

LAS MATEMATICAS Y LA TIPOLOGIA DE LOS BIFACES METODO GRAFICO DE CLASIFICACION

JOAN O. OLARIA

Con la fórmula

$$b = \frac{L}{a} - 0,04575 \frac{n}{m} 100 \quad (1)$$

Bordes¹ se propuso resolver la clasificación de los bifaces, de modo que, si

$$\begin{aligned} b \geq 0,975 & \quad \text{se trataría de un bifaz triangular;} \\ 0,975 > b \geq -0,325 & \quad \text{se trataría de un bifaz subtriangular;} \\ -0,325 > b \geq -1,625 & \quad \text{se trataría de un bifaz cordiforme.} \end{aligned}$$

Los valores de L, a, n, m son los de las medidas que se toman de la pieza, según muestra la figura 1.

El índice b, tal como viene expresado en la fórmula (1), es igual a la diferencia de dos términos: el primero, enfoca la triangularidad del bifaz; el segundo término "expresa el redondeo de los lados del bifaz" (con palabras del mismo Bordes), es decir: su cordiformidad. Pero, al mismo tiempo $\frac{L}{a}$ tiende a medir la cordiformidad (valores pequeños de $\frac{L}{a}$), y $0,04575 \frac{n}{m} 100$, la triangularidad (valores grandes de este término). O sea, que se trasluce en ellos la unidad de los contrarios y, como términos antitéticos que son, no pueden reunirse más que con signos opuestos. A este tratamiento matemático no cabe hacer objeción alguna, ya que todo bifaz tiene a la vez algo de triangularidad y algo de cordiformidad. Sin embargo, parece que satisface más a la razón que la expresión de la triangularidad se presente como la suma de las triangularidades de las partes media e inferior de la pieza. Así, pues, siguiendo el modo de operar de Bordes se puede establecer la fórmula

$$c = \frac{L}{a} + 5 \frac{m}{n} \quad (2)$$

que da un índice c aplicable, con las mismas peculiaridades de b, a la clasificación de los bifaces, con los siguientes límites:

$$\begin{aligned} c \geq 10,8 & \quad \text{bifaz triangular,} \\ 10,8 > c \geq 9,5 & \quad \text{bifaz subtriangular,} \\ 9,5 > c & \quad \text{bifaz cordiforme.} \end{aligned}$$

Véanse los índices calculados en el Cuadro I, correspondientes a 17 de las 18 piezas de la figura 8 de la *Typologie de Bordes* (núms. 2, 3, 4 y 5).

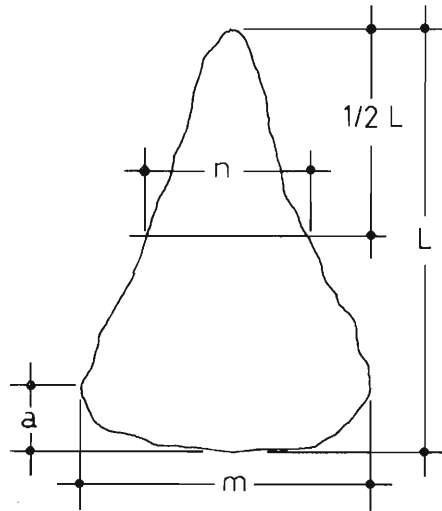


Fig. 1

Ihm (que dice que “*el hombre diferencia mucho mejor los bifaces triangulares y cordiformes que el índice de Bordes*”) recurre a un procedimiento basado en el “*Scaling*” (cuyo punto de partida es una encuesta), que aplica a las mismas 17 piezas citadas. A este fin, pide su opinión sobre la mayor o menor triangularidad de aquéllas a ocho expertos, “*insuficientes para una buena experiencia en la que su número ha de ser, por lo menos, de 20 a 30*”.²

El estimador de la triangularidad que así obtiene, \hat{s} , da para aquellas 17 piezas los valores que figuran en el Cuadro I, los cuales adoptamos en el presente estudio como la referencia más ajustada a una correcta clasificación. Interesa, pues, comparar los índices b y c con \hat{s} . En la figura 2 se muestra esta comparación ilustrada con las rectas de regresión mínimo-cuadrática de b sobre \hat{s} y de c sobre \hat{s} . Estas rectas tienen las siguientes ecuaciones:

$$b = 1.93 + 0,247 \hat{s}$$

y

$$c = 11.941 + 0,281 \hat{s}$$

La relación lineal entre b y \hat{s} y entre c y \hat{s} viene dada por el coeficiente de correlación lineal:

$$r_b = 0,88 \quad \text{entre } b \text{ y } \hat{s}$$

y

$$r_c = 0,90 \quad \text{entre } c \text{ y } \hat{s}$$

que demuestra una linealidad ligeramente mayor la fórmula (2).

² IHM, P. — *Introduction à la statistique uni et multidimensionnelle en Raisonnement et méthodes mathématiques en Archéologie*. París, 1977.

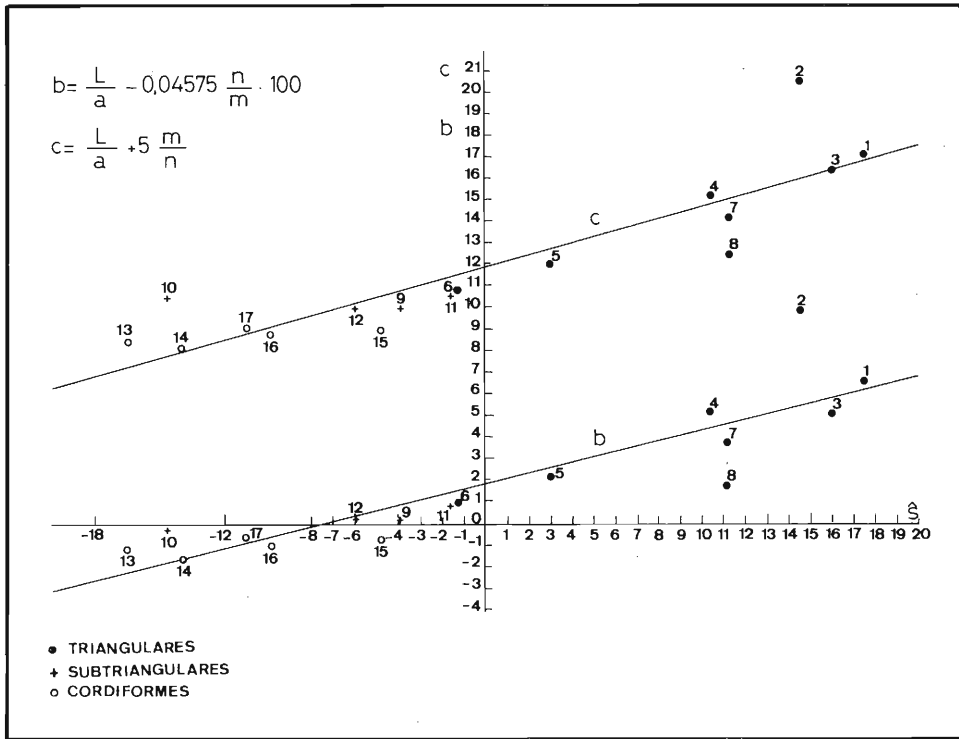


Fig. 2

Persiguiendo la mayor linealidad posible para la ecuación del índice de la triangularidad-cordiformidad, I_{hm}^3 se dispone a establecer un nuevo índice \hat{f} . A tal fin, sustituye las variables de la fórmula de Bordes:

$$\begin{aligned}
 e \quad x &= 100 \frac{n}{m} \quad \text{por} \quad x = 10 \frac{m}{n} \\
 y &= \frac{L}{a} \quad \text{por} \quad y = 100 \frac{a}{L}
 \end{aligned}$$

obteniendo, finalmente, la ecuación:

$$\hat{f} = u_1 (x - \bar{x}) + u_2 (y - \bar{y}) \tag{3}$$

que, en el caso particular de las 17 piezas consideradas, se convierte en la fórmula:

$$\hat{f} = 0,86 (x - \bar{x}) - 0,51 (y - \bar{y}) \tag{4}$$

Un cálculo de \hat{f} con los valores de L, a, n, m del Cuadro I no da resultados concordantes con los que se miden en la figura 16 del estudio repetidamente citado de Ihm, por lo cual hemos tomado los valores de \hat{f} directamente de aquella figura, aunque tal proceder comporte algunos errores que conceptuamos sin importancia para la cuestión fundamental que nos interesa.

3 IHM, Loc. cit., pág. 56.

CUADRO I

Pza. N.º	\hat{s}	L	a	n	m	b	c	\hat{f}	S _p	S _c	d
1	17.527	39.5	4	19.5	28.5	6.74	17.18	8.10	700	426	1.643
2	14.421	39	3	20	30	9.95	20.50	6.19	746	475	1.571
3	15.973	39	5	16	27.5	5.14	16.39	8.81	598	380	1.574
4	10.405	39.5	4.5	22	28.5	5.25	15.26	3.81	760	490	1.551
5	3.172	39	6.5	21.5	26	2.22	12.05	1.31	668	475	1.406
6	-1.385	39.5	8.2	23	27.5	0.99	10.80	-0.71	669	483	1.383
7	11.163	39	5.5	18.5	26.5	3.90	14.25	5.48	590	380	1.553
8	11.163	39	8	18	27.5	1.88	12.51	3.81	615	401	1.534
9	-3.930	39	10	26.5	32.5	0.17	10.03	-4.40	779	598	1.303
10	-14.718	39.5	10	36.5	40.5	-0.17	9.50	-7.98	1.112	908	1.225
11	-1.591	39	7.8	26	29.4	0.95	10.65	-0.60	786	564	1.394
12	-6.008	39.5	9	25	28.5	0.38	10.09	-5.00	776	573	1.354
13	-16.554	39	12.5	28.5	31	-1.09	8.56	-6.42	801	651	1.230
14	-13.999	38.5	14	28	30	-1.52	8.11	-6.07	833	647	1.287
15	-4.792	38.5	11	26	29	-0.60	9.08	-3.47	756	573	1.319
16	-9.881	38.5	12	25	28.5	-0.80	8.91	-6.79	770	598	1.287
17	-10.976	38.5	11	24.5	27.5	-0.58	9.11	-4.11	734	568	1.292

Los límites de \hat{f} entre los que están comprendidos los tres tipos de bifaces considerados son:

$$\begin{aligned} \hat{f} &\geq 4 && \text{bifaces triangulares,} \\ 4 > \hat{f} &\geq -4 && \text{bifaces subtriangulares,} \\ -4 &< \hat{f} && \text{bifaces cordiformes.} \end{aligned}$$

La representación gráfica de la función \hat{f} respecto a \hat{s} se muestra en la figura 3. La recta de regresión de \hat{f} sobre \hat{s} es:

$$\hat{f} = -0,469 + 0,474 \hat{s}$$

y el coeficiente de correlación lineal entre \hat{f} y \hat{s} es:

$$r_{\hat{f}} = 0,98$$

que demuestra una relación lineal muy fuerte, de acuerdo con el propósito de lhm.

Sin embargo, la mayor linealidad de una fórmula de clasificación no implica una mayor idoneidad para tal fin; en general, no comporta proporcionalidad entre las variables, sino entre sus variaciones y, a nuestro entender, la cualidad lineal cabe dejarla de lado. Porque puede idearse fórmulas cuyos índices de relación lineal sean muy ajustados, como, por ejemplo, la siguiente:

$$d = \frac{\int_p}{\int_c} \quad (5)$$

en la que:

\int_p = superficie en proyección horizontal de la cara del bifaz,

\int_c = superficie del círculo inscrito al contorno del bifaz.

Los límites de clasificación con la fórmula (5) serían:

- $d \geq 1,4$ bifaces triangulares,
- $1,4 > d \geq 1,3$ bifaces subtriangulares,
- $1,3 > d$ bifaces cordiformes.

Véase el Cuadro I, en el que figuran los índices d , calculados para nuestros 17 bifaces. La representación gráfica de d en función de \hat{s} la da la figura 4. La recta de regresión de d sobre \hat{s} tiene por ecuación:

$$d = 1,406 + 0,0106 \hat{s}$$

y el coeficiente de correlación lineal entre d y \hat{s} es:

$$r_d = 0,97$$

Y, no obstante, esta fórmula (5), aunque presenta tal vez alguna ventaja con respecto a las anteriores, no es satisfactoria, tampoco.

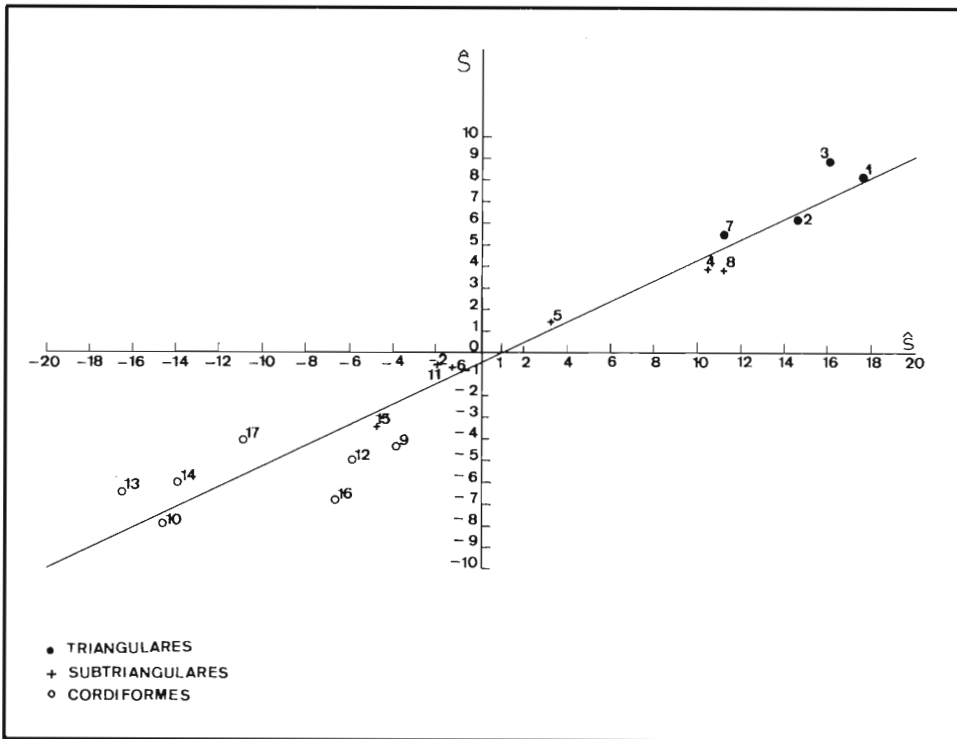


Fig. 3.- Los valores de \hat{S} se han tomado del gráfico de la figura 16 de IHM. La recta de regresión de \hat{S} sobre \hat{s} es $\hat{S} = -0,469 + 0,474 \hat{s}$. El coeficiente de correlación lineal entre \hat{S} y \hat{s} es $r_S = 0,98$.

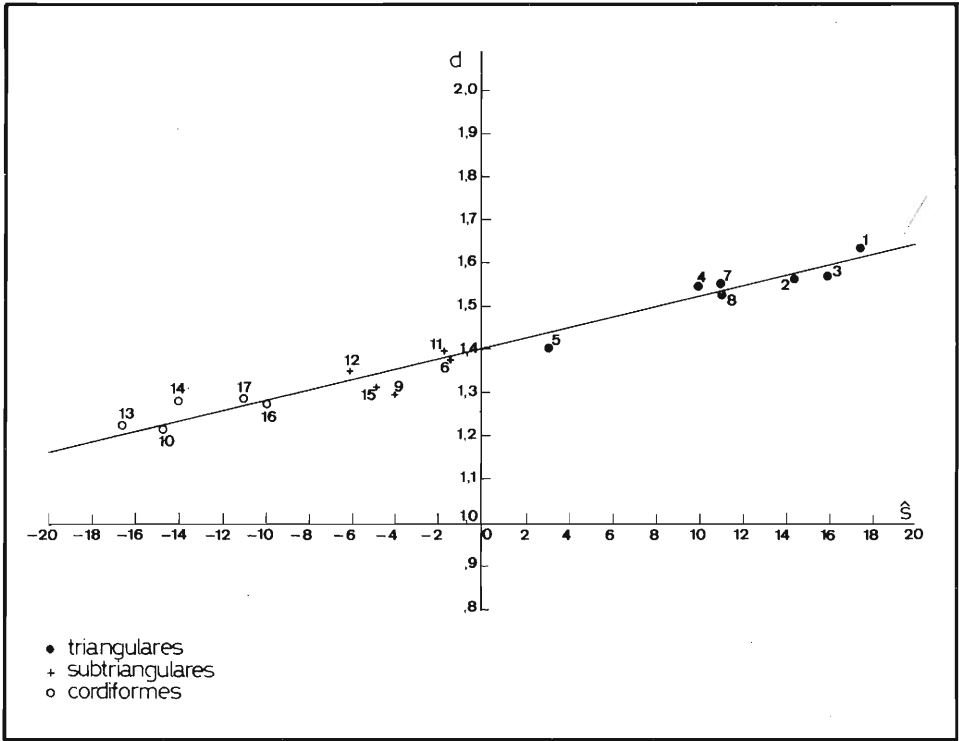


Fig. 4

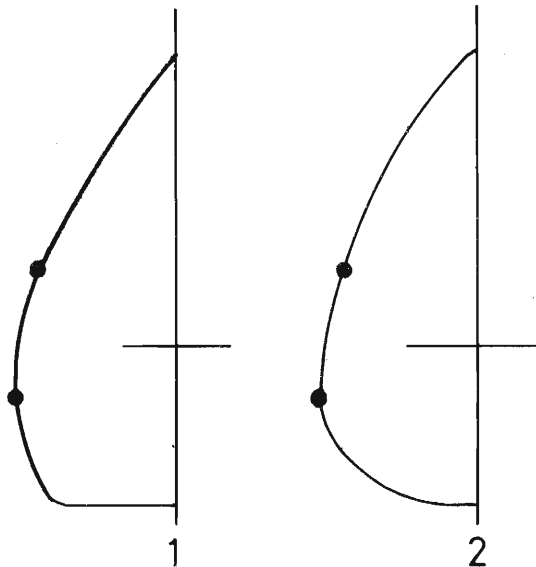


Fig. 5

El mayor defecto de las fórmulas que conocemos es su irregular medida de la triangularidad (cordiformidad), que proporciona ora un índice correcto del tipo al que pertenece la pieza, ora un índice de clasificación inadmisibile. Así, nos encontramos en ocasiones con índices iguales para bifaces de tipos distintos o índices de distintos tipos para bifaces de tipos iguales.

Por ejemplo, los bifaces cuyos semi-contornos se representan en la figura 5 son: triangular el 5-1 y cordiforme el 5-2. En cambio, tienen el mismo índice de Bordes, $b = 0,365$, que los clasifica como subtriangulares. ($L = 60$ mm, $a = 14$ mm, $n = 36$ mm, $m = 42$ mm, en ambos bifaces.)

Los bifaces de la figura 6 son los dos cordiformes; en cambio, el índice de Bordes vale $0,365$ para el 6-1, y $b = -0,977$ para el 6-2, clasificándolos como subtriangular y cordiforme, respectivamente ($L = 60$, $a = 14$, $n = 36$, $m = 42$ en el bifaz 6-1; $L = 48$, $a = 15$, $n = 42$, $m = 46$ en el bifaz 6-2).

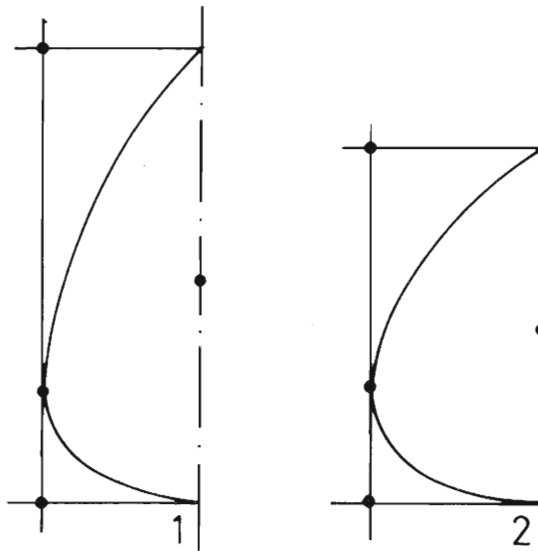


Fig. 6

Con la fórmula (5) los bifaces de la figura 5 resultan tener el mismo índice:

$$d = \frac{\int_p}{\int_c} = \frac{1700}{1256} = 1,35$$

es decir, subtriangulares ambas piezas, coincidiendo con la fórmula de Bordes.

Estos resultados y, en general, la irregularidad en la designación de los tipos mediante fórmulas, son en cierto modo previsibles. En efecto, observando el semi-contorno de un bifaz, figura 7, es evidente que por tres tangentes p, r, s y dos puntos P, Q pueden pasar perfiles de tipo distinto, conservándose constantes los valores de L, a, m, n , o lo que es lo mismo: las fórmulas (1), (2) y (3) arrojan con el cálculo un mismo índice para distintos tipos.

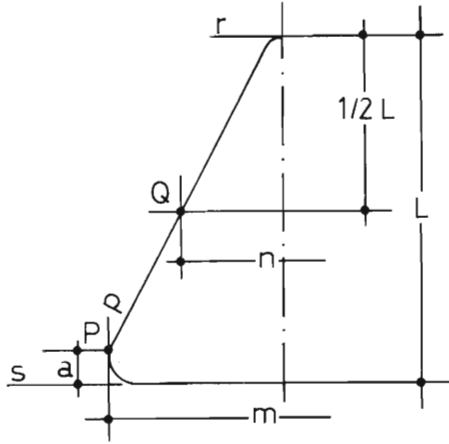


Fig. 7

Con la fórmula (5) sucede lo mismo: en general, es posible que variando la relación $\frac{\text{área ABC}}{\text{área BDE}}$ (figura 8) y conservando la suma de estas dos áreas constante, se obtenga un tipo de bifaz distinto (figura 8). Mientras tanto, el índice d:

$$d = \frac{\text{área EBC} + \text{área ABC} + \text{área BDE}}{\text{área EBC}} = \frac{1/2 f_p}{1/2 f_c}$$

no varía. Los bifaces de la figura 5 ilustran un ejemplo.

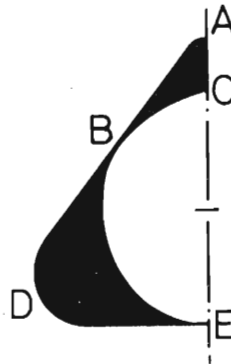


Fig. 8

En el Cuadro II hemos ordenado por número de pieza y por fórmula los índices y las clasificaciones resultantes de cada uno de los 17 bifaces. Las clasificaciones según b y c coinciden entre sí en todas las piezas. Con el estimador \hat{s} la clasificación no concuerda con las anteriores en las piezas 10 y 15. La clasificación con \hat{f} no está acorde con la de \hat{s} en las piezas 4, 5, 6, 8, 9 y 12. Finalmente, el índice d se desvía de la clasificación \hat{s} en la pieza 6.

CUADRO II

Pza. N.º	š		b		c		f		d		Clas.ªn grá.	
	Indice	Tipo	Indice	Tipo	Indice	Tipo	Indice	Tipo	Indice	Tip.	C.iz.	dcho.
1	17.527	T	6.74	T	17.18	T	8.10	T	1.643	T	T	T
2	14.421	T	9.95	T	20.50	T	6.19	T	1.571	T	T	T
3	15.973	T	5.14	T	16.39	T	8.81	T	1.574	T	T	T
4	10.405	T	5.25	T	15.26	T	3.81	ST	1.551	T	T	T
5	3.172	T	2.22	T	12.05	T	1.31	ST	1.406	T	T	T
6	-1.385	T	0.99	T	10.80	T	-0.71	ST	1.385	ST	T	ST
7	11.163	T	3.90	T	14.25	T	5.48	T	1.553	T	T	ST
8	11.163	T	1.88	T	12.51	T	3.81	ST	1.534	T	T	T
9	-3.930	ST	0.17	ST	10.03	ST	-4.40	C	1.303	ST	ST	ST
10	-14.718	C	-0.17	ST	9.50	ST	-7.98	C	1.225	C	C	C
11	-1.591	ST	0.95	ST	10.65	ST	-0.60	ST	1.394	ST	ST	ST
12	-6.008	ST	0.38	ST	10.09	ST	-5.00	C	1.354	ST	ST	ST
13	-16.554	C	-1.09	C	8.56	C	-6.42	C	1.230	C	C	C
14	-13.999	C	-1.52	C	8.11	C	-6.07	C	1.287	C	C	ST
15	-4.792	ST	-0.60	C	9.08	C	-3.47	ST	1.319	ST	ST	C
16	-9.881	C	-0.80	C	8.91	C	-6.79	C	1.287	C	C	C
17	-10.976	C	-0.58	C	9.11	C	-4.11	C	1.292	C	C	C

T = triangular

ST = subtriangular

C = cordiforme

En el Cuadro III hemos reunido por orden decreciente de los índices los mismos resultados que contiene el Cuadro II. La casilla encabezada con Cla.ªn gráfica (Clasificación gráfica: véase más abajo) recoge la clasificación de los semi-contornos izquierdo y derecho de los bifaces, que coincide con la del estimador en los semi-contornos izquierdos.

CUADRO III

š			b			c			f			d			Clas. grá.	
Indice	Tip.	Pza.	Indice	Tip.	Pza.	Indi.	Tip.	Pza.	Indice	Tip.	Pza.	Indi.	Tip.	Pza.	Contor. Izq. Der.	
17.527	T	1	9.95	T	2	20.50	T	2	8.81	T	3	1.643	T	1	T	T
15.973	T	3	6.74	T	1	17.18	T	1	8.10	T	1	1.574	T	3	T	T
14.421	T	2	5.25	T	4	16.39	T	3	6.19	T	2	1.571	T	2	T	T
11.163	T	7	5.14	T	3	15.26	T	4	5.48	T	7	1.553	T	7	T	ST
11.163	T	8	3.90	T	7	14.25	T	7	3.81	ST	4	1.551	T	4	T	T
10.405	T	4	2.22	T	5	12.51	T	8	3.81	ST	8	1.534	T	8	T	T
3.172	T	5	1.88	T	8	12.05	T	5	1.31	ST	5	1.406	T	5	T	T
-1.385	T	6	0.99	T	6	10.80	T	6	-0.60	ST	11	1.394	ST	11	T	ST
-1.591	ST	11	0.95	ST	11	10.65	ST	11	-0.71	ST	6	1.385	ST	6	ST	ST
-3.930	ST	9	0.38	ST	12	10.09	ST	12	-3.47	ST	15	1.354	ST	12	ST	ST
-4.792	ST	15	0.17	ST	9	10.03	ST	9	-4.11	C	17	1.319	ST	15	ST	C
-6.008	ST	12	-0.17	ST	10	9.50	ST	10	-4.40	C	9	1.303	ST	9	ST	ST
-9.881	C	16	-0.58	C	17	9.11	C	17	-5.00	C	12	1.292	C	17	C	C
-10.976	C	17	-0.60	C	15	9.08	C	15	-6.07	C	14	1.287	C	14	C	C
-13.999	C	14	-0.80	C	16	8.91	C	16	-6.42	C	13	1.287	C	16	C	ST
-14.718	C	10	-1.09	C	13	8.56	C	13	-6.79	C	16	1.230	C	13	C	C
-16.554	C	13	-1.52	C	14	8.11	C	14	-7.98	C	10	1.225	C	10	C	C

Las cuestiones que hemos tratado hasta aquí constituyen el origen de nuestro intento de hallar un procedimiento práctico de clasificación regular de los bifaces.

En este sentido, esbozamos a continuación un método gráfico de clasificación de los contornos de los bifaces en triangulares, subtriangulares y cordiformes.

La idea básica del método gráfico de clasificación que propugnamos se funda en la posibilidad de disponer de unos modelos que confrontados geoméricamente con el del bifax a clasificar, nos muestren el tipo al que éste pertenece.

Esa confrontación se hace por superposición. Para poder efectuarla, salvando la infinidad de contornos posibles, éstos se han de reducir (o ampliar) a una figura geoméricamente semejante, determinada con la condición de que su circunferencia inscrita (tangente a la base y a los lados) sea de un radio determinado y fijo, que nosotros hemos adoptado igual a 20 mm. Naturalmente, los modelos-tipo satisfacen a esta misma condición.

Los contornos de los bifaces de las figuras 9, 10, 11 y 12 están homologados como acabamos de exponer y en cada pieza se dibuja el centro de la circunferencia inscrita de radio 20 mm.

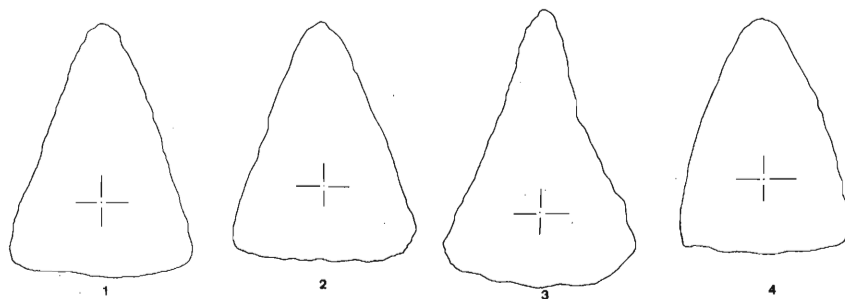


Fig. 9

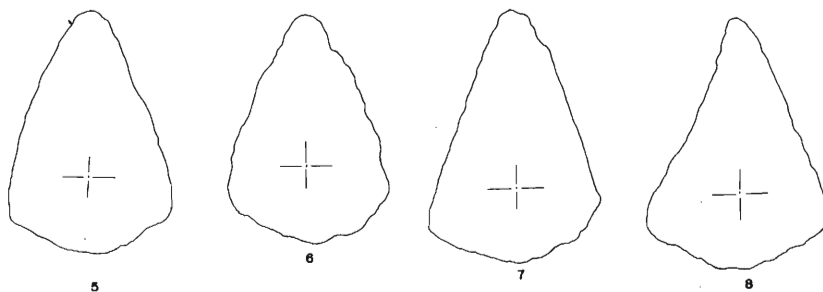


Fig. 10

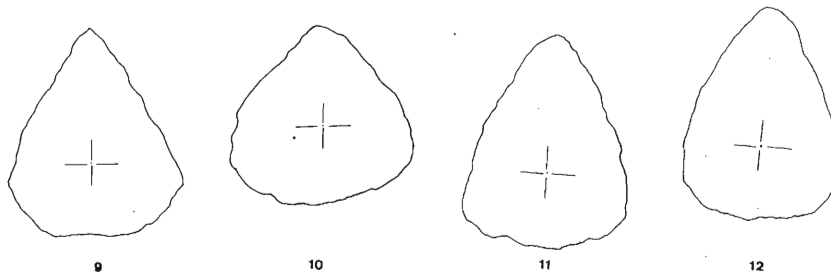


Fig. 11

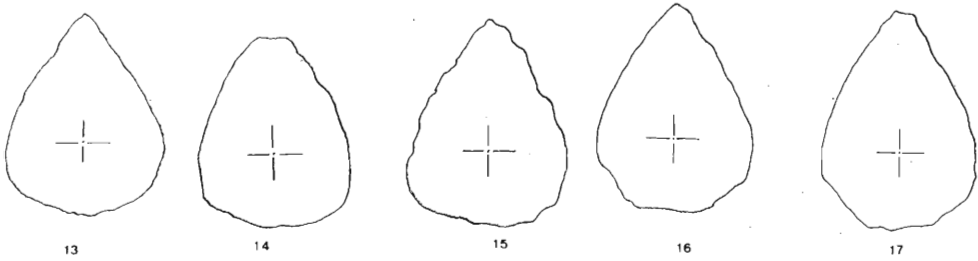


Fig. 12

Los modelos de referencia que hemos utilizado se muestran en la figura 13. El I y el II se aplican para investigar si un contorno de bifaz (o más exactamente, un semi-contorno, izquierdo o derecho) es triangular. Los modelos III y IV son para la clasificación en cordiformes.

Es obvio que el modo de operar consiste en llevar a coincidencia el centro de la figura homóloga del contorno del bifaz que se quiere clasificar, con el centro del modelo de referencia; si aquella figura queda contenida dentro del gálibo del modelo de referencia, el semi-contorno del bifaz que se examina resulta clasificado de acuerdo con el tipo de ese modelo.

Si un contorno homologado no queda contenido en ninguno de los modelos de referencia, se trata de un contorno subtriangular.

Los modelos de referencia para la triangularidad presentan unos trazos internos. En el momento de la superposición no han de ser cortados por la línea del contorno homologado que se estudia. En el caso contrario, no se trata de contorno triangular.

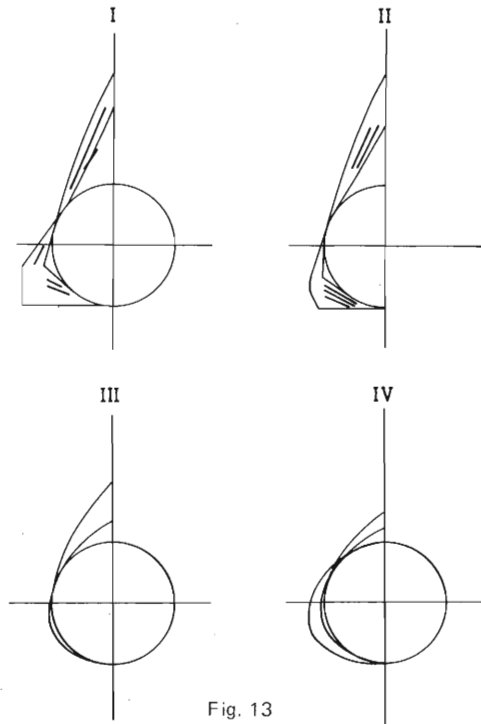


Fig. 13

El trabajo de clasificación, organizado con el empleo de los modelos de referencia, permite ser encomendado a personas mínimamente especializadas. Una hoja de trabajo como la que esquematizamos a continuación nos ha facilitado la labor.

HOJA DE TRABAJO DE CLASIFICACION									
.....									
.....									
Nombre:					Fecha:				
Pza. N.º	Contorno izquierdo				Contorno derecho				Clas.
	Triangular		Cordiforme		Triangular		Cordiforme		Cont.º
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	Izq. Der.

Se puede adoptar algunos símbolos para registrar las observaciones realizadas y aliviar la tarea y el control ulterior de la clasificación. Nosotros hemos empleado los siguientes:

- O = no queda incluido el contorno en general.
- \bar{O} = no queda incluido el contorno de la parte superior.
- \underline{O} = no queda incluido el contorno de la parte inferior.
- 1 = queda incluido en general.
- $\bar{1}$ = queda incluido el contorno de la parte superior.
- $\underline{1}$ = queda incluido el contorno de la parte inferior.
- $\overline{\neq}$ = corta trazos internos de la parte superior.
- $\underline{\neq}$ = corta trazos internos de la parte inferior.

La parte superior y la parte inferior del contorno son, respectivamente, la parte superior y la parte inferior al punto de tangencia del contorno con la circunferencia inscrita.

Otro modo práctico de ejercitar la clasificación lo proporcionaría el empleo del ordenador: introducidos en éste, de una vez por todas, los modelos de referencia, se reduciría el trabajo a presentar sobre la tabla gráfica la figura homologada del bifaz, y a reseguir su contorno con la pluma electrónica. El resultado de la clasificación de cada pieza sería inmediatamente conocido, registrado y distribuido en clases, amén de la conservación del contorno transmitido, etc. Inútil es subrayar el mayor nivel de objetividad, que posibilitaría la aplicación del ordenador.

El trabajo de obtención de las figuras homólogas de los contornos, listas ya para su confrontación inmediata con los modelos de referencia, puede abreviarse considerable-

mente con el uso del pantógrafo aplicado directamente al bifaz. Para ello, este aparato necesita un sencillo dispositivo, especialmente diseñado para el reseguiamiento del contorno. Servirá también como trazador para el dibujo rápido del contorno del bifaz a tamaño natural.

Prácticamente: primero, se trazará el contorno a tamaño natural; segundo, se inscribirá una circunferencia de 20 mm. de radio tangente a los lados y a la base; tercero, el radio de aquélla, en mm., dividido por 20 dará la razón de semejanza; cuarto, se ajustará el pantógrafo a esta razón, etc.

Esperamos poder completar próximamente los modelos de referencia.

En resumen, nuestro propósito ha sido evidenciar la endeblez de las fórmulas de clasificación de los bifaces que hemos discutido y, como corroboración de esa debilidad misma, hacer patente su multiplicidad; mostrar que el aparato matemático no es equivalente por sí solo a eficiencia, antes bien puede entrañar como un *fetichismo del algoritmo* (caso de la linealidad, por ejemplo); ejemplificar la posibilidad de un cálculo simplificado asequible a todos los arqueólogos, pues si los métodos matemáticos de investigación aplicables al campo de la Arqueología no pueden llegar a información del arqueólogo en cuanto a su existencia y aplicabilidad práctica, aquéllos quedan reducidos a la nada; resaltar la necesidad de no perder de vista la aplicación práctica del modo matemático, ya que el desprecio de la práctica nos puede conducir al absurdo, tal como, por ejemplo, el de las encuestas de clasificación entre 20 a 30 arqueólogos; y, por último, apuntar un método gráfico de clasificación de los bifaces (utilizable también con otros perfiles de piezas) que conceptuamos comprensivo y práctico, con el que el objeto, modo de operar, medios y resultado "entran por los ojos" en todo momento.

Para terminar, anotamos que un anhelo de ver realizada una colaboración efectiva y eficiente entre el arqueólogo y el matemático subyace en el presente estudio.