el cual la exactitud de una regla  $Z_\nu \rightarrow x'$ , que llamamos regla de referencia, es grande. En semejante caso, una regla de excepción puede ser considerada como esperada, puesto que puede suponerse fácilmente desde esta regla. Para obtener las reglas de excepción verdaderamente inesperadas, especificamos un umbral máximo  $\theta_2^I$  de precisión de una regla de referencia.

En PADRE, especificamos los umbrales  $\theta_1^S$ ,  $\theta_1^F$ ,  $\theta_2^S$ ,  $\theta_2^F$  para un criterio probabilístico de un par de reglas. Puesto que la fiabilidad para un par de reglas, descubierto desde 10,000 exhibiciones de los ejemplos, difiere de otro par de reglas, descubierto desde 100 ejemplos, es inapropiado usar la razón  $\Pr(\cdot)$  en un conjunto de datos como un criterio probabilístico. Por lo tanto, consideramos la probabilidad verdadera  $\Pr(\cdot)$  para cada criterio probabilístico y obtenemos un conjunto de pares de reglas, cada una de las cuales satisfacen las condiciones del descubrimiento con un nivel de significación  $\delta$  (Suzuki, 1997, 2004a). En lo siguiente,  $\text{MIN}(a, b)$  y  $\text{MAX}(a, b)$  representan el valor más pequeño y el más grande entre a y b, respectivamente.

$$\Pr \left[ \begin{array}{l} \Pr(Y_\mu) \geq \theta_1^S, \Pr(x|Y_\mu) \geq \text{MAX}(\theta_1^F, \hat{\Pr}(x)), \Pr(Y_\mu Z_\nu) \geq \theta_2^S, \\ \Pr(x'|Y_\mu Z_\nu) \geq \text{MAX}(\theta_2^F, \hat{\Pr}(x')), \Pr(x'|Z_\nu) \leq \text{MIN}(\theta_2^I, \hat{\Pr}(x')) \end{array} \right] \geq 1 - \delta \quad (5)$$

Calcular (5) es difícil debido a dos razones. Primero, lograr un valor de una probabilidad real requiere de suposiciones. Segundo, el cálculo numérico de (5), para un par de reglas, consume tiempo, puesto que incluye cinco probabilidades reales. Supongamos que  $n$  es el número de ejemplos en el conjunto de datos, y  $(n \Pr(xY_\mu Z_\nu), n \Pr(x'Y_\mu Z_\nu), n \Pr(\overline{x}x'Y_\mu Z_\nu), n \Pr(xY_\mu \overline{Z}_\nu), n \Pr(x'Y_\mu \overline{Z}_\nu), n \Pr(\overline{x}Y_\mu \overline{Z}_\nu), n \Pr(x\overline{Y}_\mu Z_\nu), n \Pr(x'\overline{Y}_\mu Z_\nu))$  sigue una distribución normal multidimensional. Entonces (5) es equivalente a (6) – (10) (Suzuki, 1997, 2004a).

$$G(Y_\mu, \delta, k) \hat{\Pr}(Y_\mu) \geq \theta_1^S \quad (6)$$

$$F(Y_\mu, x, \delta, k) \hat{\Pr}(x | Y_\mu) \geq \theta_1^F \quad (7)$$

$$G(Y_\mu Z_\nu, \delta, k) \hat{\Pr}(Y_\mu Z_\nu) \geq \theta_2^S \quad (8)$$

$$F(Y_\mu Z_\nu, x', \delta, k) \hat{\Pr}(x' | Y_\mu Z_\nu) \geq \theta_2^F \quad (9)$$

$$F'(Z_\nu, x', \delta, k) \hat{\Pr}(x' | Z_\nu) \leq \theta_2^I \quad (10)$$

$$\text{donde } G(a, \delta, k) \equiv 1 - \beta(\delta, k) \sqrt{\frac{1 - \hat{\Pr}(a)}{n \hat{\Pr}(a)}} \quad (11)$$

$$F(a, b, \delta, k) \equiv 1 - \beta(\delta, k) \quad (a, b) \quad (12)$$

$$F'(a, b, \delta, k) \equiv 1 + \beta(\delta, k) \quad (a, b)$$

$$\varphi(a, b) \equiv \sqrt{\frac{\hat{\Pr}(a) - \hat{\Pr}(a, b)}{\hat{\Pr}(a, b) \left\{ (n + \beta(\delta, k)^2) \hat{\Pr}(a) - \beta(\delta, k)^2 \right\}}} \quad (13)$$

y  $\beta(\delta, k)$  representa un valor positivo que está relacionado a la región de confianza y es obtenido mediante integración numérica,  $k$  representa el número de probabilidades reales menos 1, cada una de las cuales es satisfecha por al menos un ejemplo en el conjunto de datos. También hemos propuesto un algoritmo de descubrimiento eficiente basado en la poda.

### 3.3 Fijación de umbrales para PADRE

PADRE requiere la especificación apropiada de los valores para cinco umbrales  $\theta_1^S, \theta_2^S, \theta_1^F, \theta_2^F, \theta_2^I$ . Una especificación estricta para un conjunto de datos puede producir el no descubrimiento de reglas de excepción. Por otro lado, una especificación generosa para un conjunto de datos puede producir el descubrimiento de muchas reglas de excepción y el proceso computacional es típicamente consumidor de tiempo. Este problema proviene del hecho de que hay cinco criterios de evaluación  $\hat{\Pr}(Y_\mu), \hat{\Pr}(Y_\mu Z_\nu), \hat{\Pr}(x | Y_\mu), \hat{\Pr}(x' | Y_\mu Z_\nu), \hat{\Pr}(x' | Z_\nu)$  de patrones de descubrimientos.

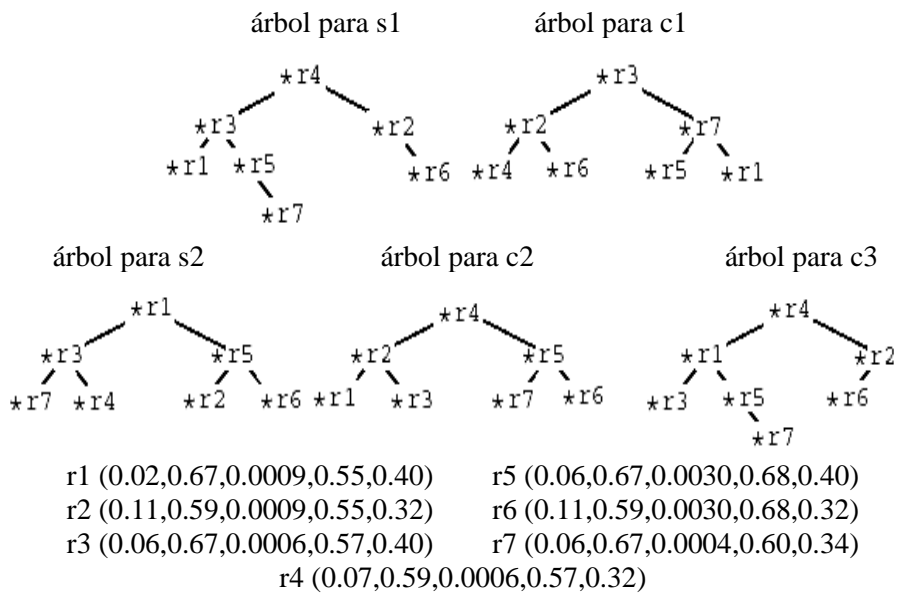


Fig. 1: Ilustración basada en la estructura de los datos propuestos, donde un árbol AVL es empleado como un árbol de búsqueda balanceada, y las llaves son  $s1 (\hat{\Pr}(Y_\mu))$ ,  $s2 (\hat{\Pr}(Y_\mu Z_\nu))$ ,  $c1 (\hat{\Pr}(x | Y_\mu))$ ,  $c2 (\hat{\Pr}(x' | Y_\mu Z_\nu))$ ,  $c3 (\hat{\Pr}(x' | Z_\nu))$ . Los números entre paréntesis representan valores de éstos índices para el par de reglas correspondiente. En un árbol, \*r1, \*r2, ..., \*r7 representa un indicador para r1, r2, ..., r7, respectivamente.

Para este problema, hemos inventado primero una estructura que puede manejar los patrones descubiertos con criterio múltiple (Suzuki, 1999). La estructura de datos es basada en un árbol de altura balanceada. Para comprender la planificación flexible, asignamos un árbol para cada índice. Un nodo de un árbol representa un indicador para un patrón descubierto, y esto permite la transformación rápida del árbol. Mostramos, en la Figura 1, un ejemplo de esta estructura de datos que maneja siete pares de reglas  $r_1, r_2, \dots, r_7$ .

En nuestro método, un árbol de altura balanceada se asigna a cada criterio de la evaluación, y un nodo de un árbol representa un indicador para un patrón descubierto. Entonces hemos propuesto un algoritmo que actualiza los umbrales y descubre a lo sumo  $\eta$  pares de reglas (Suzuki, 1999). En este método, cada vez se descubren  $(\eta + 1)$ -ésimos pares de reglas, por lo que se refiere al criterio actual, el peor par de reglas se anula, y se actualiza el valor del criterio según el par de reglas anulado. Cada vez que este proceso ocurre, el criterio actual se reemplaza por otro criterio.

### 3.4 Estudio de Meta patrones para la Representación del Conocimiento

En los métodos de las secciones 3.1 y 3.2, el descubrimiento de patrones es restringido a (1). Clasificamos estructuras de excepción/desviación para el descubrimiento de patrones interesantes basados en un meta patrón y se propuso un algoritmo eficaz que descubre todas las estructuras (Suzuki, 2002, 2004b).

En este estudio, definimos que una regla  $u \rightarrow v$  satisface:

$$\hat{\Pr}(u) \geq \theta_s \text{ (generalidad) y } \hat{\Pr}(v | u) \geq \theta_f \text{ (precisión)} \quad (14)$$

Similarmente, también introducimos una regla negativa como  $u \not\rightarrow v$ , donde  $\theta_l$  es un umbral dado por el usuario.

$$\hat{\Pr}(u) \geq \theta_s \text{ y } \hat{\Pr}(v | u) \leq \theta_l \quad (15)$$

En el estudio, una estructura de excepción/desviación es definida como una regla triple  $t(y, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$  que representa el meta patrón, usando las letras  $x, y, z$ . Una regla fuerte, una regla de excepción y una regla de referencia son definidas como  $y \rightarrow x$ ,  $\alpha \not\rightarrow \beta$ , y  $\gamma \rightarrow \delta$ , respectivamente.

$$t(y, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad (16)$$

donde cada uno de  $\alpha, \beta, \gamma$ , y  $\delta$  representan una meta variable que es definida por las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ , definición que se derivada de varias estructuras de excepción/desviación. Aquí  $y \rightarrow x$  representa una regla y muestra que  $\hat{\Pr}(y)$  y  $\hat{\Pr}(x|y)$  son mayores que sus respectivos umbrales. Por otro lado,  $\alpha \not\rightarrow \beta$  representa una regla negativa y muestra que  $\hat{\Pr}(\alpha)$  es mayor que su umbral, y  $\hat{\Pr}(\beta|\alpha)$  es menor que su umbral.

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{(z, x, y, z), (z, x, z, y), (x, z, z, y), (y, z, z, x)\} \quad (17)$$

Bajo suposiciones apropiadas, nuestra estructura de excepción/desviación puede ser clasificada en once estructuras que son mostradas en la Figura 2.

Descubrir reglas de asociación (Agrawal et al., 1999) asume un conjunto de datos de transacción, que tiene sólo atributos binarios. Cada atributo puede tomar “1” ó “0” como su valor, y la mayoría de los valores del atributo son “0”. El esparcimiento del conjunto de datos permite emplear la primera ramificación de búsqueda. Note que si dicha ramificación de búsqueda se empleara para un conjunto de datos ordinarios, el número de conjuntos de ítems grandes sería inmenso. En semejante caso, la eficiencia en tiempo sería tan pobre que cualquier primera ramificación del algoritmo sería poco práctica. Asumimos un conjunto de datos ordinarios y proponemos un algoritmo que realiza primero la búsqueda en profundidad para las ternas de letras  $a, b, c$ . El número de átomos en una letra  $a$  es representado como  $|a|$ . Consideremos  $|a|, |b|, |c| \leq M$  como la restricción de búsqueda en el algoritmo anterior. El tiempo de eficiencia de este algoritmo es  $O(m^{3M})$ , donde  $m$  es el número de atributos en  $D$ . Esto se justifica puesto que este algoritmo es completo, en el sentido que descubre todos los tríos de reglas. Esta ineficiencia es remediada por un nuevo procedimiento de poda (Suzuki, 2002, 2004b).

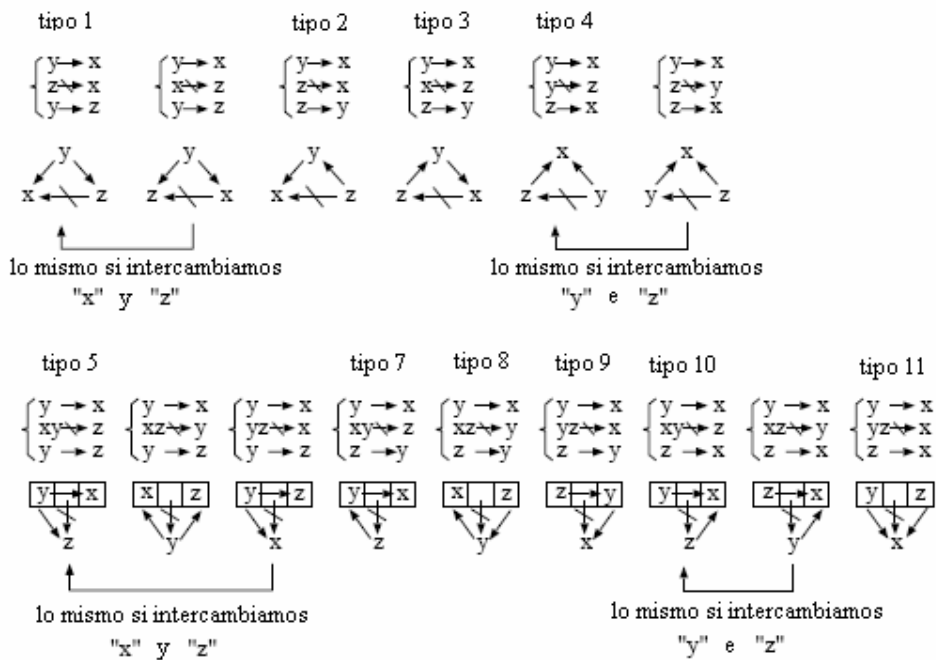


Fig. 2: Posibles tríos de reglas. Un rectángulo en el centro de la parte superior para cada trío representa una unión de letras en la parte superior derecho e izquierda.

## 4 Evaluación experimental

### 4.1 Tiempo – eficacia de MEPRO

MEPRO se ha aplicado al conjunto de datos "hongo" (8,124 ejemplos, 22 atributos, 2 clases) y al conjunto de datos "Archivos de la Votación del congreso" (435 ejemplos, 16 atributos) en el Almacén UCI y descubiertas las reglas de excepción, cada una de ellas es interesante al menos desde el punto de vista estadístico. La poda resultó ser útil, puesto que logró un aumento de velocidad, en más de 5 veces, para el conjunto de datos "Archivos de la Votación del congreso". El tiempo de ejecución para el conjunto de datos de votación con la profundidad máxima de 5 es aproximadamente de 66 segundos.

## 4.2 Efectividad de PADRE

La primera serie de experimentos se realizaron para investigar el desempeño y la efectividad de la poda de PADRE con diferentes conjuntos de umbrales, usando el conjunto de datos "hongo". Nosotros primero aplicamos PADRE sin su método de poda, y lo encontramos inaceptablemente ineficiente: el tiempo computacional para un solo ensayo se estima en más de 80 días bajo una condición típica. Por consiguiente, usamos PADRE con su método de poda, y comparamos el caso de  $\delta = 0.95$  con  $\delta = 0$ . Comparar estos casos podría justificar el costo extra de calcular estos coeficientes.

La tabla 1 muestra el número de pares de reglas encontrados y el número de nodos investigados por PADRE con  $\delta = 0.95$  y  $\delta = 0$ . En los experimentos usamos  $\theta_2^F = 1.0$ ,  $M = 3$ . Para los otros parámetros  $\theta_1^S$ ,  $\theta_2^S$ ,  $\theta_1^F$ ,  $\theta_2^F$ , valores estándares son establecidos como 0.25, 0.05, 0.70, 0.50, respectivamente, y modificamos uno de ellos en cada ensayo. Considerando el significado de exactitud, sustituimos  $\hat{\Pr}(c)$ ,  $\hat{\Pr}(c')$ ,  $\hat{\Pr}(c')$  por  $\theta_1^F$ ,  $\theta_2^F$ ,  $\theta_2^I$ , cuando  $\hat{\Pr}(c) > \theta_1^F$ ,  $\hat{\Pr}(c') > \theta_2^F$ ,  $\hat{\Pr}(c') > \theta_2^I$ , respectivamente. Aquí,  $\hat{\Pr}(\text{edibleclass} = e)$ ,  $\hat{\Pr}(\text{edibleclass} = p) < 0.55$ . Así, no investigamos los casos  $\theta_2^I > 0.55$  dado que son equivalentes con el caso  $\theta_2^I = 0.55$ .

La tabla 1 muestra que considerar coeficientes en el criterio de parada, mejora la eficiencia en tiempo en aproximadamente un 20%. La mejora es menos eficaz cuando  $\theta_2^S$  es modificado, pero es todavía mayor del 12%. Podemos concluir que considerar los coeficientes  $G(\cdot)$  en el criterio de parada es eficaz en estos experimentos para un eficiente descubrimiento de reglas de excepción. De la tabla vemos también que el número de pares de reglas descubiertos es menor que 100, a menos que  $\theta_2^S$  sea fijado en 0.02 ó 0.01. Esto muestra que la salida de PADRE puede ser típicamente controlada por un humano que no le gusten los métodos convencionales de descubrimiento de reglas. También debe notarse que los números de pares de reglas investigados son a menudo moderados: ellos son menores de  $1.00 \cdot 10^7$ , salvo para los dos casos, y puede investigarse a lo sumo dentro de unos pocos días con una computadora personal.

parámetro	valor	# de reglas	# de nodos	razón de reducción (%)	
			(*10 <sup>6</sup> )	$\delta = 0.95$	$\delta = 0$
	(estándar)	3	3.26	4.18	78.0
$\theta_1^S$	0.05	3	6.32	7.78	81.2
	0.10	3	5.30	6.60	80.3
	0.15	3	4.40	5.44	80.8
	0.20	3	3.81	4.67	81.6
$\theta_2^S$	0.01	7.445	20.20	23.93	84.4
	0.02	683	11.58	13.30	87.0
	0.03	3	7.28	8.51	85.4
	0.04	3	4.90	5.78	84.7
$\theta_1^F$	0.50	63	3.86	4.75	81.2
	0.55	28	3.70	4.53	81.6
	0.60	26	3.60	4.42	81.5
	0.65	18	3.51	4.26	82.5
$\theta_2^I$	0.55	6	3.35	4.23	79.1

Tab. 1: El desempeño de PADRE con/sin la evaluación de fiabilidad en el criterio de parada ( $\delta = 0.95$  y  $\delta = 0$ , respectivamente). Es el conjunto de datos “hongos” es empleado y  $\theta_1^F = 1.0$ ,  $\delta = 0.95$ ,  $M = 3$ . Para los otros parámetros  $\theta_1^S$ ,  $\theta_2^S$ ,  $\theta_1^F$ ,  $\theta_2^F$ , valores estándares son establecidos a 0.25, 0.05, 0.70, 0.50, respectivamente, y modificamos uno de ellos en cada ensayo. La razón de reducción representa el número de nodos con la evaluación de fiabilidad ( $\delta = 0.95$ ) dividido por el número de nodos sin él ( $\delta = 0$ ).

En la segunda serie de experimentos hemos mostrado que PADRE puede usarse para justificar una ausencia de excepciones fuertes en un conjunto de datos. Usando el conjunto de datos “censo” con varios valores de los parámetros, PADRE encuentra pares de reglas, cada uno de los cuales muestra, intuitivamente, débiles excepciones sobre el salario anual. Atribuimos este resultado a la misma naturaleza del problema, ya que las excepciones en los salarios son raras.

En la tercera serie de experimentos mostramos la efectividad de PADRE en términos del descubrimiento de reglas interesantes, explicando brevemente nuestro empeño en el contexto de minería de datos con el conjunto de datos de la



“meningitis” (Suzuki y Tsumoto, 2000). El conjunto de datos consiste de 140 pacientes, cada uno de los cuales es descrito por 38 atributos y han sido hechos públicos como un problema de referencia a la comunidad de minería de datos. Nuestro método ha descubierto 169 pares de reglas a partir de una versión pre procesada de este conjunto de datos (Suzuki y Tsumoto, 2000). Estos pares de reglas fueron inspeccionados por el Dr. Tsumoto, quien es un experto en este campo, y a cada par de regla le fue asignado un puntaje en una escala de 5 para el siguiente criterio de evaluación, cada una de las cuales fue juzgada independientemente.

- validez: grado en el que el patrón descubierto se adecua con el dominio del conocimiento,
- novedad: grado en el que el patrón descubierto no existe en el dominio del conocimiento,
- utilidad: grado en el que el patrón descubierto es útil en el dominio,
- incertidumbre: grado en el que el patrón descubierto contradice parcialmente el dominio del conocimiento.

Para las puntuaciones, cinco y uno representan la mejor y peor puntuación, respectivamente. Los resultados clasificados por los atributos se muestran en las conclusiones de la Tabla 2.

De la tabla 2 vemos que los promedios de los puntajes de los pares de reglas descubiertos son altos para varios atributos en las conclusiones. Inspeccionamos éstos pares de reglas agrupándolos con respecto al atributo en la conclusión, y encontramos que estos atributos pueden ser clasificados en cuatro categorías. La primera categoría representa a los atributos con puntajes más bajos, e incluye CULTURA, C\_CURSO y RIESGO. Consideramos que estos atributos en esta categoría no pueden explicarse con este conjunto de datos, y la investigación con ellos requiere más información sobre otros atributos. La segunda categoría representa los atributos con puntajes más altos para la validez y utilidad, e incluye FOCAL, LOC DAT, y Diag2. Consideramos además, que estos atributos en esta categoría pueden explicarse con este conjunto de datos, y han sido bien investigados probablemente debido a su importancia en este dominio. Los consideramos como un objetivo importante en el descubrimiento, aunque el usuario redescubrirá a menudo el conocimiento convencional. La tercera categoría representa los atributos con puntuaciones aproximadamente equivalentes, e incluye CT\_FIND, EEG\_FOCUS y Curso (G).

atributo	#	validez	novedad	incertidumbre	utilidad
(todos)	169	2.9	2.0	2.0	2.7
CULTURA	2	1.0	1.0	1.0	1.0
C_CURSO	1	1.0	1.0	1.0	1.0
RIESGO	1	1.0	1.0	1.0	1.0
FOCAL	18	3.1	2.2	2.7	3.0
LOC_DAT	11	2.5	1.8	1.8	2.5
Diag2	72	3.0	1.1	1.1	2.6
CT_FIND	36	3.3	3.0	3.0	3.2
EEG_FOCUS	11	3.0	2.9	2.9	3.3
Curso (G)	8	1.8	2.0	2.0	1.8
CULT_FIND	4	3.3	4.0	4.0	3.5
KERNIG	4	2.0	3.0	3.0	2.0
SEXO	1	2.0	3.0	3.0	2.0

Tab. 2: *Desempeño promedio del método propuesto con respecto a los atributos en la conclusión. La columna " #" representa el número de pares de reglas descubiertos.*

Pensamos que estos atributos en esta categoría pueden ser explicados con este conjunto de datos, y que no han sido bien investigados a pesar de su importancia en este dominio. Los consideramos como uno de los objetivos más importantes en el descubrimiento. La cuarta categoría representa atributos con más altos puntajes de novedad e incertidumbre, e incluye CULT FIND, KERNIG, y SEXO. Consideramos que estos atributos en esta categoría pueden ser explicados con este conjunto de datos, pero han sido un poco ignorados. Investigar estos atributos usando conjuntos de reglas descubiertas puede llevar a descubrimientos interesantes que podrían revelar mecanismos desconocidos en este dominio, a pesar de su baja importancia. Como reconoce el Dr. Tsumoto, esto es debido al hecho de que la estructura de un par de reglas es útil para descubrir patrones interesantes. Según él, nuestro método descubrió los resultados más interesantes en el contexto de la minería de datos (Tsumoto et al., 1999).

En la cuarta serie de experimentos, nuestro método se ha aplicado al conjunto de datos "Prueba bacterial 1994" (20,919 ejemplos, 135 atributos, 2 clases) (Suzuki, 2000). Hemos encontrado que necesitamos considerar la distribución de los valores de los atributos y relaciones causa-efecto para descubrir patrones interesantes a partir del conjunto de datos. Sin embargo, esta aplicación muestra que nuestro método es adecuado en términos de eficiencia en la regla de excepción

que aflora a partir de un conjunto de datos relativamente grande. El tiempo de ejecución es menor a 4 horas con 500 reglas y el atributo en las conclusiones "CBPs" con el umbral que se fija en la sección 3.3.

### 4.3 Efectividad del Umbral Fijo para PADRE

Nuestro método se ha aplicado a cuatro conjuntos de datos, los cuales poseen características diferentes con respecto al número de pares de reglas descubiertas. Los resultados experimentales muestran claramente que nuestro método es eficaz, tanto para conjuntos de datos con muchos pares de reglas, como para conjuntos de datos con pocos pares de reglas. Hemos también confirmado que la especificación de valores para cinco umbrales puede ser reemplazado por un procedimiento más fácil, especificando el número más grande de pares de reglas descubiertos.

Debido a la restricción de espacio, mostramos solamente los resultados con el conjunto de datos "hongo", donde la comestibilidad es el único atributo permitido en las conclusiones. En los experimentos establecimos el número máximo de pares de reglas descubiertos en  $\eta = 500$ , la máxima profundidad de búsqueda en  $M = 5$ , y la máxima profundidad de búsqueda en  $M = 6$ . Un número grande de pares de reglas puede descubrirse del conjunto de datos "hongo". Sin embargo, un usuario no sabe esto al analizar este conjunto de datos por primera vez. Establecemos valores iniciales débiles de los umbrales a:  $\theta_1^S = 0.0004$ ,  $\theta_2^S = 10/8124$ ,  $\theta_1^F = 0.5$ ,  $\theta_2^F = 0.5$ ,  $\theta_2^I = 0.5$  y aplicamos el método propuesto. Como resultado se descubrieron 500 pares de reglas y los valores finales de los umbrales fueron  $\theta_1^S = 0.154$ ,  $\theta_2^S = 0.00295$ ,  $\theta_1^F = 0.914$ ,  $\theta_2^F = 1.000$ ,  $\theta_2^I = 0.123$ . En la aplicación se investigaron  $5.00 \cdot 10^6$  nodos y el número de pares de reglas guardados en la estructura de los datos (incluyendo aquellos que se anularon) fue de 4069.

Hemos aplicado nuestro método con valores iniciales rigurosos  $\theta_1^S = 0.1$ ,  $\theta_2^S = 100/8124$ ,  $\theta_1^F = 0.7$ ,  $\theta_2^F = 0.9$ ,  $\theta_2^I = 0.5$  variando el número máximo de pares de reglas  $\eta = 100, 200, \dots, 500$ . La tabla 3 muestra el número de nodos investigados, el número de pares de reglas guardados en la estructura de los datos (incluyendo aquellos que fueron anulados), y los valores finales de los umbrales. A partir de la tabla vemos que los valores finales de los umbrales son válidos y el número de nodos se reduce a 44 - 56%.

$\eta$	# de nodos	# de pares de reglas	$\theta_1^S$	$\theta_2^S$	$\theta_1^F$	$\theta_2^F$	$\theta_2^I$
100	$2.28 \cdot 10^6$	734	0.177	0.015	0.783	1.000	0.228
200	$2.51 \cdot 10^6$	1250	0.211	0.015	0.809	1.000	0.240
300	$2.63 \cdot 10^6$	1662	0.248	0.017	0.804	1.000	0.260
400	$2.71 \cdot 10^6$	1893	0.241	0.015	0.804	1.000	0.272
500	$2.81 \cdot 10^6$	2245	0.217	0.015	0.794	1.000	0.272

Tab.3: Estadísticas resultantes con respecto al número máximo  $\eta$  de pares de reglas en los experimentos con el conjunto de datos del hongo, donde valores iniciales fueron fijados  $\theta_1^S = 0.1$ ,  $\theta_2^S = 100/8124$ ,  $\theta_1^F = 0.7$ ,  $\theta_2^F = 0.9$ ,  $\theta_2^I = 0.5$

Para investigar la efectividad de actualizar los valores de los umbrales, hemos aplicado nuestro método sin anular un nodo en el árbol AVL con valores iniciales  $\theta_1^S = 0.0004$ ,  $\theta_2^S = 10/8124$ ,  $\theta_1^F = 0.5$ ,  $\theta_2^F = 0.5$ ,  $\theta_2^I = 0.5$ . En este experimento, se investigaron  $8.94 \cdot 10^6$  nodos y fueron descubiertos  $8.94 \cdot 10^6$  pares de reglas. Vemos que sin actualizar los valores de los umbrales, el tiempo computacional es casi el doble, y el número de pares de reglas descubiertos es enorme.

#### 4.4 Evaluación del estudio de Meta patrones para la Representación del Conocimiento

En nuestro experimento usamos el conjunto de datos "15 UCI" (automóvil, guardería, postoperatorio, votos, cáncer de mama, hongo, crédito, ostras, diabetes, levadura, australiano, transbordador, hepatitis, alemán, tiroides), anulamos atributos que tienen sólo un valor en el conjunto de datos. Para aplicar nuestro algoritmo, el número de cajas de discretización se fijó en 4. Otros parámetros se establecieron como  $\theta_S = 0.025$ ,  $\theta_F = 0.7$ ,  $\theta_I = 0.6$  y  $M = 2$ . La figure 3 resume los resultados del experimento.

En el lado izquierdo se muestra que la poda es eficaz, puesto que sin podar el número de nodos investigados se incrementa en un 5% ("guardería" y "diabetes"), en un 285% ("hongo"). Esto es debido al hecho de que un considerable número de nodos en un árbol de búsqueda tiende a tener pequeñas probabilidades para sus descripciones y son por tanto podados. El número de tripos de reglas descubiertas por tipos revelan tendencias interesantes. Del lado derecho de la figura vemos que

los tipos 3, 4, 6, 7, 10 son sumamente numerosos: ellos son más de  $1 \cdot 10^5$  en 11 conjuntos de datos. El tipo 1 también es numeroso dado que es más de  $1 \cdot 10^5$  en 3 conjuntos de datos. Por otro lado, los tipos 2 y 9 son modestos en número: ellos nunca exceden  $1 \cdot 10^5$  en cualquier conjunto de datos, y exceden  $1 \cdot 10^4$  en 9 conjuntos de datos. Finalmente, los tipos 11, 8, y 5 son raros en este orden: el tipo 11 excede  $1 \cdot 10^4$  en 1 conjunto de datos, y los tipos 8 y 5 nunca exceden  $1 \cdot 10^4$  en ningún conjunto de datos. Tendencias similares se observaron para  $M = 1$ . Curiosamente, habíamos anticipado la excepcionalidad de los tipos 2, 5, 8, 9, y 11 como más robustos que los otros tipos.

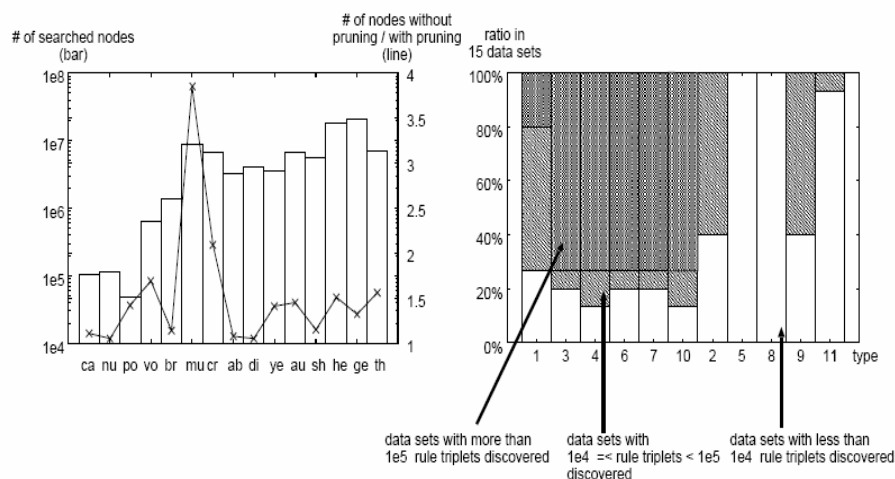


Fig. 3. Resultados experimentales, donde "1e<sup>c</sup>" representa  $10^c$

## 5 Esquema de evaluación para descubrir Reglas/Grupos de excepción

Actualmente los artículos que proponen un método para descubrir reglas/grupo de excepción, típicamente evalúan su método por una disminución del número de reglas descubiertas o un éxito en un estudio de caso. Una disminución del número de reglas descubiertas representa un criterio cuantitativo importante que típicamente produce una reducción de los costos de inspección para salidas de minería de datos. Sin embargo, este criterio de evaluación tiene una deficiencia seria, que es que descuida la importancia de las reglas descubiertas.

En (Suzuki, 2004a), hemos propuesto un esquema de evaluación para descubrir reglas/grupo de excepción. El esquema de evaluación consiste en siete criterios: generalidad, monotonía, fiabilidad, rango de búsqueda, interpretación de la medida de evaluación, uso del conocimiento del dominio y éxitos en aplicaciones reales.

La generalidad representa la posibilidad de que un método de minería de datos pueda ser aplicado a un problema con una cantidad pequeña de esfuerzo y ha sido escogido como un criterio de evaluación. Hemos establecido las categorías de generalidad como baja (no puede aplicarse a muchos dominios), media (emplea el conocimiento del dominio), y alta (no requiere ningún conocimiento del dominio). Note que un método que emplea el conocimiento del dominio pertenece a la categoría "alta" si puede ejecutarse sin el conocimiento del dominio.

Si una regla de excepción es representada por  $yz \rightarrow x$ , el valor de  $\Pr(x|yz)$  difiere típicamente de  $\Pr(x|y)$  y  $\Pr(x|z)$  considerablemente. Por ejemplo, cuando el valor de  $\Pr(x|yz)$  es casi 1, los valores de  $\Pr(x|y)$  y  $\Pr(x|z)$  están a menudo próximos a 0. En tal caso la regla de excepción  $yz \rightarrow x$  se dice que rompe la monotonía de las reglas  $y \rightarrow x$  y  $z \rightarrow x$ <sup>2</sup>. Hemos establecido las categorías de esta medida como baja (desconocida), media (una dirección), y alta (las direcciones múltiples).

Como se describió en la sección 3.2, un patrón descubierto a partir de 100 ejemplos y uno descubierto a partir de 10,000 ejemplos difieren en su fiabilidad. El último puede ser considerado como relativamente fiable, pero el primero puede ser un patrón inestable que ha ocurrido por casualidad. Este tipo de problema puede ser típicamente resuelto por una aproximación estadística para la evaluación de la fiabilidad. Hemos establecido las categorías de esta medida como baja (ninguna), media (hecha para un criterio), y alta (hecha para el criterio múltiple).

Es empíricamente conocido que una regla/grupo de excepción con buenas estadísticas es rara, y nada se descubre con un rango de búsqueda pequeño. Consideramos este hecho importante y se ha escogido el rango de búsqueda como un criterio de la evaluación. Hemos establecido las categorías de esta medida como baja (parcial), media (todos), y alta (todos pero es ajustado por el tamaño del problema de descubrimiento).

Si la medida de la evaluación tiene una interpretación clara, sería fácil explicar cómo descubrir reglas/grupo de excepción con ella. Una medida de

---

<sup>2</sup> Gracias a A. Tuzhilin.

evaluación puede ser clasificada en teórica y empírica, y la última es a menudo difícil de ser interpretada. Como el significado de patrones descubiertos es un problema importante, se ha escogido la interpretación de la medida de la evaluación como un criterio de evaluación. Hemos establecido las categorías de esta medida como media (empírico) y alta (interpretable).

En el proceso de descubrir reglas/grupos de excepción interesantes, usando el conocimiento del dominio, es deseable que se requiera usar menos esfuerzo. Sin embargo, debemos ser prudentes ya que su uso podría impedirnos descubrir reglas/grupos de excepción interesantes. Para ocuparse de estos aspectos, hemos escogido el uso del conocimiento del dominio como un criterio de evaluación. Incluimos la intervención de un experto del dominio para un sistema de descubrimiento en este criterio. Establecimos las categorías de esta medida como baja (el uso es posible), media (el uso es directo), y alta (el uso es sofisticado).

Debe notarse que observando simplemente una disminución del número de patrones descubiertos, incluso en una aplicación real, no puede considerarse como un éxito. Una aplicación se juzga como un éxito si es descubierto un conjunto de patrones interesantes para un experto en el dominio. Hemos establecido las categorías de esta medida como baja (ninguno), media (un dominio), y alta (dominios múltiples).

## **6 Conclusiones**

En este artículo hemos resumido una parte de nuestro esfuerzo para descubrir reglas de excepción estructuradas. Nuestro objetivo era descubrir un conjunto de pares de reglas posiblemente interesantes a partir de un conjunto de datos en formato de tabla. Creemos que nuestros resultados en cuanto a medidas interesantes, evaluación de fiabilidad, aplicación práctica, reducción de parámetro, y la representación del conocimiento representa un paso hacia el descubrimiento indirecto de reglas interesantes.

Creemos que algunas clases de interés puede capturarse sistemáticamente por la sintaxis. El hecho que la estructura de un par de reglas es útil para el descubrimiento de patrones interesantes, representa un ejemplo convincente.

**Bibliografía**

- Adomavicius, G.; Tuzhilin, A. (1997). *Discovery of Actionable Patterns in Databases: The Action Hierarchy Approach*, Proc. Third Int'l Conf. Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), pp. 111–114.
- Agrawal, R.; Mannila, H.; Srikant, R.; Toivonen, H.; Verkamo, A. (1996). *Fast Discovery of Association Rules*, Advances in Knowledge Discovery and Data Mining, eds. U.M. Fayyad et al., AAAI/MIT Press, Menlo Park, Calif., pp. 307–328.
- Brin, S.; Motwani, R.; Ullman, J.; Tsur, S. (1997). *Dynamic Itemset Counting and Implication Rules for Market Basket Data*, Proc. ACM SIGMOD Int'l Conf. Management of Data, pp. 255–264.
- Dougherty, J.; Kohavi, R.; Sahami, M. (1995). *Supervised and Unsupervised Discretization of Continuous Features*, Proc. Twelfth Int'l Conf. Machine Learning (ICML), Morgan Kaufmann, San Francisco, pp. 194–202.
- Fayyad, U.; Piatetsky-Shapiro, G.; Smyth, P. (1996). *From Data Mining to Knowledge Discovery: An Overview*, Advances in Knowledge Discovery and Data Mining, eds. U. M. Fayyad et al., AAAI/MIT Press, Menlo Park, Calif., pp. 1–34.
- Frawley, W.; Piatetsky-Shapiro, G.; Matheus, C. (1991). *Knowledge Discovery in Databases: An Overview*, Knowledge Discovery in Databases, G. Piatetsky-Shapiro and W. J. Frawley (eds.), AAAI/MIT Press, Menlo Park, Calif., pp. 1–27.
- Gras, R. (1996). *L' Implication Statistique*, La Pensée Sauvage, France, (in French).
- Hussain, F.; Liu, H.; Suzuki, E.; Lu, H. (2000). *Exception Rule Mining with a Relative Interestingness Measure*, Knowledge Discovery and Data Mining, LNAI 1805 (PAKDD), Springer, Berlin, pp. 86–97.
- Klemettinen, M.; Mannila, H.; Ronkainen, P.; Toivonen, H.; Verkamo, A. (1994). *Finding Interesting Rules from Large Sets of Discovered Association Rules*, Proc. Third Int'l Conf. Information and Knowledge Management (CIKM), pp. 401–407.
- Klosgen, W. (1996). *Explora: A Multipattern and Multistrategy Discovery Approach*, Advances in Knowledge Discovery and Data Mining, eds. U. M. Fayyad et al., AAAI/MIT Press, Menlo Park, Calif., pp. 249–271.
- Liu, B.; Hsu, W.; Mun, L.; Lee, H. (1999). *Finding Interesting Patterns Using User Expectations*, IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., 11, pp. 817– 832.



- Liu, B.; Hsu, W.; Ma, Y. (1999). *Pruning and Summarizing the Discovered Associations*, Proc. Fifth ACM SIGKDD Int'l Conf. Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), pp. 125–134.
- Major, J.; Magano, J. (1993). *Selecting among Rules Induced from a Hurricane Database*, Proc. AAAI-93 Workshop Knowledge Discovery in Databases, pp. 28–44.
- Padmanabhan, P.; Tuzhilin, A. (1998). *A Belief-Driven Method for Discovering Unexpected Patterns*, Proc. Fourth Int'l Conf. Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), AAAI Press, Menlo Park, Calif., pp. 94–100.
- Piatetsky-Shapiro, G. (1991). *Discovery, Analysis, and Presentation of Strong Rules*, Knowledge Discovery in Databases, eds. G. Piatetsky-Shapiro and W. J. Frawley, AAAI/MIT Press, Menlo Park, Calif., pp. 229–248.
- Piatetsky-Shapiro, G.; Matheus, C. (1994). *The Interestingness of Deviations*, AAAI-94 Workshop on Knowledge Discovery in Databases, Tech Rep. WS-94-03, AAAI Press, Menlo Park, Calif., pp. 25–36.
- Silberschatz, A.; Tuzhilin, A. (1996). *What Makes Patterns Interesting in Knowledge Discovery Systems*, IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., 8, pp. 970–974.
- Smyth, P.; Goodman, R. (1992). *An Information Theoretic Approach to Rule Induction from Databases*, IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., 4, pp. 301–316.
- Suzuki, E. (1996). *Discovering Unexpected Exceptions: A Stochastic Approach*, Proc. Fourth International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, and Machine Discovery (RSFD), pp. 225–232.
- Suzuki, E. (1997). *Autonomous Discovery of Reliable Exception Rules*, Proc. Third Int'l Conf. Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), AAAI Press, Menlo Park, Calif., pp. 259–262.
- Suzuki, E. (1999). *Scheduled Discovery of Exception Rules*, Discovery Science, LNAI 1721 (DS), Springer, Berlin, pp. 184–195.
- Suzuki, E. (2000). *Mining Bacterial Test Data with Scheduled Discovery of Exception Rules*, Proc. Int'l Workshop of KDD Challenge on Real-world Data (KDD Challenge), Kyoto, Japan, pp. 34–40.
- Suzuki, E. (2002). *Undirected Discovery of Interesting Exception Rules*, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 16, 2002, pp. 1065–1086.
- Suzuki, E. (2004). *Evaluation Scheme for Exception Rule/Group Discovery*, Intelligent Technologies for Information Analysis, Springer, Berlin, pp. 89–108.

- Suzuki, E. (2004). *Discovering Interesting Exception Rules with Rule Pair*, Proc. ECML/PKDD-2004 Workshop W8 on Advances in Inductive Rule Learning, pp. 163–178.
- Suzuki, E. (2005) *Unified Algorithm for Undirected Discovery of Exception Rules*, International Journal of Intelligent Systems, 20, pp. 673–691.
- Suzuki, E.; Kodratoff, Y. (1998). *Discovery of Surprising Exception Rules Based on Intensity of Implication*, Principles of Data Mining and Knowledge Discovery, LNAI 1510 (PKDD), Springer, pp. 10–18.
- Suzuki, E.; Shimura, M. (1996). *Exceptional Knowledge Discovery in Databases Based on Information Theory*, Proc. Second Int'l Conf. Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), AAAI Press, Menlo Park, Calif., pp. 275–278.
- Suzuki, E.; Tsumoto, S. (2000). *Evaluating Hypothesis-Driven Exception-Rule Discovery with Medical Data Sets*, Knowledge Discovery and Data Mining, LNAI 1805 (PAKDD), Springer, Berlin, pp. 208–211.
- Suzuki, E.; Zytlow, J. (2000). *Unified Algorithm for Undirected Discovery of Exception Rules*, Principles of Data Mining and Knowledge Discovery, LNAI 1910 (PKDD), Springer, pp. 169–180.
- Tsumoto, S. et al. (1999). *Comparison of Data Mining Methods using Common Medical Datasets*, ISM Symp.: Data Mining and Knowledge Discovery in Data Science, pp. 63–72.
- Yugami, N.; Ohta, Y.; Okamoto, S. (2000). *Fast Discovery of Interesting Rules*, Knowledge Discovery and Data Mining, LNAI 1805 (PAKDD), Springer, Berlin, 2000, pp. 17–28.

# Regla y R-regla de excepción en Análisis Estadístico Implicativo

Régis Gras \*, Einoshin Suzuki \*\*, Pascale Kuntz \*

Traducido por Pablo Gregori

\*Laboratoire d'Informatique de Nantes Atlantique FRE CNRS 2729  
Equipe COD - Connaissances & Décision  
Site Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes  
La Chantrerie BP 60601 44306 Nantes cedex

\*\* Department of Informatics, ISEE, Kyushu University, Japan  
[regisgra@club-internet.fr](mailto:regisgra@club-internet.fr), [pascale.kuntz@polytech.univ-nantes.fr](mailto:pascale.kuntz@polytech.univ-nantes.fr),  
[suzuki@i.kyushu-u.ac.jp](mailto:suzuki@i.kyushu-u.ac.jp)

**Resumen.** En la minería de reglas de asociación, ciertas situaciones excepcionales desafían el sentido común. Éste es el caso de la regla  $R : a \rightarrow c \text{ y } b \rightarrow c \text{ y } (a \text{ y } b) \rightarrow \text{no } c$ . Dicha regla, que estudiamos en este capítulo, se denomina regla de excepción. Como continuación de los trabajos precursores de E. Suzuki e Y. Kodratoff (1999), en los que se ha estudiado otro tipo de regla de excepción, en este caso nos proponemos caracterizar las condiciones de aparición de la regla R en el marco del Análisis Estadístico Implicativo. También extendemos esta noción a las R-reglas.

## 1 Introducción

Desde los trabajos de Agrawal *et al.* (1993) las reglas de asociación se han convertido en un modelo muy utilizado para extraer tendencias implicativas en bases de datos. Recordemos que si se dispone de un conjunto  $E$  de individuos descritos por  $p$  variables  $\{a, b, \dots\}$ , que pueden ser conjunciones de variables atómicas y que supondremos binarias, una regla de asociación  $a \rightarrow b$  significa que si se verifica  $a$  entonces *normalmente*  $b$  también lo hace. Puesto que se extrae un conjunto de tales reglas de asociación *parciales*, es legítimo preguntarse sobre las « relaciones » que dichas reglas mantienen entre ellas. Esta cuestión ha sido abordada en la literatura bajo varios puntos de vista. Bajo una óptica de

estructuración del conjunto de reglas, se han propuesto distintos métodos (e.g. Lent et al., 1997; Gras y Kuntz, 2005). Unas representaciones visuales adecuadas también permiten descubrir dependencias entre las reglas (e.g. Lehn, 2000 o Couturier y Gras, 2005).

Si se estudia localmente con atención estas relaciones, se puede descubrir una situación que desafía la intuición. Supongamos que se tiene, entre tres variables (por ejemplo, atributos)  $a$ ,  $b$  y  $c$ , conjunción de variables binarias en el presente estudio y verificando  $a \rightarrow c$  y  $b \rightarrow c$ . En casos excepcionales, no se tiene  $(a \text{ y } b) \rightarrow c$ , como sugiere el sentido común, sino  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$  (donde se ha escrito  $\bar{c}$  en lugar de no  $c$ ). Esta última regla se llamará aquí *regla de excepción*.

Señalemos que trabajos anteriores (Suzuki y Kodratoff, 1999; Suzuki y Zytkow, 2005) consideran como situación de excepción la siguiente:

$a \rightarrow c$  (llamada regla de sentido común), no  $(b \rightarrow c')$  (llamada regla de referencia) y  $(a \text{ y } b) \rightarrow c'$  (llamada regla de excepción) donde  $c \neq c'$  y donde  $a$  y  $b$  son respectivamente conjunciones ( $a = a_1 \text{ y } a_2 \dots \text{ y } a_m$ ) y ( $b = b_1 \text{ y } b_2 \dots \text{ y } b_p$ ). Nuestra definición de regla de excepción se distingue pues de ésta, pero presenta, como en Suzuki y Kodratoff (1999), un carácter sorprendente.

Ahora bien, existen, como veremos al dar los ejemplos, situaciones naturales en las que un carácter excepcional relaciona las tres variables. Para tenerla en cuenta y estudiar un modelo, extenderemos el sentido precedente acentuando así el carácter sorprendente (*de excepción*) de una regla derivada de dos reglas simples.

Para ilustrar este tipo de regla, haremos una primera referencia al caso de la incompatibilidad de grupos sanguíneos respecto al factor Rhésus.

Ciertas mujeres, no primípara, cuyos glóbulos rojos son portadores de dos alelos Rh- y cuya inmunización anti-Rh+ está activa, poseen entonces el fenotipo Rh- (carácter  $a$ ). Independientemente del padre, el bebé que llevan no presentará, al nacer, problema de tipo sanguíneo (carácter  $c$ ). Estamos en presencia de la regla:  $a \rightarrow c$ .

Un hombre, de genotipo Rh+ y Rh+, posee el fenotipo Rh+ (carácter  $b$ ). Independientemente de la madre, el bebé que engendrará no tendrá problemas al nacer (carácter  $c$ ). Ésta es la situación en la que la regla  $b \rightarrow c$  se cumple.

Por contra, una pareja en la que la mujer es Rh- y cumple las condiciones  $a$  y el hombre es Rh+ (carácter  $b$ ) podrá concebir un bebé que presentara un riesgo importante por la incompatibilidad Rhésus (carácter  $\bar{c}$ ). En casos excepcionales, en efecto, al inmunizarse la madre contra el factor Rh del feto, fabrica anticuerpos que destruyen los glóbulos rojos del bebé. Si bien la conjugación de los caracteres  $a$  y  $b$  es rara, se encuentra no obstante la realización de la regla, a la que hemos

llamado “regla de excepción”,  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$ . Por otra parte, y en favor de una prevención adaptada, se toman precauciones para evitar el problema en cuanto se advierte sobre los fenotipos de los padres (por ejemplo la exsanguinotransfusión).

Se encuentra una situación comparable de aparición de regla de excepción en el estudio de fenómenos de interferencias luminosas, por ejemplo en el experimento clásico de las franjas de Young (Bruhat G., 1959). La misma fuente luminosa franqueando dos ranuras idénticas ( $a$  y  $b$ ) conduce a franjas de interferencias en las que se alternan zonas de intensidad luminosa ( $c$ ) variable susceptible de debilitarse y/o anularse ( $\bar{c}$ ).

En este capítulo, tratamos de caracterizar las situaciones que presentan este tipo de reglas. Nos situamos en el marco del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) que ha demostrado su pertinencia en Extracción de Conocimientos en los Datos (ECD) para la minería de reglas de asociación<sup>1</sup>.

En la primera parte recordamos brevemente los principios básicos del ASI que nos sirven a continuación. Posteriormente proponemos una descripción conjuntista de una regla de excepción, seguida de un ejemplo numérico cuyo análisis nos permite establecer ciertas conjeturas sobre las condiciones favorables para la aparición de una regla de excepción. Acabamos con una caracterización formal de estas condiciones bajo las dos modelizaciones de muestreo más utilizadas en ASI: el modelo de Poisson y el binomial. Ésta se expresará en términos de relaciones algebraicas entre los parámetros de la situación.

## 2 Principios del ASI – Repaso

Denotemos  $A$  y  $B$  los subconjuntos respectivos de  $E$  de individuos que verifican respectivamente las variables  $a$  y  $b$ . Para una regla cualquiera  $a \rightarrow b$ , observada en  $E$ , el ASI consiste en comparar el número de contraejemplos  $n_{a\wedge\bar{b}}$  a dicha regla observados en  $A \cap \bar{B}$ , con el número de contraejemplos que aparecen en una extracción aleatoria e independiente de dos partes  $X$  e  $Y$  de  $E$  con los mismos cardinales respectivos que  $A$  y  $B$  (Figura 1) (cf. (Gras, 2005) y (Lebart et al., 2006)). La variable aleatoria asociada se denota  $N_{a\wedge\bar{b}}$ .

La calidad de la regla  $a \rightarrow b$  será intuitivamente mejor cuando  $\text{Prob}[N_{a\wedge\bar{b}} > n_{a\wedge\bar{b}}]$  sea próxima a 1: dicho de otro modo, en general, se observa más contraejemplos en circunstancias de aleatoriedad que en la muestra observada.

---

<sup>1</sup> cf. Actes de la 3<sup>e</sup> Rencontre ASI 3 de Palerme, 6-8/10/05, GRIMM, Université de Palerme

En ese caso, el puro azar conduce así, en promedio, a más contraejemplos que los que se han observado.

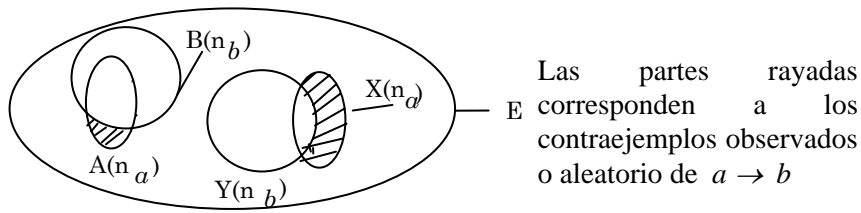


Fig. 1: *Representación conjuntista*

El método de selección al azar de  $X$  e  $Y$ , bajo una hipótesis a priori de independencia de  $a$  y  $b$ , conduce a distintas opciones para la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $N_{a \wedge b}$ . Dos de estas modelizaciones se utilizan generalmente en ASI, llevándonos al modelo de Poisson y al modelo binomial (Gras, 1979; Lerman, 1981a y Lerman et al. 1981b). Se centra y reduce (tipifica) esta variable dando lugar a  $Q(a, \bar{b})$ ; cuya observación contingente, su realización, es  $q(a, \bar{b})$ . Por ejemplo, en el caso de Poisson, se obtiene:

$$q(a \wedge b, \bar{c}) = \frac{n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n}}}$$

La intensidad de implicación se define entonces como  $\varphi(a, b) = \text{Prob}[Q(a, \bar{b}) > q(a, \bar{b})]$ , cuyo valor aproximado, usando la gaussianidad centrada y reducida asintótica, es:

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a, \bar{b})}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1)$$

Cuanto más negativo sea  $q(a, \bar{b})$ , mejor será la calidad de la regla  $a \rightarrow b$ .

### 3 Interpretación e ilustración de las reglas de excepción

Sean  $A, B, C$  y  $A \cap B$  los subconjuntos de individuos de  $E$  que verifican las variables  $a, b, c$  y  $(a \text{ y } b)$ , respectivamente. En la situación aquí mostrada, las

variables son binarias, pero el ASI permite considerar de igual modo otros tipos de variables (Gras 2005).

### 3.1 Dos enfoques para la caracterización de las reglas de excepción

Supongamos la situación prototípica de las reglas de excepción:  $a \rightarrow c$ ,  $b \rightarrow c$  y  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$  (mientras que  $(a \text{ y } b) \rightarrow c$  es de peor calidad). Ésta se expresa, en términos conjuntistas, por una cuasi-inclusión de los conjuntos de individuos, a saber:  $A$  y  $B$  están mayoritariamente incluidos en  $C$ , pero  $A \cap B$  está, sobre todo, contenido en el complementario  $\bar{C}$ . La ilustración siguiente muestra la situación conjuntista.

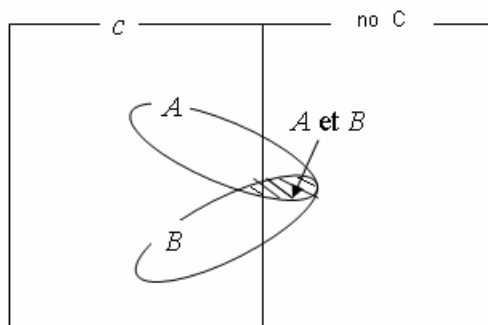


Fig. 2: Aparición de una regla de excepción conjuntista

En el marco del ASI, dos enfoques podrían permitirnos destacar esta situación.

El primer enfoque se basa en el análisis de la intensidad de implicación  $\varphi(a,b)$  según la teoría presentada en la Sección §2. Éste nos permite decidir el rechazo de  $(a \text{ y } b) \rightarrow c$  y, por contra, hace aparecer una intensidad, nada despreciable en ocasiones, de  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$  que justifica que se tenga en cuenta como regla de excepción. Una representación gráfica de las relaciones implicativas entre las reglas elementales anteriores se ilustrará en la Sección § 3.2.

El segundo enfoque se basa en la extensión, que hemos propuesto, de reglas a  $R$ -reglas (reglas de reglas) del tipo  $R \rightarrow R'$ , donde  $R$  y  $R'$  son a su vez reglas (Gras y Kuntz, 2005). Intuitivamente, estas reglas son comparables a las que aparecen en matemáticas, donde un teorema  $R$  tiene por consecuencia otro teorema  $R'$  o se continua con un corolario  $R'$ . Evidentemente, sólo se trata de una metáfora, pues en ASI se consideran reglas parciales, no estrictas, y que por tanto no siguen la lógica

formal más que en casos excepcionales. Éstas se construyen según un algoritmo recursivo utilizando un índice llamado « cohesión ». Éste informa de la calidad de las relaciones implicativas de las variables de la regla  $R$  con las variables de la regla  $R'$ .

Recordemos que, en lógica formal, la regla generalizada, regla de regla, o  $R$ -regla,  $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ , compuesta por las reglas  $R_1 = (b \Rightarrow c)$  y  $R_2 = (a \Rightarrow R_1)$ , es cierta si y sólo si lo es la regla  $(a \text{ y } b) \Rightarrow c$  - son lógicamente equivalentes - donde las variables  $a$ ,  $b$  y  $c$  pueden ser a su vez reglas (Gras y Kuntz, 2005). Ahora bien, hemos observado, en el examen de las reglas elementales de la forma  $\alpha \rightarrow \beta$ , que  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$ , regla de excepción, está, normalmente, en contradicción semántica con  $(a \rightarrow c \text{ y } b \rightarrow c)$  y que esta conjunción es más bien compatible formalmente con  $(a \text{ y } b) \rightarrow c$ .

Del mismo modo, la  $R$ -regla  $a \rightarrow (b \rightarrow c)$  está en contradicción formal con  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$ . Pero al estar en el marco del ASI, donde las reglas son parciales, esta última regla puede aparecer aunque sea inesperada. Diremos en ese caso, como anteriormente, que  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$  es **una regla de excepción** de la  $R$ -regla  $a \rightarrow (b \rightarrow c)$ . Un árbol jerárquico ilustra en el párrafo siguiente este enfoque por  $R$ -reglas.

### 3.2 Ejemplo numérico

Hemos creado un fichero ficticio de 200 individuos (cf. una tabla parcial del mismo se muestra en el Anexo), individuos sobre los que observamos las variables binarias:  $a$ ,  $b$ ,  $a \wedge b$ ,  $c$  y  $\bar{c}$ . Los valores asociados de las intensidades de implicación se muestran en TAB 1. Se han obtenido con el programa CHIC (Couturier y Gras, 2005), el cual permite los cálculos y representaciones gráficas de conjuntos de reglas obtenidos de los datos,

	$a$	$b$	$c$	$\bar{c}$	$a \wedge b$
$a$	0.00	0.79	0.89	0.08	0.89
$b$	0.79	0.00	0.84	0.10	0.88
$c$	0.68	0.67	0.00	0.00	0.36
$\bar{c}$	0.32	0.33	0.00	0.00	0.64
$a \wedge b$	1.00	1.00	0.03	0.97	0.00

Tab. 1: Intensidades de implicación asociadas a un juego de datos



Señalemos las frecuencias de aparición de las variables:  $n_a = n_b = 12$ ;  $n_{a \wedge b} = 7$ ;  $n_c = 50$ . Las intensidades de implicación asociadas son:

$$\varphi(a, c) = 0.89; \varphi(b, c) = .84, \varphi((a \wedge b), c) = 0.03,$$

mientras que  $\varphi((a \wedge b), \bar{c}) = 0.97$ ; lo que confirma la presencia de una regla de excepción.

a) Bajo el primer enfoque de reglas elementales, un análisis de la tabla completa mediante CHIC produce el gráfico implicativo (Figura 3.a) y se constata la buena calidad de implicación de  $a$  y de  $b$  sobre  $c$ . Se constata igualmente que se tiene  $a \rightarrow c$  y  $b \rightarrow c$ . Dado que CHIC permite conjunciones de variables, se obtiene esta vez el fenómeno relacionado a la existencia de una regla de excepción (Figura 3.b).

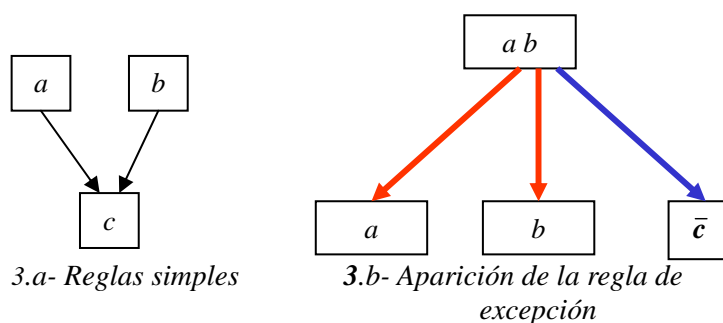


Fig. 3: Grafo implicativo con las reglas simples y con conjunción

De manera general en ASI, nos parece que las tres condiciones siguientes son favorables a la aparición de una regla de excepción de  $a \wedge b$  sobre no  $c$ :

Una cierta calidad de implicación de  $a$  y de  $b$  sobre  $c$ ; esta condición de sentido común conduce a que la regla  $(a \wedge b) \rightarrow c$  sea la esperada, y no la regla  $(a \wedge b) \rightarrow \bar{c}$ , que lo va a ser a la postre;

Una mala calidad de parecido entre  $(a \wedge b)$  y  $c$  ( $n_{a \wedge b \wedge c}$  es un valor bajo);

Una buena calidad de parecido entre  $a$  y  $b$  cuando la referencia es  $\bar{c}$  ( $n_{a \wedge b \wedge \bar{c}}$  es un valor alto, relativo a  $n_{a \wedge b}$ ).

b) Bajo el segundo enfoque, relativo a este ejemplo numérico,  $a \rightarrow b$ , débilmente (.81), y  $a \rightarrow c$  y  $b \rightarrow c$  un poco más fuertemente (.85 y .89). Por consiguiente, la R-regla  $a \rightarrow (b \rightarrow c)$  queda confirmada según el ASI y expresada

por medio del programa CHIC. Los siguientes árboles ilustran respectivamente, por una parte, la regla generalizada  $a \rightarrow (b \rightarrow c)$ , donde se observa que  $a$  y  $b$  no tienen relación implicativa alguna con  $c$ , y por otra, que la regla de excepción  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$  se obtiene en cuanto se hace la conjunción de  $a$  y  $b$ .

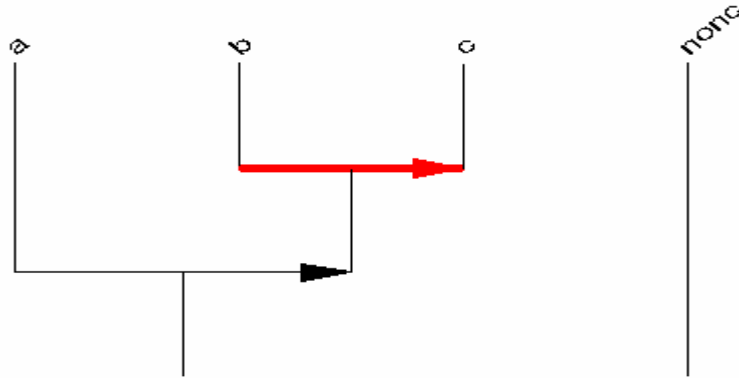


Fig. 4: Representación jerárquica de la R-regla  $a \rightarrow (b \rightarrow c)$

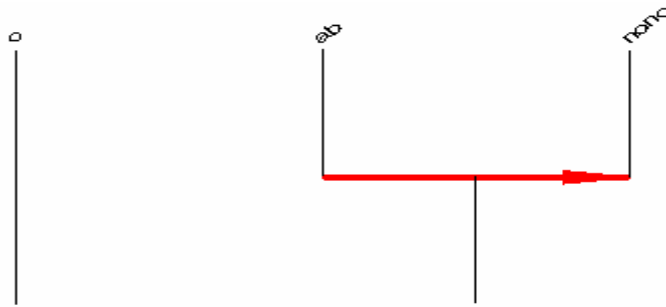


Fig. 5: Representación jerárquica de la R-regla de excepción  $(a \text{ y } b) \rightarrow \bar{c}$

Dicho de otro modo, la ausencia de coherencia entre el árbol obtenido de los datos (Figura 4) y el árbol creado tras la conjunción de las variables (Figura 5) testifica la aparición de la regla de excepción. Ésta ha podido ser observada de modo análogo gracias a la falta de coherencia entre las dos representaciones de los grafos implicativos.

Así pues, al igual que con el enfoque gráfico recién presentado, la doble construcción de la jerarquía implicativa: variables elementales (Figura 3a) y

posteriormente conjunciones de variables (Figura 3b), permite, tras el examen de la no coherencia, descubrir la existencia de una R-regla de excepción.

#### 4 Relación entre las intensidades de implicación de $a \wedge b$ sobre $c$ y sobre no $c$

Recordemos que, en ASI, modelizamos la implicación de  $a$  sobre  $b$  de dos formas: con una ley de Poisson de parámetro  $\lambda = n_a n_{\bar{b}} / n$ ; con una ley binomial de parámetros  $n$  y  $p = n_a n_{\bar{b}} / n.n$ .

La modelización hipergeométrica se descarta por no distinguir entre implicación y su contra recíproca (Gras et al., 1996b).

Establezcamos para cada uno de estos modelos las intensidades de implicación de la conjunción  $a \wedge b$  sobre las variables  $c$  y no  $c$  (denotado  $\bar{c}$ ). Usaremos la sencilla relación:  $n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} = n_{a \wedge b} - n_{a \wedge b \wedge c}$ .

##### 4.1 Modelo de Poisson

a) **Primer enfoque por reglas elementales**, bajo este modelo, para las implicaciones  $a \wedge b \rightarrow \bar{c}$  y  $a \wedge b \rightarrow c$ , respectivamente, los índices  $q_1(a \wedge b, c)$  y  $q_2(a \wedge b, \bar{c})$  son

$$q_1 = \frac{n_{a \wedge b \wedge c} - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n}}} \quad (2)$$

Para que la implicación  $a \wedge b \rightarrow \bar{c}$  sea de buena calidad, es necesario que  $q_1$  sea negativo.

En efecto, el número de contraejemplos observados  $n_{a \wedge b \wedge c}$  debe ser inferior a aquel que tendría por el azar, bajo hipótesis de independencia entre  $a \wedge b$  y  $c$ , sea esta media  $\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}$ .

Se encuentra ahora un argumento que justifica el caso (2) del párrafo anterior. De las definiciones (2) se deduce:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{n_{a \wedge b} - n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}} = - \frac{n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} \cdot n - n_{a \wedge b} (n - n_c)}{\sqrt{n \cdot n_{a \wedge b} \cdot n_c}} \\
 &= \frac{n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}} = -q_2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n}}}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}}
 \end{aligned}$$

Finalmente:  $q_1 = -q_2 \sqrt{\frac{n_{\bar{c}}}{n_c}}$ , es decir,  $\frac{q_1}{q_2} = -\sqrt{\frac{n_{\bar{c}}}{n_c}}$ .

$q_1$  y  $q_2$  son claramente de signos contrarios, lo que va acorde a la intuición. Pero además, el tamaño de positividad de  $q_2$  induce el de negatividad de  $q_1$ .

En el sentido de la intensidad de implicación (clásica), para que la regla  $a \wedge b \rightarrow \bar{c}$  sea considerada como de excepción, y aparezca, la diferencia  $\varphi(a \wedge b, \bar{c}) - \varphi(a \wedge b, c)$  debe ser positiva y suficientemente grande:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q_1}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-q_1 \sqrt{\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q_1}^{-q_1 \sqrt{\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{3}$$

**Consecuencia 1.** Habrá aparición de regla de excepción:

- cuando  $q_1$  sea negativo, es decir cuando  $\frac{n_{a \wedge b \wedge c}}{n} < \frac{n_{a \wedge b}}{n} \cdot \frac{n_c}{n}$  (infra-independencia) ;
- de mayor calidad cuanto mayor sea el conjunto C, de ejemplos de c, respecto al conjunto de ejemplos de la negación no c. La fuerza de la intensidad de la excepción será comparable al valor de la integral gaussiana sobre el intervalo  $[q_1 ; -q_1 \sqrt{\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}}]$ . Además, la regla esperada y la de excepción coinciden si  $q_1 = q_2 = 0$ .

Así pues, es el caso de independencia entre  $a \wedge b$  y  $\bar{c}$ , y por tanto entre  $a \wedge b$  y  $c$ , el que hace desaparecer la regla de excepción.

**b) Bajo el enfoque de R-reglas**, considerando la regla  $(b \rightarrow c)$  como variable binaria, es decir, tomando el valor 0 si  $b=1$  y  $c=0$ , y el valor 1 en los otros casos, los contraejemplos a la regla son en cantidad  $n_{b \wedge \bar{c}}$ . En estas condiciones, los contraejemplos a la R-regla  $a \rightarrow (b \rightarrow c)$  aparecen cuando  $a$  toma el valor 1 mientras que  $(b \rightarrow c)$  toma el valor 0, es decir cuando  $b \wedge \bar{c}$  toma el valor 1. Por consiguiente, el número de estos contraejemplos es  $n_{a \wedge b \wedge \bar{c}}$  y el índice de implicación asociado a la R-regla, bajo la **modelización de Poisson** de la implicación, es por tanto:

$$q_3 = \frac{n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} - \frac{n_a \cdot n_{b \wedge \bar{c}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a \cdot n_{b \wedge \bar{c}}}{n}}} = \frac{n \cdot n_{a \wedge b \wedge \bar{c}} - n_a \cdot n_{b \wedge \bar{c}}}{\sqrt{n \cdot n_a \cdot n_{b \wedge \bar{c}}}}$$

Se constata que este índice es diferente al asociado a la regla  $a \wedge b \rightarrow c$ , que es la regla elemental esperada de la conjunción  $a \rightarrow c$  y  $b \rightarrow c$ . Por esto, los indicadores que nos permitirán predecir la existencia de una regla de excepción en este enfoque jerárquico serán distintos a los que nos lo permitían usando el enfoque del grafo implicativo.

Recordemos pues que el índice de implicación de  $(a \wedge b) \rightarrow \bar{c}$  es:

$$q_1 = \frac{n_{a \wedge b \wedge c} - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n}}} = \frac{n \cdot n_{a \wedge b \wedge c} - n_{a \wedge b} \cdot n_c}{\sqrt{n \cdot n_{a \wedge b} \cdot n_c}}$$

Se demuestra, por transformación de los dos índices, que  $q_1$  es negativo (y la regla de excepción será válida) cuando  $q_3$  sea positivo (y la regla esperada no aparezca) si y sólo si:

$$\frac{n_{a \wedge b}}{n_a} > \frac{n_{b \wedge \bar{c}}}{n_{\bar{c}}}$$

Es decir, si la frecuencia condicional de  $b$  en  $a$  es superior a su frecuencia en  $\bar{c}$ . Recíprocamente, si esta desigualdad se observa en el otro sentido, la regla esperada aparece, mientras que la de excepción deja de existir.

En el ejemplo numérico que ilustra la regla de excepción  $a \wedge b \rightarrow \bar{c}$ , tenemos:

por una parte:  $n_{a \wedge b} = 7$ ,  $n_b = 24$ , es decir  $\frac{n_{a \wedge b}}{n_a} = 0.29$ , y,

por otra parte:  $n_{b \wedge \bar{c}} = 8$ ,  $n_{\bar{c}} = 100$ , es decir  $\frac{n_{b \wedge \bar{c}}}{n_{\bar{c}}} = 0.08$ . La desigualdad se cumple sobradamente.

Este resultado analítico es distinto al obtenido bajo el enfoque gráfico, lo que confirma la diferencia de significado de las dos representaciones de la implicación.

#### 4.1. Modelo binomial

Llamemos  $q'_1$  y  $q'_2$  respectivamente a los índices de implicación respectivos de  $a \wedge b \rightarrow \bar{c}$  y  $a \wedge b \rightarrow c$ , cuando el modelo de selección aleatoria de las partes  $A$ ,  $B$  y  $C$  es binomial. En ese caso, mediante un cálculo comparable al modelo anterior, se obtiene

$$\frac{q'_1}{q'_2} = - \frac{\sqrt{n_{\bar{c}}(n^2 - n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}})}}{\sqrt{n_c(n^2 - n_{a \wedge b} \cdot n_c)}} \quad (4)$$

Sea

$$k(a,b,c) = \left[ \frac{\left(1 - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n^2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Entonces,

$$\frac{q'_1}{q'_2} = - \sqrt{\frac{n_{\bar{c}}}{n_c}} \cdot k(a,b,c) \quad (6)$$

y la diferencia  $\varphi(a \wedge b, \bar{c}) - \varphi(a \wedge b, c)$  entre las intensidades de implicación es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q'_1}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-q'_1 \sqrt{\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}} \cdot k(a,b,c)}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q'_1}^{-q'_1 \sqrt{\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}} \cdot k(a,b,c)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (7)$$

**Consecuencia 2.** Para el modelo binomial, la diferencia entre las intensidades de implicación será, no sólo función del cociente  $\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}$ , sino también de  $k(a,b,c)$  (5).

Este coeficiente mayor, y refuerza así el efecto de la ratio  $\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}$ , cuando

$$1 - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_{\bar{c}}}{n^2} \gg 1 - \frac{n_{a \wedge b} \cdot n_c}{n^2}, \text{ es decir, cuando } \frac{n_{a \wedge b}}{n} \cdot \frac{n_c}{n} \gg \frac{n_{a \wedge b}}{n} \cdot \frac{n_{\bar{c}}}{n}.$$

Ambos miembros de esta desigualdad no son otros que, de izquierda a derecha, las probabilidades respectivas del número de contraejemplos de las implicaciones  $a \wedge b \rightarrow \bar{c}$  y  $a \wedge b \rightarrow c$  (bajo el modelo binomial, donde las variables  $a \wedge b$  y  $c$  serían independientes). Así pues, cuanto más se espere una refutación de  $a \wedge b \rightarrow \bar{c}$ , a la vista de  $n_{a \wedge b}$  y de  $\bar{c}$ , el carácter sorprendente, *excepcional*, de esta regla quedará más manifiesta por la constatación de un número reducido de contraejemplos observados, a saber  $n_{a \wedge b \wedge c}$ . Éstos la validarían en detrimento de  $a \wedge b \rightarrow c$  (argumento favorable a la conjetura 3 de la Sección § 3.2). La desigualdad muestra la « contribución activa a la excepción » a la relación  $\frac{n_c}{n_{\bar{c}}}$ , contribución que aportan los individuos de la premisa, de cardinal  $n_{a \wedge b}$ , en los de la tesis, de cardinal  $n_{\bar{c}}$ .

Esta consecuencia 2, ligada al modelo binomial, nos parece, entonces, de más riqueza que la consecuencia 1, pues nos proporciona una relación de control más fina entre los parámetros que bajo el modelo de Poisson para el carácter de excepción. Este fenómeno, ciertamente relacionado con el número de parámetros de la definición del modelo binomial, se recompensa sin embargo con un interés que el programa CHIC permite explotar a través de las opciones de su menú.

**Nota:** A título de comparación, interesémonos en otro índice de medida de calidad de reglas, la *confianza*  $c$ , que forma parte de otros índice de calidad importantes (Lenca et al. 2004). Ésta se expresa como:

$$c(a \rightarrow c) = \frac{n_{a \wedge c}}{n_a} \text{ (denotada usualmente: } \frac{\Pr[a \wedge c]}{\Pr[a]}, \text{ y dicho de otro modo}$$

probabilidad condicional de  $c$  sabiendo  $a$ ).

La relación entre las reglas que hemos examinado es entonces:

$$c(a \wedge b \rightarrow \bar{c}) = \frac{n_{a \wedge b \wedge \bar{c}}}{n_{a \wedge b}} = 1 - \frac{n_{a \wedge b \wedge c}}{n_{a \wedge b}} = 1 - c(a \wedge b \rightarrow c)$$

La regla de excepción tiene como medida el complemento a 1 de la regla esperada. Así pues, es independiente de los valores absolutos observados.

## 5 Conclusión

Cuando dos variables implican una tercera, que la conjunción de las primeras implique más bien la negación de la tercera, se considera por nuestra parte como regla de excepción, en un sentido próximo, pero distinto, al de Suzuki y Kodratoff (1999). Hemos estudiado e ilustrado mediante un ejemplo numérico y un ejemplo de genética, la expresión de este carácter excepcional. Posteriormente hemos precisado las relaciones entre los parámetros de las variables bajo las dos modelizaciones sobre las que se construye el Análisis Estadístico Implicativo: un modelo de Poisson y un modelo binomial, ambos convergiendo hacia el mismo modelo gaussiano.

Hemos evocado un enfoque complementario para la detección de estas reglas, basado en trabajos de los últimos años sobre R-reglas (Gras y Kuntz, 2005). La construcción de una jerarquía implicativa asociada no ha sido desarrollada inicialmente en este objetivo. Sin embargo, constituye una vía de exploración tanto desde el punto de vista algorítmico como el metodológico, relativo a la interpretación de los que podrían ser las “R-reglas de excepción”.

## Bibliografía

- Agrawal, R.; Imiliensky, T.; Swami, A. (1996). *Mining association rules between sets of items in large databases*. Proc. of the ACM SIGMOD'93, p. 679-696, AAAI Press.
- Bruhat, G. (1959). *Optique*, Masson, Paris.
- Couturier, R.; Gras, R. (2005). *CHIC : Traitement de données avec l'analyse implicative*, Extraction et Gestion des Connaissances, Volume II, RNTI, Cepadues, Paris, p.679-684.
- Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Rennes 1.
- Gras, R.; Ratsimba-Rajohn, H. (1996a). *Analyse non symétrique de données par l'implication statistique*. RAIRO-Recherche Opérationnelle, 30(3), 217-232.
- Gras, R.; Ag Almouloud, S.; Bailleul, M.; Larher, A.; Polo, M.; Ratsimba-Rajohn, H.; Totohasina, A. (1996b). *L'implication Statistique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.



- Gras, R.; Kuntz, P.; Briand, H. (2001). *Les fondements de l'analyse statistique implicative et quelques prolongements pour la fouille de données*, Mathématiques et Sciences Humaines, n° 154-155, pp. 9-29.
- Gras, R.; Kuntz, P.; Régnier, J. (2004). *Significativité des niveaux d'une hiérarchie orientée en analyse statistique implicative*, Numéro spécial Classification, Revue des Nouvelles Technologies de l'Information, Cépaduès.
- Gras, R. (2005). *Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices*, Actes de la 3ème Rencontre Internationale A.S.I., Supplément n° 15 de la Revue « Quaderni di Ricerca in Didattica », p. 9-33, Université de Palerme.
- Gras, R.; Kuntz, P. (2005). *Discovering R-rules with a directed hierarchy*, Soft Computing, A fusion of Foundations, Methodologies and Applications, vol. 10, n°5, p. 453-460.
- Gras, R.; Kuntz, P.; Suzuki, E. (2007). *Une règle d'exception en Analyse Statistique Implicative*, Extraction des Connaissances (EGC'07), Volume1, RNTI-E-9, Cépaduès Editions, , p.87-98, ISBN : 1764-1667
- Kuntz, P. (2005). *Classification hiérarchique orientée en ASI*, Actes de la 3ème Rencontre Internationale A.S.I., Supplément n° 15 de la Revue « Quaderni di Ricerca in Didattica », p.53-62, Université de Palerme.
- Lehn, R. (2000). *Un système interactif de visualisation et de fouille de règles pour l'extraction de connaissances dans une base de données*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.
- Lebart, L.; Piron, M.; Morineau, A. (2006). *Statistique exploratoire multidimensionnelle*. 4<sup>ème</sup> édition, Science sup, Dunod.
- Lenca, P.; Meyer, P.; Vaillant, P.; Picouet, P.; Lallich, S. (2004). *Evaluation et analyse multi-critères de qualité des règles d'association*, Mesures de qualité pour la fouille de données, RNTI-E-1, Cépaduès, p. 219-246.
- Lent, B.; Swami, A.; Widow, J. (1997). *Clustering association rules*. Proc. of the 13th Int. Conf. on Data Engineering, p. 220-231.
- Lerman, I. (1981a). *Classification et analyse ordinaire des données*, Dunod.
- Lerman, I.; Gras, R.; Rostam, H. (1981b). *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour données binaires*, Mathématiques et Sc. Humaines, n°74, 5-35.
- Suzuki, E.; Kodratoff, Y. (1999). *Discovery of surprising exception rules based on intensity of implication*. Principles of data mining and knowledge discovery science. Springer, p 184-195.
- Suzuki, E.; Zytchow, J. (2005). *Unified algorithm for undirected discovery of exception rules*, Int. J. of Intelligent Systems, vol. 20, Wiley, p. 673-69.

**Anexo**

Hemos construido un fichero ficticio de 200 individuos sobre los que observamos las variables binarias: a, b,  $a \wedge b$ , c y no c. He aquí las primeras 20 líneas de la tabla. Son las 4 primeras las que intervienen principalmente en la aparición de la regla de excepción:

individuos	a	b	$a \wedge b$	c	no c
1	1	1	1	0	1
2	1	1	1	0	1
3	1	1	1	0	1
4	0	1	0	0	1
5	1	0	0	1	0
6	0	1	0	1	0
7	1	0	0	1	0
8	0	1	0	1	0
9	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0
11	1	0	0	1	0
12	0	1	0	1	0
13	1	0	0	1	0
14	0	1	0	1	0
15	1	0	0	1	0
16	0	1	0	1	0
17	1	0	0	1	0
18	0	1	0	1	0
19	1	0	0	1	0
20	0	1	0	1	0
....	....	....	....	....	....

# Una medida comparativa en didáctica de las matemáticas entre el análisis a priori y la contingencia

Filippo Spagnolo \*, Régis Gras \*\*, Jean-Claude Régnier\*\*\*

Traducido por los autores

\*G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche),  
Department of Mathematics, University of Palermo.  
via Archirafi 34, 90123 Palermo (Sicily).  
[spagnolo@math.unipa.it](mailto:spagnolo@math.unipa.it)

\*\* Laboratoire d'Informatique de Nantes Atlantique FRE CNRS 2729  
Equipe COD - Connaissances & Décision  
Site Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes  
La Chantrerie BP 60601 44306 Nantes cedex  
[regisgra@club-internet.fr](mailto:regisgra@club-internet.fr)

\*\*\* Université de Lyon  
86 Rue Pasteur 69007 Lyon France  
[jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr](mailto:jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr)

**Resumen.** En didáctica de las Matemáticas, pero más generalmente en las ciencias humanas, numerosas investigaciones utilizan análisis cualitativos para falsificar experimentalmente hipótesis formuladas a priori. Tal criterio metodológico, aplicado a una investigación, resulta muy a menudo insuficiente para analizar todas las variables en juego de los fenómenos de contingencia de la enseñanza/aprendizaje, no obstante en ciertos casos (análisis puntual de los protocolos, de vídeo, etc.), permite encontrar algunas relaciones interesantes. Pero si el número de sujetos es demasiado grande, el análisis cualitativo no logra recuperar todas las relaciones existentes entre las variables en juego. Un análisis cuantitativo sobre una base estadística se impondrá y será completado por un análisis cualitativo, indispensable para una interpretación contextual. Esta comunicación presenta una medida que permite confrontar estadísticamente, el análisis a priori y la contingencia.

## 1 Datos

Los datos de una investigación en un contexto de prueba de evaluación de una lección, generalmente, están compuestos de los siguientes elementos:

- un conjunto de ítems o variables  $V$  en número  $v$ ,
- un conjuntos de sujetos  $Y$  en número  $n$ ,
- un conjunto  $W$  de actitudes, concepciones, comportamientos generales esperados en el curso de la prueba en la cual los sujetos tienen que responder a los ítems  $V$ .

Sobre la base de estos datos, los objetivos de la investigación de comparación entre aquello que se espera y aquello que se observa, son dobles:

- el producto  $W \times V$  que permite extraer relaciones a priori entre las variables,
- el producto  $E \times V$  que representa el comportamiento observado de los  $n$  sujetos según las  $v$  variables.

## 2 Problemática

El análisis a priori permite evidenciar relaciones de similitud y relaciones implicativas a priori entre las variables. Estas relaciones son, por supuesto, hipotéticas y basadas sobre el conocimiento de los aprendizajes conocidos o supuestos conocidos y de las condiciones de enseñanza. Aquí, nos interesamos esencialmente en las relaciones implicativas, del conocimiento de las reglas, según el vocabulario del “Data mining”. Se trata entonces de comparar las calidades implicativas de las relaciones del tipo  $a \Rightarrow b$  obtenidas por el análisis a priori, por ejemplo, por las concepciones de los alumnos ficticios, y aquellas conseguidas por el análisis a posteriori, que preferimos llamar análisis de la contingencia, porque se apoya directamente sobre la base de los comportamientos observados en una prueba.

Precisamos, en el **análisis a priori** los sujetos tradicionalmente considerados son concepciones o actitudes esperadas y no los sujetos reales (alumnos por ejemplo). Establecemos a priori reglas en esta “población” de “sujetos”: si tal variable  $a$  es observada entonces tal variable  $b$  generalmente lo es, a pesar de eventuales contra-ejemplos en número aceptable para el investigador, según un nivel de significación determinado. Así, el análisis a priori se hace sobre la base de los presupuestos justificados por la práctica, de las observaciones anteriores, de los resultados conseguidos por otras muestras, etc. Pero, en la **contingencia**, los sujetos son individuos, hic et nunc. En este caso, se observan cuasi-reglas del tipo

$a \Rightarrow b$  entre las mismas variables en la medida donde, muy a menudo, las observaciones están contaminadas por contra-ejemplos.

En la prueba a priori, prueba que es ficticia y pilotada por el investigador, el número de contra-ejemplos de la implicación  $a \Rightarrow b$  puede ser nulo cuando este investigador ha decidido que la observación de  $a$  conduce inexorablemente a aquella de  $b$ . Esto no ocurre en el caso real o contingencia, donde se puede observar un número débil de tales contra-ejemplos, sin que sea rechazada la hipótesis de que  $a$  implica generalmente  $b$ . Pero, al contrario, el investigador puede esperarse un número importante de contra-ejemplos en su estudio a priori y, más tarde, notar un débil número de contra-ejemplos de  $a \Rightarrow b$  en el análisis de la contingencia. Es esta distorsión, entre lo que es previsible y lo que es observado, lo que nos interesa. Para hacer esto, procedemos de un modo diferente al conducido en un estudio anterior (Spagnolo, 1997) en el cual no nos hemos referido a una muestra probabilística.

### **3 Formalización de la comparación entre el análisis a priori y el análisis de la contingencia**

#### **3.1 Retorno al ASI**

Para simplificar y apoyarnos más fácilmente en la intuición, consideramos el marco del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en el cual la calidad de la implicación  $a \Rightarrow b$  se mide con la intensidad de la implicación  $\varphi(a, \bar{b})$  llamada clásica.

Recordemos brevemente que  $\varphi(a, \bar{b})$  es la probabilidad de que el número de los contra-ejemplos observados en la prueba sea inferior a aquel obtenido por la variable aleatoria igual al número de los casos donde  $a$  y no  $b$  se observan simultáneamente y bajo la hipótesis de una independencia a priori entre  $a$  y  $b$ . Esta probabilidad se establece a partir de un modelo Binomial o de Poisson (Gras y Régnier, 2007) del cual se evidenciaría la variable aleatoria del número de contra-ejemplos. En este artículo elegimos el modelo de Poisson. Recordemos que bajo ciertas condiciones, la distribución Poisson es generalmente bien aproximada por una distribución gaussiana de la variable centrada reducida (Gordo et al., 2001):

$$Q(a, \bar{b}) = \frac{\text{Card}(X \cap \bar{Y}) - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}}$$

En esta expresión,  $n_a$  y  $n_{\bar{b}}$  son los números de observaciones en la prueba de  $a$  y de no  $b$  respectivamente,  $\text{Card}(X \cap \bar{Y})$  es la variable aleatoria que da el número de contra-ejemplos donde  $n_{a \wedge \bar{b}}$  es su valor observado.

Suponemos que la prueba contingente sea realizada con  $n$  sujetos. Es posible considerar todos los pares de variables  $(a, b)$ . A cada par, el investigador asocia con la regla  $a \Rightarrow b$  un valor a priori sobre la base de sus hipótesis didácticas y de los conocimientos de la población de los sujetos en juego. Denotemos por  $\Phi(a, \bar{b})$  a este valor establecido a priori<sup>1</sup>, por ejemplo, sobre la base de los contra-ejemplos estimados por la relación implicativa de  $a$  hacia  $b$ . Adoptamos entonces como criterio de desviación entre el análisis a priori y la contingencia, la diferencia entre los valores atribuidos  $\Phi(a, \bar{b})$  y los valores  $\varphi(a, \bar{b})$  observados en la prueba. Pero se puede también considerar sólo un número reducido de pares, por ejemplo, aquellos que aparecen en un camino del gráfico implicativo o en la relación implicativa entre dos clases de la jerarquía cohesitiva. Precisamente estudiaremos si es o no significativa esta desviación que servirá de criterio para afirmar o refutar la adecuación entre las relaciones emitidas a priori y aquellas que aparecen a través de la contingencia. Sea  $m$  este número de pares, que es a lo sumo igual a  $v(v-1)$ .

### 3.2 Construcción de una medida comparativa

Este criterio de la comparación entre los presupuestos y la contingencia ha sido adoptado por primera vez por F. Spagnolo (Spagnolo, 1997) y lo retomaremos aquí en grandes líneas.

Supongamos conocido el conjunto de las relaciones implicativas entre los pares o un subconjunto definido, por ejemplo, por el gráfico implicativo o por una clase de árbol cohesitivo. Sean  $\{(a_i, b_j)\}_{i,j}$  los pares fijados por el análisis

---

<sup>1</sup> No comentaremos aquí los detalles de los protocolos que explican el procedimiento de atribución de los valores de intensidad de la implicación a priori.

comparativo entre los valores de las intensidades de implicación a priori  $\Phi_{i,j}$  de la regla  $a_i \Rightarrow b_j$  y los valores de intensidad realmente observados, llamados de contingencia,  $\varphi_{i,j}$ , de la misma regla. Se trata de comparar las dos filas de la tabla siguiente.

Intensidad de implicación a priori $\Phi$	$\Phi_{1,1}$	$\Phi_{1,2}$	.....	$\Phi_{i,j}$	.....	$\Phi_{k,1}$
Intensidad de implicaciones contingentes $\varphi$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{1,2}$	.....	$\varphi_{i,j}$	.....	$\varphi_{k,1}$

Tab. 1

Parece entonces natural calcular y sumar las desviaciones entre las dos series de intensidades. En efecto, hemos elegido definir una distancia del tipo  $\chi^2$  entre ellas de la forma:

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i,j} \frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)} [\Phi(a_i, \bar{b}_j) - \varphi(a_i, \bar{b}_j)]^2} = \sqrt{\sum E_{i,j}} \quad (1)$$

El término normalizador  $\frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)}$  permite hacer relativa la desviación según la regla  $a_i \Rightarrow b_j$  del valor de la intensidad a priori. Su contribución a la distancia es, por otro lado, más importante que la intensidad a priori, permite acentuar las grandes distorsiones entre “el antes” y “el después”, es decir los eventuales errores de juicio del experto. Por convención, si  $\Phi(a_i, \bar{b}_j) = 0$ , se atribuirá a la desviación correspondiente  $E_{ij}$ , el valor del máximo de las desviaciones observadas en los casos donde este valor a priori no es nulo.

Spagnolo, en el artículo ya citado (1997) fijó a 0,25 el límite superior de la desviación total admisible para que la distancia no sea considerada como susceptible de rechazar la adecuación entre las dos series. Esta decisión sobre el sólo nivel numérico arbitrario, independientemente del número de las reglas en juego, parece necesitar un criterio estadístico diferente, nada menos que complementario, que constituirá nuestro segundo criterio.

### 3.3 Construcción de un test de hipótesis de adecuación a priori-a posteriori

Consideramos entonces la prueba aleatoria Binomial donde se realizarán muchas extracciones en número igual al efectivo  $m$ , de los pares del análisis del tipo  $(a_i, b_j)$  y donde la variable aleatoria sería el número de las extracciones que conducen a una diferencia determinada entre las dos variables de intensidad de implicación: a priori y contingente. La discordancia  $|\Phi(a_i, \bar{b}_j) - \varphi(a_i, \bar{b}_j)|$  es el valor observado de esta diferencia aleatoria.

Precisamos. El espacio fundamental  $\Omega$  es el espacio a partir del cual se define una variable aleatoria de  $m$  componentes  $\Theta(a_i, \bar{b}_j)$ : las intensidades  $\varphi(a_i, \bar{b}_j)$  son las realizaciones correspondientes en la prueba. A partir del espacio  $\Omega$ , supuesto probabilístico<sup>2</sup>, se define una variable aleatoria  $X_{i,j}$  igual al número de los casos donde las observaciones del tipo  $\varphi(a_i, \bar{b}_j)$  difieren de las intensidades a priori correspondientes  $\Phi(a_i, \bar{b}_j)$ , a lo sumo en algún número real  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [0; 1]$ . Este número  $\varepsilon$  es elegido libremente por el investigador que decide estimar la desviación que considera admisible entre las dos medidas asociadas a la regla  $a_i \Rightarrow b_j$ . Puede ser modificado a placer, en función del nivel de exigencia de la conformidad que quiere estimar.

Utilizamos puntualmente, por comodidad, las siguientes notaciones, considerando la indeterminación de esta regla:

$\Phi(a_i, \bar{b}_j)$ , valor a priori de  $\Phi$

$\varphi(a_i, \bar{b}_j)$ , valor observado de  $\varphi$ ,

---

<sup>2</sup> Demostramos en (Gras R. et al., 1996) que si  $\Theta(a, \bar{b})$  (a,b) es la variable aleatoria de la cual  $\varphi(a, \bar{b})$  es la realización en la prueba por los parámetros determinados y cuando el modelo asintótico gaussiano es elegido para modelar la variable  $Q(a, \bar{b})$  construida a partir del  $\text{Card}(X \cap \bar{Y})$  entonces:  $\forall \delta \in [0, 1]: \text{Pr ob}[\Theta(a; \bar{b}) \geq 1 - \delta] \approx \delta$ . Esta propiedad podría permitir una modelación probabilística explícita de  $\Omega$ .



por tanto, nuestro interés se orienta a la realización del evento  $A(\varepsilon)=\{|\Phi-\varphi|\leq\varepsilon\}$ . El criterio de decisión de adecuación *a priori-contingencia* se expresa a partir de  $n_{A(\varepsilon)}$ , número de veces donde la desviación observada satisface la desigualdad a un nivel de significación igual a  $\alpha$ , nivel de riesgo de 1ª especie.

Nuestra participación se organiza alrededor del razonamiento siguiente. Consideremos el evento  $A(\varepsilon)$ , concordancia puntual entre: a priori y a posteriori. Denotemos su probabilidad  $\text{Prob}\{A(\varepsilon)\}=\pi$ . Este valor puede ser interpretado como índice de confianza en la concordancia puntual entre el nivel de la confianza, (intensidad de implicación), atribuida a la implicación  $a \Rightarrow b$  en un análisis *a priori* del investigador y aquel obtenido por la observación (intensidad de implicación observada). La probabilidad de  $A(\varepsilon)$  puede ser estimada por

$$\hat{\pi} = \frac{n_{A(\varepsilon)}}{m}.$$

Supongamos entonces que el investigador emita una hipótesis relativa al valor de  $\pi$  que juzga aceptable, sea  $\pi_0$ . Esto lo conduce entonces a realizar el siguiente ensayo unilateral:

$$H_0: \pi \geq \pi_0$$

$$H_1: \pi < \pi_0$$

El rechazo de  $H_0$  traduce el rechazo de la tendencia a la concordancia, porque la probabilidad “verdadera” del evento “criterio concordante al nivel  $\varepsilon$ ” será más débil que aquella que el investigador tomó como referencia.

Recordemos un resultado clásico. La variable de decisión  $D$  que da el número de pares favorables al criterio y que está asociada con este ensayo, no es otra, bajo  $H_0$ , que la variable Binomial de parámetros  $m$  y  $\pi_0$ . El número de pares que verifica el criterio  $|\Phi-\varphi|\leq\varepsilon$  esperado es entonces  $m\pi_0$ . Para un nivel de riesgo  $\alpha$  de 1ª especie determinado, se trata de encontrar el número  $k$ , tal que:

$$\begin{cases} \text{Prob}\{D \leq k\} = \sum_{i=0}^{i=k} C_m^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{m-i} \leq \alpha \\ \text{Prob}\{D \leq k+1\} = \sum_{i=0}^{i=k+1} C_m^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{m-i} > \alpha \end{cases} \quad (2)$$

Se rechaza  $H_0$  si el número de pares que verifican el criterio  $|\Phi-\varphi|\leq\varepsilon$  es inferior o igual a  $k$ . En otras palabras, la región crítica es aquella constituida por los números enteros comprendidos entre 0 y  $k$ .

## 4 Ejemplo

Consideramos el ejemplo propuesto en el trabajo de Filippo Spagnolo (“Obstacles épistémologiques: Les Postulats de Eudoxe-Archimède”, Tesis de Doctorado, Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento al n.5, Palermo, 1995). El tema tratado en esta tesis es el Postulado de Eudoxo-Archimedes. En el anexo incluimos el análisis a priori de los comportamientos esperados de los 107 alumnos que responden al cuestionario. Estos comportamientos constituyen el conjunto de las variables a partir de las cuales se estimará *a priori* y luego se observará la intensidad de implicación de las reglas asociadas.

En un análisis a priori sobre el obstáculo epistemológico (Spagnolo 2006), podemos recuperar implicaciones entre grupos de variables.

Los elementos significativos y decisivos en el modelo del obstáculo epistemológico son:

1. la resistencia;
2. la persistencia;
3. el cambio de punto de vista;
4. la generalización.

Las variables del análisis a priori coinciden con las consideradas en el análisis a posteriori o de la contingencia (ver Anexo). Dicho de otro modo  $W=V$ . Aquí examinaremos las siguientes reglas generalizadas:

**$I_1$  : Si el obstáculo resiste y persiste entonces se tendrá un cambio del punto de vista. [Si  $(Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15})$  entonces  $(Q_8, Q_9, Q_{10})$ ].**

**$I_2$  : Si el obstáculo resiste y persiste entonces se tendrá una generalización [Si  $(Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15})$  entonces  $(Q_{11})$ ].**

Los alumnos que tienen un modelo de obstáculo que resiste y persiste pueden cambiar su punto de vista.

La tabla de las intensidades de implicación a priori para los 12 pares que constituyen la R-regla generalizada  $I_1$  de la jerarquía cohesiva es la siguiente<sup>3</sup>:

---

<sup>3</sup> Observemos por ejemplo :  $\Phi_{12, 8}$  es la implicación a priori de la variable  $Q_{12}$  sobre la variable  $Q_8$ . Las frecuencias respectivas de estas variables son 3 y 31.

$\Phi_{12,8}=0.99$	$\Phi_{12,9}=0.99$	$\Phi_{12,10}=1.00$
$\Phi_{13,8}=0.75$	$\Phi_{13,9}=0.79$	$\Phi_{13,10}=0.83$
$\Phi_{14,8}=0.99$	$\Phi_{14,9}=0.91$	$\Phi_{14,10}=0.99$
$\Phi_{15,8}=1.00$	$\Phi_{15,9}=1.00$	$\Phi_{15,10}=1.00$

Tab. 2: *Intensidad de implicación a priori*

La tabla de las intensidades de implicación contingentes entre los mismos pares es entonces:

$\varphi_{12,8}=0.98$	$\varphi_{12,9}=0.88$	$\varphi_{12,10}=0.65$
$\varphi_{13,8}=0.75$	$\varphi_{13,9}=0.79$	$\varphi_{13,10}=0.00$
$\varphi_{14,8}=0.66$	$\varphi_{14,9}=0.99$	$\varphi_{14,10}=0.65$
$\varphi_{15,8}=0.79$	$\varphi_{15,9}=0.82$	$\varphi_{15,10}=0.67$

Tab. 3: *Intensidad de implicación contingente*

Por ejemplo, el par (12; 8), formado por las variables 12 y 8, tiene una intensidad a priori de: 0.99 y una intensidad observada de: 0.98.

Aquí  $m=12$  pares considerados, porque constituyen una clase de la jerarquía cohesitiva.

Si aplicamos el criterio (1) de §3.2, obtenemos  $\Delta \approx 1,17$ . Si aplicamos el nivel considerado por Spagnolo, tenemos  $\Delta > 0,25$ , se concluye que la adecuación entre las dos series de intensidades, a priori/a posteriori, no es aceptable.

Aplicamos ahora el test descrito en §3.3. Elegimos para esto  $\varepsilon = 0,10$  y  $\pi_0 = 0,75$ , dicho de otro modo, aceptamos la adecuación, si en el curso de la experiencia encontramos al menos  $12 \times 0,75 = 9$  reglas para las cuales la desviación entre la intensidad de implicación a priori y la intensidad observada es inferior o igual a 0,10.

Aquí la hipótesis  $H_0$  se expresa entonces así: la probabilidad “verdadera” es igual a 0,75.

Por ejemplo, la regla  $Q_{14} \Rightarrow Q_9$  donde  $|\Phi_{14,9} - \varphi_{14,9}| = 0,08$ , presenta una desviación entre la intensidad teórica a priori y aquella contingente inferior a 0,10. En efecto, sólo tenemos 4 casos que verifican el evento

$$A(0,10) = \{|\Phi - \varphi| \leq 0,10\}.$$

La resolución del sistema de inecuaciones (2) asociada a la variable Binomial de parámetros (12; 0,75), da  $k=5$  y la región crítica es  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  para un

nivel de  $\alpha=0,05$ . Se verifica pues que el número de pares que satisfacen el criterio  $A(0,10)$  está en la zona crítica. Rechazamos  $H_0$  que equivale a no conservar la hipótesis de adecuación entre el análisis a priori y la contingencia.

Volviendo al problema del obstáculo epistemológico identificado por F. Spagnolo, se puede decir que si se encuentra igualmente rechazada la hipótesis según la cual se tiene efectivamente un cambio del punto de vista con respecto de la resistencia y a la persistencia del obstáculo.

Supongamos estar en el caso en el cual el investigador acepta una desviación de  $\varepsilon=0,20$ . Hay entonces 6 reglas que satisfacen el criterio  $A(0,20)$ . En este caso, no rechazamos  $H_0$ . Esto equivale a conservar la hipótesis de adecuación entre el análisis a priori y la contingencia, con un riesgo de 2ª especie.

Para evaluar este riesgo  $\beta$ , supongamos que el valor “verdadero” de  $\pi$  es 0,5, es decir 1 posibilidad sobre 2 de satisfacer al criterio de concordancia  $A(0,20)$ . Obtenemos:

$$\text{Pr ob}_{H_1} \{D \geq 6\} = \beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \sum_{k=6}^{12} \frac{12!}{k!(12-k)!} \approx 0,6127,$$

donde otra vez la potencia del test es de  $1-\beta \approx 0,3873$ .

## 5 Conclusiones

En el marco de la didáctica de las disciplinas, pero en cada investigación que se pueda decir científica, surge constantemente la cuestión de legitimidad, inevitable, de la validación o de la refutación de la hipótesis dada por el investigador. Dar un medio para valorar la desviación en términos cuantitativos entre las hipótesis a priori y las observaciones, la contingencia, lo a posteriori es el objeto de este artículo. En la otra publicación (Spagnolo F., 1997), lo hemos expresado mediante una distancia del tipo  $\chi^2$  como lo especificamos en § 3.2, pero sin referencia a una escala de medida probabilística. En este artículo lo expresamos con la ayuda de un test, el cual ilustramos con un ejemplo real.

## Bibliografía

Agrawal, R. et al. (1993). *Mining association rules between sets of items in large databases*, Proc. of the ACM SIGMOD'93.

- Bodin, A. (1996). *Improving the Diagnostic and Didactic Meaningfulness of Mathematics Assessment in France*, Annual Meeting of the American Educational Research Association AERA - New-York
- Couturier, R. (2001). *Traitement de l'analyse statistique implicative dans CHIC*, Actes des Journées sur la « Fouille dans les données par la méthode d'analyse implicative »
- Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1.
- Gras, R. (2000). *Les fondements de l'analyse implicative statistique*, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm>
- Gras, R.; Couturier, R.; Guillet, F.; Spagnolo, F. (2005). *Extraction de règles en incertain par la méthode statistique implicative*, Comptes rendus des 12èmes Rencontres de la Société Francophone de Classification, Montréal 30 mai-1<sup>er</sup> juin 2005, UQAM, p. 148-151.
- Gras, R.; Kuntz, P.; Briand, H. (2003). *Hiérarchie orientée de règles généralisées en analyse implicative*, Extraction des Connaissances et apprentissage, Hermès, p 145-157, ISSN 0992-499X, ISBN 2-7462-0631-5.
- Gras, R.; Régnier, J. (2007). *Différents modèle d'indice d'implication en Analyse Statistique Implicative*, soumis à Revue de Statistique Appliquée.
- Lerman, I. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod, Paris
- Lerman, I.; Gras, R.; Rostam, H. (1981). *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires*, I et II, Mathématiques et Sciences Humaines n° 74, p. 5-35 et n° 75, p. 5-47.
- Spagnolo, F. (1997). *L'analisi a priori e l'indice di implicazione statistica di Gras*, Quaderni di Ricerca in Didattica, n° 7, Palermo, p. 110-117
- Spagnolo, F. (2005). *L'Analisi Statistica Implicativa : uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche*, Troisième Rencontre Internazionale A.S.I. (Analyse Statistique Implicative), Octobre 2005, Palermo. Supplemento 2 al n.15 Quaderni di Ricerca in Didattica [http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl\\_quad\\_15\\_2.htm](http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl_quad_15_2.htm)
- Spagnolo, F.; Gras, R. (2004). *Fuzzy implication through statistic implication: a new approach in Zadeh's framework*, 23rd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS (IEEE), Banff, Canada, Edited by Scott Dick-Lukasz Kurgan-Petr Musilek-Witold Pedrycz-Mark Reformat (IEEE Catalog 04TH8736, ISBN 0-7803-8376-1), pp.425-429, Vol I.

## Anexo

Tabla de los comportamientos esperados. Se tienen que verificar mediante los ítems del cuestionario: por ejemplo, la respuesta positiva a la cuestión 9a corresponde al comportamiento Q1.

Q1 (9a)	<p><i>Connaissance du Postulat d'Euclide-Archimède (P.E.-A.) en termes opérationnels. Il faut déterminer un <math>n</math> tel que le multiple du segment <math>na &gt; b</math>. (<math>a &lt; b</math>). Formulation directe du Postulat. La représentation avec des petits tirets donne une liaison avec la mesure. Réponses attendue: <math>n &gt; 4</math>.</i></p> <p>Conocimiento del Postulado de Euclide-Arquímedes (P.E.-A.) en términos operacionales. Es necesario determinar un <math>n</math> tal que el múltiplo del segmento <math>na &gt; b</math>. (<math>a &lt; b</math>). Formulación directa del postulado. La representación con pequeños guiones da una conexión con la medida. Respuesta esperada: <math>n &gt; 4</math>.</p>
Q2 (10a)	<p><i>Question semblable à la précédente, mais le segment <math>b</math> est beaucoup plus grand et le segment <math>a</math> a été dessiné plus petit. Réponse attendue : <math>n &gt; 19</math>. Formulation directe du Postulat.</i></p> <p>Cuestión similar a la anterior, pero el segmento <math>b</math> es mucho mayor y se dibujó el segmento <math>a</math> más pequeño. Respuesta esperada: <math>n &gt; 19</math>. Formulación directa del postulado.</p>
Q3 (11a)	<p><i>Répondre affirmativement à l'existence du <math>n</math> tel que <math>na &gt; b</math>. Formulation directe du Postulat.</i></p> <p>Responder afirmativamente a la existencia de un <math>n</math> tal que <math>na &gt; b</math>. Formulación directa del postulado.</p>
Q4 (11b)	<p><i>Justifier la réponse donnée dans la question précédente. Formulation directe du Postulat.</i></p> <p>Justificar la respuesta dada a la cuestión anterior. Formulación directa del postulado.</p>
Q5 (12a)	<p><i>Connaissance du P.E.-A en termes opérationnels. Il faut déterminer un <math>n</math> tel que <math>(1/n)a &lt; b</math>. Réponse attendue: <math>n &gt; 3</math>. Formulation inverse du Postulat.</i></p> <p>Conocimiento del P. E.-A en términos operacionales. Es necesario determinar un <math>n</math> tal que <math>(1/n)a &lt; b</math>. Respuesta esperada: <math>n &gt; 3</math>. Formulación inviersa del postulado.</p>

<b>Q6</b> (13a)	<p><i>Répondre affirmativement à l'existence du <math>n / (1/n)a &lt; b</math>. Formulation inverse du Postulat.</i></p> <p>Responder afirmativamente a la existencia de un <math>n</math> tal que <math>(1/n)a &lt; b</math>. Formulación opuesta del postulado.</p>
<b>Q7</b> (14a)	<p><i>Formulation linguistique différente de la question précédente: "...il est toujours possible...".</i></p> <p>Formulación lingüística diferente de la cuestión anterior: "...es siempre posible...".</p>
<b>Q8</b> (15a)	<p><i>Changement du point de vue: Modèle du "Véronèse", non-Archimédien, en Géométrie. Réponse attendue: affirmer la non-validité du Postulat.</i></p> <p>Cambio del punto de vista: Modelo de "Véronèse", no Arquímedeano, en Geometría. Respuesta esperada: afirmar la invalidación del postulado.</p>
<b>Q9</b> (18a)	<p><i>Changement du point de vue, L'élève doit suivre la construction évoquée dans la proposition X.1.<sup>4</sup> d'Euclide et conclure à sa validité (angles rectilignes).</i></p> <p>Cambio del punto de vista, el alumno debe seguir la construcción mencionada en la proposición X.1<sup>4</sup> de Euclide y concluir su validez (ángulos rectilíneos).</p>
<b>Q10</b> (19a)	<p><i>Changement du point de vue, Validité de la proposition X,1 (angles curvilignes). (la question 17 indique comment confronter des angles curvilignes entre eux).L'élève doit effectuer une construction et conclure à la validité du PEA.</i></p> <p>Cambio del punto de vista, validez de la proposición X,1 (ángulos curvilíneos). (la cuestión 17 indica cómo confrontar dos ángulos curvilíneos entre sí). El alumno debe efectuar una construcción y concluir la validez del PEA.</p>

---

<sup>4</sup>**Proposición X.1:** Dadas dos cantidades distintas, si se sustrae de la mayor de ellas una parte mayor de su mitad, y si se hace siempre eso mismo, resultará una cantidad que será menor que la menor de las cantidades propuestas.

<b>Q11</b> (20a)	<p><i>Contexte généralisé (comparaison d'angles curviligne et rectiligne). L'élève doit rejeter la validité de la proposition X.1 dans ce cas.</i></p> <p>Contexto generalizado (comparación de ángulos curvilíneos y rectilíneos). El alumno debe rechazar la validez de la propuesta X.1 en este caso.</p>
<b>Q12</b> (20b)	<p><i>Résister aux contradictions avec la contingence: l'élève qui donne une justification de la X,1 (un contexte non Archimédien).</i></p> <p>Resistir a las contradicciones con la contingencia: el alumno que da una justificación del X,1 (un contexto no Arquimediano).</p>
<b>Q13</b> (20c)	<p><i>Pour réussir, l'élève donne un argument pour le rejet de du procédé de la X,1 dans un contexte non Archimédien.</i></p> <p>Para triunfar, el alumno da un argumento para el rechazo del método del X,1 en un contexto no Arquimediano</p>
<b>Q14</b> (21a)	<p><i>Confirmation: l'obstacle persiste: Affirmer la validité de la proposition X,1, pour un élève, c'est montrer qu'il ne parvient pas à éprouver son modèle interprétatif dans un contexte plus général.</i></p> <p>Confirmación: el obstáculo persiste: Afirmar la validez de la propuesta X,1, por un alumno, es poner de manifiesto que no llega a probar su modelo interpretativo en un contexto más general.</p>
<b>Q15</b> (22a)	<p><i>Confirmation de la position Q13: 1 = Affirmer la non-validité de la proposition X.1.</i></p> <p>Confirmación de la posición Q13: 1 = Afirmar la no validez de la proposición X.1.</p>
<b>Q16</b> (3a)	<p><i>Les élèves doivent chercher une relation d'ordre entre 3 triangles.</i></p> <p>Los alumnos deben buscar una relación de orden entre 3 triángulos.</p>
<b>Q17</b> (4a)	<p><i>Relation d'ordre entre 3 triangles (autres contextes).</i></p> <p>Relación de orden entre 3 triángulos (otros contextos).</p>
<b>Q18</b> (5a)	<p><i>Relation d'ordre entre 3 triangles (autres contextes).</i></p> <p>Relación de orden entre 3 triángulos (otros contextos).</p>
<b>Q19</b> (6a)	<p><i>R.O. entre angles rectilignes</i></p> <p>Relación de orden entre ángulos rectilíneos</p>
<b>Q20</b> (7a)	<p><i>R.O. entre angles curviligne (paraboles).</i></p> <p>Relación de orden entre ángulos curvilíneos (parábolas).</p>
<b>Q21</b> (8a)	<p><i>R.O. entre angles curvilignes (contingence).</i></p> <p>Relación de orden entre ángulos curvilíneos (contingencia).</p>



Una medida comparativa en didáctica de las matemáticas.....

<b>Q22</b> (16a)	<i>R.O. inclusion entre angles rectilignes.</i> Relación de orden inclusión entre ángulos rectilíneos.
<b>Q23</b> (17a)	<i>R.O. inclusion entre angles contingents.</i> Relación de orden inclusión entre ángulos contingentes.
<b>Q24</b> (17b)	<i>R.O. inclusion entre angles curviligne et contingence.</i> Relación de orden inclusión entre ángulos curvilíneos y contingencia.



# Reflexiones sobre el análisis a priori de los cuestionarios basadas en técnicas del Análisis Estadístico Implicativo

Pablo Gregori\*, Pilar Orús\*\*, Irene Pitarch\*\*\*

Departament de Matemàtiques, Universitat Jaume I de Castello,  
E-12071 Castellon (España)  
\*gregori@mat.uji.es  
<http://www3.uji.es/~gregori>  
\*orus@mat.uji.es  
<http://www3.uji.es/~orus>  
\*\*\*ipitarch@mat.uji.es

**Resumen.** El objetivo de esta comunicación es profundizar en la utilización del Análisis Estadístico Implicativo, en los análisis de cuestionarios que consideran como “datos” tanto los obtenidos experimentalmente como los obtenidos en los estudios a priori. Para ello se retomará el cuestionario elaborado por Pitarch (2002), su análisis a priori y sus datos empíricos. Con dicho cuestionario se pretendía caracterizar el trabajo lógico-matemático y los razonamientos de los alumnos de la ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria) al realizar el tratamiento de datos de una tabla booleana de datos primarios.

## 1 Introducción

Cuando el investigador (en Didáctica de las Matemáticas) diseña un cuestionario, intenta materializar en un conjunto de preguntas (ítems) la problemática que quiere estudiar, seleccionando un conjunto de aspectos de esta problemática que serán abordados a través de las diferentes preguntas. Brousseau y colaboradores (Brousseau y Lacasta, 1995; Orús, 1986, 1992, etc.), hacen especial hincapié en este proceso de elaboración y caracterización del cuestionario -el análisis a priori- introduciendo a nivel metodológico el análisis multivariante de los datos que proporcionan las matrices a priori (características  $\times$  cuestiones) del cuestionario; estos análisis permiten poner de manifiesto relaciones a priori entre las variables (las preguntas del cuestionario) en función de sus características y contrastarlas con el resultado de la experimentación: la muestra recogida establece unas relaciones entre los ítems del cuestionario que pueden ser, o no, similares a

las esperadas por el investigador y constituir, así pues, una fuente de información, a posteriori, que contraste el conocimiento anterior.

Para cada característica seleccionada, se puede interpretar que cada ítem del cuestionario posee, o no posee, la citada característica. Así se genera una matriz a priori booleana, y si el cuestionario genera también una tabla de datos binarios, cada característica se puede interpretar como un “individuo ficticio”, si consideramos conjuntamente los resultados a priori y a posteriori del cuestionario. Brousseau y Lacasta (1995) ya han mostrado esta utilización de las características de matrices a priori como “alumnos suplementarios” de la experimentación, en análisis multivariantes como el análisis factorial de correspondencias, y el análisis en componentes principales; también Orús y Gregori (2005) han utilizado la comparación de la coherencia de la estructura del cuestionario entre la matriz de datos reales y la matriz ampliada con los datos ficticios en el Análisis Estadístico Implicativo (ASI): si dicha comparación resulta positiva, la aparición de los individuos ficticios en los grupos óptimos para la tipicidad y contribución de individuos a la formación de clases o implicaciones, puede suponer una fuente de información que actualice los conocimientos a priori del investigador.

Otras contribuciones sobre la utilización del ASI en los análisis de datos que consideran la matriz a priori, se han basado en la comparación de los resultados gráficos, de los grafos de la clasificación, implicación y cohesión resultantes de los análisis con CHIC de los datos obtenidos de la experimentación (a posteriori) con los “datos ficticios” del experimentador (a priori). En esta opción, se ha comparado la coherencia de la estructura del cuestionario (los resultados del ASI), entre la matriz de datos reales y la matriz de “datos ficticios” (Orús y Pitarch, 2000; Pitarch, 2002; Pitarch y Orús, 2005).

Esta comparación directa de resultados gráficos es intuitiva para el usuario de ASI y puede resultar suficiente para interpretar mejor los resultados de los datos empíricos, considerando la matriz a priori como matriz explicativa de éstos. Pero puede ser complementada y medida, por los resultados numéricos (Spagnolo, 1997 y Spagnolo y Gras, 2007).

El objetivo de esta comunicación es profundizar en esta línea de utilización del ASI, en los análisis de cuestionarios que consideran “datos” tanto los obtenidos experimentalmente como los obtenidos en los estudios a priori.

Para ello se retomará el cuestionario elaborado por Pitarch (2002), su análisis a priori y sus datos empíricos. Con dicho cuestionario se pretendía recoger información y caracterizar el trabajo de los alumnos de la ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria) al realizar el tratamiento de una tabla de datos primarios.

## 1.1 Metodología utilizada

Queremos destacar dos aspectos diferenciados de nuestro trabajo en torno al cuestionario que denotaremos por Q (ver Anexos 1, 2 y 3) la aplicación del marco teórico de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986) -particularmente las nociones de "medio", "situación a-didáctica" e "ingeniería didáctica" para la elaboración y diseño de todo el cuestionario y del estudio a priori realizado (Pitarch y Orús, 2005) y por otro lado la utilización del CHIC, que nos ha permitido utilizar el ASI, para comparar los análisis a priori y a posteriori del cuestionario, es decir su caracterización y su experimentación; aspecto que centrará esta comunicación.

Los diferentes análisis del software estadístico CHIC se han utilizado para:

Analizar, a priori, el cuestionario diseñado. El estudio teórico de Q se plasmará en una matriz a priori del cuestionario (MAP). Esta matriz representa la caracterización de las preguntas del cuestionario según los diversos contenidos matemáticos que conllevan dichas preguntas. El análisis de similitudes de la matriz MAP, nos permitirá verificar la coherencia de los criterios elegidos para caracterizar a priori las cuestiones de Q. Si las clases resultantes nos ofrecen una estructura coherente del cuestionario, ésta se utilizará para continuar el análisis a priori, estableciendo las implicaciones que deberían verificarse en el interior de cada clase.

Analizar, a posteriori, las respuestas de los alumnos al cuestionario. Se utiliza CHIC sobre la matriz de datos (MP) que representan las respuestas (correcta/incorrecta) de los estudiantes. De esta forma se realiza el estudio a posteriori del cuestionario, mediante técnicas de ASI. Los grafos y árboles que se obtienen permiten analizar los resultados de los estudiantes en las diferentes cuestiones con respecto a su trabajo matemático, al utilizar una tabla de valores para contestar este cuestionario; CHIC nos ofrece la estructura global del cuestionario, en función de las respuestas de los alumnos y del tipo de análisis realizado.

Realizar un análisis comparativo entre los datos a priori y los resultados a posteriori, con el objetivo de obtener conclusiones del trabajo global. Se compararán las estructuras de Q resultantes en ambos análisis, para ver en qué medida los resultados de la experimentación, pueden explicarse en función de los criterios de las cuestiones, establecidos a priori. Se analizarán las implicaciones a posteriori entre las cuestiones, obtenidas en la experimentación, comparándolas con las implicaciones establecidas a priori entre las cuestiones, en función de sus características y conocimientos matemáticos.

La utilización del ASI y de CHIC ya ha sido presentada en otras investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, aportando algunos resultados, entre otros, para “medir” y modelizar situaciones didácticas a partir de la clasificación y la implicación (Bodin, 1996; Gras, 1995; Gras et al., 1996; Lerman, 1981; Lerman et al., 1981); también para facilitar la toma de decisiones didácticas en la elaboración de una ingeniería didáctica (Orús y Pitarch, 2000).

Nuestra comunicación es una nueva aportación en este campo, mostrando la potencialidad del ASI y del software CHIC (Couturier, 2000) para el análisis didáctico de un cuestionario Q, utilizando el estudio a priori de éste, previo a la experimentación.

## **2 Análisis a priori del cuestionario**

### **2.1 El cuestionario Q: sobre gustos musicales**

El objetivo principal del cuestionario Q (Pitarch, 2002) que vamos a analizar, era poder observar y cuantificar diversos aspectos del tratamiento de datos multivariantes en los alumnos de enseñanza secundaria, en España, a partir de una tabla con una cantidad significativa de valores (335 valores, correspondientes a las 300 respuestas dadas por 20 sujetos, sobre 15 variables).

El cuestionario Q trata sobre los resultados a una encuesta realizada a jóvenes de entre 15 y 20 años, referente a sus gustos musicales respecto a diversos tipos de música (ver Anexos 1, 2 y 3).

### **2.2 El cuestionario Q: adecuación del cuestionario "Pitufos"**

El punto de partida de este trabajo es un cuestionario similar (Orús, 1992) elaborado para alumnos de primaria en Francia: el cuestionario de los "Pitufos" utilizado por P. Orús en su tesis (Orús, 1992, pp.259-293) para modelizar diversos aspectos del razonamiento que puede movilizar el tratamiento de datos booleanos: lógico, numérico y clasificatorio, fundamentalmente. Este cuestionario se ha adaptado para poder ser respondido por los alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) de España, pero sigue constando de:

- La Consigna: Instrucciones que se les entrega a los alumnos de la experimentación para presentarles la situación de trabajo y enmarcar las preguntas que deben contestar.
- La Tabla de datos (T): Matriz booleana (con valores binarios 0 y 1) que

representan las respuestas de los jóvenes entrevistados sobre sus gustos musicales: las columnas de la tabla representan a 20 jóvenes (de edades 15-20 años) que han sido entrevistados para obtener información sobre el gusto musical que tiene cada uno de ellos, y están codificados con letras mayúsculas, joven A, joven B, joven C, etc.; las filas de la tabla representan los 15 tipos de música diferente sobre los que se ha pedido opinión a los jóvenes, por ejemplo la fila 3 corresponde al criterio "música máquina".

- El cuestionario propiamente dicho, formado por todas las cuestiones que se les plantean a los alumnos de la experimentación. Dichas cuestiones hacen referencia a la encuesta que han respondido los jóvenes, por lo tanto los alumnos de la experimentación responden a estas preguntas del cuestionario utilizando la tabla de datos como soporte de trabajo.

Estos tres elementos de trabajo se les entrega a cada uno de los alumnos de la experimentación como material impreso tal y como se presentan en los Anexos 1-3.

La tabla T mantiene las mismas dimensiones de 15 filas por 20 columnas, por considerar que:

- Aunque los alumnos de los últimos cursos de la enseñanza primaria correspondientes a la enseñanza francesa, que utilizaron esta matriz en la experimentación realizada en Orús (1992, p.297), tuvieron un éxito en la lectura y manejo básico de la tabla correspondiente a más de un 81%, sin embargo esta tabla nos permitió observar otras dificultades en el tratamiento de datos, ligadas al tipo de trabajo propuesto.
- Los alumnos de la etapa educativa de la ESO no han trabajado habitualmente con tablas de valores con dimensiones tan grandes como la tabla (T) y, por tanto, los alumnos de esta etapa educativa deberán también trabajar este tipo de tablas, como mínimo con el mismo nivel de éxito, aunque no necesariamente haber superado las dificultades lógico-matemáticas observadas en enseñanza primaria, al no haber tenido un aprendizaje específico sobre el tema.  
Identificar y cuantificar esas dificultades es nuestro objetivo.

### **2.3 Estudio a priori del cuestionario**

El análisis a priori de nuestro instrumento didáctico fue fundamental para nuestro trabajo, puesto que éste nos iba a permitir identificar el trabajo matemático que realmente conlleva el cuestionario, bajo distintos puntos de vista matemáticos

(la lógica, la teoría de conjuntos y la estadística). En los trabajos de Pitarch (2002) y Pitarch y Orús (2005) se detalla este análisis global del cuestionario y de cada cuestión.

Una primera identificación se lleva a cabo caracterizando las preguntas del cuestionario según las operaciones matemáticas que éstas suponen, bajo tres grandes grupos de operaciones: la manipulación de la tabla (sobre elementos constitutivos de la propia tabla y también mediante la comparación entre sus filas y columnas), las operaciones lógico-matemáticas y estadísticas, y por último los razonamientos que se exigen los alumnos para que justifiquen sus respuestas.

Por último, a partir del estudio a priori del cuestionario también se analizan las distintas relaciones (proximidad-distancia, implicación estadística, implicación jerárquica,...) que existen entre las preguntas del cuestionario, según la caracterización matemática realizada anteriormente, después de aplicar el programa informático CHIC.

### **2.3.1 Análisis didáctico: Modelización del cuestionario como una situación a-didáctica.**

El cuestionario de nuestra experimentación está enmarcado en la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau (Brousseau, 1998) y por tanto está diseñado según la modelización que permite este marco teórico:

La propia utilización de la tabla y del cuestionario, constituye una situación a-didáctica específica de los conocimientos matemáticos: tratamiento de datos, lógica y estadística elemental. La utilización del tratamiento de datos implica a su vez trabajar con el análisis multivariante, la estadística descriptiva y el análisis tipológico. Y la utilización de la lógica exige un trabajo con los predicados. En resumen, tanto la utilización del tratamiento de datos como el de la lógica conllevan un trabajo con la teoría de conjuntos.

Las preguntas del cuestionario son las variables didácticas que permiten la gestión del enseñante sobre el trabajo del alumno. Estas variables están establecidas a priori y, por tanto, permiten modelizar el trabajo lógico y estadístico a través del análisis a priori de las propias cuestiones realizadas a los alumnos. Como consecuencia, el cuestionario será el "medio a-didáctico" al que el alumno es confrontado.

El trabajo matemático propuesto al alumno en cada pregunta del cuestionario no depende de la intervención del profesor, sino únicamente de la naturaleza de la pregunta; aunque éstas son controladas y controlables por el enseñante.



Mediante este estudio a priori del cuestionario, el profesor puede modificar las estrategias de juego de los alumnos, permitiendo el aprendizaje del conocimiento matemático en juego en la situación a-didáctica.

A continuación exponemos un ejemplo para poder explicar cuál es el valor asignado a la variable didáctica: la pregunta “controlada” y “establecida a priori” y qué otras posibilidades se pueden aplicar para ir modificando las estrategias de juego que permitan el aprendizaje de un conocimiento matemático concreto.

**Ejemplo:** Q16. ¿En cuántas respuestas de la encuesta están de acuerdo los jóvenes C y J? (ésta es la pregunta nº 16 que se les formula en el cuestionario a los alumnos de la experimentación):

La modelización del trabajo a realizar para responder Q16 consiste en comparar las 20-tuplas de las columnas 3 (Joven C) y 10 (Joven J), para encontrar las coincidencias que existen en las respuestas de los jóvenes C y J: las copresencias (1,1) y las coausencias (0,0).

Otros valores posibles de la variable (es decir de la pregunta del cuestionario) podrían ser las siguientes variantes de la pregunta.

Variante 1: ¿A los jóvenes C y J, qué tipo de música les gusta a ambos? Si quisiéramos que sólo trabajaran las copresencias (1,1).

Variante 2: ¿Qué tipo de música no le gusta a ninguno de los dos jóvenes, C y J? Si quisiéramos que sólo trabajaran las Coausencias (0,0).

Variante 3: ¿Cuáles son las discrepancias musicales, entre los jóvenes? Si quisiéramos que trabajaran sobre las diferencias, (0,1) y (1,0)

Variante 4: ¿En cuántas respuestas no están de acuerdo los jóvenes C y J? Si quisiéramos que trabajaran sobre las diferencias, (0,1) y (1,0)

### 2.3.2 La matriz a priori MAP.

El análisis a priori del cuestionario nos permite obtener la caracterización de cada una de las cuestiones, definiendo distintos criterios, según los tipos de operaciones que deben realizar los alumnos al responder al cuestionario.

Los tres grandes grupos de operaciones que hemos retenido: la manipulación de la tabla (sobre elementos constitutivos de la propia tabla y también mediante la comparación entre sus filas y columnas), las operaciones lógico-matemáticas y estadísticas y, por último, los razonamientos que se exigen los alumnos para que

justifiquen sus respuestas, se pueden detallar con más precisión, a través de los criterios siguientes<sup>1</sup>:

- trabajo sobre la tabla (T),
- recuentos obligatorios o alternativos (R),
- comparación entre filas y/o columnas (C),
- diferencias y coincidencias positivas y/o negativas (copresencias, coausencias,...) (F),
- operaciones lógicas (implicación, conectores lógicos, cuantificadores) (L),
- operaciones básicas de estadística (frecuencias, moda...) (E)

Esta identificación de las operaciones que aportan las cuestiones indicadas, permite visualizar el tratamiento simultáneo de los datos, de la lógica y de la estadística descriptiva a partir de la tabla de datos T y del cuestionario Q.

La caracterización de dichas cuestiones se traduce en una matriz booleana que identificamos como la matriz a priori del cuestionario Q: MAP.

En esta matriz las columnas son claramente cada una de las preguntas del cuestionario (en este caso serán los sujetos MAP). En las filas aparecen los criterios de la matriz, todos ellos codificados con cuatro iniciales: la primera indica el bloque de operaciones que se identifica en la pregunta y las tres siguientes intentan clarificar la operación concreta que se realiza (por ejemplo, ROBL: significa que se debe realizar un recuento obligatorio. CSEM: realizar una comparación con interpretación semántica entre filas o columnas. LEXI: utilización de un cuantificador lógico existencial. EFEX: utilización de la frecuencia absoluta de forma explícita. EMIM: utilización del parámetro estadístico de centralización MODA, de forma implícita).

---

<sup>1</sup> La letra mayúscula indicada entre paréntesis representa la codificación del bloque de operaciones que se ha identificado en dicha pregunta del cuestionario.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q4.1	Q5	Q6	Q7	Q7.1	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21
TABL	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
TFIL	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
TCOL	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
ROBL	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
RALT	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CFIL	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
CCOL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
FDIF	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
FCOI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
FPRE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
FAUS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
CSEM	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
LIMP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
LEXI	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
LUNI	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
LCON	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
LDIS	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
LNEG	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
EFIM	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
EFEX	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Efre	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EPER	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EMIM	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ARGU	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tab. 1: Matriz a priori de Q (MAP).

### 2.3.3 Clasificación de las cuestiones (a priori).

La aplicación del análisis de similaridad sobre la matriz MAP –mediante el programa CHIC– nos proporciona claramente cuatro clases de cuasi-equivalencia de las preguntas del cuestionario (ver Figura 1), en función de los criterios establecidos en la matriz a priori (MAP).

$C_1 = \{Q1, Q2, Q10, Q9, Q11, Q3\} \equiv$  trabajo sobre la tabla y estadística

$C_2 = \{Q15, Q19, Q17, Q18\} \equiv$  operaciones lógicas

$C_3 = \{Q4, Q4.1, Q6, Q7, Q7.1\} \equiv$  recuentos alternativos y cuantificadores

$C_4 = \{Q8, Q16, Q20, Q12, Q13, Q14\} \equiv$  proximidad y distancias

$C_5 = \{Q5, Q21\} \equiv$  comparación de cardinales de variables

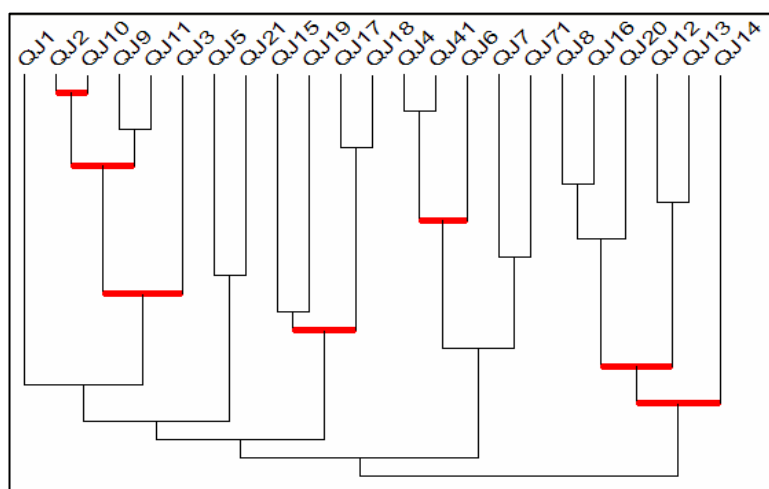


Fig. 1: Árbol de similitudes de la MAP

### 2.3.4 Implicaciones a-priori.

Teniendo en cuenta los criterios atribuidos a priori a las cuestiones y la clasificación que nos ofrece la Figura 1, vamos a analizar al interior de cada clase cuales son las implicaciones que se pueden considerar a priori entre las cuestiones que la forman. Hemos distinguido dos tipos de implicaciones diferentes que representaremos con los símbolos lógicos de *implicación* ( $\Rightarrow$ ) y de *condicional* ( $\rightarrow$ ), que podrían identificarse unas, como implicaciones fuertes o necesarias ( $\Rightarrow$ ) entre esas cuestiones en función de los conocimientos matemáticos escolares en juego en dichas cuestiones y las otras, como relaciones que consideramos muy probables ( $\rightarrow$ ) entre las cuestiones, en función de las estrategias de resolución o de conocimientos “próximos”, o incluso entre conocimientos que se impliquen a nivel matemático, pero que escolarmente no se trabaje esa relación.

Es decir, atribuiremos una relación de implicación ( $\Rightarrow$ ) entre las cuestiones, si existe esta relación de implicación lógica entre los conocimientos matemáticos que caracterizan dichas cuestiones; es decir si estos conocimientos pueden ser

considerados como condiciones necesarias (CN) o suficientes (CS) entre ellos. Por ejemplo diremos que  $Q11 \Rightarrow Q10$ , ya que el conocimiento “frecuencia relativa” que caracteriza Q11, se puede suponer como CS para el conocimiento “frecuencia absoluta” que exige Q10, o bien que este conocimiento de Q10, es CN para el conocimiento de Q11.

Mientras que atribuiremos una implicación de tipo condicional ( $\rightarrow$ ) a la relación entre las cuestiones Q11 (frecuencia relativa) y Q9 (porcentaje): matemáticamente sabemos el porcentaje es una de las representaciones de la frecuencia relativa de una variable; pero en la enseñanza obligatoria ambos conceptos no se aprenden “necesariamente relacionados”. Por tanto aunque matemáticamente consideraríamos  $Q11 \Rightarrow Q9$ , a nivel didáctico, consideramos que se puede verificar  $Q11 \rightarrow Q9$  (pero no necesariamente).

A continuación detallamos las relaciones de implicación entre las cuestiones atribuidas a priori, en función de los diversos conocimientos lógico-matemáticos del cuestionario.

*i) Cuestiones sobre conceptos estadísticos*

Observando el árbol de similaridad de la MAP, encontramos estas cuestiones sobre conocimientos estadísticos en la clase  $C_1 = \{Q1, Q2, Q3, Q10, Q9, Q11\}$ , conjuntamente con las cuestiones básicas sobre el funcionamiento de la tabla, todas ellas con un marcado carácter de “actividad enumerativa”.

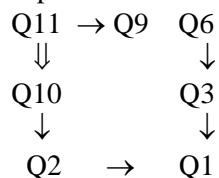
Las cuestiones identificadas a priori como cuestiones específicas sobre conceptos estadísticos, son Q9, Q10 y Q11, al ser las cuestiones que hacen referencia explícita a la terminología estadística (frecuencias, variable estadística, porcentaje); no obstante diferenciamos la pregunta Q9 sobre porcentajes, de las otras dos preguntas sobre frecuencias, por considerar que el término “porcentaje” está más incorporado al lenguaje natural y, por tanto, menos específico como término estadístico, determinando así las siguientes implicaciones a priori entre estas cuestiones, Implicaciones que traducen las relaciones de los conocimientos matemáticos en juego:

$$\begin{array}{c} Q11 \Rightarrow Q10 \\ \downarrow \\ Q9 \end{array}$$

El conocimiento del concepto de frecuencia absoluta es condición necesaria para la definición de frecuencia relativa, y el conocimiento de la representación porcentual de esta frecuencia relativa, se puede suponer como una consecuencia

derivada del dominio de dicho conocimiento, pero no necesariamente: el alumno puede conocer el concepto de frecuencia relativa como cociente entre la frecuencia absoluta de la variable y el cardinal de la población y desconocer la representación porcentual de esta frecuencia.

Si añadimos a estas cuestiones, las cuestiones relacionadas con ellas pero que no exigen conocimientos específicos de estadística para responderlas, sino que la interpretación semántica de la tabla permite responderlas con éxito, podríamos encontrar la siguiente cadena de implicaciones relacionadas:



Teniendo en cuenta que Q1, Q2 y Q3 son las preguntas básicas que establecen el conocimiento mínimo de los alumnos sobre el sentido de una tabla de datos (lo que representa una fila, una columna y una casilla o celda, en el conjunto de los datos representados), se espera que sean respondidas correctamente prácticamente por todos los alumnos, ya que en caso contrario el resto del cuestionario carecería de sentido. El carácter básico de estas cuestiones hace previsible que puedan aparecer como consecuentes, al final de las diferentes cadenas de implicaciones posibles entre todas las cuestiones de Q. Un ejemplo es el que acabamos de presentar con las implicaciones entre las cuestiones sobre estadística.

ii) *Cuestiones sobre operaciones lógicas*

$C_2 = \{Q15, Q19, Q17, Q18\}$  y  $C_5 = \{Q5, Q21\}$

Las cuestiones que aparecen en esta segunda clase  $C_2$  están identificadas en la matriz a priori como cuestiones que requieren utilizar operaciones lógicas.

Por otra parte, las preguntas Q5 y Q21 hacen referencia a disyunciones entre dos y tres tipos de música, respectivamente, pero además, en ambas interviene un recuento alternativo o cardinal de los valores positivos de algunas filas (dos o tres) de la tabla del cuestionario, para poder comparar dichos recuentos y dar respuesta a estas cuestiones. Vemos que la clase de estas preguntas se forma entre las clases  $C_1$  y  $C_2$  y aparece aislada, no perteneciendo a ningún nodo o nivel significativo, y por ello también la hemos considerado en nuestro análisis como una clase diferenciada de las otras cuatro clases que marcan los niveles significativos.

En este caso consideramos la implicación a priori entre estas dos cuestiones como sigue:  $Q21 \Rightarrow Q5$ , ya que en la pregunta Q21 intervienen tres criterios distintos y, en cambio, en Q5 sólo aparece la disyunción entre dos criterios, y en la cuestión Q21 también se exige el razonamiento de la respuesta

Las cuestiones que aparecen en la clase  $C_2$  son: Q15, que requiere el cardinal de la conjunción de dos criterios, Q19, que involucra el cardinal de la conjunción de negaciones, y Q17 y Q18, en las que se trabaja la implicación lógica (aunque como contenido matemático queda reflejado en la pregunta Q18).

Estas cuatro últimas cuestiones exigen todas ellas una comparación entre las celdas (1,1) de las filas implicadas.

Si además tenemos en cuenta que los contenidos matemáticos más complejos de tratar por los alumnos son la implicación lógica y la conjunción de negaciones - ya que el alumnado está más familiarizado con las preguntas formuladas en positivo (Q15)-, podemos establecer la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{array}{ccc} Q18 & \rightarrow & Q19 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ Q17 & \rightarrow & Q15 \end{array}$$

Por lo tanto suponemos, a priori, que si el alumno tiene asimilada la implicación lógica (como contenido matemático más fuerte) correctamente, entonces puede realizar con éxito el cardinal de la conjunción de negaciones y por tanto el cardinal de una conjunción.

iii) *Cuestiones sobre cuantificadores existenciales y universales*

$$C_3 = \{Q4, Q4.1, Q6, Q7, Q7.1\}$$

Esta clase está compuesta por cuestiones que, según la matriz a priori MAP, están caracterizadas por el cuantificador existencial y/o universal, a la vez, que pueden requerir un recuento alternativo por parte del estudiante.

Tanto en la pregunta Q4, como en la Q6 se le exige al alumno que realice la búsqueda de un modelo « homogéneo », en concreto de una fila y una columna, respectivamente, en la que todas las celdas tengan el valor 1. Por lo tanto establecemos a priori, la relación entre ellas con la siguiente bicondicional:  $Q4 \leftrightarrow Q6$

En cambio, en la cuestión Q7 se exige una comparación entre criterios mediante un modelo variable, ya que estableciendo un criterio (tipo de música) previo, se induce a la búsqueda de otros criterios con mayor cardinal que el

prefijado. Por ello, suponemos que el alumno que tenga éxito en este tipo de estrategia también lo tendrá en la respuesta de la cuestión con un modelo homogéneo (Q4 y Q6), i.e.,  $Q7 \Rightarrow Q4$ .

Las preguntas Q4.1 y Q7.1 están directamente relacionadas con Q4 y Q7 respectivamente, con la diferencia de que las primeras son más abiertas y para ser contestadas se necesita el tratamiento global de la tabla.

Así pues, teniendo en cuenta todas estas consideraciones, podemos establecer las siguientes cadenas de implicaciones:

$$\begin{array}{cc} Q7.1 & Q4.1 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ Q7 \Rightarrow Q4 & \leftrightarrow Q6 \end{array}$$

iv) *Cuestiones sobre relaciones de proximidad y distancia*

$$C_4 = \{Q8, Q16, Q20, Q12, Q13, Q14\}$$

Las cuestiones de esta última clase tratan la proximidad y distancia entre los sujetos (los jóvenes) de la tabla del cuestionario.

En las preguntas Q8, Q14, Q16 y Q20 se trabajan las coincidencias (copresencias y coausencias). Concretamente, en la pregunta Q8 se trata de comparar dos columnas para comprobar si son iguales o no, y en Q14 se pide encontrar tres pares de columnas iguales en toda la tabla. Por tanto, estas dos cuestiones quedan relacionadas de la siguiente forma:  $Q14 \Rightarrow Q8$ .

La operación que requieren tanto la cuestión Q16 como la Q20 es el cálculo del cardinal de las coincidencias (positivas y negativas) entre columnas concretas. Suponemos, a priori, que la pregunta Q20 es más compleja que la Q16, puesto que ésta última es más directa, tanto en su redacción (más natural para el alumnado) como en los cálculos que deben hacer en cada una de ellas: en Q16 deben contar el número de coincidencias entre dos columnas (sujetos) y, en cambio, en la Q20 se establece un sujeto previo a partir del cual se debe calcular el cardinal de coincidencias con otros dos sujetos y después comparar los resultados. De ahí que la implicación entre estas dos cuestiones queda establecida como  $Q20 \Rightarrow Q16$ .

También suponemos a priori la implicación  $Q14 \rightarrow Q16$ , ya que como la Q14 es una pregunta abierta con búsqueda en toda la tabla, la consideramos más complicada que la Q16 por ser concreta y relacionar sólo dos sujetos concretos.

Asimismo, consideramos que el alumno que responda con éxito las preguntas Q14 y Q16 también será capaz de contestar correctamente la cuestión Q13, en la cual se exige el cardinal de las diferencias existentes entre dos columnas de la



tabla. Por tanto, debe verificarse el siguiente encadenamiento de las cuestiones (incluyendo la transitividad entre Q14 y Q13):

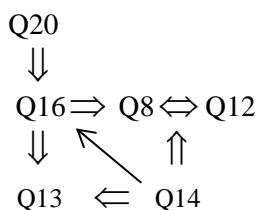
$$Q14 \rightarrow Q16 \Rightarrow Q13$$

También podemos establecer la implicación  $Q16 \Rightarrow Q8$ , ya que, si un alumno sabe calcular el cardinal de coincidencias entre dos jóvenes (sujetos) tal y como pide la primera cuestión, también será capaz de comprobar si dos columnas son iguales (coinciden todas las celdas) según se exige en la pregunta 8.

Por último, consideramos equivalentes las preguntas Q8 y Q12, en las que se pregunta –aunque de forma distinta– las coincidencias entre dos sujetos concretos. La Q8 se formula a partir del concepto de « preferencias entre tipos de música » y en la Q12 se pregunta utilizando « el mismo gusto musical »:

$$Q8 \Leftrightarrow Q12$$

En resumen, la cadena de implicaciones entre las cuestiones de esta clase quedaría representada de la siguiente forma:



### 3 Comparación de los análisis del Cuestionario Q

#### 3.1 Resultados de la experimentación

Presentamos a continuación una aproximación a los porcentajes de respuestas justas a las preguntas del cuestionario Q, obtenidas por Pitarch (2002) en la experimentación realizada en diferentes centros de Castellón, sobre 239 estudiantes, diferenciando los resultados en los dos ciclos de la ESO y relacionándolos según la caracterización de las cuestiones realizada a priori.

<b>Cuestión Número</b>	<b>Operación básica según MAP</b>	<b>Porcentaje éxito en la respuesta</b>	<b>1r ciclo (1º,2º ESO)</b>	<b>2º ciclo (3º 4º ESO)</b>
Q1, Q2, Q3	Tratamiento tabla	97 %	no existen diferencias significativas.	
Q4, Q4.1, Q6	Cuantificadores ( $\forall, \exists$ )	90 %	menor éxito	mayor éxito
Q5 ; Q21	Comparación cardinales	92 % ; 62%	no existen diferencias significativas.	
Q7 ; Q7.1	Comparación filas	70 %	no existen diferencias significativas.	
Q8	Comprobar coincidencias	87 %	no existen diferencias significativas.	
<b>Q9 ; Q10 ; Q11</b>	<b>Estadística elemental</b>	<b>39%, 15%, 8%.</b>	<b>menor éxito</b>	<b>mayor éxito 4º</b>
Q12;Q13	Enumerar diferencias	81 %	no existen diferencias significativas..	
<b>Q14</b>	<b>Coincidencias-toda Tabla</b>	<b>11 %</b>	<b>menor éxito</b>	<b>mayor éxito 3º</b>
<b>Q15, Q19</b>	<b>Conjunción<sup>^</sup>/Negación <math>\neg</math></b>	<b>51 %</b>	<b>menor éxito</b>	<b>mayor éxito 4º</b>
<b>Q17, Q18</b>	<b>Implicación lógica y con razonamiento</b>	<b>13 %</b>	<b>menor éxito</b>	<b>mayor éxito 4º</b>
<b>Q16, Q20</b>	<b>Coincidencias-columns</b>	<b>66 %</b>	<b>menor éxito</b>	<b>mayor éxito 4º</b>

Tab. 2: *Porcentajes de respuestas justas de la experimentación, en Castellón (Pitarch, 2002).*

Estos resultados confirman los obtenidos por Orús (Orús, 1992) en alumnos de último curso de enseñanza primaria en Francia (CM2), mostrando que se siguen observando las dificultades en cuestiones que exigen una operación o razonamiento lógicos, con más de un 80% de alumnos que presentan dificultades con la implicación, pese al mayor porcentaje de éxito en 4º curso (último año de la enseñanza obligatoria). Queremos señalar también el bajo porcentaje de éxito en las preguntas de estadística elemental, inferior al 20% en el cálculo de la frecuencia de una variable de la tabla T. Dificultades que no pueden ser atribuidas al manejo

de la tabla, puesto que todas las cuestiones que sólo exigen estrategias de búsqueda, enumeración o comparación de elementos de información de la tabla (filas o columnas) tienen un altísimo porcentaje de éxito, superior al 80%; aunque también este porcentaje disminuya cuando la complejidad de la tarea de búsqueda aumenta.

### 3.2 El ASI y los análisis priori y a posteriori

#### 3.2.1 Las implicaciones de la experimentación

Los grafos implicativos efectuados por CHIC, versión 3.7, sobre los resultados de la experimentación (Pitarch, 2002) muestran las relaciones de implicación entre todas las cuestiones del cuestionario; en la Figura 2 se muestran las relaciones más significativas, con un índice de implicación de 0.99 (izquierda) y también las nuevas relaciones de implicación que aparecen entre las cuestiones al rebajar el índice a 0.95 (derecha).

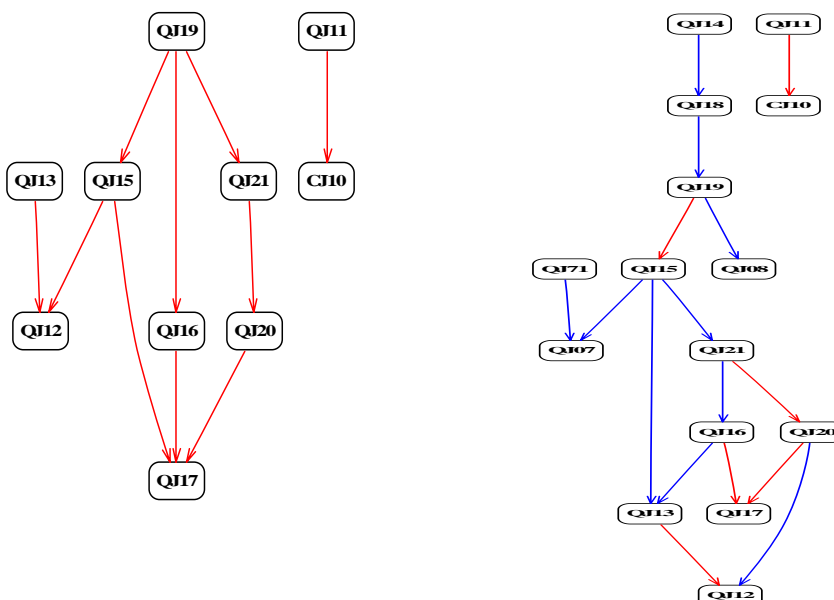


Fig. 2: Implicaciones a posteriori: 0.99 (izquierda) y 0.95 (derecha)

Analizaremos estas implicaciones con más detalle, en función de los conocimientos de las cuestiones, retomando las clases del análisis a priori, una vez contrastada la validez de las implicaciones que habíamos establecido a priori al interior de estas clases.

### **3.2.2 Validación de las implicaciones a priori.**

Con la experimentación realizada vamos a evaluar la validez de nuestro análisis (implicativo) a priori, usando la metodología de Spagnolo (1997). En ella, el autor trata el tema de la validación-refutación de ciertas hipótesis didácticas a través del uso de un cuestionario y del análisis estadístico implicativo. Por una parte, el investigador traduce las hipótesis didácticas que quiere someter a examen, en una serie de implicaciones entre algunas clases de cuestiones del cuestionario que, a priori, serían lógicas (es decir, exentas de contraejemplos). Posteriormente, la muestra estructura las (cuasi-)implicaciones entre variables a partir de los contraejemplos presentes en ella. Entonces, calcula las intensidades de las implicaciones de los datos recogidos (la contingencia), y las mismas para las implicaciones a priori (que resultan fijando a cero el número de contraejemplos y manteniendo el número de ocurrencias de antecedente y consecuente), y crea un estadístico de tipo  $\chi^2$ , que describe la distancia entre cada implicación a priori y a posteriori (la diferencia, normalizada por el valor la intensidad a priori). La distancia entre las implicaciones a priori y a posteriori entre clases de cuestiones queda definida como la media aritmética de las distancias entre las implicaciones que resultan de combinar cada variable de la clase antecedente con cada variable de la clase consecuente.

Finalmente, la regla de decisión consiste en la validación de la implicación entre clases (i.e. de la hipótesis didáctica) si y solamente si la diferencia entre lo ideal y la contingencia es inferior al valor 0.25.

En nuestro caso, las hipótesis didácticas han sido trasladadas a una serie de implicaciones entre variables, y no entre clases de variables. Los cálculos de intensidades de implicación a priori y sobre los datos del cuestionario han sido realizados usando la teoría clásica y la ley de Poisson, dando como resultados los expuestos en la Tabla 2.

Implicación analizada	Intensidad a priori	Intensidad a posteriori	Dif.	Dif. Normalizada	Decisión
Q11 → Q10	1	0.999	0	0	CONCORDANCIA
Q10 → Q2	0.83	0.126	0.704	0.848	REFUTADA
Q2 → Q1	0.956	0.704	0.253	0.264	REFUTADA
Q6 → Q3	0.998	0.589	0.41	0.41	REFUTADA
Q3 → Q1	0.955	0.697	0.258	0.27	REFUTADA
Q11 → Q9	0.998	0.826	0.172	0.172	CONFIRMADA
Q41 → Q4	1	0.894	0.105	0.105	CONFIRMADA
Q4 → Q6	1	0.794	0.206	0.206	CONFIRMADA
Q6 → Q4	1	0.864	0.136	0.136	CONFIRMADA
Q71 → Q7	0.993	0.979	0.014	0.014	CONFIRMADA
Q7 → Q4	1	0.789	0.211	0.211	CONFIRMADA
Q18 → Q19	1	0.954	0.046	0.046	CONFIRMADA
Q18 → Q17	0.999	0.845	0.154	0.154	CONFIRMADA
Q19 → Q15	1	1	0	0	CONFIRMADA
Q21 → Q5	0.997	0.425	0.572	0.574	REFUTADA
Q17 → Q19	1	0.842	0.158	0.158	CONFIRMADA
Q17 → Q15	1	0.868	0.132	0.132	CONFIRMADA
Q20 → Q16	1	0.973	0.027	0.027	CONFIRMADA
Q16 → Q13	1	0.964	0.036	0.036	CONFIRMADA
Q16 → Q8	1	0.552	0.448	0.448	REFUTADA
Q8 → Q12	1	0.798	0.202	0.202	CONFIRMADA
Q12 → Q8	1	0.747	0.253	0.253	REFUTADA
Q14 → Q13	0.976	0.674	0.301	0.309	REFUTADA
Q14 → Q8	0.915	0.915	0	0	CONFIRMADA
Q14 → Q16	0.989	0.92	0.069	0.069	CONFIRMADA

Tab. 3: Implicaciones analizadas, valores de intensidad a priori y a posteriori, diferencias absolutas y normalizadas, y decisión sobre su validez.

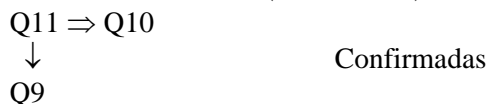
### 3.2.3 Análisis por clases, de las implicaciones a priori y a posteriori.

Retomamos las clases de cuestiones, obtenidas en el análisis de similitud realizado a priori, sobre el cuestionario, en función de los conceptos matemáticos en juego, para seguir analizando cada una de ellas, contrastando las implicaciones a

priori, con toda la información obtenida a posteriori sobre las implicaciones entre las cuestiones, de los datos de la experimentación.

i) *Cuestiones sobre conceptos estadísticos*

La comparación entre las implicaciones establecidas a priori entre estas cuestiones y las obtenidas a posteriori, en la experimentación, han permitido confirmar estas relaciones (Ver Tabla 2).



Al considerar el subgrafo de las cuestiones de la clase  $C_1$  del análisis implicativo de la experimentación (ver Figura 4), solamente aparecen relaciones de implicación entre las cuestiones que habíamos identificado a priori como cuestiones sobre conceptos estadísticos Q10, Q11 y Q9, presentando una fuerte intensidad (de 0.99) la implicación de la cuestión Q11 referente a la frecuencia relativa de una variable, hacia la cuestión Q10 sobre la frecuencia absoluta. Sin embargo los buenos resultados sobre el porcentaje Q9 parecen depender más directamente de los aciertos sobre la frecuencia absoluta que sobre la frecuencia relativa, como habíamos considerado a priori.

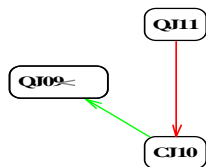
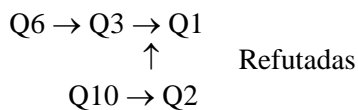


Fig. 3: *Implicación a posteriori entre las cuestiones de la clase  $C_1 = \{Q1, Q2, Q3, Q10, Q9, Q11\}$*

El resto de cuestiones de la clase  $C_1$ , cuyas relaciones a priori, han sido establecidas por la interpretación semántica de dichas cuestiones y el tipo de trabajo sobre la tabla que exigen sus respuestas, no aparecen en los resultados del análisis implicativo de la experimentación (como puede apreciarse en las Figs. 2 y 3). En la comparación a priori-a posteriori, estas relaciones han sido refutadas.



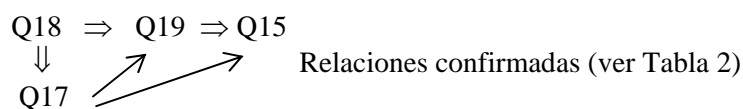
ii) *Cuestiones sobre operaciones lógicas*

Estas cuestiones aparecían en la clase  $C_2 = \{Q15, Q19, Q17, Q18\}$  y el subgrafo implicativo del análisis a posteriori (ver Figura 4) muestra la siguiente cadena de implicaciones, todas ellas con un índice superior a 0.95 y Q9, Q15 y Q17 con un índice de implicación de 0.99.



Fig. 4: *Implicación a posteriori entre las cuestiones de la clase  $C_2 = \{Q15, Q19, Q17, Q18\}$*

Las relaciones establecidas a priori, según el trabajo lógico y las estrategias de búsqueda, también han sido confirmadas.



Habíamos considerado en este apartado también las cuestiones de la clase  $C_5 = \{Q5, Q21\}$ , sobre el cálculo del cardinal de la disyunción y se había establecido la implicación a priori  $Q21 \Rightarrow Q5$ ; pero esta implicación no aparece en el grafo implicativo de la experimentación (Figura 1), y aparece como refutada en la comparación a priori/a posteriori de la Tabla 2.

iii) *Cuestiones sobre cuantificadores existenciales y universales*

Recordemos que las cuestiones de la clase  $C_3 = \{Q4, Q4.1, Q6, Q7, Q7.1\}$  están caracterizadas por utilizar un cuantificador existencial y/o universal, a la vez, que pueden requerir un recuento alternativo por parte del estudiante.

Las implicaciones a posteriori del subgrafo de estas cuestiones de la clase  $C_3$  (ver Figura 5), son más débiles que en las otras clases: solamente aparecen Q7.1 y Q7 con un índice de 0.95 y el resto de cuestiones aparecen relacionadas cuando se desciende el índice a 0.85.

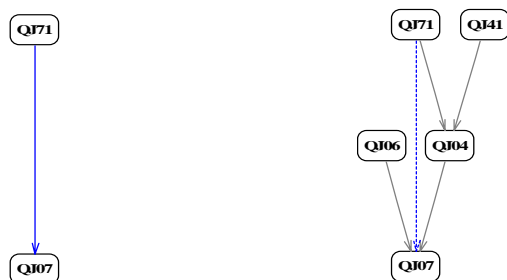


Fig. 5: *Implicaciones a posteriori entre las cuestiones de la clase  $C_3 = \{Q4, Q4.1, Q6, Q7, Q7.1\}$ , con el umbral fijado en 0.95 (izquierda) y 0.85 (derecha)*

Hay que señalar que todas las relaciones establecidas a priori, son validadas por la comparación con las implicaciones a posteriori, aunque la Figura 5 muestra que no existe ninguna relación entre Q6 y Q4.

$$\begin{array}{ccc}
 Q7.1 & Q4.1 & \\
 \Downarrow & \Downarrow & \\
 Q7 & \Rightarrow & Q4 \leftrightarrow Q6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Estas relaciones establecidas a priori han sido} \\
 \text{confirmadas todas ellas (ver Tabla 2)}
 \end{array}$$

Las dos preguntas Q6 y Q4, involucran la misma actividad matemática, establecer el valor de verdad de una función proposicional generalizada en un dominio finito:

$$\text{¿} \exists P_i / [\forall x \in X / P_i(x)]: \text{verdadera, siendo } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{?}$$

Sin embargo, la ausencia de relación a posteriori entre estas dos preguntas muestra que la interpretación semántica de la tabla marca el trabajo de los alumnos y que el sentido que atribuyen a una fila o a una columna es distinto: las respuestas de los alumnos, entre la pregunta Q4: *¿Hay algún tipo de música elegida por todos*

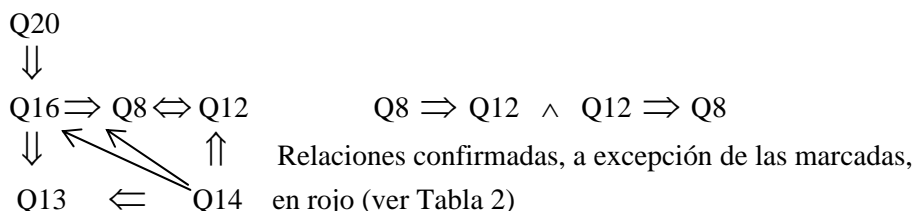


los jóvenes? y la pregunta Q6: *¿Hay algún joven a quien le guste todos los tipos de música?* no establecen ninguna relación de implicación entre ellas.

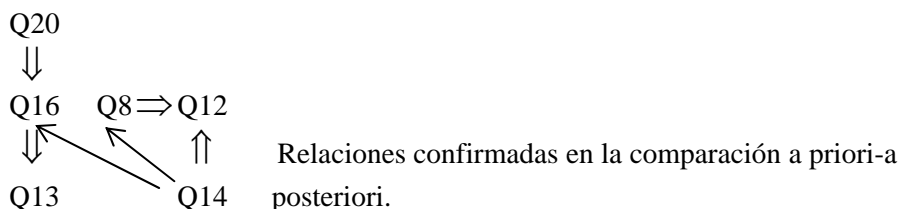
En el análisis a-priori, ya habíamos establecido entre ellas solamente una relación  $Q4 \leftrightarrow Q6$ , en función del tipo de estrategia de resolución de ambas preguntas ya que tanto en la pregunta Q4, como en la Q6 se le exige al alumno que realice la búsqueda de un modelo « homogéneo », en concreto de una fila y una columna, respectivamente, en la que todas las celdas tengan el valor 1; pero no le habíamos atribuido una relación de coimplicación  $Q4 \Leftrightarrow Q6$  que le hubiera correspondido por la equivalencia del conocimiento matemático subyacente en ellas, puesto que conjeturamos que no era el modelo matemático de estas preguntas, sino la estrategia de búsqueda lo que marcaría las respuestas de los alumnos..

iv) *Cuestiones sobre relaciones de proximidad y distancia*

No todas las relaciones de implicación que habíamos considerado a priori, entre las cuestiones de la clase  $C_4 = \{Q8, Q16, Q20, Q12, Q13, Q14\}$ , se han visto confirmadas en la comparación con los datos a posteriori; en el esquema que habíamos presentado para relacionar a priori estas cuestiones, hemos marcado las que no se verifican.



Por tanto la estructura de implicación que ha quedado confirmada para esta clase  $C_4$  es la siguiente:



La coimplicación a priori que habíamos establecido entre Q8 y Q12, debida a la equivalencia del trabajo a realizar para responder ambas preguntas, ha sido refutada, mostrando que para los alumnos existe una diferencia entre estas preguntas; si nos fijamos en la formulación de la pregunta Q8 (*prefieren el mismo tipo de música*), parece que resulta más confusa a los alumnos que la pregunta Q12 (*tienen el mismo gusto por la música*), esto puede explicar que los alumnos que saben interpretar correctamente Q8 también saben responder correctamente Q12, es decir  $Q8 \Rightarrow Q12$  mientras que no sucede lo contrario y por tanto no se verifica  $Q12 \Rightarrow Q8$ .

La confusa redacción de la pregunta Q8, también puede explicar la no validación de la implicación establecida a priori entre Q16 y Q8, al poder aumentar la posibilidad de contraejemplos, con contestaciones justas para Q16 (*¿En cuentas respuestas de la encuesta están de acuerdo los jóvenes C y J?*) y erróneas para Q8 (*Los jóvenes H y O ¿prefieren el mismo tipo de música?*).

El hecho de que la validación de la cadena de implicaciones establecida a priori entre Q20, Q16 y Q13, todas ellas cuestiones que comparan coincidencias o diferencias entre los gustos musicales de jóvenes concretos de la encuesta, mientras que la implicación atribuida a priori entre las cuestiones Q14 y Q13 no se confirma, parece corroborar la “originalidad” de la cuestión Q14 (*Encuentra, si puedes, a tres parejas de jóvenes a quienes les guste el mismo tipo de música.*). Se solicita del alumno una actividad de mayor complejidad y dificultad por generalizar la comparación entre sujetos a toda la tabla, que parece ser una condición suficiente para responder correctamente a muchas otras cuestiones, apareciendo como antecedente en muchas de las relaciones de implicación (todas ellas confirmadas, como se ve en el esquema) con esas otras cuestiones Q16, Q8 y Q12, pero no con Q13. La particularidad de Q13 es que es la única pregunta explícita sobre las diferencias en las comparaciones que se cuestionan.

El siguiente grafo (Figura 6), presenta las relaciones de implicación a posteriori en  $C_2$  e ilustra las reflexiones anteriores sobre la validación o no de las relaciones de implicación que habíamos establecido a priori en esta clase  $C_2$ .

Solamente añadir, que aparece una relación de implicación con un índice de 0.99, la implicación  $Q13 \rightarrow Q12$ , y ésta no la habíamos señalado en el análisis a priori, por considerar que la actividad de enumeración sobre la tabla resultaba más asequible a los alumnos que cualquier otro tipo de actividad comparativa, y por tanto que Q13, debería aparecer como consecuente en las cadenas de implicación, tal y como se ha visto en el esquema a priori. Esta fuerte relación de implicación a posteriori entre Q13 (*¿Cuántas diferencias entre los jóvenes C y J*) y Q12 (*Los*

*jóvenes R y N ¿tienen el mismo gusto por la música?*) parece mostrar que es la peculiaridad de Q13 cuestionando sobre las diferencias, la que la sitúa en el antecedente de la implicación

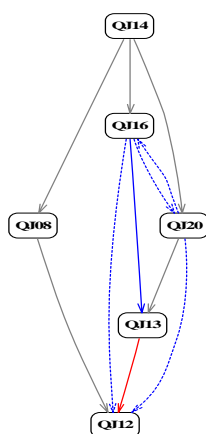


Fig. 6: *Implicación a posteriori entre las preguntas de la clase C4 = {Q8, Q16, Q20, Q12, Q13, Q14}, considerando un índice de implicación de 0.75 y la opción de transitividad*

## 4 Conclusiones

### 4.1 Conclusiones didácticas sobre la experimentación de Q en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

El trabajo presentado en esta comunicación ilustra una vez más la conveniencia -incluso necesidad- de los análisis a priori de los cuestionarios, para que éstos se adecuen a los objetivos que la investigación pretende abordar; esta necesidad ha sido reclamada constantemente en Didáctica de las Matemáticas, y especialmente desde la Teoría de Situaciones (Brousseau y colaboradores). En nuestro caso, el rol de situación a-didáctica que se pretendía jugar con el cuestionario, es el que ha marcado la necesidad del estudio a priori de dicha situación y de los conocimientos presentes en el medio a-didáctico, para determinar las variables que queríamos observar y los valores que se les iba a otorgar a dichas variables. En Pitarch y Orús (2005), se puede consultar este análisis y el interés didáctico que puede tener el cuestionario, para trabajar en clase, más allá del valor

instrumental de recogida de información que ha supuesto la experimentación del cuestionario.

No obstante creemos que el análisis de los datos de la experimentación, que hemos presentado en los diferentes apartados de esta comunicación, comparando los análisis a priori y a posteriori, aporta una información más completa y matizada sobre la realidad del tratamiento de la información en la ESO y del bajo índice de éxito de algunos de los conocimientos lógico-matemáticos y estadísticos asociados, notablemente las operaciones lógicas complejas, combinando operadores lógicos (conectores o cuantificadores, y la negación ellos) o en forma de funciones proposicionales condicionales.

El bajo porcentaje de éxito en las cuestiones explícitas sobre el concepto estadístico de frecuencia de una variable estadística “materializada” en la tabla como la cabecera de una fila (el gusto por un determinado tipo de música) y de los diferentes valores que toma esa variable, en función de los sujetos, muestran las dificultades de los alumnos con la apropiación del concepto de variable estadística y no sólo con el cálculo de las frecuencias, que si son capaces de realizar sobre datos con presentación “estándar”, tipo ejercicio de manual.

Consideramos que la utilización didáctica de la tabla de datos por parte del profesor puede permitir recrear, en situación escolar, el sentido de éstos y otros conceptos estadísticos, como puede ser la clasificación de datos (Orús, 1992).

A la vez, la tabla permite así mismo dar sentido al trabajo de los alumnos con operadores lógicos que actúan sobre funciones proposicionales y no sólo sobre proposiciones; Durand-Guerrier (1996) señala la necesidad de un trabajo de esta naturaleza con alumnos de la enseñanza obligatoria, para evitar las actuales carencias de formación lógica observada y analizada por ella misma en alumnos de primeros años de Universidad, carencias que esta autora identifica como el origen de muchas de las actuales dificultades de los alumnos universitarios de diferentes titulaciones en el estudio de las asignaturas de Matemáticas.

## **4.2 Conclusiones metodológicas: ASI y análisis a priori de Q**

El análisis a priori del cuestionario nos condujo a buscar las variables de las cuestiones, transformándolos en unos criterios que nos pudieran permitir identificar o caracterizar esas cuestiones. De esta manera hemos obtenido la matriz a priori que hemos llamado en toda la comunicación MAP, en la que los criterios podían ser considerados los “sujetos-tipo” que caracterizaban las cuestiones. En este sentido nos pareció interesante analizar el comportamiento a priori del cuestionario, solamente en función de los criterios seleccionados y poder

“comparar” estos análisis con el comportamiento de estas cuestiones en la experimentación.

El análisis de similaridad de la MAP, como todo análisis tipológico o clasificatorio, permite hacer “emerger” relaciones entre las variables (las cuestiones) que no se habían considerado inicialmente (Chandon y Pinson, 1981) y por ello quisimos realizar este análisis de la MAP. Las clases obtenidas nos han confirmado que los criterios retenidos para caracterizar las cuestiones estaban bien seleccionados, dando sentido e identificando las clases resultante. También puso de manifiesto algunas proximidades no previstas, entre cuestiones, como por ejemplo agrupar en la clase  $C_1$ , las cuestiones sobre el manejo de la tabla, con las cuestiones explícitas sobre estadística.

Sin embargo, la naturaleza no simétrica del ASI nos puso de manifiesto las posibles dificultades que podía presentar el análisis implicativo de la MAP. Por ejemplo, aparecía que la cuestión Q10 (frecuencia absoluta) implicaba a Q11 (frecuencia relativa) y no al revés; la comparación de los valores de la MAP, para estas dos cuestiones nos muestra que son idénticos para todos los criterios, a excepción de *EFRE*, que identifica la frecuencia relativa y por tanto Q11 tenía el valor 1 y Q10 el valor 0, aportando un contraejemplo para la condicional  $Q11 \rightarrow Q10$ , pero sin embargo se verifica  $Q10 \Rightarrow Q11$  (como implicación lógica). Pero esto se podía haber evitado simplemente cambiando el criterio, por el de frecuencia absoluta, invirtiéndose todas las relaciones anteriores, o incluso no diferenciar la frecuencia absoluta de la relativa y dar a ambas cuestiones el valor 1 y a todas las demás 0.

Hemos constatado como una misma identificación de las cuestiones puede hacerse por tanto, con criterios diferentes e incluso utilizando la formulación negativa de los criterios, se puede invertir la asignación de 1 de 0 a las cuestiones y por tanto alterar o invertir los contraejemplos de las implicaciones a priori.

Por todo ello no hemos utilizado los resultados del ASI sobre la matriz a priori MAP; sino que hemos establecido a priori las implicaciones entre las cuestiones, en función de los contenidos implicados y no de la codificación asignada; y estas implicaciones son las que han sido comparadas con las obtenidas experimentalmente.

La aplicación de este método, ya utilizado en Spagnolo (1997), ha resultado muy fructífera en nuestro trabajo:

El establecimiento a priori de implicaciones entre las cuestiones, ha propiciado el verificar las inversiones que aparecían en las implicaciones entre esas

cuestiones en el grafo implicativo de la MAP y descartar estos análisis no simétricos sobre la MAP, tanto el análisis implicativo como el cohesitivo.

La comparación de estas implicaciones a priori, con los resultados de la experimentación nos ha permitido confirmar la mayoría de nuestras hipótesis respecto a la estructura de nuestro cuestionario y su pertinencia como instrumento de medida de los conocimientos implicados.

Ha permitido complementar y refinar la información obtenida con la aplicación de técnicas ASI, sobre los resultados de la experimentación, al interior de cada clase de cuestiones.

En definitiva, creemos que esta comunicación muestra una vez más la pertinencia, e incluso la necesidad, de los análisis a priori de los cuestionarios para poder garantizar la coherencia de los análisis de los resultados, en función de los objetivos del propio cuestionario; nuestra constatación hecha en el ámbito de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, la consideramos también válida y generalizable a aquellos dominios de investigación en los que la utilización de los cuestionarios juega un papel metodológico importante.

## **Bibliografía**

- Bodin, A. (1996). *Modèles sous-jacents à l'analyse implicative et outils complémentaires*, Cahiers du séminaire de didactique de l'IRMAR de Rennes
- Brousseau G. (1986). *Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques*. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux-I. Ed: LADIST-Université de Bordeaux II, Bordeaux.
- Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble. [Versión en lengua inglesa: *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer (1997)].
- Brousseau G.; Lacasta E. (1995). *L'analyse statistique des situations didactiques*, Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques, ARDM, pp 53-107.
- Couturier R. (2000). *Traitement de l'analyse statistique dans CHIC*, Actes des Journées sur la Fouille de Données par la Méthode d'Analyse Statistique Implicative, Caen, IUFM de Caen, pp. 33-50

- Durand-Guerrier V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse d'Etat, Université Claude Bernard - Lyon-I. Ed. CNRS de l'Université Lumière-Lyon-2.
- Gras R. (1995). *Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques*. Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques. Ed. ARDM, pp 53-107.
- Gras, R et al. (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*. Ed. La Pensée Sauvage.
- Lerman I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod, Paris
- Lerman I.C.; Gras R.; Rostam H. (1981). *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II*, Mathématiques et Sciences Humaines n° 74, p. 5-35 y n° 75, p. 5-47.
- Orús P. (1986). *L'enseignement des méthodes de classification. Proposition d'une ingénierie pour le cours moyen*. Collection Études en Didactique des Mathématiques. IREM de Bordeaux.
- Orús P. (1992). *La place du raisonnement naturel des élèves dans la négociation didactique: rôle possible d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse, U.E.R. Scientifique. Université de Bordeaux-I, Ed. IREM de Bordeaux.
- Orús P.; Gregori P. (2005). *Des variables supplémentaires et des élèves "fictifs" dans la fouille des données avec CHIC*. Quaderni di Ricerca in Didattica. Supplemento n.2 al N. 15, Ed. GRIM, Palermo (pp. 279- 293)
- Orús P.; Pitarch I. (2000). *Utilisation didactique des tableaux des données et du logiciel CHIC à l'école élémentaire*, Actes des Journées sur La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative, École Polytechnique de l'Université de Nantes 2000, pp 85-98.
- Pitarch I. (2002). *Estadística y Análisis de datos en la ESO*. DEA presentado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Jaume-I de Castellón.
- Pitarch I.; Orús P. (2005). *Análisis didáctico de un cuestionario en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Actas del VIII Simposio de Investigación en Educación Matemática. A Coruña 9-1. Septiembre de 2004. Ed. U.Coruña, pp 1-20.
- Spagnolo F. (1997). *L'analisi a-priori e l'indice di implicazione statistica di Gras*, Quaderni di Ricerca in Didattica, n.7, pp 110-125.
- Spagnolo F.; Gras R. (2007). *Une mesure comparative en didactique des mathématiques entre une analyse a priori et la contingence*, manuscript.

**Anexo 1: Consigna**

Se ha hecho una encuesta, escogiendo como muestra jóvenes entre 15 y 20 años, para valorar qué tipo de música es la más elegida entre la población de estas últimas décadas. A continuación se presenta una tabla de valores que representa las respuestas de los jóvenes a la encuesta musical y dicha información viene expresada de la siguiente manera:

- A la izquierda está el listado de los tipos de música, de los cuales se pide opinión a cada uno de los jóvenes. Por ejemplo: “¿te gusta la música heavy?”
- La letra mayúscula de cada una de las columnas, representa el nombre del joven. Por ejemplo: “el joven B”
- Los jóvenes entrevistados sólo podrán contestar con un SI o un NO. Y en la tabla de valores viene expresado de la siguiente manera: 1 quiere decir SI, y 0 equivale a NO.

**Anexo 2: Tabla T**

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1...la música hip-hop?	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
2...la ópera?	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3...la música máquina?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4...el jazz?	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
5...el flamenco?	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
6...las rumbas?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7...la música heavy?	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
8...la música pop?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9...la música clásica?	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10...la música dance?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11...la música reggae?	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
12...el hardcore?	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13...el rap?	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
14...la música punk?	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
15...la música ska?	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1

Tab. 4: Tabla sobre la que se pregunta a los alumnos, en el cuestionario Q de la experimentación.



**Anexo 3: El CUESTIONARIO (Cuestiones para responder los alumnos)**

- Q1. ¿Al joven H le gusta el jazz?
- Q2. ¿A cuántos jóvenes les gusta el flamenco?
- Q3. ¿Cuántos tipos de música le gustan al joven Q?
- Q4. ¿Hay algún tipo de música elegida por todos los jóvenes? En caso afirmativo, indica cuáles:
- Q4.1. ¿Hay otras? En caso afirmativo, indica cuáles
- Q5. Los jóvenes entrevistados ¿prefieren la música heavy o la música ska?
- Q6. ¿Hay algún joven a quien le guste todos los tipos de música? En caso afirmativo, indica su nombre:
- Q7. ¿Existe alguna música más preferida que la música punk?
- Q7.1. Si hay alguna, indícala y razona tu respuesta.
- Q8. Los jóvenes H y O, ¿prefieren el mismo tipo de música?
- Q9. ¿A qué porcentaje de los jóvenes entrevistados les gusta la música rap?
- Q10. Si consideramos - escoger la música máquina- como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta dirías que tiene en esta distribución estadística?
- Q11. ¿Y qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior?
- Contesta, **razonando todas tus respuestas:**
- Q12. Los jóvenes R y N, ¿tienen el mismo gusto por la música? ¿Por qué?
- Q13. ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los jóvenes C y E? ¿Por qué?
- Q14. Encuentra, si puedes, tres parejas de jóvenes a quienes les guste el mismo tipo de música.
- Q15. ¿A cuántos jóvenes les gusta a la vez el flamenco y la música pop? ¿Por qué?
- Q16. ¿En cuántas respuestas de la encuesta están de acuerdo los jóvenes C y J?
- Q17. A todos los jóvenes que les gusta la música dance ¿también les gusta el hardcore?

Gregori et al.

Q18. A todos los jóvenes que les gusta el hardcore ¿también les gusta la música dance? ¿Por que?

Q19. ¿A cuántos jóvenes no les gusta ni el flamenco ni el pop? ¿Por qué?

Q20. El joven I ¿a quien se aproxima más en su gusto musical, al joven F o al joven D?

Q21. A los jóvenes entrevistados ¿les gusta más la música heavy, el jazz o el reggae? ¿Por qué?

# Parte II

## Aplicación del ASI a la Didáctica de las Matemáticas



# Previsión y comunicación de valores a través del gráfico

Eduardo Lacasta \*, Miguel R. Wilhelmi \*\*

Traducido por los autores

Departamento de Matemáticas, Universidad Pública de Navarra,  
31006 Pamplona (España)

\* elacasta@unavarra.es, \*\* miguelr.wilhelmi@unavarra.es

**Resumen.** Se propuso a alumnos de secundaria un cuestionario cuyo objetivo era analizar el papel *adidáctico* del gráfico. En esta experiencia se prueba la capacidad de los estudiantes, en relación con el gráfico cartesiano de funciones, de: 1) prever resultados, 2) representar y comunicar ciertas situaciones o ciertas propiedades y 3) interpretar informaciones planteadas gráficamente. Se exploraron previamente los datos mediante análisis factorial (ACP y AFC). Los modelos derivados de este análisis preliminar se contrastaron con un análisis implicative posterior.

## 1 Objetivos del cuestionario. Hipótesis consideradas

El objetivo de este trabajo es analizar el papel *adidáctico* del gráfico cartesiano de funciones (GCF); es decir, el medio material GCF permite al alumno:

“[...] Las] adaptaciones deseadas, mediante una elección juiciosa, de los ‘problemas’ que [el maestro] le propone. Estos problemas, elegidos de manera que el alumno pueda aceptarlos, deben obligarle a actuar, hablar, reflexionar y evolucionar por sí mismo. Entre el momento en el que el alumno acepta el problema como suyo y el momento en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir para proponer los conocimientos que quiere que aparezcan. El alumno sabe perfectamente que el problema se ha elegido para que adquiriera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que ese conocimiento está completamente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin apelar a razones didácticas. No solamente puede, sino que también

debe hacerlo, pues no habrá adquirido verdaderamente ese conocimiento más que si después es capaz de ponerlo en marcha por sí mismo, en situaciones que encontrará fuera de cualquier contexto de enseñanza y en ausencia de toda indicación deliberada. Esta situación se denomina adidáctica.” (Brousseau, 1998, 59).

En esta experiencia se pondrá a prueba la capacidad de los alumnos, a través del GCF, para:

- prever resultados,
- representar y comunicar ciertas situaciones y ciertas propiedades, e
- interpretar informaciones planteadas gráficamente.

Pretendemos además determinar:

- si se produce un aprendizaje de estas capacidades a través de la escolaridad de secundaria,
- cuál puede ser la influencia de los mensajes icónicos en el comportamiento del alumno y
- cuál puede ser el comportamiento de los alumnos frente a funciones con variable temporal.

Se han explorado los datos previamente mediante el análisis factorial. Los modelos derivados de este análisis preliminar se han contrastado con un análisis implicativo posterior. (Gras, 1996). Para estudiar las dependencias mutuas y las implicaciones entre los objetivos a estudiar, hemos efectuado varios análisis multivariantes, utilizando el programa informático CHIC para la clasificación jerárquica, implicativa y cohesiva (Couturier et Gras, 2005).

### **1.1 La previsión de resultados en las funciones**

La noción de función en un sentido moderno permite estudiar relaciones entre variables, aunque no se presente una idea de anticipación; pero para Lagrange, las funciones tienen necesariamente una expresión algebraica que permita prever en un momento dado los valores de una variable, cuando se conocen los de la otra. Existen funciones para las que no se puede prever cuáles son los valores que la función tomará para valores de la variable superiores a un valor dado. Este tipo de funciones se ha considerado completamente inútil durante mucho tiempo en la historia de las matemáticas.

Cuando los profesores quieren justificar las funciones a los estudiantes, toman la noción más amplia, que se justifica por el estudio de la noción de continuidad y

otras. El ejemplo de la curva de la temperatura de un enfermo con relación al tiempo es completamente diferente del de una función para la que hay una posibilidad de predicción de su comportamiento. Hay una gran distancia epistemológica entre estos tipos de función, pero en el medio escolar no se subraya su diferencia.

El análisis de datos es pertinente para el estudio de los hechos didácticos cuantificados y para formular y contrastar hipótesis (Gras, 1992, 2005). Así pues, esperamos obtener resultados empíricos que nos permitan responder a las hipótesis enunciadas más adelante.

## 1.2 Hipótesis

Varias concepciones de la función se apoyan sobre la variable tiempo; en estos casos el vocabulario espacial no se puede aplicar y el problema de la interpretación de los gráficos se hace diferente. Aunque este no es el objeto de este trabajo, señalaremos que el papel jugado por el gráfico en la construcción del análisis matemático se puede tratar bajo perspectivas distintas (recordemos las construcciones de Newton y Leibniz).

A pesar de todo es interesante analizar la capacidad de los estudiantes para construir e interpretar el gráfico de una función de la variable tiempo (tal y como se hace en las cuestiones 1, 2 y 4 del cuestionario) y la capacidad de los mismos estudiantes para trabajar las funcionalidades espaciales del gráfico y del icono tratadas en la cuestión 3.

He aquí las hipótesis planteadas sobre el gráfico en relación con la previsión, representación y comunicación de situaciones:

- *Hipótesis H1*: Si los estudiantes son capaces de resolver situaciones de extrapolación, entonces dominan la representación gráfica de funciones periódicas.
- *Hipótesis H2*: Si los estudiantes pueden prever el comportamiento para un valor cualquiera del dominio (de la variable  $t$  tiempo) de una función dada mediante una información textual, entonces son capaces de representar gráficamente la función.
- *Hipótesis H3*: Si los estudiantes resuelven determinadas tareas matemáticas, entonces son capaces de resolver tareas del mismo orden, planteadas icónica o gráficamente.
- *Hipótesis H4*: Los estudiantes piensan que se pueden adquirir conocimientos suficientes sin el saber, a través de la imagen.

## **2 El cuestionario y el plan de experiencias: conocimientos matemáticos, componentes del gráfico contempladas y cuestiones**

Los conocimientos matemáticos que se contemplan son los siguientes: extrapolación (ext), división euclídea (div), intersección de funciones (ins) y comparación de funciones (com). Estos conocimientos forman el conjunto  $CM = \{ext, div, ins, com\}$ .

Las técnicas de extrapolación mediante aproximación lineal u otras, no están al alcance de las actividades emprendidas normalmente en la educación secundaria obligatoria. En lugar de definir una función a través de su fórmula, hemos elegido una función empírica, tomando la periodicidad como una característica susceptible de ser utilizada para analizar la capacidad de los estudiantes para concebir la extrapolación de una función. La elección de la periodicidad ha introducido la división euclidiana como conocimiento en juego.

Para las funciones de variable temporal hemos considerado la intersección y la comparación de funciones.

En las cuestiones la información se ha dado en forma de un icono (I), de un gráfico cartesiano (G) y de un texto (Tx). Estos medios de información dan el conjunto  $F = \{I, G, Tx\}$ .

El uso del gráfico cartesiano como ábaco, es decir como dispositivo material que permite encontrar sobre una escala el valor de « y » para un valor dado de « x » (ábaco directo) y viceversa (ábaco indirecto), se ha codificado como “A”; el carácter temporal de las funciones tratadas se ha codificado con “t”.

Se han elegido 14 cuestiones puntuales, que recogen los conocimientos y las componentes del gráfico expuestas más arriba, agrupadas en 4 cuestiones generales. El texto del cuestionario se encuentra en el anexo 1.

## **3 Constitución de la muestra. Desarrollo**

Hemos aplicado el cuestionario dos veces para poder analizar el efecto del nivel escolar. La primera aplicación se realizó con estudiantes de 15 a 16 años (33 alumnos de educación no dividida en ciencias y letras). La segunda se hizo a 19 estudiantes de 17 a 18 años, de un grupo con unas matemáticas adaptadas a las humanidades.



Se eligió el nivel correspondiente a los 15-16 años con el fin de evitar la falta de respuesta, que en niveles inferiores podrían ser numerosas, dadas las cuestiones matemáticas planteadas. Se eligió asimismo un grupo de alumnos de 17-18 años, para tener una separación suficiente de las diferencias de comportamiento atribuibles al nivel escolar.

En todos los casos el cuestionario se aplicó durante el horario escolar y se dijo a los alumnos que su profesor tendría en cuenta los resultados de la prueba para la evaluación posterior.

## **4 Matriz activa: las variables contingentes**

### **4.1 Las variables**

Algunas de las cuestiones puntuales que acabamos de describir fueron respondidas satisfactoriamente por todos los alumnos, mientras la recogida de datos de otras tuvo algunos problemas. Las respuestas a la cuestión 5 se refieren a las representaciones que tienen los alumnos de los gráficos y de los iconos. Por estas razones sólo se tuvieron en cuenta finalmente 14 cuestiones puntuales, mediante las siguientes variables binarias (1 acierto, 0 fallo):

R11, R12, R13: Acierto en los apartados 1.1., 1.2. y 1.3.

R21: Acierto en la representación gráfica del comportamiento de las tres duchas automáticas. La respuesta debe ser un gráfico como el de la figura 1.

R22: Acierto en el apartado 2.2. (dar los valores de  $t = 25, 35, 45 \dots$  y el 0).

R23: Acierto en el apartado 2.3. (dar un valor cualquiera entre 10 y 15 s.).

R24: Acierto en el apartado 2.4. (dar un valor cualquiera entre 5 y 10 s. Y el valor  $t = 15$ ).

R25: Acierto en el apartado 2.5. (dar un intervalo entre  $t = 0$  y un valor entre 5 y 10).

R26: Acierto en el apartado 2.6. (dar un intervalo entre dos valores de  $t$  comprendidos entre 5 et 15).

R31: Acierto en el apartado 3.1. (dar el gráfico de la función  $S(x) = 2x$ ).

R41: Acierto en el apartado 4.1. (dar los valores  $t = 0$  y  $t = 60$ ).

R42: Acierto en el apartado 4.2. (descripción de los movimientos de los móviles A y B, explicitando el comportamiento de la velocidad y de los tiempos de parada y de regreso).

R43: Acierto en el apartado 4.3. (dar el móvil A y los intervalos  $[0 ; 10]$  y  $[10 ; 30]$ ).

R44: Acierto en el apartado 4.4. (dar el móvil A).

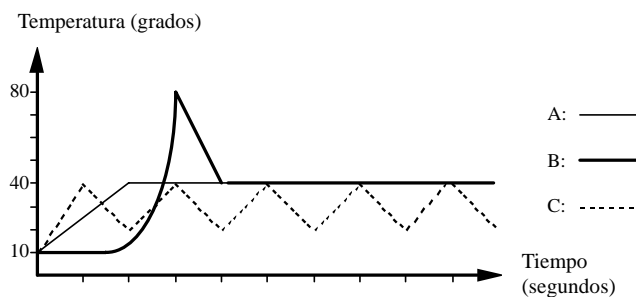


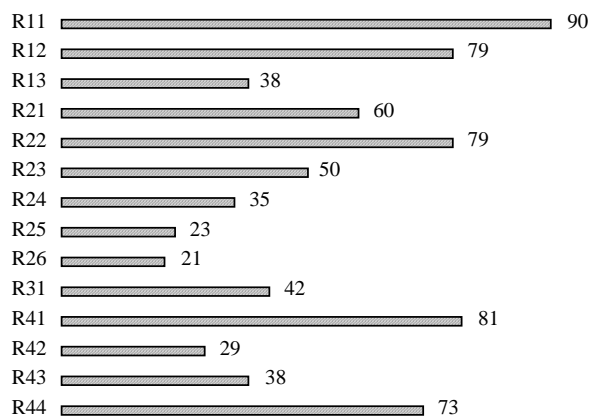
Fig.1: Respuesta a la cuestión 2 del cuestionario

Como el número total de alumnos que han respondido al cuestionario es 52, la dimensión de la matriz de las variables contingentes es: 52 x 14. Decidimos elegir esta matriz como activa para los análisis factoriales. Es decir, que los vectores y valores propios se definen a partir de ella. Las representaciones de las variables y los caracteres de las matrices explicativas se situarán respecto a la contingencia definida por la matriz activa.

#### 4.2 Histograma de aciertos. Dificultad de las cuestiones

Una clasificación arbitraria de las cuestiones según su dificultad puede proporcionarnos algunas indicaciones en una primera aproximación; aunque algunas atribuciones de la clasificación pueden ser equívocas, puesto que no se han realizado tests de hipótesis y algunas diferencias pueden deberse al azar.

## Previsión y comunicación de valores a través del gráfico



Leyenda:

Rij: acierto en el apartado « i.j » del cuestionario.

El número situado en el extremo de las barras es el porcentaje del éxito respectivo.

Fig. 2: *Histograma de los porcentajes de acierto a los apartados del cuestionario*

### *Cuestiones fáciles (porcentajes de acierto superiores al 70%)*

Apartados 1.1 et 1.2 (que pueden resolverse por extrapolación explícita sobre el gráfico y su lectura como ábaco directo). Apartado 2.2 (que puede ser una respuesta puntual mediante interpretación directa del texto, sin construcción gráfica). Apartado 4.1 (que puede resolverse por intersección de funciones, incluso cuando sus gráficos se interpretan erróneamente, por ejemplo como trayectorias). Apartado 4.4 (que puede resolverse mediante lectura del gráfico como ábaco indirecto).

### *Cuestiones de mediana dificultad (porcentajes de acierto entre 40 y 70%)*

Apartado 2.1 (la resuelve el 60% de los alumnos, aunque no es una cuestión habitual en la enseñanza y los gráficos tienen cierta complejidad; se trata de un resultado bastante sorprendente). Apartado 2.3 (lectura como ábaco del gráfico del apartado 2.1). Apartado 3.1 (42% de los alumnos son capaces de apartarse de la representación icónica para abstraer la función  $S(x)$  y dar correctamente su gráfico).

*Cuestiones difíciles (porcentajes de acierto inferiores al 40%)*

Apartado 1.3 (sólo el 38% de los alumnos han sabido resolver esta cuestión fuera del gráfico, mediante la división euclidiana u otros procedimientos numéricos). Apartado 2.4 (el 35% hace una lectura puntual del gráfico encontrado en el apartado 2.1). Apartado 4.2 (el 29% de los alumnos interpreta convenientemente un diagrama e-t, determinando el regreso, la velocidad, etc.). Los apartados más difíciles son los 2.5 y 2.6, que exigen razonamiento sobre un intervalo.

## 5 Las matrices explicativas. Análisis “a priori”

He aquí los tipos de procedimiento seguidos en la resolución de la cuestión 1:

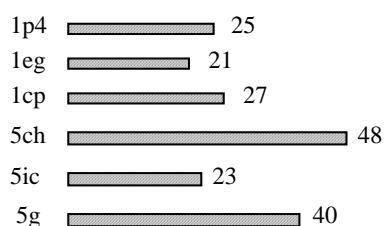
- 1p4: Determinación del periodo 4 mediante observación del gráfico, división de “t” por 4 y cálculo del valor de la intensidad del sonido por conteo del resto. Hemos anotado el valor « 1 » cuando se ha usado este procedimiento para responder al menos a los apartados 1.1 y 1.2 y el valor “0” cuando no se ha usado este procedimiento.
- 1eg: Cálculo por extrapolación gráfica. Valor “1” si el alumno continúa el dibujo del gráfico hasta el valor  $t = 23$  s. para responder a los apartados 1.1 y 1.2.
- 1cp: Determinación del valor pedido mediante conteo (de uno en uno o de cuatro en cuatro) sobre el gráfico o sobre una tabla elaborada al efecto, al menos en los apartados 1.1 y 1.2.
- 1tb: Construcción de una tabla de valores de la función dada.

Los comportamientos encontrados en la elección de las cuestiones que los alumnos perciben como las más fáciles fueron:

- 5ch: Coherencia de la respuesta con los resultados. Valor “1” si la cuestión estimada como la más fácil está globalmente bien resuelta por el alumno.
- 5ic: Incoherencia de la respuesta del alumno con sus resultados. Valor “1” si la cuestión estimada como la más fácil por el alumno no la ha resuelto adecuadamente de manera global<sup>1</sup>.
- 5g: La razón argüida de la facilidad de la cuestión elegida es que la interpretación del gráfico es fácil.

---

<sup>1</sup> Hemos elegido las variables 5ch y 5ic en lugar de una sola, porque algunos alumnos no han respondido a la cuestión 5. Así, los valores posibles para el par de respuestas son (1, 0), (0, 1) y (0, 0).



*Leyenda:*

El número del extremo de las barras es el porcentaje de acierto o de la realización del comportamiento respectivo.

1p4: determinación del periodo 4 mediante observación del gráfico.

1eg: cálculo mediante extrapolación gráfica.

1cp: determinación del valor pedido mediante conteo.

5ch: coherencia de la respuesta del alumno sobre las cuestiones más fáciles a su juicio con sus resultados.

5ic: incoherencia de la respuesta del alumno sobre las cuestiones más fáciles a su juicio con sus resultados.

5g: la razón argüida de la facilidad de la cuestión elegida es la facilidad de la interpretación de su gráfico.

Fig. 3: *Histograma de los procedimientos seguidos y de los comportamientos observados en las cuestiones 1 a 5 del cuestionario.*

Las diferencias entre los porcentajes de acierto pueden deberse al azar. Sin embargo, es de resaltar que casi la mitad de los alumnos eligen de manera coherente con los resultados y que el 40% de los alumnos declaran que la razón de su elección es la facilidad de la interpretación del gráfico. ¿Son los mismos los alumnos que responden afirmativamente a los comportamientos 5ch y 5g? ¿Cómo se sitúan estas variables con relación a la contingencia y a las demás variables explicativas?

El análisis de datos puede darnos algunas respuestas a las cuestiones planteadas y el interés de las variables ligadas a la cuestión 5 será puesto de relieve en el párrafo 7.

He aquí los caracteres explicativos de las situaciones:

Los conocimientos matemáticos y las componentes del gráfico son: A (ábaco), t (tiempo); el conjunto de formas de presentación de la información es  $F = \{I \text{ (icono), } G \text{ (gráfico), } Tx \text{ (texto)}\}$  y el conjunto de los conocimientos matemáticos implicados es  $\{ext \text{ (extrapolación), } div \text{ (división euclidiana), } ins \text{ (intersección de funciones), } com \text{ (comparación de funciones)}\}$ .

Las 14 variables acierto-error tomadas en cuenta permiten mostrar el efecto de estos caracteres explicativos ligados a las situaciones propuestas. La matriz a priori de la tabla 1 indica la realización o no de cada carácter binario para cada una de las 14 cuestiones.

La verificación de las dependencias a priori consiste en examinar la relación entre las variables explicativas, independientemente de la contingencia a explicar. Los caracteres “t” (tiempo) y “A” (según los análisis ACP y AFC) están relacionados entre sí. Sucede lo mismo con los caracteres “ext” (extrapolación) y “div” (división). Se ha detectado también una cierta relación entre los caracteres “I” (icono) y “G” (gráfico). Los otros caracteres: “ins” (intersección de funciones), “com” (comparación de funciones) y “Tx” (texto) son relativamente independientes.

	R11	R12	R13	R21	R22	R23	R24	R25	R26	R31	R41	R42	R43	R44
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
G	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Tx	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
ext	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
div	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ins	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
com	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
t	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
A	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

*Leyenda:*

Rij: acierto en el apartado « i,j » del cuestionario.

I: la información dada en la cuestión lo está bajo la forma de un icono.

G: la información dada en la cuestión lo está bajo la forma de un gráfico.

Tx: la información dada en la cuestión lo está bajo la forma de un texto.

ext: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la extrapolación.

div: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la división euclidiana.

ins: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la intersección de funciones.

com: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la comparación de funciones.

t: presencia en la cuestión de funciones de variable temporal.

A: el gráfico debe utilizarse como ábaco para responder a la cuestión.

La dimensión de la matriz explicativa de los caracteres ligados a las situaciones es pues 9 x 14.

Tab. 1: *Matriz de los caracteres explicativos ligados a las situaciones del cuestionario, considerados “a priori”.*

## 6 Análisis de la contingencia y confrontación con las variables explicativas

Veamos ahora el efecto de la contingencia; es decir, el efecto de los resultados de los alumnos sobre las relaciones entre los 9 caracteres explicativos.

Las relaciones de proximidad e independencia encontrados en los ACP *a priori* y *a posteriori*, es decir, con la intervención de los resultados de los alumnos, se exponen en la tabla 2.

En los dos análisis, los caracteres explicativos de las situaciones *Tx* (texto), *ins* (intersección) e *I* (icono) aparecen separados en las matrices *a priori* y ligados en la matriz analizada *a posteriori*. Es decir, que son los alumnos los que han relacionado estos caracteres y esa proximidad de los elementos del conjunto {*Tx*, *ins*, *I*} es un hecho que podemos interpretar de esta manera: la presencia de un texto y un icono explicativos está relacionada por los alumnos con el cálculo de intersecciones de funciones. Por el contrario, el gráfico no aparece relacionado con este cálculo.

	A priori	A posteriori
Proximidad	{A, t}, {ext, div}, {I, G}	{A, t}, {com, I}, {I, Tx, ins}, {A, Tx}
Independencia	{I, Tx, ins}, {A, Tx}, {com, I}	{ext, div}

*Leyenda:*

I: la información dada en la cuestión lo está bajo la forma de un icono.

G: la información dada en la cuestión lo está bajo la forma de un gráfico.

Tx: la información dada en la cuestión lo está bajo la forma de un texto.

ext: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la extrapolación.

div: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la división euclidiana.

ins: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la intersección de funciones.

com: presencia en la cuestión de conocimientos relativos a la comparación de funciones.

t: presencia en la cuestión de funciones de variable temporal.

A: el gráfico debe utilizarse como ábaco para responder a la cuestión.

Tab. 2: *Proximidad e independencia de los caracteres explicativos “a priori” y “a posteriori” en el cuestionario*

En la representación del plano 1-2 del AFC *a posteriori*, el único carácter ligado a “com” (comparación de funciones) es “Tx”. Luego es la presencia de un

texto explicativo lo que está relacionado por el comportamiento de los alumnos a la comparación de funciones y no la presencia de un gráfico cartesiano o de un icono.

El carácter “A” (ligado a las cuestiones cuya resolución exige el uso del gráfico como ábaco) está ligado por las respuestas de los alumnos al carácter “Tx”; es decir, a la presencia de un texto explicativo de la función. Por el contrario, el par (A, t) está relacionado a priori y a posteriori. Pero como la relación entre A y t viene dada por la propia definición de estos caracteres, no podemos determinar si el comportamiento de los alumnos ha influido en su relación.

El par (div, ext) que está ligado en el análisis a priori, se separa tras la intervención de los alumnos, puesto que se trata de dos procedimientos alternativos para la resolución de los apartados 1.2. y 1.3.

El hecho de que las cuestiones se hayan planteado mediante un gráfico cartesiano (G), no parece jugar ningún papel en la eficacia para resolver problemas de comparación de funciones (com) y de cálculo de intersecciones (ins).

### **6.1 Confrontación a la contingencia de las variables explicativas de los alumnos. Análisis en Componentes Principales (ACP)**

Los apartados 3.1. (expresión mediante un gráfico cartesiano del área de la vela en función de la longitud de la botavara del barco) y 4.1. (cálculo de los instantes durante los cuales las posiciones de los dos móviles de la cuestión 4 coinciden) son los que más se identifican con el éxito escolar en matemáticas en el plano 1-2 del ACP de la matriz “a posteriori” y parece que la interpretación de diagramas cartesianos espacio-tiempo y la representación cartesiana de funciones expresadas a través de informaciones diversas (texto explicativo e icono) son tareas familiares para los alumnos.

El éxito en el ejercicio (RÉU)<sup>2</sup> no discrimina a los alumnos que pertenecen a la clase de 15-16 años (U) y a los de la clase de 17-18 años (L). Sin embargo, en el ACP se observa que:

Los alumnos de 15 años (U) se caracterizan por: a) la expresión del gráfico como ideograma (sin referencias ni escalas) en la respuesta al apartado 3.1. (31D) y b) el uso de la extrapolación gráfica en la cuestión 1 (*Ieg*).

---

<sup>2</sup> El valor es la media de los aciertos a las cuestiones del cuestionario. Es decir, la media de los valores obtenidos para las 14 variables activas: R11, R12, R13, R21, R22, R23, R24, R25, R26, R31, R41, R42, R43 y R44.



Los alumnos de la clase de 17-18 años (L) se caracterizan por: a) la ilusión del icono como representación cartesiana en la respuesta al apartado 3.1. (31I, indicio de la ilusión de la adquisición de conocimientos sin el saber, a través de la imagen) y b) la elección de cuestiones que contienen la variable tiempo como las más fáciles. Hay que resaltar que esta elección no se acompaña de un dominio particular de la interpretación de las funciones temporales, ya que el carácter de las situaciones  $t$  (tiempo) aparece opuesto a las clases U y L en el AFC a posteriori.

En efecto, la observación directa de las frecuencias de estas variables da la tabla 3.

Parece pues que no hay un efecto del aprendizaje en el éxito general en el ejercicio, para los alumnos de la clase L (opción de letras), sino una especialización en la ilusión de la adquisición de conocimientos sin el saber, mediante la imagen.

Clase	Número de alumnos	31I	31D
U	33	0	7
L	19	6	1

Leyenda:

31I: dar como respuesta al apartado 3.1 la representación icónica de la vela sobre los ejes coordenados.

31D dar como respuesta al apartado 3. el gráfico de la función  $y = x$ , sin escalas.

U: clase de 15-16 ans (sección única).

L: clase de 17-18 ans (sección de letras).

Tab. 3: *Frecuencias por clases de las variables que reflejan el uso del gráfico como ideograma y la contaminación del icono en el gráfico*

## 6.2 Influencia de la iconicidad sobre las preferencias de los alumnos

Los alumnos de letras de 17-18 años eligen erróneamente las cuestiones de interpretación de diagramas espacio-tiempo como las más fáciles. Tras la realización del cuestionario los caracteres L (sección de letras) y 5g (“los gráficos son muy fáciles de interpretar”) están ligados, pero al mismo tiempo el carácter temporal ( $t$ ) está opuesto a L. Este resultado puede interpretarse de la siguiente manera: “La ideología de la iconicidad conduce a los estudiantes a elegir mal las soluciones”.

Solamente los alumnos de 15-16 años usan el gráfico como ideograma y, a la vez, prevén los valores de una función periódica mediante extrapolación gráfica.

Nuestra idea previa era que el uso del gráfico como ideograma exige una cierta madurez. Por el contrario, este resultado empírico –que está acompañado de una falta de dominio en la resolución de problemas, puesto que no aplican procedimientos simples, como la división euclidiana– contradice la conjetura de que “sólo los alumnos de niveles superiores (17- 18 años) llegan a usar el gráfico como ideograma en sus explicaciones”.

### 6.3 Análisis implicativo

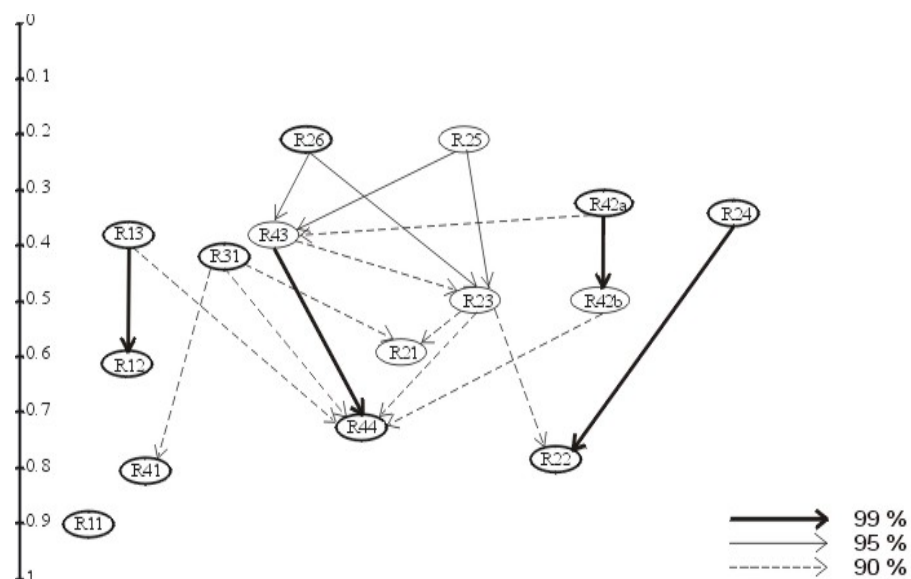
Las variables explicativas ligadas a los alumnos podrían haberse tratado como caracteres activos, puesto que están definidos a partir de respuestas al cuestionario. Sin embargo este análisis está aplicado a la matriz de aciertos a las cuestiones (de dimensión 52 x 14); por un lado, la definición de las variables se ha realizado según criterios que pueden ser discutibles desde el punto de vista de la fidelidad de los datos a la contingencia, pero por otra parte, la consideración de un número excesivamente grande de variables explicativas en la matriz contingente hubiera podido entorpecer el análisis.

Recordemos que las implicaciones de la “jerarquía implícita de las clases para la matriz de los aciertos a las cuestiones del cuestionario” se establecen entre clases ya ordenadas internamente. El árbol jerárquico proporcionado por el programa informático CHIC, pone de manifiesto que la presencia de un gráfico cartesiano en el enunciado (EG) no implica más que muy débilmente –en un solo caso– los aciertos a otras cuestiones. Por otra parte, el acierto en la construcción de un gráfico cartesiano (IG) implica también débilmente otros aciertos. Así pues, no podemos afirmar que el gráfico pueda jugar un papel fundamental en la comunicación, la reproducción y la previsión de situaciones diversas.

El gráfico implicativo (figura 4) nos proporciona informaciones adicionales. Por ejemplo:

- La variable R11 está aislada. No hay implicación ni transitividad con las variables R12 o R13, aunque el comportamiento recogido por R11 supone también una extrapolación. La explicación más plausible es que el acierto en la cuestión 1.1, más que una extrapolación, no exige más que una lectura puntual del gráfico dado, con un pequeño añadido.
- El porcentaje de acierto en la cuestión R21 es del 60%. Los tres tipos de error más frecuentemente asociados a la cuestión 2.1 (representación gráfica) son: 1) tomar el origen O de los ejes como origen de los gráficos (el agua empieza a salir según los gráficos a 0°), 2) los gráficos contienen trazos verticales y 3) el

cambio de pendiente de la gráfica del sistema B se sustituye por una pendiente constante los primeros 15 segundos o por otras pendientes que no están de acuerdo con el enunciado.



*Legenda:*

Rij: acierto en el apartado « i,j » del cuestionario.

Fig. 4: *Gráfico implicativo*

- El análisis clínico de las respuestas pone de manifiesto que los errores más frecuentes son « confusión entre velocidad y aceleración » (cuestión 4) y « respuestas puntuales cuando se solicita un intervalo » (cuestión 2). El gráfico implicativo permite por su parte afirmar que: 1) la frecuencia de R43 es mayor que la frecuencia de R25, aunque la tarea de 2.5 (lectura de un gráfico mediante intervalos) podría considerarse más simple que la correspondiente a 4.3 (determinación de la pendiente de una función lineal) y 2) la mayoría (95%) de los alumnos que han resuelto las cuestiones 2.5 y 2.6 son capaces de resolver la cuestión 4.3.

Estableceremos a continuación otros resultados empíricos proporcionados por el gráfico implicativo.

## **7 Confrontación de los resultados empíricos con las hipótesis**

1. Los alumnos capaces de construir el gráfico de una función periódica, dada a través de una información textual (R21), muchas veces no son capaces de prever su comportamiento para un valor cualquiera de la variable  $t$  tiempo (R22). Esto contradice la hipótesis H1 (“Si los estudiantes son capaces de resolver situaciones de extrapolación, entonces dominan la representación gráfica de funciones periódicas”).
2. La frecuencia de la variable R22 es mayor que la de la variable R21; así pues, la causa del acierto en la 2.2. es la interpretación textual del enunciado y no la de la representación gráfica. Esto contradice la hipótesis H2 (“Si los estudiantes pueden prever el comportamiento para un valor cualquiera del dominio (de la variable  $t$  tiempo) de una función dada mediante una información textual, entonces son capaces de representar gráficamente la función”).
3. El acierto en las cuestiones planteadas icónica o gráficamente (ver la tabla 2) es independiente del acierto en las tareas matemáticas intersección y comparación de funciones. Esto contradice la hipótesis H3 (Si los estudiantes resuelven determinadas tareas matemáticas, entonces son capaces de resolver tareas del mismo orden, planteadas icónica o gráficamente).
4. Los alumnos de la sección de letras de 17-18 años justifican su elección de las cuestiones más fáciles porque, según ellos, “los gráficos son muy fáciles de interpretar” y, al mismo tiempo, algunos de ellos sitúan el icono de un problema en el plano cartesiano, en lugar de abstraer la fórmula de la función pedida y representarla. Estos alumnos, influenciados por su ideología icónica, sitúan directamente el dibujo de la vela de un barco (figura 5) en el plano cartesiano, sin darse cuenta de la diferencia que existe entre el icono y el gráfico de la función. Esto viene a conformar la hipótesis H4 (“Los estudiantes piensan que se pueden adquirir conocimientos suficientes sin el saber, a través de la imagen”).

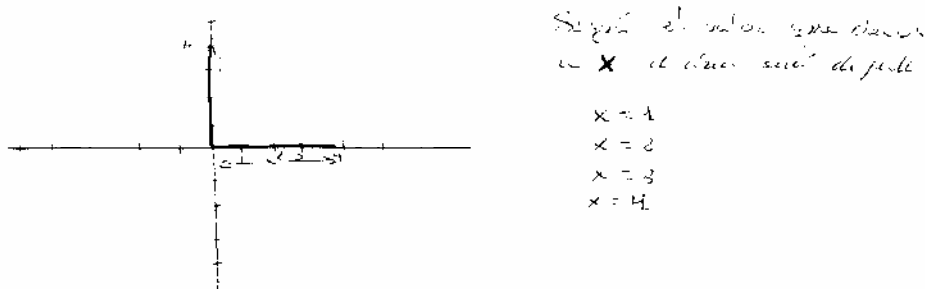


Fig. 5: Representación del icono de la vela sobre el plano cartesiano hecha por un alumno (17-18 años, sección L)

5. Los alumnos de letras de 17-18 años presentan una especialización de la ilusión de la adquisición de conocimientos sin el saber por la imagen, con relación a los alumnos de 15-16 años (ver tabla 3). El éxito general (REU) en el cuestionario es independiente de los caracteres U (clase de 15-16 años) y L (clase de 17-18 años, sección de letras); es decir, los alumnos que pertenecen a L no tienen mejores resultados que los de U, pero están persuadidos de las virtudes de lo icónico y lo gráfico confundido, lo que viene a confortar la hipótesis H4.

## 8 Resultados empíricos inesperados

- i) El carácter icónico y el gráfico están separados por la contingencia.

Los caracteres I y G, que estaban relacionados por la matriz a priori, se vuelven independientes por las repuestas que dan los alumnos. El papel jugado por los iconos del cuestionario (el dibujo del barco y la representación de los móviles sobre una recta en un momento dado) es diferente del papel jugado por los gráficos cartesianos.

- ii) Los conocimientos matemáticos “extrapolación” y “división euclidiana” son independientes.

Estos conocimientos estaban relacionados por la matriz explicativa a priori y el comportamiento de los alumnos los ha vuelto independientes. La capacidad de

extrapolar un gráfico no parece tener relación con el dominio de las técnicas numéricas.

iii) El carácter temporal de las funciones propuestas se opone a la clase L de los alumnos de la sección de letras (17-18 años).

No hay un efecto del aprendizaje en estos alumnos, en lo que a la interpretación de funciones temporales respecta.

iv) El éxito general en el cuestionario es independiente de la pertenencia a uno u otro de los niveles tratados (15-16 o 17-18 años)

No hay pues un efecto en general de aprendizaje para los contenidos del cuestionario.

v) La nota anual en Matemáticas está ligada al éxito en la representación cartesiana de la función  $S(x)$  et al éxito en la interpretación de la coincidencia de los móviles en un diagrama e-t.

Las tareas solicitadas en los apartados 3.1 y 4.1 son familiares para los alumnos. Los profesores hacen jugar un papel importante en las evaluaciones a la interpretación de diagramas espacio-tiempo y a la representación cartesiana de funciones lineales.

## **Bibliografía**

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, 1998.

Couturier, R.; Gras, R. (2005). *CHIC: Traitement de données avec l'analyse implicative*, Journées Extraction et gestion des connaissances (EGC) 2005, Vol. 2, pp 679-684.

Gras, R. (2005). *Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices*, Troisième Rencontre Internationale Analyse Statistique Implicative (ASI), Quaderni di Ricerca In Didattica of G.R.I.M. Supplemento 2-15, 2005, pp 6-24.

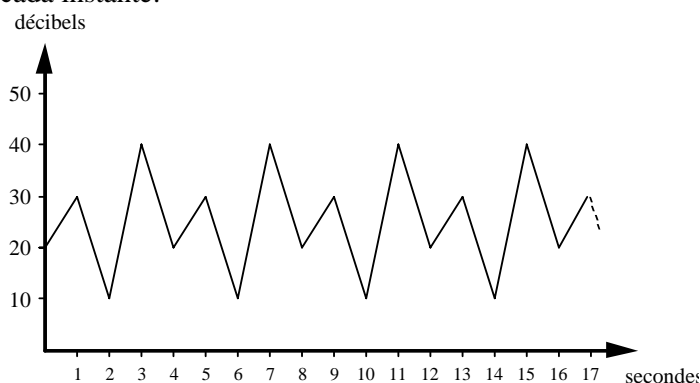
Gras, R. (1996). *L'implication statistique*, La Pensée Sauvage, 1996.

Gras, R. (1992). *L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de didactique*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 12(1), pp 59-72, 1992.

## Anexo 1: Cuestionario

### Cuestión 1

Un aparato de radio tiene una extraña avería; el volumen del sonido varía continuamente. Se ha controlado esta variación durante 17 segundos y se ha podido determinar en la gráfica siguiente, donde aparece el volumen del sonido, medido en decibelios, en cada instante:



Será capaz de prever cuál será la intensidad del sonido para:

- 1.1.  $t = 18$  s.      1.2.  $t = 23$  s.      1.3.  $t = 315$  s.?

### Cuestión 2

En una fábrica se están probando tres sistemas de regulación automática de la temperatura del agua de una ducha. En todas las duchas el agua sale inicialmente a 10 grados y se pretende que la temperatura del agua se estabilice en 40 grados. Las personas que prueban los tres sistemas, A, B y C, dan los siguientes informes:

A: Funciona muy bien. En 10 segundos alcanza la temperatura adecuada (40 grados) sin altibajos y después se mantiene todo el rato igual.

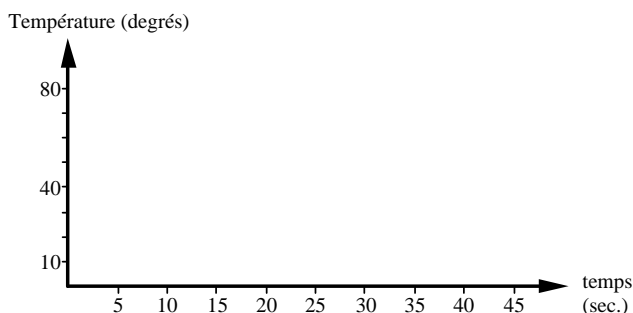
B: El agua sale a diez grados los 10 primeros segundos, para subir muy bruscamente hasta alcanzar los 80 grados a los 15 segundos exactos. Desde los 15 a los 20 segundos, la temperatura desciende sin altibajos hasta los 40 grados, que se mantienen constantes a partir de los 20 segundos.

C: No hay manera de ducharse. En los 5 primeros segundos la temperatura asciende sin altibajos hasta 40 grados, pero no se mantiene. A partir de los 5 segundos, siempre pasa lo mismo: se enfría hasta 20 grados en otros 5 segundos,

vuelve a subir hasta 40 grados en los 5 segundos siguientes, baja hasta 20 grados en los 5 segundos siguientes, vuelve a subir hasta 40 grados en los 5 segundos siguientes y así todo el tiempo restante.

(Para contestar a estos apartados te puedes ayudar de lo que estimes oportuno [interpretación directa del texto, tablas de valores, gráficos...], pero debes razonar las respuestas).

2.1 Expresa en este sistema de ejes coordenados el funcionamiento de las tres duchas:



Si se ponen en marcha las tres duchas a la vez:

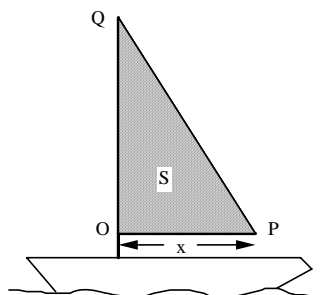
- 2.2. ¿En qué instantes estará el agua de las tres duchas a la misma temperatura?
- 2.3. ¿Podría ocurrir que las temperaturas de B y C sean iguales, pero distintas de la de A? De ser así, ¿para qué valores del tiempo  $t$ ?
- 2.4. ¿Podría ocurrir que las temperaturas de A y C sean iguales, pero distintas de la de B? De ser así, ¿para qué valores del tiempo  $t$ ?
- 2.5. ¿Hay algún período de tiempo en el que la temperatura de C es superior a la de A y B:  $T_C > T_A$  y  $T_C > T_B$ ?
- 2.6. ¿Hay algún período de tiempo en el que la temperatura de A es superior a la de B y a la de C:  $T_A > T_B$  y  $T_A > T_C$ ? ¿Para qué valores del tiempo  $t$ ?

### Cuestión 3

Se quiere construir la vela de un barquito, cuyo palo vertical es de 4 metros. Según la distancia  $OP = x$  de la base del palo al extremo P de la botavara (así se



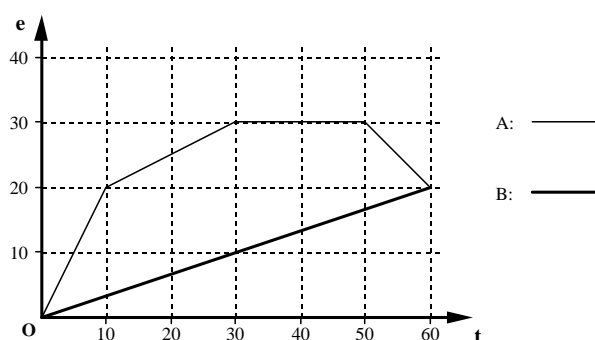
llama el palo horizontal), el área de la vela, que es el área  $S$  del triángulo  $\triangle POQ$ , es distinta.



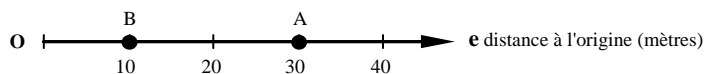
- 3.1. Representando en unos ejes cartesianos la longitud de la botavara (en metros) sobre el eje  $OX$  y el área de la vela (en metros cuadrados) sobre el eje  $OY$ , dibuja una gráfica que represente la variación del área  $S$  de la vela, según  $x$ .
- 3.2. Encuentra una expresión matemática,  $S(x)$ , que represente de modo general la variación anterior.
- 3.3. Expresa en una tabla los resultados que obtendrías para el área  $S$ , según la longitud  $x$  de la botavara ( $x$  variando entre 20 y 35 decímetros, o sea, entre 2 y 3,5 metros).

#### Cuestión 4

Dos móviles A y B parten a la vez de un punto O y recorren una línea recta. En el gráfico están representadas las distancias de los móviles al origen O.



Por ejemplo, según lo indicado en el gráfico, para  $t = 30$  segundos, la posición de los móviles A y B sería:  $e_A = 30$  m. y  $e_B = 10$  m. Es decir, que el móvil A estaría en ese instante a 10 metros del origen y el B a 30 metros:



- 4.1. ¿Coinciden en el mismo punto los dos móviles en algún instante a lo largo del recorrido? ¿Para qué valores de  $t$ ?
- 4.2. Describe el movimiento de A y de B, diciendo si cambia la velocidad, si se paran, si retroceden hacia el origen, etc.
- 4.3. ¿Cuál de los dos móviles ha alcanzado mayor velocidad en el trayecto? ¿Para qué valores de  $t$ ?
- 4.4. ¿Cuál de los dos móviles pasa antes por el punto que está a 20 metros del origen? ¿Por qué?

Debes razonar todas las respuestas. Para ello, te puedes ayudar de lo que creas conveniente: el gráfico que te presentamos, otros gráficos que se te ocurran, tablas de valores, cálculos, etc.

### Cuestión 5

¿Cuáles de estas preguntas te han parecido más fáciles? ¿Por qué?

# La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo

Samuel D. Bodí \*, Julia Valls\*\*, Salvador Llinares\*\*\*

\*I.E.S. Professor Manuel Broseta, Banyeres de Mariola, Alicante, España  
samueldbodi@telefonica.net

\*\*Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante,  
España

[julia.valls@ua.es](mailto:julia.valls@ua.es), [sllinares@ua.es](mailto:sllinares@ua.es)

<http://www.ua.es/dpto/difd/quienes/index.html>

**Resumen.** Este estudio analiza la comprensión de estudiantes de secundaria sobre la divisibilidad en N y la relación de dicha comprensión con los diferentes modos de representación: decimal y factorial. El cuestionario administrado incluía tareas que demandaban a los estudiantes movilizar sus ideas sobre las diferentes acepciones léxicas así como los significados dados a sus equivalencias ( $P$  es divisor de  $Q \Leftrightarrow Q$  es múltiplo de  $P \Leftrightarrow P$  es un factor de  $Q \Leftrightarrow Q$  es divisible por  $P$ ). El diagrama de similaridad ha mostrado la existencia de seis grupos de ítems indicando que la comprensión de las diferentes relaciones que definen el esquema de divisibilidad en N está relacionada con los modos de representación. Estos seis grupos parecen mostrar las trayectorias de aprendizaje de la divisibilidad indicando la manera en la que una mera comprensión procedimental de los conceptos no es suficiente para superar las demandas cognitivas generadas cuando los números están representados factorialmente con grandes exponentes en los factores.

## 1 Introducción

Las investigaciones sobre la comprensión de los conceptos de la Teoría Elemental de Números han puesto de manifiesto la existencia de dificultades y la necesidad de una mayor indagación (Dubinsky, 1991; Vergnaud 1994; Zazkis y Campbell, 1996; Campbell, 2000). La mayoría de los trabajos en este campo se han

realizado principalmente con estudiantes para maestros y sobre los contenidos matemáticos que se deben enseñar y en menor medida sobre la comprensión alcanzada por los estudiantes de secundaria. De ahí que el análisis de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre la divisibilidad sea en estos momentos un campo de interés educativo.

### **1.1 La divisibilidad en la Educación Secundaria y los modos de representación de los números**

La enseñanza de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales forma parte de los currículos de los alumnos de 10 a 14 años, dependiendo de los planes de estudios. En las primeras décadas del siglo pasado la divisibilidad en la educación primaria se vinculó al estudio de las magnitudes, pero a lo largo del siglo XX el estudio de la divisibilidad se consideró como una propiedad entre números con representación decimal. Este enfoque condujo a enfatizar un marcado carácter procedimental del Teorema Fundamental de la Aritmética (Sierra et al., 1989; Gascón, 2001).

El currículo de educación secundaria consolida los contenidos de divisibilidad introducidos en primaria y plantea las equivalencias entre las distintas acepciones léxicas de divisibilidad: “ $Q$  es múltiplo de  $P \Leftrightarrow P$  es divisor de  $Q \Leftrightarrow Q$  es divisible por  $P \Leftrightarrow P$  es un factor de  $Q$ ”. Sin embargo, en el currículo de secundaria existe poca mención de las relaciones entre las diferentes representaciones de los números y su integración en el esquema de divisibilidad. A este respecto, un análisis de los libros de texto (Bodí, 2006) ha mostrado que la divisibilidad entre números con representación factorial es escasamente planteada. El modo de representación factorial se ha utilizado principalmente de manera procedimental para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números, y algunas veces para la obtención de todos los divisores de un número.

### **1.2 La comprensión de la divisibilidad en $\mathbb{N}$**

Algunas investigaciones sobre la comprensión de la divisibilidad se han centrado en (a) el análisis de la comprensión de las relaciones entre las acepciones léxicas “múltiplo”, “divisor”, “factor”; “ser divisible” y “divisor”, y (b) el papel que desempeñan las representaciones decimal y factorial en la comprensión de la divisibilidad.

Entre las primeras, Zazkis (Zazkis, 2000 y 2002) analizó las conexiones que los estudiantes para maestro establecían entre factor, divisor, múltiplo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor. Zazkis (Zazkis, 2000) indica que los estudiantes asociaban el concepto de divisor con la operación de dividir y el concepto de múltiplo con la operación de multiplicar, mostrando una comprensión incompleta del concepto de factor y que los estudiantes realizaban un intercambio constante e incoherente entre el lenguaje formal y no formal. Por ejemplo, “ser divisible” - relación entre dos números- era sustituido por “ser dividido” - un número que puede ser dividido por otro. Desde estos resultados Brown et al. (2002) inciden en la necesidad de establecer la equivalencia lógica de las acepciones “ $Q$  es divisible por  $P$ ”; “ $Q$  es un múltiplo de  $P$ ”; “ $P$  es un factor de  $Q$ ”, y “ $P$  es un divisor de  $Q$ ”. Los resultados de este estudio ratifican la tendencia de los estudiantes a asociar los conceptos de divisor con la operación de dividir y la importancia de la comprensión de la descomposición única de los números naturales como producto de factores primos. Estas investigaciones ponen de manifiesto que un primer aspecto a considerar en el análisis de la comprensión de la divisibilidad en  $\mathbb{N}$  deberían ser las relaciones entre las distintas acepciones léxicas de la divisibilidad.

Por otra parte, Zazkis y Gadowsky (2001), Zazkis y Campbell (1996) y Brown et al. (2002) señalan que la manera en la que se representaban los números naturales influía en el nivel de éxito en la resolución de determinadas tareas y en la manera en la que estas eran resueltas. En estas investigaciones los estudiantes, independientemente del modo de representación de los números, recurrían mayoritariamente a la representación decimal para resolver las tareas propuestas. Estos resultados indican que la representación decimal o factorial de los números naturales parece influir en la manera en la que los estudiantes dotan de sentido a los tópicos sobre divisibilidad. Un aspecto que resaltó la investigación de Zazkis y Liljedahl (2004) fue que la comprensión de los números primos está vinculada a los modos de representación y a las relaciones entre los números. Además, Zazkis y Campbell (1996) indican que los alumnos comprenden más fácilmente la divisibilidad que la indivisibilidad. Desde estos resultados se desprende que la construcción de la conexión entre la divisibilidad y la descomposición en factores primos parece contribuir enormemente a comprensión de la divisibilidad.

Por otra parte, las investigaciones de Bodí et al. (2005) y Bodí (2006) han puesto de manifiesto la necesidad operatoria que evidencian los estudiantes de secundaria para discutir los conceptos de divisibilidad, las dificultades que presentan en la coordinación de procesos y la importancia que tiene la descomposición en factores primos en la comprensión de la divisibilidad. Los

objetivos planteados en la investigación de Bodí (2006) se dirigían a profundizar en la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria (12 a 17 años) del concepto de divisibilidad en el conjunto de los números naturales, concretándose en (a) estudiar las formas de conocer la divisibilidad en el conjunto de los números naturales y los mecanismos que utilizan estos los alumnos, usando el marco teórico constructivista APOS, y (b) caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Los resultados de esta investigación vistos desde el modelo APOS de comprensión (Dubinsky, 1991; Asiala et al.1996) subrayan que el desarrollo del esquema de divisibilidad está determinado por la capacidad de los estudiantes para establecer las relaciones bicondicionales entre los tópicos del esquema de divisibilidad, determinando divisores y no divisores, múltiplos y no múltiplos de un número natural a partir de su representación factorial, así como el uso que hacen de los significados de máximo común divisor y mínimo común múltiplo usando diferentes procedimientos y la relación que establecen entre ellos.

La investigación que se presenta aquí tiene como objetivo profundizar en el análisis de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre la divisibilidad en  $N$  y la relación de dicha comprensión con los diferentes modos de representación de los números naturales: la representación decimal y la representación factorial.

## **2 Metodología**

### **2.1 Participantes**

371 estudiantes de centros públicos de enseñanza secundaria participaron en esta investigación. 120 estudiantes de 1º de ESO, 137 de 4º de ESO y 114 de 1º de Bachillerato. La muestra elegida para realizar el cuestionario es sesgada, disponible e intencional.

### **2.2 El Cuestionario**

Para diseñar el cuestionario se han analizado (a) los aspectos curriculares de divisibilidad en la enseñanza secundaria, (b) 10 libros de texto de matemáticas de 1º de ESO, y (c) se ha realizado una revisión de las investigaciones previas de divisibilidad (Zazkis y Campbell 1996; Brown et al., 2002). Desde estos análisis se determinó el contenido del cuestionario en: múltiplos y divisores de un número; criterios de divisibilidad por 2, por 3, por 5 y por 9; números primos y compuestos;

factorización de un número y máximo común divisor y mínimo común múltiplo. A continuación, se elaboró una colección de problemas que se usaron como referentes para la diseñar un cuestionario piloto. Una vez validado el cuestionario piloto (Bodí et al., 2005) se diseñó el cuestionario definitivo formado por 10 cuestiones y un total de 40 ítems (mirad anexo). El número de ítems de cada cuestión es distinto, varía entre un ítem en las cuestiones dos y seis y los ocho ítems de la primera cuestión, y es debido (a) a la procedencia de las cuestiones, (b) a las dificultades que éstas pudieran plantear en los distintos cursos y (c) al tiempo disponible para la realización de la prueba.

Los ítems se simbolizaron mediante un número inicial, que indicaba la cuestión, una letra que señalaba el apartado, y en algunos casos un segundo número que indicaba la posición del ítem dentro del apartado. Por ejemplo, el ítem:

*“Consideremos el número  $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ . ¿ $M$  es divisible por 5? Explica tu respuesta”*,

quedó simbolizado como 4b1 ya que se refiere al subapartado 1 del apartado b, correspondiente a la cuestión 4.

El diseño de este cuestionario se ha vinculado a tres dimensiones, (a) los elementos matemáticos de Divisibilidad (múltiplo, divisor, ser divisible, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, (b) los modos de representación (decimal y factorial), y (c) las relaciones entre los elementos matemáticos (bicondicionales, conjunción lógica, condicional y contra recíproca). Estas tres dimensiones han caracterizado los objetivos de los diferentes ítems.

Los ítems de la cuestión 1 y la cuestión 2 pretendían determinar cómo el estudiante establece relaciones entre los elementos divisor, múltiplo, ser divisible, múltiplos y divisores comunes entre números con representación decimal. Los ítems de la cuestión 3 tenían como objetivo identificar cómo los estudiantes movilizan los significados de ser divisible desde los criterios de divisibilidad. Por su parte, los ítems de las cuestiones 6, 7 y 8 pretendían determinar cómo los estudiantes movilizan los significados y relaciones entre los elementos múltiplo y múltiplos comunes o divisor y divisores comunes. Los ítems pretendían también determinar el grado de influencia de los modos de representación en la comprensión de los diferentes tópicos de divisibilidad. Por ejemplo, los ítems de la cuestión 4 que tienen como objetivo analizar si los estudiantes comprenden la idea de “múltiplo” y “ser divisible” independientemente de los modos de representación. Las tareas de la cuestión 5 tienen como objetivo determinar cómo el estudiante establece relaciones entre “divisor” (factor) y “múltiplo” desde la

representación factorial y decimal de los números. Finalmente, las cuestiones 9 y 10 permiten analizar cómo los alumnos establecen relaciones entre “divisor”, “múltiplo” y “ser divisible” independientemente del modo de representación empleado. Este cuestionario fue usado inicialmente en la investigación de Bodí (2006).

### **2.3 Aplicación y análisis cuantitativo del cuestionario**

El cuestionario se pasó en las clases habituales de los alumnos, con una duración de 50 minutos, sin que los estudiantes hubieran recibido información previa sobre el contenido de las tareas. Para contestar al cuestionario se permitió el uso de la calculadora científica para facilitar las respuestas y los cálculos de los estudiantes, observar la habilidad de los estudiantes para renunciar al cálculo de representaciones decimales y estimular su confianza.

Las repuestas al cuestionario se codificaron de forma dicotómica, 0 ó 1, según la respuesta fuese correcta o incorrecta, situándose de esta manera el rango de puntuación entre 0 y 40. Se calculó el índice de dificultad, la homogeneidad, el coeficiente de fiabilidad (Alpha de Cronbach), el análisis factorial y la generalizabilidad de la prueba, ajustándonos a las características correlacionales básicas, utilizando el programa SPSS 11.5.

Los resultados del coeficiente Alpha de Cronbach mostraron que la consistencia interna del cuestionario de la investigación es alta, siendo de 0,8779 en la muestra global. De igual modo la generalizabilidad es alta, puesto que en la muestra global el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros ítems es de 0,8767 y el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros alumnos es de 0,9879. Además se realizó un análisis de factores principales usando el software SPSS (Bodí, 2006).

Posteriormente se ha llevado a cabo un análisis implicativo de las respuestas de los estudiantes mediante el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Bodin et al., 2000). El diagrama de similaridad permite agrupar grupos de ítems en función de su homogeneidad lo que puede permitir la interpretación conceptual con que manejan los alumnos cada grupo de tareas. La gráfica implicativa (Gras et al., 1997) pone de manifiesto las implicaciones entre las variables, indicando que el éxito en una determinada tarea implica el éxito en otra relacionada. Los resultados de la muestra total de este análisis es lo que se presenta en esta comunicación.



### 3 Resultados

#### 3.1 Análisis de similitudes

En la figura 1 aparece el gráfico de relaciones de similitud de la muestra total.

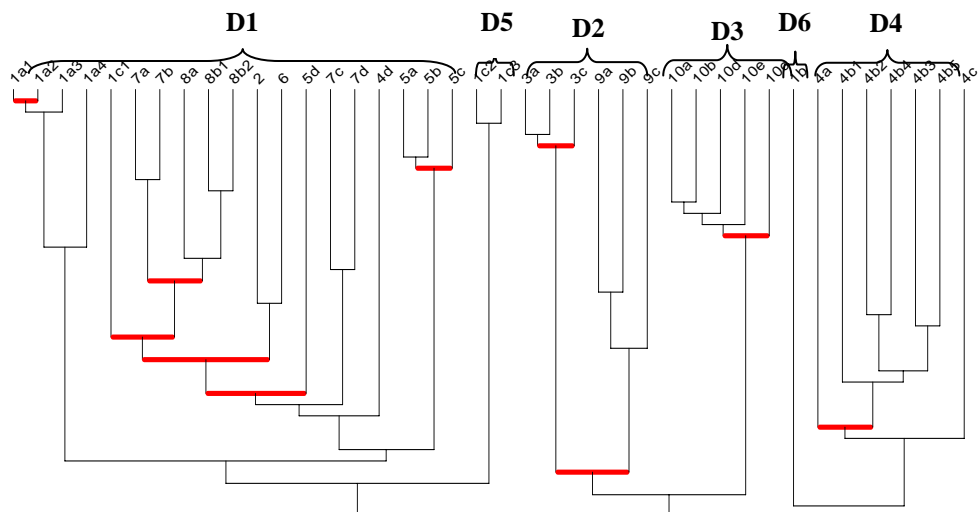


Fig.1: Diagrama de similitud de las respuestas de los alumnos en las tareas del cuestionario

El diagrama muestra las conexiones de similitud entre las variables del estudio referidas al éxito de los estudiantes en las tareas de divisibilidad en el cuestionario y que comprenden los significados de múltiplo, divisor y las relaciones ser divisible y ser múltiplo en representación decimal (en las cuestiones 1, 2 y 3), la idea de múltiplo y divisor en representación factorial y propiedades (en las cuestiones 4, 5, 9 y 10), así como las ideas de múltiplos y divisores comunes (en las cuestiones 6, 7 y 8). Los cuarenta ítems del cuestionario han quedado agrupados (Figura 1) en seis grupos, denominados D1, D2, D3, D4, D5 y D6, donde los cinco primeros se presentan al 90% de conexión estadísticamente significativa.

Los grupos de similaridad quedan constituidos por la homogeneidad entre las tareas e identificados del siguiente modo: el grupo de similaridad D1 (ítems 1a1, 1a2, 1a3, 1a4; 1c1; 2; 4d; 5a, 5b, 5c; 6; 7a, 7b, 7c, 7d y 8a, 8b1, 8b2) lo integran las variables que indican la utilización de las expresiones decimales en la aplicación y uso de los significados de múltiplo y divisor, la transformación de la representación decimal de un número en productos de factores, los procedimientos de cálculo de múltiplos y divisores comunes de un número natural y su aplicación en contexto real.

El grupo D2 (ítems 3a, 3b, 3c y 9a, 9b, 9c) contiene las variables que corresponden al uso de las acepciones “ser divisible” (criterios de divisibilidad) entre números con representación decimal, “ser divisor” (P es divisor de Q) y “ser múltiplo” (Q es múltiplo de P) entre números representados factorialmente.

El grupo D3 lo constituyen los ítems de la cuestión 10 cuya resolución se ve favorecida por el uso de la propiedad de la divisibilidad “Si  $P/Q$  y  $P/R \Rightarrow P/(Q+R)$ ”.

El grupo D4, formado por los ítems de la cuestión 4 excepto el ítem 4d, incluye las variables que hacen referencia (a) al uso del significado de “M es divisible por” números primos o compuestos, formados por factores que están o no en la descomposición en factores primos del número M y (b) al uso de la idea “ser múltiplo de” otro número, ambos descompuestos en factores primos. Por otra parte, hay que señalar que el análisis implicativo ha dejado fuera del grupo D4 al ítem 4d, perteneciente a la cuestión 4. Este ítem forma parte del grupo D1 e incluye la variable “ser múltiplo de” otro número, estando ambos números también descompuestos en factores primos, si bien el primero de gran tamaño lo que, en consecuencia, impidió el uso de la calculadora o la interpretación del resultado.

El grupo D5 (ítems 1c2 y 1c3) incluye la variable “ser divisible” entre números con representación decimal. En estos dos ítems se pregunta si el número 24 es divisible por números de una, dos, tres y cuatro cifras, menores que 2500, o si estos números son divisibles por 24, respectivamente.

El grupo D6 está formado por un único ítem, el 1b de la cuestión 1. Este ítem hace referencia al uso de la idea “ser múltiplo” entre números representados por su expresión decimal.

### 3.2 Los modos de representación y la idea de unicidad de la descomposición factorial

El uso que hacen los estudiantes de los modos de representación (decimal o factorial) de los números naturales y la asunción de la unicidad de la descomposición factorial de un número natural resulta fundamental en la discriminación de los grupos de similaridad obtenidos. La significación de esta evidencia se manifiesta en la configuración de los grupos D4 y D3 en los que se pide la determinación de la idea “ser divisible” entre números representados factorialmente (ítems 4a y 4b), de la idea de ser múltiplo cuando ambos números aparecen expresados mediante la representación factorial (ítem 4c) y de la propiedad “Si  $P/Q$  y  $P/R \Rightarrow P/(Q+R)$ ” (cuestión 10), donde uno de los sumandos aparece expresado mediante la descomposición factorial. En la resolución de estos ítems, los alumnos manifiestan mayoritariamente la tendencia de obtener la representación decimal para realizar la división y comprobar el resultado. Pocos alumnos usan las equivalencias entre factor y divisor, entre factor y múltiplo o las propiedades de la divisibilidad.

La importancia del uso de los modos de representación para la comprensión de la divisibilidad vuelve a manifestarse en el grupo de similaridad D2 dado que en la cuestión 9

*“Sabido que:  $1001 = 7 \times 11 \times 13$  y  $91 = 7 \times 13$ , ¿son correctas las siguientes afirmaciones? Justifica tu respuesta:*

*9a) 91 no es divisor de 1001.*

*9b) 77 es divisor de 1001.*

*9c) 2002 no es múltiplo de 13”*,

los alumnos requieren de la representación decimal de los números para estudiar las ideas de “ser múltiplo” y “ser divisor” cuando al menos uno de los números aparece expresado mediante la descomposición factorial.

### 3.3 Las relaciones entre los conceptos que integran el esquema de divisibilidad

En cada uno de los grupos de similaridad formados se identificaron relaciones entre los conceptos de divisibilidad que muestran el “grado de *conectividad*” del

esquema de divisibilidad y por tanto un nivel de comprensión del esquema. En el grupo D4 se efectúa la primera conexión entre los ítems 4b2 y 4b4.

*“Consideremos el número  $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ .  
4b2) ¿M es divisible por 2?,  
4b4) ¿Por 11? Explica tu respuesta”*

Estos ítems implican la divisibilidad del número  $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$  por dos números primos (2 y 11) que no aparecen en la misma. En el siguiente nivel se conectan los ítems 4b3 y 4b5,

*“Consideremos el número  $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ .  
4b3) ¿M es divisible por 9?,  
4b5) ¿Por 15? Explica tu respuesta”*

que requieren la divisibilidad del número M por dos números compuestos (9 y 15) que sí forman parte de la descomposición factorial de M.

En las respuestas del cuestionario, los alumnos muestran mayoritariamente la necesidad de tener los números expresados mediante su representación decimal para discutir la divisibilidad y esta primera agrupación parece evidenciar que la idea de “no ser divisible” presenta más dificultades a los estudiantes que la de “ser divisible”, dado que 2 y 11 son dos números que no aparecen en la descomposición factorial de M. Este hecho subraya la importancia de una comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición en factores primos. Por otra parte, 9 y 15 son factores compuestos que aparecen en la descomposición factorial, aunque su observación no es evidente a primera vista y genera nuevas dificultades a los alumnos.

En un nivel posterior se conectan los dos subgrupos anteriores, y luego con el ítem 4b1. El ítem 4b1 implica la divisibilidad de M por un número primo de la descomposición factorial con exponente 1 (5). Por tanto, la vinculación entre “ser divisible” y la representación factorial depende de si el posible divisor P es un factor primo (5), un factor compuesto de la representación factorial (9, 15), o bien es un número primo que no está en la descomposición factorial (2, 11). Todas estas conexiones tienen un coeficiente de similaridad superior a 0,997. La conexión siguiente se establece con el ítem 4a (divisibilidad por 7). La última conexión se realiza con el ítem 4c, que se refiere a la idea de “ser múltiplo” cuando los dos números están expresados mediante su representación factorial. En este caso el índice de similaridad es de 0,97.

El concepto de divisibilidad y la relación que muestra con la indivisibilidad requieren una comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición en factores primos (Zazkis y Campbell, 1996) por lo que la comprensión de la unicidad de la descomposición factorial en factores primos conduce más fácilmente a formas generalizadas de la divisibilidad.

El hecho de que el grupo D4 (ítems 4a, 4b1, 4b2, 4b3, 4b4, 4b5, 4c) no tenga conexión en el gráfico de similaridad con el resto de grupos parece destacar la importancia de la comprensión de la “indivisibilidad” entre números con representación factorial. En los ítems 4b2 y 4b4 de la cuestión 4 se pregunta por la divisibilidad de M por números que no aparecen en su descomposición factorial. En el ítem 4c

*“Consideremos el número  $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$   
4c) ¿ $3^4 \times 5 \times 7^3$  es un múltiplo de M?”*

M contiene los mismos factores de su posible múltiplo con distintos exponentes.

En el grupo D3 se integran los ítems de la cuestión 10

*“Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número  $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$  es:*

*10 a) Divisible por 5.*

*10 b) Divisible por 2 y por 4.*

*10 c) Divisible por 3.*

*10 d) Divisible por 6.*

*10 e) Divisible por 15”.*

El ítem 10c (divisibilidad por 3) es el último que se integra en este grupo D3. Este ítem se caracteriza porque es el único de la cuestión 10 que tiene respuesta afirmativa (3 es divisor de K). En las tareas de este grupo los estudiantes necesitan la representación decimal del número para discutir la divisibilidad. Por otra parte, los ítems del grupo D3 como los del grupo D4 aparecen clasificados como ítems fáciles o muy fáciles según el índice de dificultad, dado que la representación factorial de los números con exponentes pequeños permite la operatividad con la calculadora y discernir la divisibilidad mediante la obtención de la representación decimal de los números y la división

Las conexiones en el grupo D2 se realizan entre dos subgrupos principales. Por una parte, un primer grupo que conecta las variables de la cuestión 3 que hacen referencia a la idea de “ser divisible” desde los criterios de divisibilidad por

2 y por 3 (ítems 3a y 3b) y la coordinación de los mismos (ítem 3c). Este primer subgrupo se forma en los niveles 4 y 5 con índices de similaridad 1.

El otro subgrupo del grupo D2 está formado por los ítems de la cuestión 9, en los que se pregunta por la divisibilidad de un número expresado decimal y factorialmente ( $1001 = 7 \times 11 \times 13$ ) por divisores compuestos y de un múltiplo de éste (2002) con representación decimal, por 13. De nuevo observamos la influencia de los modos de representación de los números naturales en la comprensión de la divisibilidad. Los coeficientes de similaridad en este subgrupo son muy altos y cercanos a 1.

La conexión de los dos subgrupos del grupo D2 se realiza al nivel del 90 % y pensamos que se produce porque en ambos subgrupos se solicita la divisibilidad por 2, por 3 y por 6, siendo ambos números (2b45 y K) divisibles por 3.

En el grupo D1 el primer vínculo se establece entre los ítems 1a1 y 1a2 que hacen referencia a las ideas de múltiplo y divisor entre números pequeños. Del análisis de las respuestas que ofrecen los estudiantes se pone de manifiesto que los estudiantes asocian los significados de divisor y múltiplo con las operaciones de dividir y multiplicar, pensando sólo en el procedimiento. Posteriormente, conectan con los ítems 1a3 y 1a4 que tienen preguntas similares.

Un segundo subgrupo que aparece fuertemente cohesionado en el grupo de similaridad D1 es el que constituyen los ítems 5a, 5b y 5c

*“Descompón el número 100*

*5a) en dos factores,*

*5b) en tres factores,*

*5c) en el máximo número de factores. Justifica tu respuesta”*

Estos ítems requieren la traslación entre las representaciones decimal y factorial de un número natural para obtener las distintas descomposiciones del número en dos, tres o más factores. Nuevamente se evidencia la influencia de la representación del número en la determinación de la comprensión de la divisibilidad.

El ítem 5d (descomposición en factores primos de 100) aparece en otro subgrupo junto a los ítems que estudian los significados y aplicaciones contextuales de las ideas de “múltiplos y divisores comunes” (C6, C7, C8 y C2), la idea de “ser múltiplo” cuando los números aparecen en su representación decimal (ítem 1c1) y de la idea de “ser múltiplo” cuando ambos números aparecen expresados mediante su representación factorial (ítem 4d), a un nivel de significación del 98%.

Los tres subgrupos de D1 se conectan entre sí con un índice de similaridad del 92%. En todos los ítems del grupo de similaridad D1 se presentan los números naturales expresados mediante la representación decimal, con excepción del 4d.

Dentro del grupo D1 cabe destacar que las conexiones entre los ítems 7a y 7b (significado de mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números), entre los ítems 8a, 8b1 y 8b2 (uso del máximo común divisor de dos o más números en situaciones reales), la de los ítems 2 y 6 (múltiplos comunes) y el vínculo entre los ítems 7c y 7d (obtención procedimental del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor de dos números de 2 cifras) se realizan con un índice de similaridad superior a 0,99.

En resumen, treinta y siete de los cuarenta ítems que conforman el cuestionario, agrupados en cuatro grupos que hemos denominado D1, D2, D3 y D4, presentan entre ellos una conexión estadísticamente significativa del 90%. Los ítems 1c2, 1c3 forman el grupo D5, y presenta con el grupo D1 una conexión estadísticamente significativa del 82%. El ítem 1b constituye por sí sólo el grupo D6 y presenta con el grupo D4 una conexión estadísticamente significativa del 22%.

Los grupos y subgrupos que aparecen en el gráfico de similaridad, ponen de manifiesto la influencia de los modos de representación de los números naturales en la comprensión de la divisibilidad, formándose los grupos de similaridad en función del modo de representación (factorial o decimal) de los números naturales, y efectuándose las conexiones de similaridad dentro de cada uno de ellos en función de los modos de representación y de los elementos de divisibilidad que incluyen las diferentes variables de cada una de las cuestiones.

### **3.4 Análisis implicativo**

El gráfico implicativo de la figura 2 muestra las relaciones de implicación entre las variables del cuestionario, en el sentido que el éxito en la respuesta de un ítem implica el éxito en otra tarea relacionada. En el mismo aparece el umbral de significación del 99% efectuado sobre el análisis de las respuestas de los estudiantes en el cuestionario.

Los grupos principales que se forman son 3, y aparecen en consonancia con las observaciones realizadas en el diagrama de similaridad. Las relaciones en los diagramas implicativo y de similaridad ponen de manifiesto la necesidad de la representación decimal en el uso de las acepciones de divisibilidad y sus propiedades. El sentido de las implicaciones evidencian que el éxito de los estudiantes en la coordinación de criterios de divisibilidad (ítem 3c) y el conocimiento de los significados de mínimo común múltiplo y de máximo común

divisor de dos números (ítem 7a y 7b), así como la aplicación del máximo común divisor de dos o más números en situaciones contextuales (ítems 8b1 y 8b2) conlleva responder acertadamente a la mayoría de los ítems que involucran a los significados de la divisibilidad y sus propiedades. Los ítems 3c, 7a y 8b2 que inician las ramas de las implicaciones del diagrama implicative han sido clasificados como Muy Difíciles en función del éxito de las respuestas de los alumnos en los cuestionarios.

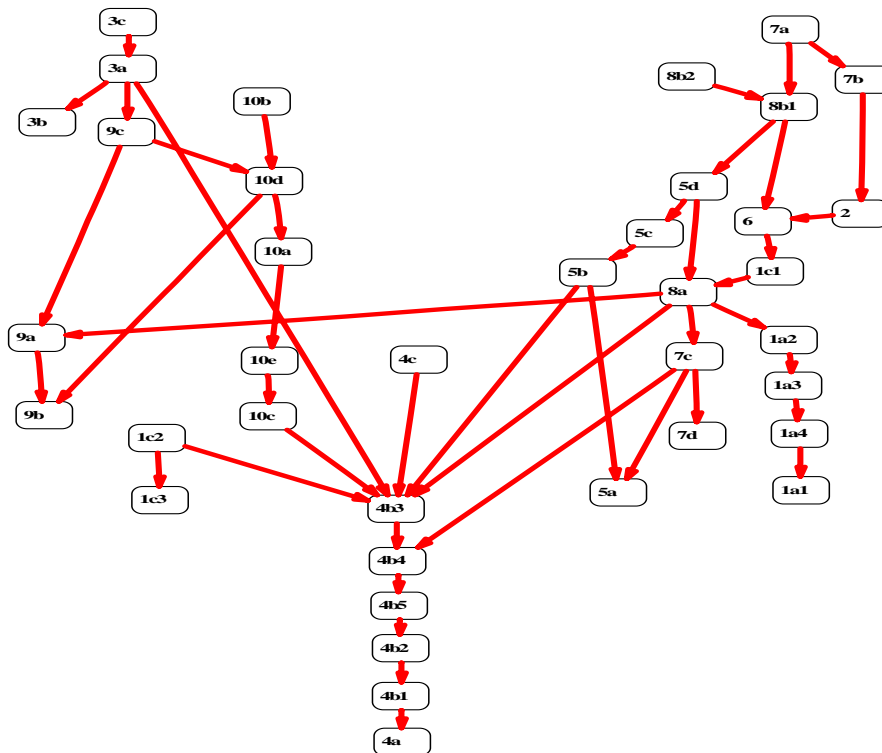


Fig. 2: Diagrama implicative de las respuestas de los alumnos en las tareas del cuestionario

La formación de los grupos del gráfico implicative vuelve a revelar la influencia de los modos de representación en la comprensión de los tópicos de divisibilidad. El modo de representación factorial de los números naturales presenta dificultades a buena parte de los estudiantes que necesitan la obtención de



la representación decimal de los números naturales para poder discutir la divisibilidad, principalmente realizando la división y comprobando el resultado, o utilizando los criterios elementales de divisibilidad.

#### **4 Discusión**

El estudio que hemos realizado tiene como objetivo profundizar en la comprensión de los alumnos de educación secundaria de la divisibilidad y la influencia que en esta comprensión ejercen los modos de representación (decimal y factorial) de los números naturales. El análisis implicativo llevado a cabo pone de manifiesto que en la comprensión de la divisibilidad resulta fundamental el uso que los estudiantes hacen de los modos de representación (decimal o factorial) de los números naturales y la asunción de la unicidad de la descomposición de un número natural en producto de factores. Nuestros resultados muestran la necesidad de los estudiantes de tener la representación decimal de los números naturales para discutir la divisibilidad. Por otra parte, el diagrama de similaridad muestra que las agrupaciones formadas, grupos D1, D3, D4 y uno de los subgrupos de D2, revelan la influencia de los modos de representación para discutir la divisibilidad. Este análisis implicativo ha permitido discriminar los grupos de similaridad e implicación en función del modo de representación decimal (D1, D5 y D6) o factorial (D4, D3 y uno de los subgrupos de D2) de los números naturales con que se presentaban las tareas.

La influencia de los modos de representación y su uso en la práctica escolar aparece reflejada en la formación del grupo D1 del gráfico de similaridad. Su constitución puede justificarse respecto a una determinada práctica escolar que enfatiza las tareas en las que se usan y simbolizan los números naturales mediante la representación decimal para discutir y explicar las relaciones y significados de divisibilidad.

En consonancia con las investigaciones previas sobre la comprensión de la divisibilidad (Zazkis y Campbell, 1996; Zazkis, 2000; Zazkis y Gadowski, 2001; Brown et al., 2002; Zazkis y Liljedahl, 2004; Bodí et al., 2005; Bodí, 2006), el análisis implicativo realizado destaca el papel esencial de la descomposición única en factores primos de los números naturales en la comprensión de la divisibilidad, subrayando la significación de una comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición de los números naturales en producto único de factores primos.

El uso que hacen los estudiantes de educación secundaria de la representación factorial evidencia las dificultades que tienen con esta representación. Mayoritariamente necesitan obtener la representación decimal del número y dividir

para discutir la divisibilidad como se constata en las respuestas que ofrecen a los ítems de las cuestiones 4, 9 y 10. Los ítems de estas cuestiones constituyen en sí mismos dos grupos y un subgrupo del diagrama de similaridad y un grupo o subgrupo del mismo.

Estas agrupaciones se manifiestan también en el diagrama implicativo. En este diagrama destacamos la influencia que ejercen (a) la coordinación de los criterios de divisibilidad (ítem 3c), (b) la comprensión de la relación de “indivisibilidad” (ítem 3a) y (c) la comprensión de los significados de mínimo común múltiplo y de máximo común divisor de dos números y la aplicación del máximo común divisor de dos o más números en situaciones reales (ítems 7a, 7b y cuestión 8) en el éxito de las respuestas de los alumnos en las tareas de divisibilidad.

Los resultados obtenidos en el gráfico implicativo corroboran otros resultados destacados en investigaciones anteriores tales como la evidencia de que una buena comprensión de la divisibilidad involucra la coordinación de ejemplos específicos de divisibilidad y que la indivisibilidad presenta a los estudiantes más problemas que la divisibilidad (Zazkis y Campbell, 1996), o que la comprensión del concepto de múltiplo y de sus propiedades debe permitir a los alumnos realizar inferencias sobre la estructura de la descomposición factorial y del mínimo común múltiplo (Brown et al., 2002).

En la investigación que hemos llevado a cabo se muestra la necesidad de incidir en prácticas escolares en la educación secundaria que otorguen un papel significativo al Teorema Fundamental de la Aritmética en la comprensión de la divisibilidad. Por ello, es necesario pasar de las prácticas habituales de carácter procedimental, uso de la descomposición factorial de los números naturales como herramienta de cálculo de determinados elementos de la divisibilidad, a prácticas que permitan el perfeccionamiento cognitivo de los estudiantes y que favorezcan la comprensión de la divisibilidad a través de la comprensión de la unicidad de la descomposición factorial de los números naturales en producto único de factores primos.

## **Bibliografía**

- Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; Thomas, K. (1996). *A framework for research and development in undergraduate mathematics education*, Research in Collegiate Mathematics Education, 2, pp 1-32.

- Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales*, Tesis doctoral, Universidad de Alicante.
- Bodí, S.; Valls, J.; Llinares, S. (2005). *El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en  $\mathbb{N}$* . La construcción de un instrumento, *Números*, 60, pp 3-24.
- Bodin, A. ; Couturier, R.; Gras, R. (2000). *CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive*. CHIC 1.2. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- Brown, A.; Thomas, K.; Tolia, G. (2002). *Conceptions of divisibility: success and understanding*, In S. Campbell et R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory*, pp 41-82, Westport: Ablex Publishing.
- Campbell, S. (2000). *Bringing insights from research into the classroom: The case of introductory number theory*, Proceedings of the 3rd Annual conference of the Association of Mathematics Teacher Educator, Chicago, ERIC document ED445909.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*, In Tall, D (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp 95-123, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Gascón, J. (2001). *Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria*, *Cuadrante*, 10, 2, pp 33-65.
- Gras, R.; Peter, P.; Briand, H.; Philippé, J. (1997). *Implicative Statistical Analysis*, In Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock et Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies*, Vol. 2, pp 412-419, New York: Springer-Verlag.
- Sierra, M.; González, M.; Sánchez, A.; González, M. (1989). *Divisibilidad*, Madrid: Síntesis.
- Vergnaud, G. (1994). *Multiplicative conceptual field: what and why?*, In Guerson, H. y Confrey J. (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, pp 41-59, Albany: SUNY.
- Zazkis, R. (2000). *Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections*, *Research in Collegiate Mathematics Education*, 4, pp 210-238.
- Zazkis, R. (2002). *Language of number theory: metaphor and rigor*, In S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory*, pp 83-95, Westport: Ablex Publishing.
- Zazkis, R.; Campbell, S. (1996). *Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding*, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), pp 540-563.
- Zazkis, R.; Gadowsky, K. (2001). *Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers*, In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001*

Yearbook: The roles of representation in school mathematics, pp 41-52, Reston: NCTM.  
Zazkis, R.; Liljedahl, P. (2004). *Understanding primes: the role of representation*, Journal for Research in Mathematics Education, 35 (3), pp 164-186.

### Anexo

Cuestionario
<p><b>Cuestión n° 1</b></p> <p>a) Completa con las palabras: <b>divisor ó múltiplo</b>. Razona tu respuesta 8 es _____ de 2; es _____ de 16; 21 es _____ de 7 ; 25 es _____ de 625</p> <p>b) Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16, determina si 64 es múltiplo de alguno de ellos. Justifica.</p> <p>c) Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412.</p> <p>I. Los números del listado que son múltiplos de 24 son: _____</p> <p>II. Los números del listado que son divisibles por 24 son: _____</p> <p>III. Los números del listado por los que 24 es divisible son: _____</p> <p>Justifica.</p>
<p><b>Cuestión n° 2</b></p> <p>Los múltiplos de un número comprendido entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551.</p> <p>¿De qué número se trata? Explica tu respuesta</p>
<p><b>Cuestión n° 3</b></p> <p>Indica, justificando tu respuesta, el valor de <b>b</b> para que el número <b>2b45</b> sea:</p> <p>I. divisible por 2; II. divisible por 3; III. divisible por 6.</p>
<p><b>Cuestión n° 4</b></p> <p>Consideremos el número: <math>M = 3^3 \times 5^2 \times 7</math></p> <p>a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta</p> <p>b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta.</p> <p>c) ¿<math>3^4 \times 5 \times 7^3</math> es un múltiplo de M? Explica tu respuesta.</p> <p>d) ¿<math>3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}</math> es un múltiplo de M? Explica tu respuesta.</p>
<p><b>Cuestión n° 5</b></p> <p>Descompón el número 100: (Justifica tu respuesta )</p> <p>a) En dos factores. b) En tres factores. c) En el máximo número de factores. d) En factores primos</p>

**Cuestión n° 6**

Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa.

¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho.

**Cuestión n° 7**

- a) ¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?
- b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números?
- c) Obtén el m.c.d (30,50)
- d) Obtén el m.c.m (30,50)

**Cuestión n° 8**

- a. Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.
- b. Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.

**Cuestión n° 9**

Sabiendo que:  $1001 = 7 \times 11 \times 13$  y  $91 = 7 \times 13$ , ¿son correctas las siguientes afirmaciones?:

- a) 91 no es divisor de 1001.
- b) 77 es divisor de 1001.
- c) 2002 no es múltiplo de 13 ( Justifica tu respuesta )

**Cuestión n° 10**

Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta:

El número  $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$  es:

- a) Divisible por 5.
- b) Divisible por 2 y por 4.
- c) Divisible por 3.
- d) Divisible por 6.
- e) Divisible por 15



# Aplicación de CHIC al estudio de las funciones elementales

Miguel Delgado, José Leandro de María,  
Teresa Ulecia

Departamento de Matemáticas Fundamentales  
Universidad Nacional de Educación a Distancia  
C/ Senda del Rey, 9, 28040 Madrid, España  
[miguel@mat.uned.es](mailto:miguel@mat.uned.es), [jdemaria@mat.uned.es](mailto:jdemaria@mat.uned.es), [tulecia@mat.uned.es](mailto:tulecia@mat.uned.es)

**Resumen.** La detección de los obstáculos epistemológicos, así como su origen y la manera de afrontarlos, constituyen una parte primordial en el estudio del hecho didáctico ya que esto permite elaborar una metodología que proporcione una buena respuesta. El trabajo establece una caracterización inicial de estos conflictos relacionados con las funciones elementales, una parte importante de los contenidos de la Enseñanza Secundaria en España. Se expone el uso de CHIC para obtener un tratamiento automatizado de la información, que respalde la experiencia docente con una perspectiva objetiva y global, en el análisis de cuestionarios realizados por alumnos de segundo ciclo de Educación Secundaria. Concluye el artículo marcando algunas dificultades que se presentan en el estudio de estas funciones, unas ya conocidas y que son, por tanto, confirmadas y otras que para los autores representan una novedad.

## 1 Introducción

El estudio de las funciones elementales; las funciones lineales, afines, cuadráticas y de proporcionalidad inversa, son una parte importante de las Matemáticas que debe adquirir un alumno de Educación Secundaria en España. Estas funciones constituyen el inicio de lo que suele denominarse Cálculo. Sin embargo, se observa que en su enseñanza se procede de una manera formal y muy algebraica. Esto constituye un catalizador de ciertas dificultades posteriores en aprendizajes sobre funciones y errores muy asumidos por los alumnos, así pues, es fácil justificar un estudio profundo que detecte objetivamente las causas de estas

dificultades y que marque pautas para el establecimiento de una metodología específica.

Identificar el origen de obstáculos, en la enseñanza de estas funciones, es necesaria no sólo a efectos de realizar un diagnóstico de la situación y la manera de afrontarlos, sino como herramienta para establecer el funcionamiento de los conocimientos relativos a este saber. Ello posibilitará establecer alguna ingeniería didáctica que anule o minimicen esos obstáculos y, por supuesto, determinar una forma de enseñanza más adecuada.

Las Ciencias de la Educación, como ciencia social que es, se sirven de métodos de investigación con marcado talante estadísticos tanto cuantitativo como cualitativo. Si bien esto permite conocer diversos aspectos, sobre todo cuantitativos, no es menos cierto que se muestra cierta limitación para reflejar los hechos didácticos ligados al conocimiento estrictamente matemático que se generan en el aula. El profesor de Matemáticas ha debido desplegar toda su imaginación para elaborar un método ingenuo para reflejar tales hechos, métodos generalmente, basados en sus intuiciones, o creencias personales, adquiridas por la práctica docente, o por su propia experiencia como alumno en el caso de profesores menos experimentados. Sin duda son métodos que aportan una visión subjetiva y difícilmente comunicable, aun en el caso de que dicha visión pueda ser adecuada a la situación estudiada. Se hace necesario obtener una perspectiva objetiva y general que pueda ser fácilmente comunicada, y eso implica disponer de un protocolo basado en el uso de programas de ordenador de propósito general que refuten o avalen ese proceso ingenuo basado en la intuición o la experiencia del profesor ante estas dificultades que encierran ciertas destrezas matemáticas.

## **2 Proceso de enseñanza**

El proceso de enseñanza se llevó a cabo con el ordenador y una Unidad Didáctica diseñada para la experiencia (Ulecia, 2005). En el modelo de Unidad Didáctica se propicia un cambio de perspectiva en el uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza de las Matemáticas. Sin abandonar el modelo expositivo tradicional, se propone la potenciación de la búsqueda (y por tanto de la investigación) por parte del estudiante de información significativa, a través del uso de herramientas informáticas que impulsen el interés por las Matemáticas.

La propuesta didáctica que desarrolla la Unidad Didáctica se basa esencialmente en el análisis minucioso de la parte matemática que compete y de las formas de uso de la Unidad, tanto por el profesor como por el alumno, en donde se pacta la necesaria complicidad de éstos y sus adaptaciones al medio. Este modelo



de Unidad insiste en la necesidad de un diseño ordenado abierto, en el sentido de que el profesor pueda añadir elementos a la Unidad y modificar su uso, para poder adaptarlo a la diversidad personal de sus alumnos sin que él deba rehacer todo el proceso pactado. Evidentemente, en esta Unidad se incorporaran actividades con ordenador dentro del marco de trabajo que acuerdan profesor y estudiante.

Al desarrollar la Unidad se establecen aquellas actividades incluidas en ella, pudiéndose ver tanto desde el enfoque de la Resolución de Problemas como desde el marco de las Situaciones Didácticas. Evidentemente, el profesor puede promover nuevas actividades no contenidas en la Unidad, que se incorporarán a la misma, pero también los alumnos pueden proponerlas si se da el caso.

El modelo propone un tipo de aprendizaje que requiere la actuación en el aula con una metodología activa e investigadora. Con ella se trata de aprender a aprender, a "descubrir", ya que el alumno utiliza de manera adecuada técnicas activas, construyendo su propio aprendizaje a partir de experiencias. Pero en este proceso de enseñanza, toda actividad y toda experiencia, debe ser guiada y orientada por el profesor, así como enmarcada en la estructura conceptual del alumno, utilizando procedimientos y metodología idóneos y adecuados a la edad. En este proceso constructivo interno (proceso de reorganización cognitiva), el alumno aprende al producirse un conflicto cognitivo, es decir, una contradicción entre lo que el sujeto sabe y lo nuevo que se le presenta. Es claro que este aprendizaje depende del grado de desarrollo y maduración de las experiencias y conocimientos previos del alumno, así como de los aprendizajes subyacentes. En la Unidad propuesta, esto se lleva a cabo a partir de la realización de una serie de actividades que enfrentan al alumno a distintas situaciones en las que debe construir el conocimiento matemático mediante la resolución del problema planteado en la situación como respuesta a las exigencias del Medio.

Además, el modelo didáctico se basa en los siguientes axiomas metodológicos generales:

A1- Los contenidos matemáticos deben estar seleccionados y ordenados con una estructuración clara que resalte sus relaciones.

A2- La actuación del profesor debe estimular la enseñanza activa y reflexiva, posibilitando que los alumnos descubran y construyan una parte relevante de los conceptos seleccionados a través de su propio trabajo de experimentación y observación.

A3- El profesor debe tener una idea clara de los conocimientos previos que poseen los alumnos sobre el tema que se va a comenzar a trabajar.

A4- Las actividades deben facilitar varios niveles de profundización, y de detalle en el desarrollo de su resolución, posibilitando que todos los alumnos puedan aprender algo nuevo y extraer sus propias conclusiones

A5- Las actividades y situaciones problemáticas deben ser cercanas a las vivencias personales de los alumnos e incorporar aspectos lúdicos de las Matemáticas conectados con la Historia, el Arte y su entorno.

### **3 Aplicación del Programa CHIC**

La utilización de CHIC en nuestra investigación (Ulecia, 2005) se realizó sobre unos cuestionarios que alumnos de segundo ciclo de ESO realizaron sobre el tema de funciones elementales. Esta aplicación nos sirvió para poder tomar decisiones sobre los mismos, ya que CHIC permite clasificar tanto las preguntas como a los propios alumnos por sus respuestas.

#### **Análisis a priori** de los cuestionarios diseñados:

Este análisis sigue la línea de trabajo iniciada por (Orús y Pitarchi, 2002), utilizando el mismo instrumento didáctico para modelizar el razonamiento del alumno. Es decir, se utiliza el análisis tipológico (Chandon y Pinson, 1980), en el que por medio de una matriz booleana de doble entrada, llamada matriz a priori del cuestionario (MAP), se caracterizan las preguntas de éste según los diversos destrezas o contenidos matemáticos asociados a dichas preguntas; esto define ciertas variables binarias utilizando el dígito 1 para el caso que la pregunta conlleve esa destreza y el 0 para el caso contrario. Las respuestas se han introducido en una hoja de cálculo Excel, resultando la matriz a priori MAPT. Los resultados del análisis nos ayudan así a tomar decisiones respecto de cada uno de los tests y a efectuar modificaciones si parecen pertinentes para lograr un mejor aprovechamiento de los mismos.

#### **Análisis a posteriori** de las respuestas de los alumnos al cuestionario:

Por último se utiliza CHIC sobre la matriz de datos que representan las respuestas (correcta/incorrecta) de los estudiantes. De esta forma se realiza el estudio a posteriori del cuestionario. Los grafos y árboles que se obtienen permiten analizar los resultados de los estudiantes con respecto a su trabajo matemático.

### 3.1 Cuestionarios

Para la experiencia se confeccionaron cuatro tests. El primero trataba de establecer el nivel de conocimiento de cuestiones previas al tema “Estudio de funciones elementales”; el segundo, de comprobar la comprensión de los conceptos y técnicas básicas que el alumno tenía de dicho tema (este test se consideraba necesario dado que se daba la situación de experimentar con alumnos de los dos cursos del segundo ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria, 3º y 4º de ESO); el tercero contenía las mismas preguntas que el segundo pero reordenadas de otra forma y, por último, un test complementario que pudiera medir el estado de afianzamiento del estudiante en lo tratado.

En este artículo, por razones obvias, nos ocuparemos sólo de dos de ellos. Hemos elegido como más interesantes los dos de Contenidos básicos ya que lo realizaron los alumnos dos veces: antes y después de que el profesor desarrollara con sus estudiantes la Unidad Didáctica “Estudio de funciones elementales” (Delgado et al., 2005). Este test consta de 19 preguntas (contenidas en el Anexo) y su objetivo es, como hemos comentado anteriormente, ponderar la capacidad de los alumnos en cuestiones que pueden ser consideradas básicas de esta Unidad Didáctica.

#### 3.1.1 Test de Contenidos Básicos

En el proceso matemático, en todos los niveles desde el elemental hasta la investigación, aparece la dificultad de la relación entre el lenguaje y su significado, desde la expresión algebraica y el objeto que representa hasta la idea matemática que subyace. Esta dificultad es especialmente palpable en los niveles de secundaria donde el alumno se enfrenta al reto de asociar una expresión con una regla o función, que para mayor confusión también tiene una representación gráfica, siendo un todo que pensamos que es necesario que el alumno se familiarice desde las primeras etapas educativas.

Así el cuestionario ha sido diseñado para diagnosticar los diferentes estados de esta relación bipolar algebraico- geométrico que subyace al estudio de las funciones. Este proceso de formación del concepto es epistemológico. Sólo cuando en Matemáticas se ha logrado completar de forma biunívoca la expresión algebraica y su representación geométrica se puede tener la seguridad de que el conocimiento es coherente y completo.

En el caso estudiado es especialmente importante sustentar que el alumno aprenda cómo debajo de una ecuación (en este nivel muy sencilla) hay un concepto que puede ser visualizado en forma de gráfica. Nos atrevemos a afirmar que esta idea tiene más importancia aún que conozcan los primeros tipos de funciones que, por otro lado una vez asegurado este aprendizaje, resultan muy sencillas.

Como anécdota representativa se puede ver en los árboles de jerarquías que las funciones constantes representan mayor dificultad que otras más complejas, como las lineales o las cuadráticas, y es debido a la expresión “no dinámica” de dicha expresión, que no depende de una variable sino que se plantea como una constante o número. Con una buena fundamentación del método gráfico de representación esta dificultad queda subsanada.

El cuestionario se ha elaborado siguiendo las ideas anteriormente expuestas. Una decisión técnica fue la no linealidad de la dificultad de los conceptos preguntados con el fin de que unas preguntas no llevaran a otras y poder medir de la forma más aislada posibles los conocimientos de los alumnos, tanto en el test previo como en el posterior a las actividades.

Así las metas de los cuestionarios han sido:

1. Reconocer la expresión algebraica de: funciones constantes (Preguntas 1 y 4), funciones lineales (Preguntas 8 y 19), funciones afines (Pregunta 6), funciones cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Preguntas 9 y 10).
2. Reconocer la gráfica de: funciones constantes (Pregunta 16), funciones lineales. (Preguntas 2 y 3), funciones afines (Pregunta 12), funciones cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Preguntas 11 y 13).
3. Disponer de una mecánica eficaz a la hora de representar gráficamente, a partir de su expresión algebraica, las funciones: constantes (Pregunta 16), lineales (Preguntas 3, 8 y 19), afines (Preguntas 5 y 6), cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Preguntas 4, 7, 10 y 11).
4. Disponer de una mecánica eficaz a la hora hallar, a partir de su gráfica, la expresión algebraica de las funciones: constantes (Pregunta 16), lineales (Preguntas 8 y 19), afines (Pregunta 17), cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Pregunta 18).

### **3.2 Análisis a posteriori del test Previo de Contenidos Básicos**

Para el análisis exploratorio del primer test de Contenidos Básicos,  $T_2$  (test previo), se utiliza una matriz booleana de doble entrada, denotada por  $MPT_2Ex$ , y

definida a partir de las respuestas de los alumnos. En la matriz aparecen 19 variables binarias:

Acertar la pregunta  $i$  del test  $T_2$  ( $T_2AP_i$ ) con  $i = 1, \dots, 19$ .

Una vez introducidas las respuestas en una hoja de cálculo Excel, utilizando el dígito 1 para el caso afirmativo y el 0 para el negativo, resulta la matriz  $MPT_2Ex$ .

### 3.2.1 **Árbol de similaridad entre las preguntas de $T_2$ relativo a $MPT_2Ex$**

Se aplica el programa CHIC a esta matriz para obtener entre las 19 preguntas del test: El árbol de similaridad y el árbol jerárquico de cohesión. Un criterio estadístico nos permite conocer cuáles son los **niveles significativos** del árbol de similaridad entre todos los niveles que lo constituyen. Estos son los niveles donde se forme una partición y las clases estén más de acuerdo con los índices de similaridad iniciales. Ya que en cada nivel del árbol se forma una clase donde la similaridad es menos buena que la de las clases formadas anteriormente y mejor que la de las clases que aún deben formarse. Por tanto, serán estos niveles los que particularmente interesa interpretar y que el programa CHIC proporciona **en rojo** en la constitución de la jerarquía.

Este árbol nos muestra dos clases de similaridad que se dividen a su vez en dos subclases. A la vista de los niveles significativos hay que destacar las clases:

**Clase de similaridad  $[Cs_{21}]$ :** El porcentaje medio de alumnos que contestaron bien a las preguntas es del 36%, lo que la coloca, en cuanto a aciertos, en penúltimo lugar, delante de la clase  $[Cs_{12}]$ . En ella encontramos cuatro nudos de los cuales los dos primeros son significativos. El primero, el más significativo de todo el árbol, agrupa las preguntas  $P_3$  y  $P_4$  y se encuentra en el nivel 1 con un coeficiente de similaridad es del 0,987625.

En la pregunta  $P_3$  se pide la expresión analítica de una función constante a partir de la gráfica y la han respondido el 35% de los alumnos. En cambio, en la pregunta número 4 el porcentaje de aciertos sube ligeramente al 41% y plantea un ejemplo de clasificación de una función lineal expresada en forma gráfica.

El siguiente nudo, también significativo, asocia las preguntas anteriores con la 18; se encuentra en el nivel 5 con un índice de similaridad de 0,909688. En el enunciado de esta pregunta aparece una expresión verbal con el término “número real” lo que podría explicar que la hayan acertado sólo el 29% de los alumnos y que la convierte, junto con la pregunta  $P_{15}$ , en las preguntas de esta subclase peor contestadas.

El último nudo de esta clase agrupa todas las preguntas de  $[Cs_{21}]$  y está en el nivel 12 (índice 0,655373).

Los siguientes nudos significativos pertenecen a la otra clase,  $[Cs_{11}]$ .

$Cs_1$		$Cs_2$	
$Cs_{11}$	$Cs_{12}$	$Cs_{21}$	$Cs_{22}$
<p>T2AP1-F. Constante: Paso de expresión verbal a algebraica.                      T2AP6-F. Lineal creciente: Paso de expresión analítica a gráfica.</p> <p>T2AP5-F. Lineal decreciente: Paso de expresión analítica a gráfica.                      T2AP17-F. Cuadrática, caso vida real: Paso analítica a gráfica.                      T2AP9-F. Afín algebraicamente: Hallar imagen de un punto.</p>	<p>T2AP2-F. Constante: Paso expresión verbal a algebraica (cortejes).                      T2AP12-F. Afín : Paso de expresión gráfica a algebraica.</p> <p>T2AP10-F. Afín: Paso de expresión analítica a gráfica.</p> <p>T2AP7-F. Lineal: Expresiones verbal y algebraica iguales.                      T2AP14-F. Cuadrática, cóncava: Paso analítica a gráfica (pasa punto).</p>	<p>T2AP3-F. Constante: Paso de expresión gráfica a algebraica.                      T2AP4-F. Lineal expresión gráfica. : reconocerla.</p> <p>T2AP18-F. Cuadrática., definida en R: Paso verbal a gráfica (pasa origen).</p> <p>T2AP11-F. Afín: Paso analítica a gráfica (pasa origen).                      T2AP15-F. Cuadrática, convexa: Paso analítica a gráfica (pasa punto).</p>	<p>T2AP8-F. Lineal: Paso de una tabla de valores a la expresión analítica.                      T2AP13-F. Cuadrática. convexa: analítica a gráfica (pasa origen).</p> <p>T2AP16-F. Cuadrática cóncava algebraicamente: pasa por un punto.                      T2AP19-F. Cuadrática expresada: Hallar imagen de un punto.</p>

Árbol 1: Árbol de similitud entre las preguntas de  $T_2$  relativo a  $MPT_2Ex$ .

**Clase de similaridad [Cs<sub>11</sub>]:** Con un porcentaje medio de aciertos del 38% de los alumnos. Las funciones tratadas en estas preguntas son de los cuatro tipos: constante, lineal, afín y cuadrática. El primer nudo significativo aparece en un nivel bastante bajo, nivel 9 de 17 niveles, y agrupa las P<sub>5</sub>, P<sub>9</sub> y P<sub>17</sub>.

Las dos primeras están ligadas por un nudo no significativo, en el nivel 3 con índice de similaridad 0,976183, (acertadas ambas por el 35% de los alumnos). Se puede comprobar con los enunciados que para contestar acertadamente a estas preguntas es necesario reconocer la gráfica de ciertas funciones expresadas en forma analítica, destreza que, generalmente, dominan peor los alumnos.

Los siguientes nudos significativos aparecen ya en niveles bastante bajos (niveles 11 y 14). Dentro de los nudos no significativos el más alto está, en el segundo nivel, en la clase Cs<sub>12</sub>.

**Clase de similaridad [Cs<sub>12</sub>]:** El primero de los nudos no significativo agrupa los aciertos de las preguntas P<sub>2</sub> y P<sub>12</sub> (con un índice de 0,978362). Vemos que en estas preguntas se plantea el paso de la expresión analítica a la gráfica y viceversa. En ambas la opción correcta era la D (Ninguna de las opciones anteriores), es decir, entre las tres primeras opciones de respuesta no se daba la correcta.

En la pregunta P<sub>12</sub> se trata de reconocer la expresión analítica de una función afín que está expresada gráficamente que suele encerrar más dificultad que el paso en sentido contrario. El paso más sencillo (de la expresión analítica a la expresión gráfica) en la pregunta P<sub>2</sub> se complica al cuestionarse los cortes con los ejes de coordenadas, a pesar de tratarse de una función constante. P<sub>2</sub>, P<sub>12</sub> junto con la pregunta P<sub>7</sub> son las preguntas peor contestadas. En el enunciado de esta última pregunta aparecen tres expresiones de una misma función lineal: dos algebraicas y una verbal, en la que se encuentra de nuevo contenido el término de “número real”. Esto podría explicar tan mal resultado: sólo el 18% de los estudiantes han contestado bien.


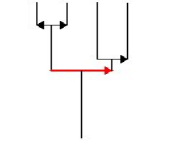

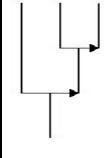




### 3.2.2 Árbol jerárquico de la matriz MPT<sub>2</sub>Ex

El programa CHIC aplicado de nuevo a la matriz MPT<sub>2</sub>Ex nos proporciona el árbol jerárquico para realizar un análisis de cohesión implicativa:

Se pueden apreciar en el árbol siguiente ocho clases de cohesión con dos cohesiones simétricas y dos nudos significativos. El mayor nivel de significación (nivel 1, cohesión 0,982) agrupa T<sub>2</sub>AP<sub>3</sub> y T<sub>2</sub>AP<sub>4</sub>. El segundo y último nudo

significativo aparece en el nivel 6, cohesión 0,719, y agrupa las preguntas: 5, 17, 10 y 19.

Preguntas que en el árbol de similaridad, *Árbol 1*, ya estaban próximas con nivel significativo importante vuelven a aparecer implicadas en éste. Exponemos a continuación estos casos.

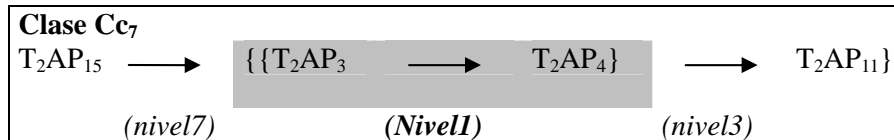
Cc <sub>1</sub>	Cc <sub>2</sub>	Cc <sub>3</sub>	Cc <sub>4</sub>	Cc <sub>5</sub>	Cc <sub>6</sub>	Cc <sub>7</sub>	Cc <sub>8</sub>
 <p>T2AP2-F. Constante Verbal a algebraica (corte ejes). T2AP12-F. Afín : Gráfica a algebraica.</p>	 <p>T2AP5-F. Lineal decreciente: Analítica a gráfica. T2AP17-F. Cuadrática, caso vida real: Paso de expresión analítica a gráfica. T2AP10-F. Afín: Analítica a gráfica. T2AP19- F. Cuadrática expresada verbalmente: Hallar imagen de un punto.</p>	 <p>T2AP6-F. Lineal creciente: Analítica a gráfica. T2AP16-F. Cuadrática cóncava algebraica: Reconocer si pasa por un punto.</p>	 <p>T2AP7-F. Lineal: verbal-algebraica iguales. T2AP14-F. Cuadrática, cóncava: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto). T2AP9- F. Afín expresada algebraicamente: Hallar imagen de un punto.</p>	 <p>T2AP13-F. Cuadrática. convexa: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa origen).</p>	 <p>T2AP15-F Cuadrática, convexa: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto). T2AP3-F. Constante: Paso de expresión gráfica a algebraica. T2AP4-F. Lineal expresada gráficamente: reconocerla. T2AP11-F. Afín: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa origen).</p>	 <p>T2AP18-F. Cuadrática., definida en R: Paso de expresión verbal a gráfica (pasa origen). T2AP8-F. Lineal: Paso de una tabla de valores a la expresión analítica.</p>	

Árbol 2: *Árbol jerárquico entre las preguntas de T<sub>2</sub> relativo a MPT<sub>2</sub>Ex.*

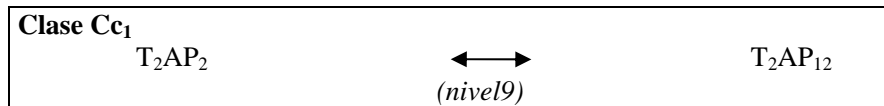


Las preguntas P3, P4 P11 y P15 que forman parte de la clase [Cs21] del árbol de similaridad, siguen estando agrupadas en el árbol jerárquico de cohesión. La pregunta 11 que en el árbol de similaridad aparecía en un nivel bajo, en éste pertenece al nivel 3.

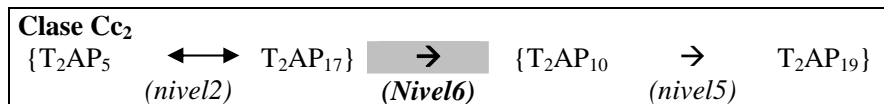
En este árbol se obtiene un primer nudo significativo en el nivel 1, que es el más importante de toda la jerarquía, y dos no significativos en los niveles 3 y 7.



Parte de las preguntas que formaban la segunda clase, [Cs<sub>12</sub>] en el árbol de similaridad, se subdividen en dos clases para formar las primeras clases del árbol de cohesión, de ellas la Cc<sub>1</sub> es la más interesante.



Parte de la subclase [Cs<sub>11</sub>] del árbol de similaridad se agrupa en el árbol jerárquico de cohesión con un nudo doble en el nivel 2.



En el nivel sexto aparece el último nudo significativo que relaciona estas dos variables con T<sub>2</sub>AP<sub>10</sub> y T<sub>2</sub>AP<sub>19</sub>,

### 3.2.3 Conclusiones del análisis a posteriori del test Previo de Contenidos Básicos.

La información proporcionada por el programa nos permite observar que para todas funciones elementales (constantes, lineales,...) los aciertos obtenidos son (Constantes 35%; Lineales 36%; Afines 37% y Cuadráticas 38%,) muy similares, sin decremento en las funciones más complejas.

Solamente dos preguntas ( $P_1$  y  $P_{19}$ ) han sido contestadas correctamente por más de la mitad de los alumnos.

No se relacionan adecuadamente la forma semejante de dos gráficas, destacándose la **dificultad de distinguir dos gráficas trasladadas**. Además, la relación de pertenencia de un punto a la gráfica de una función no está asumida por el alumno ( $P_{10}$ ,  $P_{13}$  y  $P_{15}$ ), incluso cuando lo solicitado es reconocer los posibles puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas ( $P_2$ ). Esta dificultad puede que se genere de la forma de presentar el estudio de gráficas de las funciones elementales.

Otra dificultad se presenta al reconocer y relacionar las distintas expresiones de una función destacándose los fallos a la hora de “Pasar de la expresión gráfica a la algebraica ( $P_{12}$  y  $P_3$ )” o “Pasar de la expresión verbal a la algebraica ( $P_7$  y  $P_1$ )”.

Se presentan problemas a la hora de reconocer las expresiones de los distintos tipos de funciones elementales, constantes, lineales y cuadráticas ( $P_3$ ,  $P_4$  y  $P_{18}$ , preguntas unidas por los dos primeros nudos significativos del árbol de similaridad).

Un nudo en el segundo nivel une las preguntas  $P_2$  y  $P_{12}$  en las que la solución era D (ninguna de las anteriores) y que han sido las preguntas en las que han obtenido el peor resultado.

No manejan bien la expresión verbal, sobre todo cuando en ella aparece el término “número real” o si la gráfica pasa por el origen de coordenadas (preguntas  $P_7$ ,  $P_{14}$  y  $P_{18}$ , las dos primeras relacionadas por un nudo de nivel 14).

En general, los resultados más satisfactorios los han obtenido en el paso de la expresión analítica a la expresión gráfica ( $P_5$ ,  $P_6$  y  $P_{10}$ , preguntas asociadas por el nudo significativo de nivel 16), salvo cuando la pregunta se complica con cortes con los ejes de coordenadas ( $P_2$ ).

Existen sólo tres implicaciones con un nivel de confianza superior al 85%, una de ellas simétrica.

Las dos primeras (nivel 1, cohesión 0,982 y nivel 2, cohesión 0,882) no son implicaciones muy lógicas, pues en ellas se interpreta que los estudiantes-alumnos que han contestado correctamente a la función más sencilla también lo hacen con la más complicada, es decir,  $P_3$  (función constante)  $\rightarrow P_4$  (función lineal) y  $P_5$  (función lineal)  $\leftrightarrow P_{17}$  (función cuadrática).

La primera implicación confirma la dificultad que encierra para estos alumnos el paso de la expresión gráfica a la analítica, incluso en el caso de la función constante.

La doble implicación puede ser debida a que las soluciones propuestas en ambas preguntas son similares. En los dos casos aparecen las gráficas de funciones lineales o parábolas.

Lo mismo sucede con la implicación del tercer nivel (cohesión 0,855) que va contra toda lógica. En esta implicación  $P_3$  (función constante) y  $P_4$  (función lineal)  $\rightarrow P_{11}$  (función afín). Una explicación a esto podría ser que en el caso de la pregunta  $P_{11}$ , tanto en el enunciado como en las distintas soluciones, se tratan de sendas funciones afines, sin embargo en las otras preguntas se mezclan distintos tipos de funciones: constante, lineal y afín. Lo que confirma que no tienen un deseable dominio en reconocer los distintos tipos de funciones elementales.

### 3.3 Análisis a posteriori del test Posterior de Contenidos Básicos

Esta sección se ocupa del análisis exploratorio del tercer test, realizado por los alumnos después de desarrollar la Unidad Didáctica en clase.

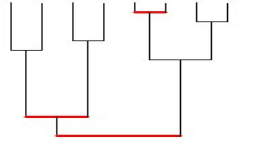
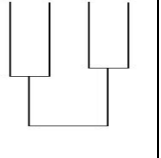
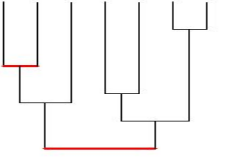
#### 3.3.1 Árbol de similaridad entre las preguntas de $T_3$ relativo a $MPT_3Ex$

El árbol 3 nos proporciona tres clases de similaridad  $[Cs_1]$ ,  $[Cs_2]$  y  $[Cs_3]$ . A su vez  $[Cs_1]$  y  $[Cs_3]$  se dividen en dos subclases cada una:  $[Cs_1] = \{[Cs_{11}] = \{T_3AP_1, T_3AP_3, T_3AP_5, T_3AP_{14}\}, [Cs_{12}] = \{T_3AP_4, T_3AP_{10}, T_3AP_6, T_3AP_{17}\}\}$ ;  $[Cs_2] = \{T_3AP_2, T_3AP_{15}, T_4AP_{14}, T_3AP_7, T_3AP_{18}\}$  y  $[Cs_3] = \{[Cs_{31}] = \{T_3AP_8, T_3AP_9, T_3AP_{11}\}, [Cs_{32}] = \{T_3AP_{12}, T_3AP_{16}, T_3AP_{13}, T_3AP_{19}\}\}$ . Entre ellas destaca la clase  $[Cs_1]$  que contiene tres de los cinco nudos significativos del árbol y la  $[Cs_3]$  con los otros dos.

**Clase de similaridad  $[Cs_1]$ :** En  $[Cs_1]$ , la subclase más relevante es la  $[Cs_{12}]$  en la que aparece el nudo más significativo de toda esta clasificación en el nivel 1 con un índice de 0,933188, relacionando  $T_3AP_4$  y  $T_3AP_{10}$ , aciertos de las preguntas  $P_4$  y  $P_{10}$ .

Esta subclase contiene cuatro elementos:  $T_3AP_4$ ,  $T_3AP_{10}$ ,  $T_3AP_6$  y  $T_3AP_{17}$ . El porcentaje medio de aciertos en estas cuatro preguntas fue del 19%, que, como comprobaremos más adelante, representa el peor de las cinco subclases. La explicación podría ser que en todas estas preguntas se pide pasar de la expresión analítica a la gráfica o viceversa con la complicación de tener en cuenta un corte con los ejes ( $P_4$ ) o si la función pasa por un punto ( $P_{10}$ ,  $P_6$  y  $P_{17}$ ); a esto se añade

que en todas ellas la opción de respuesta correcta era la D (ninguna de las anteriores).

Cs <sub>1</sub>		Cs <sub>2</sub>	Cs <sub>3</sub>	
Cs <sub>11</sub>	Cs <sub>12</sub>		Cs <sub>31</sub>	Cs <sub>32</sub>
	T3AP1-F. Constante : Paso de expresión verbal a algebraica.			T3AP13-F. Cuadrática., definida en R: Paso de expresión verbal a gráfica (pasa origen).
	T3AP3-F. Lineal decreciente: Paso de expresión analítica a gráfica.			T3AP19-F. Lineal: Reconocer expresiones verbal y algebraica iguales.
	T3AP5- F. Afín expresada algebraicamente: Hallar imagen de un unto.			
	T3AP14-F Lineal: Paso de tabla a analítica.			
T3AP4-F Constante : Paso de expresión verbal a algebraica (corte ejes).				
T3AP10-F. Cuadrática, convexa: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto).				
T3AP6-F. Afín: Paso de expresión analítica a gráfica.				
T3AP17-F. Afín : Paso de gráf. a algebraica.				
T3AP2-F .Lineal expresada gráficamente : reconocerla.				
T3AP15- F. Cuadrática expresada algebraicamente: Hallar imagen de un punto.				
T3AP7-F. Cuadrática convexa: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa origen).				
T3AP18-F. Cuadrática cóncava expresada algebraicamente: Reconocer paso punto.				
T3AP8-F. Lineal crec.: Paso de expresión analítica a gráfica.				
T3AP9-F. Cuadrática., cóncava: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto).				
T3AP11-F. Cuadrática., caso vida real: Paso de expresión analítica a gráfica.				
T3AP12-F. Afín: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa origen).				
T3AP16-F. Constante. : Paso de expresión gráfica a algebraica.				

Árbol 3: Árbol de similitud entre las preguntas de T<sub>3</sub> relativo a MPT<sub>3</sub>Ex

El nudo significativo aparece en el nivel 1 con un índice 0,933188 y relaciona las variables  $T_3AP_4$  y  $T_3AP_{10}$  en las que se pide pasar de la expresión analítica a la expresión gráfica, en el caso de la pregunta  $P_4$  de una función constante y en la pregunta  $P_{10}$  de una función cuadrática cóncava. En ambos casos el porcentaje de aciertos ha sido bajo (25% y 6%, respectivamente).

En el nivel siguiente aparece otro nudo no significativo que asocia las variables  $T_3AP_6$  y  $T_3AP_{17}$  con un índice de similaridad de 0,925538. En las dos preguntas correspondientes a dichas variables se solicitaba al alumno la expresión gráfica ( $P_6$ ) o la algebraica ( $P_{17}$ ) de sendas funciones afines en las que debían comprobar si las funciones pasaban por ciertos puntos.

El último nudo de  $[Cs_{12}]$  aparece en el nivel 6 con un índice de 0,7338 y relaciona sus cuatro elementos. El siguiente nudo significativo pertenece a la clase  $[Cs_{31}]$  y enlaza en el nivel 7 las variables  $T_3AP_8$  y  $T_3AP_9$  con un índice de similaridad 0,708057.

**Clase de similaridad  $[Cs_{31}]$ :** De las dos subclases que forman la clase de  $[Cs_3]$ , ésta es la más relevante pues contiene el primer nudo significativo de la clase. El porcentaje medio de aciertos fue del 69%, siendo la pregunta  $P_9$  la menos acertada de la subclase (63% de aciertos) seguramente porque en ella se cuestionaba el paso de la gráfica de la función por el origen.

Este nudo que agrupa las variables  $T_3AP_8$  y  $T_3AP_9$  se encuentra en el nivel 7 con un índice de similaridad de 0,708057. Se observa en las figuras y que en las preguntas correspondientes a dichas variables se solicitaba al alumno que reconocieran la gráfica de ciertas funciones (lineal en  $P_8$  y cuadrática en  $P_9$ ) expresadas en forma analítica.

Lo mismo que se requería en la última pregunta de esta subclase ( $P_{11}$ ) relacionada con las dos anteriores por un nudo no significativo que se encuentra en el nivel 11 (índice 0,443633). El porcentaje medio de aciertos en estas tres preguntas fue del 69%, siendo la pregunta  $P_9$  la menos acertada de la subclase (63% de aciertos) seguramente porque en ella se cuestionaba el paso de la gráfica de la función por el origen de coordenadas.

Los tres restantes nudos significativos de éste árbol no empiezan a aparecer hasta un nivel bastante inferior (12 de 16 niveles).

### 3.3.2 Árbol jerárquico de la matriz MPT3Ex relativo a la matriz MPT3Ex

Se aplica otra vez el programa CHIC a la matriz MPT<sub>3</sub>Ex para realizar el análisis de cohesión implicativa y se obtiene el árbol jerárquico que muestra nueve clases:

Cc <sub>1</sub>	Cc <sub>2</sub>	Cc <sub>3</sub>	Cc <sub>4</sub>	Cc <sub>5</sub>	Cc <sub>6</sub>	Cc <sub>7</sub>	Cc <sub>8</sub>	Cc <sub>9</sub>
	T3AP2-F. Lineal expresada gráficamente : reconocerla	T3AP6-F. Afín: Paso de expresión analítica a gráfica. T3AP9-F. Cuadrática., cóncava: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto). T3AP3-F. Lineal decreciente: Paso de expresión analítica a gráfica. T3AP1-F. Constante : Paso de expresión verbal a algebraica.	T3AP10-F. Cuadrática, convexa: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto).	T3AP11-F. Cuadrática, caso vida real: Paso de expresión analítica a gráfica.	T3AP12-F. Afín: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa origen). T3AP16-F. Constante. : Paso de expresión gráfica a algebraica.	T3AP13-F. Cuadrática., definida en R: Paso de expresión verbal a gráfica (pasa origen). T3AP19-F. Lineal: Reconocer expresiones verbal y algebraica iguales. T3AP15- F. Cuadrática expresada algebraicamente: Hallar imagen de un	T3AP17-F. Afín : Paso de expresión gráfica a algebraica.	T3AP18-F. Cuadrática cóncava expresada algebraicamente: Reconocer si pasa por un punto. T3AP7-F. Cuadrática convexa: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa origen).

Árbol4: Árbol jerárquico entre las preguntas de T<sub>3</sub> relativo a MPT<sub>3</sub>Ex

$[Cc_1] = \{T_3AP_2\}$ ;  $[Cc_2] = \{T_3AP_4, T_3AP_5, T_3AP_{14}, T_3AP_{18}\}$ ;  $[Cc_3] = \{T_3AP_6, T_3AP_9, T_3AP_3, T_3AP_1\}$ ;  $[Cc_4] = \{T_3AP_{10}\}$ ;  $[Cc_5] = \{T_3AP_{11}\}$ ;  $[Cc_6] = \{T_3AP_{12}, T_3AP_{16}\}$ ;  $[Cc_7] = \{T_3AP_{13}, T_3AP_{19}, T_3AP_{15}\}$ ;  $[Cc_8] = \{T_3AP_{17}\}$  y  $[Cc_9] = \{T_3AP_{18}, T_3AP_7\}$ .

Se aprecian en este árbol una cohesión simétrica, que además es significativa, en la séptima clase y dos nudos significativos más en la segunda clase. El mayor nivel de significación (nivel 1, cohesión 0,889) es el de la cohesión simétrica que agrupa  $T_3AP_{13}$  y  $T_3AP_{19}$ .

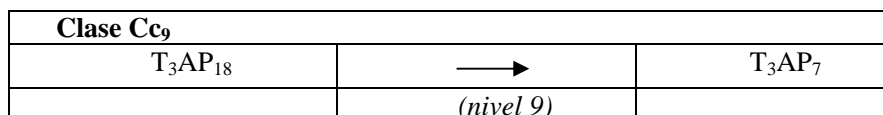
En este árbol de cohesión implicativa aparecen implicadas preguntas que en el árbol de similaridad, *Árbol 3*, ya están próximas. Las variables  $T_3AP_3$ ,  $T_3AP_5$  y  $T_3AP_{14}$  que formaban parte de la clase  $[Cs_{11}]$  del árbol de similaridad, siguen estando agrupadas en el árbol jerárquico de cohesión. Se obtienen dos nudos no simétricos, el segundo (nivel 4) significativo. Aunque a un nivel bastante más bajo, en el árbol jerárquico de cohesión existe otro nudo significativo que relaciona las variables anteriores con otra variable, esta vez de  $[Cs_{31}]$ .

Clase $Cc_2$						
$\{T_3AP_4$	$\longrightarrow$	$\{T_3AP_5$	$\longrightarrow$	$T_3AP_{14}\}$	$\longrightarrow$	$T_3AP_8$
	(Nivel 4)		(nivel 2)		(Nivel 7)	

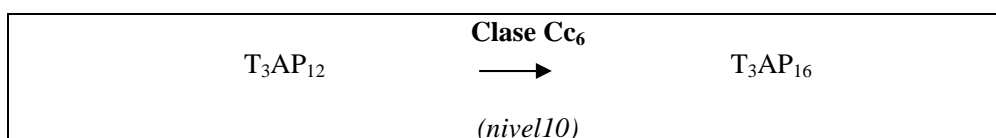
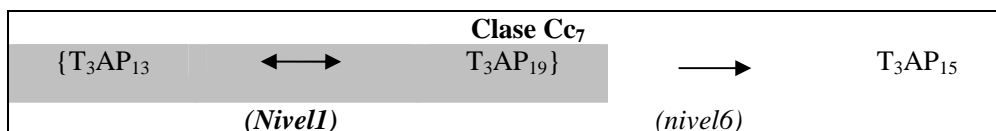
Las variables  $T_3AP_1$  y  $T_3AP_3$  que, con  $T_3AP_5$  y  $T_3AP_{14}$  componían la clase  $[Cs_{11}]$  del árbol de similaridad, están también asociadas en el árbol jerárquico de cohesión por un nudo no significativo.

Clase $Cc_3$		
$T_3AP_3$	$\longrightarrow$	$T_3AP_1$
	(nivel 3)	

De la clase del árbol de proximidades  $[Cs_2]$ , formada por  $T_3AP_2$ ,  $T_3AP_{15}$ ,  $T_3AP_7$  y  $T_3AP_{18}$  conservan sólo  $T_3AP_7$  y  $T_3AP_{18}$  su agrupación en el árbol jerárquico de cohesión. Aunque estas variables sigan agrupadas en el árbol jerárquico se puede observar en éste que no se agrupan con el resto de las de la clase  $[Cs_2]$ . La cadena que nos proporciona el árbol jerárquico de cohesión es:



La subclase del árbol de similaridad, [C<sub>s32</sub>], se subdivide, a su vez, en dos en el árbol jerárquico de cohesión, *Árbol 4*, {T<sub>3</sub>AP<sub>13</sub> y T<sub>3</sub>AP<sub>19</sub>} y {T<sub>3</sub>AP<sub>12</sub> y T<sub>3</sub>AP<sub>16</sub>} sin existir entre ellas cohesión implicativa. Esto es consecuencia de que su nivel en el árbol de similaridad era bajo (nivel 13 de 16). El nudo que relaciona T<sub>3</sub>AP<sub>13</sub> y T<sub>3</sub>AP<sub>19</sub> es el más significativo del árbol y, además, es el único nudo simétrico.



### 3.1.1 Conclusiones del análisis a posteriori del test Posterior de Contenidos Básicos.

La información proporcionada por el programa CHIC nos permite afirmar:

Para todo tipo de funciones (constantes, lineales,...) los porcentajes medios de aciertos obtenidos por este grupo son mayores que 45% y, a diferencia del test previo T<sub>2</sub>, estos porcentajes no son muy similares (Constantes 61%; Lineales 70%; Afines 45% y Cuadráticas 56%,).

Los peores resultados los han obtenido en las preguntas P<sub>4</sub> y P<sub>10</sub>, unidas por el nudo de mayor significado del árbol de similaridad y P<sub>6</sub>, P<sub>17</sub> relacionadas con las dos anteriores en el nivel sexto. En todas ellas la solución era D (ninguna de las anteriores).

- Ha disminuido la dificultad cuando en el enunciado aparece el término “nº real” (P<sub>13</sub> y P<sub>19</sub>, preguntas asociadas por el nudo de nivel 3 en el árbol de similaridad, y un nudo significativo y además simétrico en el árbol jerárquico de cohesión).



- Manejan el paso de la expresión gráfica a la algebraica o viceversa, salvo cuando hay que reconocer si la función pasa por un cierto punto ( $P_{12}$  y  $P_3$ , unidas en el nivel 13 del Árbol de similitud).
- Estos estudiantes-alumnos parecen conocer la “forma” de estas funciones (preguntas  $P_6$  y  $P_{12}$  que aparecen relacionadas en el nivel 10).
- Han mejorado en las preguntas en las que se les solicita encontrar la imagen para un cierto original ( $P_5$  y  $P_{15}$ ) o aquellas en las que es necesario reconocer si la gráfica de la función pasa por el origen de coordenadas ( $P_8$ ,  $P_9$  y  $P_{13}$ , las dos primeras asociadas por el segundo nudo significativo).
- Igualmente, han mejorado en las preguntas en las que se pide la expresión analítica de la función, sea partiendo de la gráfica o de una expresión verbal ( $P_{17}$  y  $P_{16}$ ,  $P_1$  y  $P_{19}$ ).
- En cambio, el rendimiento ha sido peor en alguna pregunta donde se cuestiona el corte con los ejes de coordenadas ( $P_6$  y  $P_{17}$ , unidas en el nivel 2).
- Sucede lo mismo en preguntas en las cuales hay que identificar si la gráfica de la función pasa por un cierto punto ( $P_7$ ,  $P_6$  y  $P_{10}$ , las dos últimas asociadas en el nivel 6).
- Existe sólo una implicación con un nivel de confianza superior al 85%.

Esta doble implicación  $P_{13} \longleftrightarrow P_{19}$ , de nivel 1 e índice de cohesión 0,889, confirma que, aunque menor, sigue existiendo dificultad cuando en el enunciado aparece el término “nº real”.

#### 4 Comparación de los dos tests de Contenidos Básicos

Anteriormente ya se expuso que las preguntas de los dos tests de Contenidos Básicos son idénticas y la diferencia radica exclusivamente en el orden de las mismas (en el test previo se presentaron en orden progresivo de dificultad y en el posterior al azar). Por tanto es necesario, como primera medida para la comparación de resultados, mostrar la equivalencia de las preguntas de ambos tests:

$T_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$T_3$	1	4	16	2	3	8	19	14	5	6	12	17	7	9	10	18	11	13	15

En este apartado cada pregunta la denotaremos según el orden del tercer test poniendo entre paréntesis el del segundo. Por ejemplo la pregunta número 15 del

tercer test equivale a la número 19 del segundo, por consiguiente, la simbolizaremos de la siguiente manera:  $P_{15}$  ( $P_{19}$ ).

La información que resulta de los parámetros estadísticos proporcionados por el programa CHIC confirma el aprendizaje tan satisfactorio que han realizado los alumnos de este grupo experimental en este tema de Funciones elementales ya que ha habido un aumento importante en los porcentajes de aciertos de las preguntas de los cuatro tipos de funciones: Constantes (del 35% al 61%), Lineales (del 36% al 70%), Afines (del 37% al 45%) y Cuadráticas (del 38% al 56%).

Sin embargo, de las diecinueve preguntas que forman los tests, ha disminuido el porcentaje de aciertos en tres:  $P_6$  ( $P_{10}$ ),  $P_{10}$  ( $P_{15}$ ) y  $P_{18}$  ( $P_{16}$ ).

En el enunciado de la pregunta  $P_6$  ( $P_{10}$ ) se puede que apreciar de las respuestas (B) y (C) muestran rectas de pendiente igual a  $f(x)$  pero que no pasan por puntos pertenecientes a esta función como, por ejemplo, el punto (0,5). Por tanto la respuesta correcta es la (D) Ninguna de las anteriores. En la pregunta  $P_{10}$  ( $P_{15}$ ) la historia se repite, esta vez para una función de segundo grado.

Por último, como vemos en el propio enunciado de  $P_{18}$  ( $P_{16}$ ) ya se plantea el paso por el punto (-5,25).

Esto nos conduce a concluir que los alumnos de este grupo experimental **siguen sin poseer un deseable dominio en reconocer si un punto pertenece o no a la gráfica de una función** (ya sea de primer o de segundo grado). En cambio, en las preguntas  $P_9$  ( $P_{14}$ ) y  $P_{12}$  ( $P_{11}$ ) que se cuestiona el paso por el origen de coordenadas, el porcentaje de aciertos ha mejorado notablemente de 24% a 63% y de 47% a 81%, respectivamente.

En cuanto a peor porcentaje de aciertos, detrás de las preguntas mencionadas anteriormente,  $P_6$  ( $P_{10}$ ),  $P_{10}$  ( $P_{15}$ ) y  $P_{18}$  ( $P_{16}$ ), se encuentran  $P_4$  ( $P_2$ ) y  $P_{17}$  ( $P_{12}$ ). Para contestar correctamente a estas preguntas se debe tener en cuenta los cortes con los ejes de coordenadas; de ahí que en estas preguntas, a pesar de ser mejor contestadas en el test  $T_3$ , la mejoría ha sido ligera (de 18% en  $T_2$  a 25% en  $T_3$ ).

El número de aciertos en las preguntas  $P_{13}$  ( $P_{18}$ ) y  $P_{19}$  ( $P_7$ ), en las que aparece el término "nº real", ha mejorado aceptablemente (de 18% y 29%, respectivamente, en  $T_2$  a 56% en  $T_3$ ).

Las preguntas mejor contestadas del test  $T_3$  son:  $P_2$  ( $P_4$ ),  $P_{16}$  ( $P_3$ ),  $P_{15}$  ( $P_{19}$ ),  $P_7$  ( $P_{13}$ ),  $P_{12}$  ( $P_{11}$ ) y  $P_8$  ( $P_6$ ). Salvo para la  $P_{15}$  ( $P_{19}$ ), que es la más sencilla de todas, para acertar estas preguntas es necesario manejar el paso de la expresión analítica a la gráfica o viceversa de funciones constantes, lineales, afines y cuadráticas de vértice el origen de coordenadas, sin necesidad de comprobar si las funciones pasan por ningún punto. Se destaca el porcentaje de aciertos de las preguntas  $P_2$  ( $P_4$ ),  $P_{16}$  ( $P_3$ ),  $P_7$  ( $P_{13}$ ) y  $P_8$  ( $P_6$ ) que es más del doble que en  $T_2$ .

En cambio, las preguntas peor contestadas han sido aquellas en las que la solución correcta era D (Ninguna de las anteriores), lo que refleja una gran inseguridad por parte de estos estudiantes-alumnos.

La observación, comparación y posterior análisis de los árboles de similaridad, *Árboles 1 y 3*, de los tests  $T_2$  y  $T_3$  nos permite afirmar que las dos clasificaciones obtenidas en ambos tests son bastante parecidas, en cuanto a los elementos de las clases obtenidas:

- La clase  $[Cs_{12}]$  del árbol de  $T_3$ , formada por las variables  $T_3AP_4$ ,  $T_3AP_{10}$ ,  $T_3AP_6$  y  $T_3AP_{17}$  (correspondientes a las preguntas de respuesta correcta D), es también  $[Cs_{12}]$  de  $T_2$  salvo la pregunta  $P_{10}$  ( $P_{15}$ ).
- Las clases  $[Cs_{11}]$  y  $[Cs_{31}]$  de  $T_3$  se agrupan, a excepción de  $P_{14}$  ( $P_8$ ) y  $P_9$  ( $P_{14}$ ), para formar la clase  $[Cs_{11}]$  del árbol de  $T_2$ . Esta agrupación podría explicar que en el árbol jerárquico de cohesión de  $T_3$  (Árbol 8.6) aparece un nudo significativo (nivel 7 de 10) que une ambas clases.
- Las variables  $T_3AP_{15}$ ,  $T_3AP_7$  y  $T_3AP_{18}$  de la clase  $[Cs_2]$  del árbol de  $T_3$  (las preguntas de  $[Cs_2]$  relativas a funciones cuadráticas) forman junto a  $P_{14}$  ( $P_8$ ) la clase  $[Cs_{22}]$  de  $T_2$ .
- Las variables  $T_3AP_{12}$ ,  $T_3AP_{13}$  y  $T_3AP_{16}$  de la clase  $[Cs_{32}]$  del árbol de  $T_3$  forman junto a  $P_2$  ( $P_4$ ) y  $P_{10}$  ( $P_{15}$ ) la clase  $[Cs_{21}]$  de  $T_2$ .

Sin embargo, la clasificación obtenida en el test posterior parece más razonable. En ella aparece una clase,  $[Cs_1]$ , que contiene la mayoría de las preguntas peor contestadas cuya solución era D y, además, las preguntas mejor contestadas (salvo la  $P_{16}$  ( $P_3$ )) son elementos de  $[Cs_2]$ . Asimismo, las preguntas en las que se cuestiona el paso por el origen están en la clase  $[Cs_3]$ . Y, por último, todas las preguntas en las que es necesario conocer uno de los cortes con los ejes de coordenadas (a excepción otra vez de la pregunta  $P_{16}$  ( $P_3$ )) pertenecen a la clase  $[Cs_1]$ .

En cambio, los nudos, sobre todo los que son significativos, la situación en ambos tests es muy distinta.

En el test posterior,  $T_3$ , el primero y más significativo (nivel 1) de los nudos relaciona las variables de las preguntas  $P_4$  ( $P_2$ ) y  $P_{10}$  ( $P_{15}$ ), sin embargo, éstas en el test previo,  $P_2$  y  $P_{15}$ , ni siquiera pertenecen a la misma clase de similaridad. El siguiente nudo significativo de  $T_3$  no se encuentra hasta el nivel 7 y asocia los aciertos de las preguntas  $P_8$  ( $P_6$ ) y  $P_9$  ( $P_{14}$ ). Las variables correspondientes de  $T_2$ ,  $T_2AP_6$  y  $T_2AP_{14}$ , aunque pertenecen a la misma clase  $[C_1]$  no se relacionan hasta el penúltimo nivel del árbol (16 de 17).

Análogamente, en el test posterior,  $T_2$ , el primero y más significativo (nivel 1) de los nudos relaciona las variables  $T2AP3$  y  $T2AP4$ , sin embargo, éstas en el test posterior,  $P_{16}$  y  $P_2$ , tampoco pertenecen a la misma clase. El siguiente nudo significativo de  $T_2$  (nivel 5) asocia las preguntas anteriores con  $P_{18}$ . La variable correspondiente de esta pregunta en  $T_3$ ,  $T3AP13$ , aunque pertenece a la clase de la correspondiente a  $T2AP3$ ,  $T3AP16$ , no se relacionan hasta el nivel 16.

Por tanto, estos resultados confirman que el progreso que se ha producido en los conocimientos de estos alumnos del grupo experimenta de 4º de E.S.O. en el tema de las funciones elementales ha sido bastante notable y podemos afirmar, con gran satisfacción por nuestra parte, que dicho cambio, además, ha sido muy positivo.

## 5 Conclusiones finales

La focalización específica en la actividad que relacionan las gráficas y su expresión algebraica hacen que los alumnos maduren en esta idea primaria del conocimiento matemático.

Con todo se destaca la necesidad de una metodología continuada a lo largo del proceso educativo si se persigue una total comprensión del concepto de función, pues aún después de la reafirmación didáctica en esta dirección se encuentra un porcentaje nada desdeñable de estudiantes con errores.

Los porcentajes análogos, no dependientes de la complejidad de las funciones sobre las preguntas, demuestran errores más profundos en los mecanismos de pensamientos que no responden a los conceptos sino a malas fundamentaciones de técnicas de razonamientos y sencillamente a una mala comprensión de las ideas matemáticas que sólo pueden ser subsanadas utilizando las nuevas definiciones en dos vertientes: Las de los objetos que introducen y las de los aprendizajes que tienen que incorporar a la forma de pensar del estudiante.

En las preguntas cuyo enunciado aparece en lenguaje cotidiano hay una similitud en la respuesta y es que, a las dificultades anteriormente expuestas, se añade la de asociar las Matemáticas con el lenguaje coloquial. Podíamos explicarlos como una ruptura del contrato didáctico en las que el alumno supone que una pregunta matemática debe llevar un lenguaje propio, ajeno totalmente a las preguntas comunes. Este es un hecho que permanece durante todo el periodo educativo incluyendo, incluso, la formación superior en el que la forma de exponer las ideas parece tener que estar sometido a un lenguaje semilógico y críptico, pervirtiendo el sentido de la expresión de la idea y la idea y su significado.

Extrapolando el caso particular de las funciones al del aprendizaje general de las Matemáticas podemos concluir que muchas veces el estudio de las Matemáticas se reduce a un mero control de un lenguaje automático donde cualquier variación produce desconcierto por no estar sustentado por las ideas básicas que dicho lenguaje pretende comunicar.

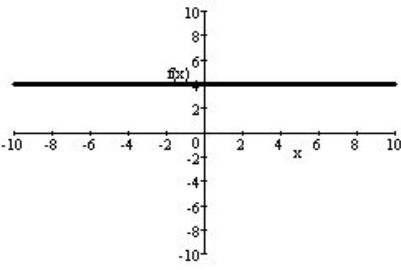
## Bibliografía

- Álvarez, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa: fundamentos y metodología*. Paidós.
- Brousseau, G.; Lacasta, E. (1995). *L'Analyse statistique des situations didactiques*. Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactiques des Mathématiques, ARDM, 53-107.
- Chandon, J.; Pinson, S. (1981). *Analyse typologique*. Théories et applications. Masson. París.
- Delgado, M. y otros (2005). *Modelización de una Unidad Didáctica: Modelo de Ingeniería didáctica para el estudio de las funciones elementales con ordenador*. Actas Edumat 2005. Univ. Luján. Argentina.
- Denzin, N.; Lincon, Y. (2000): "*Handbook of qualitative research*." Thousand Oaks. California.
- Gras, R. (1992). *L'Analyse de données: une méthodologie de traitement de questions de didactique*. Recherches en Didactique des mathématiques, vol12, nº 1.
- Gras, R. y otros (1994). *La methode d'analyse implicative en didactique. Applications vingt ans de didactique des mathématiques en France*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Gras, R. y otros (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Lerman, I. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Dunod.
- Orús, P.; Pitarchi, I. (2000). *Utilisation didactique des tableaux de données et du logiciel "CHIC" a l'école elementaire*. Actes des journées sur La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative, Caen, 23-24 Junio 2000. Association pour la recherche en Didactique des Mathématiques.
- Orús, P. (2002b). *Tratamiento de datos, grafos y didáctica de las matemáticas*. Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, nº 26. Departamento de Matemáticas Fundamentales UNED.

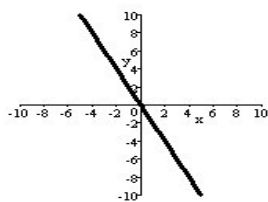
- Orús, P.; Gregori, P. (2005). *Des variables supplémentaires et des élèves «fictifs», dans la fouille didactique de données avec CHIC*. Actas del 3º encuentro internacional ASI. Univ. Palermo. Italia.
- Pitarchi, I. (2002). *Estudio sobre la viabilidad y el interés del tratamiento de la información en la ESO*. Proyecto de investigación de 3º ciclo. Dpto. de Matemáticas. Univ. Jaime I. Alicante.
- Ulecia, M. (2005). *Estudio de un caso de formación a distancia de profesores de Enseñanza Secundaria de Matemáticas*. Tesis doctoral. UNED.

## Anexo

Los enunciados de las preguntas del cuestionario Previo de Contenidos Básicos están expuestos en la siguiente tabla:

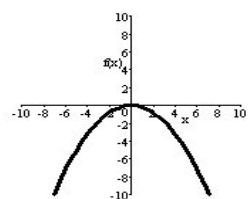
<p>1. ¿Cuál de las expresiones algebraicas describe la expresión verbal "una función hace corresponder a cada número el número <math>-1</math>"?</p> <p>(A) <math>f(x) = -1</math>    (B) <math>f(x) = -x</math>    (C) <math>f(x) = 1</math>.    (D) Ninguna .</p>
<p>2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones relativas a la gráfica de la función <math>f(x) = 4</math> es correcta?</p> <p>(A) Es una línea recta que corta a al eje OX en <math>x = 4</math>.</p> <p>(B) Es una línea recta que corta a al eje OY en el origen.</p> <p>(C) No es una línea recta.</p> <p>(D) Ninguna.</p>
<p>3. La expresión algebraica de la función <math>f(x)</math> representada es:</p> <div style="text-align: center;"></div> <p>(A) <math>f(x) = 4</math>.    (B) <math>f(x) = x + 4</math>.    (C) <math>4</math>.    (D) Ninguna .</p>

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones relativas a la gráfica de una función es correcta?:

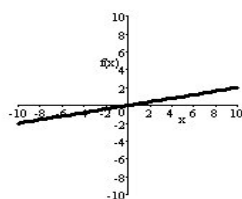


- (A) La función es constante .
- (B) La función es lineal .
- (C) La función es afín .
- (D) Ninguna .

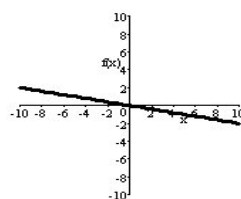
5. La gráfica de la función  $f(x) = -\frac{1}{5}x$  es:



(A)



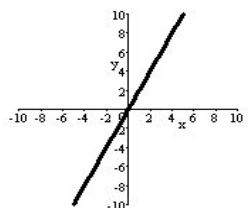
(B)



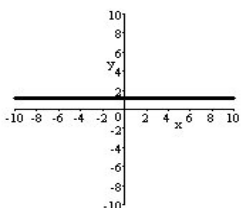
(C)

(D) Ninguna

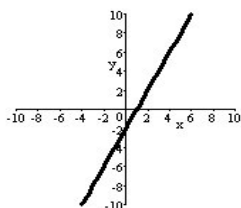
6. La gráfica de la función  $y = 2x$  es:



(A)



(B)



(C)

(D) Ninguna

7. ¿Cuál de estas afirmaciones referidas a estas tres expresiones de funciones:  
 $f(x) = 2x$ , "la función que hace corresponder a cada número real su doble",  $y = 2x$ ,  
es correcta?:

- (A) Sólo dos de ellas son expresiones de la misma función .
- (B) Son las tres expresiones de la misma función .
- (C) Son expresiones de tres funciones distintas .
- (D) Ninguna .

8. Elige la expresión algebraica de la función  $f$  que cumple la siguiente tabla de valores

$x$	5	-4
$f(x)$	25	20

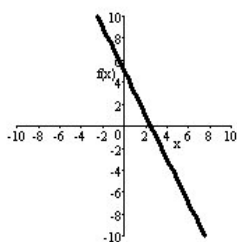
- (A)  $f(x) = 5x$ .      (B)  $f(x) = 3x$ .      (C)  $f(x) = 3x + 5$ .      (D) Ninguna .

9. La variable  $y$  expresada en función de  $x$  se escribe como  $y = 1 - x$ . ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?

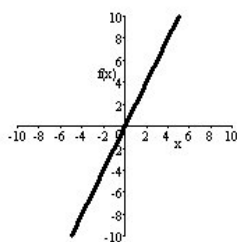
- (A) A  $x = -5$  le corresponde  $y = 6$ .
- (B) A  $x = -5$  le corresponde  $y = -4$ .
- (C) A  $x = -5$  le corresponde  $y = -6$ .
- (D) Ninguna .



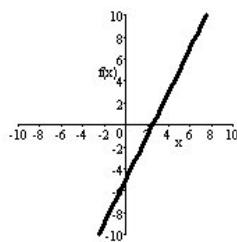
10. La gráfica de la función  $f(x) = 2x + 5$  es:



(A)



(B)



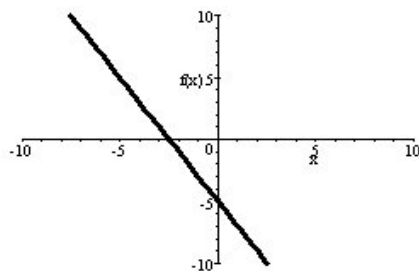
(C)

(D) Ninguna

11. La gráfica de la función  $f(x) = x + \frac{1}{2}$  verifica:

- (A) Es una recta que pasa por el origen .
- (B) No es una recta .
- (C) Es una recta que no pasa por el origen .
- (D) Ninguna .

12. Elige un número  $b$  para que la gráfica de la función:  $f(x) = -2x + b$  sea



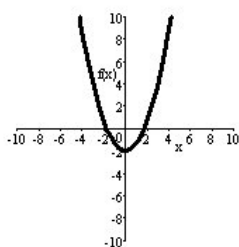
(A)  $b = 3$ .

(B)  $b = -3$ .

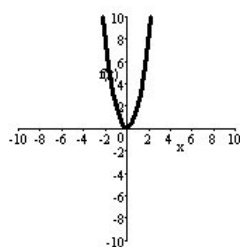
(C)  $b = 0$ .

(D) Ninguna .

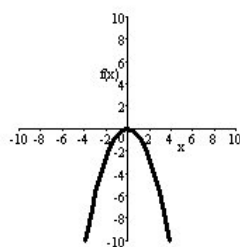
13. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la de la función  $f(x) = 2x^2$ ?



(A)



(B)



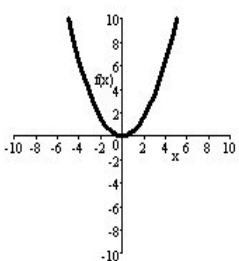
(C)

(D) Ninguna

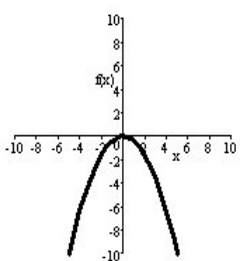
14. La gráfica de la función  $y = -3x^2$  tiene forma de:

- (A) Línea recta que pasa por el origen de coordenadas .
- (B) Parábola que no pasa por el origen de coordenadas .
- (C) Parábola que pasa por el origen de coordenadas .
- (D) Ninguna .

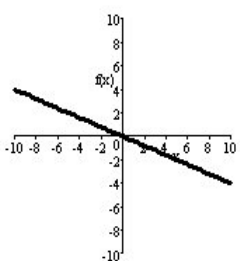
15. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la de la función  $f(x) = -\frac{3}{4}x^2$ ?



(A)



(B)



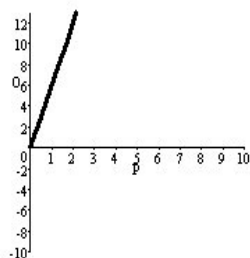
(C)

(D) Ninguna

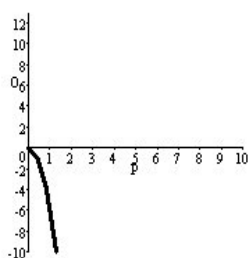
16. La gráfica de la función  $f$  es una parábola que pasa por el punto  $P(-5, 25)$ . ¿Cuál de las siguientes expresiones se refiere a esta función?

- (A)  $f(x) = -5x^2$ .      (B)  $f(x) = x^2$ .      (C)  $f(x) = -5x$ .      (D) Ninguna .

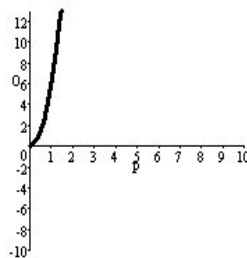
17. La oferta de unos zapatos viene expresada por la siguiente función del precio:  $O = 6p^2$ . La gráfica que relaciona estas variables es:



(A)



(B)



(C)

(D) Ninguna

18. Una función hace corresponder a cada número real su cuadrado. ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?

- (A) La gráfica de esta función es una línea recta.  
 (B) La gráfica de esta función es una parábola abierta hacia abajo que pasa por el origen de coordenadas .  
 (C) La gráfica de esta función es una parábola abierta hacia arriba que no pasa por el origen de coordenadas .  
 (D) Ninguna .

19. La función que asocia a cada lado ( $l$ ) el área del cuadrado ( $A$ ) viene dada por:  $A = l^2$ . ¿Qué área tiene un cuadrado de lado 3 cm?

- (A)  $6\text{cm}^2$ .      (B)  $9\text{cm}^2$ .      (C)  $3\text{cm}^2$ .      (D) Ninguna .



# Una investigación sobre la formalización que hacen los alumnos de un problema de la teoría de números

B. Di Paola, G. Manno, A. Scimone, C. Sortino, F. Spagnolo

Traducido por los autores

G.R.I.M. (Research Group for the Learning of Mathematics),  
Department of Mathematics of the University of Palermo (Sicily),  
34 Archirafi Street 90123.

**Resumen.** La intención de esta investigación es evidenciar como alumnos de años diferentes formalizan algebraicamente un problema histórico de la teoría de números. Esta investigación se inspira en la nueva perspectiva de Regis Gras sobre la implicación Fuzzy. Los datos han sido analizados por medio de los métodos clásicos del análisis implicativo. El análisis “a-priori” es de tipo “Fuzzy”. Los resultados de la investigación revelan diferencias entre el procesamiento de los datos utilizando la lógica binaria en el análisis “a-priori” y aquél que usa la lógica “Fuzzy”. Este discurso es significativo para la evaluación de las habilidades matemáticas de los alumnos de diferentes niveles de estudio.

**Palabras fundamentales:** formalización algebraica, teoría de números, análisis estadístico implicativo, lógica “Fuzzy”, implicación “Fuzzy” de Regis Gras.

## 1 Introducción

Este artículo presenta una investigación didáctica sobre las habilidades de los alumnos para efectuar formalizaciones en un problema de la teoría de números: determinar todos los números primos que son suma de dos cuadrados. La primera formulación del teorema fue de Pierre de Fermat (1601-1665) en un artículo escrito a Merin Mersenne (1588-1648) el 25 de Diciembre de 1640 en el cual se lee:

Tout nombre premier, qui sourpasse de l'unité un multiple du quaternaire, est une seul fois la somme de deux quarrés, et une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

Fermat el 15 de Junio de 1641 escribió a Frénicle de Bessy (1605-1675) sobre el mismo tema:

La proposition fondamentale des triangles rectangles est que tout nombre premier, qui surpassede l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés.

El mismo Fermat en *Observations sur Diophante* (publicado por su hijo Samuel en 1670) busca un método para determinar cuando un número es la suma de dos cuadrados, es decir, cuando es la hipotenusa de un triángulo pitagórico. En la misma observación se menciona un procedimiento para encontrar un número que sea la suma de dos cuadrados en modo arbitrario. Por lo tanto, la inspiración de estudiar la suma de dos cuadrados está relacionada a los triángulos pitagóricos.

Después de la formulación de Fermat, la primera demostración del teorema fue de Leonhard Euler (1707-1783), quién necesitó algunos años de trabajo para lograr una prueba satisfactoria. Otra demostración fue de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en el *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) con la ayuda de la teoría de las formas binarias cuadradas<sup>1</sup>.

El tema de esta investigación fue introducido, de manera informal, durante una lección sobre el teorema de Pitágoras y su inverso. Después de considerar la relación pitagórica, el docente pidió a los alumnos encontrar ternas de números naturales  $a$ ,  $b$  y  $c$  que verificaran la relación  $a^2 + b^2 = c^2$ , también llamadas ternas pitagóricas. Por otra parte, con la sencilla observación de algunas ternas como  $5^2 = 3^2 + 4^2$  o  $13^2 = 5^2 + 12^2$  el docente preguntó a los alumnos si se puede obtener la misma relación con los números primos, es decir, cuándo un número primo se puede escribir como suma de dos cuadrados? Por ejemplo, 5 y 13 son sumas de dos cuadrados, porque,

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2,$$

mientras que 3 y 19 no se pueden escribir como suma de dos cuadrados porque, los resultados de las diferencias,

$$19 - 1^2 = 18, \quad 19 - 2^2 = 15, \quad 19 - 3^2 = 10, \quad \text{o} \quad 19 - 4^2 = 3,$$

no son cuadrados.

---

<sup>1</sup> Para una historia más profunda de la demostración del teorema ver (Bussotti, 2000).

Esta cuestión, aparentemente sencilla, es muy interesante para los alumnos, entonces el profesor pone una cuestión general: encontrar la forma algebraica de *todos* los números primos que se pueden escribir como suma de dos cuadrados. El objetivo es falsificar la hipótesis básica que, en general, *los alumnos no son capaces de formalizar un problema de la teoría de números*.

Para analizar las respuestas de los alumnos a la cuestión, la investigación se llevó a cabo usando dos análisis “a-priori” sobre los posibles comportamientos de los alumnos. El primer análisis “a-priori” clasifica los comportamientos de los alumnos en base a la lógica binaria, mientras el segundo, en base a la lógica “Fuzzy”.

Nosotros entendemos las variables implicativas como variables-intervalos definidas en términos lingüístico-numéricos según la aproximación de la codificación “Fuzzy”, en el sentido de que la metodología usada para analizar los resultados de la investigación ha sido elegida oportunamente, debido a que, el pensamiento aritmético y algebraico es generalmente difícil de caracterizar de forma clara y certera, sólo con la elección dicotómica de los valores 0 y 1. De esta manera, para cada comportamiento clásico  $S_i$  hemos indicado una secuencia de indicadores “Fuzzy”  $F_{ij}$  que corresponden a los diversos grados de conocimiento algebraicos de los alumnos.

Los datos han sido analizados con el software CHIC en ambos casos y los resultados han sido realmente diferentes porque, mientras el primer análisis “a-priori” validó la hipótesis original, el segundo, la falsificó y eso muestra que se necesita mucha atención por parte del docente antes de formular juicios sobre las habilidades de los estudiantes. La investigación es un experimento que aplica la nueva perspectiva epistemológica de Regis Gras<sup>2</sup> en un contexto didáctico, porque la implicación “Fuzzy” es apropiada para interpretar los resultados de la investigación.

## 2 La experimentación

La experimentación fue realizada en tres diferentes escuelas de Palermo: “Galileo Galilei” (liceo científico), “Finocchiaro Aprile” (liceo psico-pedagógico) y “ITC Meli” (instituto técnico comercial).

Han sido eligidas estas tres escuelas porque diferentes tipos de estudiantes dan mayor significatividad a los resultados en relación al transito de la aritmética al álgebra.

---

<sup>2</sup> (Gras y Spagnolo, 2004).

Las clases implicadas son primero, segundo y tercero de las tres escuelas (14-16 años). La edad de los estudiantes ha sido elegida para investigar, en el modo más amplio posible, el comportamiento diferente y la manera de expresarse de los alumnos. Todos fueron capaces de entender el lenguaje utilizado en el texto.

Con respecto a la metodología, el cuestionario fue suministrado al mismo tiempo a las tres clases con una tabla de los 500 primeros números primos y una tabla de los 500 primeros números cuadrados. El tiempo disponible para los estudiantes fue de 120 minutos.

### 3 El análisis a-priori del comportamiento de los alumnos

Análisis clásico	Análisis fuzzy
S0: No entiende el problema	F01: Errores en la comprensión del texto; F02: Cálculos con el número primo 2;
S1: Sigue el método de ensayo y error	F11: Hace tentativos casuales; F12: Calcula sólo los primeros "10" casos; F13: Utiliza una técnica metodológica;
S2: Realiza cálculos aritméticos	F21: Calcula usando números primos y compuestos; F22: Calcula la diferencia entre cuadrados al azar; F23: Calcula la diferencia entre los cuadrados sucesivos;
S3: Generaliza sin utilizar el álgebra formal (caracteriza sólo algunas relaciones entre cálculos que se aproximan al uso de las variables, sin hacer la distinción entre un parámetro y una variable)	F31: Aproximación al uso de variable, considera algunos números primos grandes como generalización, pero no llega a una formalización general; F32: Aproximación al uso de variable, no considera números primos grandes, sólo el primer caso. No arriba a una formalización general;
S4: Generaliza aplicando el álgebra (da importancia a la función del parámetro)	F41: Escribe algunas formas algebraicas utilizando los parámetros; F42: Utiliza el parámetro en forma equivocada; F43: No atribuye el correcto valor al parámetro; F44: Realiza cálculos correctos con el parámetro;
S5: Responde "si"	F51: Responde "si" después de algunas pruebas;



	F52: Responde “si” después de muchas pruebas;
S6: Responde "no"	F61: Responde “no” después de algunas pruebas;
	F62: Responde “no” después de muchas pruebas;

#### 4 Análisis de datos: la diferencia de evaluación entre la lógica binaria y la lógica “Fuzzy”

Los siguientes gráficos son los más significativos que hemos obtenido en la fase experimental. Presentamos dos modos distintos de “leer” los resultados obtenidos para validar la hipótesis original: uno es el punto de vista de la lógica binaria y el otro es el de la lógica “Fuzzy”. Los datos analizados con el software CHIC dan en los dos casos estudiados resultados muy diferentes. Repetimos que mientras el primer análisis “a-priori” valida la hipótesis original, el segundo la falsifica. El análisis de los resultados hecho con la lógica “Fuzzy” tiene en cuenta diferentes “tipologías de comportamientos”:

	S1: Ensayo y error			S3: Generalización sin usar álgebra formal (solo algunas relaciones entre el cálculo que se aproxima al uso de las variables)	
	F11	F12	F13	F31	F32
Alumno 1	0,00	0,33	0,90	0,00	0,67
Alumno 2	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00
Alumno 3	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00
Alumno 4	0,00	0,00	0,50	0,33	0,00
Alumno 5	0,00	0,33	0,50	0,00	0,00
Alumno 6	0,00	0,33	0,50	0,00	0,00
Alumno 7	0,00	0,33	0,00	0,00	0,00
Alumno 8	0,00	0,33	0,50	0,00	0,00
Alumno 9	0,17	0,00	0,50	0,00	0,90
Alumno 10	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00
Alumno 11	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00
Alumno 12	0,00	0,33	0,90	0,00	1,00

Con respecto a los resultados obtenidos por los alumnos que asisten al primer año de la escuela secundaria, nombramos la comparación de los resultados encontrados en las tres escuelas consideradas. El siguiente árbol de similitud corresponde a la escuela superior “Galileo Galilei” y los datos han sido analizados con la lógica binaria. Este árbol muestra que las estrategias S0-S1-S2, relativas al proceso de ensayo y error, son consideradas similares por el software CHIC, a la estrategia algebraica (S3) que se refiere a la manipulación de las fórmulas.

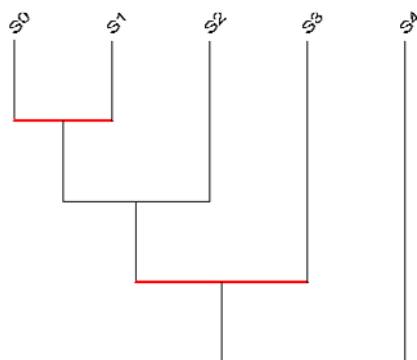


Fig. 1: *Árbol binario de Similitud de la escuela secundaria “Galileo*

Tal vez esta interpretación dependa del hecho de que el *modus operandi* “ensayos y errores” se puede considerar tanto una estrategia aritmética como una pura manipulación de letras que no tiene nada en común con la formalización algebraica. Dejamos este resultado como un problema abierto que será objeto de una futura investigación. Hemos realizado un análisis más detallado de este fenómeno utilizando la lógica “Fuzzy” que muestra un árbol de similitud radicalmente cambiado y “describe” el gráfico anterior (Figura 2).

La primera similitud importante es la unión entre F11 y F12: los alumnos intentan resolver el problema al azar, mediante ensayos y errores, después de muchas pruebas, ellos no son capaces de encontrar una regla general entonces abandonan el problema. Los resultados encontrados en el gráfico precedente (S1-S3) se presentan también en este árbol “fuzzy” de similitud, en F13-F31. Los estudiantes intentan formalizar el problema propuesto, pero encuentran ciertas dificultades para trabajar en un ambiente formalizado, así que reconsideran, como ayuda a su razonamiento, las estrategias aritméticas. Esto es evidente en los

protocolos, donde reconsideran algunas secuencias de números primos grandes como casos particulares de su razonamiento. Formalizar es para ellos considerar que una propiedad es verdadera cuando se toman en cuenta muchos números naturales grandes.

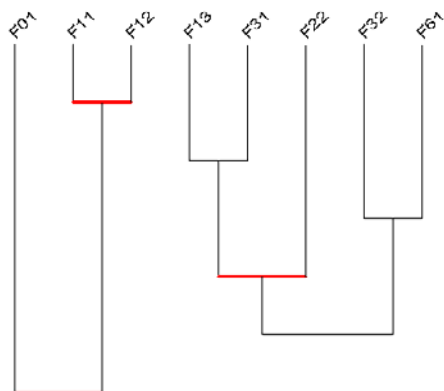
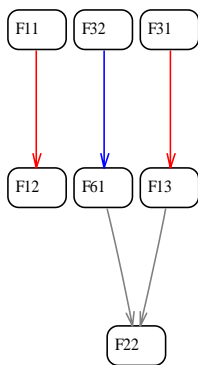


Fig. 2: Árbol "fuzzy" de similitud de la escuela secundaria "Galileo"

Respecto a este comportamiento podríamos dar dos interpretaciones diferentes:

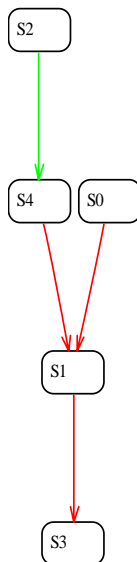
- Para demostrar la verdad del enunciado *sui generis* del problema propuesto, el alumno considera un proceso de inducción *sui generis*, tiene en cuenta los ejemplos presentados en el texto del problema propuesto como cantidades iniciales y piensa que la descomposición de un número primo como diferencia de dos cuadrados, puede ser verdadera para todos los números primos, si ellos son capaces de verificarlo para algunos números grandes.
- El alumno razona por abducción (de acuerdo con Peirce) porque cree que verificando la verdad de la proposición para un pequeño conjunto de números primos grandes, entonces el enunciado resulta verdadero para todos los números primos

La unión entre (F13-F31)-F22 muestra que los estudiantes no son capaces de formalizar todo el asunto porque ellos están condicionados por la estrategia de ensayo y error. El análisis del gráfico implicativo parece confirmar nuestra interpretación de los protocolos.



Las implicaciones  $F31 \Rightarrow F13$  y  $F11 \Rightarrow F12$  son válidas al 99 %; la implicación  $F32 \Rightarrow F61$  es, en cambio, válida al 95 %; y la implicación  $F61-F13 \Rightarrow F22$  es válida al 60 %.

El siguiente gráfico binario implicativo evidencia un interesante elemento de análisis para la investigación.



En efecto, las implicaciones diferentes  $S2 \Rightarrow S4$  (al 99 %) y  $S1 \Rightarrow S3$  (al 90 %) son pertinentes.

No obstante, no es fácil argumentar estas implicaciones. ¿La implicación entre las variables S2 y S4 no es un resultado inesperado, pero cómo la hemos interpretado en términos de pensamiento algebraico?

La variable S4, aún bien definida [*generaliza usando el álgebra (no considera el rol del parámetro)*], nos da un amplio rango para la evaluación y la codificación de las respuestas de los alumnos en términos de verdadero/falso. Por este motivo, pensamos que no da un resultado evidente.

En cambio, en el gráfico obtenido interpretando las variables con la lógica fuzzy, S2 y S4 desaparecen totalmente bajo nuestro falso razonamiento intuitivo debido al análisis binario.

La implicación entre las variables S1 y S3 se encuentra en los dos gráficos, pero en el gráfico binario la implicación es del tipo  $S1 \Rightarrow S3$ , mientras en el gráfico fuzzy es  $F31 \Rightarrow F13$ .

Creemos que esto significa que hay un tipo de relación biyectiva entre los campos S1 y S3 e inversamente entre las componentes fuzzy F31 y F13.

El gráfico de similitud fuzzy del Liceo Psico-Pedagógico “Finocchiaro Aprile”, muestra una conexión entre la estrategia F11 y F31. Esto nos muestra como los alumnos mientras prueban por ensayo y error, quieren comenzar una especie de generalización del problema, pero no logran una correcta representación, de este modo ellos lo resuelven en manera incorrecta.

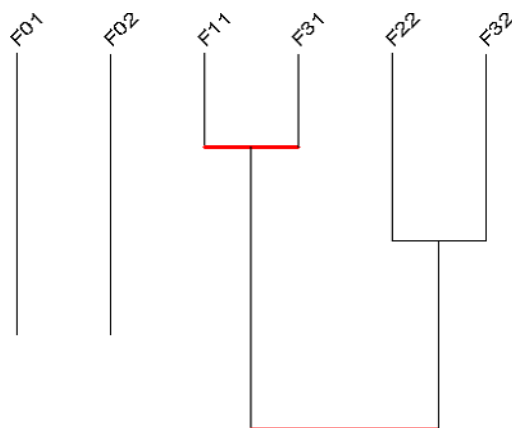


Fig. 3: *Árbol fuzzy de similitud de la escuela secundaria “Finocchiaro*

Con respecto a este tema, consideramos interesante subrayar como un análisis fuzzy nos permite evaluar las estrategias seguidas por los alumnos de una manera

más específica y profunda. En efecto, el análisis del árbol de similitud fuzzy anterior señala la presencia de una primera estrategia algebraica embrionaria (F31, F32). Es importante subrayar que esta estrategia no emerge en el primer análisis binario. Así que el análisis fuzzy muestra que la hipótesis básica no se puede validar totalmente, mientras ésta parece validada completamente en el análisis binario. Así mediante el análisis fuzzy emerge un primer pensamiento algebraico.

El análisis de los resultados obtenidos en la experimentación de la Escuela Secundaria Técnica Comercial "*Medi*" muestra un cierto paralelismo entre los comportamientos de los alumnos para afrontar el problema. De todos modos, algunos resultados obtenidos parecen imprevistos (ya que se espera un mínimo de pensamiento algebraico) comparados con los resultados de la escuela secundaria "*Finocchiaro Aprile*", considerando que la matemática no es prominente entre las disciplinas del curso. Esto es evidente en el siguiente árbol de similitud fuzzy del segundo año.

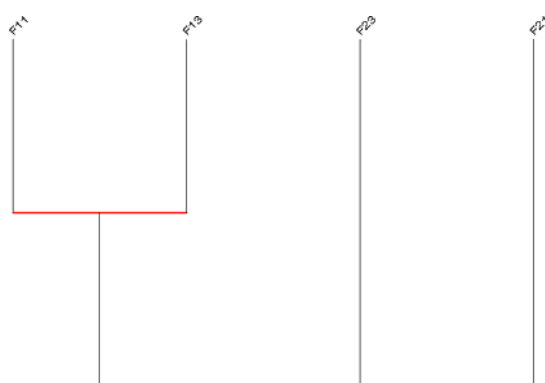
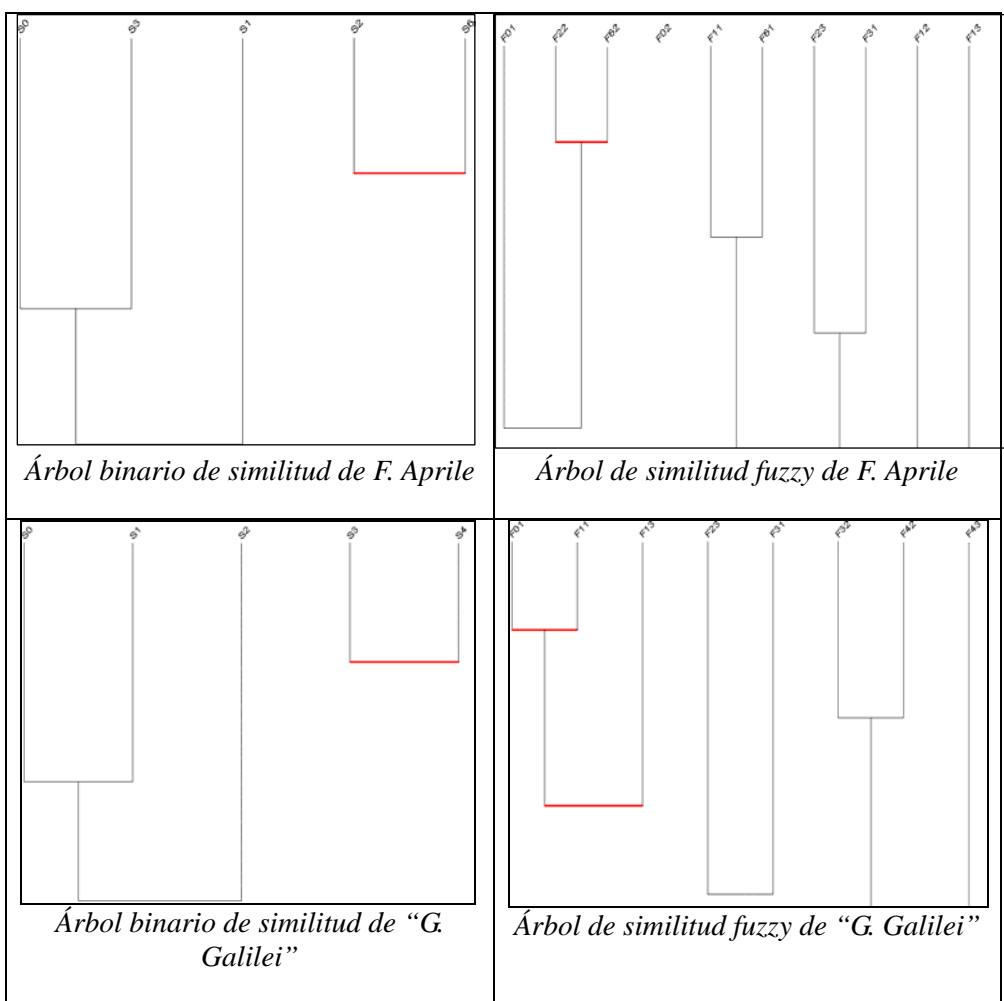


Fig. 4: *Árbol fuzzy de similitud del ITC "Medi"*

Los resultados más interesantes de la experimentación son aquellos obtenidos por los alumnos del tercer año de la escuela secundaria. Así que, una comparación entre los resultados obtenidos en las escuelas secundarias "*Galileo Galilei*" y "*Finocchiaro Aprile*" mediante el árbol de similitud, no sólo muestra dos tipos diferentes de planes de estudios, sino también las diferencias interesantes entre las habilidades de los estudiantes, relativas al grado de formalización de una propiedad matemática, es decir su primera competencia algebraica.

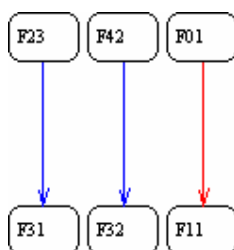
Una investigación sobre la formalización que hacen los alumnos...



Así, el árbol de similitud del primer año de la escuela secundaria "Finocchiaro Aprile" permite constatar no sólo que el razonamiento aritmético no conduce a la generalización requerida (S2-S6), sino también que las estrategias aritméticas están completamente separadas de las algebraicas. El árbol de similitud fuzzy nos permite afirmar que la relación entre S2 y S6 del árbol binario de similitud está especificada en F22-F26. Los estudiantes, calculando al azar las diferencias entre

los cuadrados, no encuentran ninguna regla general, a pesar del número grande de pruebas que realizan. La respuesta negativa a las preguntas del test está respaldada por un número adecuado de cálculos, que no son suficientes para conducir a los alumnos a una generalización. Otra observación interesante es la similitud entre F11 y F61. En efecto, algunos estudiantes dan la misma respuesta negativa después de haber hecho algunos cálculos al azar. Se puede observar que estos resultados no se obtienen con el análisis clásico binario.

Los resultados obtenidos en la escuela secundaria "G. Galilei" son diferentes. El *árbol binario de similitud* muestra una "nueva" variable que no está presente en los otros árboles binarios de similitud: la variable referida al uso del *parámetro* y así a un "uso" más concreto y correcto del pensamiento algebraico. La *"interpretación binaria"* revela una profunda similitud entre S3 y S4, estrategias algebraicas para resolver el problema. La *"interpretación fuzzy"* nos permite especificar, como se deduce del siguiente gráfico implicativo, esta unión entre F32 y F42.



Aproximándose al uso de variable, los estudiantes no consideran algunos números primos grandes como casos de estudio, ya que usan sólo el "primer" caso de las pruebas efectuadas ( $F42 \Rightarrow F32$ , implicación válida al 90 %).

Ellos pusieron el parámetro, pero de una manera errónea (en la forma) y de este modo no llegan a una formalización general.

## 5 Problemas abiertos

La experimentación, por medio del análisis fuzzy, evidencia que la mayoría de los alumnos, excepto dos en una muestra de casi 100 estudiantes, no fueron capaces de formalizar un problema sobre la teoría elemental de números, porque no estaban acostumbrados a usar las nociones de *variable* y *parámetro*. De este modo, un problema abierto es elaborar planes de estudios en la escuela secundaria que



profundicen este tema, para que los alumnos sean capaces de efectuar generalizaciones sin caer en la trampa de una evidencia con números pequeños.

### **Bibliografía**

- Chiarugi, I.; Fracassina, G.; Furinghetti, F.; Paola, D. (1995). *Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 18B, 1, pp. 34-50.
- Gras, R. et al. (1996). *L'implication statistique (Nouvelle méthode exploratoire de données)*, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Gras, R. (1997). *Metodologia di analisi di indagine*, Quaderni di Ricerca Didattica, 7, pp. 99-109.
- Gras, R. (2000). *I fondamenti dell'analisi statistica implicativi*, Quaderni di Ricerca Didattica, 9, pp. 189-209.
- Gras R.; Spagnolo F. (2004). *Fuzzy implication through statistic implication: a new approach in Zadeh's Classification*, Fuzzy Information, 2004. Processing NAFIPS '04., pag. 425- 429 Vol.1.

### **Anexo 1**

El test utilizado en la investigación es el siguiente:

#### TEST

Nombre ..... Clase .....

Observa los siguientes ejemplos:

$$5 = 1^2 + 2^2$$

$$13 = 2^2 + 3^2$$

$$17 = 1^2 + 4^2$$

Di Paola et al.

Como sabes 5, 13 y 17 son números primos. ¿Es posible escribir todos los números primos (excepto el 2) de esta manera también? ¿Puedes encontrar una regla? Justifica la respuesta.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# Tratamiento de datos, lógica y estadística elemental en la enseñanza preuniversitaria. Un estudio mediante la aplicación del CHIC

Larisa Zamora Matamoros\*, Isabel Alonso Berenguer\*  
Alexander Gorina Sánchez\*, Mailyn Álvarez Caneda\*  
Pilar Orús Báguena\*\*

\*Departamento de Matemática. Facultad de Matemática y Computación.  
Universidad de Oriente. Cuba.  
([larisa,ialonso,gorina,mailyn@csd.uo.edu.cu](mailto:larisa,ialonso,gorina,mailyn@csd.uo.edu.cu))

\*\*Departamento de Matemáticas. Escuela de Tecnología y Ciencias  
Experimentales.  
Universidad Jaume I. España.  
orus@mat.uji.es

**Resumen.** En el trabajo se realiza un estudio sobre las habilidades que poseen estudiantes de 10<sup>mo</sup> y 11<sup>no</sup> grado de la enseñanza preuniversitaria, para el trabajar simultáneamente la lógica, la estadística elemental y el tratamiento de datos binarios. Este estudio extiende los trabajos de Orús (Orús 1992, 2005) y Pitarch (Pitarch, 2002), utilizando la misma metodología de obtención y tratamiento de datos con un cuestionario semejante. Esta analogía permite comparar los resultados de Cuba con aquellos que han sido ya obtenidos en Francia en la enseñanza primaria y en España en la enseñanza secundaria. El trabajo de análisis de datos se realizó también con la ayuda del programa CHIC, como los trabajos precedentes.

## 1 Introducción

Numerosos investigadores se han referido a la importancia de formar una cultura estadística en la sociedad para potenciar su desarrollo, tal es el caso de Batanero (Batanero, 2003), quien ha planteado que la Estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos,

que con frecuencia aparecen en los medios informativos. También es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan conocimientos básicos del tema y su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.

Todo lo anterior pone de manifiesto la necesidad de realizar investigaciones encaminadas a perfeccionar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Al respecto se han realizado varios estudios y planteado numerosas direcciones de trabajo, como la de Batanero (Batanero, 1999), quien expuso en la *Conferencia Internacional Experiencias y Expectativas de la Enseñanza de la Estadística- Desafíos para el Siglo XXI*, el interés y viabilidad de introducir el Tratamiento de Datos en la enseñanza actual de la Estadística.

También Orús (Orús, 1992), contribuye a satisfacer esta necesidad de perfeccionamiento con su tesis doctoral, al introducir el trabajo lógico sobre tablas de datos en la enseñanza primaria.

Una investigación más reciente, que se encamina en esta dirección e integra las dos propuestas anteriores, es la realizada por Pitarch (Pitarch, 2002) y dirigida por Orús, la que analiza el razonamiento de los alumnos en la etapa educativa ESO, utilizando simultáneamente el Tratamiento de Datos, la Lógica y la Estadística Elemental. Precisamente los resultados de este trabajo se emplean en el presente estudio, como referentes para realizar un análisis similar en la enseñanza preuniversitaria, en dos institutos de la ciudad de Santiago de Cuba.

El presente trabajo tiene entonces como objetivo el estudio, con ayuda del sistema informático CHIC, de las habilidades que poseen estudiantes de 10<sup>mo</sup> y 11<sup>no</sup> grado de preuniversitario, para el trabajo simultáneo con aspectos esenciales de Tratamiento de Datos, Lógica y Estadística Elemental, así como la comparación de los resultados con los obtenidos en la referida investigación, realizada con estudiantes de la ESO en España.

## **2 Análisis de los programas de Matemática de la enseñanza preuniversitaria en Cuba**

Según análisis valorativo hecho sobre los actuales programas de las asignaturas Matemáticas de la enseñanza preuniversitaria cubana y los resultados del diagnóstico realizado por Zamora y Alonso (Zamora y Alonso, 2006), se pudo constatar que a partir del curso 2004-2005 se incorporan contenidos de Estadística al programa de décimo grado y en el curso 2005-2006 al programa de duodécimo. A partir de este mismo diagnóstico, las autoras pudieron confirmar que dichos programas no contemplan explícitamente el Tratamiento de Datos y que los

contenidos de la Estadística Descriptiva se imparten empleando métodos tradicionales, concluyéndose que la enseñanza de la Estadística en Cuba presenta, desde el punto de vista de su diseño curricular, dificultades similares a las planteadas por Pitarch (Pitarch, 2002). Para corroborar esto, en la presente investigación se dará cumplimiento al objetivo trazado aplicando la misma metodología empleada en la investigación realizada con estudiantes de la ESO en España.

### **3 Elaboración de la tabla de datos T**

Para dar inicio a la investigación se elaboró un cuestionario que tuvo como propósito la obtención de información primaria que permitiese modelar el trabajo lógico y estadístico, así como el tratamiento de los datos. Dicho cuestionario se centró en la indagación a 108 estudiantes de 11<sup>no</sup> grado de dos preuniversitarios de la ciudad de Santiago de Cuba (cuyas edades oscilan entre 15 y 17 años) sobre sus gustos por determinadas asignaturas y carreras. Del análisis, de los resultados de este cuestionario se obtuvo una tabla (T) de dimensión 20x21, en la cual las filas representan las preguntas y las columnas a los estudiantes, los que han sido codificados por  $E_i$ , con  $i=1, \dots, 21$ .

Para determinar las dimensiones de la tabla T se tuvo en cuenta la experiencia de la investigación desarrollada por Pitarch y Orús, con estudiantes de los dos ciclos de la ESO, en la cual se obtuvo un 97% de éxito en la lectura y manipulación elemental de la misma, con una dimensión de 15x20. También se consideró el hecho de que la presente experimentación se aplicaría solamente a estudiantes de niveles equivalentes al 2do ciclo de la ESO. Por todo lo anterior se aumentó la dimensión de dicha tabla a 20x21.

Una vez conformada la tabla 1, se requirió de la preparación del cuestionario de la experimentación, para lo cual se tomó como base el cuestionario Q empleado para los estudiantes de la ESO, al cual se le realizaron algunas modificaciones no significativas, ya que existía la pretensión de comparar los resultados que se obtuvieran con los alcanzados en España.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21		
<b>ASIGNATURAS</b>	Te gusta la Matemática?	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	
	Te gusta el Español y la Literatura?	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	
	Te gusta la Historia?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Te gusta la Geografía?	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
	Te gusta el Inglés?	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
	Te gusta la Física?	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
	Te gusta la Química?	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
	Te gusta la Biología?	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Te gusta la Computación?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Te gusta la Cultura Política?	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
	Te gusta la Educación Física?	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
	Te gusta la Preparación Militar?	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0
	<b>CARRERAS</b>	Te gustaría estudiar Medicina?	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
Te gustaría estudiar Matemática?		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
Te gustaría estudiar Informática?		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	
Te gustaría estudiar Idioma?		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Te gustaría estudiar Historia?		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
Te gustaría estudiar Cultura Física?		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	
Te gustaría estudiar una Carrera Militar?		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
Te gustaría estudiar alguna Ingeniería?		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	

Tab. 1: *Tabla T*

#### 4 Modificaciones realizadas al cuestionario

Para tomar las decisiones sobre los cambios a efectuar, se procedió a aplicar el programa informático CHIC (Gras, 1992) a la tabla 1, tomando como elementos de análisis estadístico a los 21 jóvenes y sus gustos por 12 asignaturas y 8 carreras o profesiones.

A partir de los índices de proximidad, de los de intensidad de la implicación y de cohesión entre los jóvenes, asignaturas y carreras, se decidió realizar los siguientes cambios al cuestionario (ver cuestionarios en anexo #1):

- Eliminar la cuestión Q8, pues se consideró que podría confundir al estudiante y además, en esencia, coincidía con la Q12.

- Sustituir la cuestión Q9 por la pregunta P8, la cual tiene implícito el nivel de complejidad de Q9 y se le introduce uno nuevo, la condicional.
- Adicionar la pregunta P16, que da la posibilidad de medir la habilidad del estudiante para establecer un criterio de clasificación sobre la base de la ocurrencia de un evento, además de emplear la operación de conjunción.
- Adicionar a la cuestión Q21 un nivel mayor de complejidad, donde el estudiante debe buscar las carreras que más gustan y ordenarlas.

Realizadas las adecuaciones pertinentes al cuestionario (ver anexo #1), se procedió a la confección de la matriz a priori (MAP), para lo cual se empleó la caracterización de cada una de las preguntas, teniendo en cuentas las diferentes operaciones que tienen que emplear los estudiantes al responderlas y que se describen a continuación:

**TABL:** Utilizar un elemento concreto de la tabla, para responder a la pregunta.

**TFIL:** Utilizar una o varias filas para responder a la pregunta.

**TCOL:** Utilizar una o varias columnas para responder a la pregunta.

**ROBL:** Enumerar de forma obligatoria una cantidad concreta (presencia: 1, ausencia de carácter: 0).

**RALT:** Enumerar de forma alternativa una cantidad concreta (presencia: 1, ausencia de carácter: 0).

**CFIL:** Comparar filas.

**CCOL:** Comparar columnas.

**FDIF:** Tener en cuenta las diferencias entre filas/columnas.

**FCOI:** Fijarse en las coincidencias (tanto las co-presencias: 1-1, como en las co-ausencias: 0-0).

**FPRE:** Fijarse únicamente en las co-presencias.

**FAUS:** Fijarse únicamente en las co-ausencias.

**CSEM:** Comparar entre los criterios de la tabla (filas), a partir de la posible relación semántica que existe entre las asignaturas y entre las carreras.

**LIMP:** Implicación lógica.

**LEXI:** Cuantificador existencial.

**LUNI:** Cuantificador universal.

**LCON:** Conector lógico conjunción.

**LDIS:** Conector lógico disyunción.

**LNEG:** Conector lógico negación.

**EFIM:** Aplicar implícitamente la frecuencia absoluta.

**EFEX:** Aplicar explícitamente la frecuencia absoluta.

**Efre:** Aplicar explícitamente la frecuencia relativa.

**EPER:** Aplicar explícitamente el porcentaje.

**EMIM:** Utilización implícita de la medida de centralización: la moda.

**ARGU:** Razonar en la respuesta.

## 5 Trabajo con la matriz a priori MAP

Una vez conformada la matriz a priori (ver anexo #2), se le aplicó el sistema informático CHIC, para la determinación del árbol de similaridad, el árbol jerárquico y el grafo implicativo, obteniendo los resultados que se detallan a continuación:

Según se puede observar en la figura 1, en este árbol se forman las siguientes clases de cuasi equivalencia:

$$C1 = \{P1, P2, P3, P8, P9, P10, P21\}, C2 = \{P4, P4.1, P5, P6, P7, P7.1\}, \\ C3 = \{P11, P12, P13, P15, P16, P20\}, C4 = \{P14, P17, P18, P19\}.$$

La clase C1 contiene cuatro nodos significativos a los niveles 1, 3, 6 y 19. Dicha clase agrupa preguntas que se caracterizan por un recuento obligatorio por filas, contenidos elementales de Estadística (P8 y P21), y operaciones lógicas, conjunción (P8) y disyunción (P21), por lo que se puede concluir que la clase C1 agrupa preguntas que involucran actividades enumerativas.

La clase C2 presenta un nodo significativo al nivel 12, el cual agrupa a las preguntas (P4, P4.1) y P6, las que se caracterizan por realizar recuentos alternativos, contenidos elementales de estadística y operaciones lógicas empleando los cuantificadores universal y existencial, por lo que se puede concluir que esta clase comprende cuestiones abiertas que requieren del trabajo con toda la tabla y el empleo de diversas estrategias de búsqueda sobre la misma.

En la clase C3 aparecen dos nodos significativos, a los niveles 14 y 16, que involucran a todas las preguntas de la clase, las que se caracterizan por trabajar las coincidencias por columnas, salvo la P12 que trabaja las diferencias por columnas, de manera que dicha clase queda caracterizada en cuanto al trabajo sobre la proximidad entre los sujetos.

La clase C4 posee un nodo significativo al nivel 8, que involucra las preguntas P14 y P19 que se caracterizan por la operación lógica de conjunción. Pertenecen



además a esta clase las preguntas P17 y P18 que contemplan la operación de implicación lógica, por lo que dicha clase se caracteriza por las actividades lógicas: conjunción e implicación.

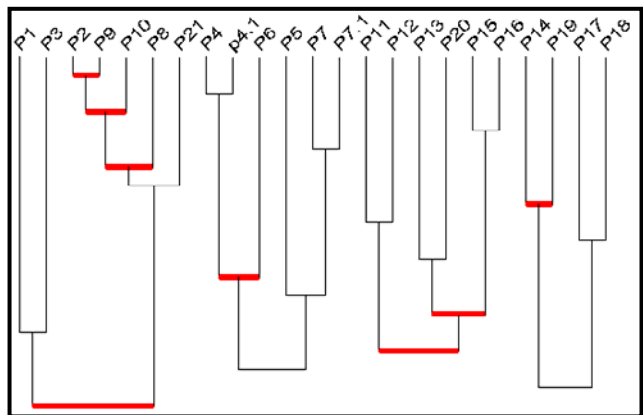


Fig. 1: *Árbol de similaridad de la matriz a priori*

Aplicando nuevamente el CHIC a la matriz a priori, para realizar ahora el análisis de cohesión implicativo, se obtiene el árbol jerárquico (figura 2) y el grafo implicativo (figura 3), que se muestran a continuación:

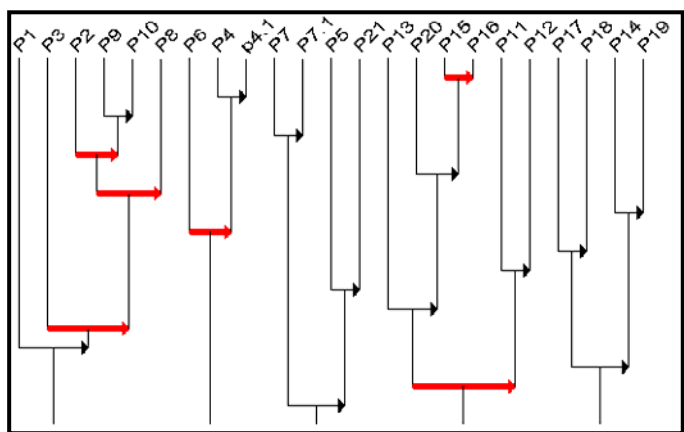


Fig. 2: *Árbol jerárquico de la matriz a priori*

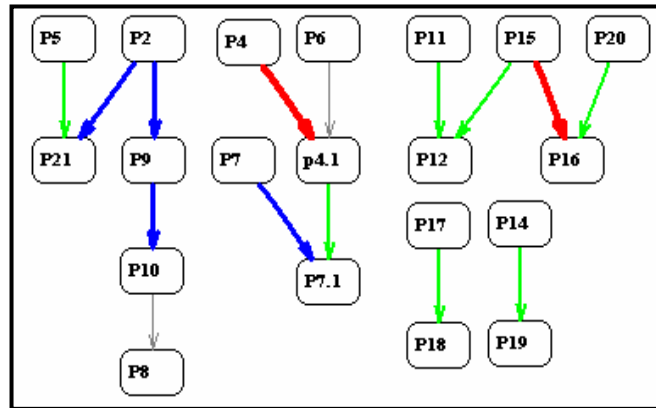


Fig. 3: Grafo implicativo de la matriz a priori

En estas figuras podemos apreciar que aparecen implicadas preguntas que en el árbol de similaridad ya estaban próximas con nivel significativo importante:

Las preguntas que conformaban la clase C1 del árbol de similaridad siguen estando agrupadas en este árbol jerárquico como se muestra a continuación:

$$P3 \rightarrow \left\{ \left\{ \left\{ P2 \rightarrow \left\{ P9 \rightarrow P10 \right\} \right\} \right\} \rightarrow P8 \right\},$$

Nivel 14      Nivel 5      Nivel 7

con excepción de la P21. Estas implicaciones se conservan en el grafo implicativo.

La segunda clase del árbol de similaridad aparece dividida en dos subclases en el árbol jerárquico:  $P6 \rightarrow \{P4 \rightarrow P4.1\}$  y  $\{P7 \rightarrow P7.1\} \rightarrow \{P5 \rightarrow P21\}$  sin existir entre ellas cohesión implicativa, pero quedando implicadas en el grafo implicativo.

Las preguntas que aparecen agrupadas en la tercera y cuarta clase del árbol de similaridad, se mantienen agrupadas de igual forma en el árbol jerárquico de cohesión, como se muestra a continuación:

$$C3: \left\{ P13 \rightarrow \left\{ P20 \rightarrow \left\{ P15 \rightarrow P16 \right\} \right\} \rightarrow \left\{ P11 \rightarrow P12 \right\} \right\},$$

Nivel 1      Nivel 17

$$C4: \{P17 \rightarrow P18\} \rightarrow \{P14 \rightarrow P19\}.$$

Estas implicaciones, para el caso de la clase C3, se conservan en el grafo implicativo, no así para C4, en el que las subclases que se forman, quedan aisladas.

Una vez concluido el análisis de la matriz a priori, mediante el CHIC, se ha observado que en esencia se mantienen las relaciones obtenidas por Pitarch y Orús, coincidiendo con lo previsto.

## 6 Análisis de los resultados del cuestionario

El cuestionario fue aplicado en los preuniversitarios “Cuqui Bosch” y “Rafael María de Mendive”, los cuales no presentan características educativas especiales y por ello han sido considerados como una muestra de los preuniversitarios de la ciudad.

En este nivel educativo se imparten tres grados, de los cuales, teniendo en cuenta las preguntas formuladas en el cuestionario inicial y el interés en los resultados de la misma, sólo se consideraron los grados 10<sup>mo</sup> y 11<sup>no</sup>, ya que los estudiantes del 12<sup>mo</sup> grado en los momentos de la aplicación del cuestionario ya habían optado por carreras universitarias de su preferencia y su inclusión podría alterar los resultados. La muestra total fue de tamaño 102 y la afijación empleada fue la proporcional al tamaño de la población.

Partiendo de las respuestas dadas por los 102 estudiantes al cuestionario, se conformó una nueva matriz, denominada matriz a posteriori, que consta de 102 filas, correspondientes a los alumnos encuestados y de 131 columnas, correspondientes a las caracterizaciones realizadas a las 23 preguntas del cuestionario, las que se detallan a continuación:

- C:** Contestar a la pregunta.
- J:** Contestar a la pregunta correctamente.
- r:** Razonar en la respuesta de la pregunta.
- R:** Razonar correctamente la respuesta.
- G:** Responder que no se coincide en el gusto por la asignatura o carrera.
- M:** Responder comparando con la asignatura o carrera que gusta a todos los estudiantes de la encuesta: utilizan la moda estadística de forma implícita.
- S:** Responder utilizando una opinión personal o subjetiva del estudiante que contesta.
- N:** Contestar de forma explícita que el estudiante no sabe responder a la pregunta.
- H:** Contestar que esta pregunta es la misma (homóloga) que la anterior. Lo indican explícitamente.
- O:** Responder igual que a la pregunta anterior, pero omitiendo el comentario de que “las dos preguntas son la misma”.

Por limitaciones de espacio dicha matriz no se incluirá en el presente trabajo, ni se realizará el análisis completo de los resultados obtenidos en la misma, limitando éste a las respuestas correctas a las preguntas del cuestionario, sin tener en cuenta la parte relativa al razonamiento.

En cuanto a los resultados de los preuniversitarios, en la figura 4 se muestran los porcentajes de respuestas correctas.

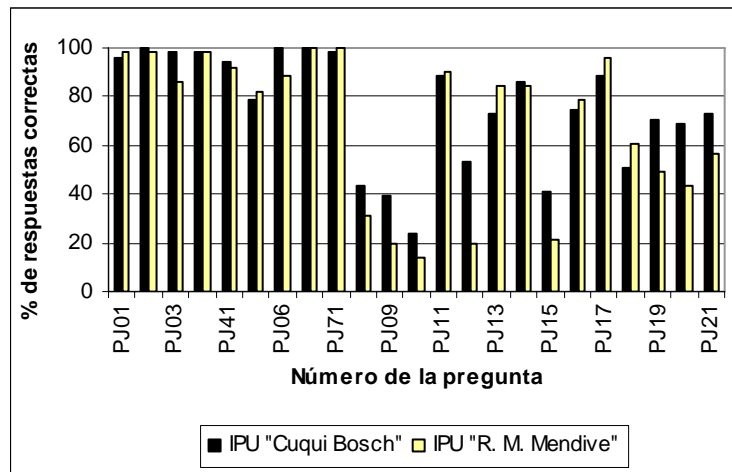


Fig. 4: Porcentaje de respuestas correctas por preuniversitarios

Como se puede observar, las preguntas con mayores dificultades fueron P8, P9, P10, P21, relacionadas con actividades enumerativas, las P12, P15, P20, que abordan la proximidad entre sujetos y las P18 y P19 que se vinculan a operaciones lógicas. Justamente es en las citadas preguntas donde se localizan las mayores diferencias entre los preuniversitarios.

Con respecto a los grados  $10^{\text{mo}}$  y  $11^{\text{no}}$ , las diferencias más significativas (de más del 10%) se presentan en estas mismas preguntas, a las que se adicionan la P5 y P13. Al observar la figura 5 puede comprobarse que en todas estas preguntas los porcentajes más bajos se obtuvieron en  $10^{\text{mo}}$  grado.

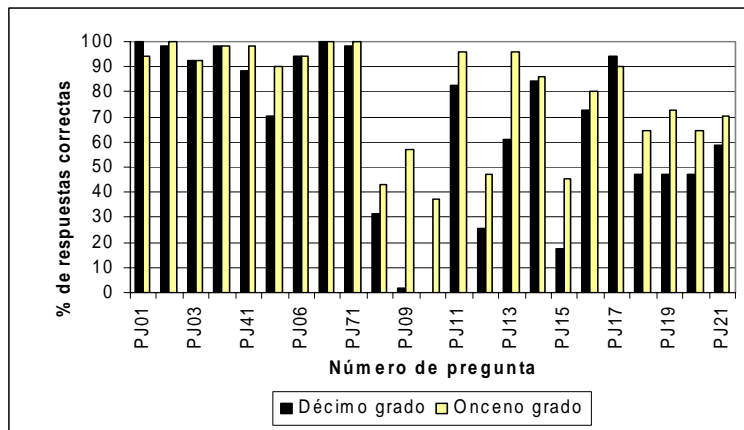


Fig. 5: Porciento de respuestas correctas por preuniversitarios

### 7 Trabajo con la matriz a posteriori

El árbol de similaridad, que se muestra a continuación (Ver figura 6), fue obtenido al aplicar el sistema informático CHIC a la submatriz de dimensión 102x23, extraída de la matriz a posteriori al considerar solamente las respuestas correctas.

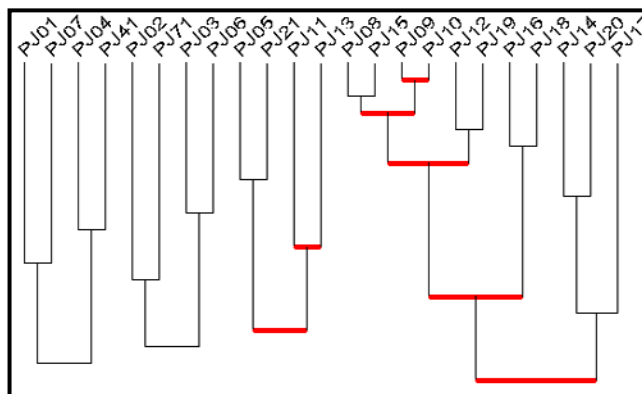


Fig. 6: Árbol de similaridad de una submatriz de la matriz a posteriori

En el mismo se puede observar que se forman cuatro clases de cuasi equivalencias, las tres primeras incluyen aquellas preguntas que han tenido un porcentaje alto de respuestas correctas, exceptuando a P13 y P21. En las dos primeras clases el porcentaje de respuestas correctas es mayor que en la tercera. La cuarta clase agrupa aquellas preguntas que tuvieron un porcentaje bajo, exceptuando la P14 y P17 y aparece dividida en dos subclases, conteniendo la primera los tres nodos más significativos.

Por otro lado, en el grafo implicativo, figura 7, se puede apreciar que las implicaciones más significativas se encuentran entre las preguntas de la cuarta clase, que es a su vez la más significativa a nivel de proximidades

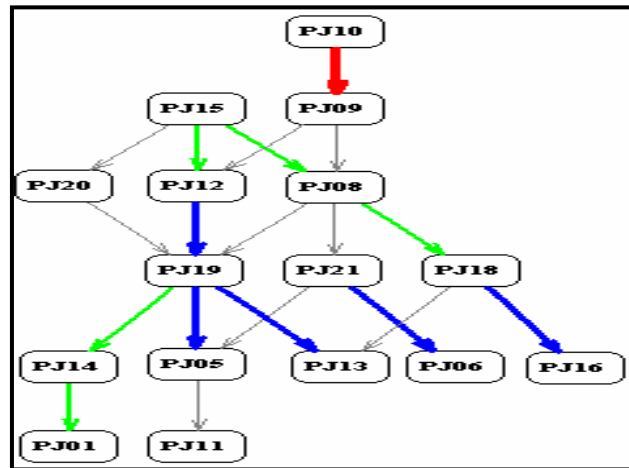


Fig. 7: Grafo implicativo de una submatriz de la matriz a posteriori

Las preguntas que no quedan relacionadas en el grafo implicativo, P2, P3, P4, P4.1, P7, P7.1 y P17, son las que forman parte de las dos primeras clases de cuasi equivalencia, con excepción de la pregunta P1 que si aparece implicada a un 85%.

En este grafo aparecen varias cadenas de preguntas que quedan implicadas estadísticamente. Se observa que si el estudiante sabe responder correctamente a la pregunta P10 y P15, sabrá responder al resto de las preguntas que aparecen en el grafo. Constatándose que los estudiantes que tienen habilidades para trabajar con los conocimientos elementales de estadística (frecuencias relativa y absoluta) son capaces de responder el resto de las preguntas implicadas.

## 8 Análisis de los resultados de las respuestas al cuestionario en relación con las operaciones definidas a priori

En la tabla 2 se muestran los porcentajes de respuestas correctas a las preguntas P1, P2 y P3, las cuales exigían una manipulación mínima de la tabla.

	IPU "Rafael M. de Mendive"		IPU "Cuqui Bosch"		Total por grados		Total
	10mo	11no	10mo	11no	10mo	11no	
<b>P1</b>	100,00	96,00	100,00	92,31	100,00	94,16	97,08
<b>P2</b>	96,15	100,00	100,00	100,00	98,07	100,00	99,04
<b>P3</b>	84,62	88,00	100,00	96,15	92,31	92,08	92,19
<b>Total</b>					96,80	95,41	<b>96,10</b>

Tab. 2: Porcentajes de respuestas correctas a las preguntas P1, P2 y P3.

Como se puede observar, el 96,10% de los estudiantes ha tenido éxito en la lectura y manipulación elemental de la tabla, lo que está muy próximo al 97% obtenido en la experimentación desarrollada en la ESO de España. Sin embargo, estos resultados no son suficientes para afirmar que la tabla es totalmente manejable por los estudiantes de 10<sup>mo</sup> y 11<sup>no</sup> grados de preuniversitario, ya que en la pregunta P13, que exige un manejo completo de ella, se obtuvo un 78,4% de respuesta correcta.

En la tabla 3 se muestran las preguntas que implican un recuento obligatorio, así como los porcentajes de respuestas correctas. De la misma se puede observar que sólo el 57,19% de los estudiantes muestran habilidades para desarrollar estas operaciones. Sin embargo, resalta el hecho de que en las preguntas P2 y P3, que exigen únicamente un recuento obligatorio, se han obtenido resultados superiores al 90%; no así en las restantes, que exigen un mayor nivel de complejidad. La situación más crítica se manifiesta en P10 que incluye el cálculo de frecuencia relativa. Estos resultados son similares a los obtenidos en el estudio de la ESO.

	P02	P03	P08	P09	P10	P12	P14	P15
<b>10mo</b>	98,04	92,16	31,37	01,96	0,00	25,49	84,31	17,65
<b>11no</b>	100,00	92,16	43,14	56,86	37,25	47,06	86,27	45,10
<b>Total</b>	<b>99,02</b>	<b>92,16</b>	<b>37,26</b>	<b>29,41</b>	<b>18,63</b>	<b>36,28</b>	<b>85,29</b>	<b>31,38</b>

	<b>P16</b>	<b>P19</b>	<b>P20</b>	<b>P21</b>	<b>Total</b>
<b>10mo</b>	72,55	47,06	47,06	58,82	<b>48,04</b>
<b>11no</b>	80,39	72,55	64,71	70,59	<b>66,34</b>
<b>Total</b>	<b>76,47</b>	<b>59,81</b>	<b>55,89</b>	<b>64,71</b>	<b>57,19</b>

Tab. 3: *Porcentajes de respuestas correctas a las preguntas que implican un recuento obligatorio.*

En cuanto a las operaciones de proximidad, los porcentajes de respuestas correctas a las preguntas P13, P15, P16 y P20 (que tratan las coincidencias) y P12 (que trata las diferencias) oscilan entre 31,38% y 78,43 (tabla 4). En general estos resultados son inferiores a los de la ESO.

	<b>Coincidencias y diferencias</b>				
	<b>P13</b>	<b>P15</b>	<b>P16</b>	<b>P20</b>	<b>P12</b>
<b>10mo</b>	60,78	17,65	72,55	47,06	25,49
<b>11no</b>	96,08	45,10	80,39	64,71	47,06
<b>Total</b>	<b>78,43</b>	<b>31,38</b>	<b>76,47</b>	<b>55,89</b>	<b>36,28</b>

Tab. 4: *Porcentajes de respuestas correctas a las preguntas que implican operaciones de proximidad.*

Con respecto a las operaciones lógicas (ver tabla 5) las preguntas que implican el empleo de los cuantificadores universal y existencial no presentan dificultades, no ocurriendo lo mismo con el resto de las operaciones. El porcentaje más bajo se presenta en la operación de conjunción por columna (P15). En el caso de P19, que es de la misma naturaleza que P14, el porcentaje bajo puede estar relacionado con el hecho de que la misma presenta un nivel mayor de complejidad al exigir la conjunción de variables negadas.

En cuanto a las operaciones de implicación lógica, la pregunta P17 muestra un alto nivel de respuestas correctas, no así la P18, que evalúa la misma implicación lógica, sólo que en sentido contrario. Esto pudiera indicar que existen dificultades en el razonamiento lógico de los estudiantes encuestados. Resultados análogos fueron obtenidos en el estudio de la ESO, aunque con menores porcentajes de éxito.



	Cuantif. univ. y exist.			Disy. y conj.				Implic. lógica	
	P04	P41	P06	P05	P14	P15	P19	P17	P18
<b>10mo</b>	98,04	88,24	94,12	70,59	84,31	17,65	47,06	94,12	47,06
<b>11no</b>	98,04	98,04	94,12	90,20	86,27	45,10	72,55	90,20	64,71
<b>Total</b>	<b>98,04</b>	<b>93,14</b>	<b>94,12</b>	<b>80,40</b>	<b>85,29</b>	<b>31,38</b>	<b>59,81</b>	<b>92,16</b>	<b>55,89</b>

Tab.5: *Porcentajes de respuestas correctas a las preguntas que implican operaciones lógicas, cuantificadores universal y existencial y de conjunción.*

Por último, los porcentajes obtenidos en las preguntas relacionadas con las operaciones estadísticas son muy bajos, P8 (37,26%), P9 (29,41%) y P10 (18,63%), al igual que los obtenidos en la ESO. Aquí hay que tener en cuenta que al igual que en el experimento de la ESO, al momento de aplicar la encuesta, los estudiantes de 10<sup>mo</sup> grado aún no habían recibido los contenidos de la Estadística Elemental, sin embargo, los porcentajes obtenidos por 11<sup>no</sup> grado son también muy bajos, a pesar de que si habían recibido dichos contenidos.

Resulta interesante la relación que se manifiesta entre los porcentajes de respuestas a las preguntas P8 y P10. La P8 exige implícitamente la realización de la operación declarada en P10, pero a un nivel mayor de complejidad, ya que además de determinarse la frecuencia relativa debe trabajarse con la condicional y calcularse el por ciento. Sin embargo, los resultados obtenidos en esta pregunta son mayores que en la P10, que sólo exige explícitamente el cálculo de la frecuencia relativa. Esto puede estar indicando que los estudiantes no se han apropiado del concepto de frecuencia relativa.

## 9 Conclusiones

El estudio realizado sobre las habilidades que poseen estudiantes de 10<sup>mo</sup> y 11<sup>no</sup> grado de preuniversitario, para el trabajo simultáneo con aspectos esenciales de Tratamiento de Datos, Lógica y Estadística Elemental, arrojó que las mayores dificultades se concentran en operaciones que involucran actividades enumerativas, proximidades y operaciones lógicas, observándose diferencias significativas entre los resultados de los dos preuniversitarios y entre los grados.

Al comparar los resultados obtenidos en este estudio con los de Pitarch y Orús en la ESO, se pudo comprobar que en ambos se manifiesta un resultado exitoso en

cuanto a la lectura y manipulación elemental de la tabla, así como que los porcentajes de éxitos y errores en cada una de las preguntas están muy próximos.

Para la obtención de los resultados de esta investigación, el empleo del sistema informático CHIC resultó ser un instrumento de gran valor, pues facilitó el perfeccionamiento del cuestionario, la caracterización de las preguntas según el tipo de operaciones a realizar y de las respuestas dadas por los estudiantes. Permitió además identificar asociaciones y estructuraciones entre las preguntas que posibilitaron profundizar en la interpretación de los resultados.

Para arribar a las conclusiones de este trabajo sólo se ha explotado la información correspondiente a las respuestas correctas, si bien los datos recopilados aportan mucha más que se aprovechará en lo adelante.

## **Bibliografía**

- Batanero, C. (1999). *Taller sobre análisis exploratorio de datos en la enseñanza secundaria*. Actas de la Conferencia Internacional “Experiencias e Expectativas do Ensino de Estatística- Desafios para o Século XXI”. Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 1999.
- Batanero, C. (2003). *Los retos de la cultura estadística*. Universidad de Granada, España. <http://www.ugr.es/local/batanero>, 2003.
- Couturier, R.; Bodin, A.; Gras, R. (2006). *Clasificación jerárquica, implicativa y cohesiva*. Manual de usuario del sistema informático CHIC, 2006.
- Gras, R. (2005). *Panorama du développement de l’ASI à partir de situations fondatrices*. In R. Gras, F. Spagnolo, and J. David (Eds.), *Actes des Troisièmes Rencontres Internationale ASI Analyse Statistique Implicative*, Volume Secondo supplemento al N.15 of Quaderni di Ricerca in Didattica, pp. 9–33. Palermo : Università degli Studi di Palermo
- Guerrero, C. (1999). *La importancia de la información a priori*. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas. N° 20, pp. 57-62, 1999.
- Guerrero, S. (1999). *Tratamiento de la información*. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas. N° 20, pp. 5-8, 1999.
- Orús, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d’une initiation à l’analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse présentée à l’Université de Bordeaux-I. (Ed: IREM de Bordeaux), 1998.
- Orús, P. ; Pitarch, I. (2000). *Utilisation didactique des tableaux des données et du logiciel CHIC à l’école élémentaire*. Actes des Journées sur La fouille dans les données par la méthode d’analyse statistique implicative. Caen, pp.85-98, 2000.

- Pitarch, I. (2002). *Estudio sobre la viabilidad y el interés didáctico del tratamiento de la información en la ESO*. Trabajo de investigación del tercer ciclo presentado en la Universitat Jaume I y dirigido por Pilar Orús Báguena. (Ed: UJI, Castellón), 2002.
- Zamora, L.; Alonso, I. (2006). *Metodología para la impartición de tópicos de Estadística y Probabilidades en la enseñanza preuniversitaria en Cuba*. Actas del RELME XX. Camaguey, Cuba, 2006.

### Anexo #1: Cuestionarios de las experimentaciones

CUESTIONARIO ORIGINAL Q	CUESTIONARIO ACTUAL P
Q1. ¿Al joven H le gusta el jazz?	P1. ¿Al estudiante E2 le gusta la asignatura Matemática?
Q2. ¿A cuántos jóvenes les gusta el flamenco?	P2. ¿A cuántos estudiantes les gusta la asignatura de Matemática?
Q3. ¿Cuántos tipos de música le gustan al joven Q?	P3. ¿Cuántas asignaturas le gustan al estudiante E10?
Q4. ¿Hay algún tipo de música elegida por todos los jóvenes? En caso afirmativo, indica cuáles:	P4. ¿Hay alguna asignatura que haya sido elegida por todos los estudiantes? En caso afirmativo, indique cuál
Q4.1 ¿Hay otras? En caso afirmativo, indica cuáles	P4.1 ¿Hay otras? En caso afirmativo, indique cuáles
Q5. Los jóvenes entrevistados ¿prefieren la música heavy o la música ska?	P5. Los estudiantes entrevistados ¿prefieren la asignatura de Matemática o la de Química?
Q6. ¿Hay algún joven a quien le guste todos los tipos de música? En caso afirmativo, indica su nombre:	P6. ¿Hay algún estudiante a quien le gusten todas las asignaturas? En caso afirmativo, indique su código.
Q7. ¿Existe alguna música más preferida que la música punk?	P7. ¿Existe alguna asignatura de mayor preferencia que la Matemática?
Q7.1 Si hay alguna, indícala y razona tu respuesta.	P7.1 Si hay alguna, indíquela y razone su respuesta.
Q8. Los jóvenes H y O, ¿prefieren el mismo tipo de música?	P8. ¿A qué porcentaje de los estudiantes que les gusta la asignatura de Biología, le gustaría estudiar la carrera de Medicina?
Q9. ¿A qué porcentaje de los jóvenes entrevistados les gusta la música rap?	

<p>Q10. Si consideramos - escoger la música máquina- como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta dirías que tiene en esta distribución estadística?</p> <p>Q11. ¿Y qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior?</p> <p>Contesta las siguientes cuestiones, razonando en todas tu respuesta:</p> <p>Q12. Los jóvenes R y N, ¿tienen el mismo gusto por la música? Porque ...</p> <p>Q13. ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los jóvenes C y E? Porque ...</p> <p>Q14. Encuentra, si puedes, tres parejas de jóvenes a quienes les guste el mismo tipo de música.</p> <p>Q15. ¿A cuántos jóvenes les gusta a la vez el flamenco y la música pop? Porque...</p> <p>Q16. ¿En cuántas respuestas de la encuesta están de acuerdo los jóvenes C y J? Porque</p> <p>Q17. A todos los jóvenes que les gusta la música dance ¿también les gusta el hardcore? Porque ...</p> <p>Q18. A todos los jóvenes que les gusta el hardcore ¿también les gusta la música dance? Porque ...</p> <p>Q19. ¿A cuántos jóvenes no les gusta ni el flamenco ni el pop? Porque ....</p> <p>Q20. El joven I ¿a quien se aproxima más en su gusto musical, al joven F o al joven D? Porque ...</p>	<p>P9. Si consideramos la asignatura de Física como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta diría usted que tiene en esta distribución estadística?</p> <p>P10. ¿Y qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior?</p> <p>P11. Los estudiantes E4 y E6, ¿tienen el mismo gusto por las carreras? ¿Por qué?</p> <p>P12. ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los estudiantes E10 y E15? ¿Por qué?</p> <p>P13. Encuentre, si puede, tres estudiantes a quienes les guste el mismo tipo de carrera.</p> <p>P14. ¿A cuántos estudiantes les gustan, a la vez, las asignaturas de Matemática y Computación?¿Por qué?</p> <p>P15. ¿En cuántas respuestas de la encuesta están de acuerdo los estudiantes E19 y E21?¿Por qué?</p> <p>P16. La semejanza en los gustos de los estudiantes E1 y E18, se puede clasificar como: Alta, Baja o Media. ¿Por qué?</p> <p>P17. A todos los estudiantes que les gusta la asignatura de Educación Física ¿también les gusta la asignatura de Preparación Militar?¿Por qué?</p> <p>P18. A todos los estudiantes que les gusta la asignatura de Preparación Militar ¿también les gusta la asignatura de Educación Física?¿Por qué?</p>
--	--

<p>Q21. A los jóvenes entrevistados ¿les gusta más la música heavy, el jazz o el reggae? Porque...</p>	<p>P19. ¿A cuántos estudiantes no les gusta ni la asignatura de Física ni la de Química? ¿Por qué?</p> <p>P20. ¿A quién se aproxima más en su gusto profesional el estudiante E4, al estudiante E17 o al E21? ¿Por qué?</p> <p>P21. Si usted tuviera que formar tres Sociedades Científicas a partir de los gustos profesionales (carreras) que los estudiantes han manifestado. ¿En que profesiones las formaría? Escríbalas en orden de prioridad.</p>
--	--

### Anexo #2: Matriz a priori MAP

	P1	P2	P3	P4	P4.1	P5	P6	P7	P7.1	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21
TABL	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
TFIL	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
TCOL	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
ROBL	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
RALT	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CFIL	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
CCOL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
FDIF	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
FCOI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
FPRE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
FAUS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
CSEM	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
LIMP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
LEXI	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
LUNI	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
LCON	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
LDIS	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
LNEG	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
EFIM	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
EFEY	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Efre	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EPER	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EMIM	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ARGU	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



# ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

Lidia Ortega Silva\*, Ismenia Guzmán Retamal\*\* y Arturo Mena Lorca\*\*

\* Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente

Universidad Tecnológica Metropolitana. Chile

[lortega@omega.utem.cl](mailto:lortega@omega.utem.cl)

\*\*Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas y Matemáticas  
Universidad Católica de Valparaíso. Chile

[iguzmanr@ucv.cl](mailto:iguzmanr@ucv.cl), [arturo.mena@ucv.cl](mailto:arturo.mena@ucv.cl)

**Resumen.** Frente a la baja calidad del aprendizaje de los estudiantes de cálculo en la Universidad, detectada mediante cuestionarios sobre los conocimientos de conceptos básicos en matemáticas, surgió la preocupación por saber cómo estaban enseñando los profesores estos contenidos. En el seminario de Didáctica Matemática del Instituto de Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso, IMA, se elaboró una encuesta dirigida a profesores de matemáticas de una institución. En este trabajo se presenta el tratamiento con CHIC de los resultados obtenidos sobre el tema de derivadas, considerando siete aspectos: el concepto de derivada, cálculo de derivada, interpretación de la derivada, teoremas claves, máximos y mínimos, gráfico de curvas y otros problemas. Para cada aspecto se plantearon siete preguntas: grado de dificultad, grado de importancia, distribución del tiempo, uso de ejemplos ilustrativos, uso de ejercicios y problemas, tipo de presentación de la materia y metodología en clases. Con el tratamiento de datos se logró determinar un perfil del profesor de cálculo, junto con la Tipicidad y la Contribución a su práctica docente en la sala de clases.

## 1 Introducción

Investigaciones exploratorias preliminares que hemos realizado en el marco del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática, del Instituto de

Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso, que congrega a investigadores de varias instituciones de educación superior, han dado evidencias empíricas sobre la debilidad en los aprendizajes de los estudiantes sobre conceptos matemáticos claves en una institución universitaria elegida para el estudio. El Seminario se puso como tarea estudiar la conceptualización que lograban los estudiantes de los cursos de Cálculo. Este estudio se hizo en base a varias encuestas sobre conceptos matemáticos tales como: función, espacio vectorial, límite de una función, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, derivada de una función. Los resultados mostraron confusiones de parte de los alumnos. Por ejemplo, confundían la imagen de una función con la ordenada en el origen, asociaban la función con una ecuación, asociaban el límite de una función con el valor de la función en el punto, o bien como el máximo valor de la función. El Seminario de Didáctica aún no termina esta investigación<sup>1</sup>, pero ante los primeros resultados obtenidos surgió la necesidad de buscar explicaciones a esta situación y nuevas orientaciones que permitan favorecer los aprendizajes. La presente investigación se focaliza en los profesores que imparten o han impartido diferentes cursos de la línea de Cálculo en los primeros años universitarios en la institución escogida, y su metodología de aula.

## 2 Problemática

Nuestra meta es múltiple: ¿cómo mejorar el quehacer docente de los profesores de Cálculo?, ¿qué elementos podemos dar para lograr este cambio?, ¿cuál va a ser el espacio que tendrán en el tratamiento de las materias, los registros de representación –algebraico-simbólico, gráfico, lenguaje natural?

La didáctica del Cálculo diferencial, ha podido determinar que la enseñanza tradicional, basada en clases expositivas y con escasa intervención de los alumnos, no favorece el aprendizaje de estos contenidos matemáticos. En el Seminario de Didáctica nos hemos propuesto como objetivo el romper este esquema.

Otras preguntas que surgen, para enriquecer la problemática, son: ¿el tipo de práctica docente, en el tratamiento de un tema, se mantiene en los otros temas?, ¿se

---

<sup>1</sup> Hay, en la actualidad, un proceso importante de revisión y reforma en la Enseñanza Media en el país, y, por otra parte, la celebrada afluencia mayor de los quintiles socio-económicamente más bajos a la educación superior está produciendo un impacto que deberá ser estudiado



¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

pueden agrupar estos profesores de acuerdo a sus prácticas docentes?, ¿qué conclusiones se pueden colegir a partir de un tipo de práctica docente en un tema?

### **3 Marco teórico**

Nos situamos en un marco didáctico que enfatice el aprendizaje a nivel universitario. Los ecos del cambio en las enseñanzas Básica y Media en Chile han llegado a la Educación Superior, pero no se sabe cuán al tanto están los profesores de estos cambios y cuál es el énfasis que ellos ponen en el aprendizaje de los estudiantes, de modo que estos adquieran las competencias pertinentes –y no se trate solo de centrarse en el contenido y de ‘pasar la materia’: el profesor debería diferenciar el ‘tiempo didáctico de enseñanza’ y el ‘tiempo didáctico del alumno para el aprendizaje’.

En el aspecto cognitivo del aprendizaje, es necesario considerar el uso de varios registros de representación semiótica: la comprensión, según Raymond Duval, necesariamente necesita la articulación de al menos dos de estos registros.

### **4 Metodología**

La consulta se realizó a través de un cuestionario confeccionado en el Seminario de Didáctica. Este Seminario está integrado por una decena de profesores con amplia experiencia docente, entre los que se cuentan doctores en Matemáticas, doctores en Didáctica de las Matemáticas, magísteres en Matemáticas, alumnos del programa de Magíster en Didáctica Matemática, Coordinadores de asignaturas de matemáticas y autoridades académicas de la institución. La opinión técnica de este grupo de profesores permitió elegir para la consulta el tema de Cálculo, pues involucraba los conceptos preguntados a los alumnos. Para determinar las unidades de materias se consideró el programa oficial que tiene esta asignatura y que es común a instituciones universitarias del país. El desglose de estos contenidos en los temas que aparecen en el cuestionario sirvió para estructurar la primera columna en dicho documento. Es así como para la Unidad de Derivadas se consideraron los temas: Concepto de derivada, Cálculo de derivadas, Interpretación de la Derivada, Teoremas claves en el tema, Máximos y mínimos, Gráfico de Curvas y Problemas de aplicación. Las preguntas del cuestionario surgieron al preguntarse sobre los factores que inciden en la práctica docente. (Cf. Anexo).

La muestra estuvo compuesta por todos los profesores de matemáticas de la institución elegida, por lo tanto coincide con el espacio muestral.

Buscaremos explicaciones para las interrogantes señaladas en la Problemática, mediante el tratamiento y análisis de la información obtenida a través del cuestionario. Para ello utilizamos el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), ya que este programa, además de entregar información estadística clásica, nos permite hacer un análisis clasificadorio de las variables consideradas.

## **5 Análisis a priori del cuestionario.**

En la tabla 1 se muestran las respuestas esperadas de los profesores encuestados. El número indicado en las celdas corresponde a una alternativa indicada en el cuestionario y que se explica a continuación.

En la pregunta 1: Sobre el grado de dificultad del tema

Se espera que se elija la alternativa 1: el profesor le asigna alguna dificultad, puesto que no es de inmediata aceptación por los alumnos.

En la pregunta 2: Sobre el grado de importancia del tema

Se espera que la alternativa 2 sea la elegida: el profesor le asigna bastante importancia, pues la institución lo hace, por considerarlo herramienta matemática básica.

En la pregunta 3: Sobre el tiempo dedicado para enseñar el tema

Se espera que la alternativa 2 sea la elegida: el profesor utiliza el tiempo estipulado en el programa de estudio. La pregunta procura determinar si el tiempo establecido institucionalmente es el adecuado.

En la pregunta 4: Sobre el uso de ejemplos ilustrativos

Se espera que se elija la alternativa 3: el profesor usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto, pues estima que los alumnos aprenden mejor si se ilustran los conceptos matemáticos con ejemplos pertinentes.

En la pregunta 5: Sobre la selección de Ejercicios y Problemas

Se espera que se elija la alternativa 3: el profesor selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y en los cuales la demostración es relevante. De esta manera muestra originalidad al tratar los temas seleccionando ejercicios y problemas distintos de los de las guías institucionales.

En la pregunta 6: Sobre el Tipo de presentación de la materia

Se espera que la alternativa 3 sea elegida: el profesor combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico para enseñar los temas. De esta manera utiliza el registro

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

algebraico-simbólico y lo complementa con el registro gráfico en beneficio del concepto que va a enseñar.

En la pregunta 7: Sobre la Metodología usada en clases

Se espera que la alternativa 1 sea elegida: el profesor privilegia la actividad de los alumnos.

Tópicos		Pregunta1	Pregunta2	Pregunta3	Pregunta4
		Grado de dificultad del tema	Grado de Importancia	Distribución Tiempo	Ejemplos Ilustrativos
Derivadas	Concepto	1	2	2	3
	Cálculo de Derivadas	1	2	2	3
	Interpretación de la Derivada	1	2	2	3
	Teoremas Claves	1	2	2	3
	Máximos y Mínimos	1	2	2	3
	Gráfico de Curvas	1	2	2	3
	Otros Problemas de aplicación	1	2	2	3

Tópicos		Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7
		Ejercicios y Problemas	Tipo de Presentación de la Materia	Metodología Usada en Clases
Derivadas	Concepto	3	3	1
	Cálculo de Derivadas	3	3	1
	Interpretación de la Derivada	3	3	1
	Teoremas Claves	3	3	1
	Máximos y Mínimos	3	3	1
	Gráfico de Curvas	3	3	1
	Otros Problemas de aplicación	3	3	1

Tab. 1: Las respuestas esperadas en el cuestionario aplicado

Para propósitos de esta investigación, este cuestionario, respondido de la manera descrita o muy similar a ella, va a representar el perfil del “buen profesor”; llamaremos “profesores del mínimo esfuerzo” a los que están más alejados de este perfil.

El significado de las respuestas de los profesores será analizado con ellos mismos en una segunda etapa de la investigación. Por otra parte, varios profesores no respondieron algunas de las preguntas, ya sea porque no las entendieron o bien por no saber qué contestar; esta situación será motivo de entrevistas posteriores. (El software CHIC permite identificar a esos profesores).

## 6 Experimentación

Para el tratamiento de los datos obtenidos por la aplicación del cuestionario a los profesores de la institución elegida, fue necesario hacer una codificación de los individuos y variables consideradas en la investigación, a fin de poder utilizar el software CHIC.

Los individuos eran 32 profesores y se codificaron: **E1, E2,..., E32**.

Las variables eran las respuestas de los profesores a las preguntas formuladas sobre cada tema de la unidad de Derivadas, de acuerdo a la pauta que se les entregó y se codificaron de la siguiente manera: se consideraron cuatro caracteres, el primer carácter era **D** por la unidad temática de Derivadas, el segundo carácter se refería a un tema de la unidad de Derivadas y se codificó de la siguiente manera:

- C** para el concepto de derivada
- D** para el cálculo de derivadas
- I** para interpretación de la derivada
- T** para teoremas claves
- M** para máximos y mínimos
- G** para gráfico de curvas
- P** para otros problemas de aplicación

El tercer carácter era un número que variaba de 0 a 4, de acuerdo a la pauta, e indicaba el grado de respuesta del profesor frente a los siguientes aspectos:

- D** sobre el grado de dificultad del tema
- I** sobre el grado de importancia del tema
- T** sobre el tiempo dedicado al tema
- E** sobre el uso de ejemplos ilustrativos
- P** sobre la selección de Ejercicios y Problemas

**Pm** sobre el tipo de presentación de la materia

**M** sobre la metodología usada en clases.

Usando estas codificaciones para los individuos y las variables se construyeron matrices excel y en formato csv.

Debido al gran número de variables a considerar, 245 en total, se optó por trabajar cada tema en forma separada, considerando 28 variables en cada caso. Debido a la restricción en el número de páginas del presente trabajo, sólo se presentan en este trabajo el análisis de los temas: Concepto de derivada, Cálculo de derivadas, Interpretación de la derivada y Gráfico de curvas.

## **7 Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto al *Concepto de Derivada***

A continuación se analizan las respuestas entregadas por los profesores sobre el tema Concepto de Derivada. Para ello se han considerado el o los dos mayores porcentajes obtenidos.

### **7.1 Análisis por pregunta**

Con respecto a la pregunta “*El grado de dificultad del tema, para enseñarlo*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Sin dificultad, 1: Alguna dificultad, 2: Bastante dificultad, 3: Mucha dificultad, 4: No contesta. Un 34% lo considera con alguna dificultad (11/32) y un 34% lo considera con bastante dificultad (11/32).

Con respecto a la pregunta “*El grado de importancia que le asigna el profesor*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Sin importancia, 1: Alguna importancia, 2: Bastante importancia, 3: Mucha importancia, 4: No contesta. Un 47% considera de alguna importancia el tema (15/32) y un 44% considera de bastante importancia el tema (14/32).

Con respecto a la pregunta “*El tiempo que le dedica al tema*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: No le da tiempo, 1: Da un tiempo menor de lo estipulado, 2: Da el tiempo estipulado, 3: Da un tiempo mayor de lo estipulado, 4: No responde. Un 66% considera que emplea el tiempo estipulado en el programa de estudio (21/32).

Con respecto a la pregunta “*El uso de ejemplos ilustrativos*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: No usa, 1: Usa a veces, 2: Usa uno por concepto, 3:

Usa dos o más por concepto, 4: No responde. Un 47% usa un ejemplo por concepto (15/32) y un 38% usa dos o más por concepto (12/32).

Con respecto a la pregunta “*La selección de Ejercicios y Problemas que hace*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: No selecciona, utiliza guías, 1: Selecciona ejercicios rutinarios, 2: Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos, 3: Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones, 4: No responde. El 66% de los profesores considera que selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos (21/32).

Con respecto a la pregunta “*El tipo de presentación de la materia*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural, 1: Privilegia lo algebraico y lo simbólico, 2: Privilegia lo gráfico, 3: Combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico, 4: No responde. El 38% de los profesores considera que privilegia lo conceptual y el lenguaje natural (12/32) y un 22% de los profesores privilegia lo algebraico y lo simbólico (07/32).

Con respecto a la pregunta “*La metodología que aplica en clases*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Privilegia la exposición, 1: Privilegia la actividad de alumnos, 2: Privilegia la tecnología, 3: Combina metodologías, 4: No responde. El 84% de los profesores privilegia la exposición en sus clases (27/32).

## **7.2 Caracterización del profesor respecto del *Concepto de Derivada***

Sobre la base de los porcentajes indicados en 7.1, el perfil del profesor de cálculo corresponde a un docente que respecto del concepto de derivada, lo considera con alguna o bastante dificultad, le atribuye alguna o bastante importancia, le dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio, ilustra con un ejemplo el concepto, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos, privilegia lo conceptual y el lenguaje natural para presentar el concepto y privilegia las clases expositivas como metodología en clases.

## **7.3 Análisis clasificatorio de las variables respecto del *Concepto de Derivada***

Para el análisis clasificatorio, CHIC proporciona los siguientes elementos: árbol de similaridad, grafo implicativo y el árbol cohesitivo. A continuación se muestran estos elementos que nos van a aportar importante información respecto de la similaridad, implicación y cohesión entre las variables estudiadas.



profesores que están alejados del perfil ideal del profesor de cálculo y que el mínimo esfuerzo para enseñar el concepto de derivada.

El segundo grupo está compuesto por las variables: DCED, DC3P, DC3M, DC3Pm, DC3I, DC3E, DC3T, es decir, profesores que tienen mucha dificultad para enseñar el concepto de derivada, que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos y con demostraciones, que combinan metodologías en clases, que combinan adecuadamente lo algebraico y lo gráfico para presentar la materia, que da mucha importancia al concepto de derivada, que usan dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el concepto, que dedican más tiempo de lo estipulado para enseñar el concepto de derivada, es decir los profesores que dedican el mayor esfuerzo para enseñar el concepto de derivada.

El tercer grupo está compuesto por las variables: DC4D, DC4T, DC4M, DC4E, DC4P, DC4I, DC4Pm, es decir, profesores que no respondieron las preguntas. Estas variables no se tomarán en cuenta para los análisis siguientes.

### 7.3.2 Implicación

La siguiente figura muestra la implicación entre las variables.

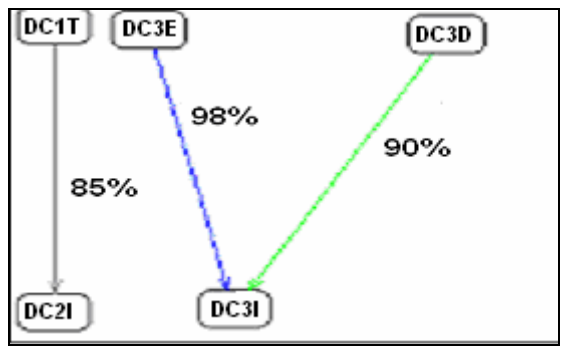


Fig. 2: Grafo implicativo para el Concepto de Derivada

En la rama izquierda se tiene que DC1T (4)<sup>2</sup> implica DC2I (15). Se puede concluir que los profesores que dedican menos tiempo de lo estipulado en el programa de estudio, entonces le atribuyen bastante importancia al concepto de derivada, con una probabilidad de un 85% de certeza.

<sup>2</sup> El número en paréntesis indica la cantidad de profesores relacionados con la variable.



## ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

En la rama derecha se tiene que DC3E (12) implica DC3I (14), es decir, los profesores que usan dos o más ejemplos ilustrativos por el concepto, entonces le atribuyen mucha importancia al concepto, con una probabilidad de un 98% de certeza. Esta implicación es muy significativa.

También se da que DC3D (3) implica DC3I (14), es decir, los profesores que consideran el concepto de derivada de mucha dificultad, también le atribuyen mucha importancia al concepto, con una probabilidad de un 90% de certeza. También esta implicación se ajusta a la realidad, pues el considerar difícil la enseñanza de un concepto indica que se le da importancia a ese concepto.

### 7.3.3 Cohesión.

La siguiente figura muestra la cohesión entre las variables

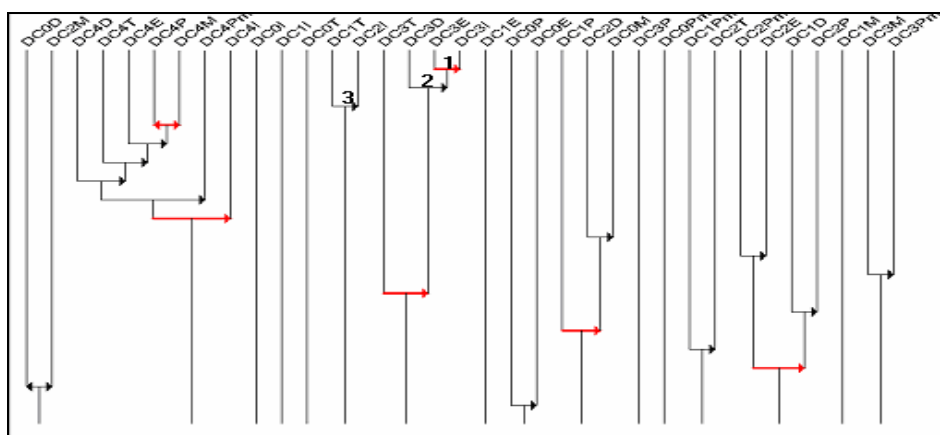


Fig. 3: *Árbol cohesitivo para el Concepto de Derivada*

Los nodos significativos del árbol cohesitivo están en los niveles 1, 4, 9, 13, 15 y 17.

Los índices de cohesión en los niveles 1, 2 y 3 son los siguientes:

Clasificación al nivel: 1: (DC3E DC3I) cohesión: 0.975

Clasificación al nivel: 2: (DC3D (DC3E DC3I)) cohesión: 0.853

Clasificación al nivel: 3: (DC1T DC2I) cohesión: 0.849

Nuevamente se da la implicación que si el profesor usa dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el concepto de derivada, entonces da mucha importancia al concepto de derivada. También se da la implicación que si el profesor tiene

mucha dificultad para enseñar el concepto de derivada, entonces se da la implicación anterior. En un tercer nivel se da la implicación que si el profesor dedica menos tiempo de lo estipulado para enseñar el concepto de derivada, entonces da bastante importancia al concepto de derivadas, lo que no es lógico.

#### 7.3.4 Tipicidad de los individuos

La Tipicidad de la clase: **(DC3E, DC3I) (1)**, tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 10, los profesores E3, E30, E1, E32, E15, E22, E9, E6, E10, E12 (los profesores más típicos a esta clase).

La Tipicidad de la clase: **(DC3D, DC3E, DC3I) (1,2)**, tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 5, los profesores E32, E9, E30, E6, E10 (los profesores más típicos a esta clase).

La Tipicidad de la clase: **(DC1T, DC2I) (3)**, tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 4, los profesores E2, E7, E29, E27 (los profesores más típicos a esta clase).

#### 7.3.5 Contribución de los individuos

La contribución a la clase: **(DC3E, DC3I) (1)**, tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 10, los profesores E3, E30, E1, E32, E15, E22, E9, E6, E10, E12 (los profesores que más contribuyen a esta clase)

La contribución a la clase: **DC3D, DC3E, DC3I (1,2)**, tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 4, los profesores E23, E26, E13, E12, E3, E15, E1, E22, E5, E32, E9, E30, E6, E10 (los profesores que más contribuyen a esta clase)

La contribución a la clase: **DC1T, DC2I (3)**, tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 4, los profesores E2, E7, E29, E27 (los profesores que más contribuyen a esta clase).

### 8 **Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto al *Cálculo de Derivadas***

Procediendo de manera similar a indicado en el ítem 7 para el tema de *Cálculo de Derivadas*, se obtuvieron los siguientes resultados que dan una caracterización del profesor respecto a este tema.

## 8.1 Caracterización del profesor respecto del *Cálculo de Derivadas*

El perfil del profesor de cálculo es una persona que respecto de la derivada, lo considera con bastante dificultad 41% (13/32), le atribuye mucha importancia 47% (15/32), le dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio 69% (22/32), ilustra con dos o más ejemplos los gráficos 62% (21/32), selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos 56% (18/32), combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico 41% (13/32), privilegia lo algebraico y lo simbólico, y combina metodologías en clases 35% (12/32)

## 8.2 Análisis clasificatorio de las variables respecto del *Cálculo de Derivadas*

Análogamente a lo indicado en el ítem 7.3, CHIC proporciona información sobre similitud, implicación y cohesión entre las variables. A continuación analizamos estos tres aspectos.

### 8.2.1 Similitud

La siguiente figura muestra la similitud entre las variables. Los nodos significativos están en los niveles: 1, 4, 6, 8, 12, 17, 20, 23, 25, 27. No se consideran los niveles del 1 al 6, pues corresponden a profesores que no respondieron las preguntas correspondientes.

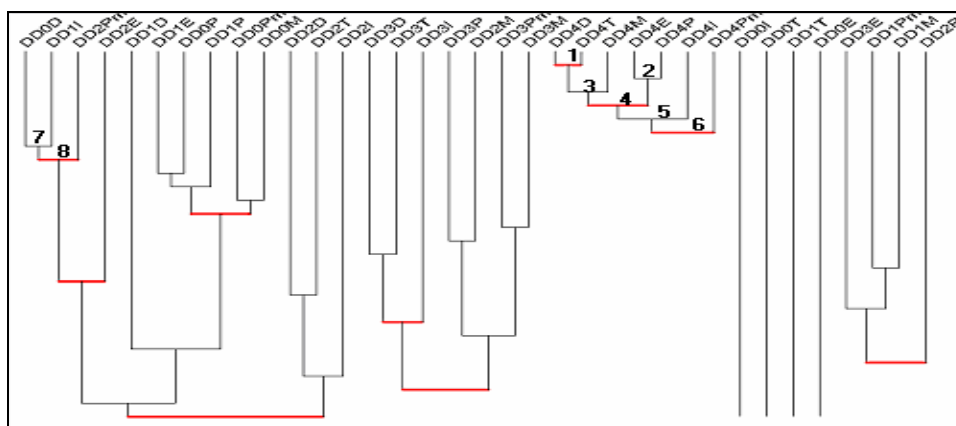


Fig. 4: Árbol de similitud para el *Cálculo de Derivadas*

Se clasifica en un séptimo nivel, con un índice de similaridad 0.999912, la clase ( DD0D , DD1I), es decir, son similares las respuestas de los profesores que responden que el grado de dificultad es nulo en el cálculo de derivadas y los profesores que no dan importancia al cálculo de derivadas.

Se clasifica en octavo nivel, con un índice de similaridad 0.996924, la clase ((DD0D, DD1I), DD2Pm), es decir, son similares las respuestas de los profesores de la clase anterior con los profesores que responden que privilegian lo gráfico para presentar la materia.

Se destacan cuatro grupos de nodos. El primero corresponde a la clase (DD0D, DD1I, DD2Pm, DD2E, DD1D, DD1E, DD, DD1P, DD0Pm, DD0M, DD2D, DD2T, DD2I), que la constituyen aquellos profesores que hacen sólo lo justo para cumplir con su trabajo, son los profesores del mínimo esfuerzo y por lo tanto alejados del perfil ideal indicado en el ítem 5. El segundo grupo corresponde a la clase (DD3D, DD3T, DD3I, DD3P, DD2M, DD3Pm, DD3M) y la constituyen los profesores que se preocupan de enseñar bien y que llamamos los buenos profesores, muy cercanos al perfil ideal. El tercer grupo corresponde a la clase (DD4D, DD4T, DD4M, DD4E, DD4P, DD4I, DD4Pm) y que son los profesores que no responden. El cuarto grupo corresponde a la clase (DD3E, DD1Pm, DD1M, DD2P), y también corresponde a profesores del mínimo esfuerzo.

### 8.2.2 Implicación.

La siguiente figura muestra la implicación entre las variables.

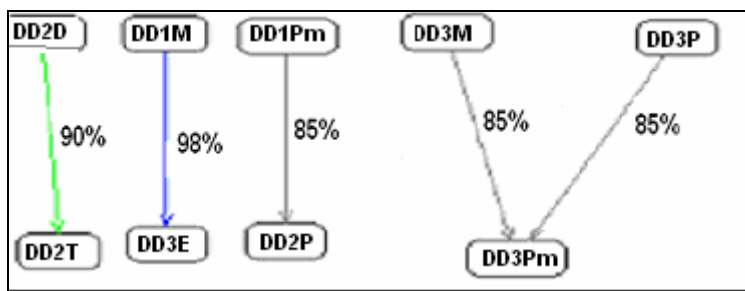


Fig. 5: Grafo implicativo para el Cálculo de Derivadas

Este grafo nos entrega la información que DD1M (10) implica DD3E (21), es decir, los profesores que privilegian la actividad de los alumnos como metodología

## ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

en clases, usan dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el cálculo de derivada, con una probabilidad de un 98% de certeza y DD2D (13) implica DD2T (22), es decir los profesores que tienen bastante dificultades para enseñar el cálculo de derivadas, dedican el tiempo estipulado en el programa para enseñar el cálculo de derivadas, con una probabilidad de un 90% de certeza

### 8.2.3 Cohesión

La figura 6 muestra la cohesión entre las variables. Los nodos significativos están en los niveles: 1, 5, 10, 13, 15 y 18. La clasificación a nivel 1: (DD1M DD3E) tiene cohesión 0.979. La clasificación a nivel 2: (DD2D DD2T) tiene cohesión 0.904. Es decir, el profesor que privilegia la actividad de los alumnos como metodología en clases, entonces usa dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el cálculo de derivadas, con un índice de cohesión de 0.979. Además, el profesor que tiene bastante dificultad para enseñar el cálculo de derivadas, dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio para enseñarlo.

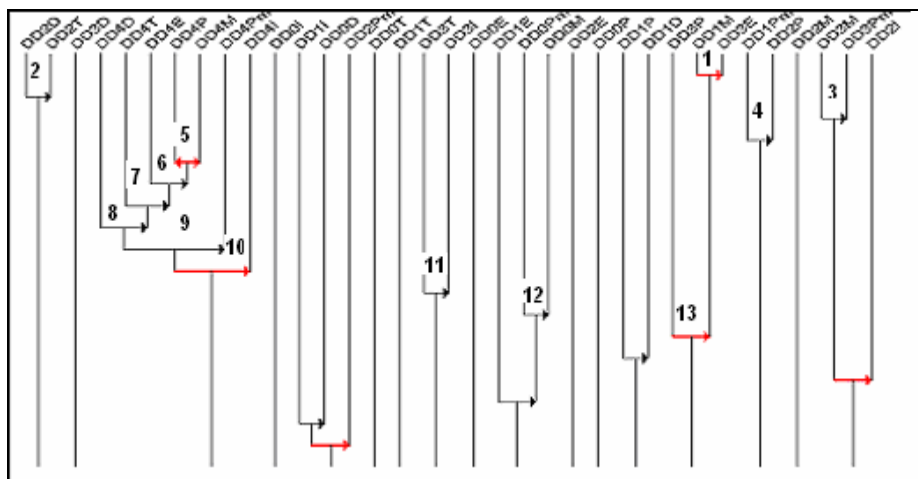


Fig. 6: Árbol cohesivo para el Cálculo de Derivadas

### 8.2.4 Tipicidad de los individuos

La tipicidad en la clase: DD1M, DD3E (1) tiene como grupo óptimo con cardinalidad 10 a los profesores: E31, E30, E3, E17, E7, E8, E18, E22, E21, E6 .

La tipicalidad en la clase: DD2D DD2T (2) tiene como grupo óptimo con cardinalidad 12 a los profesores: E26, E27, E30, E32, E14, E6, E3, E2, E24, E23, E22, E16.

### **8.2.5 Contribución de los individuos**

La contribución a la clase: DD1M, DD3E (1) tiene como grupo óptimo con cardinalidad 10 a los profesores: E31, E30, E3, E17, E7, E8, E18, E22, E21, E6 .

La contribución a la clase: DD2D, DD2T (2) tiene como grupo óptimo con cardinalidad 12 a los profesores: E26, E27, E30, E32, E14, E6, E3, E2, E24, E23, E22, E16.

## **9 Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto a la Interpretación de la Derivada**

Procediendo de manera similar a indicado en el ítem 7 para el tema de *Interpretación de la Derivada*, se obtuvieron los siguientes resultados que dan una caracterización del profesor respecto a este tema.

### **9.1 Caracterización del profesor respecto a la Interpretación de la Derivada**

El perfil del profesor de cálculo es una persona que respecto al tema *Interpretación de la Derivada*, lo considera con bastante dificultad 50% (16/32), le atribuye mucha importancia 56% (18/32), le dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio 69% (22/32), ilustra con dos o más ejemplos 56% (18/32), selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos 57% (17/32), combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico 66% (21/32), y combina metodologías en clases 59% (19/32).

### **9.2 Análisis clasificatorio de las variables respecto de la interpretación de la Derivada**

Análogamente a lo indicado en el ítem 7. 3, CHIC proporciona información sobre similaridad, implicación y cohesión entre las variables. A continuación analizamos estos tres aspectos.



se da que DI2D (16) implica DI3M (19), es decir los profesores que tienen bastante dificultades para enseñar la interpretación de la derivada, combinan metodologías en clases, con una probabilidad de un 86% de certeza, además DI3I (18) implica DI3Pm (21), es decir, el profesor que da mucha importancia a la interpretación de la derivada, entonces combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico para presentar la materia, con una probabilidad de un 82% de certeza.

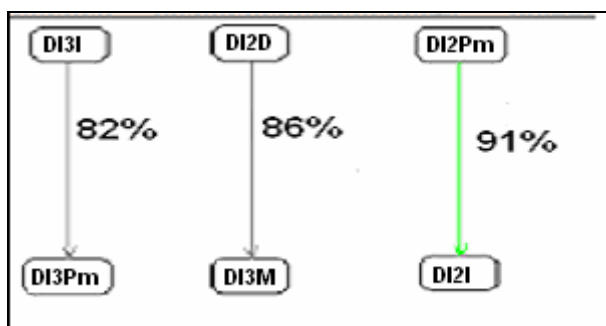


Fig. 8: Grafo implicativo para la Interpretación de la Derivada

### 9.2.3 Cohesión

La siguiente figura muestra la cohesión entre las variables. Los nodos significativos están en los niveles: 1, 4, 8, 10, 13, 15. Las implicaciones del grafo implicativo (Figura 8) se presentan en este árbol. La clase de nivel 1 (DI2Pm DI2I) tiene un índice de cohesión 0.911. La clase de nivel 2 (DI2D DI3M) tiene índice 0.863 y la clase de nivel 3 (DI3I DI3Pm) tiene índice 0.821. Se destaca el grupo de nodos representado por la clase (DI3P, DI3E, DI2D, DI3M, DI3I, DI3Pm) que corresponde a los buenos profesores. Se destaca el grupo de nodos que integran la clase de nivel 15 ((DI3P DI3E) ((DI2D DI3M) (DI3I DI3Pm))) constituida por buenos profesores, pero tiene un índice de cohesión 0.284, que es muy bajo.





La contribución a la clase: DI3I, DI3Pm (3) tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 15, a los profesores: E27, E26, E9, E3, E1, E30, E32, E14, E19, E18, E15, E24, E12, E22, E13.

## **10 Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto al *Gráfico de Curvas mediante Derivadas***

Procediendo de manera similar a indicado en 7 para el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*, se obtuvieron los siguientes resultados que dan una caracterización del profesor respecto a este tema.

### **10.1 Caracterización del profesor respecto al *Gráfico de Curvas mediante Derivadas***

El perfil del profesor de cálculo es una persona que respecto del tema *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*, lo considera con bastante dificultad 62% (20/32), le atribuye bastante importancia 40% (13/32), le dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio 72% (23/32), ilustra con dos o más ejemplos los gráficos 69% (22/32), selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos 54% (17/32), combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico 75% (24/32) y combina metodologías en clases 65% (20/32).

### **10.2 Análisis clasificatorio de las variables respecto al *Gráfico de Curvas mediante Derivadas***

Análogamente a lo indicado en el ítem 7. 3, CHIC proporciona información sobre similaridad, implicación y cohesión entre las variables. A continuación analizamos estos tres aspectos.

#### **10.2.1 Similaridad**

La siguiente figura muestra la similaridad entre las variables.

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

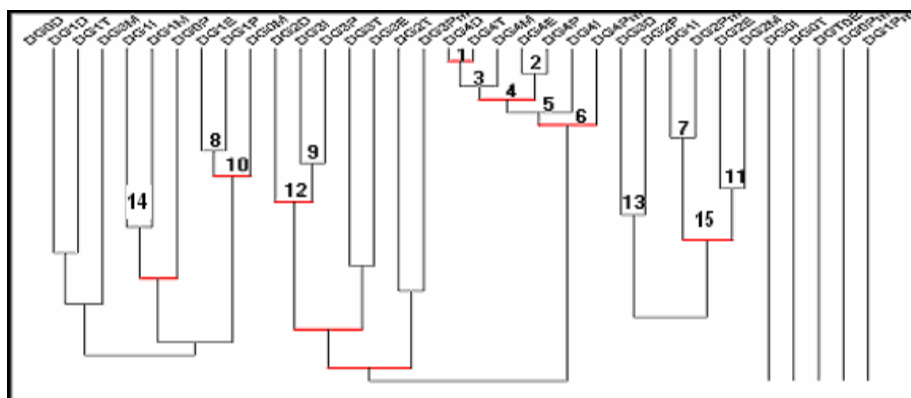


Fig. 10: *Árbol de similitud para el Gráfico de Curvas mediante Derivadas*

Los nodos significativos están en los niveles: 1, 4, 6, 10, 12, 15, 18, 22, 25. La clase de nivel 7 (DG1I, DG2Pm) tiene un índice de similitud 0.998668. La clase de nivel 8 (DG1E, DG1P) tiene índice 0.998461. La clase de nivel 9 (DG3I, DG3P) tiene índice 0.988447.

Se destacan cuatro grupos de nodos en este árbol. La clase (DG0D, DG1D, DG1T, DG3M, DG1I, DG1M, DG0P, DG1E, DG1P, DG0M) que corresponde a los profesores del mínimo esfuerzo, la clase (DG2D, DG3I, DG3P, DG3T, DG3E, DG2T, DG3Pm) que corresponde a los buenos profesores, la clase (DG4D, DG4T, DG4M, DG4E, DG4P, DG4I, DG4Pm) que corresponde a los profesores que no contestaron las preguntas. La clase (DG3D, DG2P, DG1I, DG2Pm, DG2E, DG2M) que también corresponde a los profesores del mínimo esfuerzo.

### 10.2.2 Implicación

La siguiente figura muestra la implicación entre las variables.

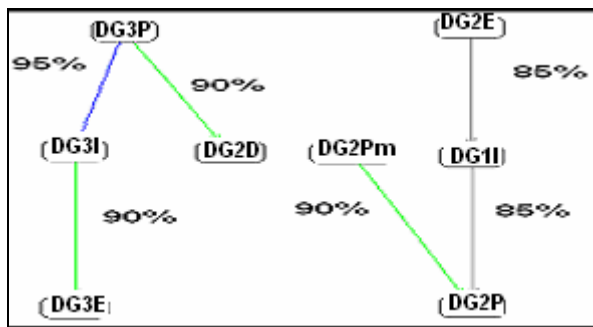


Fig. 11: Grafo implicativo para el Gráfico de Curvas mediante Derivadas

Este grafo nos entrega la información que DG3P (09) implica DG3I (13), es decir, los profesores que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones para enseñar el gráfico de curvas mediante derivadas, son profesores que dan mucha importancia al tema de gráfico de curvas, con una probabilidad de un 95% de certeza. También se da que DG3I (13) implica DG3E (22), es decir los profesores que dan mucha importancia al tema de gráfico de curvas, usan dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar gráfico de curvas, con una probabilidad de un 90% de certeza, además DG3P (09) implica DG2D (13), es decir, el profesor que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones para enseñar el gráfico de curvas mediante derivadas, tiene bastante dificultad para enseñarlo, con una probabilidad de un 90% de certeza. La implicación DG1Pm (00) a DG2P (17) significa que el profesor que privilegia lo algebraico y lo simbólico para presentar la materia, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos para enseñar la materia, con una probabilidad de un 90% de certeza.

### 10.2.3 Cohesión

La figura 12 muestra la cohesión entre las variables. Los nodos significativos están en los niveles: 1, 5, 10, 13, 15. La clase de nivel 1 (DG3P, DG3I) tiene un índice de cohesión 0.981. La clase de nivel 2 ((DG3P, DG3I), DG3E) tiene índice 0.943. La clase de nivel 3 (DG2Pm, DG2P) tiene índice 0.89. Aquí aparecen nuevamente las implicaciones ilustradas en la figura 11.

### 10.2.4 Tipicidad de los individuos

La tipicidad en la clase: DG3P, DG3I (1) tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 8, a los profesores: E32, E30, E18, E10, E15, E26, E24, E22,

La tipicidad en la clase: DG3P, DG3I, DG3E (1,2) tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 8, a los profesores: E10, E30, E18, E32, E15, E26, E22, E24.

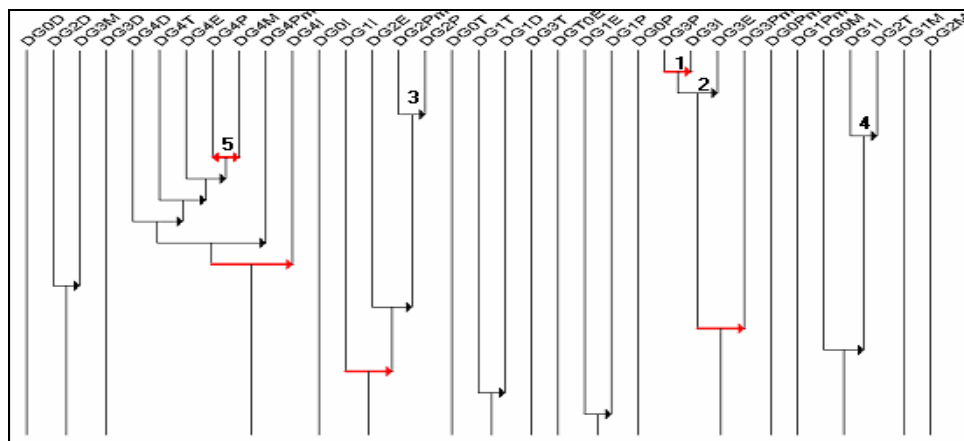


Fig. 12: Árbol cohesivo para el Gráfico de Curvas mediante Derivadas

### 10.2.5 Contribución de los individuos

La contribución a la clase: DG3P, DG3I (1) tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 8, a los profesores: E32, E30, E18, E10, E15, E26, E24, E22.

La contribución a la clase: DG3P, DG3I, DG3E (1,2) tiene como grupo óptimo, con cardinalidad 8, a los profesores: E10, E30, E18, E32, E15, E26, E22, E24.

## 11 Conclusiones

El análisis estadístico clásico nos muestra que los 32 profesores encuestados se caracterizan, en general, por enseñar el tema de derivadas en forma adecuada, es decir con un perfil cercano al ideal, señalado en el ítem 5.

Con respecto al grado de dificultad, lo consideran con *bastante dificultad*, siendo el tema *Gráfico de curvas mediante Derivadas* considerado por el 67% de los profesores como bastante difícil.

En cuanto al grado de importancia que le atribuye el profesor, éste es de *mucha importancia*, especialmente el tema de *Interpretación de la Derivada* (57%).

Con respecto al tiempo dedicado en tratar el tema, la mayoría de los profesores *utiliza el tiempo estipulado* en el programa de estudio, especialmente para tratar *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* (72%).

Con respecto al uso de ejemplos ilustrativos, *usa dos o más por concepto*, especialmente cuando trata el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* (69%).

Con respecto a la selección de ejercicios y problemas que hace, *selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos*, especialmente en el tema *Concepto de Derivadas* (66%).

Con respecto al tipo de presentación de la materia, *combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico*, especialmente en el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* (75%).

Con respecto a la metodología que aplica en clases, en general *combina metodologías*, especialmente cuando trata el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*.

El análisis clasificatorio nos permite destacar a un grupo de profesores que se preocupan de entregar una buena enseñanza a sus alumnos, poniendo bastante empeño en esta tarea. Sin embargo hay otro grupo de profesores que realizan su actividad docente con un mínimo de esfuerzo. Hay un tercer grupo que no se pronuncia sobre estos temas.

Implicaciones importantes surgen del análisis implicativo que proporcionan el grafo implicativo y el árbol cohesitivo:

En el tema *Concepto de Derivada* se tiene que DC3E (12) implica DC3I (14), es decir si los profesores usan dos o más ejemplos ilustrativos, entonces le atribuyen mucha importancia al concepto de derivadas, con una probabilidad de un 98% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E3, E30, E1, E32, E15, E22, E9, E6, E10, E12.

Otra implicación importante que se da en este tema es DC3D (3) implica DC3I(14), es decir los profesores que consideran el concepto de derivada de mucha dificultad, también le atribuyen mucha importancia al concepto, con una probabilidad de un 90% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E32, E9, E30, E6, E10.

## ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

En el tema *Cálculo de Derivadas* se tiene que DD1M (10) implica DD3E(21), es decir los profesores que privilegian la actividad de los alumnos como metodología en clases, usan dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el cálculo de derivadas, con una probabilidad de un 98% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E31, E30, E3, E17, E7, E8, E22, E21, E6.

En el tema *Interpretación de la Derivada* se tiene que DI2Pm (06) implica DI2I (10), es decir los profesores que privilegian lo gráfico para presentar la materia, dan bastante importancia al tema, con una probabilidad de un 91% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E11, E8, E7, E4, E29.

Otra implicación importante que se da en este tema es DI2D (16) implica DI3M (19), es decir los profesores que tienen bastantes dificultades para enseñar el tema, combinan metodologías en clases, con una probabilidad de un 86% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E26, E27, E7, E32, E2, E9, E19, E15, E17, E12, E24, E23, E10.

En el tema *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* se tiene la implicación DG3P(09) implica DG3I(13), es decir los profesores que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones para enseñar el tema, son profesores que dan mucha importancia al tema., con una probabilidad de un 95% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E32, E30, E18, E10, E15, E26, E24, E22.

Volviendo a las preguntas planteadas en el ítem 2, podemos señalar que la valiosa información que entrega CHIC nos permite tener una visión de las prácticas docentes de los profesores, detectando donde están las falencias. Se observa, en general, el uso de solo un registro de representación en la enseñanza de los temas, privilegiando el registro algebraico - simbólico. Seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos; no seleccionan problemas abiertos, no realizan demostraciones, en general. La metodología que más aplican en clases es la exposición, no se privilegia la actividad de los alumnos. Haciendo más visible las prácticas docentes de los buenos profesores, éstas podrían ser imitadas por los otros profesores.

## Bibliografía

Couturier, R.; Bodin, A.; Gras, R. (1991). *Clasificación Jerárquica, Implicativa y Cohesiva. Manual del programa estadístico CHIC*

Ortega et al.

- Duval, R (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.
- Gras, R. (1995). *L'Analyse Statique Implicative*. Conferencia dada en Methodes D'Analyses Statistiques Multidimensionnelles en Didactique des Mathematiques, 27 al 29 de enero de 1995. Caen.
- Orús, P. (2001). *Análisis de datos e Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Ponencia Invitada del Seminario sobre Metodología del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Almería.
- Orús, P. (2002). *Tratamiento de Datos, Grafos y Didáctica de las Matemáticas*, Universidad Nacional de Educación a Distancia.



¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

### Anexo 1: Cuestionarios de las experimentaciones

ENCUESTA PARA PROFESORES QUE HAN DICTADO CURSOS EN LÍNEA DE CÁLCULO					
Coloque un puntaje de acuerdo a la PAUTA adjunta. Indique.					
Cursos..... Carrera.....Nombre.....					

	Tópicos	Pregunta1	Pregunta2	Pregunta3	Pregunta4
		Grado de dificultad del tema	Grado de Importancia I	Distribución Tiempo	Ejemplos Ilustrativos
N° Reales	Axiomática				
	Ecuaciones				
	Inecuaciones				
	Problemas de Aplicación				
Funciones	Concepto				
	Rep. Gráfica Fun. Especiales				
	Inyectividad Epi Bi				
	Función Inversa				
	Álgebra de funciones				
	Composición				
	Modelación				
Límites	Concepto y Existencia				
	Álgebra de Límites				
	Teoremas Claves				
	Límites en el Infinito				
Continuidad	Concepto				
	Continuidad y límite				
	Teoremas Claves				
	"Pegar"				

Derivadas	Concepto				
	Cálculo de Derivadas				
	Interpretación de la Derivada				
	Teoremas Claves				
	Máximos y Mínimos				
	Gráfico de Curvas				
	Otros Problemas de aplicación				
Integrales	Concepto (Riemann)				
	Técnicas de Integración				
	Aplicaciones Geométricas				
	Aplicaciones Físicas y otras				
Series Num. y de Fun.	Concepto				
	Teoremas Claves				
	Aplicaciones				

Tópicos		Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7
		Ejercicios y Problemas	Tipo de Presentación de la Materia	Metodología Usada en Clases
N° Reales	Axiomática			
	Ecuaciones			
	Inecuaciones			
	Problemas de Aplicación			
Funciones	Concepto			
	Rep. Gráfica Fun. Especiales			
	Inyectividad Epi Bi			
	Función Inversa			
	Álgebra de funciones			
	Composición			
	Modelación			

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

Límites	Concepto y Existencia			
	Álgebra de Límites			
	Teoremas Claves			
	Límites en el Infinito			
Continuidad	Concepto			
	Continuidad y límite			
	Teoremas Claves			
	"Pegar"			
Derivadas	Concepto			
	Cálculo de Derivadas			
	Interpretación de la Derivada			
	Teoremas Claves			
	Máximos y Mínimos			
	Gráfico de Curvas			
	Otros Problemas de aplicación			
Integrales	Concepto (Riemann)			
	Técnicas de Integración			
	Aplicaciones Geométricas			
	Aplicaciones Físicas y otras			
Series Num. y de Fun.	Concepto			
	Teoremas Claves			
	Aplicaciones			

**PAUTA**

	<b>Pregunta N°1</b>	<b>Sobre el grado de dificultad del Tema</b>
0	Sin Dificultad	
1	Alguna Dificultad	
2	Bastante Dificultad	
3	Mucha Dificultad	

	<b>Pregunta N°2</b>	<b>Sobre el grado de importancia del Tema</b>
0	Sin importancia	
1	Alguna importancia	
2	Bastante importancia	
3	Mucha importancia	

	<b>Pregunta N°3</b>	<b>Sobre el Tiempo Dedicado (programa)</b>
0	No le da tiempo	
1	Menos de lo estipulado	
2	Lo estipulado	
3	Más de lo estipulado	

	<b>Pregunta N°4</b>	<b>Sobre el uso de Ejemplos Ilustrativos</b>
0	No usa	
1	Usa a veces	
2	Usa uno por concepto	
3	Usa dos o más por concepto	

	<b>Pregunta N°5</b>	<b>Sobre la selección de Ejercicios y Problemas</b>
0	No selecciona, utiliza guías	
1	Selecciona ejercicios rutinarios	
2	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos	
3	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos, y con demostración	

	<b>Pregunta N°6</b>	<b>Sobre el Tipo de presentación de la materia</b>
0	Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural	
1	Privilegia lo algebraico y lo simbólico	
2	Privilegia lo gráfico	
3	Combina adecuadamente lo algebraico y gráfico	

	<b>Pregunta N°7</b>	<b>Sobre la Metodología usada en clases</b>
0	Privilegia de la exposición	
1	Privilegia la actividad de los alumnos	
2	Privilegia la tecnología	
3	Combina metodologías	

# ¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales

Ismenia Guzmán R., Elisabeth Ramos y Arturo Mena L.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
{[iguzmanr](mailto:iguzmanr@ucv.cl), [elisabeth.ramos](mailto:elisabeth.ramos@ucv.cl), [arturo.mena](mailto:arturo.mena@ucv.cl)}@ucv.cl

**Resumen:** Buscamos explicaciones a la debilidad de los aprendizajes de los estudiantes de Cálculo Diferencial en el primer año de una universidad elegida para el estudio. Realizamos una encuesta a profesores de la asignatura, con el objeto de investigar el tratamiento que ellos hacen de Números Reales en sus cursos de primer año de Ingeniería. Se seleccionaron temas habituales del Programa, y sobre ellos se plantearon siete preguntas: grado de dificultad y de importancia, distribución del tiempo, uso de ejemplos ilustrativos, planteo de ejercicios y problemas, tipo de presentación de la materia, metodología usada en clases. Procesando las respuestas con el Programa CHIC, obtuvimos información que es coherente con la percepción a priori que se tiene en general del desempeño de los profesores universitarios, y que nos permite avanzar una hipótesis acerca del perfil del quehacer docente de un profesor de Cálculo, a partir del cual podemos encontrar las explicaciones buscadas.

## 1 Problema de Investigación

Partimos de una pregunta muy simple ¿Cómo se enseña en los primeros años de la Universidad? No es un misterio que el pasaje de la Enseñanza media (liceo) a la Universidad es difícil para los estudiantes, especialmente para aquellos que no aprendieron a ser autónomos y organizados en el estudio, y esta es la situación de la gran mayoría. En la enseñanza media el proceso de enseñanza y aprendizaje está dirigido y controlado, en cambio en la Universidad la situación es otra: el proceso de aprendizaje es de responsabilidad del estudiante. ¿Qué ocurre entonces con el proceso de enseñanza? ¿Qué influencia tiene el proceso de enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes?

En una investigación preliminar que hemos realizado en el marco del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática en el Instituto de Matemáticas de la PUCV, cuya meta era pesquisar el grado de dominio alcanzado por estudiantes, tanto de primeros años como de cursos superiores, sobre algunos conceptos matemáticos claves tales como los conceptos de función, de vector, de subespacio vectorial, de límite de una función, etc., los resultados no son edificantes: el grado de dominio obtenido ha sido muy débil y esto explica de algún modo el fracaso que tienen en los exámenes finales. Entonces nos surge la pregunta: ¿qué ocurre con la enseñanza?, o, con mayor precisión, ¿a qué proceso de enseñanza están siendo sometidos estos estudiantes? ¿qué actividades se les proponen? ¿con qué nivel de exigencias? Nuestro propósito en esta investigación es identificar ese proceso y encontrar algunos elementos que nos permitan describirlo.

## 2 Marco Teórico

El marco teórico de esta investigación contempla aspectos didacto-cognitivos en los que se fundamenta la elaboración de la encuesta que nos sirve de apoyo a la presente investigación y aspectos informáticos basados en el análisis implicativo con los diferentes tratamiento de la información que permite el software estadístico multidimensional de Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesitiva (CHIC)<sup>1</sup> a través del grafo y complementado por los árboles de cohesión y de similaridad.

Respecto a los aspectos didácticos: la elaboración de la Encuesta se ha basado en la estructura del capítulo del Programa oficial de la institución elegida (representativa en el país) sobre el tema de los Números Reales, y los subtemas seleccionados son los focalizados por el programa.

Como ha puesto de relieve Raymond Duval, debido a que los objetos matemáticos no son accesibles por los sentidos ni por medio de instrumentos materiales, como microscopios u otros, para su presentación y estudio es necesario recurrir a representaciones semióticas. Ahora bien, según los trabajos de Duval, una representación semiótica depende de un determinado sistema de signos, los que constituyen un registro de representación semiótica –o, por brevedad, un registro– si permiten tres operaciones: representar un objeto matemático (o algunos de sus aspectos); realizar tratamientos al interior del registro, y convertir una representación de un registro de partida a otro de llegada.

---

<sup>1</sup> Programa realizado bajo la dirección del Dr. Régis Gras

En la presentación de las materias en la enseñanza de la matemática intervienen distintos registros, especialmente el algebraico, el gráfico y el del lenguaje natural. Según los trabajos de Duval, el proceso de comprensión se favorece por el uso de al menos dos de ellos, pero, por tradición en la enseñanza, se privilegia solo el algebraico.

Estas operaciones son comunes y espontáneas para los matemáticos, pero no lo son para los estudiantes, debido a que fácilmente confunden el objeto con su representación. Por otro lado, la enseñanza de la matemática da preferencia al registro algebraico-simbólico en desmedro sobre todo del registro lenguaje natural y muchas veces del registro gráfico, por cuestiones de rigor (y, a veces, de brevedad). Todo esto trae como consecuencia dificultades que inciden en el proceso de comprensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes.

Estas dificultades, de naturaleza cognitiva, sin duda son consecuencia, en algún grado, de los tratamientos de las materias que realizan los docentes, de los ejemplos que presentan, de los ejercicios y problemas que seleccionan para el estudio y que proponen en las evaluaciones.

Otro aspecto didáctico que tiene en cuenta esta investigación tiene que ver con la metodología de la clase. En general, en la enseñanza superior la clase típica es la expositiva, en la cual el discurso del profesor tiene un gran espacio, “se pasa materia” muchas veces con rapidez (confundiendo el tiempo de enseñanza con el de aprendizaje) lo que de algún modo dificulta el proceso de comprensión de los estudiantes, debido a la falta de tiempo para la reflexión. Todo esto se agrava cuando los ejemplos aclaratorios son escasos y los problemas que se seleccionan y/o se proponen son los clásicos y sus resoluciones son expuestas por el profesor en la pizarra, en el mejor de los casos con un diálogo con algunos estudiantes-aquellos que siguen el ritmo de la exposición-.

Por otra parte, ya mencionamos que nuestro marco teórico tomaba en cuenta aspectos estadísticos con apoyo del programa CHIC que permite estructurar y sintetizar los datos procesados. De esta manera pretendemos obtener un perfil de comportamientos de los profesores sometidos a la encuesta que sirve de base a esta investigación.

En nuestro caso nos interesan las frecuencias de las respuestas, cuyas alternativas admiten la codificación 0,1. (Cf. Anexo 1 Resolución esperada de la Encuesta).

Se trata de obtener una partición óptima en subintervalos de valores y luego una implicación óptima de la unión de esos subintervalos. A continuación exponemos una síntesis de las ideas clave de este análisis estadístico multidimensional según Régis Gras y su equipo.

### **3 Grafo implicativo**

El grafo implicativo es un grafo en el cual las variables que poseen una intensidad de implicación superior a un cierto índice están ligadas por una flecha que representa la implicación. Se pueden seleccionar índices diferentes marcados en el grafo con distintos colores y estos valores los puede disponer el usuario como lo desee. Estos datos, CHIC los puede recuperar fácilmente, de manera que están disponibles para diferentes exploraciones y modificaciones (variables, talla de las flechas) del usuario. En un primer momento, CHIC ubica las variables sin minimizar de manera óptima los cruzamientos y, por ejemplo, las cadenas transitivas no se añaden en el grafo, pero el usuario tiene una buena opción para hacerlo en cualquier momento y también para suprimirlas. Otra opción permite conservar la frecuencia de ocurrencias y el usuario decidirá conservar aquellas que tienen un alto soporte (cercano al 90 %) y suprimir las de bajo soporte, lo que es de utilidad para la interpretación de resultados.

Es posible, además, elegir una zona de trabajo por defecto y hacerla evolucionar en el curso del estudio. Finalmente, CHIC permite salvaguardar diferentes estados de un grafo (disposición de variables, índices de implicación, selección o no de alguna variable), y así poner en evidencia diferentes partes del grafo.

### **4 Jerarquía Cohesitiva**

Ella se basa en el criterio recursivo de la cohesión, el cual se representa por medio de una jerarquía ascendente, cuyo nivel está dado por la cohesión de las particiones orientadas de manera decreciente y cada vez menos finas, en el conjunto de las variables.

El índice de implicación entre dos variables está dado por el cálculo de la cohesión de la clase, éste da cuenta de la calidad de la implicación orientada, en una clase de variables y traduce la noción de meta regla o regla sobre regla.

Una Jerarquía ascendente o árbol cohesitivo traduce gráficamente un embotellamiento sucesivo de las clases constituidas según el criterio de cohesión que es decreciente a medida que aumenta en la jerarquía. Un nivel final de cohesión permite evitar constituir clases que no tengan un sentido implicativo, lo que se produce en las jerarquías clásicas, pero que están más conformes al campo semántico.

En el árbol de cohesión, las clases de variables están constituidas a partir de las implicaciones entre ellas.



El algoritmo agrega en cada etapa las variables conducentes a la cohesión más fuerte en ella y permite construir el árbol de manera casi sistemática y termina su proceso de construcción cuando la cohesión entre las variables aparece muy débil.

#### **4.1 Tipicalidad y Contribución de los sujetos. Categorías de sujetos en los grafos y jerarquías implicativas.**

La *tipicalidad* y la *contribución* consisten en primer lugar en medir la parte de “responsabilidad” de sujetos o de categorías de sujetos (variables suplementarias) en la génesis del grafo y del árbol. En segundo lugar, definir métricas en el conjunto de los sujetos y finalmente distinguir la tipicalidad (comportamiento en relación a las reglas contingentes) y la contribución (comportamiento en relación a las reglas formales).

#### **4.2 Niveles y Nudos significativos**

Las nociones de *nivel* y de *nudos significativos* están señaladas por flechas rojas que indican al usuario las clases sobre las cuales debe poner más atención respecto a los índices de implicación iniciales.

Ya sea que se trate de caminos del grafo implicativo o de clases cohesivas, es interesante conocer su tipicalidad y contribución, para constatar cuál es la responsabilidad de los sujetos en la formación de ellas

#### **4.3 Árbol de Similitud**

Este árbol se forma con las particiones cada vez menos finas del conjunto de las variables estudiadas; se construye de manera ascendente con ayuda de un criterio llamado de *similaridad*.

El análisis del árbol permite estudiar e interpretar, en términos de tipología y de semejanza estadística (o no semejanza), las clases de variables, constituidas significativamente, en ciertos niveles.

La similaridad se define a partir del producto cartesiano entre el conjunto de las variables y el conjunto de los sujetos. El criterio de similaridad en el caso de variables binarias (presencia/ausencia; sí/no; verdadero/falso...) se expresa de la manera siguiente:

Siendo  $E$  el conjunto de variables, dos variables  $a$  y  $b$  que satisfacen dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $E$  son tanto más semejantes cuando  $k$  sujetos los verifican simultáneamente; es decir, aquellos de  $A \cap B$ , lo que es importante en

consideración de por una parte de lo que habría sido en el caso de ausencia de ligazón a priori entre  $a$  y  $b$  y por otra parte, de los cardinales de  $E$ ,  $A$  y  $B$ .

Se mide esta semejanza por la probabilidad de que  $k$  sea superior al número aleatorio esperado en esta situación donde sólo el azar intervendría. El índice entre las variables que le corresponde no está sesgado por el tamaño de  $A \cap B$  y no coincide entonces con el coeficiente de correlación lineal.

La modelación probabilista de la variable aleatoria, donde  $k$  es la realización presente, puede ser Binomial o de Poisson, según lo desee el usuario. La segunda posibilidad supone que  $E$  sea una muestra de una población más amplia que la inicial, lo que no supone la primera. Si  $E$  no tiene ninguna razón estadística a priori de ser representativa, es preferible usar el modelo Binomial, que analiza la estructura de  $E$  en cuanto tal. Cuando los parámetros lo permiten, puede efectuarse una aproximación gaussiana de esas dos leyes.

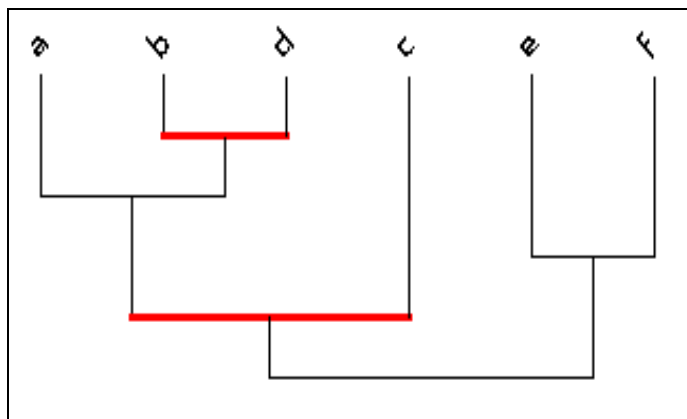


Fig. 1: *Árbol de similaridad*

El índice de similaridad entre variables sirve también para definir un *índice de similaridad entre dos clases* de variables según el mismo principio de comparación entre la *observación* y lo que *daría el azar*.

El árbol de similaridad da para cada par de variables la similaridad entre ellas y un algoritmo para formar nuevas clases, formadas por otras clases, como lo muestra el árbol.

## 5 Metodología

El diseño metodológico que hemos adoptado se apoya en una encuesta dirigida a profesores la que consta de siete preguntas sobre el tratamiento del capítulo dedicado a los números reales.

Las preguntas se refieren al grado de dificultad del tema para enseñarlo, la importancia que tiene, el tiempo que el profesor le dedica, el uso de ejemplos ilustrativos, la selección de ejercicios y problemas que hace y la metodología empleada en sus clases. Estas preguntas están referidas al tratamiento de la Axiomática, las Ecuaciones, las Inecuaciones y los Problemas de Aplicación.

Preg.	Tema	Axiomática	Ecuaciones	Inecuaciones	Problemas de Aplicación
1	Grado de dificultad.				
2	Grado de importancia.				
3	Distribución del tiempo.				
4	Ejemplos ilustrativos.				
5	Ejercicios y Problemas.				
6	Tipo de Presentación de la material.				
7	Metodología usada en clase.				

Tab. 1: Preguntas de la encuesta

Las respuestas que se esperan para cada pregunta tienen cuatro alternativas.

Los profesores encuestados pertenecen a una institución universitaria representativa en el país cuyos docentes y tienen una formación sólida en matemáticas: grado de magíster o doctor.

Los datos recogidos en esta encuesta los procesamos a través del software estadístico multidimensional, de Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesitiva (CHIC) de modo que atendiendo a las exigencias del programa asignamos por ejemplo a las respuestas referidas a la pregunta Selección de Ejercicios y Problemas, 0: *no selecciona utiliza las guías preparadas*, 1: *Selecciona ejercicios rutinarios*, 2: *Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos*, 3: *Selecciona Ejercicios y Problemas abiertos en distintos contextos, y con demostración*. Para el momento de la aplicación de la encuesta se había previsto poner énfasis en que las preguntas tenían como sujeto al profesor y a su quehacer. (Cf Anexo 2, alternativas de respuestas.

La presente investigación se interesa en conocer cómo enfrentan los profesores el tratamiento que realizan de acuerdo al grado de dificultad que encuentran al tratarlo en clases, el grado de importancia que le otorgan, al tiempo que le dedican, al uso de ejemplos ilustrativos, a la selección de ejercicios y problemas, al uso de los registros algebraico, de lenguaje natural y gráfico y tipo de metodología expositiva, con actividad de alumnos, con uso de tecnologías.

El tratamiento de la axiomática necesita una preocupación por parte del profesor en relación con la presentación del tema, lo que sobrepasa la exposición, debido a que hay que demostrar proposiciones de acuerdo con un marco teórico que no es del mundo sensible y no responde al sentido común, lo que trae dificultades a los estudiantes, porque es necesario haber aprendido a respetar ese marco teórico. Además, los conocimientos anteriores de los estudiantes al respecto los llevan a trabajar más por intuición que respetando reglas, axiomas, definiciones.

Las ecuaciones son difíciles porque también los conocimientos anteriores de los estudiantes obstaculizan la presentación de carácter matemático, más lejano de la técnica que ellos han aprendido en el liceo. La presentación de las ecuaciones se realiza en el registro algebraico que es también utilizado en el liceo.

Respecto a las inecuaciones la dificultad está en que la presentación necesariamente recurre a dos registros, el algebraico y el gráfico, y ya no se está en una situación de mono-registro como en las ecuaciones; además para la resolución de las inecuaciones es necesario situarse en un Cuerpo Ordenado, en cambio para las ecuaciones basta tener una estructura de Cuerpo. La dificultad para los estudiantes se presenta debido a que ellos no ven las diferencias mencionadas y utilizan las mismas técnicas de resolución en las ecuaciones e inecuaciones y por lo tanto se producen las equivocaciones.

Los ejemplos ilustrativos son muy importantes debido a su carácter aclaratorio. Los ejercicios y problemas clásicos son necesarios, pero mucho más relevantes son los problemas nuevos y los problemas abiertos, ya que apuntan tanto a la integración como a la transferencia y aplicación de los conocimientos. El profesor tiene un trabajo adicional en la selección de este tipo de problemas. En cambio para los ejercicios rutinarios y problemas clásicos están disponibles el texto institucional y/o las guías de la plataforma virtual.

## **6 Análisis de Resultados**

Realizamos la codificación y procesamos los datos con CHIC y obtuvimos los tres árboles que arroja el programa: estudiaremos el grafo implicativo, el árbol de cohesión y también el árbol de similaridad.

A continuación el grafo implicativo:

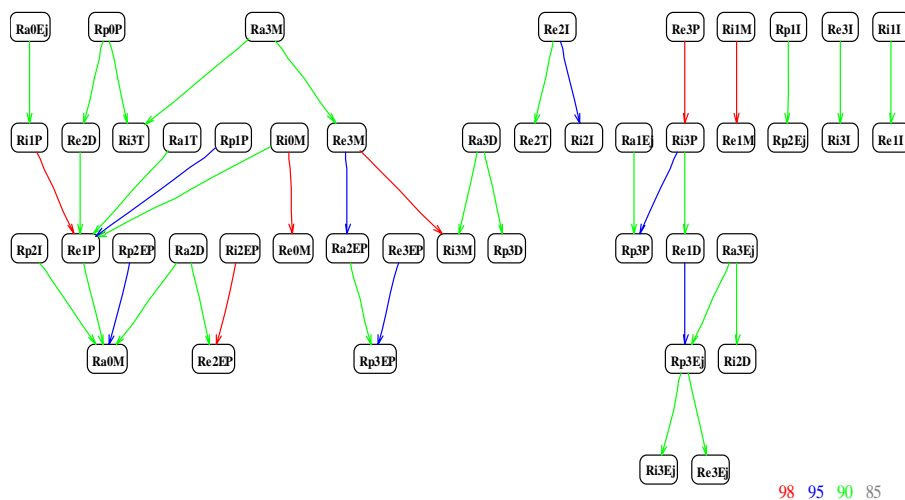


Fig. 2: Grafo implicativo

### 6.1 Análisis del grafo Implicativo

Leyendo este árbol de derecha a izquierda, se distinguen las tres ramas que se muestran a continuación:

En la **primera rama** se distinguen tres caminos, siendo Ra0M un nudo:

- Ra0Ej, Ri1P, Re1P, Ra0M
- Rp0P, Re2D, Re1P, Ra0M
- Rp1P, Re1P, Ra0M

Se constata que el *primer camino* conecta a los docentes que dicen privilegiar lo algebraico y simbólico en los problemas de aplicación (Rp1P), también lo hacen en la presentación de las ecuaciones (Re1P) y afirman que no dan importancia a la axiomática en el tratamiento de los números reales (Ra0M).

Se percibe en este grupo de respuestas que quienes señalan que privilegian lo expositivo para el tratamiento de la Axiomática (25/30), tratan las ecuaciones (18/30) privilegiando lo algebraico y simbólico. Posiblemente esto significa que la

exposición se mantiene, y (13/30) señalan que encuentran bastante dificultad en el tratamiento de las ecuaciones.

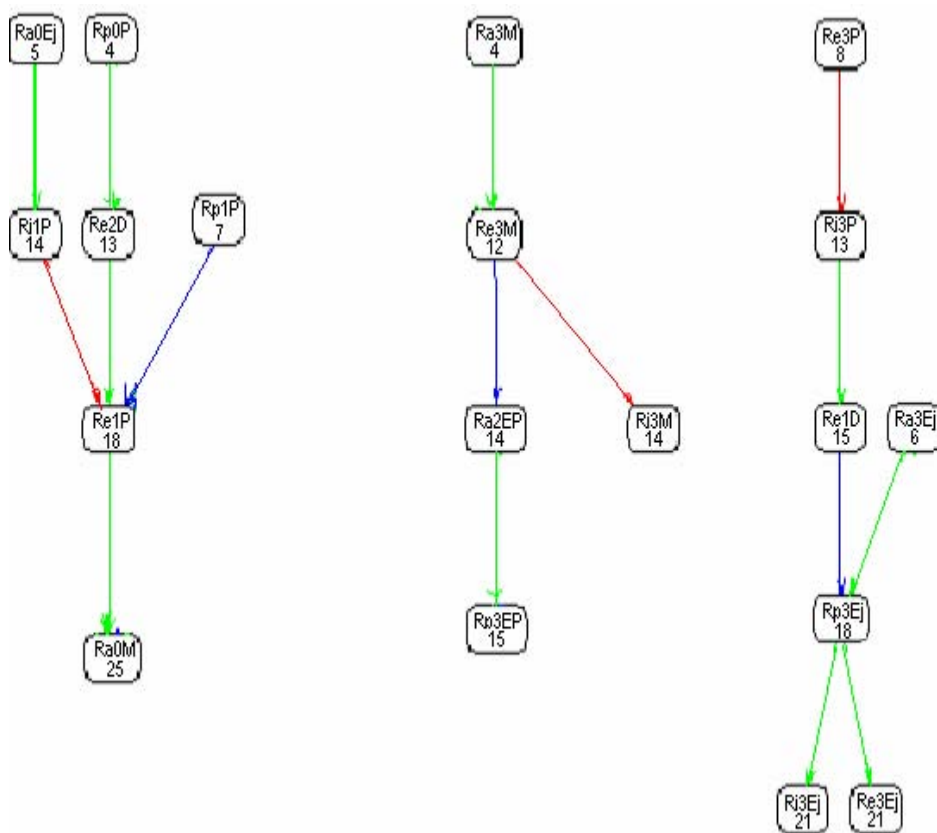


Fig. 3: Grafo implicativo. Detalle por rama

El segundo camino de esta rama conecta a los docentes que afirman que privilegian lo conceptual y el uso del lenguaje natural en la presentación de los problemas de aplicación (Rp0P), ellos señalan encontrar bastante dificultad en el tratamiento de las ecuaciones (Re2D) y que privilegian lo algebraico y simbólico en la presentación de las inecuaciones (Ri1P), lo mismo para la presentación de las

ecuaciones (Re1P). Señalan además que privilegian lo expositivo para la presentación de la axiomática (Ra0M).

El *tercer camino* conecta a los docentes que señalan no recurrir a ejemplos ilustrativos en la presentación de la Axiomática (Ra0Ej), que privilegian lo algebraico y simbólico en la presentación de las ecuaciones (Ri1P) y no dan importancia a la axiomática (Ra0M).

En este grupo 5 de 30 encuestados señalan que no recurren a ejemplos ilustrativos en la presentación de la axiomática; 18 de 30 señalan que presentan las ecuaciones privilegiando lo algebraico y simbólico; 14 de 30 también lo hacen en la presentación de las ecuaciones.

Como se puede constatar Ra0M resulta un ítem básico, recibe 25 preferencias.

Esta primera rama muestra un profesor en cuyo quehacer docente se privilegia lo expositivo, lo algebraico y simbólico en la presentación de las materias y que señala encontrar bastante dificultad en el tratamiento de las ecuaciones. Dentro del grupo de profesores encuestados aquellos que cumplen con este perfil son los asignados por E7, E14 y E27.

La *segunda rama* contiene dos caminos:

Ra3M, Re3M, Ra2Ep, Rp3Ep  
Ra3M, Re3M, Ri3M

El *primer camino* conecta las respuestas de docentes que señalan que combinan metodologías para el tratamiento de la axiomática y lo mismo para el tratamiento de las ecuaciones; en el tercer ítem estos docentes señalan también que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos para el tratamiento de la axiomática (Ra2Ep) y que seleccionan ejercicios y problemas abiertos para el caso de los problemas de aplicación (Rp3Ep).

El *segundo camino* coincide en los dos primeros ítem con el primero, pero en el tercero los encuestados señalan que seleccionan también combinan metodologías para el tratamiento de las ecuaciones.

El perfil de los profesores de esta rama se caracteriza por señalar que combinan metodologías para el tratamiento de la axiomática y ecuaciones, seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos en el tratamiento de la axiomática y seleccionan problemas abiertos para los problemas de aplicación.

Este perfil nos plantea interrogantes, ya que 12 de 30 profesores señalan combinar metodologías: ¿qué se entiende por combinar metodologías? ¿se refiere a la resolución de problemas? ¿a la presentación de las materias? Estas interrogantes

nos indican que necesitamos complementar esta investigación con entrevistas formales –la investigación contempló entrevistas informales–, puesto que las preguntas no dan señales al respecto.

Dentro de los profesores encuestados, aquellos que cumplen con este perfil son los designados por E9, E16, E30 y E32.

En la *tercera rama* se distinguen cuatro caminos

Re3P, Ri3P, Re1D, Rp3Ej, Ri3Ej

Re3P, Ri3P, Re1D, Rp3Ej, Re3Ej

Ra3Ej, Rp3Ej, Re3Ej,

Ra3Ej, Rp3Ej, Ri3Ej

El *primer camino* conecta a los docentes que señalan combinar adecuadamente lo algebraico con lo gráfico en el tratamiento de las ecuaciones (Re3P), e igualmente para el tratamiento de las inecuaciones (Ri3P), pero dicen encontrar alguna dificultad en la enseñanza de las ecuaciones (Re1D) y señalan que utilizan dos o tres ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de aplicación (Rp3Ej) y lo mismo para el tratamiento de las inecuaciones (Ri3Ej).

El *segundo camino* coincide en los cuatro primeros ítems del primer camino y en el quinto Re3Ej señalan que utilizan dos o más ejemplos en el tratamiento de las ecuaciones.

El *tercer camino* de esta rama conecta a quienes señalan utilizar dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en la presentación de la axiomática (Ra3Ej) y lo mismo para el caso de los problemas de aplicación (Rp3Ej) y también para el tratamiento de las ecuaciones (Re3Ej).

El *cuarto camino* coincide en los dos primeros ítems con el camino anterior, pero el tercer ítem (Re3Ej) indica la utilización de dos o más ejemplos en el tratamiento de las inecuaciones, lo mismo que señalaron en el caso de las ecuaciones.

Este grupo de profesores de la tercera rama se caracteriza por señalar que combina adecuadamente lo algebraico con lo gráfico en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones, por encontrar alguna dificultad en la enseñanza de las ecuaciones y utilizar dos o más ejemplos en los tratamientos de las ecuaciones e inecuaciones.

Dentro de los profesores encuestados, aquellos que cumplen con este perfil son los designados por E15, E21, E25 y E32.



En esta primera lectura del árbol implicativo puede percibirse una coherencia en el quehacer que desarrollan los docentes, aun cuando aparecen ciertos fenómenos, por ejemplo el tratamiento que dicen hacer para las ecuaciones es el mismo que el que utilizan para las inecuaciones. Y es sorprendente que la mayoría de los docentes (25 de 30) señale que no le da importancia al tratamiento de la axiomática.

## **6.2 Análisis del Árbol Cohesivo (Árbol en Anexo 3)**

De este árbol seleccionamos 20 niveles (Cf. Anexo 3), pero solamente analizaremos los más significativos.

En el árbol de cohesión se constata que el tratamiento de las ecuaciones y el de las inecuaciones son similares, en la selección de los ejemplos, de ejercicios rutinarios y problemas; en la metodología que se utiliza y los problemas de aplicación que ellos seleccionan; en la presentación, los profesores señalan que privilegian los registros algebraico y simbólico.

Los seis primeros niveles del árbol de cohesión se refieren al tratamiento de las ecuaciones y las inecuaciones:

El nivel 1 se refiere al uso de ejemplos ilustrativos y 21 profesores señalan que usan uno o más en sus tratamientos. El resto de los profesores (9) señala que usa un ejemplo por concepto.

En el nivel 2 de cohesión (0.998) encontramos 19 profesores que señalan que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos.

En el nivel 5 (0.993) encontramos 14 profesores que señalan que privilegian lo algebraico en la presentación de estos temas.

En el nivel 6 (0.889) 17 profesores señalan que dan bastante importancia a las ecuaciones e inecuaciones.

Respecto a la metodología (expositiva, actividad del alumno, tecnologías), en el nivel 8 (0.878) 12 profesores señalan que las combinan en estos temas y para la presentación de la axiomática seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos.

## **6.3 Análisis del árbol de Similaridad (Cf. Anexo 4)**

Este árbol corrobora las informaciones encontradas en el árbol de cohesión, pero se destaca que 13 profesores señalan que encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usan dos o más ejemplos ilustrativos por concepto

en los problemas de aplicación. Además, 9 profesores señalan que encuentran bastante dificultad en el tratamiento de los problemas de aplicación y le dan alguna importancia a la presentación de la axiomática y 18 profesores señalan que dedican el tiempo estipulado al tratamiento de la axiomática y de las ecuaciones.

## 7 Conclusiones

Estos primeros resultados de la investigación nos da algunas evidencias empíricas de una panorámica de la docencia que se imparte a nivel universitario; si bien este es un estudio cualitativo permite plantear algunas hipótesis, para una próxima investigación que comprenda una población mayor de encuestados.

Señalaremos tres hechos:

Primero, resulta sorprendente que la mayoría señale que realiza un tratamiento similar para las ecuaciones e inecuaciones, este un fenómeno didáctico a estudiar. Las ecuaciones e inecuaciones son objetos matemáticos distintos, por lo que hay diferencias en su funcionamiento: aunque tengan propiedades que sean similares, en la enseñanza deben tener énfasis las diferencias. La mayoría de los profesores nos dijo “es claro que hay diferencias”, entonces ¿por qué los estudiantes no las ven y trabajan con las inecuaciones tal como lo hacen con las ecuaciones?

Este fenómeno nos lleva a la siguiente reflexión acerca de dos tópicos relacionados con nuestro tema: el de ecuaciones e inecuaciones y el de la axiomática de los números reales.

### 7.1 Ecuaciones e Inecuaciones

Es claro que un (sistema de) ecuación (ecuaciones) es un caso particular de un (sistema de) inecuación (inecuaciones). En efecto y por ejemplo, la ecuación  $ax+b=0$  es la conjunción de las inecuaciones  $ax+b \geq 0$  y  $0 \geq ax+b$ .

Lo anterior no significa, evidentemente, que el tratamiento de las ecuaciones para los estudiantes se consiga como caso especial del de las inecuaciones. Ello no solo porque las inecuaciones resultan ser un conocimiento ‘más avanzado’ y que debe por tanto ser precedido del de las ecuaciones, sino porque, desde un punto de vista propiamente matemático, hay una diferencia crucial, bien conocida:

El ambiente natural de la resolución de ecuaciones es el de un Cuerpo (conmutativo) (el de los números reales, claro está). El procedimiento de resolución de ecuaciones simples se basa en dos propiedades que se deducen en forma inmediata de la estructura de cuerpo:

Sean  $a, b, c$  números reales. Entonces:

$$\text{Si } a = b, \text{ entonces } a+c = b+c \text{ (e inversamente)} \quad (1)$$

$$\text{Si } a = b \text{ y } c \neq 0 \text{ entonces } ac = bc \text{ (e inversamente)} \quad (2)$$

Por oposición a lo anterior, el ambiente natural de la resolución de inecuaciones simples es el de un Cuerpo (conmutativo) ordenado (el de los números reales). Para resolver inecuaciones simples, hay que recurrir no a propiedades deducibles de la estructura de cuerpo, sino a propiedades (axiomas) de compatibilidad de las operaciones con la relación de orden:

Sean  $a, b, c$  números reales. Entonces:

$$\text{Si } a \geq b, \text{ entonces } a+c \geq b+c \text{ (e inversamente)} \quad (3)$$

$$\text{Si } a \geq b \text{ y } c > 0 \text{ entonces } ac \geq bc \text{ (e inversamente)} \quad (4)$$

La diferencia crucial en el aprendizaje está en la multiplicación: si bien para el caso de las ecuaciones la restricción  $c \neq 0$  en (2) produce ocasionales dificultades si se la olvida (pero situaciones que contengan esa dificultad no son frecuentes, o bien el profesor no las enfatiza o tal vez ni siquiera las mencione), para el caso de las inecuaciones la restricción  $c > 0$  en (4) es de uso tan habitual que se constituye naturalmente en el instrumento que muestra si el estudiante ha aprendido la resolución de inecuaciones simples o no lo ha hecho.

Todo lo anterior tiene sus traducciones al registro gráfico (en términos de diagramas cartesianos), en los que también se puede apreciar la diferencia substantiva que hay entre tratar con ecuaciones y con inecuaciones, respectivamente: si en una basta con intersectar rectas o curvas simples (lo que dará generalmente una colección finita de puntos), en la otra ya en el caso lineal hay que habérselas con semiplanos (cuya intersección da regiones del plano, no numerables).

En cualquier caso, una muestra indirecta de la distancia que hay para un alumno entre las ecuaciones y las inecuaciones se puede obtener a partir de la siguiente observación:

Frente a un sistema de ecuaciones lineales indeterminado, un alumno encontrará que tiene una cantidad abundante de soluciones y se inclinará por escribir, como respuesta, la ingenua expresión “infinitas soluciones” –sin preocuparse mayormente de cuáles son–. En cambio, frente a una inecuación, él sabe que las soluciones son, casi siempre, infinitas, pero tiene muy claro que en ese caso no le bastará con decir que hay “infinitas soluciones”.

En segundo lugar, otro hecho que llama la atención es el referente la axiomática de los Números reales: la gran mayoría la presenta con una metodología expositiva y dedicándole el tiempo estipulado en el programa. En las entrevistas informales algunos profesores opinaron que para los estudiantes es difícil esta parte, y dado que ya aprendieron algunas reglas en el liceo, para qué complicarlos si ello no es materia de pruebas.

Percibimos aquí un claro efecto Jourdain, y por otro lado nos surge la pregunta ¿por qué no es materia de prueba? Y a partir de ella surgen nuevas preguntas, ¿qué rol juega la lógica entonces en un curso de matemáticas de primer año universitario, en particular en uno de Cálculo? ¿Se reduce a las técnicas sin explicaciones de los *por qué*?

Por otra parte, en ausencia de axiomática, la matemática se transforma en un proceso deductivo sin asidero inicial, de manera que es difícil separar la heurística o el razonamiento plausible del razonamiento correcto. Esto último no parece, en principio, tan grave pues, en la práctica, cada quien dará algunas cosas por sabidas, simplemente (si bien en muchos casos sería mejor hacer ese proceso en forma consciente). Sin embargo, si no se tiene cuidado, será difícil distinguir entre el cuerpo ordenado los números reales del cuerpo ordenado de los números racionales: después de todo, lo que hace la diferencia, cualquiera sea la presentación que se haga de ellos, es, al fin y al cabo (una versión equivalente a) el axioma del supremo.

## 7.2 Comentario Final

Respuestas de estudiantes a problemas simples, por ejemplo, sobre la definición de límite de una función, dejaron en evidencia aplicaciones de técnicas de cálculo; fue lo que nos motivó a preguntarnos qué enseñanza recibieron estos estudiantes, y a elaborar la encuesta estudiada la cual encuentra en lo anterior alguna explicación.

Finalmente, la pregunta sobre el uso de metodologías no nos quedó clara: nosotros nos referíamos a privilegio de clases expositivas, o con énfasis en la actividad del estudiantes, o uso de tecnologías, y muchos lo entendieron así, pero otros lo confundieron con la presentación de las materias respecto al privilegio de algún registro: algebraico, gráfico o lenguaje natural.

Lo que nos alerta para la próxima aplicación de la encuesta.

## Bibliografía

- Ag Almouloud, S. (2006), *Instrumentos de Análisis de datos multidimensionales*, Seminario, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Duval R. (2000). *Especificidad de los objetos matemáticos*, Semana de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Duval R. (2000). *Un tema crucial en la educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, RSME, Vol 9, N° 1, pp. 143-168.
- Duval R. (2004). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Curso de Doctorado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Gras, R. (2004). *L'analyse statistique implicative: ses bases, ses développements*, [http://math.unipa.it/~grim/asi/asi\\_03\\_gras.pdf](http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_03_gras.pdf)

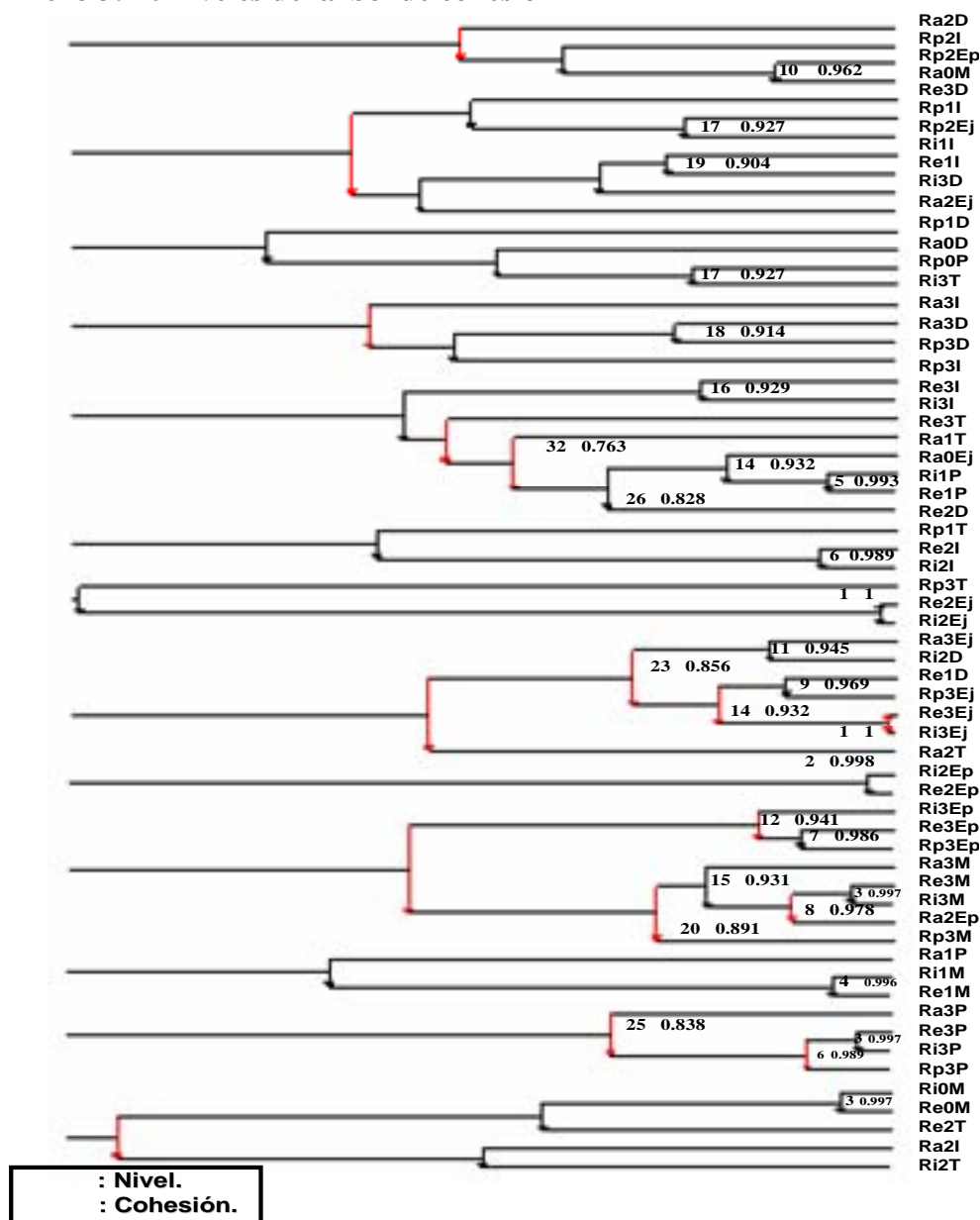
## Anexo 1: Resolución esperada de la encuesta

Preg.	Tema	Axiomática	Ecuaciones	Inecuaciones	Problemas de Aplicación
1	Grado de dificultad	2	2	3	2
2	Grado de importancia	3	2	2	3
3	Distribución del tiempo	3	2	2	3
4	Ejemplos ilustrativos	3	3	3	3
5	Ejercicios y Problemas	3	3	3	3
6	Tipo de Presentación de la materia	0	1	3	3
7	Metodología usada en clase	3	3	3	3

**Anexo 2: Las alternativas de respuestas en el siguiente cuadro:**

	<b>Pregunta N°1: Sobre el grado de dificultad del Tema</b>
<b>0</b>	Sin Dificultad
<b>1</b>	Alguna dificultad
<b>2</b>	Bastante Dificultad
<b>3</b>	Mucha dificultad
	<b>Pregunta N°2: Sobre el Grado de Importancia del Tema</b>
<b>0</b>	Sin importancia
<b>1</b>	Alguna Importancia
<b>2</b>	Bastante Importancia
<b>3</b>	Mucha importancia
	<b>Pregunta N°3: Sobre el Tiempo Dedicado (programa)</b>
<b>0</b>	No le da tiempo
<b>1</b>	Menos de lo estipulado
<b>2</b>	Lo estipulado
<b>3</b>	Más de lo estipulado
	<b>Pregunta N°4: Sobre el uso de Ejemplos ilustrativos</b>
<b>0</b>	No usa
<b>1</b>	Usa a veces
<b>2</b>	Usa uno por concepto
<b>3</b>	Usa dos o más por concepto
	<b>Pregunta N°5: Sobre la selección de Ejercicios y Problemas</b>
<b>0</b>	No selecciona, utiliza guías
<b>1</b>	Selecciona ejercicios rutinarios
<b>2</b>	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos
<b>3</b>	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos, y con demostración
	<b>Pregunta N°6: Sobre el Tipo de presentación de la materia</b>
<b>0</b>	Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural.
<b>1</b>	Privilegia lo algebraico y lo simbólico
<b>2</b>	Privilegia lo gráfico
<b>3</b>	Combina adecuadamente lo algebraico y gráfico
	<b>Pregunta N°7: Sobre la Metodología usada en clases</b>
<b>0</b>	Privilegio de la exposición
<b>1</b>	Privilegia la actividad de alumnos
<b>2</b>	Privilegia la tecnología
<b>3</b>	Combina metodologías

Anexo 3: 20 niveles del árbol de cohesión



**Anexo 4: Interpretación del árbol de cohesión**

Nivel	Cohes.	Red	Interpretaciones
1	1	Re3Ej (21)- Ri3Ej (21)	Usa uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones.
	1	Re2Ej (9) - Ri2Ej (9)	Usa un ejemplo por concepto tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
2	0.998	Ri2EP (19) Re2EP (20)	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
3	0.997	Re3P (8) - Ri3P (13)	Combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico en ecuaciones como en inecuaciones.
		Re3M (12) - Ri3M (14)	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones y en las inecuaciones.
	0.997	Ri0M (6) - Re0M (11)	Privilegia lo expositivo como metodología, tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
4	0.996	Ri1M (10) - Re1M (11)	Privilegia la actividad del alumno como metodología en las inecuaciones como en las ecuaciones.
5	0.993	Ri1P (14) - Re1P (18)	Privilegia lo algebraico y lo simbólico en la presentación de las inecuaciones y también de las ecuaciones.
6	0.989	Re2I (17) - Ri2I (18)	Da bastante importancia a las ecuaciones como a las inecuaciones.
		[Re3P (8) - Ri3P (13)] - Rp3P (18)	Combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico en ecuaciones como en inecuaciones y también en los problemas de aplicación.
7	0.986	Re3EP (7) - Rp3EP (15)	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostración en las ecuaciones y en problemas de aplicación.
8	0.978	[Re3M (12) - Ri3M (14)] -Ra2EP (14)	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones como en las inecuaciones. Además, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en la Axiomática.
9	0.969	Re1D (6) - Rp3Ej (18)	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en las problemas de aplicación.
10	0.962	Rp2EP (14) - Ra0M (25)	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en los problemas de aplicación y privilegia la exposición en la Axiomática.
11	0.945	Ra3Ej (6) - Ri2D (17)	Usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en la axiomática y encuentra bastante dificultad en el tratamiento de las inecuaciones.



¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales

Nivel	Cohes.	Red	Interpretaciones
12	0.941	Ri3EP (7) - [Re3EP (7) - Rp3EP (15)]	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostración en las inecuaciones y también en las ecuaciones y en problemas de aplicación.
13	0.937	[Ra4P (0) - Ri4P (0)] - [Re4P (0) - Rp4P (0)]	Sin respuesta.
14	0.932	Ra0Ej (5) - [Ri1P (14) - Re1P (18)]	No usa ejemplos ilustrativos en la Axiomática y privilegia lo algebraico y simbólico en las inecuaciones y ecuaciones.
		[Re1D (4) - Rp3Ej (18)] - [Re3Ej (21) - Ri3Ej (21)]	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de aplicación. Además, usa de uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones.
15	0.931	Ra3M (4) - [[Re3M (12) - Ri3M (14)] - Ra2EP (14)]	Combina metodologías en la Axiomática, ecuaciones e inecuaciones y además en la Axiomática selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos.
16	0.929	Re3I (6) - Ri3I (9)	Da mucha importancia a las ecuaciones e inecuaciones.
17	0.927	Rp0P (7) - Ri3T (11)	Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural en los Problemas de aplicación y dedica más tiempo de lo estipulado (según el programa) al tratamiento de las Inecuaciones.
		Rp1I (4) - Rp2Ej (11)	Da mucha importancia a problemas de aplicación y usa un ejemplo ilustrativo por concepto en las inecuaciones.
18	0.914	Ra3D (7) - Rp3D (13)	Encuentra mucha dificultad en la Axiomática y en Problemas de aplicación.
19	0.904	Ri1I (3) - Re1I (6)	Le da alguna importancia a las Inecuaciones como a las Ecuaciones.
20	0.891	[Ra3M (4) - [[Re3M (12) - Ri3M (14)] - Ra2EP (14)] - Rp3M (15)]	No usa ejemplos ilustrativos en la Axiomática y privilegia lo algebraico y simbólico en las inecuaciones y ecuaciones. Además, combina metodologías en Problemas de aplicación.

**Anexo 5: Descripción del árbol de similitud**

Nivel	Clase (Frec)	Similaridad	Sujetos	Interpretaciones
33	Re2Ej, Ri2Ej (9)	0.999976	E27 E30 E5 E11 E17 E12 E7 E23 E19	Usa un ejemplo por concepto tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
45	Re1M, Ri1M (9)	0.998651	E7 E4 E18 E17 E15 E19 E8 E23 E21	Privilegia la actividad del alumno como metodología en las inecuaciones como en las ecuaciones.
54	Re3M, Ri3M (11)	0.993955	E26 E32 E30 E31 E9 E5 E2 E13 E24 E22 E16	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones como en las inecuaciones.
69	Re3Ej, Ri3Ej (21)	0.974085	E21 E22 E29 E31 E32 E28 E24 E25 E26 E4 E6 E8 E1 E2 E3 E15 E16 E18 E9 E10 E13	Usa uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones.
70	Re1P, Ri1P (13)	0.966096	E28 E27 E4 E31 E1 E3 E19 E13 E14 E7 E5 E24 E6	Privilegia lo algebraico y lo simbólico en la presentación de las inecuaciones y también de las ecuaciones.
71	Re2EP, Ri2EP (18)	0.96225	E5 E26 E24 E25 E1 E31 E2 E3 E4 E17 E15 E14 E12 E9 E23 E6 E8 E19	Selecciona ejemplos ilustrativos y problemas clásicos tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
72	Ra2EP, Re3M, Ri3M (11)	0.962198	E13 E32 E31 E30 E26 E9 E5 E2 E24 E22 E16	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones y en las inecuaciones. Además, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en la Axiomática.
74	Re2I, Ri2I (15)	0.960659	E26 E25 E31 E29 E30 E28 E24 E9 E10 E12 E11 E3 E22 E21 E19	Da importancia a las ecuaciones como a las inecuaciones.

¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales

Nivel	Clase (Frec)	Similaridad	Sujetos	Interpretaciones
78	Re1D, Rp3Ej (13)	0.941875	E31 E32 E25 E13 E12 E10 E9 E3 E22 E21 E18 E16 E15	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de Aplicación.
87	Rp2D, Ra1I (9)	0.880464	E32 E31 E30 E29 E18 E8 E7 E6 E3	Encuentra bastante dificultad en el tratamiento de los problemas de aplicación y le da alguna importancia a la Axiomática.
90	Ra2I, Ri2T (9)	0.832979	E28 E15 E13 E2 E22 E19 E25 E11 E27	Le da alguna importancia a la Axiomática y dedica el tiempo estipulado (según el programa) al tratamiento de las Inecuaciones.
92	Ra2Ej, Rp3M (9)	0.829325	E30 E16 E13 E4 E2 E23 E22 E21 E19	Usa un ejemplo ilustrativo por concepto en la Axiomática y combina metodologías en los problemas de aplicación
94	Rp2EP, Ra0M (14)	0.82278	E4 E5 E29 E1 E31 E14 E25 E10 E19 E18 E11 E6 E12 E8	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en los problemas de aplicación y privilegia la exposición en la Axiomática.
99	Ra2T, Re2T (18)	0.714625	E26 E27 E25 E24 E28 E32 E31 E30 E1 E18 E17 E10 E8 E19 E23 E22 E21 E9	Dedica el tiempo estipulado (según el programa) al tratamiento de la Axiomática y en las Ecuaciones.
107	Re1D, Rp3Ej, Rp3I, Re3Ej, Ri3Ej (12)	0.491846	E25 E3 E31 E13 E21 E32 E15 E10 E9 E22 E18 E16	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de aplicación. Además, usa uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones.



# El análisis implicative como medio de evaluación de los estudiantes futuros maestros de escuela y de su formación en geometría plana

Françoise Jore

Traducido por Breogán Chao

Université Catholique de l'Ouest  
Institut de Mathématiques Appliquées  
3, Place André Leroy BP 10808  
49000 ANGERS Cedex 01, France

[jore@uco.fr](mailto:jore@uco.fr)

<http://www.ima.uco.fr/jore/>

**Resumen.** En el marco de un trabajo sobre los paradigmas geométricos G1 y G2, se ha puesto en marcha un dispositivo de formación destinado a los futuros maestros de escuela que se encuentran en formación inicial. En este artículo mostraremos cómo el análisis implicative permite estudiar la relación entre los procedimientos de construcción con regla y compás, y el lenguaje utilizado para describir las secuencias de construcción. Esto nos permitirá hacer un balance de algunas de las competencias de los estudiantes al comienzo de su formación, así como analizar su lucidez desde el punto de vista de su relación respecto a los paradigmas G1 y G2, lo que nos permitirá también evaluar la eficacia de la formación.

## 1 Introducción

Las oposiciones para maestro de escuela (CRPE<sup>1</sup>) incluyen una prueba de matemáticas en la que los estudiantes deben ser capaces de efectuar

---

<sup>1</sup> *Concours de Recrutement des Professeurs d'Ecole*. Para trabajar como profesor en la Educación primaria en Francia los estudiantes deben aprobar estas oposiciones que incluyen, en efecto, una prueba de matemáticas (N. del T.)

demostraciones simples propias del colegio. Esto exige un mínimo dominio de los teoremas de la geometría Euclídea. No obstante, si bien estos teoremas fueron trabajados en el colegio, los estudiantes pueden, en el mejor de los casos, recitarlos y rara vez son capaces de operar con ellos. Por otro lado, durante las oposiciones se pide a menudo a los candidatos que realicen construcciones sirviéndose de la regla y el compás. En algunos casos se les pide también “escribir la secuencia de construcción”. Independientemente de la oposición, este es uno de los puntos que se trabajan en el ciclo 3<sup>2</sup> y que, por lo tanto, los futuros docentes deben dominar, lo que no sucede en absoluto al comienzo de la formación. Al lado de este trabajo muy ligado a las oposiciones, cabe realizar un trabajo de fondo en el campo de la geometría en lo que concierne a las relaciones de los estudiantes respecto a los objetos geométricos (objetos físicos u objetos teóricos) con los que trabajan. Ahora bien, hay que tener en cuenta que el tiempo de la formación es limitado y que, por lo tanto, el poco tiempo del que dispone el formador ha de aprovecharse al máximo. Es así como en el marco de mi tesis (Jore, 2006) me he visto llevada a proponer un dispositivo de formación sobre geometría plana para los estudiantes que preparan estas oposiciones. Se trata, por lo tanto, de valorar en qué medida una formación que es necesariamente corta puede hacer evolucionar la relación de los estudiantes respecto a los objetos geométricos.

En este artículo presentaremos brevemente el marco teórico de los paradigmas geométricos y el dispositivo de formación puesto en marcha. Nos detendremos en dos situaciones en las cuales el análisis implicativo se muestra especialmente pertinente. Analizaremos, en primer lugar, una situación de construcción de trazado de un triángulo rectángulo junto con la redacción de la secuencia de construcción y su justificación, donde se pretende, entre otras cosas, determinar la relación entre los procedimientos y el lenguaje utilizado. Esto nos permitirá, asimismo, realizar en paralelo una evaluación de las competencias de los estudiantes en este tipo de ejercicios al comienzo de su formación. Seguidamente, un problema planteado en torno a la mediatriz propuesta nos permitirá poner de manifiesto la lucidez de los estudiantes respecto a estos paradigmas geométricos y, de este modo, evaluar en parte la eficacia de la formación.

---

<sup>2</sup> El ciclo 3 abarca los tres últimos años de enseñanza durante la Educación primaria en Francia (8-11 años) (N. del T.)

## 2 Marco teórico

El marco teórico de referencia de este trabajo es el de los paradigmas geométricos de Parzysz (Parzysz, 2002), construidos a partir de los de Houdement (Houdement y Kuzniak, 1999 y 2000), y reformulados y detallados en mi tesis (Jore, 2006). Consideremos la siguiente pregunta realizada a más de 800 futuros maestros de escuela al comienzo de su formación inicial en el IUFM<sup>3</sup> o en el CFP<sup>4</sup>.

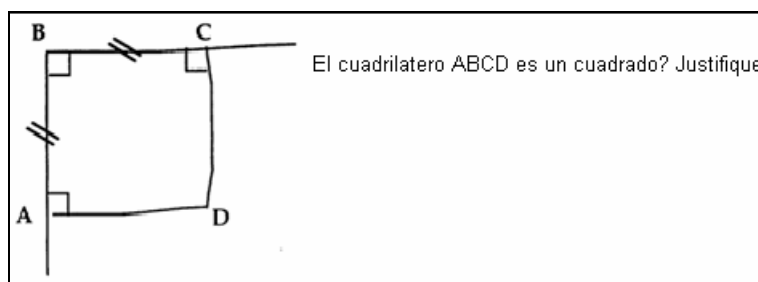


Fig. 1: ¿Es el cuadrilátero ABCD un cuadrado? Justifíquese

El 43% de los estudiantes afirma lo siguiente: “no es un cuadrado”, mientras que el 51% responde lo contrario, aun cuando desde el rigor matemático su justificación en este caso deje a veces bastante que desear. El análisis de las justificaciones permite poner de manifiesto las características de los dos paradigmas geométricos que nos interesan. El estudiante que considera que ABCD no es un cuadrado se sitúa dentro del paradigma **G1** (geometría espacial gráfica): este considera el dibujo que tiene delante de él como un **objeto físico**. Es el objeto geométrico sobre el que trabaja. Para llegar a la conclusión de que no es un cuadrado lleva a cabo una **comprobación de tipo perceptivo** (en concreto mira el dibujo, por ejemplo para constatar que “[CD] no está correctamente trazado”), o incluso instrumental (con la escuadra puede examinar el ángulo en D o comparar las longitudes con el compás). El estudiante que considera que ABCD es un cuadrado se sitúa dentro del paradigma **G2** (geometría proto-axiomática): este considera el dibujo que tiene delante de él como **la representación** de un **objeto**

<sup>3</sup> Los *Instituts Universitaires de Formation de Maître* (Institutos Universitarios para la Formación de Maestros) en Francia se encargan de formar a los futuros docentes después de tres años de estudios tras el *baccalauréat* (bachillerato).

<sup>4</sup> Los *Centres de Formation Pédagogique* (Centros de Formación Pedagógica) son el equivalente a los IUFM en la enseñanza privada.

**geométrico teórico.** Es el objeto teórico sobre el que trabaja. Para llegar a esta conclusión lleva a cabo una **comprobación de tipo hipotético deductiva**. Se trata de un razonamiento basado en las informaciones codificadas en el dibujo y los teoremas de la geometría Euclídea. La siguiente tabla recapitula las principales características de los paradigmas G1 y G2.

	Geometría espacial gráfica G1	Geometría proto-axiomática G2
Estatus del dibujo	objeto geométrico estudiado	representación de un objeto geométrico teórico
Naturaleza del objeto geométrico estudiado	dibujo (realidad espacial gráfica)	objeto geométrico teórico definido por una fórmula discursiva
Tipo de comprobación	esencialmente perceptiva	únicamente hipotético deductiva
Herramientas de comprobación	regla (graduada o no), escuadra, compás, papel de calco, papel cuadriculado, ...	reglas de la lógica y teoremas de la geometría euclídea
Naturaleza de las experiencias	efectivas (las más frecuentes)	mentales, virtuales
Construcciones	realización efectiva (física, material) de un trazado	algoritmo de obtención de un objeto a partir de condiciones definidas
Instrumentos de construcción	regla (graduada o no), escuadra, compás, papel de calco, papel cuadriculado, ...	objetos y teorías de la geometría Euclídea
Definiciones	Basadas en la percepción y la exclusión por oposición	Basadas en las propiedades geométricas y la inclusión por caracterización

Tab. 1: *Elementos característicos de los paradigmas G1 y G2*

En cada caso se puede considerar que las construcciones pertenecen al paradigma G1 o G2. En G1 se trata, en efecto, de realizar la construcción sirviéndose de los instrumentos necesarios, generalmente regla y compás, sobre un soporte material. El objeto resultante es un objeto físico, y las comprobaciones son, por lo tanto, perceptivas. En G2, aunque ocasionalmente pueda utilizarse el mismo vocabulario, concretamente el verbo “construir”, se trata, sin embargo, de determinar un objeto geométrico teórico a partir de otros objetos geométricos teóricos, en este caso rectas, círculos e intersecciones, para las construcciones



denominadas “con regla y compás”. La comprobación de la construcción es en este caso de tipo hipotético deductivo: se trata de explicitar las definiciones, propiedades, teoremas, axiomas que justifican la existencia de cada uno de los elementos de la construcción (puntos, rectas, círculos, intersecciones).

Estos paradigmas presentan una coherencia interna que las producciones de los estudiantes no siempre respetan: en lugar de trabajar completamente en G1 o G2, a menudo lo hacen en un “seudo- paradigma” que participa a la vez de G1 y G2, considerando, por ejemplo, el objeto con el que trabajan en un primer momento como físico, y posteriormente como teórico, y realizando al mismo tiempo comprobaciones perceptivas y deductivas.

### 3 Descripción de la formación propuesta

El dispositivo de formación puesto en marcha con 103 estudiantes tiene como objetivo, entre otros<sup>5</sup>:

- Hacer que los PE1<sup>6</sup> sean conscientes del paradigma o, en su caso, del seudo-paradigma en el que se sitúan cuando se trata de resolver un problema de geometría.
- Reavivar conocimientos y desarrollar competencias en G2.

Este dispositivo se divide en varias etapas:

- Etapa 1: “El punto sobre los cuadriláteros”. Se trata de recordar el carácter inclusivo de los diferentes conjuntos de cuadriláteros<sup>7</sup>, redefinir los objetos menos conocidos<sup>8</sup>, explicar el concepto de definición mínima<sup>9</sup> y llamar la atención sobre el papel de las posiciones y proporciones prototípicas de los dibujos propuestos.
- Etapa 2: “Trazar un triángulo rectángulo”. Se pide a los estudiantes que tracen un triángulo rectángulo sirviéndose de una regla no graduada y del compás, que

---

<sup>5</sup> No nos interesaremos aquí en la otra parte de la formación, relacionada con los aspectos didácticos de la enseñanza de geometría plana en el colegio.

<sup>6</sup> *Professeurs d'Écoles en première année* (Maestros de Escuela en primer año) (N. del T.)

<sup>7</sup> Por ejemplo, un cuadrado es un tipo particular de rectángulo, que asimismo es un tipo particular de paralelogramo, etc.

<sup>8</sup> Por ejemplo el deltoide.

<sup>9</sup> Definir un objeto no es dar la lista de todas sus propiedades, sino únicamente una lista de las propiedades necesarias y suficientes.

escriban la secuencia de construcción correspondiente y, por último, que señalen las propiedades que demuestran que efectivamente se ha trazado un triángulo rectángulo siguiendo esta secuencia. Es el momento de volver a ver los diferentes procedimientos que permiten trazar perpendiculares, de trabajar la redacción de la secuencia de construcción, pero, sobre todo, de hacer hincapié en las propiedades y teoremas utilizados. Los resultados de esta actividad se analizan más adelante. A continuación, se han propuesto otras construcciones a los estudiantes con el mismo propósito.

- Etapa 3: “¿Es ABCD un cuadrado?” Se propone a los estudiantes el ítem presentado anteriormente. Estos formulan sus respuestas por escrito tras lo que se establece un debate. Los propios estudiantes citan algunas de las características de G1 y G2, y es el profesor quién aprovecha para realizar una síntesis sobre el tema.
- Etapa 4: “Trazar una recta paralela a una recta  $d$  que pase por el punto  $A$ ”. Se retoma la etapa 2, esta vez con un objeto diferente; después la consigna evoluciona: ahora no se trata de realizar **primero** una construcción y **luego** señalar las propiedades estudiadas, sino de elegir **primero** las propiedades que se pueden utilizar y **luego** aplicar dichas propiedades para realizar la construcción que se pide. Las propiedades y teoremas ya no sólo se utilizan para demostrar, sino para realizar construcciones. Este es un punto de vista insólito que les confiere un sentido nuevo. Asimismo, el aspecto G1/G2 es explicitado: la tarea de construcción podría formar parte de G1, pero el hecho de que exista un interés, por un lado, en los objetos geométricos construidos (en las secuencias de construcción se sustituyen expresiones del tipo “tomar la distancia  $AB$ , trasladar esta longitud a partir de  $C$ , etc.” por “trazar el círculo de centro  $C$  y de radio  $AB$ ”) y, por otro, en las propiedades que justifican estas construcciones (comprobaciones hipotético deductivas), permite el paso de la actividad de G1 a G2. Lo que nos interesa ya no es, en efecto, el dibujo obtenido, sino los diferentes objetos geométricos (rectas, círculos y sus intersecciones) que permiten definir el objeto construido<sup>10</sup>. Se trata, así pues, de

---

<sup>10</sup> Por ejemplo, para construir una recta que pase por un punto dado  $A$ , y paralela a una recta dada  $d$ , podemos considerar sucesivamente: dos puntos cualesquiera  $B$  y  $C$  sobre  $d$ , el círculo  $C1$  de centro  $C$  y de radio  $AB$ , el círculo  $C2$  de centro  $A$  y de radio  $BC$ . Estos dos círculos tienen dos puntos de intersección. Llamemos  $D$  al punto que nos da un cuadrilátero convexo  $ABCD$ . La recta  $(AD)$  es paralela a la recta  $d$ .  $D$  permite comprobar que en efecto  $AD = BC$  y  $CD=AB$ . Por otro lado, siendo  $ABCD$  un cuadrilátero convexo, es un paralelogramo y sus lados opuestos, en este caso  $[AD]$  y

una construcción según G2. A continuación, otras construcciones son propuestas siguiendo el mismo proceso.

- Etapa 5: “Actividad mediatriz”. Se trata de una situación-problema surgida de los trabajos del GreDiM<sup>11</sup> (Parzysz, 2002). El objetivo de esta actividad es, entre otros, analizar en qué paradigma se sitúan los estudiantes en este estadio de la formación, y evaluar su nivel de lucidez en relación a su posicionamiento en G1 o G2. Esta situación se detalla y analiza en las próximas líneas.
- Etapa 6: “Demostraciones”. Ahora se proponen a los estudiantes ejercicios de demostraciones clásicas.

No detallaremos aquí el conjunto de estas etapas, nos limitaremos a dos de ellas para las cuales el análisis implicative se muestra especialmente útil. La primera es la etapa “Trazar un triángulo rectángulo”, que tiene lugar al comienzo de la formación y permite, así, hacer una evaluación de los procedimientos propuestos por los estudiantes y, principalmente, del lenguaje utilizado por éstos espontáneamente para describir su construcción. Este lenguaje es de un interés particular, ya que es un indicio del paradigma en el que se sitúan o pueden situarse los estudiantes.

La segunda parte del análisis es la “Actividad mediatriz” que, por el contrario, tiene lugar al final de la formación, y que permite, entre otras cosas, evaluar la eficacia de la formación desde el punto de vista de la toma de consciencia de los estudiantes respecto a los paradigmas geométricos G1 y G2.

#### **4 Trazar un triángulo rectángulo.**

Los estudiantes realizaron esta actividad en una hoja que entregaron y que fue codificada. A la hora de analizar las tres partes de la actividad se tuvieron en cuenta varios elementos: construcción, secuencia de construcción, justificación de esta secuencia desde el punto de vista del fondo y de la forma, concretamente:

- El procedimiento utilizado (TP); se contemplan 5 procedimientos.
- El vocabulario (TV); se distinguen 12 palabras o grupos de palabras que sean sinónimos.
- La secuencia de construcción (TS); se contemplan 3 casos: ausente, incompleta o completa.

---

[BC], son paralelos.

<sup>11</sup> *Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques* (Grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas) del IUFM de Orléans-Tours.

- La formulación de la secuencia (TFS); se utiliza una escala de evaluación compuesta de 5 notas que van desde “muy bien” a “muy incorrecta”.
- La justificación de la secuencia de construcción desde el punto de vista de la exactitud de lo que se enuncia (TJE); lo enunciado es exacto o inexacto, teniendo también en cuenta el caso particular del enunciado de la recíproca de la propiedad que, en efecto, también se utiliza.
- La justificación de la secuencia de construcción desde el punto de vista de la pertinencia de los argumentos expuestos (TJD); lo enunciado demuestra totalmente, parcialmente o no demuestra en absoluto la secuencia de construcción propuesta.
- La formulación de la justificación (TFJ); se utiliza la misma escala de evaluación que para la formulación de la secuencia.

La hipótesis de investigación que sustenta esta elección de variables es la siguiente: el lenguaje utilizado es un indicio del paradigma en el que el estudiante considera la construcción (G1 o G2), y, llegado el caso, un freno en el paso de G1 a G2. Así pues, las variables elegidas permiten describir el fondo de la respuesta (procedimiento utilizado, secuencia de construcción y justificación), pero también la forma, al localizar el vocabulario y evaluar la formulación de la secuencia de construcción y de la justificación.

El análisis implicativo se realiza siguiendo la teoría clásica y la ley binomial, con la versión 1.4<sup>12</sup> de CHIC que permite seguir la pista de las frecuencias de cada una de las modalidades de variables. El grafo implicativo muestra dos grupos que corresponden cada uno a un tipo de procedimiento de construcción, y que detallaremos a continuación.

#### **4.1 Procedimientos utilizando la mediatriz**

Con el primer grupo de variables se obtiene el grafo de la figura 2, el cual pone de manifiesto la existencia de nexos entre un vocabulario poco geométrico, muy ligado al gesto realizado (pinchar, trasladar) y a los instrumentos utilizados (medida, abertura, compás), y los procedimientos, ligados al trazado de una

---

<sup>12</sup> La versión 3.5 de CHIC que dibuja el grafo de manera automática permite en primer lugar distinguir la forma del grafo, los diferentes grupos, los índices pertinentes, etc. A continuación se utiliza la versión 1.4 para facilitar la interpretación evitando dar demasiada importancia a las modalidades que tienen baja frecuencia.

mediatriz con regla y compás, basados en las intersecciones de arcos de circunferencia. Desde el punto de vista del lenguaje utilizado, la formulación de la secuencia es en general correcta en cuanto al fondo, pero confusa en cuanto a la forma. La justificación de esta secuencia es, en la mayoría de los casos, incompleta. Estos resultados corroboran otros obtenidos en su momento (Jore, 2006) a partir de un estudio específico sobre trazados de la mediatriz.

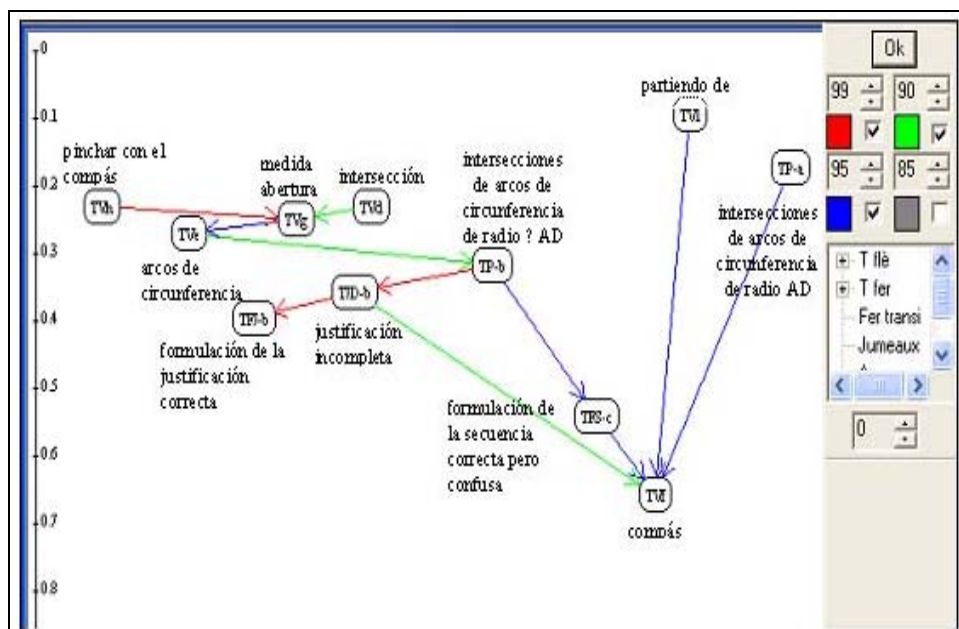


Fig. 2: Grafo implicativo sobre el trazado de un triángulo rectángulo, con procedimientos basados en la mediatriz

Detallemos los procedimientos utilizados, explicitando una posible construcción en G2, correspondiente al procedimiento “estándar” de construcción de una mediatriz con regla y compás (ver figura 3).

- Considerar dos puntos A y D, así como la recta (AD)
- Siendo A y D los centros respectivos de dos círculos secantes de idéntico radio.
- Siendo d la recta que pasa por las intersecciones de estos dos círculos.
- Siendo C un punto en la recta d (y no en la recta (AD)) y siendo B el punto

- de intersección entre  $d$  y  $(AD)$
- $ABC$  es un triángulo rectángulo.
- 

El radio de los círculos trazados (ver figura 3) puede ser igual a la distancia  $AD$  (TP-a) o diferente a la distancia  $AD$  (TP-b). Este procedimiento se presenta a menudo en el colegio a raíz del trabajo sobre la mediatriz, pero con un lenguaje ligado a  $G1$  y a la acción misma del trazado (trazar la recta  $(AD)$ , trazar un círculo...). Por otra parte, la mayoría de las veces, o sólo se efectúan arcos de circunferencia para aligerar la figura, o los alumnos, si se acuerdan del método de trazado, han olvidado por completo la mediatriz y las propiedades que sustentan esta construcción. Únicamente han memorizado este procedimiento como medio que les permite trazar perpendiculares.

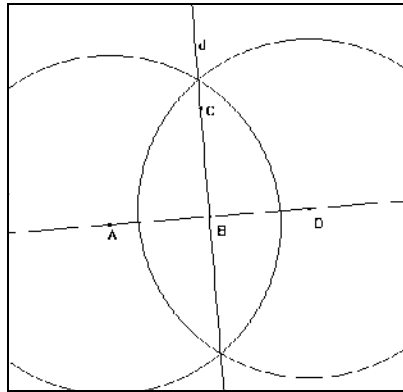


Fig. 3: Trazado de un triángulo rectángulo  $ABC$  con regla y compás

Su secuencia de construcción puede ser, por lo tanto, de este tipo:

*Trazo una recta  $d$ . Tomo dos puntos en esta recta que llamaré  $D$  y  $E$ . Abro el compás con una distancia cualesquiera. Centro el compás en  $D$  y trazo un arco de circunferencia a un lado y otro de la recta  $d$ , con la misma distancia centro el compás en  $E$  y hago un arco de circunferencia a un lado y otro de  $d$ . A un lado y otro de  $d$  los arcos de circunferencia se cortan en  $F$  y en  $G$ . Trazo una recta que pasa por  $G$  y  $F$  que llamaré  $d'$ . Las rectas  $d$  y  $d'$  se cortan en  $B$ . Elijo un punto  $C$  en  $d$  y, a continuación, un punto  $A$  en  $d'$ . Uno  $ABC$ .*

Fig. 4: Secuencia de construcción de un triángulo rectángulo

Este primer grupo en el grafo implicativo refleja muy bien este tipo de producción. El vocabulario utilizado denota un apego de los estudiantes al gesto físico realizado (característica del paradigma G1) más que al objeto geométrico construido (característica del paradigma G2). “Pinchan”, por ejemplo, con el compás en un punto A con una cierta “medida” BC en lugar de trazar un círculo de centro A y de radio BC. Este lenguaje de la acción ligado a la utilización del instrumento no les permite tener en cuenta los objetos geométricos subyacentes (rectas, círculos y puntos de intersección), y, por consiguiente, les impide a posteriori pasar de G1 a G2. La relación TP-b  $\rightarrow$  TJD-c del grafo implicativo expresa que los estudiantes que utilizan el procedimiento estándar no dan una justificación completa. Pone, así, de manifiesto la dificultad, y en algunos casos incluso la imposibilidad, de trabajar correctamente en G2. Ahora bien, los procedimientos de este grupo son los procedimientos automatizados en el colegio para trazar una mediatriz e incluso perpendiculares. Por lo tanto, podemos pensar que esta automatización de los gestos que se llevan a cabo para realizar la construcción impide a los alumnos salir del paradigma G1. No son conscientes de los objetos geométricos utilizados y, por lo tanto, no hay ningún modo de que puedan trabajar en el paradigma G2.

#### **4.2 Procedimientos utilizando un triángulo rectángulo inscrito en un círculo**

El segundo grupo de variables está organizado en torno al procedimiento basado en el siguiente teorema: cualquier triángulo inscrito en un círculo cuyo diámetro es uno de los lados del triángulo es un triángulo rectángulo. Basta, entonces, con trazar un círculo, uno de sus diámetros [AB], y, a continuación, un punto C en cualquier parte de la circunferencia. Este grafo implicativo pone de manifiesto en primer término el lenguaje utilizado. Esta vez encontramos un vocabulario geométrico, círculo, centro, radio, en lugar de un lenguaje ligado a los gestos o a los instrumentos: efectivamente, en este caso es especialmente útil trazar los círculos completos. De ahí que la formulación de la secuencia de construcción sea correcta, incluso perfecta. Por otra parte, la justificación es generalmente completa y correcta en cuanto al fondo: para aplicar este procedimiento, que normalmente no ha sido automatizado en el colegio, hay que pensar en este teorema y dominarlo lo suficiente como para deducir una técnica de construcción. Sin embargo, esta justificación es en ocasiones confusa en cuanto a la forma, ya que el enunciado del teorema resulta todavía complicado para algunos.

Los estudiantes científicos son típicos de este grupo: esta es la variable suplementaria más típica del camino TFS-a → TP-c con un riesgo de 0.05 y del camino TJD-a → TP-c con un riesgo de 0.06 (ver figura 5).

Estos dos grupos en el grafo implicativo ponen de manifiesto que la automatización de procedimientos de construcción no favorece ni su formulación ni su justificación. Esto permite plantear propuestas desde un punto de vista didáctico en las clases: así, parece conveniente, por un lado, no automatizar procedimientos de construcción independientemente de su formulación en términos de objetos geométricos, y, por otro, hacer hincapié en el lenguaje utilizado, que debe, por lo tanto, describir el objeto geométrico y las propiedades aplicadas, más que la acción realizada y los instrumentos utilizados. Esto facilitará el paso de G1 a G2 llegado el momento.

### 5 La situación mediatrix

Analicemos ahora una de las últimas actividades propuestas a los estudiantes al final de su formación en geometría plana.

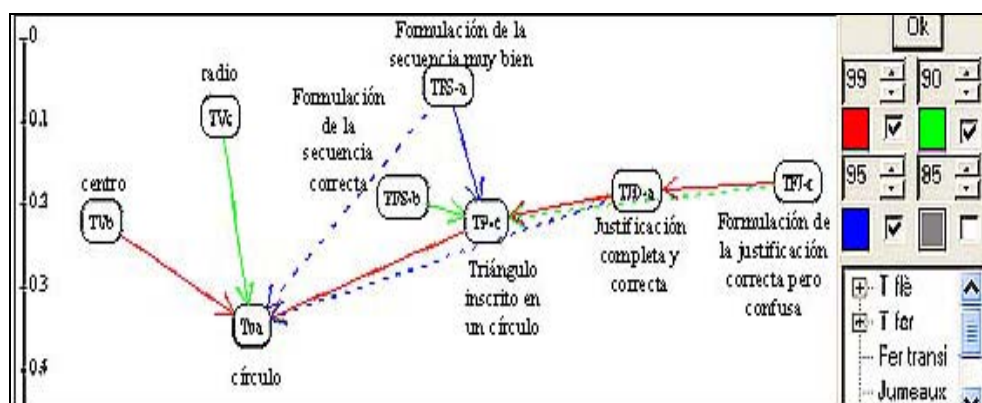


Fig. 5: Grafo implicativo sobre el trazado de un triángulo rectángulo, con procedimientos basados en el triángulo rectángulo inscrito en un círculo



## 5.1 Enunciado y características de la situación

El enunciado propuesto a 103 estudiantes es el siguiente:

Trazar una recta  $d$ . Llamaremos  $O$  a un punto en esta recta.  
Trazar el círculo  $C1$  de centro  $O$  y con un radio de 2 cm. Este círculo corta la recta  $d$  en dos puntos  $A$  y  $B$ .  
Trazar el círculo  $C2$  de centro  $O$  y con un radio de 4 cm.  
Trazar el círculo  $C3$  de centro  $A$  y con un radio de 4,5 cm. Este círculo corta  $C2$  en dos puntos  $C$  y  $D$ .  
¿Qué medio(s) puede poner en práctica para saber si la recta  $(CD)$  es, o no, la mediatriz del segmento  $[AB]$ ? Concluir.

Se obtiene el dibujo de la figura 6 (advertencia: la escala no ha sido respetada). Una vez terminado su trabajo, se pide a los estudiantes que indiquen en su hoja si creen haber trabajado en  $G1$  o en  $G2$ . Detallemos algunas características de esta situación:

- En cuanto a su forma, la pregunta “¿qué medio(s) puede poner en práctica para saber...” pretende dejar cierto margen de maniobra a los estudiantes y, en concreto, permitirles a priori realizar operaciones en  $G1$  o en  $G2$ . Desde este punto de vista, la pregunta es ambigua: nada indica que haya que situarse en  $G1$  o en  $G2$ , y tampoco se pide explícitamente una demostración, lo que induciría a priori a situarse en  $G2$ , habida cuenta del contrato didáctico mantenido en clase con estos estudiantes.
- Esta situación parte de la utilización de una terna pitagórica  $(x, y, z)$  o más bien pseudo-pitagórica, esto es, según el modelo  $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$ . En este caso se tiene  $4^2 + 8^2 = 80 = 9^2 - 1$ ; los valores 4, 8 y 9 se dividen, a continuación, entre dos para obtener un dibujo con un formato adecuado a la unidad centímetro. Evidentemente, se escogen estos valores numéricos para que se pueda deducir perceptivamente, es decir, situándose en  $G1$ , que  $(CD)$  es, en efecto, la mediatriz de  $[AB]$ , mientras que en  $G2$ , una demostración permite afirmar que esto no es así: la recta  $(CD)$  es, en efecto, perpendicular a  $[AB]$ , pero no pasa por  $O$ .
- La formulación no induce a realizar la demostración completa, sino a indicar un método, sin tener que ponerlo en práctica necesariamente. Esto debe permitir a los estudiantes que todavía tienen dificultades con la redacción de las demostraciones, competencia que en este estadio del dispositivo de formación

todavía no ha sido trabajada explícitamente, acometer la tarea situándose en G2.

- Por otro lado, esta formulación induce a proponer varios métodos, nuestra labor consiste en ver en qué paradigma se sitúan y, más concretamente, en estudiar si los paradigmas G1 y G2 van a ser o no utilizados simultáneamente.

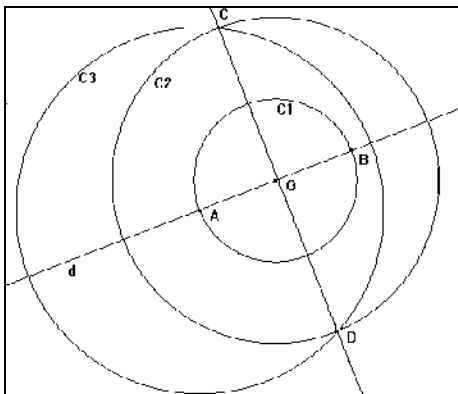


Fig. 6: *La situación mediatriz*

Después de un periodo de trabajo individual, la fase de puesta en común debe permitir:

- A cada estudiante discernir si ha trabajado en G1, en G2 o en un pseudo-paradigma que participa a la vez de ambos, señalando la naturaleza de las hipótesis utilizadas y las comprobaciones realizadas.
- Realizar una demostración completa de la respuesta correcta en G2.

En G2 una solución puede consistir en la siguiente demostración:

$A \in C_1$  por lo que:  $OA = 2\text{cm}$

$A \in C_2$  por lo que:  $OC = 4\text{cm}$

$C \in C_3$  por lo que:  $AC = 4,5\text{cm}$ .

Los lados del triángulo AOC miden respectivamente 2 cm, 4 cm y 4,5 cm. Ahora bien:  $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$  y  $4,5^2 = 20,25$ . Basta con aplicar la inversa del teorema de Pitágoras para concluir que no es recto. Por lo tanto el triángulo no es rectángulo, (AO) no es perpendicular a (OC).

Ahora bien, O es el punto medio de [AB]; O se encuentra, por lo tanto, en la mediatriz de [AB], que es perpendicular a [AB], por lo que C no se encuentra en la mediatriz de [AB], lo que significa que (CD) no es la mediatriz de [AB].

Esta demostración requiere la aplicación de la inversa del teorema de Pitágoras y la definición de la mediatriz como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio, dos elementos que, como ya demostré en mi tesis (Jore, 2006), los estudiantes conocen.

Así pues, esta demostración es a priori accesible para ellos. Además, otras variantes son posibles en la parte final de la demostración, por ejemplo:

Del mismo modo que se demuestra que el triángulo COA no es rectángulo, se obtiene que el triángulo DOA ~~tampoco~~ lo es.

Ahora bien, tenemos:  $COA=DOA$ ; por lo tanto, los puntos D, O y C no están alineados.

Esto significa que el punto O no está en la recta (CD).

Ahora bien, O es el punto medio de [AB]; O se encuentra, por lo tanto, en la mediatriz de [AB].

Así pues, (CD) no es la mediatriz de [AB].

Finalmente, recordemos que en la fase de trabajo individual no se esperaba una demostración completa.

## 5.2 Las variables del análisis y las cuestiones didácticas subyacentes

Los estudiantes realizaron de nuevo esta actividad individualmente en una hoja que entregaron y que fue codificada. Los elementos que se tuvieron en cuenta, en esta ocasión, fueron los siguientes:

- El número de medios propuestos (MM); se contemplan 0, 1 o varios medios.
- Las características de las pruebas o demostraciones propuestas (MP). Se contemplan las siguientes modalidades: correcta, incompleta o incorrecta en G1; correcta, incompleta o incorrecta en G2, así como un procedimiento particular consistente en mostrar que (AB) es la mediatriz de [CD].
- La naturaleza de los medios propuestos desde el punto de vista de los paradigmas geométricos G1/G2 (MA): los argumentos pueden situarse completamente en G1, en G2 o al mismo tiempo en G1 y en G2.

- Lo que los alumnos piensan sobre su trabajo desde el punto de vista de G1/G2: creen situarse en G1, en G2 o en G1 y en G2.

Estas distintas variables deben permitir observar tanto el nivel de competencia de los estudiantes al final de la formación, como su relación respecto a los paradigmas G1 y G2: ¿siguen trabajando mayoritariamente en G1 o se ha iniciado una evolución hacia G2? Y, por encima de todo, surge una cuestión fundamental en relación con los objetivos de la formación propuesta: ¿son ahora conscientes los estudiantes de la existencia de los paradigmas geométricos G1 y G2, y del paradigma en el que trabajan durante la resolución del problema “mediatriz”?

### 5.3 Los medios puestos en práctica de manera efectiva

La mayoría de los estudiantes no solamente ha propuesto medios, sino que ha puesto en práctica al menos uno de ellos de manera efectiva. Estudiemos, entonces, para comenzar de manera más precisa cada una de las producciones de los estudiantes con el fin de poder precisar su naturaleza. Hay que distinguir si el estudiante propone una demostración en G2 o bien una prueba en G1. Remitimos al lector a los trabajos de Balacheff (1982, p.263) y Jore (2006, p.430) para la explicación de estos dos términos.

Para los medios puestos en práctica de manera efectiva obtenemos los resultados de la tabla 2.

Esta tabla pone de manifiesto que hay casi tantas proposiciones que se sitúan en G2 (40%) como en G1 (45%), pero con un porcentaje de acierto mucho menor: sólo el 16% de las proposiciones que intentan poner en práctica una demostración en G2 son correctas, frente al 83% de las que ponen en práctica una prueba en G1. Evidentemente el grado de dificultad no es el mismo: la prueba puede efectuarse a través de una simple aplicación de la definición de la mediatriz por su punto medio y su perpendicular, basta con comprobar, como ya hemos dicho, de forma visual o sirviéndose de la escuadra, que la recta (CD) es perpendicular a (AB) y que esta pasa por O, mientras que la demostración requiere, entre otras cosas, la aplicación de la inversa del teorema de Pitágoras. Ahora bien, aquí no se trata de ningún triángulo sino solamente de círculos, lo que hace que el teorema sea más difícil de movilizar. Por otra parte, se tiene que utilizar la inversa del teorema de Pitágoras y no el teorema mismo, lo cual es más delicado. Los estudiantes están acostumbrados a movilizar el teorema para calcular la distancia desconocida de un triángulo rectángulo, pero lo están un poco menos a utilizar la inversa, sobre todo cuando es para comprobar no que un triángulo no es rectángulo, sino que dos rectas no son

perpendiculares. En efecto, en ocasiones se asocia “triángulo rectángulo” a “teorema de Pitágoras”, pero esta asociación nunca se produce entre “rectas perpendiculares” y “teorema de Pitágoras”. A las ya mencionadas cabe añadir otra dificultad: la definición de la mediatriz nos lleva a examinar si (CD) es perpendicular a [AB], sin embargo, ¡antes es necesario estudiar si OC es perpendicular a (OA)!

Modalidad	Efectivo	%
MDa: demostración correcta en G2	7	6
MDb: demostración incompleta en G2	12	11
MDc: (AB) es la mediatriz de [CD]	4	4
MDd: demostración incorrecta en G2	21	19
MDe: prueba correcta en G1	40	37
MDf: prueba incompleta en G1	4	4
MDg: prueba incorrecta en G1	4	4
MDh: ausencia de prueba y de demostración	16	15
Total:	108	100

El 40 % de las proposiciones son demostraciones en G2, solamente el 6 % son correctas

El 45 % de las proposiciones son pruebas en G1, el 31% son correctas

Tab. 2: Tabla cruzada sobre el número y la naturaleza de los medios propuestos

El elevado número de intentos de demostraciones muestra que los estudiantes han comprendido bien la regla del contrato didáctico a este nivel: preferentemente se debe trabajar en G2. Pero sus conocimientos y competencias no les permiten elaborar completamente una demostración correcta.

#### 5.4 Análisis implicativo sobre el conjunto de variables

El análisis implicativo permite estudiar simultáneamente todas las variables. De nuevo se sigue la teoría clásica y la ley binomial teniendo en cuenta que el número de efectivos es relativamente escaso. El grafo implicativo obtenido es el siguiente:

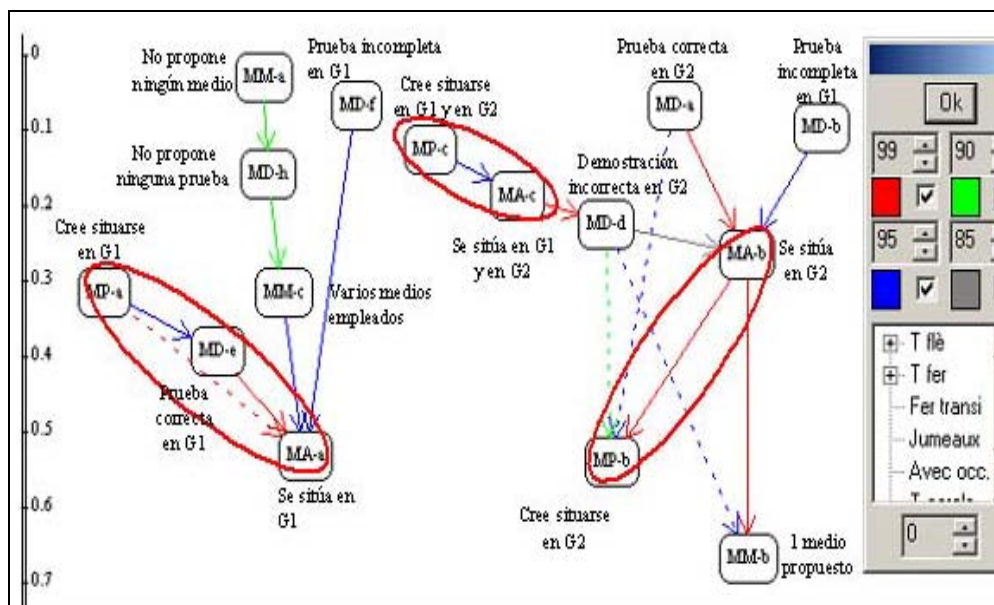


Fig. 7: Grafo implicativo sobre la situación mediatriz

#### 5.4.1 Relación entre el número de medios propuestos y los paradigmas geométricos

Hay dos implicaciones que expresan la relación entre el número de medios propuestos los paradigmas geométricos.

$MM - c \rightarrow MA - a$  : Cuando se proponen varios medios, son medios en G1.

$MA - b \rightarrow MM - b$  : Cuando los argumentos participan de G2, no se propone más que uno.

Varios elementos permiten interpretar estas relaciones.

Para los que trabajan en G2 una referencia al contrato didáctico en la clase de matemáticas puede resultar útil: es habitual darse cuenta de que varias demostraciones de una misma propiedad son posibles, pero que una sola es suficiente; una vez que se ha realizado una demostración, ya se sabe que la propiedad estudiada es cierta, por lo que no es necesario realizar otra más. Además, teniendo en cuenta que en este caso a los estudiantes ya les cuesta completar una sola demostración correcta, sería poco probable que pudieran realizar dos diferentes; no disponen ni de la idea ni de los medios para hacerlo. Por último, la consigna “concluir” invita a responder a la pregunta “¿es o no es la recta (CD) la

mediatriz del segmento [AB]?” y, por consiguiente, a poner en práctica estos medios antes que a buscar una lista de medios posibles.

Así, para proponer diferentes medios, hay que situarse en G1, donde efectivamente es posible seguir pasos diferentes. Se puede, por ejemplo, comprobar con la escuadra si las rectas (AB) y (CD) son perpendiculares, si el punto O se encuentra en la recta (CD), o incluso si C y D son equidistantes de A y B utilizando un compás. Del mismo modo, se puede trazar la mediatriz de [AB] (con una regla no graduada y el compás o con una regla graduada y la escuadra) y luego cerciorarse perceptivamente que esta se superpone a (CD).

Por otra parte, el análisis de la tabla previa pone de manifiesto el bajo índice de demostraciones correctas en G2. En el análisis implicativo las demostraciones incorrectas se encuentran en el camino  $MA - c \rightarrow MD - d$ : cuando los argumentos participan de G1 y G2 al mismo tiempo, se da una demostración incorrecta en G2.

El análisis implicativo permite de este modo caracterizar las demostraciones incorrectas por el hecho de que estas se sitúan en el paradigma G1 y en el paradigma G2, o, para ser más precisos, en un pseudo-paradigma que participa a la vez de G1 y G2. Por lo tanto, no es que se utilice un teorema erróneo, sino que se utiliza de forma incorrecta un teorema que es exacto: las hipótesis no son informaciones dadas en el enunciado u obtenidas a partir de una información inicial por un razonamiento hipotético deductivo (lo cual sería propio, en efecto, del paradigma G2), sino de la información obtenida a partir del dibujo (lo cual es propio de G1). Esto confirma la importancia de la toma de consciencia por parte del alumno de los paradigmas G1 y G2. En efecto, si bien queda trabajo por hacer desde el punto de vista del conocimiento de los teoremas, con algunos estudiantes este trabajo es aún mayor en lo que respecta a la naturaleza de las hipótesis utilizadas en la aplicación de estos teoremas.

#### **5.4.2 Análisis de la lucidez de los estudiantes respecto a los paradigmas geométricos**

Por otra parte, la lucidez de los estudiantes se muestra en el grafo implicativo a través de los caminos siguientes:

$MP - a \rightarrow MA - a$  (índice de implicación: 1): es el caso<sup>13</sup> en el que el estudiante cree situarse en G1.

---

<sup>13</sup> Habría que decir “este es el caso en general”, en la medida en que se trata de cuasi-implicación estadística y no de implicación formal. Evito, sin embargo, añadir “en general” constantemente para aligerar el discurso, más aún cuando en este caso un

$MP-c \rightarrow MA-c$  (índice de implicación: 0.98): este es también el caso en el que el estudiante cree situarse en G1 y G2.

$MA-b \rightarrow MP-b$  (índice de implicación: 1): cuando el estudiante se sitúa en G2, lo sabe.

Recordemos que en el análisis implicativo, los caminos se hacen siempre desde una variable hacia otra de efectivo superior o igual. Es solamente el efectivo de los que sin ser lúcidos piensan trabajar en G2 cuando no es así, el que crea el sentido de estos caminos: el efectivo de los que, en efecto, se sitúan en G2 es inferior al efectivo de los que creen situarse en G2.

Es posible afinar este análisis estudiando los caminos entre los medios propuestos por los estudiantes y lo que piensan de su producción desde el punto de vista G1/G2.

Si nos centramos en aquellos que creen situarse en G2, obtenemos los caminos  $MD-a \rightarrow MP-b$  (índice de implicación 0.96) y  $MD-d \rightarrow MP-b$  (índice de implicación 0.92): cuando el estudiante presenta una prueba correcta o incorrecta en G2, cree efectivamente situarse en G2. Otra pregunta interesante podría haber sido: “¿cree usted que su demostración es exacta?”. Esta no fue formulada y no podemos determinar la lucidez de los estudiantes en este sentido, pero los caminos muestran que la forma de la demostración permite a los estudiantes distinguir un trabajo realizado en G2. Sin embargo, no hay un nexo fuerte  $MD-b \rightarrow MP-b$  (índice de implicación solamente 0.69): algunos estudiantes que realizan una prueba incompleta en G2 se dan cuenta finalmente de que no han trabajado en G2. Estas demostraciones consideradas como incompletas presentan nociones de G2, pero no un razonamiento integro, y la mayoría de los estudiantes se dan cuenta de ello, lo que explica esta casi ausencia de implicación.

Si nos centramos en aquellos que creen situarse en G1, obtenemos el camino  $MP-a \rightarrow MD-e$  (índice de implicación 0.97): cuando el estudiante cree situarse en G1, no solamente ha trabajado en G1, ¡sino que además ha realizado una prueba correcta! Recordemos que es relativamente fácil obtener una prueba correcta en G1, mientras que es más complicado obtener una demostración correcta en G2.

El análisis implicativo permite así mostrar que, si bien los trabajos realizados por los estudiantes en lo que respecta a las demostraciones están todavía por debajo de los resultados esperados, se ha logrado en gran medida uno de los objetivos de la formación: una gran mayoría de estudiantes es globalmente consciente del paradigma geométrico en el que trabaja.

---

número considerable de implicaciones tienen índices relativamente elevados.



## 6 Conclusión

El análisis implicative nos ha permitido en este trabajo relacionar el lenguaje y los procedimientos de trazado utilizados en la construcción de un triángulo rectángulo por los futuros maestros de escuela en formación inicial. Una de las conclusiones importantes es que la automatización de los procedimientos de construcción supone un freno a su formulación y a su justificación. Los estudiantes son llevados a expresar sus construcciones con un lenguaje muy ligado a los gestos y a los instrumentos, en lugar de utilizar un lenguaje geométrico. Esta carencia del lenguaje, unida a las dificultades surgidas a la hora de justificar el procedimiento utilizado, indica que los estudiantes no pueden salir del paradigma geométrico G1, incapaces de explicitar los objetos geométricos utilizados, sus relaciones y sus propiedades, elementos esenciales del paradigma G2. Las consecuencias de orden didáctico son inmediatas: se impone un trabajo específico sobre el lenguaje con los alumnos en la descripción de las construcciones en G1 para que puedan posteriormente trabajar en G2.

Por otra parte, el trabajo en torno a la situación problema “mediatriz” ha puesto de manifiesto las insuficiencias de la formación desde el punto de vista de la realización de demostraciones correctas, pero también una relativa eficacia de la formación propuesta desde el punto de vista de la lucidez de los estudiantes respecto a los paradigmas G1 y G2. A pesar de no ser capaces de resolver el problema correctamente en G2, los estudiantes son, al menos en gran parte, capaces de identificar el paradigma geométrico en el que se sitúan. Por supuesto, convendría examinar de nuevo a largo plazo esta evolución que a corto plazo resulta positiva. En cualquier caso, esta evolución por sí sola es motivo suficiente para continuar un trabajo en esta dirección.

## Bibliografía

- Gras, R. (1996) *L'implication statistique, nouvelle méthode exploratoire de données. Applications à la didactique*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Houdement, C.; Kuzniak, A. (1999). *Géométrie et paradigmes géométriques*, Petit x, n°51, pp 5-21.
- Houdement, C.; Kuzniak, A. (2000). *Formation des maîtres et paradigmes géométriques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 20, n°1, pp 89-116.

Jore

Jore, F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnement papier-crayon et informatique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Parzysz, B. (2002). *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PEI*, Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres, Tours, Mai 2001, pp 99-110.

# **Criterios de adopción y utilización del libro didáctico de matemática en la enseñanza fundamental del nordeste brasileño.**

Clovis Gomes da Silva Junior\* y Jean-Claude Régnier\*\*

Traducido por Larisa Zamora Matamoros y Jorge Díaz Silvera

\*Universidad Estatal de Pernambuco -Brasil Université de Lyon ED 342 SSD  
“Sciences des Sociétés et du Droit” 86 Rue Pasteur 69007 Lyon France  
[Clovis.Gomes-Da-Silva-Junior@univ-lyon2.fr](mailto:Clovis.Gomes-Da-Silva-Junior@univ-lyon2.fr)

\*\*Université de Lyon 86 Rue Pasteur 69007 Lyon France  
[Jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr](mailto:Jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr)

**Resumen.** Basándose en una investigación realizada en la zona rural del estado de Pernambuco, Brasil, sobre los criterios de adopción y utilización del libro didáctico de matemática, este artículo busca evidenciar el papel de este libro en el contexto de los materiales didácticos. De forma que nos detenemos en algunos criterios específicos como: el texto del saber y sus presentaciones, así como el acceso del profesor a las informaciones sobre este libro. Para analizar los datos utilizamos tres tipos de análisis estadísticos: el primero cuantitativo, con énfasis en la incidencia por variable; el segundo, abordando la relación de dependencia entre las variables y el tercero, averiguando la cohesión entre grupos de variables. Este tratamiento se realizó a través del software CHIC, que nos auxilió en el análisis implicativo y de cohesión entre variables. Por último, hacemos un análisis sobre cada uno de los criterios de adopción del libro didáctico de matemática en relación con su utilización.

## **1 Introducción**

En el proceso de enseñanza y aprendizaje brasileño se utilizan varios instrumentos de apoyo pedagógico, tales como vídeos, televisores, proyectores. En el aula es común la utilización de libros, cuadernos, periódicos, lápices, etc.,

considerados todos como materiales didácticos. En este contexto, el sistema escolar brasileño es bastante heterogéneo, ocurriendo que algunos de esos materiales poseen una mayor frecuencia en su utilización que otros, y forman, en general, un conjunto denominado material escolar. En este conjunto surgió una literatura dirigida directamente a la sala de clases, “el libro didáctico”, que marcó profundamente la práctica en el aula en las últimas décadas. Tal ítem, que trataremos en este artículo por LD, se ha destacado por su utilización cuantitativa y cualitativa. Cuantitativa, por el hecho de ser adoptados millones de LD en el sistema educacional brasileño, y cualitativa, por el hecho de hacer las transposiciones didácticas del conocimiento científico para el conocimiento didáctico.

Varias son las discusiones en relación con el LD en Brasil (Freitag, 1997; Machado, 1997; Arruda y Moretti, 2001; Belfort, 2003; Miorim, 2004; Silva Júnior, 2005) todas buscando analizar de alguna forma la estructura y utilización del libro didáctico, pues, se percibe una laguna de concepción en la utilización de ese material didáctico por el profesor y del programa por el alumno, en relación al contenido de ese material y que se transforma en currículo, en relación a su forma de utilización y la formación de los profesores.

Para los variados actores sociales involucrados con el LD en Brasil, este ítem didáctico deja mucho que desear, con todo se tornó indispensable en el aula, estableciendo la guía de trabajos para el año lectivo, dosificando las actividades cotidianas de cada profesor en el aula y ocupando a los alumnos en clases y en casa.

Así, para algunos profesores, el uso del LD posee una influencia directa en su planeamiento didáctico (textos, ejemplos y actividades) y secuencia de contenidos, que pasa a ser hecho exclusivamente teniendo como referencia sugerencias que estos libros traen como apoyo, proceso por el cual las clases son organizadas y programadas, pudiendo llegar a ser la propia clase. Así es visible la utilización de los libros didácticos por los profesores, con más o menos intensidad, en la preparación de las clases y utilización de los ejercicios y actividades.

Dentro de ese universo, el LD pasa a tener, en su utilización, el objetivo de situar nuevos sujetos en el contexto escolar de la práctica pedagógica, en que, profesor y alumno poseen papeles diferenciados. El profesor asume, ante el LD, la postura de facilitador y/o transmisor del contenido y los alumnos pasan a ser observadores y/o receptores de ese mismo contenido. Silva Júnior (2005), destaca que el profesor de matemática hace uso constante del libro de texto en sus estudios, siendo muchas veces el único apoyo para suplir sus deficiencias de formación, constituyéndose en algo más que una simple herramienta diaria, y por esto,

vislumbra el contexto de que el LD no se dirige al alumno y si al profesor, ya que es él quien lo indica y escoge para su adopción.

Según Pitombeira y Figueiredo (2002), profesores de matemática preconizan los libros que utilizan variedad de lenguajes o formas de expresión - textos corridos o diálogos en lengua materna, cuadros gráficos, diagramas, ilustraciones, etc. - en busca de tornarlos atrayentes.

Otra discusión con respecto a la adopción del LD de matemática se dio con Belfort y Mandarino (2004), cuando abordan otras tres variables: el tipo de Escuela (pública o particular); la formación del profesor; y el tiempo de experiencia, como factores que posiblemente influyen la selección de los libros didácticos realizada por los profesores de matemática. Considerándose que los profesores de matemática, con poco tiempo de magisterio, poseen poca experiencia y pueden tornarse inseguros de sus conocimientos, buscan adoptar libros didácticos que no los coloquen en situaciones que comprueben sus conocimientos y sus prácticas, dando preferencia a libros didácticos donde los contenidos son presentados de forma simplificada, con énfasis en procedimientos y no en conceptos.

Además de eso, los profesores de mayor experiencia muestran en sus elecciones del LD, según Belfort y Mandarino (2004), la necesidad de cambiar, debido a experiencias insatisfactorias con relación al material adoptado anteriormente, o sea, tratan de descubrir en la estructura del libro que está siendo adoptado, algo diferente del anterior.

Así, en cualquiera de las formas de utilización, es visible la participación de ese LD en todo el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la enseñanza fundamental brasileña.

## **2 El libro de matemática y su utilización**

El papel del LD en el proceso de enseñanza y aprendizaje ha sido destacado por varios autores. Por ejemplo, Mogilnik (1996) destaca que la forma con que los LD son estructurados en bloques, con objetivos, programación temporal, estrategias e instrumentos de evaluación, facilitan su utilización, no solamente como un recurso didáctico, sino que asumen la característica de un currículo a ser seguido por el profesor. Este papel parece hacer que el LD funcione, en muchos casos, como una especie de “currículo practicado” por los profesores. Lajolo (1997), apunta que aunque no sea el único material del cual los profesores y alumnos van a valerse en el proceso de enseñanza y aprendizaje, él puede ser decisivo para la calidad del aprendizaje resultante de las actividades escolares.

Sin embargo, el papel del LD parece depender fuertemente de la tendencia pedagógica predominante. Por ejemplo, a mediados del siglo XIX, los libros didácticos de matemática “eran instrumentos fundamentales para suplir los problemas relacionados con la formación de los profesores” (Miorim, 2004, p.1). Fue en el transcurso de ese mismo siglo, según Bittencourt (1993), que el LD pasó a ser consumido por los niños y adolescentes en la sala de aula.

Belfort (2004) aborda que diversas investigaciones recientes parecen indicar que el libro de texto es más que una simple herramienta para los profesores de matemática: es también material de estudio y muchas veces, el único con el cual el profesor puede contar para lidiar con las consecuencias de una formación inicial deficiente. Por su parte, Freitag (1997) hace un análisis del LD como instrumento de trabajo auxiliar en la sala de aula, sin la autoridad de la última instancia, del criterio absoluto de la verdad y patrón absoluto de excelencia a ser adoptado en la clase.

Así, buscamos discutir el uso y el papel del LD en la práctica pedagógica que involucra a profesores y alumnos, preocupándonos, en este momento, en analizar la relación del profesor con el LD en el proceso de adopción y las consecuencias de su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para esto, tomamos como base los datos de la investigación de Silva Júnior (2005), que apunta la condición de que todas las escuelas públicas de enseñanza fundamental del Brasil reciben el LD de matemática a través del Gobierno Federal, en el programa PNLD (Programa Nacional del Libro Didáctico), el que nos conduce a deducir que todos los profesores de la enseñanza fundamental, que actúan en este sistema, utilizan de alguna forma el libro didáctico de matemática.

### **3 La estructura del libro didáctico en Brasil**

Como objeto de utilización didáctica, el LD fue motivo de diversas discusiones, en los últimos decenios en Brasil, en las cuales se buscaba justificar su estructura y funcionalidad, tornándose objeto de estudio y de debates en las más variadas instancias educacionales, haciendo necesario el entendimiento de la legitimidad de tal objeto ante la educación escolar y como fuente transmisora de conocimiento.

La legitimación de ese recurso se inicia desde la época de Comenius (1592-1670) que en una de sus principales obras: la Didáctica Magna (2001), presentaba las características fundamentales de la escuela moderna, a saber: la construcción de la infancia moderna como forma de pedagogización de esa infancia por medio de la

escolaridad formal (hasta entonces, los niños eran tratados como pequeños adultos); una alianza entre la familia y la escuela, por medio de la cual el niño se va soltando de la influencia de la órbita familiar para la órbita escolar; una forma de organización de la transmisión del saber, basada en el método de instrucción simultánea, agrupándose los alumnos, donde era propuesto un único libro como referencia al alumno. De ese modo, este recurso comienza a ser un patrón dentro de la educación de la época. Así, aparece la reproducción del conocimiento científico de modo simplificado, transformándose, con el pasar de los tiempos, en un recurso para el currículo escolar.

El libro, recurso para el currículo, acabó transformando el currículo que, de hecho, es el que las editoras ofrecen en sus paquetes didácticos: libro de texto del alumno, cuaderno de actividades, suplementos de actividades experimentales y el manual del profesor, con los objetivos generales y el programa anual, los objetivos específicos, las estrategias y hasta instrumentos de evaluación. Es a través de esos libros que el alumno va a aprender, construir y alterar significados en relación a un patrón social que la propia escuela estableció como proyecto de educación, cuando se adopta ese libro didáctico para su utilización. Sin embargo, la adopción y utilización del LD en la escuela siempre son abordadas con categorizaciones en torno a su estructura que, en principio, parten de un análisis de su calidad.

En 1985 el gobierno federal Brasileño crea el Programa Nacional del Libro Didáctico (PNLD), con el objetivo de distribuir libros escolares a todos los alumnos de las escuelas públicas de enseñanza fundamental del país, siendo estos libros, hasta 1996, escogidos de modo técnico administrativo por los representantes del gobierno, hasta que la Secretaría de la Educación Fundamental (SEF) decide evaluar los libros que serán adquiridos para su distribución, y para esto, forma equipos de evaluación.

La primera de estas evaluaciones fue para el PNLD-1997, la cual se ha seguido hasta la actualidad y en la cual los criterios de evaluación fueron definidos por los equipos de evaluación y comunicados a los editores y asociados de clase a través de la SEF. Tales criterios fueron definidos en dos partes: una parte general pedagógica que se aplica a todas las áreas, y la otra específica de cada área. Cada colección es evaluada por dos revisores que tienen la obligación de redactar una reseña sobre los libros no excluidos, para disponer de una guía en el libro didáctico, distribuido a todas las escuelas del país, que sirva de apoyo en la elección de los libros didácticos por los profesores, en cada escuela pública.

Siendo así, se observa que todos los libros didácticos de matemática que llegan a las escuelas públicas, para el proceso de adopción en el PNLD, pasarán por un proceso de análisis en las comisiones de evaluación que poseen criterios

eliminarios comunes a todos. Así, se puede verificar que para ser utilizados en las escuelas públicas de Brasil, cualquier LD precisa responder algunos criterios, entre los cuales está: presentar un contenido accesible para la franja de edades destinada, estimular y valorizar en el texto la participación del alumno, combatir actitudes y comportamientos pasivos. El libro debe también promover una integración entre los temas discutidos, valorizando el conocimiento del alumno, además de contar con ilustraciones actualizadas y correctas (Arruda y Moretti, 2002). A partir de ese contexto, varias son las discusiones sobre la calidad del LD. Como por ejemplo, que el buen libro didáctico debe diferenciarse del LD malo por el tipo de diálogo que establece con el profesor, con vistas a la planificación del curso (Lajolo, 1996).

De esta forma, la relación del LD de matemática con el profesor pasa a ser estructurada mediante un ejemplar específico para el profesor, no conteniendo solamente la resolución de los ejercicios, sino también trazando, en su planificación del curso, la estructuración para el planeamiento de las clases del profesor. Para Machado (1997), el LD, de un modo general, pocas veces consigue escapar de la presentación convencional que distingue con nitidez el momento de la teoría, del momento de los ejercicios de aplicación, éste casi siempre se limita a problemas estereotipados, en que también se distingue con nitidez los datos a ser utilizados (siempre necesarios y suficientes para la resolución).

En esta perspectiva, hay una abdicación por parte del profesor, en lo que dice respecto a la elaboración de sus programas, pasando a concordar con el camino propuesto por el autor, el que genera un cierto camino sin dificultades a ser recorrido por el profesor. En otra visión, Lajolo (1996, p.8) hace un análisis del LD en función del buen profesor, pues “la historia sugiere que la propiedad de las condiciones de ejercicio del magisterio, para buena parte del profesorado, es responsable directa de varios de los desaciertos que circundan cuestiones relativas al libro didáctico en la escuela brasileira”.

Se verifica que la elección de los libros didácticos, por parte del profesor, sobrepasa todas estas características cualitativas. Al principio, ocurre por la categorización de exclusión del PNLD, que analiza en perspectiva general, una formación social y ciudadana. Dentro de esta perspectiva, Arruda y Moretti (2002) hacen un análisis de la relación entre el LD de matemática y las diferentes concepciones de ciudadanía, citando el hecho de que en estos libros pueden verse dos tipos de ejercicios, aquellos que conducen a la ciudadanía activa y aquellos que llevan a la ciudadanía pasiva. Esta visión pasa a ser analizada por sus modelos, sus analogías y sus transposiciones didácticas, de un texto científico para un texto educacional.



Después, este análisis pasa al sistema de contenidos, en relación al texto del saber, y por la parte comercial, en su editorial. Y finalmente reciben la influencia de otras dos partes interesadas: primeramente, la guía del LD suministrada por el PNLD y en segundo, el hecho de que en las escuelas los profesores son asediados por las editoras en los momentos en que deben definir sus opiniones en cuanto a los libros que serán adoptados (Bitencourt, 1997).

En este contexto, buscamos hacer un análisis de los criterios de adopción y utilización del LD, objeto tan necesario y conflictivo, a partir del enfoque proporcionado por el método del Análisis Estadístico Implicativo, que será detallado a continuación.

## **4 Metodología de la investigación.**

### **4.1 Construcción de los datos**

Este trabajo de investigación fue desarrollado por medio de procedimientos técnicos y metodológicos característicos de un tratamiento cuantitativo, con la recogida de datos a través de cuestionarios (anexo 1), aplicados a una muestra de 247 profesores de matemática de la enseñanza fundamental (fundamental I con 125 profesores y fundamental II con 122 profesores), todos con actuación en las redes públicas: municipal y estatal en el estado de Pernambuco -Brasil en una tipología de naturaleza descriptiva. Este cuestionario tiene como objetivo recoger datos para hacer un análisis sobre la visión que los profesores de matemática de la enseñanza fundamental poseen del libro de matemática, en lo que se refiere a su adopción y utilización como material didáctico. Para ello, fue estructuralmente dividido en cuatro etapas.

La 1ª etapa está constituida por las preguntas de la 1 a la 5, que tratan del perfil de actuación y formación profesional del profesor de matemática de la enseñanza fundamental, con énfasis en la situación funcional y localidad de trabajo, así como el tiempo de actuación profesional. La 2ª etapa posee una estructura de análisis sobre la utilización o no del LD de matemática por parte del profesor. La 3ª etapa fue constituida para hacer un análisis sobre como se dio la adopción del LD de matemática utilizado por el profesor de la enseñanza fundamental en su práctica profesional en la sala de aula. Por último, la 4ª etapa está compuesta por las preguntas de la 17 a la 33, y tiene por objetivo el esclarecimiento sobre los criterios de adopción del LD de matemática por los referidos profesores. Estas preguntas fueron divididas en seis grupos de análisis

que son las categorizaciones de nuestro objeto, y que pasaremos a describir a continuación:

<b>Grupo</b>	<b>Objetivos</b>
Grupo 1 (preguntas: 17, 18, y 19)	Verificación del criterio transposición didáctica en la adopción del libro didáctico de matemática.
Grupo 2 (preguntas: 20, 21, y 22)	Analizar la influencia del criterio editorial en la adopción del libro didáctico de matemática.
Grupo 3 (preguntas: 23, 24 y 25)	Investigar los criterios cuantitativos y tipos de ejercicios (situaciones problemas y problemas de rutina) en la adopción del libro didáctico de matemática.
Grupo 4 (preguntas: 26, 27 y 28)	Investigar el texto del saber (variedad de contenidos, interdisciplinariedad y tamaño de los textos) como criterio de adopción para el libro didáctico de matemática.
Grupo 5 (preguntas: 29 y 30)	Investigar si la divulgación de las editoras y el tiempo de conocimiento del libro son utilizados como criterio de adopción del libro didáctico de matemática.
Grupo 6 (preguntas: 31 y 32)	Averiguar cual es la importancia de la guía del PNLD como criterio en la adopción del libro didáctico de matemática.

Por último, el cuestionario trae, en la pregunta 33, la posibilidad de ser citados criterios de adopción del LD que no se hayan tratado en las preguntas anteriores.

#### **4.2 Tipos de análisis utilizados en la investigación**

En el proceso de análisis de las variables tuvimos dos momentos distintos: el primer momento, constituido por un análisis basado en las frecuencias absolutas y relativas por pregunta, haciendo énfasis en el total de respuestas dadas a cada una de las variables con relación al todo. En el segundo momento, un análisis estadístico implicative sobre los resultados proporcionados por el software CHIC (Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesitiva), que tiene por funciones

esenciales extraer de un conjunto de datos, cruzando sujetos y variables (o atributos), reglas de asociaci3n entre variables, as3 como proporcionar 3ndices relativos a estas asociaciones, y representar una estructuraci3n de las variables obtenida por medio de estas reglas.

Utilizamos dos modelos de variables: uno para las preguntas de la 1 a la 16, que fueron modeladas por vectores – variables binarias y otro para las preguntas de la 17 a la 32, con la utilizaci3n de escalas de valores naturales de 1 a 5, la cual establece sus extremos en irrelevante y m3xima importancia para la adopci3n del libro did3ctico de matem3tica. Para el an3lisis, las agrupamos de la siguiente forma: a) 1 y 2 -consideran irrelevante tal objeto para la adopci3n del libro did3ctico de matem3tica; b) 3 -observa, pero no tiene en consideraci3n para la adopci3n del libro y el c) 4 y 5 -consideran como m3xima importancia para la adopci3n. La modelaci3n por la cual tratamos las informaciones en el software CHIC fue la ley Binomial.

El levantamiento de los datos fue hecho por medio de la aplicaci3n del cuestionario que nos condujo a categorizaciones relativas a las variables en tres par3metros: descriptivo (con valores absolutos); implicativo (relaci3n de dependencia) y de cohesi3n (consistencia de interacci3n). Para lo cual, optamos por un m3todo de procedimiento estad3stico que se fundamenta en la utilizaci3n de la teor3a estad3stica de las probabilidades con la Ley Binomial. Dentro de este contexto, J-C R3gnier (2004) aborda la estad3stica como una fuente rica en herramientas, tanto conceptuales como metodol3gicas, para modelar algunas situaciones de investigaci3n, as3 como, a trav3s de estas herramientas y de su aplicaci3n, posibilita la construcci3n de raciocinios que gu3an la toma de decisiones interpretativas.

### **4.3 Descripci3n estad3stica y an3lisis de frecuencia**

El an3lisis aborda cuatro instancias, de las cuales, las tres primeras ser3n tratadas por frecuencia y expuestas en algunas tablas a lo largo del an3lisis, y la 3ltima ser3 incluida en un an3lisis estad3stico implicativo posterior.

En la primera instancia fue tratado el perfil de actuaci3n y formaci3n profesional del profesor de matem3tica de la ense3anza fundamental, con 3nfasis en la situaci3n funcional y localidad de trabajo, as3 como el tiempo de actuaci3n profesional.

<b>Tiempo profesional</b>	<b>0 a 5 años</b>	<b>6 a 10 años</b>	<b>más de 10 años</b>
<b>Frecuencia en el fundamental 1</b>	27,2 %	20,3 %	52,5 %
<b>Frecuencia en el fundamental 2</b>	32,2 %	31,3 %	36,5 %

Tab.1: *Relación de frecuencia, tiempo de servicio y actuación*

A partir de estas informaciones, podemos constatar que aproximadamente un tercio de los profesores de matemática de la enseñanza fundamental 2 está contenido en cada uno de los grupos. Sin embargo, en el que se refiere a la enseñanza fundamental 1, tenemos más del 50% de los profesores con más de diez años de actividad profesional, lo que nos hace creer que la demanda para la formación en ese nivel de enseñanza disminuyó, en aproximadamente el 50%, en el último decenio. Otro enfoque en este sentido social de la actuación profesional, es el tipo de vínculo que el profesor posee con las entidades de enseñanza. Los datos nos muestran que aproximadamente un 61% de los profesores poseen vínculos permanentes con las redes públicas. De otra parte, tenemos alrededor de 39% de profesores poseyendo apenas vínculos temporales, en forma de mini-contrato y/o substituto, tales datos nos conduce a inferir que estos profesores no poseen interacción con la adopción del LD de matemática. Por último, averiguamos cual es la formación de ese profesor de matemática actuante en la enseñanza fundamental, en la red pública en el agreste de Pernambuco, lo cual se muestra en la tabla 2.

<b>Formación profesional del profesor</b>	<b>Fundamental 1</b>	<b>Fundamental 2</b>
Magisterio	30,6 %	3,2 %
Superior completo	5,2 %	46,4 %
Superior incompleto	2,3 %	12,8 %
Pedagogía completa	24,6 %	8 %
Pedagogía incompleta	16,4 %	1,6 %
Otros	20,9 %	28 %

Tab. 2: *Frecuencia de profesores de matemática de la enseñanza fundamental según su formación*

Sobre la formación profesional, del total de 247 profesores entrevistados tuvimos: 125 con actuación en la Enseñanza Fundamental 1 y 122 en la Fundamental 2, y de este total 63 ejercían la profesión sin formación específica, o sea, poseían otros cursos pero no el específico para enseñar matemática. Pero, al hacer el análisis más exacto, observamos que 20,9% de los profesores de la Enseñanza Fundamental 1 están incluidos en esta clase. Cuando juntamos la

formación en magisterio, en pedagogía y otras formaciones, la Enseñanza Fundamental 2, poseía un total de 40,8% de sus profesores sin formación específica para la enseñanza de la matemática.

Con relación a la segunda instancia, que trató de la utilización del libro didáctico de matemática con énfasis en el tiempo y tipo de utilización por parte del profesor, obtuvimos los siguientes datos:

<b>Niveles en la enseñanza fundamental</b>	<b>Utiliza</b>	<b>No utiliza</b>
Fundamental 1	95,2%	4,8%
Fundamental 2	91,0%	9,0%

Tab .3: *Utilización del libro didáctico de matemática en función del nivel*

Los resultados muestran que, del total de profesores investigados, cerca de 93,1% utilizan el LD de matemática en sus clases, lo que nos parece confirmar la importancia dada por los profesores a ese recurso didáctico. Con estos datos, podemos observar que el porcentaje de profesores de las series finales de la enseñanza fundamental que no utilizan el libro didáctico es casi el doble de aquellos de las series iniciales. El segundo ítem de ese bloque de análisis busca identificar los motivos de esa “no utilización”. Este ítem fue respondido solo por aquellos profesores que dijeron que no utilizan el libro didáctico en el ítem anterior. Debemos resaltar que, en este ítem, el profesor podría marcar más de una opción. Los datos obtenidos están representados en la tabla 4.

<b>Motivo</b>	<b>Frecuencia total</b>	<b>Fundamental 1</b>	<b>Fundamental 2</b>
Los alumnos no poseen el libro	35,3%	17,65 %	17,65 %
No forma parte de mi modo de trabajo	5,89%	5,89 %	-----
El libro no es adecuado a los alumnos	47,05	11,76 %	35,29 %
No participé de la elección del libro	11,76	-----	11,76 %

Tab. 4: *Motivos del no uso del libro didáctico de matemática*

De acuerdo con los datos presentados, tenemos que uno de cada dos profesores no utiliza el LD de matemática, alegando que el libro no es adecuado al

alumno, y uno de cada tres, justifica el no uso por el hecho de que los alumnos no poseían el libro. Estos datos nos conducen a indagar sobre lo que significa para el profesor la afirmación de que “el libro no es adecuado al alumno”. Sin embargo, debido a los parámetros establecidos para este artículo, lo dejamos para responderlo en estudios posteriores.

Buscamos abordar la frecuencia de utilización del libro en la sala de aula y la forma como él es utilizado. En relación con la frecuencia de utilización, obtuvimos los resultados mostrados en la tabla 5 abajo:

<b>Frecuencia de utilización</b>	<b>Fundamental 1</b>	<b>Fundamental 2</b>	<b>Total</b>
En todas las clases	8,3 %	16,9 %	25,2 %
En más de la mitad de las clases	26,5 %	24,3 %	50,8 %
En menos de la mitad de las clases	13,2 %	5,4 %	18,6 %
Raramente	2,9 %	2,5 %	5,4 %

Tab. 5: *Tiempo de utilización del libro didáctico*

De acuerdo con los datos, tenemos que más del 80% de los profesores afirman hacer uso constante del LD. Siendo los profesores de las series finales los que presentan una mayor incidencia en todas las clases o en más de la mitad de las clases, y los profesores de las series iniciales hacen mayor uso en menos de la mitad de las clases.

Buscamos también identificar, en nuestro trabajo, la forma de utilización del LD de matemática por parte de los profesores. La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos, distribuidos por cada ítem, en su totalidad para los dos niveles de la enseñanza fundamental. En este ítem, gran parte de los profesores marcaron más de una forma de utilización del LD. Dentro de este contexto, podemos aún observar que los profesores utilizan el LD de matemática apenas con una única función.

<b>Tipo de utilización</b>	<b>Fundamental 1</b>	<b>Fundamental 2</b>
Lectura en sala	55,2 %	44,8 %
Ejemplos	46,3 %	53,7 %
Ejercicios	51,4 %	48,6 %
Planeamiento	49,6 %	50,4 %

Tab. 6: *Modo de utilización del libro didáctico de matemática*

La participación del 61,13% de los profesores en la adopción del LD de matemática y como se dio esa adopción es el objeto de la tercera instancia del análisis, con los siguientes datos:

<b>Proceso de la elección</b>	<b>Frecuencia</b>
En reunión con todos los profesores	59,6 %
Individualmente por cada profesor	13,3 %
No se	7,9 %
Por una representación de los profesores	12,2%
Por el coordinador y/o director de la escuela	7 %

Tab. 7: *Proceso para la elección y adopción del libro didáctico de matemática*

En estas condiciones se puede constatar que aproximadamente un tercio de los profesores no participaron de la adopción del LD de matemática en el agreste de Pernambuco. Este es un porcentaje muy alto para un grupo de profesionales que hacen uso de ese instrumento en más de la mitad de las clases. Eso nos hizo buscar cuáles son los motivos para tal acontecimiento, y obtuvimos las siguientes justificativas.

<b>Motivo</b>	<b>Frecuencia</b>
No asistir a la escuela en el día	18,8 %
No formar parte de la comisión	51,2 %
Elección hecha por la dirección y/o coordinación	11,3 %
Elección externa a la escuela	18,7%

Tab. 8: *Motivo de la no participación en la adopción del libro didáctico de matemática*

De esta tabla podemos constatar que más de la mitad de los profesores no participaron de la adopción, argumentando que el libro fue elegido por una comisión sin su participación.

## 5 Tratamiento de los datos contruidos con el Análisis Estadístico Implicativo

Para interpretar los datos en el contexto del Análisis Estadístico Implicativo, recurrimos al software CHIC. Con el software producimos un complejo gráfico, reflejando la estructura del conjunto de variables binarias y modales principales, organizado por la relación disimétrica cuasi implicativa. Para afirmar la interpretación, colocamos como variables secundarias las concernientes a lo socio profesional de los profesores y las principales, las variables que abordaban la adopción y utilización del libro didáctico. Las preguntas integrantes del cuestionario (Q1, Q2, etc.) fueron modeladas por las variables, binarias o de escala, conforme es presentado en el anexo 2.

En lo que respecta al tratamiento de los datos, estos fueron insertados de forma binaria (si o no), en una planilla de Excel, o sea, “1” y “0” representando, respectivamente, la existencia y la no existencia de la variable para cada sujeto investigado. Representaremos a continuación, un pequeño fragmento de esa planilla.

Individuos	Q1				Q2			
	0	5 s	6	10 s más	10 s	EstUrb s	MunUrb s	EstRural s
P001	0	0	1	0	1	0	0	0
P002	0	0	1	0	1	0	0	0
P003	0	0	1	0	1	0	0	0
P004	0	1	0	1	0	0	0	0
P005	0	1	0	1	0	0	0	0
P006	0	0	1	1	0	0	0	0
P007	1	0	0	0	1	0	0	0

Tab. 9: Fragmento de la tabla de las variables binarias

### 5.1 Grafos Implicativos

Formamos un complejo de grafos implicativos a través de CHIC (Figura 1).

Cabe destacar que este complejo gráfico está constituido por tres grafos: el primero, se generó con las cuasi-implicaciones entre las variables que corresponden a la adopción, utilización y participación en la adopción del libro didáctico de matemática, o sea, si el profesor utiliza o no el LD de matemática y



como lo utiliza en su práctica pedagógica, así como, si participó o no de la adopción del LD que utiliza y como se dio este proceso de adopción (preguntas de la 6 a la 16); el segundo corresponde a las cuasi-implicaciones entre los criterios de adopción citados por los profesores para la elección del libro didáctico de matemática (preguntas de la 17 a la 32); y el tercero, se generó a través del no uso del libro didáctico de matemática y el motivo de ese no uso.

A continuación, hacemos el análisis de estos grafos y sus caminos implicativos con un nivel de confianza superior o igual al 85% en las cuasi-implicaciones entre las variables.

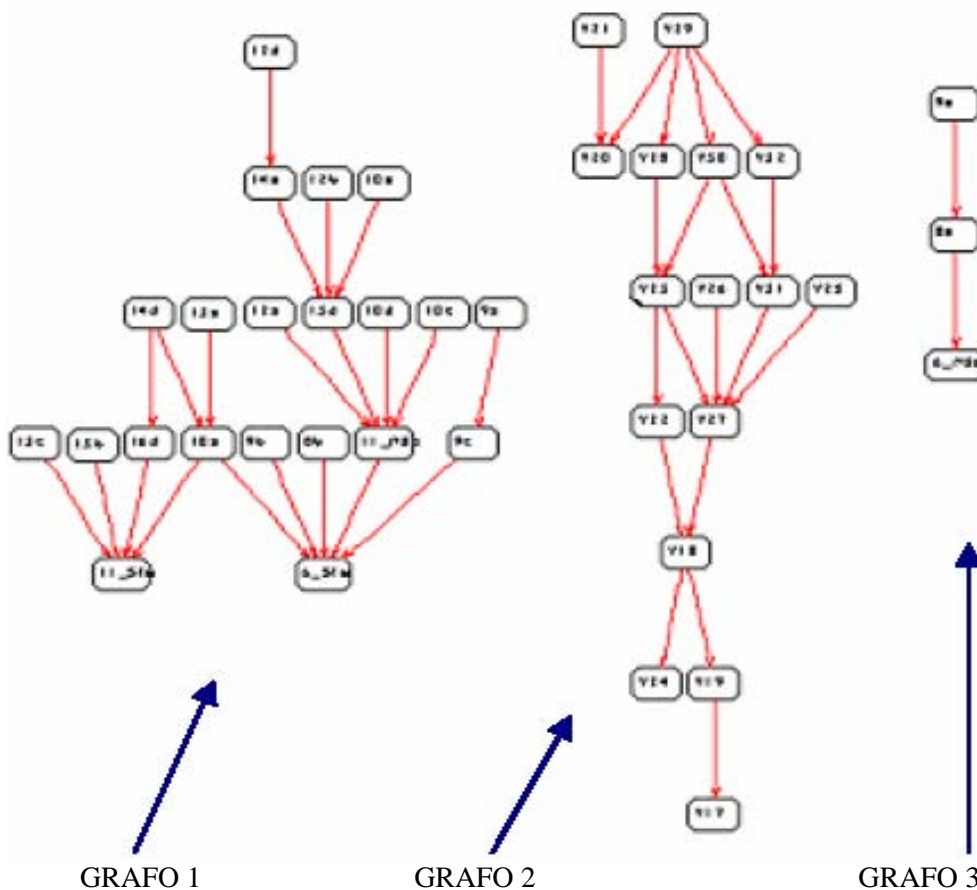


Fig. 1: Complejo de grafos

## 5.2 Relaciones de cuasi-implicación entre uso y adopción del libro didáctico de matemática

Para el análisis de implicabilidad entre variables, se hizo un desmembramiento del grafo en caminos de interacción, aquí representados por la letra C. Ellos serán analizados a continuación.

C1- (13d →11\_no →6\_si), este camino fue generado por los dos profesores que usan el LD de matemática y no participaron de su adopción, así como, sólo conocieron el libro después de la adopción del mismo.

C2- (10e →13d →11\_no →6\_si), es generado cuando la implicación al camino C1 se da con el alegato de que la elección y adopción del LD de matemática ha sido hecha por el coordinador y/o director de la escuela.

C3- (12b →13d →11\_no →6\_si), en este camino hay una implicación de la elección haber sido hecha por una comisión y el profesor que utiliza el libro no haber tomado parte de ella, al camino C1.

C4- (14a →13d →11\_no → 6\_si), la formación de ese camino se da cuando se implica al camino C1 que el conocimiento del libro que el utiliza se dio a través de amigos.

C5 -(12d →14a →13d →11\_no →6\_si), este camino es una expansión del camino C4, cuando la implicabilidad de los profesores que alegan la elección ha sido externa a la escuela.

C6 - (10d →11\_no →6\_si), tal camino implica en la relación entre los profesores que alegaron que la elección ha sido hecha por una representación de profesores. El mismo, utilizando el LD de matemática, no participó de la adopción.

C7 - (10c →11\_no →6\_si), este camino es formado por los profesores que utilizan el LD de matemática, pero no participaron de su adopción, ni saben como se dio este proceso.

La incidencia de formación para estos caminos, anteriormente citados, se dio con mayor contribución de los profesores que poseen de 0 a 5 años de profesión;



Fig. 2: Grafo 1

los que forman parte de la red municipal de enseñanza y los que forman parte de la enseñanza fundamental 1.

C8 – (9a →9c →6\_si), con la afirmación de que los profesores utilizan el LD de matemática, tienen una implicación entre el uso de la lectura del texto en la sala de aula, y la utilización de los ejercicios en la sala de aula. Para la construcción de tal clase, tuvimos la contribución de los profesores que poseen más de diez años de actividad profesional, actuando en la red municipal urbana.

C9 – (14d →10a →11\_si), este camino está compuesto por profesores que conocieron el LD de matemática a través de la guía del PNLD, en el momento de la elección para su adopción, a partir de que esta elección fue hecha en reunión con todos los profesores. La mayor contribución para la formación de ese camino se dio con los profesores que poseen nivel superior completo, y entre 6 y 10 años de actividad profesional. En este caso, verificamos que el tiempo intermedio de actividad profesional y la formación superior completa hace que el profesor posea un vínculo más constante con la escuela, y por consiguiente tenga una participación más activa en la elección del LD. Sin embargo, esta elección en reunión con todos los profesores, con el conocimiento del libro a través de la guía del PNLD en el momento de la elección, nos parece generar grandes polémicas en cuanto a la elección. Pues, existen dos factores que debemos analizar: en primer lugar, es la conexión entre el LD y la guía del PNLD, que, por más informaciones que ésta traiga, no es posible analizar el editorial, con sus ejemplos, tipos y cantidades de ejercicios; en segundo lugar es el factor tiempo, que puede no ser suficiente para examinar toda la guía en el momento de la elección.

C10 -(13c →11\_si), al principio, tuvimos la contribución de los profesores que poseen curso superior completo y los que poseen otra formación que no es la específica para enseñar matemática, alegando que conocieron el libro de matemática adoptado, a través de la guía PNLD y tuvieron contacto con él más de una semana antes del día de la elección.

C11 -(13b →11\_si), en este camino tuvimos el hecho de que los profesores que conocían el libro hace más de tres meses, forman parte de la red estatal urbana y actúan en la enseñanza fundamental 1.

Al analizar las implicaciones generales del Grafo 1, constatamos que, relativo a la adopción y participación en la adopción del LD de matemática, hay una implicación entre el conocimiento del libro después de la adopción y la no participación en la adopción. Esta no participación se dio, en su gran mayoría, con los profesores que poseen poco tiempo de actividad profesional y los actuantes en la enseñanza fundamental de la red municipal. Tales datos nos hacen deducir que

las redes municipales de enseñanza no dan relevancia a los profesores de la enseñanza fundamental 1, en el proceso de adopción del LD.

### 5.3 Relaciones de cuasi-implicación entre criterios de adopción del libro didáctico de matemática

Al igual que con el ejemplo del estudio relativo al Grafo 1, el estudio del Grafo 2 fue hecho a través de su desmembramiento. Pero, antes del análisis destaquemos que este grafo está compuesto por las preguntas de la Q17 a la Q32 y que tales preguntas fueron tratadas con variables modales atribuyéndoles valores pertenecientes al intervalo  $[0, 1]$ . A los términos a, b, c, d, e, de cada una de las preguntas, se le atribuyó, respectivamente, los valores 0, 0.25, 0.50, 0.75 y 1. Así, cada pregunta que poseía cinco términos, fue tratada como una única variable, como por ejemplo las preguntas Q17 tratada por V17, Q18 por V18, Q19 por V19, y así sucesivamente hasta Q32 por V32.

C12  $-(V21 \rightarrow V20)$ , este camino posee una implicación directa de los profesores que poseen como criterio para la adopción del LD de matemática la encuadernación, a los que poseen como criterio el colorido y la presentación de las figuras.

C13  $-(V29 \rightarrow V20)$ , tal camino muestra que el contacto con los divulgadores de las editoras implica en el análisis del colorido y la presentación de las figuras, como criterio de adopción del LD de matemática.

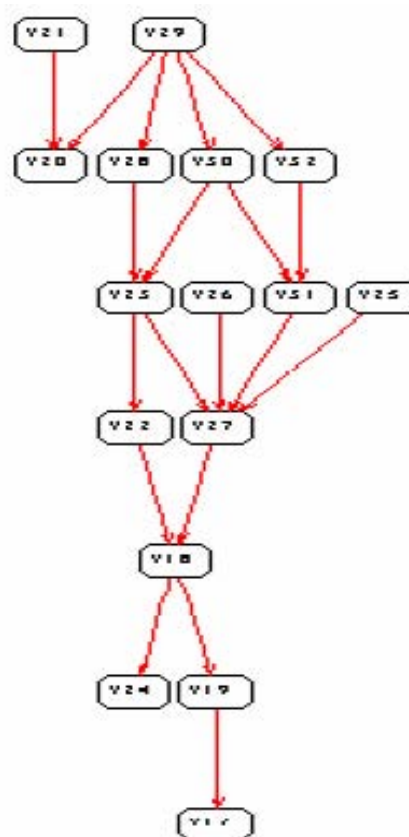


Fig. 3: Grafo 2

Así, sucintamente, podemos analizar que los profesores que llevan en consideración como criterio de adopción el colorido y la presentación de las figuras no poseen ninguna preocupación en relación al texto del saber.

C14 -(V18 → V19 → V17), este camino está compuesto por las implicaciones entre las tres preguntas que tratan de la transposición didáctica como criterio de adopción del LD de matemática, existiendo así implicación de los profesores que tienen en consideración las explicaciones de los contenidos, en los que tienen en consideración cómo el contenido es presentado y los ejemplos que en ellos aparecen. Tal camino tiene mayores contribuciones a su construcción de los profesores con más de 10 años de profesión, actuantes en la red municipal urbana, con régimen laboral estatutario. En estas condiciones, confirmamos la importancia de la transposición didáctica como criterio para la elección del LD de matemática, pero, esta constatación sólo se dio con los profesores de más experiencias de la red municipal urbana.

C15 – (V29 → V28 → V23 → V22 → V18 → V19 → V17) este camino posee su origen en la implicación de los profesores que tienen en consideración, como criterio de adopción, el contacto con el divulgador de las editoras, y después recorrer un camino constituido por los profesores que observan lo cuantitativo de los ejercicios implicando junto a los que tiene en consideración la secuencia de los contenidos, que a su vez implica en los que observan el tamaño de los textos como criterios de adopción para el LD de matemática, conduciendo a una implicación final en el C14. Para la formación de ese camino, hubo mayor contribución de los profesores que poseen entre 6 y 10 años de ejercicio de la profesión, y los profesores que poseen otros cursos que no son de formación para el profesor de matemática. En este camino, averiguamos que hay un interés del profesor en analizar la explicación de los contenidos y la interdisciplinariedad contenida en el LD de matemática, pero con tiempo. Debido a esta visión, inferimos que los profesores que privilegian tales temas para la adopción del LD de matemática no consiguen alcanzar sus criterios de análisis; y no tiene acceso a estos materiales antes del momento de la elección.

Cuando este camino sufre sustitución del conocimiento del libro a través de la guía del PNLD, por lo cuantitativo de los ejercicios existentes en el LD, se cambia la incidencia para los profesores de la enseñanza fundamental 2.

C16 -(V29 → V28 → V23 → V27 → C14) este camino es generado cuando cambiamos la variable V22 en C15 por la V27 o sea, la secuencia de contenidos por la interdisciplinariedad.

C17 -(V29 → V30 → V31 → V27 → V18) este camino es seguido por los profesores que tienen en consideración la guía del PNLD, la explicación de los contenidos y la interdisciplinariedad contenida en el libro como criterio de adopción del LD, seguidamente sufre implicación de los profesores que dan importancia al tiempo de conocimiento del libro en la adopción, el cual sufre implicación de los profesores que tienen en consideración el contacto con el divulgador de las editoras. Para la formación de este camino con la guía del PNLD, la explicación de los contenidos, la interdisciplinariedad contenida en el libro, el tiempo de conocimiento del libro y el contacto con el divulgador de las editoras, tuvimos la mayor contribución de los profesores de la enseñanza fundamental 2.

Referente a los caminos analizados en el Grafo 2, constatamos que los profesores con mayor experiencia en la red municipal urbana poseen como criterio para la adopción del LD de matemática la transposición didáctica. Otra pregunta importante que fue analizada, constata el hecho de que los profesores de la enseñanza fundamental 2 se dividen con relación a los criterios que consideran relevantes para la adopción del LD. Esta división se da en relación con las dos redes de enseñanza, que pasaremos a detallar a continuación.

En la red estatal, los profesores consideran como criterios relevantes para la adopción del LD de matemática, la guía del PNLD, el tiempo de conocimiento del libro y el contacto con el divulgador de las editoras. De esta forma se deduce que la gran preocupación para la elección del LD de matemática de ese grupo de profesores es poder analizarlo con tiempo.

En lo que se refiere a la red municipal, el proceso de elección del LD de matemática prioriza el conocimiento de las explicaciones de los contenidos y la interdisciplinariedad. Esto nos hace inferir que hay preferencia a hacer el análisis a través del propio libro, pues, se tiene en consideración el contacto con el divulgador de las editoras.

Por último, en el análisis de ese grafo, constatamos que hay falta de formación específica para el profesor de matemática, lo que conduce a dar prioridades a lo cuantitativo de los ejercicios, al tamaño de los textos y a la secuencia de los contenidos como criterio de adopción del LD de matemática.

#### 5.4 Relaciones de cuasi-implicación relativas al no uso del LD de matemática



Fig. 4: Grafo 3

Este camino muestra que los elementos que respondieron la variable 9e (no utilizan el libro didáctico típicamente), poseen una cuasi implicación a haber respondido la variable 8e (no utilizan el libro didáctico temporalmente), que a su vez poseen una coherencia con haber respondido no utilizar el LD. Otra observación sobre este camino es el hecho de que la mayor contribución para su constitución ha sido de los profesores de la red municipal de enseñanza, y de los profesores con formación superior completa. O sea, este camino conduce a la interacción entre el tiempo de utilización (una vez por semana, todas las clases, más de la mitad de las clases, o raramente) del LD de matemática y el tipo de utilización (lectura del texto, ejercicios, texto del saber, planear las clases) de ese libro.

## 6 Consideraciones finales

En este artículo mostramos una secuencia de tratamientos teóricos sobre los libros didácticos en los últimos diez años en Brasil, destacando varios aspectos: inicialmente que los libros didácticos son publicaciones para el alumno y el profesor, que organizan los contenidos e indican como el profesor puede planear las clases y ver los contenidos con los alumnos. De forma que la enseñanza brasileña tiende a copiarse en el LD, pues, acaba estableciendo el guión anual en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Presentamos, también un conjunto de enfoques que tratan de la funcionalidad de ese libro, superando la idea de éste como un objeto fabricado y que sufre interferencias técnicas en su elaboración, pero, independientemente de estas interferencias, debe tener la función de instrumento para la construcción de la ciudadanía activa del alumno y de facilitador de la vida del profesor.

Observamos que el LD de matemática es para el profesor algo más que un simple material de uso en el proceso de enseñanza aprendizaje. El LD es un objeto de apoyo didáctico que los profesores, en su gran mayoría, utilizan para estructurar

e impartir sus clases, apoyándose en las consideraciones hechas por toda la estructura del texto del saber, en sus ejemplos con analogías y sus ejercicios, los más variados, confirmando la necesidad de toda la discusión en torno al LD, en función de su calidad y uso, así como de su adopción.

Sin embargo, los tratamientos con cruzamientos de datos solo fueron posibles por la aplicabilidad del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) con el software CHIC, pues teníamos en nuestra investigación un total de 144 variables, entre principales y secundarias, que necesitaban ser analizadas a la luz de sus correlaciones e implicaciones estadísticas, y manualmente teníamos muchas dificultades debido a la gran cantidad de participantes (245 sujetos) en la investigación. Así, corroboramos la importancia y la aplicabilidad del uso del ASI y del software CHIC en el proceso de tratamiento y análisis de datos.

## **Bibliografía**

- Arruda, J.P.; Moretti, M.T. (2002). *Cidadania e matemática: um olhar sobre os livros didáticos para as séries iniciais do ensino fundamental*. Itajaí: *Contrapontos*, -ano 2, n.6- p. 423-438.
- Belfort, E. (2003). *Reflexos sobre o papel do livro texto de matemática: um carcereiro ou um bom companheiro?* Anais do XI Congresso Inter-Americano de Educação Matemática. Blumenau: FURB-CIAEM.
- Belfort, E.; Mandarino, M.C.F. (2004). *Como é escolhido o livro didático de matemática dos primeiros anos do Ensino Fundamental?* In: *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife: UFRPE.
- Bittencout, C.M.F. (1997). *Livro didático: concepções e usos*. Recife: SEE/Governo do Estado de Pernambuco, 10p
- Comenius Iohannis Amos (1592-1670) *Didactica Magna* (1621-1657) Versão para eBook eBooksBrasil.com, Fonte Digital. Digitalização de Didáctica Magna. Introdução, Tradução e Notas de FERREIRA GOMES, J. (2001) Fundação Calouse Gulbenkian.
- Freitag, B.; Costa, W.F. Da; Mota, V.R. (1997). *O livro didático em questão*. SãoPaulo: Cortez Editora, 159p.
- Lajolo, M. (1996). *Livro didático: um (quase) manual do usuário*. Brasília: *Em aberto*, Ano 16, n. 69.
- Machado, N.J. (1997). *Ensaio transversais: Cidadania e educação*. São Paulo: Escrituras Editora, 187p.



- Miorin, M.Â.(2004). *As propostas modernizadoras e os livros did3cticos de matem3tica brasileiros nas d3cadas de 1960 e 1970*.
- Mogilnik, M. (1996). *Como tornar pedag3gico o livro did3ctico de ci3ncias*. Bras3lia: *Em aberto*, ano-16, n. 69.
- Pitombeira, J.B.; Lima, P.F. (2002). *O PNL D e sua influencia sobre os livros did3cticos*. Rio de Janeiro: *Em aberto*,
- R3gnier, J.C. (2004). *Da verdade autoproclamada 3 verossimilan3a reconhecida : um ponto central de uma problematica de forma33o em estatistica* Actes du VII ENEM – SBEM UFPE Recife PE Br3sil (CD ROM)
- R3gnier, J.C.; Gras, R. (2005). *Statistique de rangs et analyse statistique implicative*. Revue de statistique appliqu3e, v.LIII. Fran3a. p. 5-38
- Silva Junior, C.G. da. (2005). *Crer3os de ado33o e utiliza33o do livro did3ctico de matem3tica no ensino fundamental, e a participa33o do professor na ado33o: o caso do Agreste de Pernambuco*. Disserta33o de mestrado em Ensino das ci3ncias, UFRPE. Recife – PE.

**Anexo 1: Descripci3n y contenido del cuestionario.**

<p>Estimado colega, este cuestionario forma parte de una investigaci3n que tiene como objetivo indagar en el proceso de adopci3n del libro did3ctico de matem3tica, utilizado en las escuelas p3blicas estatales y municipales del estado de Pernambuco.</p> <p>Obs. Al responder este cuestionario, tenga en consideraci3n el local y la entidad en la que usted se encuentra en este momento.</p>		
<p>Municipio: _____ Fecha: ____/____/____</p>		
<p>1º) Hace cuantos a3os que ense3a? _____</p>		
<p>2º) Usted ense3a en la(s) red(es):</p> <p>(a) Estatal urbana.</p> <p>(b) Municipal urbana.</p> <p>(c) Estatal rural.</p> <p>(d) Municipal rural.</p>	<p>3º) Cu3l curso y disciplina usted ense3a?</p> <p>(a) ense3anza fundamental I – polivalente</p> <p>(b) ense3anza fundamental II – matem3tica</p>	<p>4º) Cu3l es su situaci3n funcional?</p> <p>(a) Estatutario.</p> <p>(b) Mini contrato.</p> <p>(c) CLT.</p> <p>(d) Substituto.</p>

<p>5°) Cuál es su formación profesional?                  (a) magisterio – enseñanza media. (b) licenciatura / profesorado en matemática (completo)                  (c) licenciatura / profesorado en matemática (incompleto)                  (d) pedagogía (completo)                  (e) pedagogía (incompleto)                  (f) otros</p>	<p>6°) Usted utiliza el libro didáctico de matemática?                  ( ) si                  ( ) no</p>	<p>7°) Si usted no utiliza el libro didáctico de matemática, es porque?                  (a) los alumnos no poseen el libro didáctico de matemática, pues no llegó a la escuela.                  (b) los libros didácticos no forman parte de su manera de trabajar.                  (c) el libro didáctico no es adecuado al alumno.                  (d) usted no participó de la elección y adopción de esos libros.</p>
<p><b>Para las preguntas 8, 9 y 10 pueden ser marcadas más de una alternativa.</b></p>		
<p>8°) Usted utiliza el libro didáctico de matemática:                  (a) en todas las clases.                  (b) en más de la mitad de las clases.                  (c) en menos de la mitad de las clases.                  (d) raramente utilizo.                  (e) no utilizo.</p>	<p>9°) La utilización del libro didáctico por usted se da:                  (a) con lectura del texto en la sala de aula.                  (b) por la utilización de los ejemplos en el contenido.                  (c) por utilización de los ejercicios.                  (d) para planear sus clases.                  (e) no utilizo.</p>	

Criterios de adopción y utilización del libro didáctico...

<b>Observación: responde las preguntas de la 10 a la 16. Solamente si adopta el libro didáctico.</b>		
<p>10°) La adopción del libro de matemática se dio:</p> <p>(a) en reunión con todos los profesores.</p> <p>(b) individualmente por cada profesor.</p> <p>(c) no se.</p> <p>(d) por una representación de los profesores.</p> <p>(e) por el coordinador y/o director de la escuela.</p>	<p>11°) Usted participó de esta adopción?</p> <p>( ) si.</p> <p>( ) no.</p>	<p>12°) Si usted no participó de esta adopción, esto se dio porque:</p> <p>(a) usted no asistió a la escuela el día de la elección.</p> <p>(b) la elección fue hecha por una comisión de profesores y usted no forma parte de ella.</p> <p>(c) la elección se dio por la dirección y/o coordinador de la escuela.</p> <p>(d) la elección es externa a la escuela.</p>
<p>13°) En relación al libro didáctico de matemática utilizado.</p> <p>(a) usted ya conocía hace más de tres meses.</p> <p>(b) conoció en el momento de la elección.</p> <p>(c) usted ya conocía hace menos de tres meses.</p> <p>(d) conoció después de la elección.</p>	<p>14°) Las informaciones sobre el libro de matemática que fue adoptado se dio;</p> <p>(a) a través de amigos.</p> <p>(b) a través de la escuela.</p> <p>(c) a través del divulgador de la editora (se asignará esta respuesta a la pregunta 15 y no a la 16)</p> <p>(d) a través de la guía del libro didáctico. ( se asignará esta respuesta a la pregunta 16 y no a la 15)</p> <p>(e) no tuve informaciones previas sobre el libro.</p>	<p>15°) El contacto con el divulgador se dio:</p> <p>(a) en su escuela.</p> <p>(b) a través de correspondencia escrita.</p> <p>(c) en encuentros.</p> <p>(d) en otra escuela.</p> <p>(e) a través de internet.</p>
<p>16°) Como se dio su contacto con la guía del PNLD?</p> <p>(a) en el instante de la elección.</p> <p>(b) un día antes de la elección.</p> <p>(c) menos de una semana antes de la elección.</p> <p>(d) más de una semana antes de la elección.</p>		

<b>Las próximas preguntas, de la 17 a la 32 poseen la misma estructura con una escala de valores (0; 0.25; 0.50; 0.75; y 1) relativo al grado de importancia de cada tópico para la adopción del LD.</b>	
<p>17°) Las situaciones con que los libros muestran los contenidos.          18°) La explicación de los contenidos.          19°) Los ejemplos de cada contenido.          20°) El colorido y la presentación de las figuras.          21°) La encuadernación.          22°) La secuencia de los contenidos.          23°) La cantidad de ejercicios.          24°) La presencia de situaciones problemas.          25°) La presencia de problemas de rutina.          26°) Variedad de contenidos.</p>	<p>27°) La interdisciplinariedad.          28°) El tamaño de los textos.          29°) El contacto con el divulgador de la editora.          30°) El tiempo de conocimiento del libro.          31°) La guía del libro didáctico.          32°) El número de estrellas que el libro recibe en la guía del PNLD.          33°) Si utiliza otro criterio de adopción del libro didáctico de matemática que no fue contemplado en este cuestionario, cítelos:</p>

## Anexo 2

Q1 0_5; 6_10; más10	Q2 EstUrb; MunUrb; EstRural; MunRural	Q3 Fund_1; Furnd_2	Q4 Estatut; MiniCont; CLT; Substituto	Q5 Magist; Super_C; Super_Inc; Pedag_C; Pedag_Inc; 5_Otros	Q66 Si;6 No	Q7 7a; 7b; 7c; 7d	Q8 8a; 8b; 8c; 8d; 8e
Q9 9a; 9b; 9c; 9d; 9e	Q10 10a; 10b; 10c; 10d; 10e	Q11 11_Si; 11_No	Q12 12a; 12b; 12c; 12d	Q13 13a; 13b; 13c; 13d	Q14 14a; 14b; 14c; 14d; 14e	Q15 15a; 15b; 15c; 15d; 15e	Q16 16a; 16b; 16c; 16d
V17	V18	V19	V20	V21	V22	V23	V24
V25	V26	V27	V28	V29	V30	V31	V32

# Parte III

## Aplicaciones del ASI en otros ámbitos



# **“Representaciones” de profesores ordinarios sobre situaciones de corrección y sobre la planificación del curriculum a propósito de la función inversa en la transición liceo/Universidad en Francia**

Susana Murillo-López \* y Catherine-Marie Chiocca\*\*

Traducido por los autores

\*Universidad de Costa Rica, Costa Rica, Escuela de Matemática  
San Pedro de Montes de Oca, San José  
[sumurillocr@yahoo.fr](mailto:sumurillocr@yahoo.fr)

\*\*ENFA, Dpt. CLEF, PATRE, France, Ecole Nationale de Formation  
Agronomique, Département Culture Langage Education et Formation,  
2 Route de Narbonne, B.P.22687, 31326 Castanet-Tolosan Cedex, France  
[catherine-marie.chiocca@educagri.fr](mailto:catherine-marie.chiocca@educagri.fr)

**Resumen:** El artículo presenta los resultados de un estudio cuantitativo. Nos interesamos en las situaciones de corrección en clases de matemáticas en Francia, en particular sobre las funciones inversas, en la transición entre la clase de Terminal<sup>1</sup> y el primer año de la universidad. El principal interés del artículo son las “representaciones” de profesores ordinarios sobre sus propias prácticas cuando corrigen ejercicios en clase de matemáticas y sobre su planificación anual con respecto a la función inversa. Propusimos un cuestionario a profesores de matemáticas cuyas respuestas fueron tratadas con el programa CHIC<sup>2</sup>. El artículo describe dos redes de variables obtenidas. Las interpretaciones de los resultados son propuestas en términos de las “representaciones” de profesores que se desprenden.

---

<sup>1</sup> Ultimo año de secundaria, donde los alumnos tienen 17 o 18 años.

<sup>2</sup> Cohesive Hierarchical Implications Classification.

## 1 Introducción

De manera general nuestro trabajo se centra en la búsqueda de regularidades dentro de la extrema variabilidad de prácticas de profesores ordinarios de matemáticas. En particular, estudiamos la corrección en clase de matemáticas, donde los profesores toman en cuenta el trabajo que sus estudiantes han podido hacer en liceo y el que sus alumnos podrán hacer en la universidad. Esta toma en cuenta se realiza a partir de restricciones y de márgenes de mano de obra de los profesores (Robert y Rogalski, 2002). Nuestro interés es profundizar el estudio de esas situaciones de corrección en el caso particular de la función inversa, en la transición entre el Terminal y el primer año de IUT (Instituto Universitario de Tecnología). La enseñanza de la noción de función inversa ha evolucionado bastante en la enseñanza de las matemáticas en Francia. En efecto, actualmente la noción interviene en dos niveles escolares: secundaria (liceo) y post-secundario (IUT). Cuando un estudiante llega al primer año de IUT, puede encontrar ciertas dificultades acerca de la función inversa o del carácter biyectivo e inverso de una función: es posible que para él los conceptos de función inversa y de biyección no sean ni disponibles ni movilizables (Robert, 1998). En efecto, en ocasiones, esas nociones han sido tratadas en liceo de manera implícita, como herramienta, y en la universidad de manera explícita, como objeto (Douady, 1987).

Así, nos interesamos en la planificación establecida por los profesores de Terminal, es decir, en la organización y relación entre los capítulos del año escolar, tal como podría presentarse en un libro de texto escolar, como una transposición del curriculum francés.

Para observar las trazas que podemos encontrar en las declaraciones de los profesores sobre su toma en cuenta de conocimientos adquiridos por los estudiantes en el primer año de IUT o aquellos a adquirir por los alumnos de Terminal científico, centramos nuestro estudio en los períodos de corrección de ejercicios. La elección está basada en el hecho que la noción de función inversa aparece, al menos de manera implícita, en la resolución de ejercicios y que es cuando los profesores pueden tomar en cuenta el trabajo que ellos suponen que ha sido hecho (en liceo) o el que deberá hacerse en la otra institución (IUT).

El artículo expone la problemática de investigación: explicamos nuestra elección de contenido matemático y su particularidad para estudiar las situaciones de corrección. La metodología detalla algunos ejemplos sobre la construcción de la herramienta para recoger la información (cuestionarios), así como la manera en la que tratamos las respuestas. Finalmente, presentamos una descripción de los



resultados obtenidos y abordamos una discusión sobre las “representaciones” de los profesores a partir de las interpretaciones propuestas por las investigadoras.

## 2 Problemática

Consideramos que las situaciones de corrección en clase de matemáticas son períodos particularmente favorables para el aprendizaje de los alumnos y estudiantes. Entendemos por situaciones de corrección los períodos en la clase de matemáticas en los cuales se corrigen los ejercicios. Una situación de corrección puede constituir una parte del proceso de institucionalización. La situación de institucionalización fue definida por Brousseau en la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1998).

En nuestro trabajo se aborda la enseñanza tal como se hace y no tal como podría hacerse; es por esto que nos interesamos en las prácticas de profesores ordinarios. Declaramos “ordinario” un profesor que no tiene ningún lazo con la investigación en didáctica de las matemáticas.

La palabra “prácticas” es definida por Robert y Rogalski (2002) como todo lo que el profesor pone en práctica antes, durante y después de la clase ; es decir, por ejemplo la preparación de sesiones, los discursos matemático y no matemático durante la clase, la corrección de producciones de alumnos, etc. Cuando hablamos de “prácticas en clase”, hacemos referencia al conjunto de las actividades del profesor en clase: su discurso, la toma de decisiones (adaptaciones), las designaciones visuales, etc.

El estudio de las “representaciones” de los profesores ordinarios es una etapa para ayudar a comprender las prácticas en clase de matemáticas. Daremos aquí a la palabra representación el mismo sentido que Rousset-Bert (1991) a partir de la definición dada por Abric en 1987: “la representación es el producto y el proceso de una actividad mental por la cual un individuo o un grupo de individuos reconstituye la realidad a la que él está confrontado y le atribuye un significado específico”. Así, la representación resulta de la realidad del objeto, de la subjetividad del sujeto y del sistema social en el que se inscribe la relación sujeto-objeto. De hecho, integra las características del objeto, las experiencias anteriores del profesor y su propio sistema de actitudes y de creencias. La puesta en práctica de una “tendencia profesional” sobre lo que es enseñar matemáticas es más o menos conforme con las condiciones institucionales, sociales y personales del profesor.

Para tratar de desprender las representaciones de los profesores a propósito de las prácticas de corrección y la planificación con respecto a la función inversa, nos interesamos en:

- la organización prevista por los profesores para los contenidos relacionados con la función inversa y la manera en la que ellos perciben la transición entre las dos instituciones con respecto a esta noción;
- las costumbres de prácticas en clase para abordar las situaciones de corrección.

Hemos planteado la hipótesis que las prácticas ordinarias de corrección en Francia son dominantes estadísticamente; en otros términos, que constituyen una regularidad en las prácticas de la mayoría de los profesores. En particular, nuestra hipótesis es que existe una cierta homogeneidad en las prácticas ordinarias declaradas por los profesores sobre las situaciones de corrección en clase de matemáticas. En cierta forma se puede pensar que el conjunto de trayectorias potenciales (Roditi, 2003) de correcciones en clase está constituido de una relativa grande variabilidad, pero con respecto al aprendizaje de los alumnos o de los estudiantes, en el núcleo de las interacciones didácticas, se desprende una gran similitud.

Para ilustrar lo que sucede en el curriculum francés resumimos el caso del capítulo de “Análisis” en el programa de Terminal Científico (S) del año 2002. Aunque no se incluye el estudio de las funciones inversas; se propone el estudio de las funciones logaritmo y exponencial, pero no impone la manera de introducirlas. El carácter biyectivo e inverso no figuran en el programa; la única precisión al respecto se presenta en los primeros comentarios generales del programa de Terminal S (enseñanza obligatoria): introducir la función exponencial bastante temprano en el año, lo que implica abordar la función exponencial antes de la logaritmo, incluso si se explicita que el orden de presentación para introducir las funciones exponencial y logaritmo queda, en general, a la elección del profesor.

Con respecto a la introducción de la función exponencial, la proposición curricular es de partir de un problema concreto para el alumno, el de la radioactividad en física, o bien de la búsqueda de funciones derivables  $f$  en  $\mathbf{R}$  tales que  $f(x+y) = f(x)f(y)$ . Además, esta manera de introducir la función exponencial comprende su tratamiento en diferentes cuadros: gráfico, algebraico y analítico.

Para el estudio de la función logaritmo se ofrecen tres posibilidades para su introducción: (a) a partir de las propiedades de funciones exponenciales; (b) plantear el problema de las funciones derivables en  $\mathbf{R}^{+*}$  tales que  $f(xy) = f(x) + f(y)$  y admitir la existencia de primitivas para la función  $x \mapsto 1/x$ ; (c) tratar el logaritmo luego de la integración. La diferencia de la primera proposición

con respecto a las dos otras es, por supuesto, que para esta es necesario abordar antes el estudio de la función exponencial, mientras que para las otras es suficiente haber admitido que las primitivas de la función  $x \mapsto 1/x$  existen. Así, la escogencia de la manera de introducir la función logaritmo necesita, según el caso, disponer de la noción de función inversa.

Los profesores del IUT tienen una libertad bastante grande en el marco del curso de análisis que ellos tienen a cargo. De esta manera, está en ellos decidir incluir, o no, un apartado específico sobre la noción de función inversa.

### **3 Metodología**

La sección presenta nuestra manera de proceder para este estudio cuantitativo. Primero describimos la construcción del cuestionario; luego mencionamos la forma en que se efectuó el tratamiento de las respuestas.

#### **3.1 Construcción de cuestionarios**

Teniendo en cuenta la hipótesis según la cual la noción de función inversa y la situación de corrección en clase de matemáticas son concebidas de manera diferente en las dos instituciones, Terminal S y primer año del IUT, se decidió construir dos cuestionarios en los cuales se conservaran todas las similitudes posibles; las distinciones residen en las especificidades de cada institución. Los dos cuestionarios se conforman de tres partes que comprenden la noción de función inversa, las prácticas de corrección en clase de matemáticas y elementos para identificar a los profesores.

Vamos a mostrar algunos ejemplos de las preguntas escogidas en las dos primeras partes, explicando las razones de esas escogencias. Cuando la redacción de la pregunta difiere de un cuestionario al otro (debido a las especificidades mencionadas de cada institución), mostraremos la pregunta como se propuso a los profesores de liceo.

##### **3.1.1 La noción de función inversa**

El análisis de los programas de Terminal S (2002) mostró que la noción de función inversa no se estudia obligatoriamente de manera explícita a nivel de Secundaria, pero se mantiene al menos implícita en algunos ejemplos de funciones: es el caso de las funciones exponencial y logaritmo. De esta manera, la referencia al ejemplo de estas funciones será frecuente como aquel que permitiría

abordar otras funciones que demandaran más atención sobre los dominios de definición (como funciones trigonométricas y sus inversas), incluso si la noción de función inversa no se menciona explícitamente.

En los dos cuestionarios, la primera pregunta estudia las asociaciones de ideas que hacen algunos profesores con respecto a la función logaritmo.

1. Cuando se habla de la función logaritmo, cuál es su primer pensamiento:

- Una primitiva de la función  $x \mapsto 1/x$
- La función inversa de la función exponencial
- Otro .....

La respuesta a la pregunta se relaciona con lo que los profesores declaran en las preguntas siguientes sobre la manera en la que ellos abordan las funciones exponencial y logaritmo. Es probable que si el profesor anuncia que su primer pensamiento es en la función inversa de la función exponencial, entonces tendrá en cuenta se carácter biyectivo e inverso. Esta pregunta puede funcionar como un indicador de la proporción de profesores cuyas declaraciones están en conformidad con lo prescrito institucionalmente. En efecto, la respuesta “primitiva de la función  $x \mapsto 1/x$ ” estaba fuertemente inducida por las instrucciones oficiales en Terminal S antes de la reforma del 2000.

Las tres siguientes preguntas (2, 3 y 4) fueron propuestas con el objetivo de profundizar las posibles elecciones de los profesores de liceo al momento de presentar en las horas de curso en Terminal los capítulos que tratan sobre las funciones logaritmo y exponencial. Para los profesores de IUT, las preguntas se redactaron para obtener trazas de sus “representaciones” sobre la enseñanza llevada a cabo en liceo. Estas escogencias aportan información sobre el lugar que los profesores otorgan a la noción de la función inversa en Terminal.

La pregunta 2 se refiere particularmente al orden en el que los profesores de liceo escogen o escogerían para presentar a sus alumnos los dos capítulos de funciones logaritmo y exponencial. Las preguntas 3 y 4 precisan la elección para introducir cada una de esas funciones.

Las dos siguientes preguntas (5 y 6) se interesan en las “representaciones” que los profesores tienen con respecto a los conocimientos teóricos de los alumnos y estudiantes sobre la función inversa. La primera trata particularmente sobre los conocimientos que un alumno ha podido adquirir al final del liceo; mientras que la segunda aborda la cuestión de la necesidad de disponer de estos conocimientos para continuar una formación en un IUT. Estas dos preguntas se focalizan en las

“representaciones” de los profesores a propósito de esta transición, de Terminal al primer año de IUT, con respecto a la función inversa.

La enseñanza de las funciones inversas en IUT también se estudió. Dado que los programas de matemáticas en los IUT dependen de cada departamento, es necesario saber si las funciones inversas se tratan en el curso magistral de manera explícita o no. Si son estudiadas, el interés reside en su relación con el trabajo realizado antes, en liceo. Así, con respecto a los ejemplos de funciones que pueden ser retomadas en IUT se proponen las siguientes preguntas:

¿Se retoma en el curso magistral en IUT ejemplos de funciones inversas estudiadas en liceo? Si el profesor declara hacerlo, ¿se hace la relación solamente con Terminal (con las funciones logaritmo y exponencial), o bien se retoma más lejos, las funciones raíz cuadrada y cuadrada?

### 3.1.2 Prácticas de corrección en clase de matemáticas

La segunda parte de los cuestionarios es dedicada por completo a las declaraciones de los profesores a propósito de las situaciones de corrección.

En nivel superior, las correcciones en matemáticas se llevan a cabo sobre todo en los T.D. y raramente durante los cursos; por el contrario en liceo, estas constituyen un período importante del curso. La primera pregunta explora estas particularidades.

La pregunta 2 toma en cuenta una de las variables que podrían influenciar otras respuestas: la del tiempo reservado del curso o del T.D. para la búsqueda personal de los alumnos o estudiantes. En el caso en que los alumnos o estudiantes buscan resolver los ejercicios en clase es posible plantear dos preguntas relativas a la organización de la clase.

- La primera concierne el trabajo de los estudiantes o de los alumnos: ¿se trabaja individualmente, en parejas, en pequeño grupo de más de dos personas o de otra manera?
- La segunda explora la toma de decisiones de los profesores: se proponen varios criterios para decidir sobre el principio de la corrección colectiva. Las proposiciones de respuesta presentan algunas diferencias sutiles; por ejemplo: “el resultado final” hace referencia al producto de una solución, mientras que “la solución” se concibe como todo el proceso llevado a cabo para obtener ese resultado final. Para las soluciones, hacemos una distinción entre “la solución modelo” (la que un profesor espera un día dado de sus alumnos o estudiantes) y “una solución correcta” (que puede venir de un método diferente del que era esperado por el profesor). También se proponen otras respuestas que se refieren

más que todo a la gestión del orden en la clase o a la gestión del tiempo en el desarrollo de la sesión.

La siguiente pregunta se focaliza en ciertas variables de la situación de corrección en clase de matemáticas.

### 3. Mientras se corrige un ejercicio en clase

	siempre	frecuente- mente	a veces	nunca
¿Improvisa ejercicios?				
¿Envía los alumnos a la pizarra?				
¿Comenta los errores de algunos alumnos para toda la clase?				
¿Algunos alumnos hacen proposiciones para redactar partes de la solución de un ejercicio corregido en clases?				
¿Ofrece las correcciones copiadas?				
¿Escribe en la pizarra las correcciones completas de los ejercicios?				
¿Pide a sus alumnos que expliquen ellos mismos lo que han hecho?				

Algunos de los ítemes son explicados de manera más detallada:

- a. *“Improvisar” ejercicios*: Se trata de medir el grado de separación entre lo que ha sido preparado y lo que se realiza. La hipótesis para esta pregunta es que las declaraciones oscilarán entre “frecuentemente” y “a veces”, pues la modalidad “siempre” podría entenderse como que nunca hay preparación para las sesiones de ejercicios y la modalidad “nunca” podría indicar que el profesor no es flexible para los imprevistos de la clase.
- b. *Enviar los alumnos (estudiantes) a la pizarra*: Se trata de medir el grado de adhesión a la tendencia ordinaria que consiste en “enviar los alumnos a la pizarra”. La hipótesis planteada en este caso es que los profesores declararán esta práctica con una frecuencia elevada.

- c. *Escribir las correcciones completas*: Se trata de medir el grado de adhesión a la tendencia ordinaria según la cual un buen profesor de matemáticas, para corregir un ejercicio, debe copiar la solución completa<sup>3</sup> en la pizarra. En particular, escribir poco a poco permite tomar en cuenta las intervenciones de los alumnos.

Finalmente, la última pregunta de esta parte de los cuestionarios trata específicamente sobre el trabajo de preparación de las correcciones que se harán en clase. La hipótesis para esta pregunta es que la mayoría de los profesores responderá conforme al conjunto de obligaciones profesionales, relacionadas con sus creencias de lo que se espera de ellos. Por ejemplo, hemos considerado que ciertos profesores que consagran poco de tiempo a la preparación, no se atreverán a afirmarlo; o bien, un profesor con una experiencia importante podría autorizarse a expresar que no tiene más necesidad de preparar.

El hecho de escoger un ejercicio y no otro en este trabajo de preparación puede estar influenciado por lo que el profesor espera de sus alumnos; o bien, puede estar relacionado con su “representación” sobre la utilidad de corregir los ejercicios en clase. En los cuestionarios se ofrecen dos procedimientos diferentes para escoger los ejercicios que se van a proponer a los alumnos o estudiantes, sin que estos sean exclusivos uno del otro. Por ejemplo, un profesor que conoce bien las dificultades de sus alumnos puede escoger ciertos ejercicios para “superar” esas dificultades. Por otra parte, él puede proceder también a partir de lo que se ha desarrollado durante el curso, buscando ejercicios que sirvan para validar esos conocimientos, y a partir de ahí anticipar los errores que sus alumnos podrían cometer. Esto es lo que se busca obtener con los dos últimos ítemes de esta pregunta.

### **3.1.3 Identificación del profesor**

Las variables que se toman en cuenta en la tercera parte de los dos cuestionarios difieren un poco en función de las características de las dos instituciones escolares. Estas se tratarán en el programa CHIC como variables suplementarias, con el fin de estudiar la contribución de ciertos individuos a las redes encontradas a partir de las variables de las dos partes precedentes del cuestionario (Bailleul, 1995).

Así por ejemplo, las variables sexo, edad, años de servicio, nivel de estudios, nivel de enseñanza y estatus en el puesto de trabajo serán utilizadas para estudiar si

---

<sup>3</sup> La solución completa hace referencia aquí a la solución modelo.

existe una diferencia entre las declaraciones de los profesores de matemáticas sobre sus prácticas durante las situaciones de corrección y/o sobre el tratamiento de la noción de función inversa.

### **3.2 Tratamiento de respuestas a los cuestionarios**

Según Bailleul (2000) “el análisis estadístico implicativo es una herramienta particularmente efectiva para estudiar representaciones y revelar sus estructuras organizacionales”. De esta manera, nos servimos del programa CHIC para tratar las respuestas relativas a las representaciones de los profesores en los cuestionarios.

El programa CHIC realiza un análisis estadístico implicativo. Su fundamento es la medida de cierta “sorpresa estadística” dado el número de ocurrencias de respuestas a un ítem dado  $a$  que debería reportarse sobre otro ítem  $b$ . Cuando esta “sorpresa estadística” es pequeña, se habla de “cuasi-implicación” entre las variables de los ítems  $a$  y  $b$  (Gras, 1996; Gras y Kuntz, 2005) El programa produce un diagrama implicativo de variables, permitiendo la identificación de redes de respuestas, ellas mismas constituidas de “camino”. Los caminos implicativos son ilustraciones gráficas que muestran las cuasi-implicaciones entre dos o más variables. Las redes son combinaciones de varios caminos, desembocando todos en la misma variable (Bailleul, 2000).

## **4 Algunos resultados**

La información fue recolectada por encuesta postal en el año escolar 2005-2006. De esta manera el trabajo se realizó con una muestra de profesores de matemáticas de liceo y de IUT, voluntarios para responder al cuestionario.

En esta sección mostramos los resultados obtenidos del análisis de respuestas a los cuestionarios que son analizadas en dos partes: primero una “confrontación” de las frecuencias obtenidas con las hipótesis que planteamos por cada pregunta; luego, la búsqueda de redes de variables, interpretadas en términos de “representaciones” de profesores sobre la corrección en clase de matemáticas y sobre la planificación del currículum acerca de la noción de función inversa.

La sección está constituida de tres subsecciones. La primera describe la muestra de los profesores concernidos (la información proviene de la tercera parte del cuestionario) y las dos otras incluyen los análisis mencionados anteriormente.



#### 4.1 Algunas características de la muestra

Nuestra muestra está constituida de 101 profesores que enseñan en la Academia de Toulouse; unos en liceos de Haute-Garonne, otros en los IUT de la región Midi-Pyrénées. Ellos respondieron el cuestionario en febrero del 2006.

Establecimiento: 85% enseñan en liceo, 15% en IUT.

Sexo: 51% son mujeres, 49% hombres.

Edad: 41% tienen más de 50 años;

27% tienen entre 41 y 50 años;

23% tienen entre 31 y 40 años;

9% tienen entre 21 y 30 años.

Años de experiencia: 16% tienen una experiencia de más de 30 años;

35% han enseñado entre 21 y 30 años;

20% han trabajado entre 11 y 20 años;

23% tienen menos de 10 años de servicio;

6% no respondieron a la pregunta.

<u>Diplomas</u> :	liceo	IUT
Licenciatura:	21%	0%
Maestría:	57%	20%
Otros (Tesis, HDR, Ingeniero):	22%	80%

#### 4.2 Confrontación de resultados con las hipótesis planteadas

Elegimos abordar esta confrontación de las hipótesis planteadas con los datos obtenidos por medio de las frecuencias de respuestas, separando los profesores de liceo de los del IUT, pues puede haber resultados interesantes a mostrar para un sólo grupo de profesores, o bien con el objetivo de compararlos.

Esta sección será abordada también a partir del cuestionario: primero lo que corresponde a la noción de función inversa, luego los aspectos que se refieren a la corrección en clase de matemáticas.

##### 4.2.1 La noción de función inversa

###### a. En Terminal

Cerca de un profesor de cada dos (46,5%) asocia la función logaritmo con “una primitiva de la función  $x \mapsto 1/x$ ”, en lo que se podría leer una conformidad con las antiguas prescripciones institucionales, lo que cambió con la reforma del

2000. Sin embargo, un poco más de un tercio (35,6%) de los profesores respondió asociando la función logaritmo a la función inversa de la exponencial, lo que mostraría por otro lado, cierta conformidad con las prescripciones institucionales actuales.

Vamos a ver si estos resultados son coherentes con las escogencias que los profesores expresaron con respecto al orden y a la manera de introducir las funciones logaritmo y exponencial.

La frecuencia con la que los profesores escogen estudiar primero la función logaritmo es ligeramente superior a la frecuencia con la que escogen estudiar primero las funciones exponenciales (44,6% y 40,6%). Este resultado es coherente con el hecho que para la mayoría de ellos (46,6%) el primer pensamiento sobre el logaritmo corresponda a “una primitiva de la función  $x \mapsto 1/x$ ”. 40,6% de los profesores de la muestra respondieron “primero la función exponencial, luego la función logaritmo”, de acuerdo con las instrucciones oficiales actuales. Ellos deberían corresponder, en principio, a los 35,6% que declararon que su primer pensamiento sobre el logaritmo es la “inversa de la función exponencial”.

Estos resultados nos permiten decir que 3 años después de la reforma del curriculum francés, se encuentra un 40,6% de profesores que trabajan bajo las nuevas prescripciones institucionales, lo que muestra un cierto dinamismo en el cambio preconizado. Sin embargo, con el 44,6% de casos se percibe la inercia de los profesores que continúan a concebir una enseñanza tal como se abordaba antes.

Con respecto al lugar acordado a la noción de función inversa en Terminal por los profesores de nuestra muestra, encontramos en las preguntas relativas a las diferentes elecciones de introducción de cada una de las funciones tres organizaciones posibles:

- La primera puede leerse de la siguiente manera: capítulo sobre primitivas, función logaritmo y función exponencial, introduciendo esta última a partir de las propiedades de la función logaritmo. Esto supone la existencia de un cierto trabajo (eventualmente implícito) sobre la noción de función inversa.
- La segunda propone primero la función exponencial (introducida sea por el método de Euler, sea con una función  $f$  derivable en  $\mathbb{R}$  tal que  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , sea con el ejemplo de la radioactividad) luego la función logaritmo (introducida a partir de las propiedades de la función exponencial). De la misma manera, esta proposición supone cierto trabajo (eventualmente implícito) sobre la noción de función inversa.
- Finalmente, podría pensarse en una enseñanza en la que las funciones logaritmo y exponencial sean introducidas sin ninguna relación entre ellas. Por

ejemplo la función exponencial por el método de Euler y la función logaritmo definida a partir de una primitiva de la función  $x \mapsto 1/x$  para  $x > 0$ . En este caso, podría suponerse la ausencia de un trabajo, incluso implícito, sobre la noción de función inversa.

Para identificar las organizaciones elegidas por los profesores, buscamos las implicaciones entre las variables que entran en juego en esta organización. En efecto, el interés del programa CHIC y del análisis estadístico implicativo es poder seguir los caminos que unen las respuestas de una pregunta a la otra.

*b. En la transición*

Nuestro interés no se queda en la manera de concebir la enseñanza de la función inversa en el liceo, sino que se extiende al IUT. Respecto a las representaciones de los profesores a propósito de la transición de Terminal a primer año de IUT, presentamos los resultados correspondientes a los conocimientos teóricos sobre la función inversa, si los alumnos de liceo los han adquirido y su necesidad en IUT.

Un profesor de cada dos (49,5%) declara que los alumnos van haber adquirido conocimientos teóricos sobre la función inversa al final del liceo. Sin embargo, 60% de los profesores de IUT declaran que no es el caso. Podría pensarse que estos últimos han percibido, en los estudiantes que reciben, una insuficiencia en esos conocimientos.

La mayoría de profesores (63,4%) afirma la necesidad de tener conocimientos teóricos sobre la función inversa en el IUT. Entre los profesores del IUT, la gran mayoría (80%) confirma esta necesidad, pero 60% declara que los alumnos pueden no haber adquirido suficiente de esos conocimientos en liceo. Así, de alguna manera no sería un problema para los estudiantes no tener conocimientos sobre la función inversa en IUT, sea porque no van a necesitarlos, sea porque el contenido debe ser abordado a ese nivel y no antes.

*c. En IUT*

71,3% de la muestra considera que las funciones inversas se tratan explícitamente en IUT. Además, 68,3% de ellos declaran que su enseñanza toma en cuenta la revisión de ejemplos de funciones estudiadas a nivel de Secundaria, lo que es confirmado por 80% del IUT. Por otra parte, 30,2% de liceo no respondieron a la pregunta sobre la revisión de ejemplos en IUT.

Estos resultados parecen mostrar la adecuación entre las declaraciones de los profesores y lo que ellos piensan que se espera de ellos como profesores. En este caso, retomar ejemplos de funciones estudiadas en liceo parece ser importante para

abordar la transición de la noción de función inversa del liceo al IUT. Puede ser más fácil para los profesores de IUT pronunciarse sobre la enseñanza anterior que para los de liceo sobre la enseñanza ulterior; así, algunos prefieren no pronunciarse. Podría atribuirse este hecho a una falta de conocimiento por parte de los profesores de liceo de lo que sucede en la otra institución.

#### **4.2.2 Situaciones de corrección en clase de matemáticas**

Para mostrar los resultados obtenidos en la segunda parte de los cuestionarios decidimos hacerlo sin distinguir Liceo –IUT. En el análisis estadístico implicativo que se aborda en la sección siguiente, las variables Liceo e IUT serán tratadas como variables suplementarias. Además, dado que el número total de profesores es 101, solamente vamos a mostrar los efectivos, ya que las frecuencias son muy cercanas.

##### *a. La corrección colectiva*

Presentamos aquí los resultados respectivos al pasaje a la corrección colectiva y los criterios para la toma de esta decisión, luego las prácticas que los profesores declaran utilizar.

La mayoría de los profesores (9 siempre y 45 frecuentemente) paran el tiempo de búsqueda y pasan a la corrección colectiva cuando los alumnos ya están comprometidos en la solución correcta (haciendo referencia a la solución modelo). Para 36 de ellos (frecuentemente) este momento de parar la búsqueda se produce cuando varios alumnos utilizan métodos diferentes; 43 (frecuentemente) pasan a la corrección colectiva cuando uno de sus alumnos ha encontrado la solución esperada, incluso si 56 (nunca) no toman en cuenta este criterio. Igual, para 53 profesores, el hecho que un alumno haya encontrado el resultado final o una solución correcta pero no la esperada, no son criterios para pasar a la corrección colectiva.

De esta manera, lo que sobresale en las declaraciones escritas es el pasaje a la corrección colectiva a partir de criterios colectivos, dependiendo más de algunos o varios alumnos (o estudiantes) que de uno solo. Los criterios que corresponden a la gestión del orden en la clase o a la gestión del tiempo no son tomados en cuenta con frecuencia, aunque en las discusiones con los profesores son los argumentos que sobresalen más para justificar ciertas prácticas.

La siguiente tabla muestra los resultados respectivos a las prácticas de los profesores durante la corrección de ejercicios en clase. A partir de estos datos comparamos con las hipótesis emitidas en la sección de “metodología”.

“Representaciones” de profesores ordinarios sobre situaciones de corrección

	siempre	frecuente- mente	a veces	nunca
Improvisar ejercicios	2	21	<b>70</b>	8
Enviar los alumnos (estudiantes) a la pizarra	<b>22</b>	<b>42</b>	35	2
Comentar para toda la clase los errores cometidos	8	52	37	4
Tomar en cuenta las proposiciones de los alumnos (estudiantes) en la redacción de la solución	1	26	48	26
Dar la corrección poli copiada	4	34	44	19
Escribir la solución completa en la pizarra	<b>16</b>	<b>48</b>	32	5
Los alumnos (estudiantes) explican lo que ellos hicieron	12	61	25	3

Tab. 1: *Prácticas de profesores durante las correcciones*

La mayoría de los profesores (70) declaran recurrir a la improvisación solamente a veces. Esto podría ser la traza de la voluntad de estos profesores a mostrar cierta flexibilidad en el desarrollo de las sesiones.

Con respecto a las afirmaciones sobre la utilización de la pizarra:

- 64 profesores envían siempre o a veces los alumnos o estudiantes a la pizarra. La enseñanza en IUT sería entonces, de un punto de vista formal, cercana a la de los liceos, y alejada de las prácticas universitarias ordinarias.
- 16 declaran escribir siempre las soluciones completas en la pizarra, 48 lo hacen frecuentemente: esto confirma nuestra hipótesis. Sin embargo, no tenemos información sobre el grado en que se toman en cuenta las intervenciones de los alumnos al escribir poco a poco en la pizarra.

La tendencia ordinaria de estos profesores de matemáticas es: una pequeña parte de improvisación durante las correcciones, el envío regular de alumnos a la pizarra y la escritura completa de una solución.

*b. La preparación de correcciones*

La siguiente tabla expone los resultados relativos a la preparación de las correcciones:

	siempre	frecuente- mente	a veces	nunca
Preparación para presentar la corrección de ejercicios	16	28	37	20
Preparación de varios métodos de resolución	2	20	<b>70</b>	9
Escoger los ejercicios en función de las dificultades de los alumnos	<b>15</b>	<b>69</b>	13	4
Escoger los ejercicios a partir de lo que ha sido estudiado durante el curso	<b>31</b>	<b>63</b>	6	1
Anticipar los errores de los alumnos	11	<b>51</b>	<b>27</b>	12

Tab. 2: *Prácticas de preparación de correcciones*

Contrariamente a lo que esperábamos, no hay una diferencia bien marcada entre las declaraciones de los profesores de la muestra con respecto a la importancia otorgada a la preparación de la presentación de la corrección de ejercicios. La mayoría de ellos (70) afirman preparar a veces varios métodos de resolución; dicho de otra manera, la mayoría del tiempo, estos profesores sólo preparan una solución. Esta práctica puede provenir del hecho que el profesor conoce bien el curso y los ejercicios que él propone a los alumnos; puede ser también que como el nivel de enseñanza es elemental, le es suficiente con recorrer rápidamente los enunciados; o bien, que encuentre interesante descubrir en clase los ejercicios con los alumnos o estudiantes, incluso cuando son ejercicios difíciles.

La escogencia de ejercicios no es exclusiva: 15 profesores declaran hacerlo siempre en función de las dificultades de los alumnos, 69 lo hacen frecuentemente; 31 afirman hacerlo siempre a partir de lo que fue estudiado en clase y 63 lo hacen también así frecuentemente. Se confirma la anticipación de los errores eventualmente cometidos por los alumnos o estudiantes: 11 profesores dicen hacerla siempre, 51 con frecuencia y 27 a veces. La elección de un ejercicio parece basarse más en lo que ha sido estudiado en clase que en función de las dificultades de los alumnos. Podría pensarse entonces que los profesores muestran un cierto interés en retomar los conocimientos estudiados, con el fin de ayudar de cierta manera a los alumnos (estudiantes) a mejorar en algunas dificultades.

### 4.3 Las redes obtenidas

En esta sección abordamos el estudio de los datos a partir de un análisis estadístico implicative con la ayuda del programa CHIC, en el que despejamos dos redes principales de variables. La búsqueda de redes con todas las variables y para todos los individuos se efectuó con un límite de 0,80 (Gras y Kuntz, 2005). Nos interesamos en las implicaciones entre las variables así como en las contribuciones de las variables suplementarias en los diferentes caminos.

#### 4.3.1 Red 1: “Los clásicos”

Nombramos esta red “los clásicos” porque las cuasi-implicaciones entre las variables revelan una organización de los contenidos sobre las funciones logaritmo y exponencial que corresponde a lo que estaba impuesto por los programas de enseñanza en Francia antes de la reforma del 2000.

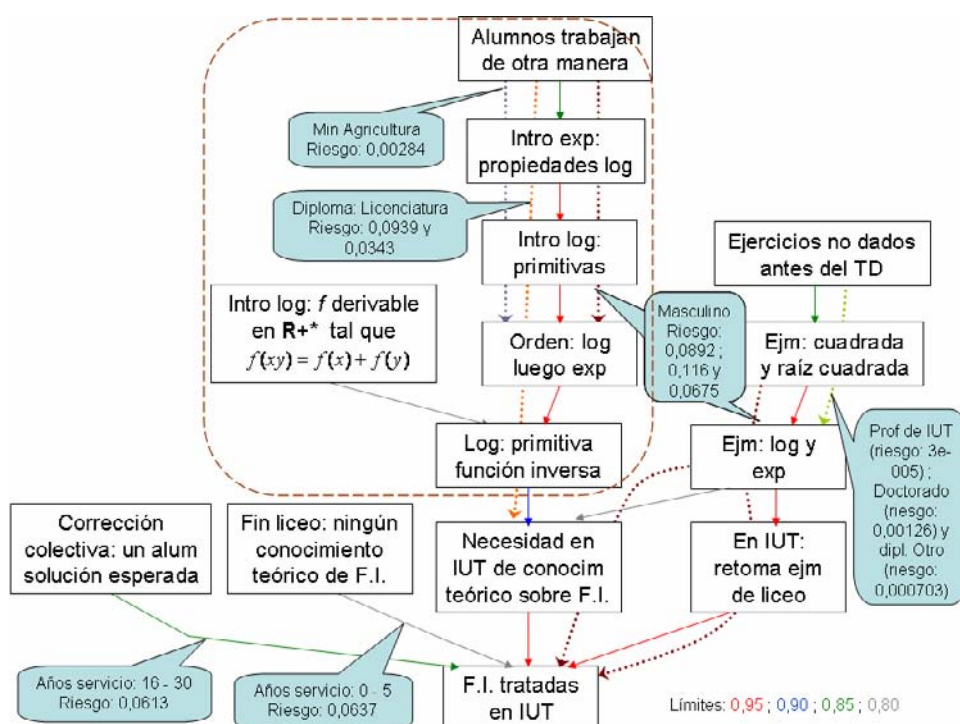


Fig. 1: Red 1 (Los clásicos) con límite 0,80

Vemos aparecer dos caminos principales de variables que llegan a la variable “las funciones inversas serán tratadas explícitamente en IUT” y otras variables que dan información suplementaria sobre los profesores. Los dos caminos: el primero a la derecha en la figura, el otro en el centro (entre guiones), llevan directamente al hecho que “las funciones inversas serán tratadas explícitamente en IUT, los estudiantes necesitan conocimientos teóricos sobre la función inversa”. La organización declarada para estos contenidos matemáticos en Terminal no implica retomar en IUT ciertos ejemplos de funciones estudiadas en liceo ni viceversa.

- El primer camino a la derecha en la figura 1, reagrupa los profesores que declaran que será necesario retomar los ejemplos de funciones estudiadas en liceo: no solamente las funciones logaritmo y exponencial, sino también las funciones cuadrada y raíz cuadrada. Entre ellos se encuentran aquellos que en la organización del departamento del IUT decidieron no dar los ejercicios antes de los TD. Las variables más contributivas a este camino con las que nos indican los profesores de IUT, doctores o ingenieros. Se puede considerar que este camino es el de los profesores de IUT. Revela una representación del aprendizaje de las matemáticas cercana al behaviorismo. No es llamativo que los doctores, que en su mayoría no tienen ninguna formación didáctica, pongan en práctica el modelo de enseñanza con el que ellos alcanzaron su escolaridad. ¿Cuál es el interés para el aprendizaje de no dar los ejercicios antes de los TD? ¿Es una elección deliberada o una consecuencia de las obligaciones organizacionales de los IUT?
- Para los profesores que contribuyen al camino del medio, el primer pensamiento sobre el logaritmo es una primitiva de la función  $x \mapsto 1/x$  cuando  $x \neq 0$ . En coherencia, el orden propuesto para estudiar las funciones logaritmo y exponencial en Terminal es primero la función logaritmo, introducida después del capítulo sobre las primitivas, luego la función exponencial, introducida a partir de las propiedades de logaritmo. Este camino es más que todo el de los profesores de liceo. En este caso se encuentran aquellos para quienes la organización de los alumnos o estudiantes que reflexionan sobre un ejercicio no es ni individual, ni en parejas ni en pequeño grupo, sino de otra manera; lo que se precisa en declaraciones que afirman, en general, que ellos dejan la libertad de organizarse a sus alumnos, o bien, que buscan una solución todos juntos. En este nivel, la variable “Ministerio de la Agricultura” contribuye fuertemente en este camino (riesgo 0,00284) que se prolonga con esta variable de organización de la clase.



La variable suplementaria “Sexo: masculino” contribuye significativamente en estos dos caminos con un riesgo de 0,0675 en el de la derecha y de 0,0892 en el del medio (entre guiones). En coherencia con los estereotipos usuales, son los hombres quienes más ponen en práctica el modelo clásico, reproductor del orden social. Ellos son más conservadores que las mujeres puesto que este orden social les favorece.

Entre los profesores que consideran la primitiva de la función  $x \mapsto 1/x$  (para  $x \neq 0$ ) como su primer pensamiento a propósito de la función logaritmo, se encuentran aquellos que tienen una preferencia por la introducción de la función logaritmo después del capítulo sobre las primitivas, o bien aquellos que prefieren introducirla a partir de una función  $f$  derivable en  $\mathbb{R}^{+*}$  tal que  $f(xy) = f(x) + f(y)$ . Sin embargo esta última posibilidad no forma parte de las elecciones señaladas por los que consideran que el orden para enseñar estas funciones en Terminal es primero la función logaritmo y luego la exponencial.

Se observa también dos otras cuasi-implicaciones que llegan a la variable “funciones inversas tratadas explícitamente en IUT”; estas vienen de las siguientes variables:

- dejando el liceo los alumnos no tendrán conocimientos teóricos sobre las funciones inversas.
- uno de los criterios para comenzar la corrección colectiva es que uno de los alumnos o estudiantes encuentre la solución esperada.

En el primer caso se considera que las funciones inversas serán tratadas explícitamente en IUT, incluso si al final de la Secundaria los alumnos no tienen conocimientos teóricos al respecto. Este indicio forma parte también de una “representación” clásica de enseñanza: los aspectos teóricos serán abordados a un nivel superior. Una contribución significativa viene de los profesores que tienen menos de 5 años de experiencia. Por el contrario, en el segundo caso, se trata de profesores que tienen entre 16 y 30 años de servicio.

Todo sucede como si los profesores de esta red continuaran a pensar en función de lo que imponían los programas antiguos de liceo. Ellos dejan así la responsabilidad de abordar las funciones inversas en la Universidad, encargada de retomar los ejemplos de funciones estudiadas antes.

En conclusión, esta red está constituida por dos caminos bien distinguidos: el de los profesores de IUT y el de los profesores de liceo, los cuales desembocan en la variable “función inversa tratada en IUT”.

### 4.3.2 Red 2: “Los modernos”

Titulamos esta red los modernos pues hace aparecer un enlace de variables que revelan una organización de los contenidos entre exponencial y logaritmo conforme con las instrucciones oficiales del 2002.

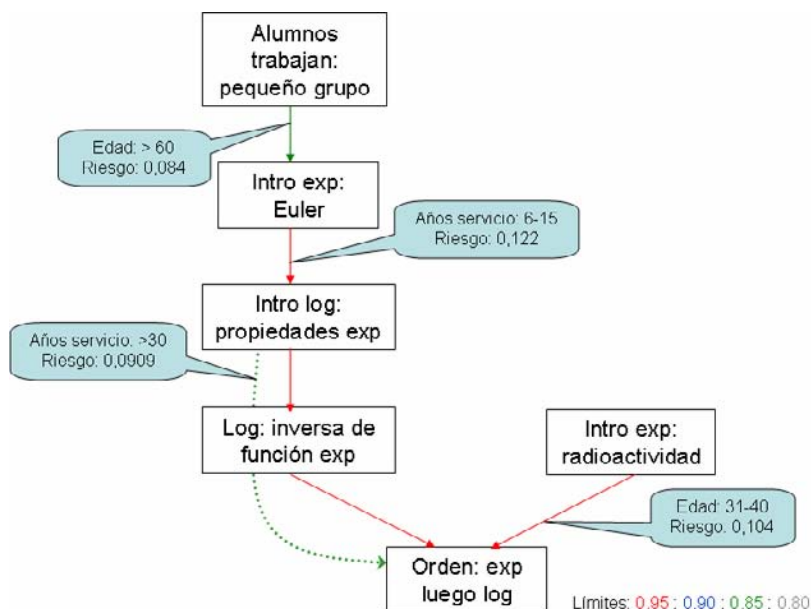


Fig. 2: Red 2 (Los modernos) con límite 0,80

Aquí hay pocas reglas: se encuentran variables que se oponen de cierta manera a las de la red anterior (más particularmente a las del camino del medio entre guiones), en lo que se refiere a la escogencia de introducción de las funciones logaritmo y exponencial en liceo.

La variable que recibe las implicaciones es la que indica el orden para estudiar estas funciones: “primero la exponencial luego el logaritmo”. En consecuencia, la función exponencial sería introducida por el método de Euler o con un ejemplo de radioactividad, y la función logaritmo por las propiedades de la exponencial. En este caso, cuando los profesores piensan en el logaritmo, lo hacen en primer lugar como la inversa de la función exponencial.

Sin embargo, las variables relativas al tratamiento de la función inversa en IUT no aparecen aquí: el lazo con retomar ejemplos de funciones estudiadas en liceo está ausente.

La figura 2 muestra para un camino la contribución más significativa de la variable “años de experiencia: más de 30 años”. Todo sucede como si la puesta en práctica de las “novedades” estuviera a cargo de los profesores más “experimentados”. Sin embargo, se debe considerar también que las dos reglas encontradas involucran variables que indican las posibles maneras de introducir la función exponencial: por el método de Euler o por un ejemplo de radioactividad. La primera recibe la contribución más significativa de profesores que tienen de 6 a 15 años de experiencia y la segunda recibe la contribución de los que tienen entre 31 y 40 años de edad.

Esta red representa los profesores “modernos” que son, sea los más experimentados, sea los profesores relativamente jóvenes que han estabilizado sus prácticas y que han sobrepasado las dificultades de los primeros años de enseñanza, durante los cuales se instalan las rutinas de trabajo. Se puede emitir la hipótesis que los profesores más experimentados ponen más fácilmente en práctica los cambios de programa, por gusto al cambio o por respeto a las instrucciones oficiales. Los profesores que han trabajado entre 31 y 40 años habrían alcanzado un nivel de confort suficiente en su trabajo, permitiéndoles cambios e innovaciones.

Cuando se desciende el límite de implicación a 0,80 aparece una nueva variable: “cuando los alumnos o estudiantes buscan, trabajan en grupos pequeños (más de 2)”. En este caso se encuentra sobretodo la contribución de los profesores con edades de más de 60 años, lo que podría reforzar la idea de la presencia de profesores más “experimentados” en esta red. Se puede pensar que están listos para innovar, no solamente en cuanto a contenidos matemáticos, sino también en la organización de los alumnos cuando buscan la solución a un ejercicio. Con respecto al tratamiento de las funciones logaritmo y exponencial se ve que puede haber un lazo explícito con otras disciplinas, como la física.

Se puede observar que las variables más implicadas en los caminos o reglas corresponden sobre todo al contenido matemático en juego; en otros términos, las variables relativas a la situación de corrección aparecen poco en las redes. Nuestro interés por estas últimas viene de su relación con el aprendizaje de los alumnos (o estudiantes) y deseamos conocer los comentarios de los profesores al respecto. El hecho que estas no aparezcan como variables significativas en las declaraciones escritas, no significa que los profesores no tengan una opinión precisa; puede ser que la herramienta utilizada para obtener la información no sea suficientemente fina para que ellos puedan pronunciarse.

Así, la corrección en clase de matemáticas parece una práctica transparente de los profesores de matemáticas, lo que confirma nuestro interés por el estudio de esta práctica ordinaria.

## 5 Conclusiones

Las dos redes principales encontradas nos permiten percibir las “representaciones” de los profesores:

- “los clásicos” los hombres son los más contributivos; ellos conciben todavía la organización de los contenidos tal como estaba impuesta en los programas antiguos y reenvían a la enseñanza superior la responsabilidad de revisar ejemplos ya abordados y de tener a cargo los conocimientos teóricos.
- “los modernos” ellos se adaptan a la organización recomendada por las instrucciones oficiales actuales.

Nuestra metodología de encuesta por cuestionario nos permitió alcanzar más lo que los profesores piensan hacer o lo que piensan deber hacer, que lo que efectivamente hacen. Las prácticas declaradas por los profesores deben ser confrontadas con observaciones de clase y ser profundizadas durante entrevistas con los profesores. Por esto planteamos una segunda etapa en nuestra metodología. De las redes (constituidas a partir de las declaraciones y con la ayuda del programa CHIC) escogimos a los profesores en función de su contribución a las redes y en la medida en la que enseñaran en Terminal o en primer año de IUT, con los que llevamos a cabo un estudio cualitativo. La metodología fue inspirada del proceder clínico (Leutenegger, 2000) para proseguir con la exploración de las prácticas de corrección en clase por medio de observaciones de prácticas en clase.

## Bibliografía

- Bailleul, M. (1995). *L'analyse statistique implicative : variables modales et contributions des sujets*, Actes du colloque méthodes d'analyse statistique multidimensionnelles en didactique des mathématiques, Ed. Gras.
- Bailleul, M. (2000), *Mise en évidence de réseaux orientés de « représentations » dans deux études concernant des enseignants stagiaires en IUFM*, Actes des journées sur la fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative.
- Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage éditions.

- Douady, R. (1987). *Jeux de cadres et dialectique outil/objet*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7(2), pp 5-32.
- Gras, R. et al. (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Gras, R.; Kuntz, P. (2005). *Discovering R-rules with a directed hierarchy*, Soft Computing, Published on line, Springer.
- Leutenegger, F. (2000). *Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 20(2), pp 209-250.
- Robert, A. (1998). *Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18(2), pp 139-190.
- Robert, A.; Rogalski, J. (2002). *Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche*. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education (La Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies), Vol. 2(4), pp 505-528.
- Roditi, E. (2003). *Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 23(2), pp.183-216.
- Rousset-Bert, S. (1991). *Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de mathématiques en liaison avec certaines de leurs représentations*, Petit X, Vol. 25, pp 25-58.



# Análisis estadístico implicativo, análisis textual. Un ejemplo de complementariedad

Marc Bailleul y Rubén Rodríguez Herrera

IUFM, 186 rue de la Délivrande  
14053 CAEN cedex  
marc.bailleul@caen.iufm.fr  
ruben.rodriguez@caen.iufm.fr

**Resumen:** Los liceos profesionales están actualmente, impregnados por interrogantes de diferentes puntos de vista, en donde se cruzan varias lógicas (escolares, económicas, políticas y administrativas). En el marco de una investigación que busca comprender como es que los docentes, en el secundario superior, se representan las tensiones resultantes. Nosotros hemos propuesto a los docentes de la Academia de Caen un cuestionario compuesto de preguntas abiertas y también preguntas cerradas.

Analizamos separadamente los datos recogidos, (257 respuestas: modos y textos, utilizando los software CHIC y ALCESTE. En este artículo presentaremos los dos tipos de resultados en un análisis comparativo.

## 1 Introducción

Los diferentes trabajos realizados hasta hoy día sobre los docentes del liceo técnico son muy escasos, a pesar que la población concernida por su organización, y la de los estudiantes, representa el tercio del efectivo actualmente escolarizado.

Hasta este día los docentes del liceo profesional son poco numerosos, aunque la población de alumnos representa más o menos el tercio del efectivo actualmente escolarizado. Una evolución se produjo en los liceos después de la creación en 1939, de centros de formación profesional y aquella de 1941 de los liceos básicos técnicos, hasta los actuales liceos profesionales.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Utilizaremos la sigla LP para referirnos al liceo profesional.

Nosotros identificamos tres grandes lógicas. La lógica económica (Brucy y Troger, 2000) que podemos expresar así: ¿cómo encontrar el mejor equilibrio entre la respuesta que se debe aportar a las exigencias inmediatas del mercado de trabajo y las exigencias imprevisibles de ese mismo mercado a largo plazo? La lógica social: los liceos profesionales deben a la vez insertar sus alumnos en el mundo del trabajo y ofrecer formaciones susceptibles de ser asimiladas por sus alumnos, en particular aquellos alumnos que provienen de categorías sociales catalogadas de desfavorecidas y/o en ruptura con el medio escolar del colegio (Agulhon, 2000). La lógica administrativa<sup>2</sup>: la descentralización y la ley quinquenal sobre el empleo ubican los LP en una perspectiva de desarrollo que, si bien ella mantiene la definición nacional de las formaciones, permite también desarrollos diferenciados según las distintas regiones y permite su adaptación a las necesidades locales. Estas tres lógicas cohabitan en el campo escolar del LP junto a una cuarta lógica: aquella de la escuela y su funcionamiento.

Un grupo pluricategoría trabajó en el marco de un GFR<sup>3</sup> sobre el tema siguiente: ¿cómo los docentes del liceo profesional toman en cuenta, cotidianamente, las lógicas a veces contradictorias en la práctica en el funcionamiento del LP?

## 2 Metodología

Nosotros hemos elaborado un cuestionario que hemos sometido, luego de un chequeo preliminar, al conjunto de los profesores de los LP de la Academia de Caen, (la Academia de Caen comprende la región administrativa de la Basse-Normandi). Los principales temas abordados fueron los siguientes: los contenidos de enseñanza, (la interacción enseñanza general/ enseñanza profesional y su adaptación a las necesidades actuales y futuras de sus alumnos en los dos tipos de enseñanza), el reparto de la formación entre liceo profesional y las empresas, el aporte del pasaje del alumno en una empresa, las características del liceo profesional y la formación de los profesores. Nosotros mezclamos preguntas cerradas a valores modales y preguntas abiertas, como se puede ver aquí en una parte de la pregunta 6<sup>4</sup>.

---

<sup>2</sup> Entre autonomía e integración, retomando el título de la parte 2 de Pelpel, Troger, 2001.

<sup>3</sup> GFR = Grupo de Formación e Investigación.

<sup>4</sup> Las personas interesadas por el cuestionario completo pueden dirigirse a los autores.



**Q6 – PARA USTED EN CUANTO ACTOR DEL SISTEMA DE ENSEÑANZA EN EL LP,...**

Para cada una de las afirmaciones siguientes, expresar vuestro grado de acuerdo escribiendo una cruz por cada casilla y por cada ítem. Además en cada línea intermediaria del formulario, queremos que usted aporte elementos complementarios que permitan esclarecer su respuesta.

	En acuerdo completo	De acuerdo	No verdaderamente de acuerdo	En desacuerdo
El LP es un lugar de relegación social				
El LP es una vía de excelencia				

Tab.1: Preguntas a valor modal con posibilidad de respuesta abierta

Nosotros recogimos 257 cuestionarios, donde una buena parte se prestó a la posibilidad de completar sus respuestas con comentarios

Nosotros decidimos de hacer sobre las respuestas cerradas un análisis implicativo con el software CHIC<sup>5</sup> y un análisis textual sobre las respuestas abiertas con el software ALCESTE<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> (Classification Implicative et Cohésitive). Clasificación Implicativa y Cohesitiva

<sup>6</sup> ALCESTE: Logiciel d'analyse de données textuelles, Image (Informatique, Mathématiques, Gestion), 12 rue Thiers, 31400 Toulouse

### 3 Los resultados del análisis implicative

Al margen de incertidumbre de .98, nosotros hemos obtenido seis redes de variables. Si se identifica los individuos representativos de cada red, hemos podido recoger sus propósitos, lo que nos ayudó enormemente para efectuar la interpretación de las redes obtenidas.

#### 3.1 La red R1

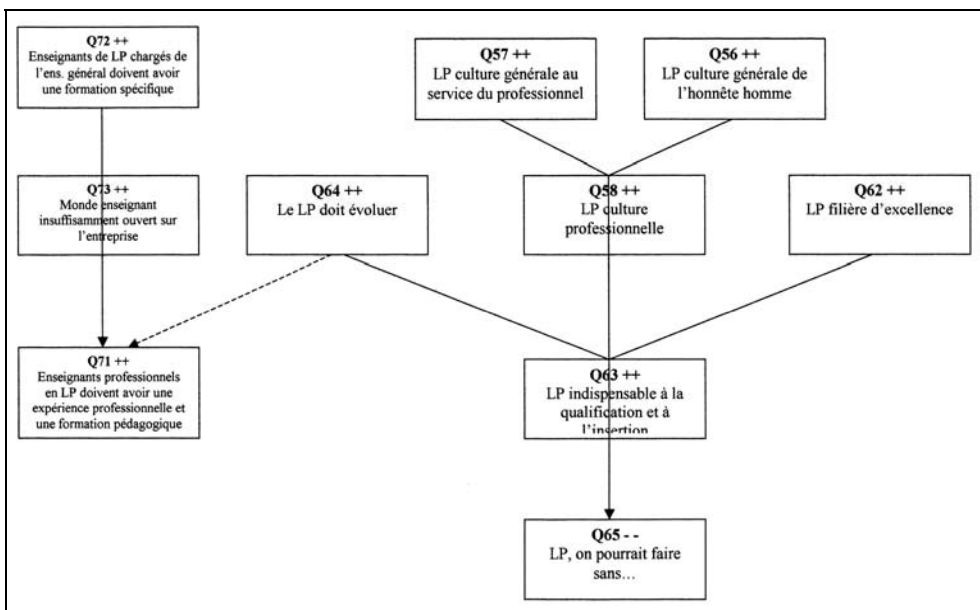


Fig. 1: La red R1

Esta red pone en evidencia la problemática general de las respuestas a la encuesta: “El liceo profesional no puede funcionar sin...”, (*Le LP, on ne peut pas faire sans...*), ello por una razón doble: necesidad doble de una cultura general al servicio del profesional”, (*culture générale au service du professionnel*), y de una “cultura general del hombre honesto”, (*culture générale de l'honnête homme*). La expresión “*honnête homme*” es en el sentido de su significado humanista. Así la pregunta Q2.1 concerniendo la adecuación de los conocimientos de las materias generales a las necesidades de los alumnos, el individuo 249 responde: “mismo si

los alumnos desconfían de la necesidad de todos esos contenidos generales” y adhiere al rechazo de “en el LP, se podría hacer sin...”. Haciendo eco, el individuo 37 enuncia “Muchos empleadores confirman la necesidad de expresarse en inglés, (plomeros, camioneros, comerciantes, contadores...)”, apoyándose en la necesidad de poseer ciertos elementos de la cultura general para poder integrarse en el mundo del trabajo.

Por supuesto que el LP debe evolucionar y la formación de su personal docente debe responder a ciertas exigencias, (subred de la izquierda).

Nosotros hemos llamado a esa subred de R1: “La necesidad social del LP”, (*De la nécessité sociale du LP*).

### 3.2 La red R2

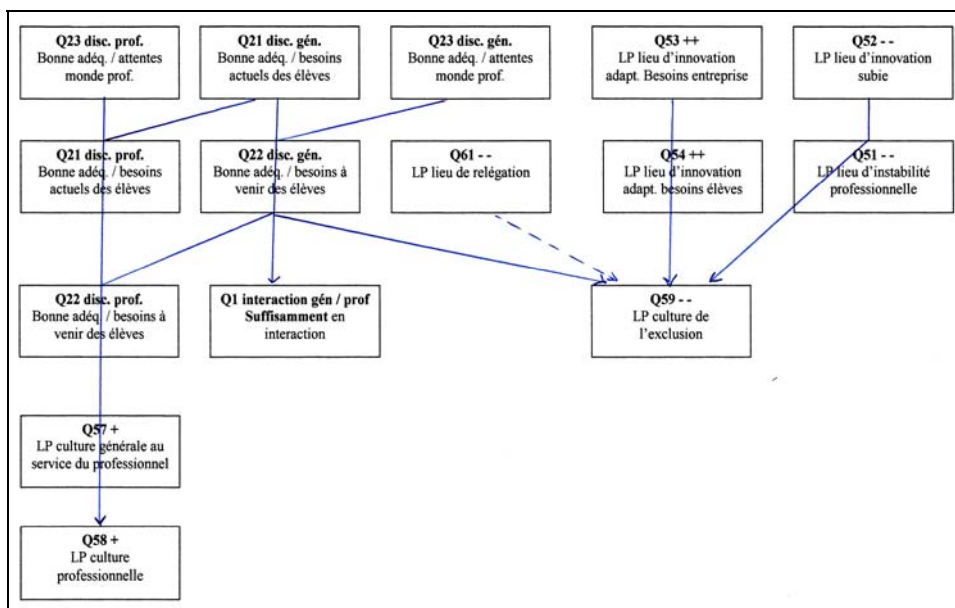


Fig. 2: La red R2

El individuo 205 es muy representativo de esa red, a pesar que tiene afirmaciones que parecen contradictorias que revelan una distorsión entre las opiniones de aquellos que “habitan el LP”, (*habitent le LP*), y el “resentido social”, (*ressenti social*) de ese tipo de establecimiento escolar. Veamos sus respuestas a los diferentes ítems de la pregunta Q6:

“El LP es un lugar de relegación de la sociedad, pero para mi, solo hace falta valorizarlo. El LP es una solución que es todavía satisfaciente para el porvenir profesional y social de un joven: CAP: 80 %, BEP: 80 %, BacPro: 90 % de éxito en la obtención del diploma. El LP no es un lugar de emergencia de la exclusión para el que lo vive. Pero habría que cambiar la forma de ver de los periodistas y también de los colegas docentes.”

Vemos también en la red tres largos caminos que llegan al ítem, (en adhesión), “El LP es un lugar de construcción de una cultura profesional”, (*“Le LP est le lieu de construction d’une culture professionnelle”*) (Q5.8). Esto nos lleva a cualificar esa red con la expresión siguiente: “El LP, lugar de una cultura profesional y no de exclusión” (*Le LP, lieu d’émergence d’une culture professionnelle et non de l’exclusion*).

### **3.3 La red R3**

Surge de esa red una impresión de serena cohabitación entre liceo profesional y empresa en el marco de una alternancia, “todo es entonces benéfico para las dos partes”, (*tout bénéfice pour les deux*): LP/Empresa: una colaboración sin problemas”, (*LP/entreprise: une collaboration sans problèmes...*) ¿Visión idealizada? ¡Esperemos antes de afirmar esto el análisis de las otras redes!

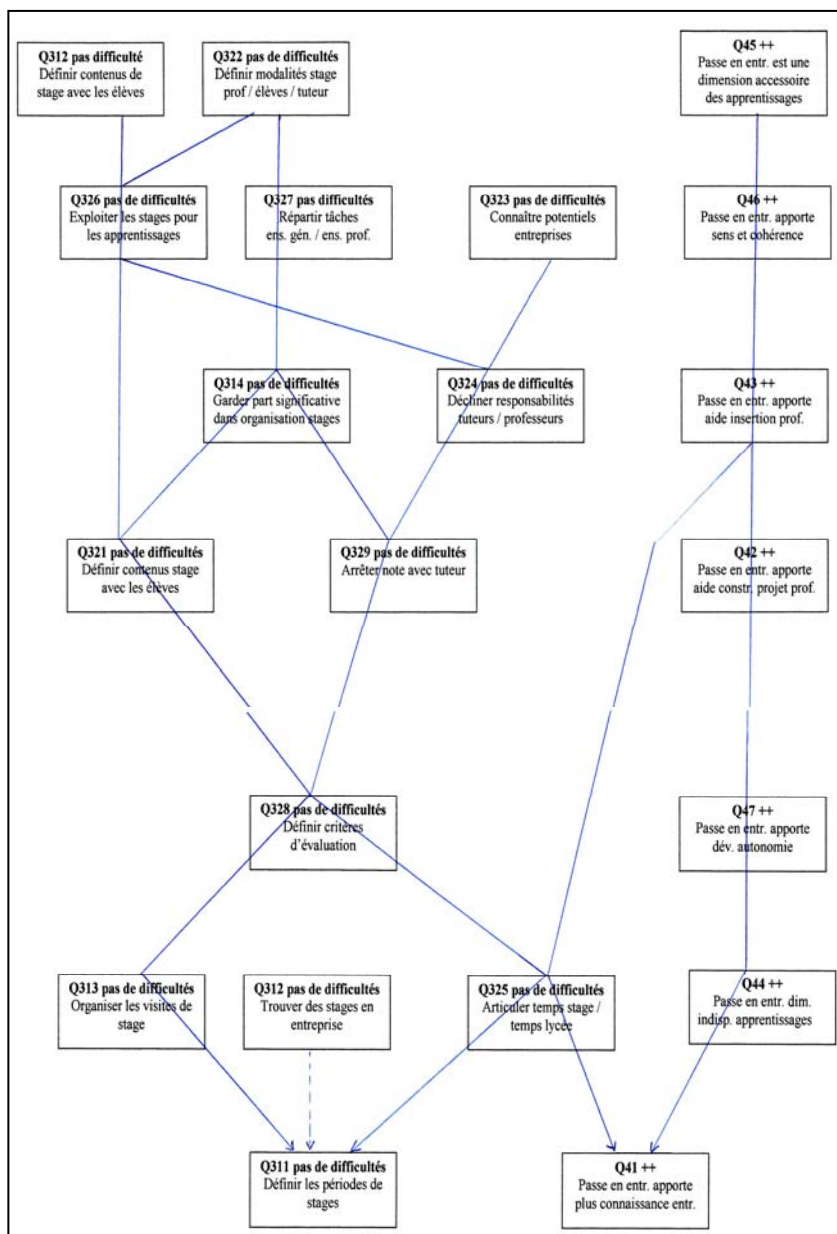


Fig. 3: La red R3

### 3.4 La red R4

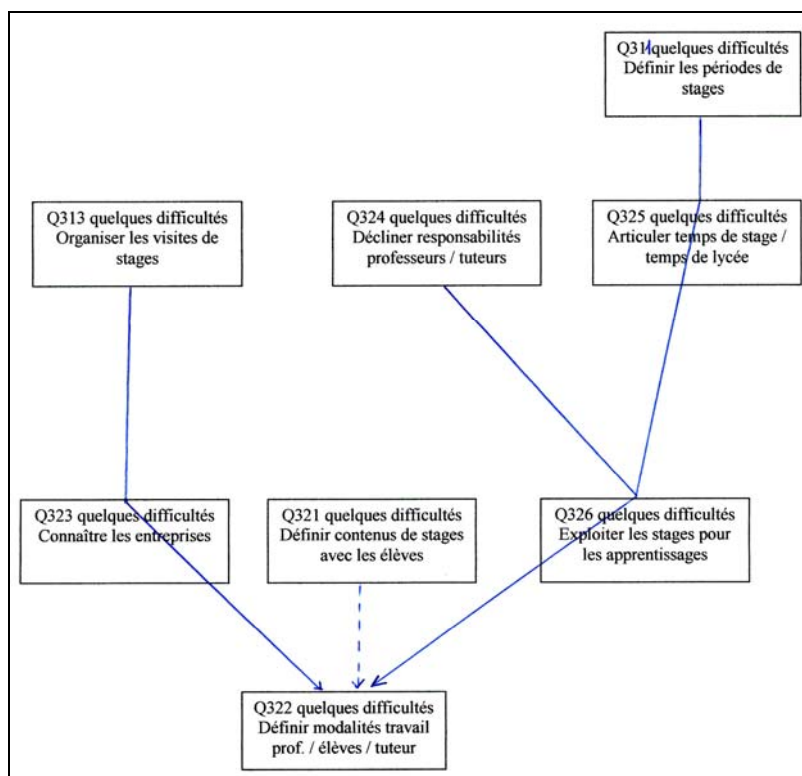


Fig. 4: La red R4

R4 aquí las dificultades del análisis aparecen... Interesémonos en algunos individuos representativos de esa red. El individuo 230 por ejemplo nos dice: “Las empresas (sobretudo las pequeñas), son demasiadas utilizadas para efectuar períodos de prácticas de toda naturaleza y de todo nivel. Nuestros alumnos tienen problemas para encontrar lugares de práctica”, (*Les entreprises (surtout les PME-PMI) trop sollicitées par des stages de toutes natures et de tous niveaux. Nos élèves ont du mal à trouver des lieux de stage.*) y que “las semanas de prácticas cortan seriamente las horas de curso. Sería mejor limitar su cantidad”, (*Les semaines de stage amputent gravement les heures de cours. Il convient donc d'en limiter le nombre*). Los períodos de práctica no son fáciles de realizar. Pero para el individuo 237: “la utilización de material específico al mantenimiento de los

locales,... pero las empresas tienen todavía... ¡una simple escoba y esponjas...!” (*Utilisation de matériel spécifique à l’entretien des locaux mais la plupart des entreprises ont encore... un simple balai et des éponges... !*). En CAP ETC<sup>7</sup>, “en la materia: mantenimiento de los textiles, la enseñanza de la costura es muy arcaica con respecto a la realidad, la costura de los botones no se hace más con las máquinas de costura del hogar”, (*Entretien du linge, l’enseignement de la couture est décalé par rapport à la réalité: la pose de bouton ne se fait plus à partir des machines à coudre familiale*). Inadecuaciones existen entonces entre el material utilizado, pero el sentimiento de frustración puede ser más profundo. El (individuo 116). La red R4 nos parece ser el “espejo” del precedente: “Donde se hace hincapié de algunas dificultades en la gestión de los PFE...” (*Où il est question de quelques difficultés à gérer les PFE*<sup>8</sup>...)

### 3.5 La red R5

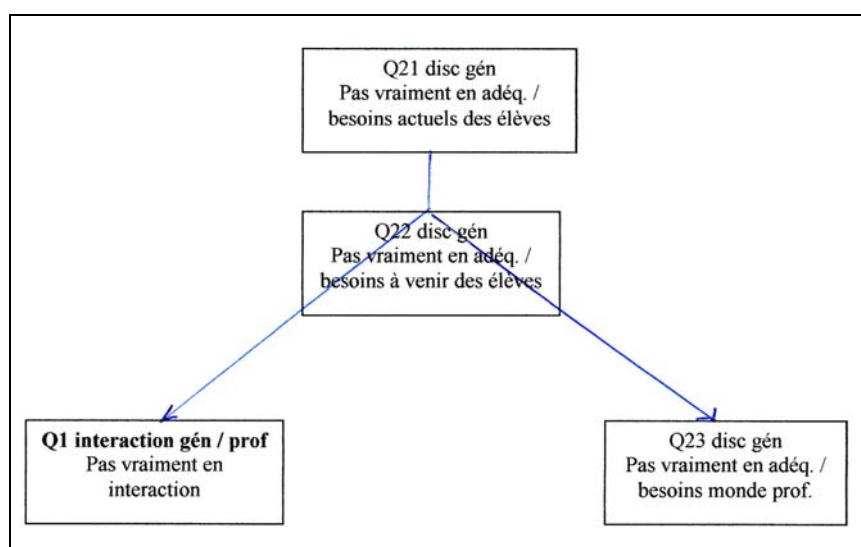


Fig. 5: La red R5

<sup>7</sup> ETC: *Employé Technique de Collectivités*. Empleado Técnico de las Colectividades.

<sup>8</sup> PFE : *Période de Formation en Entreprise*. Periodo de Formación en la Empresa.

R5 “expresa claramente la interrogante de la legitimidad/e utilidad de la enseñanza general en el marco de los LP”, (*pose très clairement la question de la légitimité / utilité des enseignements généraux dans le cadre du LP*).

### 3.6 La red R6

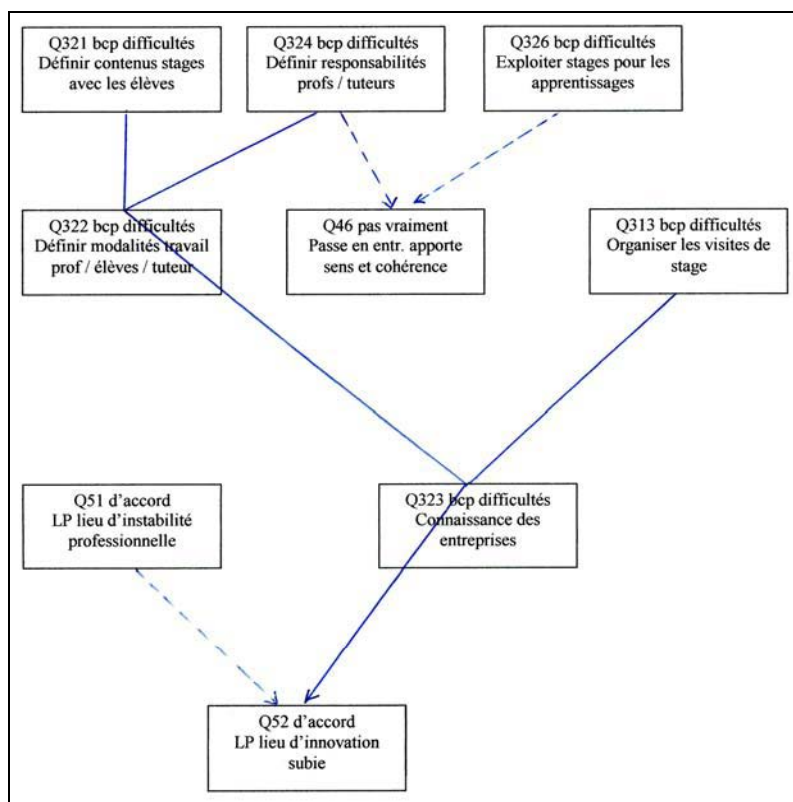


Fig. 6: La red R6

Si en la red R4 veíamos aparecer algunas dificultades, no es lo mismo aquí: problemas mayores aparecen claramente. Los alumnos en primer lugar, “A mi parecer no se trata de un problema de contenido de enseñanza, pero son más bien los alumnos que están en inadecuación con las expectativas de la enseñanza profesional”, (*A mon avis, il ne s'agit pas d'un problème de contenus d'enseignement mais ce sont nos élèves qui sont de plus en plus en inadéquation*



*avec les attentes du milieu pro*), individuo 245, pero también las prácticas, “Demasiadas prácticas con respecto al volumen de horas del liceo”, (*Trop de stages par rapport aux heures du lycée*), individuo 146, “las prácticas son indispensables pero algunas de ellas son demasiadas largas; para el bac Pro contabilidad 1: prácticas de 4 semanas”, (*Les stages sont indispensables mais beaucoup sont trop longs. Pour le Bac Pro compta 1 stage de 4 semaines*), “empleo vacaciones, remunerado convendría mejor y sería más formador”, individuo 129, los contenidos de enseñanza: (“existe un desfase entre los cursos, el examen final del diploma y luego las exigencias profesionales”), (*Il existe un décalage entre les enseignements et l'examen final du diplôme et les exigences professionnelles*), individuo 88, “ver los valores de dos mundos”, “la escuela debe ser un lugar de inserción para fabricar instrumentos de pensamiento elementales, pero productivos”, (*L'école doit-elle être un lieu d'insertion pour fabriquer des outils à peine pensants "mais productifs"*) donde seres abiertos puedan evolucionar y a veces reivindicativos”, individuo 215 ¿Entonces la red R6 no será la marca de tensiones difíciles de conciliar?

### 3.7 ¿Y los individuos?

Todas las redes que aparecieron son fuertemente coherentes. ¿Qué representan del punto de vista de la población encuestada? El cálculo de la contribución de los individuos a las diferentes redes permite de explicar su repartición en ese paisaje.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
Efectivo	57	39	30	73	24	33
Porcentaje de la población	22	15	12	28	9	13

Tab.2: *Repartición de la población en las diferentes redes*

Se puede notar que la población se distribuye de manera idéntica entre las redes que revelan una visión “positiva” del LP (R1, R2, R3) y aquellos que dan una visión “crítica” (R4, R5, R6).

## 4 Los resultados del análisis textual

ALCESTE utiliza la clasificación descendiente jerarquizada que procede por fraccionamientos sucesivos del texto. Después de entrecortar el texto completo en “unidades elementales”, de la frase, se pone en evidencia las oposiciones las mas significativas entre los distintos vocablos del texto y luego se extrae las clases de

enunciados representativos. La explotación del corpus de las preguntas abiertas permitió de poner en evidencia cinco clases de vocablos y también las frases representativas de cada una de las clases. Se puede destacar que cada clase pone en evidencia una tensión que atraviesa el liceo profesional.

#### 4.1 La clase 1

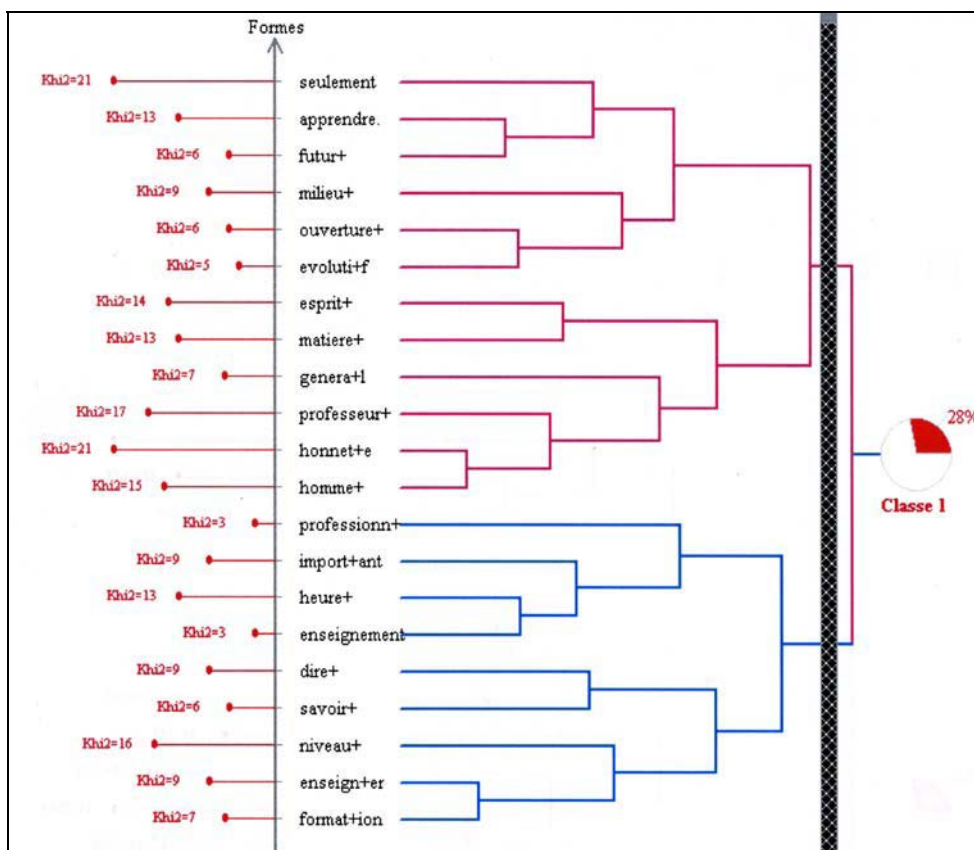


Fig. 7: La classe 1 del análisis léxico

Tomemos algunas frases representativas de la clase: “los alumnos no gustan de la formación escolar de la enseñanza general, los profesores de LP, deben encontrar otros métodos a fin de reconciliar los alumnos con la enseñanza general”. Individuo 235 “No se debe ser solamente un buen profesor sino también un buen

profesional”; “Los profesores en tanto que ex profesionales transmiten su saber y en ese sentido permiten la formación general y profesional”; Individuo 99 “Nuestro objetivo es darles las capacidades y los conocimientos en el dominio profesional y en el general”. Individuo 254 “Un docente en LP en el dominio general, se considera como un profesor, y a veces se le pide realizar tareas de formador”. Individuo 231

Nosotros pensamos que aparece aquí la tensión enseñar/formar, se podría precisar examinando los vocablos utilizados en los dos subgráficos de la clase1 (ver aquí abajo), enseñanza general/formación profesional.

## **4.2 La clase 2**

Es la tensión exclusión / excelencia que aparece aquí en esta clase.

“El LP no es un lugar de emergencia de la exclusión. La familia, el barrio lo son. El LP sufre en parte de la cultura de la exclusión, pero intenta combatirla, y en parte tiene éxito, porque hay alumnos que tienen suceso”. Individuo 205.

“En el seno del LP no hay una emergencia de la cultura de la exclusión”. Individuo 35.

“Ciertos alumnos llegan excluidos y reparten del LP mucho mas reforzados que cuando entraron”. Para ciertas orientaciones, construcción naval, es una buena vía , pero no de excelencia, si no eso se sabría. Bien por el contrario, el LP permite una mejor inserción social y evidentemente profesional”. Individuo 14.

“El LP debería ser una orientación de excelencia, pero no es así actualmente”. Individuo 66.

“La excelencia profesional es un objetivo que algunos alumnos alcanzan gracias al LP”. Individuo 209.

“Alumnos que salen del LP llegan a buenas situaciones económicas. Pero no por ello que sea una orientación de excelencia”. Individuo 2.

“Es un lugar de emergencia y de constitución del futuro ciudadano”. Individuo 86.

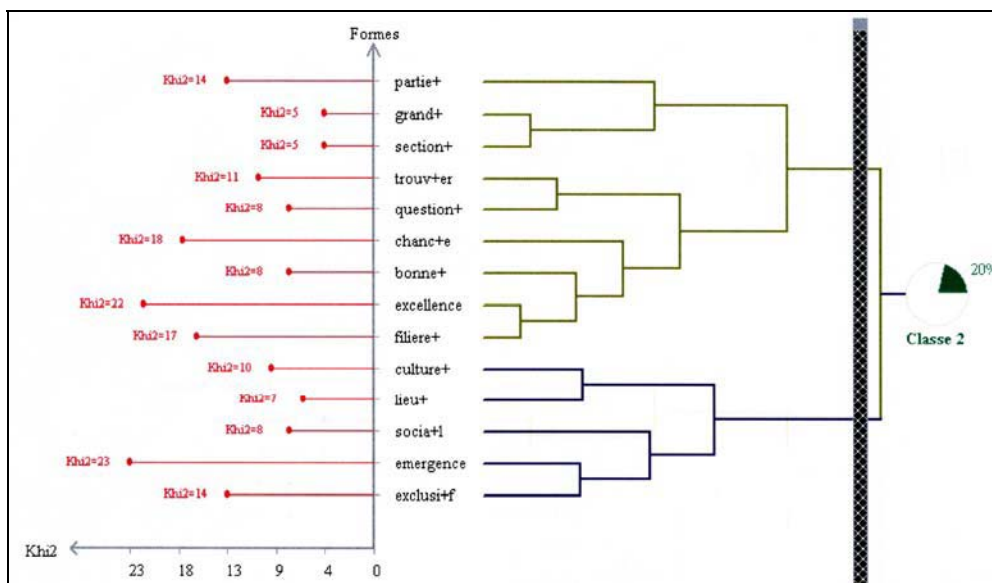


Fig. 8: La clase 2 del análisis léxico

### 4.3 La clase 3

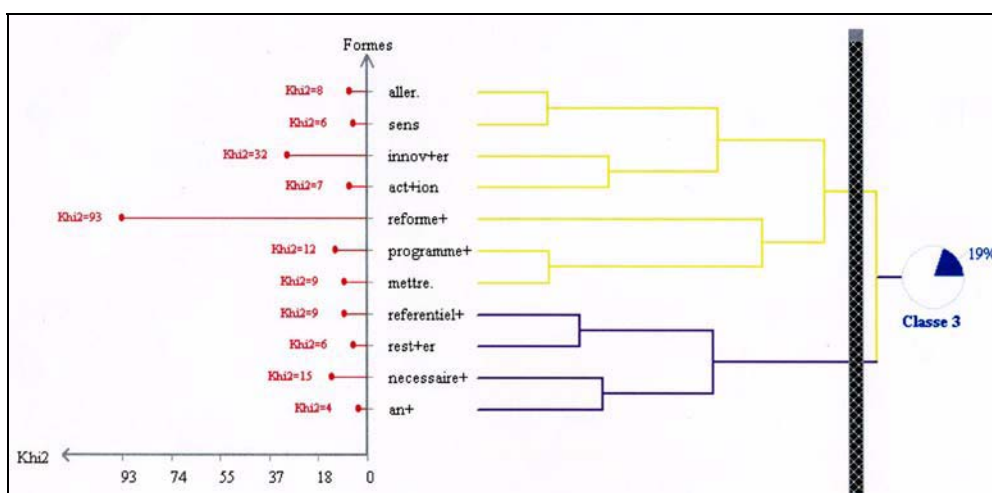


Fig. 9: La clase 3 del análisis léxico

Entre reforma y adaptación necesaria, es esto que nos muestra claramente la tensión que caracteriza la clase 3

“Las reformas son necesarias, sobretodo en “venta”, para adaptarse al medio profesional”. Individuo 151 “las reformas son necesarias para que los LP evolucionen paralelamente al mundo del trabajo”. (*Les réformes sont nécessaires pour que le LP évolue parallèlement au monde du travail et à la société*). Individuo 240 “Las reformas pueden ayudar a los docentes a poner en causa sus métodos de enseñanza, es necesario adaptarse”, (*Les réformes peuvent aider les enseignants à remettre en question leurs méthodes d'enseignement il est nécessaire de s'adapter*). Individuo 126.

Pero también “Es verdad que la mayoría de las reformas, mal presentadas e introducidas a toda velocidad, pueden desestabilizar, en lugar de motivar; sobre todo aquellas que corresponden a problemas que surgen en ciertos liceos conocidos por sus dificultades; ello no corresponde a liceos mas tranquilos”. Individuo 216 “¿Desde cuándo las reformas salen de un consenso con los docentes?” (*Depuis quand les réformes sont elles issues d'un consensus avec les enseignants?*) “A veces raramente negociadas, pero si caídas del cielo”, (*Parfois nécessaires mais rarement négociées plus souvent parachutées...*). Individuo 253.

#### 4.4 La clase 4

Aquí vemos todavía que la tensión aparece claramente entre una imagen desvalorizada del LP y los procedimientos de orientación en el final de liceo básico.<sup>9</sup> ella es particularmente presente en las frases representativas de esta clase. Nosotros revelaremos solo una: “puede ser que sea a nosotros de rever el sistema de orientación y de adaptar nuestra enseñanza al los alumnos que recibimos, eso si nos hacemos a la idea que el LP siempre tuvo una imagen de “vía sin salida”, (*c'est peut-être à nous de revoir le système d'orientation et d'adapter notre enseignement en regard du public accueilli. Si l'on s'arrête à l'idée que le LP a toujours eu l'image d'une voie de garage*). Individuo 214.

---

<sup>9</sup> La clase de “tercero” del colegio es frecuentada por alumnos de 15 años de edad.

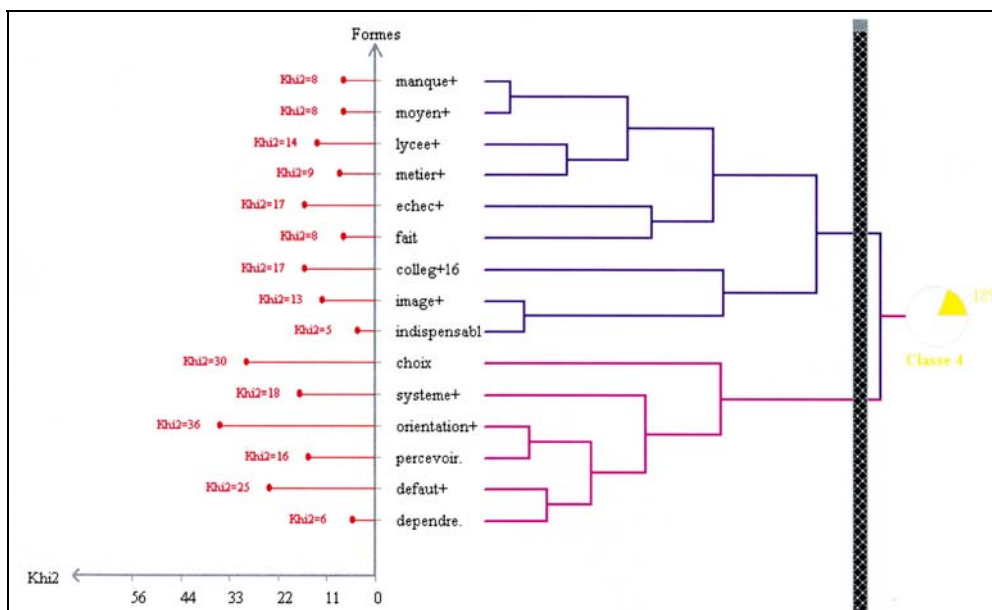


Fig. 10: La clase 4 del análisis léxico

#### 4.5 La clase 5

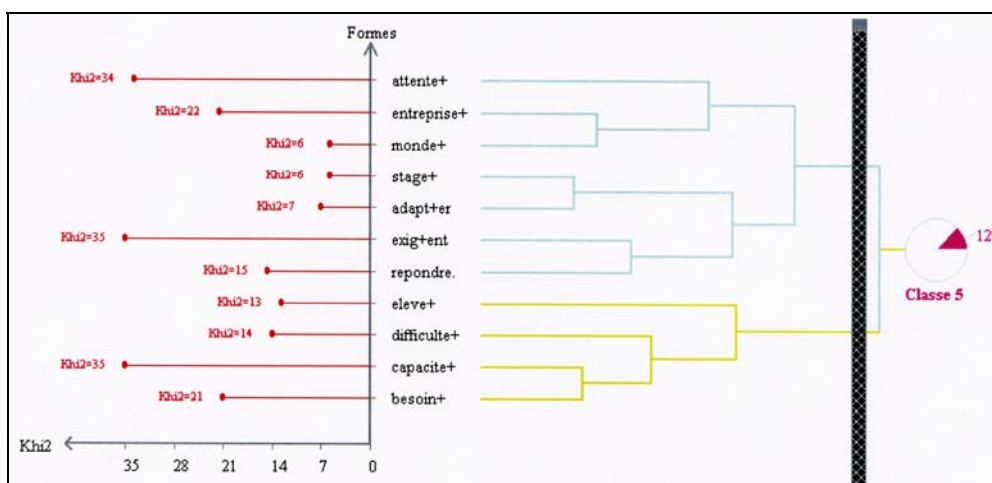


Fig. 11: La clase 5 del análisis léxico

Cuando, en la parte baja del árbol, se encuentra el alumno, sus dificultades y sus necesidades, es la empresa, sus esperas y sus exigencias que aparece en la parte alta del árbol.

Ciertos docentes tienen posiciones bien definidas: “el mundo de la empresa exige que nuestros alumnos se adapten cuando realizan las prácticas”.

“nosotros debemos adaptarnos a las necesidades de la empresa en el interés de los alumnos, futuros empleados”. (Individuo 223), otros docentes muestran posiciones más respetuosas de los alumnos: “¿cuáles son las exigencias del mundo de la empresa?, ¿hace falta siempre responder a sus exigencias?, hay que responder primero a las exigencias del alumno” (*quelles sont les exigences du monde de l'entreprise? Faut il toujours chercher à répondre a ses exigences? Il faut avant tout répondre aux besoins de l'élève.*) Individuo 211.

Esperas de la empresa por un lado, características de los alumnos por otra parte, esa nos parece ser la tensión que revela esa clase de vocablos.

## 5 Análisis complementarios

Intentaremos aquí de mostrar en esta última sección como los dos tipos de análisis se hacen eco uno al otro.

Hay en las redes una puesta en evidencia por el análisis implicativo, una interpretación ineluctable.

Cierta la existencia del LP no sufre por parte de los docentes que ejercen en estos liceos casi ninguna contestación, (89% de los docentes interrogados se declaran completamente de acuerdo con la afirmación Q6.3, “El LP es indispensable a la calificación y a la inserción”. Y 93% rechazan la frase “El LP se podría hacer sin...”, Q6.5, pero ¡solamente 22% de ellos son representativos de la red R1!

Por encima de la unanimidad ideológica que encuentra confirmación en R2, (El LP como lugar de construcción de una cultura profesional y no como producto de la cultura de la exclusión) y en el R3 (una colaboración “sin problema” entre liceo y empresa), hay confrontación al mundo real que se manifiesta en R4, (Las dificultades a gestionar la alternancia entre la empresa y el liceo profesional), y mismo en el interior del liceo en R5 (Legitimidad / utilidad de las enseñanzas generales). Estaríamos frente a la constatación de la impotencia, en donde las tensiones entre el liceo profesional y su entorno, en particular las empresas, que son potencialmente “utilizadoras” de los “productos” del LP, que son los alumnos a la salida de su escolaridad. ¿Será ello irreconciliable? R6.

Los resultados del análisis textual van a permitirnos, de alguna manera, “remontar la pendiente”. En efecto, por supuesto que hay dificultades que percibimos a través C5, (un alejamiento entre las características de los alumnos afectados en LP, alumnos casi siempre en dificultad, y las expectativas de las empresas, eso viene del hecho de una disfunción en la orientación en la clase final del colegio (troisième), en C4, esto está ligado a una imagen desvalorizada de la enseñanza técnica, pero se puede, (¿o se debe?) hacer adaptándose , a veces bajo la obligación de las reformas sufridas. C3

Adaptarse porque es una búsqueda de una cultura de excelencia que se persigue para oponerse a lo que se podría calificar como “cultura de la exclusión”, C2 y entonces, hace falta tener en cuenta juntos lo que constituye la clase C1: ¡la enseñanza a la vez general y profesional y la formación del hombre, del ciudadano, y del futuro profesional es una necesidad social!

El circuito se cierra. Volvemos a R1 poniendo la interrogante de la formación del personal del liceo profesional, formación que parece problemática después que los ENNA<sup>10</sup> se fundieron dentro de los IUFM<sup>11</sup>. Pero nosotros estamos frente a una interrogante que no es aquella que buscábamos elucidar en esta nuestra investigación.

## Bibliografía

- Agulhon, C. (1998). *L'orientation scolaire, prescription normative et processus paradoxal*, *L'orientation scolaire et professionnelle*, 27-3, 353-371, Paris : INETOP.
- Agulhon, C. (1994). *L'enseignement professionnel, Quel avenir pour les jeunes ?*, Paris : Editions de l'atelier.
- Agulhon, C. (2000). *L'enseignement professionnel et technologique dans la tourmente*, *Cahiers pédagogiques*, 387, 25-26, Paris : CRAP.
- Bailleul, M. (1994). *Analyse statistique implicative : variables modales et contributions des sujets. Application à la modélisation de l'enseignant dans le système didactique*, Thèse “Nouveau Régime”, Université de Rennes I, 407 p.

---

<sup>10</sup> ENNA : *Ecoles Normales Nationales d'Apprentissage*/ Escuelas Normales de Aprendizaje

<sup>11</sup> IUFM : *Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*/ Institutos Universitarios de Formación de Docentes; (para todos los niveles de enseñanza).



- Bailleul, M.; Gras, R. (1994). *L'implication statistique entre variables modales*, Mathématiques, Informatique et Sciences humaines, n°128, 41-57, Paris : EHESS.
- Bailleul, M. (2001). *Des réseaux implicatifs pour mettre en évidence des représentations*, Mathématiques et Sciences humaines, 154-155, Paris : EHESS.
- Brucy, G.; Troger, V. (2000). *Un siècle de formation professionnelle en France : la parenthèse scolaire ?*, Revue Française de Pédagogie, 131, 9-21, Paris : INRP.
- Dubet, F. (2005). *Pourquoi changer l'école ?*, Paris : Editions du Seuil.
- Gonnin-Bolo, A. (2005). *Entreprise et écoles. Une rencontre de professionnels*, Paris : INRP,
- Jellab, A. (2001). *Scolarité et rapport aux savoirs en lycée professionnel*, Paris : PUF, 232 p.
- Jellab, A. (2005). *Les enseignants de lycée professionnel et leurs pratiques pédagogiques : entre lutte contre l'échec scolaire et mobilisation des élèves*, Revue française de sociologie, 46-2, 295-323, Paris : Ophrys.
- Pelpel, P.; Troger, V. (2001). *Histoire de l'enseignement technique*, Paris, L'Harmattan, 315 p.
- Pelpel, P. (2002). *Une identité plurielle*, Cahiers pédagogiques, 403, 16-17, Paris : CRAP.



# Enfoque bayesiano “oculto” y enfoque frecuentista “ambiguo” en los manuales franceses de Première S y ES

Pablo Carranza y Alain Kuzniak

Traducido por los autores

Equipo Didirem. Universidad Paris 7  
carranza@math.jussieu.fr, alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

**Resumen.** A través de un estudio comparativo de dos libros de texto sobre el tema de las estadísticas, esbozamos el espacio de trabajo potencial existente en clase de primaria en Francia (11º año). El enfoque de estadística implicativa demuestra claramente una fuerte tendencia probabilística y calculadora en el bloque científico y una tendencia más confusa en el bloque de economía, donde juega, lo que llamamos, la intrincación de los significados de la probabilidad.

## 1 Introducción

Un primer estudio epistemológico nos ha permitido identificar una forma dual de la significación de la probabilidad, que expresa por una parte el enfoque frecuentista y por otra parte la interpretación bayesiana. Esta dualidad de significado puede, manifestándose en un mismo problema, inducir a errores de interpretación en el proceso inferencial.

Los autores de los programas franceses actuales del nivel secundario han elegido solamente el enfoque frecuentista para presentar la noción de probabilidad, sin tomar en cuenta la noción bayesiana. Sin embargo hemos podido verificar (Carranza y Kuzniak, 2006) que la dualidad de los significados se manifestaba de manera implícita y *oculta* en la enseñanza. Para evidenciar este fenómeno, hemos estudiado algunos ejercicios propuestos en los libros de clase y también en los temas de examen, en particular nos centraremos en esta artículo, en los manuales, analizando de forma exhaustiva los ejercicios propuestos en los libros de clase de “Première ES et S” (los alumnos de este cursos tienen entre 16 y 17 años).

Luego de una rápida presentación de las dos principales interpretaciones de la probabilidad retenidas para este artículo, describiremos las variables consideradas

para describir el contenido de los ejercicios. Con estas variables hemos buscado observar la interpretación de la probabilidad subyacente a cada ejercicio y el respectivo tratamiento que proponen los manuales.

Específicamente, buscamos saber si los ejercicios de los libros de texto permanecen en un contexto frecuentista o si, como pensamos, superan este enfoque integrando también la noción bayesiana, y en este caso que clase de significado aparece de manera oculta o explícita.

## **2 La dualidad del significado**

El concepto de probabilidad admite varios significados, como lo ha mostrado el epistemólogo Ian Hacking, (Hacking, 2002, página 37). Estas diversas interpretaciones pueden reunirse en dos grandes grupos, cada uno de ellos asociado a una corriente inferencial, una la frecuentista, la otra la bayesiana.

### **Noción Frecuentista**

Para un cierto tipo de experiencias susceptibles de reproducirse bajo las mismas condiciones (al menos mentalmente), la frecuencia de aparición de un evento dado se estabiliza progresivamente cuando el número de realizaciones crece considerablemente. En este caso, la probabilidad es una característica de la serie infinita, la proporción de apariciones del evento observado. A esta primera noción se encuentra asociada la ley de los grandes números.

### **Noción Bayesiana**

Para este otro enfoque, la probabilidad representa una medida de certeza sobre una proposición dada teniendo en cuenta las informaciones disponibles. La probabilidad no es una característica del objeto sino la medida de la credibilidad establecida por un sujeto para una proposición dada. Asociada a esta noción se encuentra el teorema de Bayes (Bayes, 1763): las probabilidades atribuidas inicialmente a una proposición, evolucionan en función de la llegada de nueva información sobre la proposición en cuestión, la tasa de cambio esta dada por la formula de Bayes.

### **La intrincación de los significados**

Las dos interpretaciones de la probabilidad están con frecuencia estrechamente relacionadas y en numerosas situaciones aparecen simultáneamente. Para designar este fenómeno, hablaremos de *intrincación* de los significados.

La principal fuente de esta intrincación es debido al *principio frecuentista* (Figura 1) donde la frecuencia de aparición de un fenómeno es utilizada como razón para creer en una próxima realización del fenómeno (Droesbeke et al., 2002, p.25; Gärdenfors et al., 1988, p.110; Hacking y Dufour, 2004, p.149).

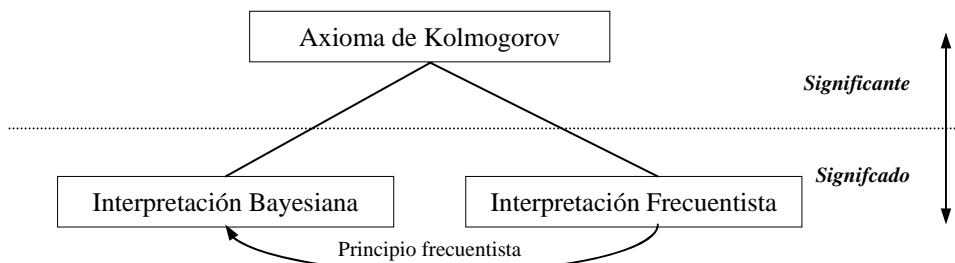


Fig. 1

De esta manera, por ejemplo, cuando se lanza un dado equilibrado, la frecuencia de aparición del número tres (un sexto) es utilizada para expresar en forma numérica la medida de certeza.

### 3 La dimensión oculta

Los programas actuales del nivel medio francés, consideran la probabilidad como como frecuentista, sin embargo nosotros postulamos Establecemos como hipótesis que la dualidad de significado es una característica inherente a la probabilidad y que se manifestara indefectiblemente en la enseñanza, aunque oficialmente se la ignore.

En este presentación, nos preguntamos en particular acerca de las eventuales manifestaciones de esta dualidad en los ejercicios propuestos de libros de texto de “Première ES et S”. Hemos elegido estos niveles de programa porque es en este nivel que se introduce la probabilidad como concepto, lo que nos permite observar la relación entre los tres polos representados en la figura 1. La clase de ES es una sección con orientación en economía y ciencias sociales, la mayoría de los estudiantes de esta sección, no continuarán estudios científicos; a diferencia de los que cursan la división S que es predominantemente científica. Por lo tanto, nos parece además interesante observar si cada orientación (ES o S) tiene perfiles propios respecto a las interpretaciones de la probabilidad.

Retuvimos para nuestro estudio un determinado número de variables, algunas de orden pedagógico, que toman en cuenta aspectos clásicos de los ejercicios como su rol en los aprendizajes, su extensión y su ubicación en el capítulo. Hemos también considerado un cierto número de variables que están más estrechamente vinculadas a la articulación entre significante y significado, y de manera aún más específica a la interpretación en términos frecuentista o bayesiano.

La metodología utilizada es el análisis estadístico implicativo, este tipo de análisis (Gras et al., 1996; Gras y Bailleul, 2000) nos permite modelizar el problema bajo la forma de reglas de inferencia parcial en los ejercicios de estos dos manuales. De esta manera, una reglas genéricas del tipo “*si a entonces casi b*” devienen por ejemplo “si las características del problema responden al enfoque bayesiano, entonces el enunciado no realiza preguntas sobre la interpretación asociada al problema”. Este tipo de reglas nos permitirán descubrir posibles tendencias en los ejercicios de estos dos manuales retenidos para este estudio. En otras palabras, en este estudio intentamos analizar la coherencia entre la noción de probabilidad a institucionalizar y el conjunto de situaciones propuesto por los manuales. El interés no se limita solo a este cuadro y nuestro estudio se integra a otros en los que se constatan dificultades en el plano interpretativo de un proceso estadístico siendo la fuente del conflicto la dualidad de significado (Batanero et al., 2004; Gärdenfors et al., 1988; Régnier y Oriol, 2001). Desde luego, las variables *a priori* consideradas no son suficientes para determinar la interpretación que efectivamente se presentara en clase para un ejercicio dado. En este sentido, la gestión del profesor es fundamental y en una segunda parte de nuestro trabajo hemos incorporado esta dimensión, que por razones de espacio nos es imposible de detallar en esta presentación.

#### **4 Presentación de las variables retenidas**

Los dos libros de clase observados fueron editados en 2001: el manual de Première ES, por la editorial Bréal (Breal ES a partir de ahora) y el de Première S por Nathan (Nathan S).

El manual Breal ES propone en el capítulo de Probabilidad, treinta y un ejercicios (página 98 a 103) repartidos en tres secciones. “Nociones principales”: Ejercicios 1 a 12. “Técnicas fundamentales”: Ejercicios 13 a 19. “Ejercicios”: Ejercicios 20 a 31.

Para el manual Nathan S, el número de ejercicios es significativamente más importante, hay setenta y tres (página 224 a 234) repartidos en cuatro secciones:

“Nociones principales”: Ejercicios 1 a 20. “Para aprender e investigar”: Ejercicios 21 a 25. “Para progresar”: Ejercicios 26 a 67. “Problemas de síntesis”: Ejercicios 68 a 73.

Hemos considerado 21 variables, de las cuales todas toman valores binarios (0 ó 1). A continuación detallaremos los criterios que deben satisfacerse para que las variables tomen el valor 1.

- *Variables relacionadas a la extensión del texto del ejercicio (A) :*

Luego de un estudio estadístico que prevé reunir las condiciones que requieren la aplicación de un método de análisis estadístico implicativo hemos retenido dos clases o clases superiores a 10 alumnos:

Código	Etiqueta	Descripción
A1	Líneas (1-10)	El ejercicio tiene 10 líneas como máximo
A2	Líneas (11-40)	El ejercicio tiene mas de 10 líneas

- *Variables relacionadas al número de preguntas (B) :*

Se toma en cuenta de manera independiente a la variable precedente, el número de preguntas del enunciado.

Código	Etiqueta	Descripción
B1	Preguntas (1-2)	El ejercicio tiene menos de tres preguntas
B2	Preguntas (3-4)	El ejercicio tiene tres o cuatro preguntas
B3	Preguntas (5-plus)	El ejercicio tiene mas de cuatro preguntas

Con estas dos variables, queremos observar la relación entre la noción subyacente de la probabilidad en un ejercicio y el tamaño de los ejercicios.

- *Variables relacionadas al contexto del ejercicio (E) :*

Esta categoría nos informa del tipo de contexto propuesto al alumno para cada ejercicio. Con estas categorías describiremos los tipos de problemas a los que se asociaría la probabilidad, según los manuales.

E1	Contexto (Urnas-Juegos)	Urnas, juegos, etc.
E2	Contexto (Clase-Vida cotidiana)	Referencia al entorno del alumno o de un trabajo
E3	Contexto (Sin o Matemática)	Ausencia de contexto o contexto matemático

- *Variables relacionadas a las hipótesis del modelo F :*

A partir del estatuto atribuido a las hipótesis en cada ejercicio, buscamos identificar el tipo de razonamiento asociado. Si se probabiliza:

- en el sentido deductivo (desde las hipótesis hacia la serie infinita), razonamiento asociado al enfoque frecuentista,
- en el sentido inductivo (desde las hipótesis hacia un elemento de la serie infinita), razonamiento típico del enfoque bayesiano, con un posible aporte del principio frecuentista (ver figura 1),
- en el sentido abductivo de Peirce (desde las evidencias hacia las hipótesis), razonamiento también asociado al enfoque bayesiano de la probabilidad.

En clase de Première no se enseña ninguna herramienta inferencial, no es de esperar entonces que una probabilidad porte sobre una hipótesis de un modelo.

F1	Hipótesis (Admitidas)	Se admiten hipótesis del modelo, se especifica el conjunto de eventos posibles
F2	Hipótesis(AdmitidasFrecuen o P(A))	Se admiten hipótesis por la proporción en una muestra importante o explícitamente dadas
F3	Hipótesis(para decidir)	Para decidir hipótesis a partir de la proporción de una pequeña muestra...

- *Variables relacionadas a un eventual pedido de cálculo de probabilidad (H) :*

Aquí observamos si el ejercicio se interesa o no a los aspectos calculatorios de la probabilidad. Esta variable será confrontada con el eventual pedido de interpretación de cálculo de probabilidad realizado (J).

H1	CalculoProbabilidad(Oui)	Cálculo de P se demanda explícita o implícitamente
H2	CalculoProbabilidad(Non)	Calculo de P no se demanda

- *Variables relacionadas a características de cada enfoque de la probabilidad (I) :*

Con estas variables buscamos complementar la información obtenida por otras variables, en particular sobre la noción subyacente de la probabilidad. Por ejemplo, en los ejercicios de los manuales hemos identificado el siguiente fenómeno: en general, el enunciado precisa los elementos del conjunto de casos posibles, luego propone una acción hipotética con la función de dar un contexto de incertidumbre



(“se lanza al azar una carta...”) al mismo tiempo que informa sobre la cardinalidad de los conjuntos. Finalmente se explicita una demanda de probabilidad (Calcular la probabilidad que la carta lanzada sea...). En este caso, el contexto corresponde a la noción bayesiana, pues la probabilidad porta no sobre la serie sino sobre una realización individual, un lanzamiento. Con estas variables buscamos retener otro elemento que nos informe sobre la naturaleza del objeto sobre el cual porta la probabilidad.

I1	RepeticiónExper(Oui)	Mención explícita o implícita para la repetición de la experiencia aleatoria
I2	RepeticiónExper(Non)	Ninguna mención

- *Variables relacionadas al pedido interpretación de la probabilidad (J) :*

Esta variable confrontada a las variables I (repetición de la experiencia), F (naturaleza de las hipótesis) y K (naturaleza de los eventos) nos informa sobre la noción potencial de la probabilidad en un ejercicio y el eventual interés por su interpretación.

J1	InterprProbabilidad(Oui)	La interpretación de P es explícita o implícitamente demandada
J2	InterprProbabilidad(Non)	No hay interpretación demandada

- *Variables relacionadas a la naturaleza del evento a probabilizar (K):*

Estas variables pretenden observar particularmente la naturaleza del evento A en una probabilidad P(A).

- A es una serie infinita de eventos susceptibles de reproducirse: objeto de naturaleza frecuentista.
- A es un evento en el que la reproducibilidad o bien es imposible o bien ella conduce a modificar los valores otorgados a la probabilidad, objeto de naturaleza bayesiana.
- A es un caso genérico o evento simple. Desde un enfoque frecuentista, no correspondería interesarse a esta cuestión, ella es de naturaleza bayesiana.

K1	NaturaA(Serie)	El evento sobre el que se probabiliza es la tendencia a largo plazo
K2	NaturaA(CasoUnico)	
K3	NaturaA(Caso Genérico)	
K4	NaturaA(Ambiguo)	

En un principio nos hemos interesado también a la temporalidad del evento, esperando a que esta información se complemente con las otras variables. Sin embargo la baja ocurrencia de la modalidad “pasado simple” nos condujo a suprimirla del estudio: la mayoría de los ejercicios describen el evento utilizando un modo del tiempo presente o un infinitivo impersonal.

## 5 Estudio de datos

Comenzamos la presentación de los resultados con Nathan que sin duda se presta mejor para un estudio estadístico, dado el numero importante de ejercicios en el capítulo probabilidad. La figura 2 representa el árbol cohesivo para este manual.

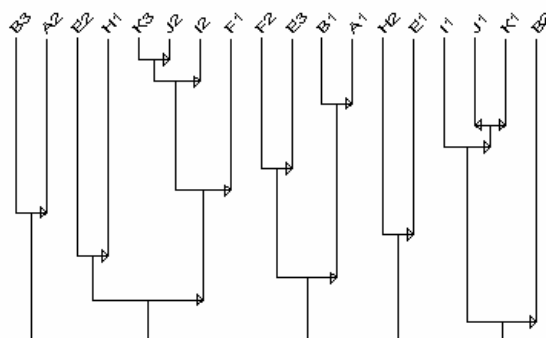


Fig. 2

Con el análisis implicativo a un sesgo de 0.90, se retienen cuatro conjuntos dando lugar a de tipologías de ejercicios diferentes (ver figura 3).

**Ejercicios genéricos.** El primer conjunto [K3, J2, I2, F1, (H1)] representa cerca de dos tercios de los ejercicios del capítulo probabilidad de este manual. Este grupo da cuenta del ejercicio tipo al que se confronta el alumno de este curso. Se trata de razonar acerca de un caso genérico (K3) sin que se sugiera la repetición de la experiencia y sin que se demande ninguna interpretación del resultado. Como complemento notamos que estos ejercicios son caracterizados como lúdicos o de pasa tiempo (E1). Por otro lado, los ejercicios que se apoyan en un contexto escolar

o del mundo laboral implican la rama H1 representando la explicitación de un cálculo de la probabilidad.

Así, el conjunto mas típico de los ejercicios propuestos en esta clase, por interesarse a eventos simples, corresponde al enfoque bayesiano. Sin embargo, la tendencia es de no interrogar sobre el significado de la probabilidad sino de ejercitar al alumno en estrategias de cálculo vinculadas a la probabilidad.

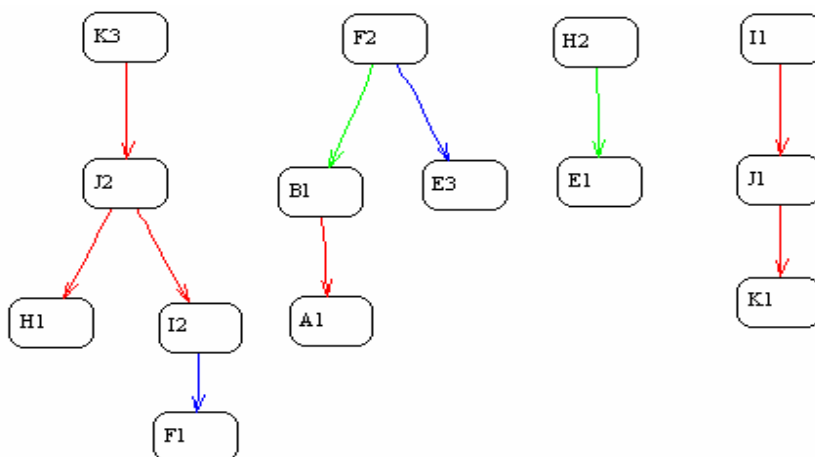


Fig. 3

**Ejercicios frecuentistas.** La clase [K1, I1, J1] es muy homogénea en este manual y presenta ejercicios basados en una secuencia (K1) con una repetición de la experiencia (I1) et una demanda de interpretación (J1). Este grupo, reducido en nombre (seis ejercicios) se corresponde con las consignas del programa de asociar el calculo de la probabilidad a una interpretación frecuentista.

**Ejercicios de práctica.** Observamos también un pequeño conjunto de ejercicios (una decena) [F2, E3, B1, A1] típicamente cortos en texto, sin contexto y con el dato de la probabilidad  $P(A)$  suministrado en el enunciado. Se trata de ejercicios de aplicación de aspectos calculatorios de la probabilidad.

**Ejercicios sobre urnas y juegos.** La clase [H1, E1] solo muestra que los ejercicios con juegos y urnas forman una entidad autónoma y que en ellos las hipótesis del modelo son admitidas a partir del enunciado. Así, en este manual

elaborado a partir de las consignas del programa, encontramos pocos ejercicios de naturaleza frecuentista. Los mas numerosos son de naturaleza bayesiana, sin embargo, para estos últimos, la atención es desviada a aspectos calculatorios de la probabilidad. En estos últimos ejercicios, el significado construido quedaría enteramente a la carga del alumno, pues el mismo no forma parte de los elementos a institucionalizar. De las tendencias de los ejercicios de este manual, se desprende una asociación entre la noción de probabilidad y actividades lúdicas o recreativas. Este estudio sobre los manuales forma parte de uno más vasto donde nos interesamos a una sensibilización en clase a la dualidad de la probabilidad. En este sentido, los ejercicios nos informan del tipo de ejercicios a los que habrían estado confrontados los alumnos de nuestras experimentaciones (BTS). Debemos esperar volver a encontrar una débil progresión en la comprensión de los fenómenos vinculados al azar con concepciones iniciales bastante próximas de las que Lahanier-Reuter (1999) pudo desarrollar en estudiantes más jóvenes.

Presentamos ahora nuestro análisis de la obra de Première ES.

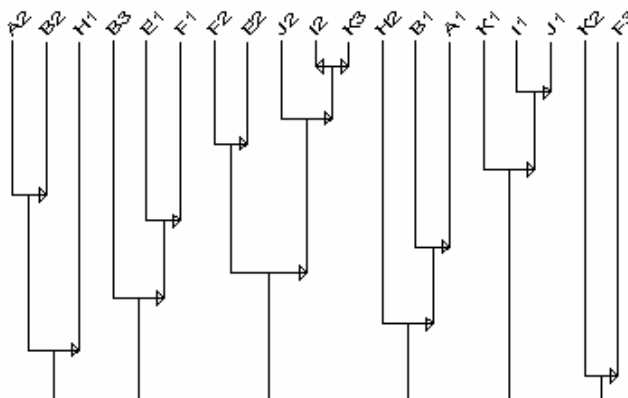


Fig. 4: *Árbol cohesitivo Bréal ES*

El árbol cohesitivo (figura 4) confirma la impresión que nos ha dado este libro bastante atípico, que propone un número acotado de ejercicios pero de una gran variedad. La combinación de estos dos factores impide la emergencia de tendencias significativas. Este manual presenta se caracteriza también por proponer ejercicios abiertos, de esta manera, la influencia del profesor en la gestión de la clase sería determinante para el sentido de los objetos trabajados en estos ejercicios.

Aplicando a este manual de “Première ES” los mismos valores de sesgo que para el manual precedente de “Première S”, emergen pero de manera menos pronunciada, algunas de las clases precedentes. Es así que volvemos a encontrar la clase frecuentista [K1, I1, J1] donde la repetición de la experiencia es explícita y la clase de ejercicios de naturaleza genérica [J2, K3, I2], pero de manera menos marcada que en Première S.

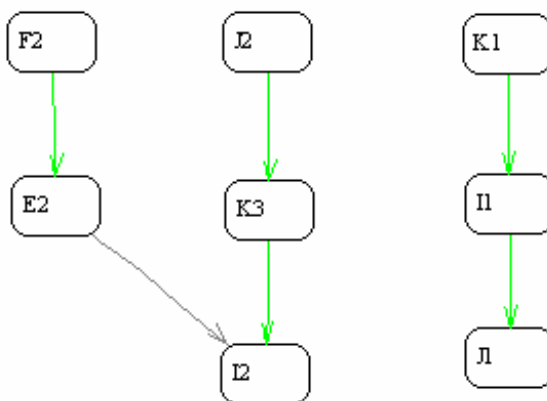


Fig. 5: Grafico Breal ES (sesgo 0.90)

La última clase vinculada a la precedente por I2 (no se solicita una interpretación al cálculo de la probabilidad efectuado), pero ya a un sesgo de 0.82 es la clase [F2, E2]. Ella es nueva y específica de la sección ES, se trata de ejercicios donde el contexto sería en principio la vida cotidiana ciudadana (clase o trabajo), estos ejercicios son relativamente importantes en número (más de la mitad de los ejercicios del capítulo). Parecería que, dado que estos alumnos no proseguirían carreras científicas, los conceptos tendrían un enfoque práctico, y vinculado a la vida cotidiana. Sin embargo, en cierta manera, los autores se encuentran en una contradicción, la interpretación oficial de la probabilidad sigue siendo la frecuentista, aunque los problemas propuestos y vinculados a la vida de los alumnos son principalmente bayesianos.

### Límites del estudio

Como lo hemos señalado (ver Presentación de las variables retenidas), y aunque se trata de una muestra pero de un análisis exhaustivo, el número de ejercicios del capítulo probabilidad del libro de clase Bréal de “Première ES” es

significativamente inferior al de Nathan de Première S (treinta y uno y setenta y tres respectivamente) esta diferencia pondera fuertemente las conclusiones relativas al libro de clase Bréal si se prevé una generalización del tipo comparación entre libros de clase de ES y S. Toda intención de comparación entre filiales ES y S implica naturalmente un número importante de libros de clase, lo que está lejos de nuestras intenciones propuestas en este artículo.

## 6 Conclusión

Trabajando de manera exhaustiva los ejercicios propuestos en los libros de clase de première, esperábamos trazar un mapa del espacio de trabajo probabilista potencial de los estudiantes de este curso del nivel secundario. Nuestros resultados confirman la prioridad que se da en la enseñanza francesa con un eje que va de la interpretación frecuentista al axioma de Kolmogorov.

El análisis nos sugiere que los alumnos trabajarían principalmente sobre aspectos calculatorios y que por un lado las interpretaciones serían raras y por el otro, ellas no se corresponderían con las interpretaciones fundamentales de los dos enfoques de la probabilidad. Hay que observar sin embargo una diferencia sensible entre estos dos manuales de la orientación científica S y la orientación económica ES, este último se compromete menos en la vía conjuntista y se interesa más a los significados que el primero. En todos los casos, pero de manera un poco diferente, vemos aquí, a modo germinal, nacer todas las cuestiones futuras planteadas a la enseñanza de la estadística por la difícil adecuación que los alumnos podrán realizar entre realidad y modelo en la resolución de los problemas que provienen de la realidad.

## Bibliografía

- Batanero, C.; Godino, J.D.; Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability*. Journal of statistical education, 12(1).
- Bayes, T. (1763). *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*.
- Carranza, P.; Kuzniak, A. (2006). *Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au Lycée en France*. In EMF 2006, Sherbrooke.

- Droesbeke, J.-J.; Fine, J.; Saporta, G. (2002). *Méthodes bayésiennes en statistique*, Paris: Sfds.
- Gärdenfors, P.; Sahlin, N.-E.; Ramsey, F.; Luce, D.; Raiffa, H.; Savage, L.; Jeffrey, R.; Kyburg, H.; Hacking, I.; Hansson, B.; McClennen, E.; Kahneman, D.; Tversky, A.; Machina, M.; Ellsberg, D.; Rabinowicz, W. (1988). *Decision, Probability and Utility*: Cambridge University Press.
- Gras, R.; Ag Almouloud, S.; Bailleul, M.; Larher, A.; Polo, M.; Ratsimba-Rajohn, H.; Totohasina, A. (1996). *L'Implication Statistique: La Pensée Sauvage*.
- Gras, R.; Bailleul, M. (2000). *La Fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative*. ARDM, Caen.
- Hacking, I. (2002). *L'émergence de la probabilité*: Seuil.
- Hacking, I.; Dufour, M. (2004). *L'ouverture au probable*, Paris: Armand Colin.
- Régnier, J.-C.; Oriol, J.-C. (2001). *Fonctionnement didactique de la simulation en statistique*. In Journées de Statistique Lyon 2003 (ed. S.F.d. Statistique). Sfds, Lyon, France.





# Un método implicativo para el análisis de datos de expresión de genes

Gérard Ramstein

Traducido por Vera Felip

LINA, equipo COD

Escuela Politécnica de la Universidad de Nantes  
Rue Christian Pauc BP 50609 44306 Nantes cedex 3  
[gerard.ramstein@univ-nantes.fr](mailto:gerard.ramstein@univ-nantes.fr)

**Resumen.** Presentamos un método de extracción de asociaciones basado en el análisis estadístico implicativo y la noción de rango. Hemos adaptado el concepto de intensidad de implicación a unas clasificaciones para descubrir relaciones parciales robustas con respecto al ruido y a las variaciones de amplitud. Aplicado a los datos de chips de ADN, este método pone en evidencia las relaciones entre unas formas particulares de expresión de genes. Estas asociaciones pueden ser reveladoras de mecanismos de correulación genética y por lo tanto contribuir al análisis biomédico. Demostramos que esta definición de intensidad de implicación aporta un conocimiento más fino de las relaciones entre los genes que los métodos usuales de correlación y que permite sobretodo el discriminar entre diferentes fenotipos con una precisión comparable a las técnicas de clasificación de mayor éxito en este ámbito.

## 1 Introducción

La tecnología de las chips de ADN permite analizar la expresión simultánea de miles de genes. El estudio del transcriptoma representa un reto considerable, tanto desde el punto de vista de la comprensión de los mecanismos del ser vivo como de las aplicaciones clínicas y farmacológicas. Desgraciadamente, los datos de expresión están empañados por múltiples ruidos. Por una parte, la complejidad del protocolo experimental conduce a una reducción de la precisión de las medidas. Por otra parte, la variabilidad natural de la actividad celular induce diferencias

notables de amplitud de expresión entre los genes, fenómeno igualmente perceptible considerando varios pacientes que presenten el mismo fenotipo.

Este estudio propone un método de análisis implicativo de reglas de asociación sobre los datos del transcriptoma. Utiliza el enfoque de Régis Gras (Gras, 1996) considerando no las medidas en sí mismas, sino el rango de las observaciones. Este enfoque permite la superación de los valores numéricos considerando las zonas de clasificación en las medidas de expresión. Interesarse por la clasificación tiene la ventaja de mejorar la robustez de los algoritmos haciéndolos insensibles a transformaciones monótonas de los datos. Se podría hacer una analogía con una tabla de notas escolares. Cada profesor tiene su propio sistema de puntuación y tendrá una exigencia diferente respecto a las respuestas dadas por los alumnos. El cuerpo de profesores podrá ponerse de acuerdo con más facilidad en los resultados relativos de los alumnos que sobre las notas. Un alumno situado en lo alto de la clasificación en matemáticas y física será considerado de este modo como bueno, aunque su nota difiera de varios puntos entre las dos materias. Nuestro enfoque puede generalizarse cómodamente a otros campos. En el problema llamado de la cesta de la compra, nos interesaremos pues al volumen de compra de los clientes. Los conocimientos serán pues relativos a los niveles de consumo de los productos considerados.

Vamos a presentar en una primera parte un estado del arte en el campo de estudio. Daremos a continuación el encuadre conceptual de reglas de asociación empleado en nuestro enfoque. Presentaremos en una tercera parte una aplicación a la clasificación de tumores.

## **2 Estado del arte**

El tratamiento de datos inciertos o imprecisos ya ha sido objeto de trabajos en el marco del análisis implicativo. En [Gras 2001], el método propuesto consiste en definir una partición óptima de los datos y buscar luego implicaciones entre dominios, estando estos dominios constituidos a partir de la unión de elementos de la partición obtenida. Una aproximación paralela ha sido desarrollada, basada en la lógica difusa [Gras 2005]. Estos dos métodos reposan sobre una partición previa de las medidas antes del análisis implicativo propiamente dicho. Como las distribuciones de nuestros datos han demostrado ser mono modales, hemos preferido buscar directamente la implicación óptima sin pasar por un tratamiento previo de los datos que correría el riesgo de introducir un sesgo en la extracción de las reglas.

Que sepamos, el análisis estadístico implicativo no ha sido aún aplicado al estudio del transcriptoma. Sin embargo, existen varios estudios relativos a la extracción de reglas de asociación a partir de datos de expresión. Un trabajo, basado en el algoritmo Apriori (Agrawal, 1993) y empleando los conceptos habituales de apoyo y de confianza, ha sido llevado a cabo sobre el genoma de levadura (Creighton, 2003). Los datos han sido discretizados a partir de umbrales para caracterizar tres niveles de expresión (subexpresión, expresión normal, sobreexpresión). (Tuzhilin, 2002) presenta un análisis sobre los biochips definiendo un conjunto de operadores adaptados a grandes volúmenes de reglas. Ambos métodos presentan el inconveniente de depender de la fijación de umbrales de discretización. En (Carmona-Saez, 2006), el estudio se enriquece al tomar en cuenta conocimientos a priori sobre los genes. Un método original ha sido desarrollado en (Cong, 2004) a través de una herramienta llamada FARMER. Este método busca conjuntos de reglas que tengan un soporte común y se apoya en una técnica de discretización entrópica. En (Becquet, 2002), los autores han aplicado el algoritmo Min-Ex. El análisis trata sobre datos binarios, el valor lógico asociado teniendo en cuenta el hecho de que el gen está considerado como sobre expresado o no. El enfoque más cercano al nuestro es ciertamente el propuesto en (Jin, 2006). Los autores definen el concepto de patrón emergente como un conjunto de operadores booleanos sobre unos valores de expresión. Este método equivale a extraer unos intervalos de expresión específicos para cada gen optimizando una medida entrópica. Este estudio difiere del nuestro en el hecho de que supone el conocimiento de clases de individuos y en que el proceder es global: el tener en cuenta la totalidad de las observaciones induce un riesgo de pérdida de implicaciones estadísticamente significativas.

### 3 Intervalos de rango

Nuestro estudio parte de una matriz  $M(k, l)$  de datos numéricos, donde  $k$  representa un individuo,  $l$  una observación y  $M(k, l)$  la medida efectuada. En el ejemplo citado en la introducción, la matriz puede definir un conjunto de notas,  $k$  definiría la asignatura y  $l$  un alumno. Para los datos de biochips,  $k$  corresponde a un gen y  $l$  a un experimento. En un estudio clínico,  $l$  representará por ejemplo un paciente sometido a una condición experimental particular, como la absorción de un medicamento. Denotaremos con  $m$  el número de individuos y con  $n$  el número de observaciones. Cabe señalar que aunque tratemos con datos reales, nuestro estudio puede aplicarse a cualquier valor ordinal. Del mismo modo, es posible

transponer la matriz si nos fijamos en las reglas sobre las observaciones y no en las personas. Llamamos perfil de un individuo  $k$  al vector  $p(k)=(M(k,l), l \in [1,n])$  y suponemos la existencia de un operador *rango* que nos de las observaciones de un perfil en orden creciente de los valores de expresión. Más exactamente, tenemos  $rang(p(k))=(l_1, l_2, \dots, l_n)$ , donde las observaciones  $l_i \in [1,n]$  verifican la condición siguiente:  $M(k,l_1) \leq M(k,l_2) \leq \dots \leq M(k,l_n)$ . Sea por ejemplo un perfil representando las notas en Física:  $p(k)=(9,4,17,12)$ ,  $rang(p(k))$  devuelve entonces el vector (2,1,4,3). Este vector representa la clasificación de los alumnos por orden creciente en la materia, siendo el peor alumno (nota 4/20) designado con el índice  $l_1=2$  y el mejor (17/20) con el índice  $l_4=3$ .

Nos proponemos extraer reglas de asociación entre perfiles. Estas reglas pondrán en evidencia unos intervalos de estudio. Un intervalo de rango permite determinar unos niveles de clasificación (i.e. de expresión) sin tener que definir umbrales de medida. Para analizar el transcriptoma, estos intervalos van a hacer referencia a niveles de expresión, tales como la sobreexpresión o la subexpresión. El análisis de las notas escolares permite extraer reglas tales como que si un alumno está debajo de la clasificación en matemáticas, estará igualmente por la zona baja de la clasificación en Física. En el ejemplo anterior, el intervalo [1,3] designará la zona de clasificación (2, 1, 4), relativa a las tres notas más bajas del perfil, es decir 4, 9 y 12, que se corresponden con los valores  $M(k,l), l \in (l_1, l_2, l_3)$ . Nuestro enfoque considera todos los intervalos posibles, es decir el conjunto de los subintervalos de  $[1,n]$ :

$$I = \{ [p,q], (p,q) \in [1,n]^2, p \leq q \} \tag{1}$$

A un intervalo  $i \in I$  está asociado un *intervalo de rango*  $r_k(i)$ , definido de la siguiente manera:  $r_k(i) = (l_j \in rang(p(k)), j \in i)$ . Anotemos que para abreviar designaremos bajo el término de intervalo de rango [p, q] las observaciones relativas a este intervalo, a saber  $(l_p, l_{p+1}, \dots, l_q)$ . La tabla 1 da dos perfiles relativos a los individuos A y B. Resaltaremos por ejemplo que  $r_A(i) = (3,5,7,9)$  para  $i = [1, 4]$  y  $r_B(j) = (9,7,2,5,3)$  para  $j = [5,9]$ . Estos dos intervalos de rango comportan observaciones comunes. Este fenómeno parecería ser indicativo de una asociación entre el principio de la clasificación del perfil de A (intervalo i) y el final de la clasificación del perfil de B (intervalo j). Para saber si este fenómeno es estadísticamente significativo, vamos a retomar el enfoque de (Gras, 1996) y

considerar dos conjuntos  $\alpha$  y  $\beta$  de mismo tamaño respectivamente que  $r_A(i)$  y  $r_B(j)$ . Estos dos conjuntos están evidentemente incluidos en el conjunto de observaciones  $O$ . Tomemos nota de que en nuestro enfoque la hipótesis nula consiste en afirmar que el operador de la clasificación *rango* no aporta ninguna información útil. En este caso, coger dos intervalos de rango equivaldría a seleccionar los conjuntos  $\alpha$  y  $\beta$  al azar, i.e. sin tener en cuenta la clasificación de las observaciones.

Retomamos el concepto de intensidad de implicación tal y como está definido en [Gras 1996] de tal modo que la medida de calidad  $\varphi(\alpha, \beta)$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  representan los conjuntos que verifican respectivamente la premisa y la conclusión de una regla  $A \rightarrow B$ . Esta medida define la sorpresa estadística de observar tan pocos contra ejemplos en una regla de asociación. Entendemos la definición original reposando sobre el cardinal  $\alpha \cap \beta$  en los intervalos de rango:

$$\varphi(A \rightarrow B) = \max(\varphi(r_A(i), r_B(j)), (i, j) \in I^2) \quad (2)$$

La expresión (2) indica que la calidad de la regla  $A \rightarrow B$  está definida como la mayor intensidad de implicación entre dos intervalos de rango, el primero estando sacado del perfil  $p(A)$  y el segundo del perfil  $p(B)$ . Esta definición equivale a buscar los intervalos  $i$  y  $j$  que maximizan  $\varphi(r_A(i), r_B(j))$ . En el ejemplo de la tabla 1, los intervalos  $i=[1,4]$  y  $j=[5,9]$  corresponden con el valor máximo de intensidad de implicación:  $\varphi(A \rightarrow B)=0,86$ .

perfil	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p(A)	5	6	1	8	2	9	3	7	4
p(B)	13	17	19	14	18	12	16	11	15

Tab. 1: Ejemplos de perfiles. Los números de columnas designan los índices relativos a nueve observaciones efectuadas sobre dos individuos  $A$  y  $B$ .

#### 4 Interés del enfoque implicativo para el estudio de datos de expresión

En materia de estudio del transcriptoma, los análisis que son llevados a cabo por los biólogos de manera más corriente son los basados en las medidas de correlación entre perfiles de expresión. Estas medidas presentan el inconveniente de ser globales en el sentido en que hacen intervenir el conjunto de observaciones, mientras que la definición (2) busca una correspondencia óptima entre dos subconjuntos de observaciones. Para explicitar la diferencia entre estos dos

enfoques, vamos a considerar un ejemplo de regla de asociación entre dos genes (figura 1). Esos genes pertenecen a la especie *Saccharomyces cerevisiae*, comúnmente denominada levadura del panadero. Hemos retomado los datos de biochips de (Gasch, 2002). Hemos retenido 89 condiciones experimentales diferentes correspondientes a diferentes estreses inducidos, como el choque térmico.

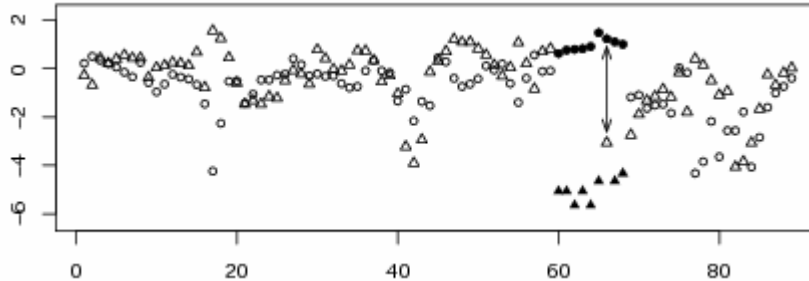


Fig. 1: Perfil de los genes *CHA1* y *SAM1*. El eje de abscisas representa 89 condiciones experimentales. El eje de ordenadas representa las medidas de expresión. El perfil del gen *CHA1* (*YCL064C*) está representado por los triángulos y el de *SAM1* (*YLR180W*) por los círculos. Las figuras rellenas corresponden con las observaciones pertenecientes a los intervalos de rango que maximizan el valor de la intensidad de implicación. Destacamos que estas observaciones son comunes, con una única excepción, indicada por la doble flecha: la observación de *SAM1* que está menos subexpresada, no aparece en el grupo mientras que sí que está presente en el de *CHA1*.

La figura 1 representa la implicación *CHA1*→*SAM1*. El gen *CHA1*, que interviene en el catabolismo de la treonina, está claramente subexpresado en respuesta a una señal de deficiencia en aminoácido, y en menor medida, en nitrógeno. *SAM1*, un gen que interfiere en el metabolismo de la metionina, está sobre expresado para el mismo conjunto de observaciones. Este conjunto corresponde a alrededor del 9% de las condiciones.

Tal y como se muestra en la tabla siguiente (tabla 2), los índices de correlación habituales no pueden detectar estas asociaciones. Los valores obtenidos son demasiado débiles para ser retenidos en un análisis, mientras que la medida implicativa expresa que el riesgo de encontrar al azar una asociación de la misma naturaleza es inferior a uno por mil.

Método	Valor
Intensidad de implicación	0,9992
Índice de correlación de Pearson	-0,16
Índice de correlación de Kendall	-0,0089

Tab. 2: Comparación de medidas efectuadas sobre el ejemplo de la figura 1.

## 5 Una medida implicativa del poder discriminante de los genes

La sección precedente ha demostrado que el método implicativo puede ser utilizado en el marco no supervisado. Supondremos desde ahora que las observaciones pertenecen a un conjunto  $C$  de clases predefinidas. A continuación, una clase corresponderá a unos tejidos provenientes de pacientes que presentan un fenotipo común. Proponemos una técnica de selección de los genes más pertinentes para la discriminación de tumores basada en el método implicativo. La búsqueda de genes informadores es un reto mayor en bioinformática. Se trata de extraer de un conjunto de varios millones de genes aquellos cuya expresión sea la más significativa. El análisis más común es el de la expresión diferencial, es decir la búsqueda de perfiles de expresión que varían de una clase de observaciones a otra. Enseñamos a partir de un experimento sobre dos tipos de leucemia que el enfoque que proponemos es particularmente eficaz. Por último, proponemos una técnica original de representación visual, aplicada a un banco de datos sobre tumores cerebrales.

### 5.1 Una definición implicativa del concepto de gen discriminante

Los datos de biochips conciernen generalmente a un gran número de genes. La mayoría de ellos no ayudan a discriminar las clases, ya sea porque sus expresiones tienen una amplitud de variación débil, ya sea porque su expresión es independiente de las clases de observaciones. Una etapa de selección de los genes es pues necesaria. La técnica más comúnmente compartida reposa sobre la potencia discriminatoria de los test estadísticos tales como el test de Student o el ANOVA (ver [Chen 2005] para una síntesis de las medidas empleadas sobre los datos de expresión). Proponemos emplear la intensidad de implicación para determinar los genes más discriminantes. Llamaremos función de etiquetado la función  $L(o_k)=c$ , donde  $o_k$  es una observación de  $O$  y  $c \in C$ . Nuestro enfoque está basado en reglas de clasificación de la forma:  $r_g(i) \rightarrow Oc$ , donde la conclusión designa las observaciones de clase  $c$  y la premisa el intervalo de rango asociado al gen  $g$  y al

intervalo  $i$ . Esta regla puede ser explicitada de la siguiente manera: si, para una observación, su medida de expresión relativa al gen  $g$  figura en la zona de clasificación definida por el intervalo  $i$ , entonces esa observación pertenece probablemente a la clase  $c$ . Limitaremos a continuación el dominio de los intervalos definido en (1) imponiendo niveles de expresión que tengan una significación biológica precisa, es decir la subexpresión (intervalo de la forma  $[1, q]$ ) o la sobreexpresión (intervalo  $[p, n]$ ). El conjunto  $I$  de los intervalos es pues a partir de ahora:  $I = \{[p, q], (p, q) \in [1, n]^2, p \leq q, p=1 \wedge q=n\}$ .

La regla  $r_g(i) \rightarrow O_c$  puede entonces ser interpretada de manera más simple: significa que si observamos una desregulación del gen  $g$  en un paciente  $o$ , entonces este paciente posee probablemente el fenotipo  $c$ . Esta implicación corresponde bien con la noción de gen discriminante.

El poder discriminante de un gen  $g$  respecto a una clase  $c$  será expresado por la siguiente expresión:

$$\varphi_c(g) = \max(\varphi(r_g(i), O_c), i \in I, O_c = \{o, L(o) = c\}) \quad (3)$$

La medida  $\varphi_c(g)$  está definida por la maximización de la intensidad de implicación de las reglas de clasificación del tipo  $r_g(i) \rightarrow O_c$ .

Cabe señalar que la definición (3) difiere únicamente de la expresión (2) por una modificación del conjunto conclusión:  $r_b(j)$  está remplazado por el conjunto  $O_c$  de las observaciones de clase  $c$ . Una característica destacable de la intensidad de implicación es la de tener en cuenta el número de observaciones pertenecientes a  $O_c$ : para un intervalo fijo  $i$ , el hecho de aumentar la población  $O_c$  conlleva una disminución de la calidad de la regla. En efecto, es normal encontrar una proporción notable de observaciones de clase  $c$  si esta última está sobre representada.

## 5.2 Método de selección

Sean  $G$  el conjunto total de genes definidos en el conjunto de experimentos  $O$ , y  $M$  la matriz de datos de expresión asociada. Sean  $C$  las clases de observaciones y  $L$  la función de etiquetado de  $O$  hacia  $C$ . El algoritmo presentado en la figura 2 extrae los  $K$  genes más discriminantes para cada clase de  $C$ .



---

**Algoritmo Selección**

---

**Entrada :**

$M, G$  : matriz de valores de expresión y conjunto de los genes considerados

$C, L$  : conjunto de las clases y función de etiquetado

$K$  : el número de genes discriminantes a retener

**Salida :**

$gd$  : conjunto  $\{(g,c,\psi)\}$  de los genes discriminantes donde  $g$  es el gen retenido,  $c$  la clase discriminada y  $\psi$  la medida de calidad definida en (3)

---

## Principio

**Para** cada clase  $c \in C$  **hacer**

    ListaGenes  $\leftarrow \emptyset$

**Para** cada gen  $g \in G$  **hacer**

$\psi \leftarrow \varphi_c(g)$

        ListaGenes  $\leftarrow$  ListaGenes  $\cup \{(g,c,\psi)\}$

**hecho**

    elegir los tripletes de ListaGenes por orden decreciente de  $\psi$

    Sea selección el conjunto de los  $K$  primeros tripletes de la lista elegida

$gd \leftarrow gd \cup$  selección

---

Fig. 2: Algoritmo para la extracción de genes discriminantes

Hay que tener en cuenta que este algoritmo considera cada clase de manera independiente. Puede ocurrir que un gen sea considerado como discriminante para varias clases. Destacaremos que la medida  $\varphi_c(g)$  será diferente según la clase considerada. Puede ocurrir, en efecto, que un gen esté netamente subexpresado para una clase dada y que esté pro el contrario sobre expresado en otra, en un grado menor. Hay que tener en cuenta igualmente que en el caso particular de un experimento con dos clases (e.g. pacientes sanos versus pacientes enfermos), podríamos esperar que un gen discriminante para una clase lo sea también para la otra. En lo que respecta a nuestro enfoque, este hecho no se verifica siempre. Puede ocurrir en efecto que los dos extremos de la clasificación de las observaciones no tengan la misma homogeneidad. En este caso, los valores  $\varphi_{c1}(g)$  y  $\varphi_{c2}(g)$  diferirán, y según la calidad relativa del gen respecto a los otros genes candidatos, podría ser que fuera retenido para una clase y excluido para otra.

### 5.3 Aplicación a un estudio sobre dos tipos de leucemia

Aplicaremos nuestro algoritmo de selección sobre un estudio que versa sobre dos tipos de leucemia (Golub, 1999). La leucemia se caracteriza por la proliferación maligna de células de origen hematopoyéticas poco maduras y que difunden rápidamente. Esta enfermedad se caracteriza por un alcance masivo de la médula ósea, debido al desarrollo de linfomas malignos. Se distingue las leucemias agudas linfoblásticas (llamadas ALL en lo sucesivo por *Acute Lymphoblastic Leukemia*) de las leucemias agudas mieloblásticas (llamadas AML por *Acute Myeloid Leucemia*). La distinción entre estas dos formas es esencial para el éxito de las terapias previstas: el tratamiento difiere según la leucemia sea de una u otra clase. El banco de datos incluye 38 pacientes (27 pacientes ALL y 11 pacientes AML) y concierne a 3571 gen.

Nos proponemos extraer de este conjunto los genes más discriminantes aplicando el algoritmo de selección previamente descrito. Hemos estudiado el poder discriminante del conjunto completo de genes sobre la base de la medida (3), de la cual damos aquí una versión logarítmica:  $\lambda_c(g) = -\log_{10}(1 - \varphi_c(g))$ . Esta transformación presenta varias ventajas: el índice de calidad ya no está limitado y los valores son más fácilmente interpretables. Una regla de calidad  $\lambda_c(g)$  tiene un riesgo de  $10^{-\lambda_c(g)}$  de deberse al azar. El análisis revela que 10% de los genes tienen un poder discriminante importante ( $\lambda_c(g) > 3,5$  es decir  $\varphi_c(g) > 0,9997$ ).

Aunque 300 genes pueden ser considerados como discriminantes, los autores del estudio sólo han retenido una lista de 50 de los genes más informativos, indicando el carácter arbitrario de ese número. Como han desarrollado una técnica original de selección, es interesante comparar su enfoque con el nuestro. Así, hemos fijado el parámetro K del algoritmo de la figura 2 en 25, ya que tenemos dos conjuntos de genes para las clases ALL y AML. Hemos obtenido una lista de genes discriminantes en la que figuran 14 genes pertenecientes a la lista publicada por los autores. La tabla 3 compara el poder discriminantes de los dos conjuntos.

Lista de genes	Max.	Mediana	Min.	Media	Varianza
Golub y al.	9,08	5,44	4,55	5,12	10,16
Nuestra lista	9,08	6,47	5,49	5,92	11,80

Tab. 3: Comparación de los valores  $\lambda_c(g)$  en los 50 genes seleccionados por (Golub et al.1999) y según nuestro método

Destacamos que el gen más discriminante es común para los dos conjuntos de genes, y que la media es del mismo orden. Se observa sin embargo una dispersión mayor en el grupo de Golub y al. Del mismo modo, el valor de la mediana es significativamente más débil respecto a nuestra lista.

Para comparar la potencia discriminadora de estos dos conjuntos de genes, hemos procedido a una validación cruzada de los datos utilizando el mismo clasificador, a saber, los 3 vecinos más cercanos. Esta técnica ha sido conservada porque toma en consideración la distancia entre dos puntos en todo el espacio de genes, contrariamente a otros métodos que privilegian ciertos genes (árboles de decisión, bosque aleatorio, separadores con márgenes amplios) y que aportarían pues un sesgo para la comparación. Hemos aplicado el algoritmo sobre la matriz de expresión reducida que comporta los mismos pacientes y que versa sobre el mismo conjunto de genes considerado. La tabla 4 muestra que nuestra selección da resultados superiores a la de los autores.

% test	Golub y al.	Nuestros resultados
50%	3,11	0,79
25%	1,67	0,11
10%	1,00	0,00
2,6%	0,00	0,00

Tab. 4: Comparación de las tasas de errores en validación cruzada. La primera columna indica el porcentaje considerado en el test sobre el conjunto de datos. Las dos otras columnas dan las tasas de errores en porcentaje sobre 100 conjuntos de valoración aleatorios

#### 5.4 Representación de los datos basada en la intensidad de implicación

Hemos empleado la intensidad de implicación para determinar la importancia individual de cada gen respecto a una patología. Como esta medida permite también definir la asociación entre individuos, es posible caracterizar las relaciones que de los genes entre sí y proyectar estos últimos en un espacio de representación abstracto. El escalonamiento multidimensional (o multidimensional scaling (Kruskal, 1978)) es en efecto una técnica que asegura una representación de los datos a partir de una matriz de disimilitud. Nos proponemos definir una medida tal a partir de la intensidad de implicación. Consideramos para esto la similitud  $sim(g_1, g_2)$  entre dos genes  $g_1$  y  $g_2$  definida como la intensidad de implicación

máxima entre dos genes:  $sim(g_1, g_2) = \max(\lambda(g_1 \rightarrow g_2), \lambda(g_2 \rightarrow g_1))$  o  $\lambda(g_1 \rightarrow g_2) = -\log_{10}(1 - \varphi(g_1 \rightarrow g_2))$ . La disimilitud es obtenida por la relación siguiente:

$dissim(g_1, g_2) = \max(sim(g_1, g_2), (g_2, g_1) \in G) - sim(g_1, g_2)$ . Podemos desde este momento, gracias al escalonamiento dimensional, asociar a un gen  $g$  un punto  $P(g)$  del plano. Nos ha parecido interesante visualizar igualmente el nexo existente entre la observación  $o$  y el conjunto de genes discriminantes. Esta relación puede ser especificada por la presencia de observaciones  $o$  en el intervalo de rango asociado a una regla de selección. A partir del conjunto de reglas  $r_g(i) \rightarrow O_c$  sacadas del algoritmo de selección, definimos  $G_o$  como el conjunto de genes  $g$  de  $G$  que verifican  $o \in r_g(i)$ . Para representar la posición de una observación en el espacio de genes, asociamos a  $o$  el punto  $P(o)$  definido por la media aritmética de los genes de  $G_o$ :

$$P(o) = \frac{1}{|G_o|} \sum_{g \in G_o} P(g).$$

Hemos aplicado este método de representación en un banco de datos complejo haciendo intervenir cinco tipos de tumores del sistema nervioso central. El conjunto comporta 42 muestras de tejidos, repartidos como se explica a continuación: 10 meduloblastomas, 10 gliomas de las manos, 10 tumores rabdoides y teratoides atípicos, 8 tumores neuroectodérmicos primitivos (PNETs) y 4 tumores cerebelosos. Los datos brutos están disponibles en la página web: *Whitehead Institute Center for Genomic Research* (<http://www-genome.wi.mit.edu/cancer>). Tras una etapa de filtraje, el banco de datos corresponde a 5597 genes.

La figura 3 muestra el espacio de los 50 genes más discriminantes (10 genes retenidos por cada clase). Se observa una separación espacial de los genes de cada categoría, pese a que algunos márgenes entre clases se revelan estrechos. Las cifras representan las clases de las observaciones o proyectadas en el espacio de los genes. Se tendrá en cuenta que en una situación ideal, las observaciones deberían coincidir con el baricentro de los genes de la clase a la que pertenecen. El alejamiento de los puntos respecto a su posición ideal valoriza la atracción de genes relativos a reglas de clasificación impropias. Tales desviaciones muestran en efecto que la observación considerada verifica unas reglas cuya conclusión versa sobre una clase externa, o dicho de otra manera, que figura en ella como contraejemplo. La visualización propuesta permite pues analizar la representatividad de las observaciones respecto a unas clases. Se observa especialmente en la figura 3 una buena homogeneidad de las clases 1 y 2, al igual que un desplazamiento de los individuos de la clase 4 hacia la clase 5.

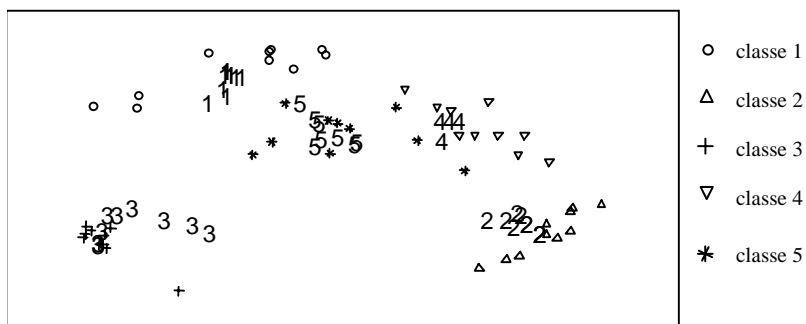


Fig. 3: Representación de las observaciones en el espacio de genes. Los símbolos gráficos representan los genes discriminantes para la clase indicada en la leyenda. Las cifras representan las observaciones.

## 6 Aplicación a la clasificación de tumores

La sección anterior ha permitido definir una medida del poder discriminante de los genes. Como hemos basado nuestro algoritmo de selección en unas reglas de clasificación del tipo  $r_g(i) \rightarrow Oc$ , es natural considerar el utilizarlas para predecir la clase de un paciente según su perfil de expresión. Esta categorización es uno de los principales desafíos de la tecnología de biochips: permite diagnosticar la existencia de un cáncer en un estado precoz, mientras la enfermedad se expresa en las células sin que se observe aún ningún signo clínico manifiesto. Por otra parte, la predicción basada en la expresión de genes permite distinguir entre diferentes tipos de tumores aunque su apariencia morfológica tumoral sea idéntica. Vamos a presentar en un primer momento los algoritmos puestos en marcha para clasificar observaciones, y luego presentaremos los conjuntos de datos al igual que los métodos empleados para comparar nuestros resultados con los de la literatura.

### 6.1 Algoritmos para la clasificación

Para caracterizar la capacidad predictiva de las reglas extraídas, proponemos un enfoque supervisado que comprenda un banco de datos de aprendizaje  $\mathcal{A} = \{G, M, O, L, C\}$ , donde  $G$  es un conjunto de genes,  $M$  las medidas efectuadas sobre un conjunto  $O$  de observaciones, y  $L$  la función que atribuye a cada observación una clase  $C$ . La figura 4 presenta el algoritmo de extracción de las reglas de clasificación, cuyo principio es análogo al que nos ha servido para seleccionar los

genes. Tomaremos nota de que el cardinal del conjunto de las reglas extraídas  $\mathcal{R}$  es  $|\mathcal{R}|=K \cdot |C|$ , siendo  $K$  un parámetro de entrada del algoritmo y  $|C|$  el número de clases consideradas.

---

**Algoritmo** Extracción de las reglas de clasificación

---

**Entrada** :

$\mathcal{A}$  : juego de aprendizaje

$K$  : el número de normas deseadas por clase

**Salida** :

$\mathcal{R}$  : el conjunto de normas extraídas

---

**Principio**

**Para** cada clase  $c \in C$  **hacer**

ListaReglas  $\leftarrow \emptyset$

**Para** cada gen  $g \in G$  **hacer**

Buscar el intervalo de rango  $r_g(i)$  que maximice  $\varphi(r_g(i), O_c)$ ,  $O_c = \{o, L(o)=c\}$

ListaReglas  $\leftarrow$  ListaReglas  $\cup \{(r_g(i), \psi_c(g))\}$

**hecho**

elegir los pares de ListaReglas por orden decreciente de  $\psi_c(g)$

Sea selección el conjunto de los  $K$  primeros pares de la lista elegida

---

Fig. 4: Algoritmo para la extracción de reglas de clasificación

El principio de la predicción de una muestra a partir de un experimento puede ser descrito de la siguiente manera: sea  $o$  una observación nueva de clase desconocida sobre la que ha sido efectuada una medida de expresión sobre el conjunto de genes  $G$  y sea  $p(o)$  el perfil de expresión correspondiente a estas medidas, se trata de recoger las premisas de las reglas de clasificación que respeta  $o$  y definir  $L(o)$  como la clase que más frecuentemente encontramos en conclusión de estas reglas.

No se puede en la práctica verificar directamente si  $o$  respeta la premisa  $P$  de una regla  $r_g(i) \rightarrow Oc \in \mathcal{R}$ . En efecto,  $P = r_g(i)$  está definida a partir del conjunto  $O \in \mathcal{A}$ , conjunto en el cual no figura la observación  $o$ . Para paliar esta dificultad, buscamos dónde se situaría la nueva medida de expresión  $M[g,o]$  relativa a un conjunto  $O' = O \cup \{o\}$ . Dicho de otro modo, intentamos saber si la nueva observación se inserta entre los rangos de la clasificación efectuada en el momento

del aprendizaje. La práctica operativa es pues la siguiente: Sea  $s(P)=\min(M[g,o],o\in P)$  y  $S(P)=\max(M[g,o],o\in P)$ , diremos que  $o$  respeta  $P$  si la condición siguiente se realiza:  $s(P)\leq M[g,o]\leq S(P)$ .

La figura 5 describe el algoritmo de predicción de una observación  $o$ .

**Algoritmo** Predicción

**Entrada** :

$M$  : matriz de expresión del juego de aprendizaje  
 $p(o)$  : perfil de expresión medido sobre la nueva observación  $o$   
 $\mathcal{R}$  : el conjunto de normas extraídas en el momento del aprendizaje

**Salida** :

$\chi$  : la clase predicha para la observación  $o$

**Variable intermedia** :

$\text{count}$  : vector de tamaño  $|C|$  para contar las ocurrencias de premisas satisfechas por la observación  $o$

## Principio

**Para** cada clase  $c \in C$  **hacer**

$\text{count}[c] \leftarrow 0$

**Para** cada norma  $r \in \mathcal{R}$  **hacer**

Sea  $g$  el gen relativo a la norma  $r$ ,

sea  $p_g(o)$  la medida de expresión relativa a  $g$  en el perfil  $p(o)$ ,

sea  $P$  la premisa de la norma  $r$ ,  $s(P)$  y  $S(P)$  los valores mínimos (resp. máximas) en  $M$  relativamente a  $g$  y a la premisa de la norma  $r$ .

si  $s(P)\leq p_g(o)\leq S(P)$  entonces  $\text{count}[c] \leftarrow \text{count}[c]+1$

**hecho**

Fig. 5: *Algoritmo de predicción de una observación  $o$ .*

El principio de este algoritmo reposa en un consenso: la clase atribuida es la que tiene el máximo de votos, siendo las reglas los votantes y sus conclusiones los votos.

Resaltaremos que la pertinencia del voto está ligada a la calidad de la regla: cuantos más contraejemplos tengo la regla, más aumenta el riesgo de error de

clasificación. Se puede prever el tener en cuenta esta propiedad atribuyendo un peso de voto proporcional a la intensidad de implicación de la regla. En la práctica, no hemos observado mejoras notables procediendo de este modo. La razón parece ser que todas las reglas extraídas son suficientemente pertinentes respecto a los conjuntos de datos considerados. Esto se debe al número  $K=25$  relativamente reducido que ha sido aplicado para la selección de las reglas en el momento del aprendizaje.

## 6.2 Estudio comparativo de los resultados de la clasificación

Además de los conjuntos de datos sobre la leucemia y el cerebro, que ya han sido presentados, apoyamos nuestro estudio en los datos que versan sobre cáncer de colon. Este conjunto contiene datos de expresión sobre los tejidos del colon. El estudio se ha realizado sobre 62 tejidos, de los cuales 22 estaban sanos y 40 eran tumorales. La expresión de 6500 genes ha sido analizada. Los datos están accesibles en la página web: Colorectal Cáncer Micorarray Research (<http://microarray.princeton.edu/oncology>). La tabla 5 resume las diferentes características de los conjuntos que hemos estudiado.

Conjunto de datos	Publicación	# tejidos	# clases	# genes	Tipo de estudio
Cerebro	[Pomeroy 2002]	42	5	5597	Subtipos tumorales
Colon	[Alon 1999]	62	2	2000	Tejidos sanos/enfermos
Leucemia	[Golub 1999]	72	2	3571	Subtipos tumorales

Tab. 5: *Presentación de los conjuntos de datos públicos sobre el cáncer empleados en nuestro estudio.*

Hemos comparado el rendimiento de nuestro clasificador con los resultados obtenidos, ya sea en la literatura, ya sea los obtenidos utilizando clasificadores genéricos. Para el primer tipo de clasificadores, hemos conservado dos estudios principales en el dominio del análisis del transcriptoma, como son el algoritmo *Gene Clustering* (Dettling, 2002) y el algoritmo *Fuzzy c-means* (Wang, 2003). Además de estos métodos específicamente dedicados al tratamiento de datos de



expresión, hemos conservado igualmente unas técnicas de clasificación supervisada habitualmente empleadas en este campo.

Los clasificadores empleados en el estudio son los siguientes:

**k-vecinos-más-cercanos:** Este método cuenta con el respaldo de los biólogos por su sencillez de interpretación (Yeang, 2001). El clasificador busca los k vecinos más cercanos de una muestra desconocida en función de una medida de distancia  $d(x,y)$ . La métrica más corriente en bioinformática es el coeficiente de Pearson absoluto, estando definida la distancia por:

$$d(x,y)=1-\frac{\left|\sum_{i=1}^n(x_i-\mu(x))(y_i-\mu(y))\right|}{(n-1)\sigma(x)\sigma(y)},$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  designan respectivamente la media y la desviación estándar de los perfiles de expresión. El clasificador atribuye a la muestra desconocida la clase mayoritaria de sus k vecinos (siendo k impar, a menudo fijado en 3 en la literatura). Comparada con otras técnicas más elaboradas, este método da unos resultados satisfactorios, a condición de disponer de un conjunto de genes pertinentes. En caso contrario, la gran dimensión de  $G$  puede ser un elemento desfavorable y hacer el cálculo de distancia entre observaciones poco significativo.

**Bosque aleatorio:** este clasificador está compuesto por un gran número de árboles de decisión. Cada uno de estos árboles recibe los datos relativos a una decisión aleatoria de observaciones (extracción de bolas con devolución antes de la siguiente extracción). En cada nudo, el árbol selecciona el atributo más pertinente entre una decisión aleatoria de genes. El algoritmo utiliza a continuación una predicción basada en el consenso, al igual que nuestro método: la clase conservada es aquella que ha sido predicha más frecuentemente por los árboles. Esta técnica ha demostrado ser particularmente eficaz en los datos del transcriptoma. Posee un gran poder de predicción, incluso cuando el número de observaciones es reducido respecto al número de genes. (Díaz-Uriarte, 2006).

**Máquina con vectores de soporte:** esta técnica es una de las más exitosas en materia de aprendizaje automático (Vapnik, 1995). Es particularmente eficaz en el caso de espacio de datos de alta dimensión. El principio del clasificador consiste en buscar un hiperplano de separación óptimo entre dos clases de muestra en un espacio de características. Este método se presta bien para la clasificación tumoral a partir de biochips (Lee, 2003).

La tabla 6 presenta los resultados obtenidos según la técnica de *leave-one-out* (validación cruzada tomando el conjunto de observaciones en aprendizaje excepto una, sirviendo esta última de banco de datos de validación y siendo repetido este principio para cada observación). En los tres conjuntos de datos descritos anteriormente, nuestro método alcanza rendimientos comparables a los otros clasificadores. Este resultado es aún más notable por el hecho de que nuestro algoritmo es relativamente sencillo, ya que se trata de un simple recuento de las reglas de clasificación. Pese a su simplicidad, rivaliza perfectamente con técnicas sofisticadas.

Método	cerebro	colon	leucemia
Reglas de clasificación	14,3	12,9	2,8
Gene clustering	11,9	16,1	2,8
Fuzzy c-means	14,3	11,4	4,1
Bosque aleatorio	19,0	14,5	2,8
Separadores con márgenes amplios	11,9	12,9	2,8
3 vecinos más cercanos	23,8	22,6	1,4

Tab. 6: *Comparación de los métodos de clasificación. La tabla indica las tasas de errores según la técnica de leave-one-out. Evidentemente, el método basado en las reglas de clasificación efectúa para cada test una extracción de reglas sobre el banco de datos de aprendizaje; el candidato probado ha sido retirado de este banco de datos*

## 7 Conclusión

El enfoque implicativo, aplicado a los datos de expresión, presenta varias ventajas. En primer lugar, es más fina que las técnicas que miden relaciones de similitud globales. Por medida global entendemos estimaciones basadas en el conjunto de observaciones. Está claro que si un determinado número de observaciones no participan en una relación, estas informaciones aportan un ruido que camufla la asociación entre genes, como hemos mostrado en el ejemplo de los experimentos en la levadura. Del mismo modo, una asociación entre condiciones experimentales puede estar camuflada por genes que no están regulados de manera coordinada con otro grupo de genes. Este es el motivo por el que un análisis implicativo es más eficaz que las técnicas basadas en correlaciones.

Un segundo interés de nuestro enfoque está ligado a la robustez del análisis de rango. Resaltaremos que el análisis de clasificación no varía respecto a toda transformación monótona de los datos. Esta propiedad es particularmente útil en el marco de datos de biochips que sufren un gran número de pre tratamientos (transformación logarítmica, normalización...).

En fin, recordamos que la implicación es una información orientada, contrariamente a las técnicas de similaridad que son simétricas. Esta propiedad puede ser explotada en el marco del transcriptoma. Sabemos en efecto que los genes están activados por medio de factores de transcripción, que se expresan ellos mismos en la célula. Descubrir relaciones de causalidad entre la expresión de genes es un gran reto en bioinformática. Los conjuntos de datos no permitían tales análisis hasta ahora, ya que el biochip sólo es la fotografía de la actividad de la célula en un momento dado. La acumulación de experimentos y su libre difusión en el seno de la comunidad científica ofrecen desde hace poco la posibilidad de realizar meta-análisis: la comparación de múltiples conjuntos de datos permite desde este momento inferir relaciones de implicación entre genes (cuando tal gen se expresa, tal otro gen se expresa, y no al contrario). Es una vía de aplicación prometedora para la minería de datos.

Hemos propuesto un método original de selección de genes informadores. La pertinencia del método ha sido verificada demostrando el poder predictivo del conjunto seleccionado. Una forma original de representación visual de los datos ha sido propuesta para analizar los genes de interés y la representatividad de las observaciones. El descubrimiento de genes discriminantes es de gran importancia para las aplicaciones clínicas, ya que permite definir métodos de diagnóstico fiables y relativamente económicos.

Hemos desarrollado un algoritmo de extracción de reglas de clasificación. La ventaja de un método de clasificación basado en las reglas es que ofrece una información fácilmente interpretable por un experto biólogo, contrariamente a los métodos abstractos tales como las máquinas con vectores de soporte. Pese a su simplicidad de puesta en marcha, nuestro algoritmo se ha revelado tan eficaz como las técnicas más probadas en este dominio.

## Bibliografía

- Agrawal, R.; Imielinski, T.; Swami, A. (1993). *Mining association rules between sets of items in large databases*, In: SIGMOD'93: Proceedings of the 1993 ACM SIGMOD international conference on Management of data. Volume 22., ACM Press, pp 207–216.
- Alon, U.; Barkai, N.; Notterman, D.; Gish, K.; Ybarra, S.; Mack, D.; Levine, A. (1999). *Broad patterns of gene expression revealed by clustering analysis of tumor and normal colon tissues probed by oligonucleotide arrays*. Proc Natl Acad Sci USA 96(12) pp 6 745–6 750.
- Becquet, C.; Blachon, S.; Jeudy, B.; Boulicaut, J.; Gandrillon, O. (2002). *Strong association-rule mining for large-scale gene-expression data analysis: a case study on human sage data*. Genome Biol 3(12).
- Carmona-Saez, P.; Chagoyen, C.; Rodríguez, A.; Trelles, O.; Carazo, J.; Pascual-Montano, A. (2006). *Integrated analysis of gene expression by association rules discovery*, BMC Bioinformatics 7, 54.
- Chen, D.; Liu, Z.; Ma, X.; Hua, D. (2005). *Selecting genes by test statistics*, Journal of Biomedicine and Biotechnology 2, 132-138.
- Cong, G.; Tung, A.; Xu, X.; Pan, F.; Yang, J. (2004). *Farmer: Finding interesting rule groups in microarray datasets*.
- Creighton, C.; Hanash, S. (2003). *Mining gene expression databases for association rules*, Bioinformatics 19 (1) pp 79–86
- Dettling, M.; Bühlmann, P. (2002). *Supervised selection of genes*. Genome. Biol. Res. 3(12), Research, 0069.1-0069.15.
- Díaz-Uriarte, R.; Alvarez de Andres, S. (2006). *Gene selection and classification of microarray data using random forest*. BMC Bioinformatics 7.
- Gasch, A.; Eisen, M. (2002). *Exploring the conditional coregulation of yeast gene expression through fuzzy k-means clustering*.
- Golub, T.; Slonim, D.; Tamayo, P.; Huard, C.; Gaasenbeek, M.; Mesirov, J.; Coller, H.; Loh, M.; Downing, J.; Caligiuri, M.; Bloomfield, C.; Lander, E. (1999). *Molecular classification of cancer: class discovery and class prediction by gene expression monitoring*. Science 286, pp 531-537.
- Gras, R.; Couturier, R.; Guillet, F.; Spagnolo, F. (2005). *Extraction de règles en incertain par la méthode statistique implicative*. In 12èmes Rencontres de la Société Francophone de Classification, Montréal, pp. 148-151.
- Gras, R.; Diday, E.; Kuntz, P.; et Couturier, R. (2001). *Variables sur intervalles et variables-intervalles en analyse statistique implicative*. In Société

- Francophone de Classification (SFC'01), Univ. Antilles-Guyane, Pointe-à-Pître, pp. 166-173.
- Gras, R. (1996). *L'implication Statistique*, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Jin, X.; Zuo, X.; Lam, H.; Wang, J.; Sun, J., 2006. *Efficient discovery of emerging frequent patterns in arbitrary windows on data streams*. In ICDE, p 113.
- Lee, Y.; Lee, C. (2003). *Classification of multiple cancer types by multicategory support vector machines using gene expression data*. *Bioinformatics* 19(9) pp 1132–1139.
- Kruskal, J. and Wish, M. (1978). *Multidimensional Scaling*, Sage University Paper series on Quantitative Application in the Social Sciences, 07-011. Beverly Hills and London: Sage Publications.
- Pomeroy, S.; Tamayo, P.; Gaasenbeek, M.; Sturla, L.; Angelo, M.; McLaughlin, M.; Kim, J.; Goumnerova, L.; Black, P.; Lau, C.; Allen, J.; Zagzag, D.; Olson, J.; Curran, T.; Wetmore, C.; Biegel, J.; Poggio, T.; Mukherjee, S.; Rifkin, R.; Califano, A.; Stolovitzky, G.; Louis, D.; Mesirov, J.; Lander, E.; Golub, T.; (2002). *Prediction of central nervous system embryonal tumour outcome based on gene expression*. *Nature* 415(6 870) pp 436–442.
- Tuzhilin, A.; Adomavicius, G. (2002). *Handling very large numbers of association rules in the analysis of microarray data*. In KDD, pp. 396-404.
- Yeang, C.; Ramaswamy, S.; Tamayo, P.; Mukherjee, S.; Rifkin, R.; Angelo, M.; Reich, M.; Lander, E.; Mesirov, J.; Golub, T. (2001). *Molecular classification of multiple tumor types*. *Bioinformatics* 17 Suppl 1 316–322
- Vapnik, V. (1995). *The nature of statistical learning theory*, Springer-Verlag, New York, Inc., USA.
- Wang, J.; Bø, T.; Jonassen, I.; Myklebost, O.; Hovig, E. (2003). *Tumor classification and marker gene prediction by feature selection and fuzzy c-means clustering using microarray data*, *BMC Bioinformatics* 4, 60.



# Relaciones entre tipos de violaciones de libertades sindicales garantizadas por los convenios de la OIT: Un análisis estadístico implicativo de los resultados de un análisis automático de textos

Matthias Studer\*, Gilbert Ritschard\*  
Lucio Baccaro\*\*\*\*, Irini Georgiou\*\*\*, Nicolas S. Müller\*, Djamel A. Zighed\*\*\*\*

Traducido por Vera Felip

\*Departamento de econometría, Universidad de Genève, Suisse  
{matthias.studer, gilbert.ritschard, nicolas.muller}@metri.unige.ch  
<http://www.unige.ch/ses/metri/>

\*\* MIT, Cambridge MA

\*\*\*International Institute of Labour Studies, ILS (OIT), Genève

\*\*\*\*Laboratoire ERIC, Université de Lyon 2, France  
abdelkader.zighed@univ-lyon2.fr

**Resumen.** A través de un análisis de las violaciones observadas de convenios de la OIT, el objetivo de este texto es el de demostrar cómo el análisis implicativo complementa de manera ventajosa los análisis exploratorios más clásicos. Para ser más exactos, nos interesaremos a los tipos de violaciones detectadas por los expertos encargados de observar el respeto de los Convenios nº 87 y nº 98 de la OIT sobre los derechos sindicales. Los datos son las predicciones obtenidas con ayuda de un aprendizaje fundamentado en un análisis automático de textos. Comparamos básicamente tres métodos, es decir el análisis estadístico implicativo, el análisis factorial de las correspondencias y la clasificación automática de los individuos. Discutiremos las aportaciones de cada uno de estos métodos.

## 1 Introducción

En este artículo, mostramos la contribución de la estadística implicativa en el estudio de sistemas de diálogo social. Entendemos por sistema de diálogo social los

sistemas sociopolíticos por los cuales los trabajadores tienen la libertad de crear las organizaciones de su elección, de negociar colectivamente las condiciones de trabajo y de participar a través de sus asociaciones en la elaboración y en la aplicación de las políticas que les conciernen (Baccaro, 2003)<sup>1</sup>. Nos centraremos aquí en el análisis del respeto de los convenios n° 87 y n° 98 de la Organización Internacional del Trabajo (OIT). Estos convenios fijan un conjunto de condiciones condicionadas a la emergencia de un sistema que permita la negociación libre entre organizaciones de trabajadores y de patronos. De este modo, son consideradas como las condiciones que fijan un conjunto de derechos fundamentales del trabajo<sup>2</sup>. El convenio n° 87 trata de la independencia de los sindicatos y de la protección de los sindicatos respecto del Estado. Garantiza igualmente los derechos de acción sindical. El convenio n° 98 trata las relaciones entre sindicatos y patronos (sobre todo injerencias y discriminación antisindical) al igual que las condiciones marco necesarias para la emergencia de las negociaciones colectivas. El estudio del respeto de estos convenios nos permitirá así abordar la constitución de un sustrato legal propicio para la emergencia de un sistema de diálogo social.

El artículo se estructura como sigue a continuación. En un primer momento, presentaremos los datos de los que disponemos sobre el respeto de los convenios n° 87 y 98. Intentamos comprender, desde una óptica descriptiva, las relaciones entre los tipos de violaciones de los convenios previamente citados. Para lograrlo, buscamos primero identificar los tipos de sistemas legales mediante el sesgo una clasificación automática. Completamos el estudio con un análisis factorial de correspondencias múltiples y finalmente con un análisis por grafos de implicación. Explotaremos igualmente diferentes métodos de reagrupamiento jerárquico de las variables con el fin de refinar nuestra percepción de las relaciones de dependencia entre violaciones. Finalmente, concluimos haciendo balance de las diversas enseñanzas del análisis realizado, tanto desde el punto de vista de nuestra problemática del diálogo social como del plano metodológico.

## **2 Presentación de los datos**

Cada año, el CEACR ("Committee of Experts on the Application of Conventions and Recommendations") de la OIT publica un volumen de cerca de 800 páginas que reúnen los informes sobre el respeto de los convenios de la OIT por los países

---

<sup>1</sup> Estudio realizado con financiación de la Fundación RUIG ([www.ruig-gian.org](http://www.ruig-gian.org)).

<sup>2</sup> Más concretamente, tras la adopción en 1998 de "la declaración de la OIT relativa a los principios y derechos fundamentales en el trabajo".



firmantes de éstos. Los datos que utilizamos en este artículo conciernen exclusivamente los convenios n° 87 y 98. Son el resultado de un procedimiento de etiquetaje automático de estos informes con ayuda de técnicas fundamentadas en el análisis automático de textos. Este procedimiento de análisis de textos automático permite predecir la probabilidad de la presencia en cada informe de cada uno de los seis tipos de violación del convenio 87 y de los cinco del convenio 98. Las tablas 1 y 2 describen los diferentes tipos de violaciones consideradas, únicamente los que se observan efectivamente en los informes que han sido considerados.

---

Convenio 87

- v3 *Derecho de establecer y de pertenecer a las organizaciones del trabajador.* Ninguna categoría de trabajadores puede ser excluida del derecho de establecer y/o de pertenecer a un sindicato, excepto el ejército y las fuerzas policiales.
- v4 *Pluralismo sindical.* La ley debe poner en marcha un sistema que permita el pluralismo sindical, es decir la presencia de varios sindicatos.
- v6 *Elecciones de representantes/ Criterio de elegibilidad.* Los representantes sindicales deben poder ser elegidos en total libertad, sin restricciones de empleo o de nacionalidad, por ejemplo.
- v7 *Organización de las actividades sindicales.* Los sindicatos deben ser libres para organizar sus actividades y formular sus programas sin interferencia del Estado. Los sindicatos deben beneficiarse de una protección adecuada de su derecho de propiedad y de su independencia administrativa.
- v8 *Registro de las organizaciones de trabajadores.* El establecimiento y el registro de los sindicatos no deben estar sometidos a formalidades o a controles excesivos. Los sindicatos deben tener derecho a decidir su reglamento interno.
- v9 *Restricciones de los derechos a la acción sindical.* El derecho a la acción sindical no puede ser prohibido o restringido excepto en caso de crisis nacional grave, para los trabajadores de los servicios esenciales en el sentido estricto del término y los funcionarios que ejerzan una autoridad en nombre del Estado.

---

Tab. 1: Descripción de los tipos de violación del convenio 87

---

Convenio 98

- w1 *Discriminación antisindical*. La legislación debe aplicar sanciones suficientemente disuasorias contra la discriminación sindical.
  - w2 *Actos de injerencia*. La legislación debe aplicar sanciones suficientemente disuasorias contra la injerencia de los patronos en las organizaciones sindicales.
  - w5 *Exclusión del derecho a la negociación colectiva*. Todos los trabajadores sin distinciones deben poder beneficiarse del derecho a la negociación colectiva.
  
  - w6 *Designación del agente de negociación/ Criterios de representatividad de los sindicatos*. Los derechos a la negociación colectiva de los sindicatos no deben estar sujetos a condiciones excesivas. La designación del sindicato más representativo debe estar establecida según criterios objetivos.
  - w8 *Restricción sobre los dominios negociables / aprobación y registro de los convenios colectivos*. Las partes deben tener derecho a determinar los dominios negociables. La aprobación y el registro de los convenios colectivos no deben poder ser denegados, excepto por problemas de forma o si sus términos están en conflicto con los mínimos estándares fijados por el derecho del trabajo.
- 

Tab. 2: Descripción de los tipos de violación del convenio 98

El procedimiento de análisis automático de textos seguido tenía como objetivo obtener reglas de predicción que pudiesen ser empleadas por los expertos del campo no especialistas en este análisis automático de textos. La elección ha conducido así un enfoque en el cual las reglas pueden aplicarse sobre textos en bruto sin pretratamiento (sin marcaje gramatical, sin lematización ...). El marcaje gramatical ha sido sin embargo explotado en la fase de aprendizaje para identificar conceptos descriptores de textos. Éstos, definidos cada uno en forma de una lista de términos representativos, han sido efectivamente establecidos agrupando, en estrecha colaboración con los expertos en el tema, las expresiones características de los textos. Los descriptores han sido cuantificados con su *tf $\times$ idf*, y las reglas de predicción han sido obtenidas por medio de árboles de inducción. Para más detalle, ver Ritschard y al. (2007).

Las predicciones obtenidas con las reglas elaboradas de este modo no están evidentemente exentas de errores. La tabla 3 presenta a título de ejemplo las tasas de errores obtenidas para cada tipo de violación del convenio n° 87.

Violación	Tasa de error en aprendizaje	Tasa de error en validación cruzada	Error estándar de la validación cruzada	Número de errores sobre la muestra test (talla 21)
v3	14.10%	n.d.*	n.d.*	3
v4	5.13%	5.13%	2.50%	0
v6	12.82%	14.1%	3.94%	4
v7	15.38%	n.d.*	n.d.*	7
v8	7.69%	7.69%	3.01%	4
v9	2.56%	2.56%	1.79%	2

\* no disponible ya que el primer nudo ha sido elegido teóricamente

Tab. 3: *Tasa de error de clasificación de los informes del CEACR sobre el convenio n° 87.*

Las tasas de errores resultan, en particular para las violaciones v3, v6 y v7, relativamente consecuentes, y ocurre lo mismo para las de las violaciones del convenio n° 98. Esto es evidentemente incomodo desde el punto de vista de la fiabilidad de las predicciones individuales para un país dado. Sin embargo, utilizamos aquí las predicciones surgidas del análisis automático de textos para hacer un análisis sintético del conjunto de países, con el objetivo de facilitar en particular « regímenes » de diálogo social. En esta perspectiva de agregación, se puede pensar de manera razonable que los errores, compensándose los unos con los otros, afectan sólo de manera limitada las tendencias que buscamos establecer. Resaltemos, por otro lado, que estos datos constituyen una de las primeras fuentes de información tan detallada sobre este tema.

Las menciones de la violación de la aplicación del convenio n° 87 muestran una cierta inercia. Cuando un problema es identificado por el CEACR, puede pasar cierto tiempo hasta que éste sea reportado en los informes. Así, cuando un problema es enunciado, esto no significa que el problema haya aparecido en ese momento, sino más bien que el CEACR ha decidido por diversos motivos mencionarlo. Además, el CEACR no hace sistemáticamente un informe por año y por país, sino que lo más habitual es, un informe cada dos años. La ausencia de informe en un periodo largo significa igualmente la ausencia de problemas en este periodo. De este modo, no es posible basarse únicamente en los informes publicados en un año dado para tener una descripción de la situación. Hemos decidido pues hacer nuestro análisis sobre el conjunto de los informes publicados durante el periodo 1997-2002. Hemos asignado a cada país y para cada tipo de

violación, la probabilidad máxima (predicha) de la violación durante el periodo 1997-2002. Para limitar el número de falsos positivos, hemos decidido predecir la presencia de la violación  $j$  en un país dado cuando esta probabilidad máxima sobrepase el 80%. La tabla 4 muestra los porcentajes de países para los cuales hemos predicho cada una de las violaciones. Los porcentajes están calculados sobre la base del número de países afectados, es decir los que han firmado el convenio.

Violación	Porcentaje de países
v3 Derecho de establecer y de pertenecer a las organizaciones del trabajador	36.9%
v4 Pluralismo sindical	22.7%
v6 Elección de representantes/ Criterios de elegibilidad	31.9%
v7 Organización de las actividades sindicales	23.4%
v8 Registro de las organizaciones de trabajadores	28.4%
v9 Restricciones de los derechos a la acción sindical	61.0%

Tab. 4: *Porcentajes de países afectados por cada tipo de violación para el convenio 87.*

La situación es la misma para los informes del convenio 98, por lo que hemos seguido un procedimiento idéntico. Distinguimos en este convenio cinco tipos de violaciones diferentes. De manera general, parece haber menos violaciones de este convenio que del anterior. En efecto, los porcentajes de países afectados por cada tipo de violación son mucho más bajos. Del mismo modo, el porcentaje de países que no sufren ninguna violación es más elevado en el caso del convenio 98 (60%) que para el 87 (34%) incluso cuando hay más países firmantes del convenio 98.

Violación	Porcentaje de países
w1 Discriminación antisindical	25.6%
w2 Actos de injerencias	15.4%
w5 Exclusión del derecho a la negociación colectiva	18.6%
w6 Designación del agente de negociación/ Criterios de representatividad de los sindicatos	10.3%
w8 Restricción sobre los dominios negociables/ aprobación y registro de los convenios colectivos	6.4%

Tab. 5: *Porcentajes de países afectados por cada tipo de violación para el convenio 98.*

### 3 Análisis

Nos proponemos comparar los resultados de varios métodos de estadística exploratoria, entre los que se encuentra el ASI, con el fin de subrayar su complementariedad. Así, procedemos en primer lugar a un análisis por clasificación automática de los países, con el objetivo de identificar los conjuntos lógicos o sistemas de violaciones características de los grupos de países así puestos en evidencia. Presentamos a continuación un análisis factorial de correspondencias múltiples para intentar comprender las dimensiones que fundamentan esta lógica. Discutimos del mismo modo un análisis en forma de grafo implicativo que aporta un esclarecimiento complementario que permite estructurar mejor las relaciones entre los tipos de violaciones. Finalmente, examinamos estos vínculos bajo la óptica de reagrupamientos jerárquicos orientados y no orientados.

Focalizamos nuestra presentación en los resultados obtenidos para el análisis de las violaciones del convenio n° 87 que aporta resultados más interesantes, y comentamos mucho más brevemente los obtenidos para el convenio n° 98.

#### 3.1 Tipología de países

Con el fin de acotar mejor los sistemas legales existentes, hemos elegido efectuar un análisis de clasificación automática de los individuos, de los países en nuestro caso, con la intención de constituir una tipología. Este análisis tiene como objetivo reagrupar los países para los que el análisis automático de textos indica unas situaciones parecidas en términos de violaciones del convenio. De este modo, buscamos identificar sistemas. Hemos efectuado los análisis con SPSS de manera

separada para los convenios n° 87 y 98, ya que los países no tienen necesariamente firmados los dos convenios. Presentamos aquí el análisis para el convenio n° 87. Hemos efectuado este análisis en dos etapas. Primero, hemos extraído los factores principales con ayuda de un análisis factorial de correspondencias múltiples (Greenacre, 1993, Lebart y al., 200). En segundo lugar, hemos identificado los grupos utilizando un método de aglomeración jerárquica con el criterio de Ward (Anderberg, 1973; Lebart y al., 2000) basado en las seis dimensiones factoriales. El estudio del esquema de aglomeración nos muestra que la parte más importante de la reducción de la inercia intra-clase se obtiene con una partición en cuatro grupos. Para ésta, la inercia intra-clase se reduce en más del 60%.

La tabla 6 da los porcentajes de miembros de cada grupo que, siempre bajo la óptica del análisis automático de texto, están afectados por las violaciones.

Resaltamos que los cuatro grupos parecen relativamente equilibrados ya que el más importante agrupa el 36% de los casos contra el 13% para el que contiene el mínimo de países.

Los valores de la  $v$  de Cramer nos indican que la descomposición en cuatro grupos está fuertemente ligada a cada tipo de violación. De hecho, se ve claramente que los porcentajes de países afectados por cada violación varían fuertemente de un grupo a otro. Las violaciones  $v_9$ ,  $v_7$ ,  $v_6$  y  $v_4$  muestran la asociación más fuerte con la partición realizada.

La interpretación del primer grupo es bastante directa. En efecto, agrupa los países que no padecen ninguna violación. Los grupos siguientes nos permiten identificar tres tipos de sistemas legales que violan los derechos fundamentales definidos en el convenio n° 87.

El segundo grupo reúne los países que sufren violaciones del pluralismo sindical sin sufrir sin embargo obligaciones excesivas sobre la organización de sus actividades. Estos países parecen tener igualmente y ligeramente con más frecuencia condiciones excesivas en los procedimientos de registro de nuevos sindicatos. Esto parece relativamente lógico ya que se trata de uno de los métodos para establecer un monopolio sindical. Existe así una manera de control de las asociaciones de trabajadores.

El tercer grupo reúne los países que ponen restricciones a los derechos a la acción sindical (violación  $v_9$ ) al igual que, en menor medida, al derecho a establecer y a pertenecer a sindicatos. Otros tipos de violaciones pueden coexistir pero los porcentajes son generalmente inferiores a la situación general. Existe así una forma de control sobre las posibilidades de acción de los sindicatos.

Violaciones de convenios de la OIT: ASI de resultados de una búsqueda de textos

Violación	Grupo					
	Ninguna violación	Restricción sobre el pluralismo sindical	Restricciones sobre la acción	Restricciones organizacionales y sobre la acción	Total	$\chi^2$ de Cramer
v3 Derecho de establecer y de pertenecer a las organizaciones del trabajador	0%	38.9%	51.1%	81.5%	36.9%	0.64
v4 Pluralismo sindical	0%	100%	0.0%	51.9%	22.7%	0.85
v6 Elección de representantes/ Criterio de elegibilidad	3.9%	33.3%	22.2%	100%	31.9%	0.74
v7 Independencia administrativa y organización de las actividades sindicales	2.0%	0.0%	11.1%	100%	23.4%	0.89
v8 Registro de las organizaciones de trabajadores	0%	44.4%	26.7%	74.1%	28.4%	0.60
v9 Restricción de los derechos a la acción sindical	0%	88.9%	95.6%	100%	61.0%	0.94
Porcentaje de países en el grupo	36.2%	12.8%	31.9%	19.1%	100%	
Número medio de violaciones	0.06	3.06	2.07	5.07	2.04	

Tab. 6: Resultados de la clasificación automática.

Finalmente, en el último grupo, observamos unos porcentajes elevados para cada tipo de violación. El número medio de violaciones se sitúa en cinco sobre un máximo de seis. Si comparamos este grupo a la situación general, las violaciones v6 (elección de representantes) y v7 (independencia administrativa y organización de las actividades sindicales) parecen ser las más presentes. Así, en este grupo de países, los gobiernos parecen privilegiar una manera de control de la administración y de las actividades internas de los sindicatos. Esta manera de control parece generalmente ir de la mano con otros tipos de violaciones que, exceptuando la violación v4 del pluralismo sindical, presentan todos los porcentajes más elevados en este grupo.

Estos grupos nos permiten pues distinguir tres tipos de sistemas legales que violan el convenio n° 87: el establecimiento de un monopolio sindical, las restricciones sobre la acción sindical y una manera de control de las actividades internas de los sindicatos.

### **3.2 Análisis factorial de correspondencias múltiples**

Hemos construido los grupos sobre la base de los factores de un análisis de correspondencias múltiples. Las figuras 1 y 2 presentan sus posiciones respecto a los tipos de violaciones en el espacio de las tres primeras dimensiones. Los redondeles llenos indican la posición de las violaciones y los vacíos la de su ausencia. Los rombos permiten localizar los grupos (clusters). Finalmente, hemos añadido también las posiciones medias de cada región de los países firmantes del convenio n° 87. El gráfico de la figura 1 permite considerar la primera dimensión respecto a la segunda, el de la figura 2 muestra la tercera dimensión en ordenadas.



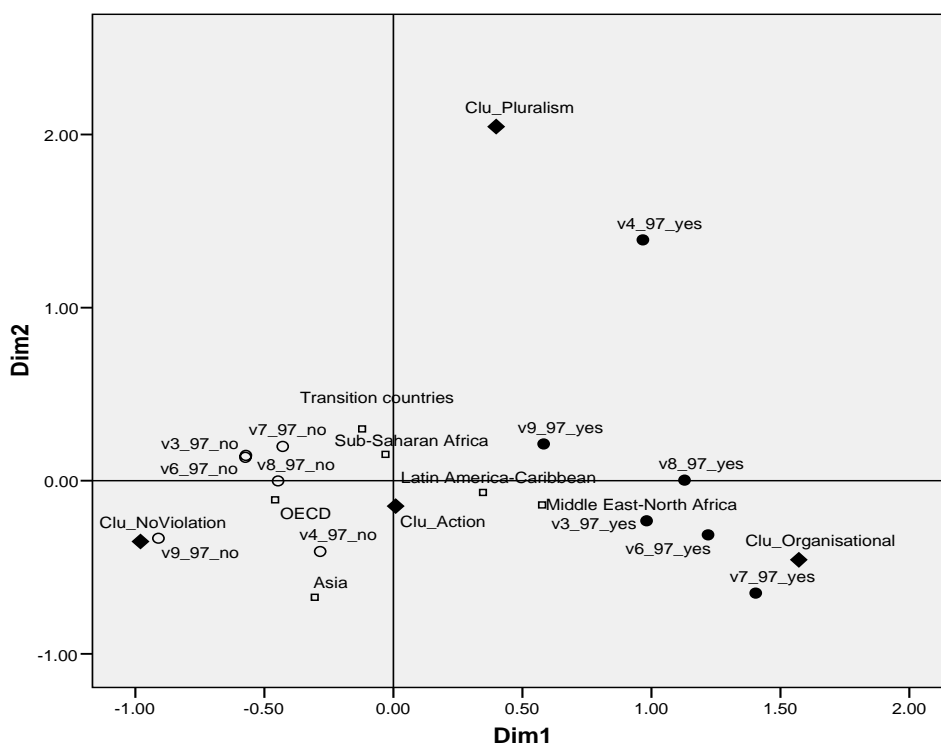


Fig. 1: Representaciones de las violaciones en el espacio de las dos primeras dimensiones+.

Observamos así que la primera dimensión opone la presencia (a la derecha) a la ausencia de violaciones. De este modo, el cluster sin violación es el punto que queda más a la izquierda y se opone al cluster con el máximo de violaciones (restricción organizacional). Esta dimensión está pues fuertemente correlacionada con el número total de violaciones diferentes sufridas por un país ( $\rho=0.998$ ;  $p<0.0001$ ). De este modo pone un “orden” de aparición de las violaciones. La violación v9, la más frecuente, se encuentra lo más a la izquierda posible mientras que la más rara (violación v7) se encuentra lo más a la derecha posible. Esta dimensión reproduce la mayor parte de la variación observada (52.9%). La segunda dimensión explica una parte claramente menor (14.1%). Parece poner en evidencia una oposición entre las violaciones v3, v6 y v7 y la violación v4. Así, el cluster

“pluralismo” se opone a los demás según este eje. En la figura 2, se observa que la tercera dimensión (11.8% de la variación) pone en evidencia el cluster “restricción de la acción sindical” respecto a los otros.

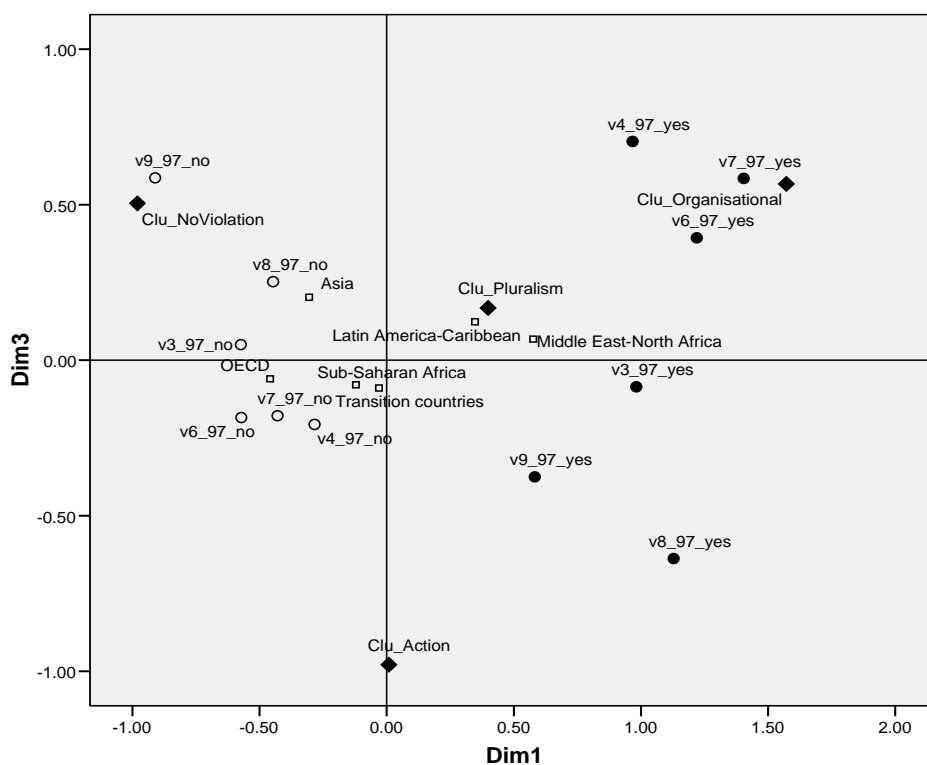


Fig. 2: Representación de las violaciones en el espacio de la primera y la tercera dimensión.

Es interesante observar las posiciones medias de las regiones. Dos motivos pueden llevarnos a pensar que existe una unión entre las violaciones y las regiones. Primero, pueden existir formas de culturas políticas según las regiones que deberían repercutir en los tipos de sistemas legales. Segundo, se sabe que los sindicatos de ciertas regiones, sobre todo los de Latinoamérica, recurren más fácilmente a la OIT en el marco de sus acciones políticas (Kucera, 2004). Así,

podemos esperar más menciones de violaciones en sus informes. Es lo que observamos, ya que estos países (aquí agrupados con los países caribeños) tienen una posición media positiva en la primera dimensión que está, como hemos visto, fuertemente correlacionada con el número de violaciones. Observamos una situación similar, aunque más marcada, para los países de Oriente Medio y de África del Norte que parecen padecer, de media, más violaciones del convenio n° 87 que los otros grupos regionales. Estas regiones parecen más próximas a las violaciones “organizacionales” que los otros grupos. Es igualmente interesante remarcar la posición de los países de la OCDE que se sitúan a la izquierda (cerca del cluster sin violaciones). Esto no representa realmente una sorpresa y era esperado. Podemos señalar igualmente que los países asiáticos parecen sufrir menos frecuentemente violaciones del convenio 87. Esto sólo concierne evidentemente a los países que han firmado el convenio y que son relativamente poco numerosos en esta zona asiática.

### **3.3 Grafo implicativo**

Para comprender mejor las relaciones entre los tipos de violaciones que resaltan de los análisis precedentes, es interesante examinar los grafos de implicación de la figura 3 obtenidos con el programa CHIC (Couturier y Gras, 2005, Couturier et al., 2006). Estos grafos han sido construidos con la medida de implicación “entrópica” que es más discriminante. En el grafo de la izquierda, se puede observar las relaciones entre las violaciones. Volvemos a encontrar aquí implicaciones entre violaciones que corresponden a las relaciones mostradas en el cuadro del análisis de cluster. Por ejemplo, la violación n° 7 implica las violaciones 6 y 9, lo que se puede relacionar con el hecho de que estas tres violaciones formaban la base del cluster “restricciones organizacionales y sobre la acción”. Sin embargo, el sentido de las relaciones está claramente mostrado aquí, lo que las hace interpretables más directamente. Así, las restricciones de la acción sindical constituyen las violaciones más frecuentes y, en muchos casos, la presencia de otro tipo de violación parece implicar la violación v9. Este resultado aparecía de manera mucho menos clara en el análisis factorial de correspondencias múltiples, ya que esta violación mostraba un valor relativamente bajo en el primer eje, fuertemente correlacionado con el número medio de violaciones. Resaltaremos igualmente de manera inmediata que parecen no existir sistemas propiamente dichos entre los otros tipos de violaciones. Era lo que encontrábamos en el cluster “restricción de la acción sindical”. Señalemos sin embargo que es difícil identificar grupos que permitirían extraer tipos, o la presencia de meta-reglas.

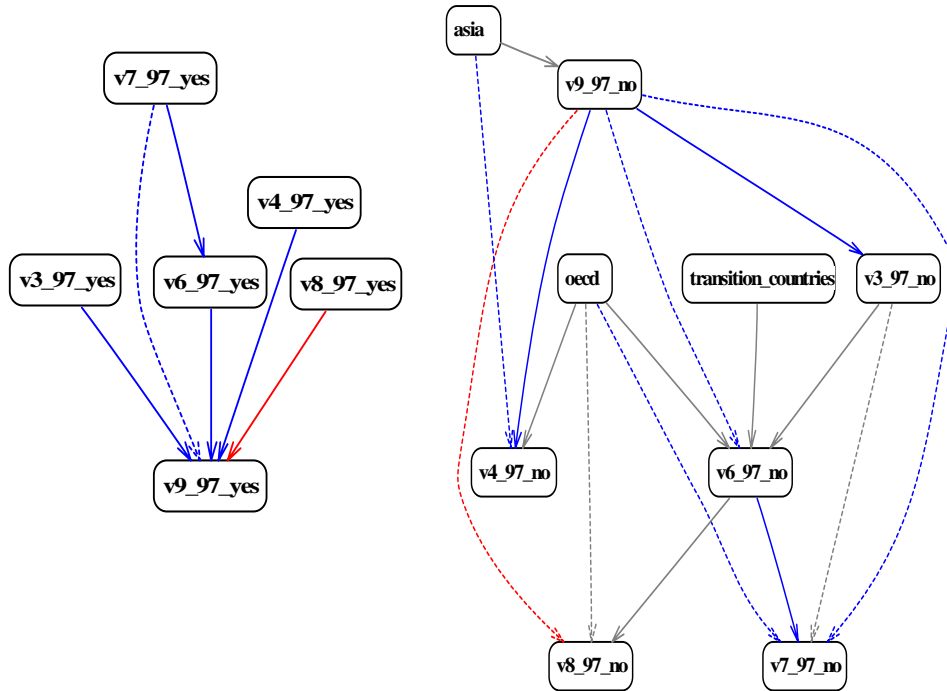


Fig. 3: Grafo implicativo de las violaciones del convenio n° 87. Umbrales retenidos 99% (rojo), 95% (azul). En el grafo de la derecha 75% (gris).

Ninguna relación de presencias de violaciones con las regiones es significativa con los diferentes umbrales retenidos. Hemos pues creado un nuevo grafo sobre la base de las ausencias de violación (grafo de la derecha). En éste, hemos conservado los umbrales más bajos añadiendo en gris las relaciones en el umbral del 75%. Si nos quedamos en la presencia-ausencia de violaciones, los dos grafos son muy similares, el de la derecha ofrece sin embargo una versión “inversa” a la del de la izquierda. Así, si la presencia de la violación v7 (organización de las actividades) implica la violación v9 (derecho sobre la acción sindical), la ausencia de la violación v9 implica la ausencia de la violación v7 en el grafo de la derecha. Este resultado es trivial ya que está construido sobre la base de datos exactamente

inversos.

Sin embargo, además de las relaciones entre las ausencias de violaciones, el grafo de la derecha permite aclarar relaciones interesantes con las regiones. Así, pertenecer a los países miembros de la OCDE parece implicar no tener restricciones excesivas sobre la organización y la administración interna de los sindicatos (violación v7). Se observa igualmente, pero con un umbral del 75% únicamente, una relación similar con la ausencia de monopolios sindicales (violación v4), los procedimientos de registro (violación v8) o los procedimientos de designación de los representantes sindicales (violación v6). Así, volvemos a encontrar los resultados precedentes, pero de manera mucho más exacta, ya que están ligados a las violaciones específicas. Los países en transición (ex-Unión Soviética) no parecen tener restricciones sobre los criterios de elección de representantes sindicales. Destaquemos finalmente que los países firmantes asiáticos (relativamente poco numerosos) no parecen sufrir violaciones del derecho a la acción sindical o monopolios sindicales. Las relaciones entre regiones y la ausencia de violaciones refuerzan lo que habíamos observado en el marco del análisis factorial de correspondencias múltiples. De hecho, este segundo gráfico nos precisa el sentido de las relaciones que observábamos para los valores negativos de la primera dimensión del análisis factorial de correspondencias.

Este segundo grafo nos muestra la importancia de tomar en consideración la “ausencia” en los grafos implicativos. En efecto, en el caso que nos interesa, podemos dar un sentido a “ausencia de violación”. Desde ese momento, las relaciones que están ligadas a esta ausencia nos interesan del mismo modo ya que denotan una forma de implicación “negativa” (en el sentido de correlación negativa).

Caminos	Países Caribeños y Latinoamericanos	Oriente Medio y África del Norte	Asia	OCDE
v7_97_yes → v6_97_yes → v9_97_yes	*	**		
v7_97_yes → v6_97_yes		**		
v7_97_yes → v9_97_yes		**		
v6_97_yes → v9_97_yes	**			
v4_97_yes → v9_97_yes				
v3_97_yes → v9_97_yes		*		
v8_97_yes → v9_97_yes		*		
<i>Ausencia de violación</i>				
v9_97_no → v4_97_no			**	*
v9_97_no → v6_97_no			**	*
v9_97_no → v7_97_no			**	*
v9_97_no → v6_97_no			**	*
v6_97_no → v7_97_no				**
v9_97_no → v8_97_no			**	**
v9_97_no → v3_97_no			**	

Un asterisco indica una tipicalidad con un riesgo del 10%, dos asteriscos del 5% y tres asteriscos de 1%.

Tab. 7: *Tipicalidad de las variables suplementarias por camino.*

Destaquemos que no encontramos las regiones en el grafo implicativo de las ausencias de violación. Habría habido que introducir para ello las variables de tipo “no OCDE”, lo cual no tenía demasiado sentido. Sin embargo, si consideramos las regiones como variables suplementarias, constatamos que dos regiones son típicas de las implicaciones entre violaciones y de manera más general de “caminos de violaciones”. Dicho de otro modo, ciertas implicaciones entre violaciones aparecen más frecuentemente en ciertas regiones antes que en otras. Los países de Oriente Medio y de África del Norte al igual que los países Caribeños y Latinoamericanos parecen relativamente típicos del camino “v7→v6→v9”. Esto también corresponde con las observaciones hechas en el análisis factorial de correspondencias múltiples sobre la relación entre estas tres variables y estas regiones. Vemos sin embargo aquí que están más afectados los caminos de

implicación entre estas violaciones que las violaciones en sí mismas.

De manera similar, si observamos las relaciones entre ausencias de violaciones, notaremos que los países firmantes de Asia al igual que los de la OCDE parecen estar menos sujetos a ciertas implicaciones entre violaciones. Así, los países de la OCDE son típicos de la situación en la cual la ausencia de la violación v6 va acompañada de la ausencia de la v7, al igual que ocurre entre las ausencias de violaciones v9 (acción sindical) y v8 (procedimientos de registro de los sindicatos). La interpretación de la tipicidad de los países de Asia es más problemática ya que en comparación han firmado el convenio pocos países. La explicación puede ser que los países asiáticos tienden a firmar el convenio únicamente a partir del momento en el cual ya no existen problemas legales con éste.

Mirando las tipicidades de los caminos, hemos puesto de nuevo en evidencia la importancia de tomar en consideración las negaciones, las “ausencias” en nuestro caso, a partir del momento en el cual éstas cobran sentido. En efecto, las variables suplementarias pueden ser típicas de caminos entre negaciones. Las relaciones que hemos puesto en evidencia no son las mismas que en el análisis entre “presencias”.

### **3.4 Agrupación jerárquica de las violaciones**

Hemos procedido igualmente a varios tipos de agrupaciones jerárquicas de las violaciones. La figura 4 nos muestra el árbol cohesitivo para violaciones del convenio n° 87. Volvemos a encontrar aquí en los dos primeros niveles las dos principales implicaciones del grafo implicativo. Así, la presencia de la violación v7 (organización de las actividades) parece implicar la de la sexta (elección). Ocurre igual entre las violaciones v8 (procedimiento de registro de los sindicatos) y v9 (derecho a la acción sindical). El árbol nos aporta sin embargo una información suplementaria ya que pone en evidencia una meta-regla, la relación entre la implicación de la violación v7 hacia la v6 que implica la presencia de la tercera violación. Este resultado concuerda con el análisis en cluster de los países (tabla 6), en el cual habíamos observado que todos los miembros del cluster “restricciones organizacionales y sobre la acción sindical” padecían simultáneamente las violaciones v6 y v7. Los países miembros de este cluster sufren igualmente la violación v3 (establecer y pertenecer a sindicatos) más a menudo. Teniendo en cuenta la relativa proximidad de v3 y v9, que se observa en el grafo de implicación, pero también en las figuras 1 y 2, eventualmente habríamos podido esperar ver a v3 formar una meta-regla con v8→v9. Teniendo en cuenta la estructura jerárquica, evidentemente esto ya no es posible tras haber agrupado v3 con v7→v6. Estas

limitaciones de la presentación jerárquica pueden a veces enmascarar informaciones importantes. A título de ejemplo, mencionemos que si quitamos la variable v3 en el árbol de la figura 4, vemos aparecer en lugar de la meta-regla  $(v7 \rightarrow v6) \rightarrow v3$ , la meta-regla significativa  $(v7 \rightarrow v6) \rightarrow (v8 \rightarrow v9)$ . Este tipo de efecto enmascarado no es evidentemente propio del árbol cohesitivo, pero concierne a todas las presentaciones arborescentes.

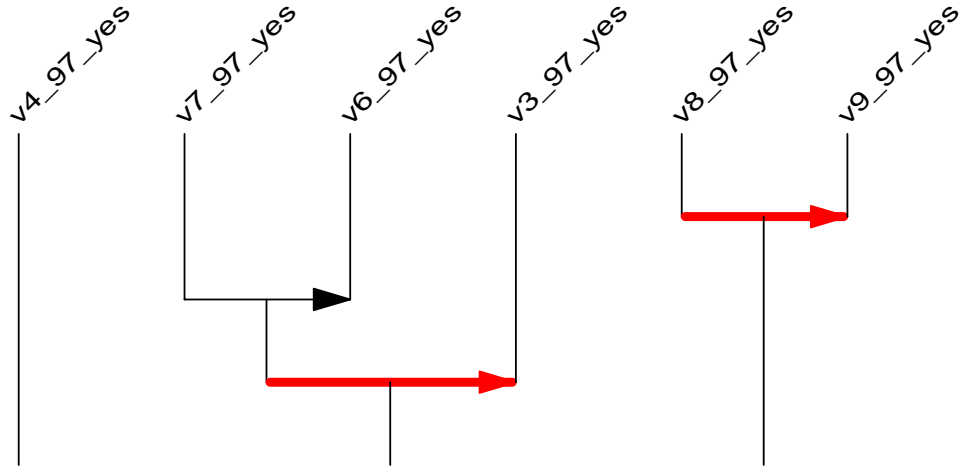


Fig. 4: *Árbol cohesitivo de las violaciones del convenio n° 87.*

La figura 5 presenta el árbol de las similitudes de las violaciones del convenio 87. Aquí de nuevo, las relaciones dos a dos son conformes a lo que habíamos puesto en evidencia previamente. Observemos que la violación v3 se asocia aquí a la conjunción de las violaciones v8 y v9, y no como en el árbol cohesitivo con v6 y v7.

A título comparativo, hemos realizado también con SPSS una clasificación automática de las variables (es decir de las violaciones). Hemos empleado un procedimiento de aglomeración jerárquica según el criterio de la distancia media, las proximidades entre variables siendo evaluadas por la correlación de Pearson. El resultado viene dado en la figura 6. Aquí de nuevo, las reagrupaciones dos a dos son las mismas, asociándose a continuación la violación v3 con v6 y v7 como en el árbol cohesitivo. Respecto a los árboles jerárquicos producidos por CHIC, notemos que podemos evaluar aquí la calidad de las reagrupaciones efectuadas según el tamaño de sus ramas. Sin embargo, es más difícil interpretar las asociaciones entre



grupos ya que éstos son unas especies de agregaciones de distancias dos a dos entre variables.

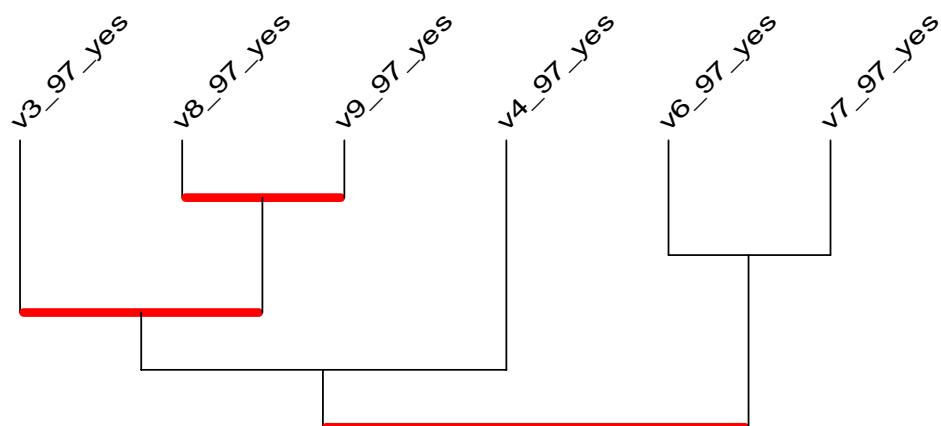


Fig. 5: *Árbol de similitud de las violaciones del convenio n° 87.*

Sorprendentemente, el resultado obtenido en la figura 6 se asemeja más al árbol cohesitivo (figura 4) construido sobre la base de asociaciones asimétricas, que al árbol de similitud (figura 5). Podemos así preguntarnos en qué medida las agrupaciones obtenidas resistirían a pequeñas perturbaciones de los datos. De manera más general, esto plantea la pregunta de la estabilidad y de la robustez de las soluciones obtenidas.

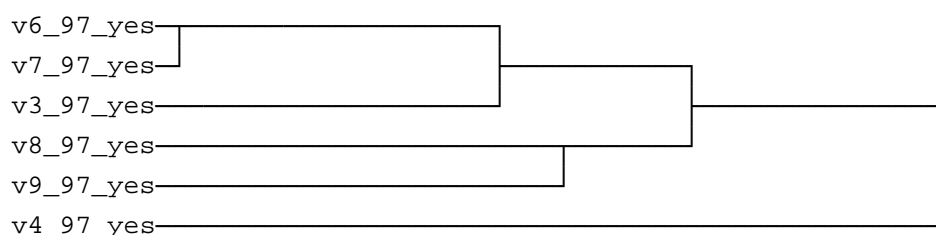


Fig. 6: *Dendograma de la clasificación automática de las violaciones del convenio n° 87 (aglomeración jerárquica según el criterio de la distancia media, distancia fundamentada sobre la correlación de Pearson).*

### **3.5 Violaciones del convenio n° 98**

Hemos efectuado los mismos análisis para el convenio n° 98 que trata de las relaciones entre sindicatos y patronos, así como de las condiciones marco necesarias para la negociación colectiva. Sin embargo, no hemos podido identificar ninguna organización clara de las violaciones entre ellas. Así, los grupos salidos de la clasificación automática parecen articularse principalmente alrededor de la presencia de un sólo tipo de violación por grupo. Del mismo modo, en el análisis factorial de correspondencias múltiples, tenemos más o menos una dimensión por cada tipo de violación. En este marco, el grafo implicativo tiene la ventaja de mostrar muy claramente esta ausencia de relación entre las violaciones ya que no se muestra ninguna implicación salvo las que tienen umbrales muy bajos.

## **4 Conclusión**

En este artículo, hemos intentado despejar las lógicas de articulación entre diversos tipos de violaciones del derecho sindical garantizado por los convenios n° 87 y 98 de la OIT. Nos hemos basado para ello en una fuente de datos única que es el resultado de una búsqueda automática en los informes de la Comisión de expertos encargada de observar la aplicación de los convenios (CEACR).

Nuestros resultados muestran como el análisis estadístico implicativo viene a completar de manera ventajosa los análisis de datos clásicos, y en particular la clasificación automática de los casos y el análisis factorial de correspondencias múltiples. En particular, el análisis implicativo nos aporta una información valiosa sobre la dirección de estas relaciones. Es gracias a él que hemos visto emerger la lógica sistemática que buscábamos para describir la articulación de nuestras violaciones. Así, hemos observado que las violaciones que afectan a la organización interna de los sindicatos parecen formar un sistema. Hemos observado así mismo que los diferentes tipos de violaciones parecen implicar una forma de restricción del derecho a la acción sindical.

Nuestro análisis nos ha llevado también a destacar dos aspectos importantes sobre el plano metodológico. El primero es la importancia de considerar a los negativos como variables. En nuestro caso, siendo las variables la presencia de diversas violaciones, sus negativos son las ausencias. Si a priori podríamos esperar observar simplemente implicaciones inversas entre los negativos, aparece sin embargo que el hecho de tomarlos en consideración hace que aparezcan relaciones con otras variables, las regiones en nuestro caso, no ligadas a los valores positivos. El segundo punto concierne a la estabilidad de las representaciones obtenidas. En

efecto, nuestra discusión, sobre todo de las agrupaciones de violaciones, nos permite pensar que ciertos resultados podrían ser sensibles a perturbaciones débiles de los datos. Parecería pues útil el poder disponer de un indicador de la robustez de la estructura obtenida.

## Bibliografía

- Anderberg, M. (1973). *Cluster Analysis for Application*. New York: Academic Press, 1973.
- Baccaro, L.; Bonvin, J.-M.; Lavieq, J.-P.; O'Donovan, P.; Ritschard, G.; Zighed, D. A. (2003). Social dialogue regimes: An investigation in the structural determinants and socioeconomic outcomes of negotiated regulation. Research proposal supported financially by the Geneva International Academic Network (GIAN).
- Couturier, R.; Bodin, A.; Gras, R. (2006). CHIC v3.7 Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive. Guide d'utilisation, Ecole Polytechnique, Université, Nantes.
- Couturier, R.; Gras, R. (2005). CHIC : traitement de données avec l'analyse implicative. In S. Pinson and N. Vincent (Eds.), *Extraction et Gestion des Connaissances (EGC 2005)*, Volume E-3 of *Revue des nouvelles technologies de l'information RNTI*, pp. 679–684. Cépaduès.
- Gras, R. (2005). Panorama du développement de l'ASI à partir de situations fondatrices. In R. Gras, F. Spagnolo, and J. David (Eds.), *Actes des Troisièmes Rencontres Internationale ASI Analyse Statistique Implicative*, Volume Secondo supplemento al N.15 of *Quaderni di Ricerca in Didattica*, pp. 9–33. Palermo : Università degli Studi di Palermo.
- Gras, R.; Ag Almouloud, S.; Bailleul, M.; Laher, A.; Polo, M.; Ratsimba-Rajohn, H.; Totohasina, A. (1996). *L'implication statistique : Nouvelle méthode exploratoire de données*. Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée sauvage.
- Greenacre, M. (1993). *Correspondence analysis in practice*. London: Academic Press, 1993.
- Kucera, D. (2004), Measuring trade union rights: a country-level indicator constructed from coding violations recorded in textual sources, Policy Integration Department, Statistical Development and Analysis Unit, International Labour Office, Working Paper n°50.

Studer et al.

Lebart, L.; Morineau, A.; Piron, M. (2000). *Statistique exploratoire multivariée* (Troisième ed.). Paris: Dunod, 2000.

Ritschard, G.; Zighed, D. A.; Baccaro, L.; Georgiou, I.; Pisetta, V.; Studer, M. (2007). Mining expert comments on the application of ILO conventions on freedom of association and collective bargaining. Internal report, University of Geneva.