

## Prototipo físico-manipulativo: Material Didáctico de Apoyo a la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría Analítica en el Espacio

Iván Arroyo San José  
José Ignacio Mestre Miravet  
Raúl Ruiz Torres  
Nadia Usó Abella  
(Universitat Jaume I, España)

*Fecha de recepción: 17 de febrero de 2023*  
*Fecha de aceptación: 30 de junio de 2023*

### Resumen

El presente trabajo se centra en la creación de material manipulativo de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica en el espacio como respuesta a una problemática concreta que es una constante en las aulas de 2.º de Bachillerato de los centros españoles, concretamente en la modalidad de Ciencias y Tecnología. Se trata de las dificultades de visualización espacial y razonamiento geométrico que presentan gran parte de los alumnos para comprender los elementos geométricos en el espacio —punto, recta y plano— y sus posiciones relativas, los cuales aparecen en el bloque de contenidos de geometría del currículum de matemáticas de dicho curso. Para revertir esta situación desfavorable con la mayor eficacia posible, se propone el diseño y la creación de un prototipo de maqueta innovador, versátil, intuitivo y fácilmente manipulable.

### Palabras clave

Geometría, Visualización espacial, Material didáctico, Prototipo, Maqueta, Bachillerato.

### Abstract

This work focuses on the creation of manipulative materials to support the teaching and learning of analytical and spatial geometry as a response to a specific problem that is common among the students of the last course of High School in Spain, specifically in the modality of science and technology. Most of the students have difficulties of spatial intelligence and geometric reasoning which are essential skills to understand the geometric elements in space —point, line and plane— and their relative positions, which appear in the geometry content block of the mathematics curriculum for that course. The design and creation of an innovative, versatile, intuitive and easily manipulated model is proposed in order to revert this unfavourable situation as effectively as possible.

### Keywords

Geometry, Spatial visualization, Didactic materials, Prototype, Model, High school.

## 1. Introducción



Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas  
*Luis Balbuena Castellano*

El currículum de la asignatura de matemáticas del segundo curso de Bachillerato, en la modalidad de Ciencias y Tecnología, incluye un extenso bloque de contenidos de geometría, entre los que se encuentra el apartado de conocimiento objeto del presente trabajo, la geometría analítica en el espacio. Aparentemente no debería suponer un gran desafío para los alumnos, que ya han trabajado previamente la geometría en cursos anteriores, si no fuera por el hecho de que hasta este curso no se enfrentan a la geometría analítica tridimensional, cuya visualización es significativamente más compleja que la geometría analítica bidimensional, fácilmente representable sobre un papel. Este salto cualitativo, que se produce en el último curso de la educación secundaria no obligatoria, acaba suponiendo un enorme desafío para un elevado número de los discentes, ya que gran parte de la carga curricular se centra en la geometría analítica del espacio tridimensional.

Para la comprensión de dicho temario, resulta de vital importancia que el alumno desarrolle las capacidades necesarias de razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico del conocimiento (Fernández Blanco et al., 2012), para comprender los elementos geométricos que se estudian, como son el plano, la recta, el punto y el vector, y sus posiciones relativas. Es en esta parte donde muchos de ellos presentan dificultades que conllevan en algunos casos extremos a una falta de entendimiento profundo, situación desfavorable que nuestra propuesta de innovación pretende revertir con la mayor eficacia posible.

Asimismo, adicionalmente a la problemática principal ya mencionada, si atendemos al contexto dentro del cual se enmarca el segundo curso de Bachillerato, como antesala de los estudios universitarios, podemos detectar un enfoque, por parte de los docentes, centralizado casi de manera exclusiva en la superación de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU), lo que desde nuestro punto de vista supone una carga emocional extra en el alumnado, que para nada facilita su desarrollo en cuanto a capacidades cognitivas se refiere.

Como respuesta a las necesidades detectadas, expuestas anteriormente, este trabajo persigue una meta compuesta por un objetivo de carácter principal, el cual lleva emparejados, de manera indisoluble otros dos subyacentes que son condición *sine qua non* para garantizar el éxito de la propuesta.

Con carácter prioritario, se pretende ayudar al alumnado de 2.º de Bachillerato en la mejora de sus capacidades de visualización espacial de objetos y de razonamiento geométrico —objetivo 1— para lo cual se propone proveer a los docentes recursos de apoyo adaptados al bloque de geometría analítica dentro del currículum de matemáticas —objetivo 2— en forma de prototipos físicos-manipulativos capaces de transformar la forma tradicional e ineficaz de impartir estos conocimientos. Para ello, se requiere del diseño y creación de un único prototipo de maqueta versátil, intuitivo y fácilmente manipulable capaz de dar respuesta a las múltiples posibilidades que pueden darse en el espacio tridimensional —objetivo 3— que es el fin último de este proyecto de innovación, y el mayor desafío al que los autores de este trabajo se han enfrentado.

La solución propuesta en este proyecto de innovación no es algo casual, sino que se sustenta en los trabajos de investigación de Calderón Atariguana, y Castro Salazar, (2021), Cardoño Espinosa, J., Muñoz Marín, et al. (2017) y Tripaldi Proaño y Toledo Vallejo (2017) que coinciden en que el uso de material interactivo y manipulativo como recurso didáctico contribuye a un mayor entendimiento de los conceptos matemáticos y, por tanto, a una mejora sustancial del rendimiento académico.

## 2. Prototipo: diseño y creación

Una vez establecidos los objetivos del proyecto de innovación, se procede a detallar la manera de lograrlo. El proceso de diseño y creación del material docente entraña las siguientes fases:

1. Observación de los ejercicios tipo y detección de dificultades concretas.
2. Elaboración del diseño teórico con el programa informático Tinkercad.
3. Valoración de la utilidad de la herramienta GeoGebra.
4. Búsqueda de materiales a través de la experimentación.
5. Construcción del prototipo de maqueta con los materiales seleccionados.
6. Propuesta de material económico alternativo que fomenta la interdisciplinariedad.

### 2.1. Observación de los ejercicios tipo y detección de dificultades concretas

En primer lugar, se parte de la observación, analizando los contenidos del bloque de geometría analítica espacial y los ejercicios y problemas que se les plantea habitualmente a los alumnos. El temario se resume en el estudio del punto, la recta, el plano y sus posiciones relativas.

Estos elementos geométricos y las relaciones entre ellos se representan de forma analítica en forma de ecuaciones. Una parte mayoritaria del temario se centra en la construcción de dichas ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación de la recta se puede obtener conociendo un punto perteneciente a la misma y su vector director. De manera análoga, un punto de la recta y su vector director se pueden extraer de la ecuación que la define.

### 2.2. Elaboración del diseño teórico con el programa informático Tinkercad

En segundo término, una vez analizado el temario, se plantea el diseño inicial de un modelo teórico que posibilite la representación tridimensional de las ecuaciones que definen los espacios geométricos mencionados anteriormente. Utilizando el programa Tinkercad (2011), un software libre de modelado en tres dimensiones, se elabora un boceto de dicho modelo de la figura 1.

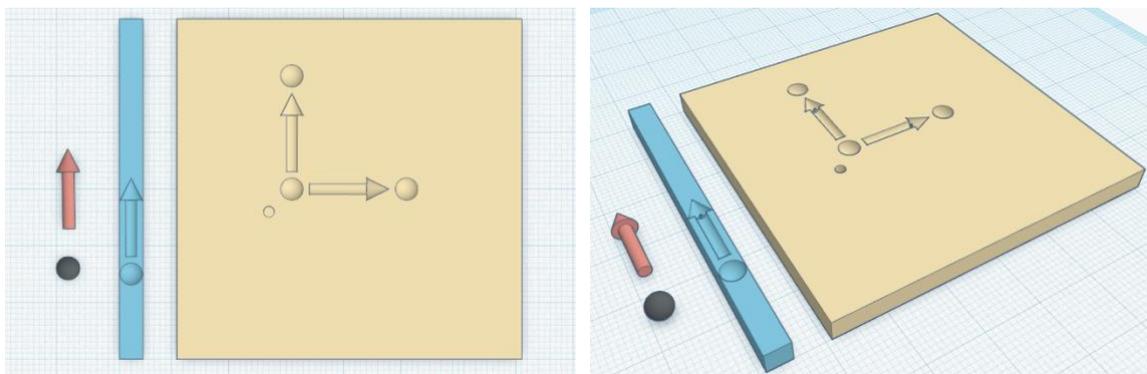


Figura 1. Modelo teórico elaborado con Tinkercad. Diseño propio.

Este modelo tridimensional incluye puntos, rectas, planos y vectores como piezas más elementales. Además, para reforzar esta relación de vectores y puntos con las ecuaciones de las rectas y planos, las figuras cuentan con inserciones para poder contenerlos.

En el caso de la recta, está constituida por un único punto y un vector director. La figura que representa el plano no solo se compone de un punto y dos vectores, sino que además cuenta con otros dos puntos en los extremos de los mismos, dado que un plano también se describe a partir de los tres

puntos que lo constituyen y, para obtener su ecuación, se calculan primero estos dos vectores. Asimismo, se ha añadido al diseño del plano una inserción para poder mantener erguido un vector perpendicular al plano, empleado habitualmente en los ejercicios del temario.

### 2.3. Valoración de la utilidad de la herramienta GeoGebra.

Para demostrar la utilidad práctica que proporcionan los modelos digitales interactivos para la enseñanza y el aprendizaje de este bloque de las matemáticas, la geometría analítica en el espacio, se muestra a continuación un ejemplo de problema donde se puede ver cómo utilizar GeoGebra para estudiar la posición relativa de dos rectas.

**Dada las rectas s y r:**  
 $r: (x,y,z) = (1,2,3) + (-1,1,2) \lambda$   
 $s: x/2 = (y-3) / 3 = (z-5) / (-1)$

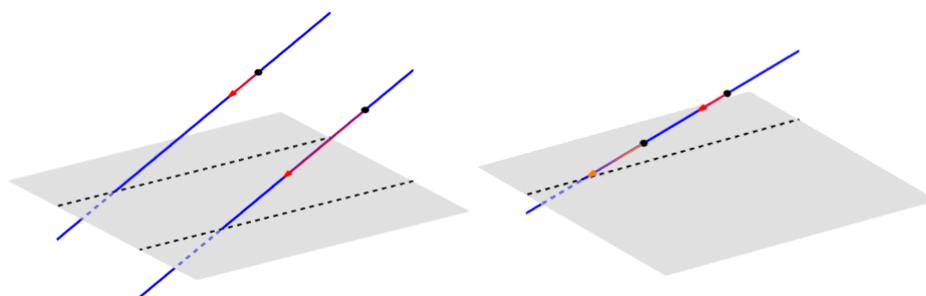
**¿Cuál es la posición relativa de r y s?**

**Cuadro 1.** Enunciado del problema.

El primer paso para resolver el problema es extraer información de las ecuaciones del enunciado. Cada una de las rectas utiliza un tipo de ecuación diferente, pero en ambos casos, se enseña en el temario cómo obtener un vector director y un punto de la recta.

En las figuras 2 y 3 se representan las cuatro posibles soluciones, junto a los componentes que construyen las rectas: el punto y el vector director. Dependiendo de los datos del problema el alumno tiene que discernir en qué caso se encuentra.

En la figura 2, se observa que, analizando la relación entre los vectores directores de las rectas, estos tienen la misma dirección, aunque no tienen por qué ser iguales, es decir, no tienen por qué tener el mismo tamaño. En este problema en concreto, no se da ninguno de estos dos casos, ya que las componentes de los vectores (-1,1,2) y (2,3,-1) no son proporcionales.



**Figura 2.** Rectas paralelas (izq.) y rectas coincidentes (dcha.). Diseño propio.

En la figura 3, se pueden ver los otros dos casos posibles, cuando intersecan en un punto y cuando no lo hacen, es decir cuando se cruzan en el espacio. Para resolver el problema que estamos analizando y encontrar la posición relativa de ambas rectas, se puede soportar el planteamiento con la figura 3 (izq.),

argumentando que, por la propia definición, si se intersecan, deben de tener un punto en común, y planteando el sistema de ecuaciones, el cual debe de tener solución.

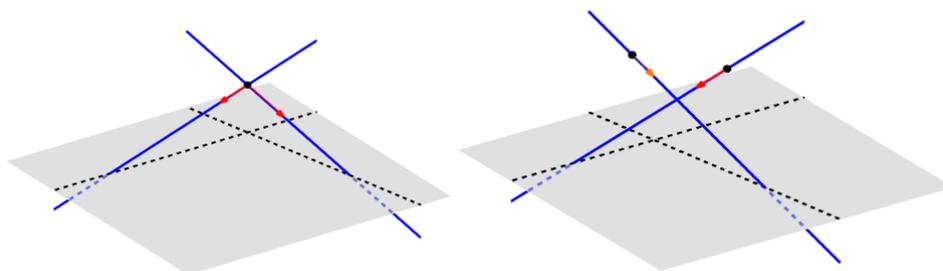


Figura 3. Rectas que intersecan (izq.) y rectas que se cruzan (dcha.). Diseño propio.

La representación gráfica de estos problemas se ha realizado con el programa informático libre de matemáticas dinámicas, GeoGebra (2001), utilizado por millones de usuarios de manera colaborativa, que ofrece múltiples posibilidades para la creación de recursos matemáticos, especialmente los relacionados con los contenidos a los que hace alusión este trabajo.

Como ya se adelantaba al inicio de esta sección, con estos ejemplos se corrobora la utilidad de este software a la hora de facilitar la visualización espacial mediante la creación de modelos digitales interactivos, por lo que se recomienda el uso de esta herramienta de apoyo al profesorado como antesala al prototipo físico-manipulativo, dejando su utilización a elección del docente.

#### 2.4. Búsqueda de materiales a través de la experimentación.

En términos generales, la actividad en la que se centra el presente proyecto es la de diseñar un prototipo de material manipulativo en forma de maqueta para que pueda ser empleado por los docentes especializados en el área de matemáticas como recurso didáctico enfocado al bloque de geometría analítica en el espacio correspondiente al currículum del segundo curso de Bachillerato en la modalidad de Ciencia y Tecnología.

En cuanto a la ejecución de la maqueta, se han contemplado diversas posibilidades, desde las básicas piezas de Lego hasta las piezas más sofisticadas del fabricante Geomag, pasando por otras marcas con material similar como K'nex, u otras alternativas más económicas como, por ejemplo, cartulinas, cartón-pluma, etc. El material finalmente escogido es el que mejor responde al reto principal que se nos planteaba, que es el de conseguir materializar una única maqueta polivalente, intuitiva y fácilmente manipulable, que con pequeñas modificaciones permita representar las múltiples posibilidades que se puedan dar en el espacio, combinando los distintos elementos: puntos, rectas, planos y vectores.

No obstante, para llegar a la maqueta definitiva, los autores de este proyecto de innovación se han sumergido en una profunda investigación basada en la experimentación con otros materiales como el K'nex, digno competidor por la carrera del prototipo definitivo, pero que finalmente fue descartado por los siguientes motivos: la mezcla de colores y variedad de piezas de unión, su menor grado de versatilidad, la dificultad para construir superficies definidas y, sobre todo, por la escasez de unidades en el mercado.

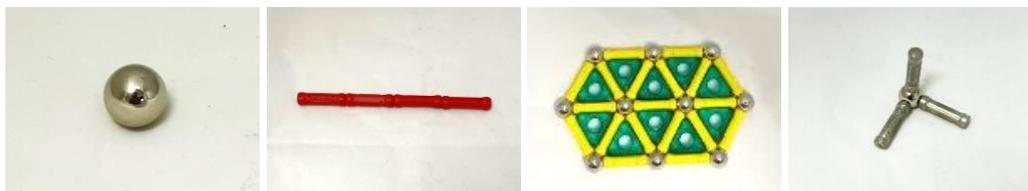
## 2.5. Construcción del prototipo de maqueta con los materiales seleccionados.

Para la solución definitiva se ha decidido emplear finalmente el material del fabricante Geomag, cuyos orígenes se remontan a finales del siglo pasado (1998). Se trata de un sistema de construcción magnética, con un buen rendimiento y múltiples posibilidades, el cual se compone de elementos sencillos, como barras magnéticas y esferas de metal que se mantienen unidos por una fuerza magnética de atracción, a los cuales se les puede añadir unas carcasas plásticas poligonales de colores ejerciendo una ligera presión. Con todo ello, se pueden construir estructuras de todo tipo, permitiendo liberar la creatividad y la imaginación mientras se juega.

La utilidad que se le ha asignado a las diferentes piezas para la fabricación del prototipo son las siguientes:

- Esferas metálicas: hacen las veces de puntos en el espacio.
- Barras magnéticas: se les asigna una función diferente según el color que tenga:
  - Amarillas: Segmentos constituyentes de los diferentes planos.
  - Rojas: Varias piezas enlazadas magnéticamente cumplen la función de rectas.
  - Grises: Hacen la función de vectores, cada uno de ellos representando, de manera simbólica, una dimensión del espacio.
- Carcasas poligonales: representan la superficie del plano. Se utiliza un color distinto para cada plano: azul, rojo y verde.

En las siguientes imágenes, se muestra un ejemplo de cada uno de los elementos:



**Figura 4.** Punto, recta, plano y vectores, de izquierda a derecha. Imágenes propias.

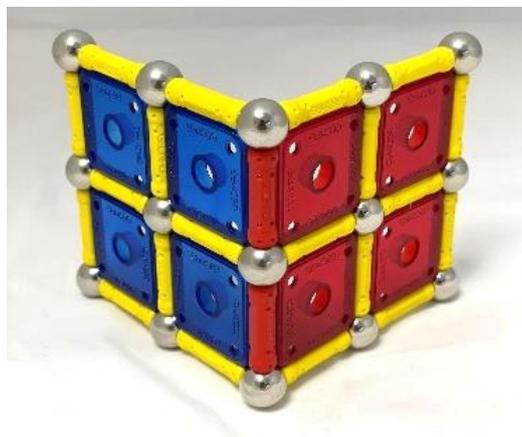
El uso del color no se realiza, en absoluto, de manera arbitraria, sino que se determinan unos colores específicos a cada elemento con el objetivo de evitar confusiones y simplificar el modelo físico para hacerlo lo más claro e intuitivo posible.

El número de piezas empleados en función de su categoría para completar la maqueta es el siguiente, se trata del mínimo número de piezas recomendado para garantizar la eficacia del prototipo:

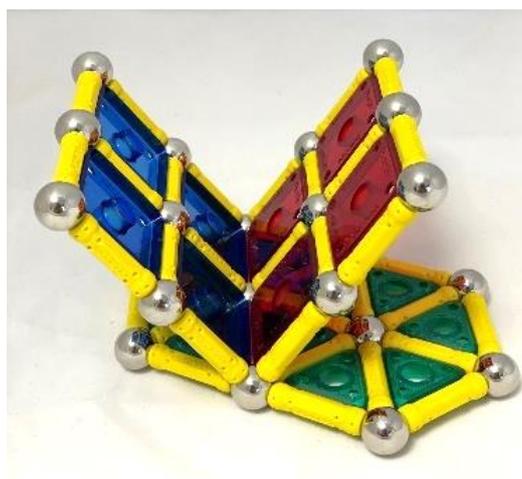
- Esferas metálicas:  $\geq 30$  unidades
- Barras magnéticas:
  - Amarillas:  $\geq 44$  unidades
  - Rojas:  $\geq 26$  unidades
  - Grises:  $\geq 3$  unidades
- Carcasas poligonales:
  - Azules:  $\geq 8$  unidades
  - Rojas:  $\geq 4$  unidades
  - Verdes:  $\geq 12$  unidades

No obstante, se pueden modificar los colores del prototipo y ampliar sus dimensiones hasta los valores deseados siguiendo la estructura de elementos planteada previamente, con base en el criterio del docente y las necesidades del alumnado.

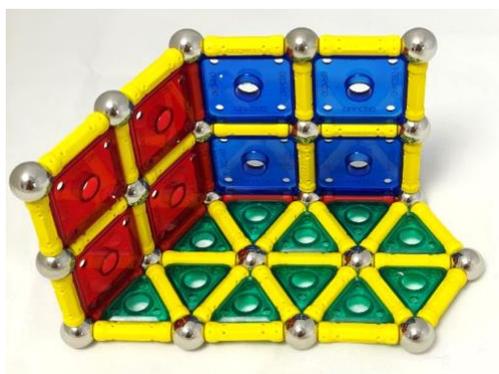
A continuación, se pueden observar las múltiples posibilidades que ofrece el prototipo diseñado gracias a su versatilidad, a su naturaleza intuitiva y a su facilidad de manipulación:



**Figura 5.** Posición relativa de dos planos. En color rojo se aprecia la recta de intersección. Imagen propia.



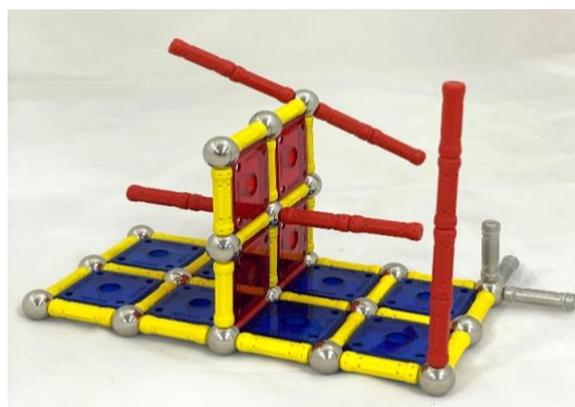
**Figura 6.** Posición relativa de tres planos. Intersección en una recta. Imagen propia.



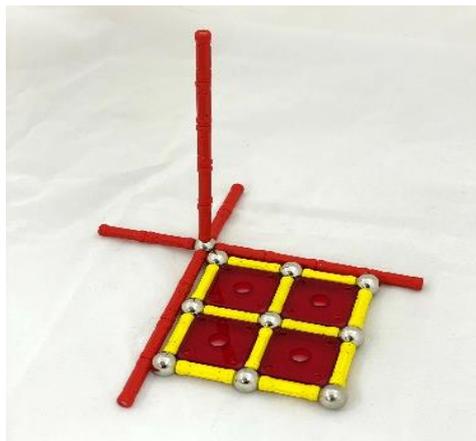
**Figura 7.** Posición relativa de tres planos. Intersección en un punto. Imagen propia.



**Figura 8.** Posición relativa de tres planos. Intersección que da lugar a tres rectas. Imagen propia.



**Figura 9.** Versatilidad del prototipo: punto, recta, plano y vectores. Imagen propia.



**Figura 10.** Posición relativa entre rectas teniendo un plano como referencia. Imagen propia.

Para la construcción de este prototipo se han utilizado tres plataformas diferentes de Geomag, con el objetivo de conseguir aunar las diferentes piezas empleadas en la variedad de combinatorias posibles. Sin embargo, otras alternativas son viables haciendo uso de otras plataformas del mismo fabricante, ya que este ofrece diferentes productos similares.

En concreto las plataformas empleadas son las siguientes:

- Geomag Magnetic World - The Original - Color 96
- Geomag Magnetic World - The Original - Panels 84
- Geomag Magnetic World - The Original - Dynamic Master

## 2.6. Propuesta de material económico alternativo que fomenta la interdisciplinariedad.

A su vez, se plantea una alternativa para llegar a todos los alumnos sin distinción. Se trata de un prototipo fácilmente construible con materiales económicos como, por ejemplo: cartulina, cartón-pluma, poliestireno expandido (conocido comúnmente como Porexpan), palillos largos (tipo brocheta) de varios colores, bolas de plastilina y pegamento; y sencillas herramientas.

Un objetivo adicional, aprovechando la competencia de la asignatura de Tecnología para desarrollar soluciones accesibles y sostenibles mediante la fabricación de productos, sería la construcción de estas maquetas, elaboradas por los discentes en grupos de 2 o 3 integrantes. De esta manera, se generaría una relación interdisciplinar que supondría un valor añadido.



**Figura 11.** Ejemplo de material alternativo para maqueta asequible. Imagen propia.

### 3. Evaluación

El análisis e interpretación de los datos obtenidos tras poner en práctica el prototipo es primordial para realizar un seguimiento del proyecto y su consiguiente mejora progresiva. A pesar de haber experimentado con distintos materiales y haber realizado reiterados ensayos que contemplaban diversas posibilidades de ejecución, no se ha tenido la ocasión de aplicarlo en el ámbito académico. A consecuencia de ello, en esta sección no se van a mostrar resultados, sino que se van a facilitar las pautas y herramientas para poderlos obtener. Por tanto, se han diseñado dos cuestionarios para la recopilación de datos sobre la experiencia de aquellas personas que prueben el material didáctico.

Los cuestionarios van dirigidos exclusivamente a aquellos profesores que experimenten con el prototipo. En cada uno de ellos podrán expresar sus impresiones acerca de la maqueta y cómo ha repercutido en los alumnos al introducirlo en las clases. No se ha destinado ninguno de los cuestionarios a los alumnos, sin embargo, si el profesor desea ser más objetivo puede realizar un cuestionario específico para que los alumnos respondan al cuestionario inicial.

Por otro lado, los formularios están creados a partir de rúbricas ponderadas que se muestran en el anexo. Realizar los cuestionarios de esta forma permite que el profesor sea más preciso a la hora de evaluar el prototipo y, por tanto, obtener una valoración general del proyecto gracias a las ponderaciones. El rango de la calificación es del 1 al 4, alcanzándose los objetivos si se supera el 2,5.

Es preciso recalcar que cuando en las rúbricas se habla del nuevo material, se refiere a los prototipos de maquetas realizadas con el material de Geomag, el cual es la solución escogida para este proyecto. Asimismo, la unidad didáctica a la que se refiere es la de geometría analítica en el espacio, correspondiente al curso de 2.º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. No obstante, si uno de los profesores lo ha probado en un curso distinto o ha empleado otro material, puede rellenarlo de igual forma especificándolo en los cuestionarios:

- Cuestionario 1: La finalidad de este cuestionario es que el profesor evalúe si los alumnos muestran una mejora con la incorporación del nuevo material de apoyo a la unidad didáctica. Los aspectos que se consideran necesarios a la hora de detectar esta mejora en los alumnos son: el interés y la motivación, el rendimiento, la visualización espacial, las dificultades en la unidad didáctica y la evaluación final.
  - Enlace al cuestionario 1: <https://forms.gle/34M1S4yHVYnux7Fz5>
- Cuestionario 2: La finalidad de este cuestionario es comprobar si el material ha sido útil y cómodo para el profesor durante la unidad didáctica. En este cuestionario los aspectos cambian respecto al anterior y son los siguientes: la manipulación de la maqueta, la agilidad en la programación de la unidad didáctica, la utilidad de los ejemplos que aparecen en el proyecto y la facilidad a la hora de conseguir los recursos.
  - Enlace al cuestionario 2: <https://forms.gle/jJdMhs2gS5iya2jp6>

Por último, al final de cada cuestionario se ha reservado una sección de sugerencias sobre los aspectos a mejorar. Estos comentarios se tendrán en cuenta en el análisis e interpretación de los resultados.

#### 4. Consideraciones finales

Consideramos que los objetivos planteados inicialmente se cumplen satisfactoriamente mediante el desarrollo del prototipo físico-manipulativo. El diseño que se ha logrado, tras realizar varios experimentos con diversos materiales, es bastante completo, muy intuitivo y fácilmente reproducible. Una prueba de ello son las demostraciones ejemplificativas mostradas en las imágenes anteriores.

Cabe puntualizar que, a pesar de ya existir recursos digitales como los programas informáticos de visualización en tres dimensiones Tinkercad y GeoGebra, empleados en la elaboración de este proyecto, consideramos, en base a nuestra experiencia, que los alumnos mejoran de manera más significativa sus capacidades de visualización espacial y razonamiento geométrico a través de la manipulación de un modelo físico. Asimismo, dada la versatilidad del prototipo, los docentes pueden realizar transformaciones en la maqueta de forma más directa, rápida y prácticamente sin restricciones. Esta es la principal novedad del proyecto y la que lo diferencia claramente de dichos programas informáticos y otros recursos digitales.

Finalmente, animamos a todos los docentes que se hayan aventurado a adentrarse en esta compleja y, a la par, motivadora temática a que prueben el prototipo en sus clases y nos proporcionen una retroalimentación a través de los cuestionarios planteados para evaluar el éxito de nuestra propuesta y realizar los cambios necesarios con el objetivo de mejorarlo en un futuro, si esto fuera necesario.

#### Bibliografía

- Calderón Atariguana, R. F. y Castro Salazar, A. Z. (2021). Maquetación como recurso didáctico para la enseñanza - aprendizaje de la Geometría (Trabajo de investigación). URL: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8326133> (Última visita: 08 de febrero de 2023).
- Cardeño Espinosa, J., Muñoz Marín, L. G., Ortiz Alzate, H. D. y Alzate Osorno, N. C. (2017). La incidencia de los Objetos de Aprendizaje interactivos en el aprendizaje de las matemáticas básicas, en Colombia. *Trilogía Ciencia Tecnología Sociedad*, 9(16), 63-84. URL: <https://doi.org/10.22430/21457778.182> (Última visita: 08 de febrero de 2023).
- Fernández Blanco, T., Díaz Godino, J. y Cajaraville Pegito, J. A. (2012). Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico (Trabajo de investigación). URL: [https://www.ugr.es/~jgodino/eos/TFernandez\\_Bolema%2042A\\_visualizacion.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/eos/TFernandez_Bolema%2042A_visualizacion.pdf) (Última visita: 08 de febrero de 2023).
- GeoGebra. (2001). Windows/Mac/App Store/Chrome Web Store/Linux/Raspberry Pi 3. Universidad de Salzburgo: Markus Hohenwarter. URL: <https://www.geogebra.org/> (Última visita: 16 de febrero de 2023).
- Rodríguez, G. y Sgreccia, N. (2021). Predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas trigonométricos. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*. URL: [https://drive.google.com/file/d/1NxpK0t\\_yFcPTji3ChlsogmlUTugoUeNx/view](https://drive.google.com/file/d/1NxpK0t_yFcPTji3ChlsogmlUTugoUeNx/view) (Última visita: 08 de febrero de 2023).
- Téllez Vega, G. I., Bolasco Negrete, G. D., Juárez López, J. A. y Juárez-Ruiz, E. (2021). Experiencias de estudiantes de bachillerato al resolver una tarea de libro de texto y una tarea auténtica de trigonometría. *Número Revista de Didáctica de las Matemáticas*. URL: [https://drive.google.com/file/d/1e1gvUxHqhXUDMJ1qFFBOLGpH\\_MTEDZ6S/view](https://drive.google.com/file/d/1e1gvUxHqhXUDMJ1qFFBOLGpH_MTEDZ6S/view) (Última visita: 08 de febrero de 2023).
- Tinkercad. (2011). Web, JavaScript. Autodesk. URL: <https://www.tinkercad.com/> (Última visita: 16 de febrero de 2023).
- Tom Lowrie, Danielle Harris, Tracy Logan & Mary Hegarty. (2021). The impact of a Spatial Intervention Program on Students' Spatial Reasoning and Mathematics Performance. *The Journal of*



**Prototipo físico-manipulativo: Material didáctico de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje ...**

I. Arroyo San José, J. I. Mestre Miravet, R. Ruiz Torres, N. Usó Abella

Experimental Education 89:2, pages 259-277. URL: <https://doi.org/10.1080/15248372.2019.1653298> (Última visita: 08 de febrero de 2023).

Tripaldi Proaño, T. D. y Toledo Vallejo, E. N. (2017). Diseño gráfico de material didáctico para mejorar el aprendizaje en niños con déficit de atención e hiperactividad en la ciudad de Cuenca (Trabajo de graduación). URL: <http://dspace.uazuay.edu.ec/handle/datos/7068> (Última visita: 08 de febrero de 2023).

Villalpando Becerra, J. F. y Aceves Sepúlveda, M. J. (2022). Utilización de GeoGebra y la estereoscopia como auxiliares en la enseñanza de contenidos ligados a la Geometría Euclidiana. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*. URL: <http://sinewton.es/publicacion-numeros/mundo-geogebra-1-112/> (Última visita: 08 de febrero de 2023).

**Iván Arroyo San José.** Arquitecto por la Universidad de Alcalá de Henares (UAH, Madrid, España, 2017). Estudiante del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, especialidad en Matemáticas, por la Universitat Jaume I de Castellón (UJI, España, curso 2022-2023). Nacido en el año 1989 en Guadalajara (España).  
Orcid: 0000-0002-5147-296X

**José Ignacio Mestre Miravet.** Universitat Jaume I, Castellón, España. Estudiante de doctorado en informática en la Universitat Jaume I en el Departamento de Ingeniería y Ciencia de los Computadores. Investigador en computación de altas prestaciones relacionado con redes neuronales profundas.  
Email: [jmiravet@uji.es](mailto:jmiravet@uji.es)

**Raúl Ruiz Torres.** Estudiante, residente en Onda, Castellón, España. Nacido el 31 de marzo de 1997 en Lloret de Mar, Girona, España. Graduado en Matemáticas en la Universidad de Valencia (Valencia, España) en 2019. Actualmente, se encuentra estudiando el máster de Matemática Computacional y el máster de Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, ambos impartidos en la Universidad Jaume I, Castellón, España.  
Email: [raulruiztorres@gmail.com](mailto:raulruiztorres@gmail.com)

**Nadia Usó Abella.** Arquitecta por la Universidad Politécnica de Valencia (UPV, España), con estudio propio en la provincia de Castellón. Estudiante del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, especialidad en Matemáticas, por la Universitat Jaume I de Castellón (UJI, España, curso 2022-2023).  
Orcid: 0000-0003-3432-4698

Anexo

Rúbrica del Cuestionario 1	NO LOGRO	DEFICIENTE	BUENA	ALTA	PONDERACIÓN
	1	2	3	4	
<b>Interés y motivación</b>	Los/Las alumnos/as no prestan atención y se muestran apáticos ante las actividades.	Los/Las alumnos/as permanecen atentos, pero no participan. Se presentan con un carácter neutro ante la situación.	Los/Las alumnos/as prestan atención y participan en clase. Se observa un ambiente de interés generalizado.	Los/Las alumnos/as prestan atención, participan en clase y, además, se interesan por saber más y seguir aprendiendo. El ambiente de la clase es de entusiasmo.	20%
<b>Rendimiento</b>	Los/Las alumnos/as no trabajan en clase. No se observa una mejora significativa en las capacidades o, incluso, se muestra un atraso en estas.	Los/Las alumnos/as trabajan en clase, pero a un ritmo más lento del habitual. No parece existir una mejora significativa en las capacidades de los alumnos.	Los/Las alumnos/as trabajan en clase a un ritmo ligeramente más rápido del habitual. Se observa una mejora significativa en el aprendizaje de los alumnos.	Los/Las alumnos/as trabajan en clase a un ritmo mucho más rápido de lo habitual. Se observa una gran mejora en los conocimientos y capacidades de los alumnos.	20%
<b>Visualización del espacio tridimensional</b>	Los/Las alumnos/as han empeorado sus capacidades en la visualización del espacio tridimensional. El material dificulta la visualización de las actividades.	Los/Las alumnos/as no muestran mejoras significativas en la visualización del espacio. Los alumnos siguen teniendo los mismos problemas a la hora de visualizar las actividades.	Los/Las alumnos/as han aumentado sus capacidades en la visualización del espacio tridimensional. Esto provoca que visualicen mejor las actividades de la unidad didáctica.	Los/Las alumnos/as han aumentado considerablemente sus capacidades en la visualización del espacio tridimensional. Se observa que los alumnos visualizan las actividades con gran facilidad.	20%
<b>Dificultades en la unidad didáctica</b>	El material no soluciona las dificultades que tienen los/las alumnos/as de la unidad didáctica y se generan más problemas a la hora de entender el temario.	No se observan mejoras significativas en la disminución de las dificultades que tienen los/las alumnos/as en la unidad didáctica. No provoca más problemas, pero tampoco soluciona las que había anteriormente.	El material soluciona varias de las dificultades que tienen los/las alumnos/as de la unidad didáctica. No se solucionan todos los problemas, pero sí que se observa una mejora en el entendimiento de las actividades.	El material soluciona por o casi por completo todas las dificultades que tienen los/las alumnos/as de la unidad didáctica. Los/Las alumnos/as con ayuda del material comprenden y realizan perfectamente las actividades.	20%
<b>Evaluación final de los alumnos</b>	Los/Las alumnos/as han empeorado sus calificaciones haciendo uso del nuevo material.	Los/Las alumnos/as mantienen, aproximadamente, las mismas calificaciones habiendo usado el nuevo material.	Los/Las alumnos/as han aumentado significativamente sus notas de la unidad didáctica gracias al nuevo material.	Los/Las alumnos/as han mejorado considerablemente sus calificaciones después de la utilización del nuevo material.	20%
<b>Sugerencias de aspectos a mejorar</b>					

Figura 12. Rúbrica correspondiente al cuestionario 1. Imagen propia.



**Prototipo físico-manipulativo: Material didáctico de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje ...**

I. Arroyo San José, J. I. Mestre Miravet, R. Ruiz Torres, N. Usó Abella

Rúbrica del Cuestionario 2	NO LOGRO	DEFICIENTE	BUENA	ALTA	PONDERACIÓN
	1	2	3	4	
<b>Manipulación de la maqueta</b>	El/La profesor/a se encuentra muy incómodo cuando utiliza el material en la explicación de la unidad didáctica. Es imposible manipular correctamente el material.	El/La profesor/a se siente incómodo cuando utiliza el material en la explicación de la unidad didáctica. El material es costoso a la hora de sujetar y manipular.	El/La profesor/a se encuentra cómodo cuando hace uso del material. Este se sujeta de forma correcta y es fácil de manipular.	El/La profesor/a se siente muy cómodo a la hora de hacer uso del material. Este se adapta perfectamente a las diferentes situaciones que requiere el/la profesora a la hora de explicar.	25%
<b>Agilidad en la programación de la unidad didáctica</b>	El material empeora gravemente la planificación de las sesiones que tiene programadas el/la profesor/a. Se necesitan muchas sesiones extra para realizar la unidad didáctica.	El material no se ajusta correctamente a la planificación de las sesiones que tiene programadas el/la profesor/a. Se necesitan algunas sesiones extra para completar la unidad didáctica.	El material se ajusta correctamente a la planificación de las sesiones que tiene programadas el/la profesor/a. Además, mejora significativamente el ritmo de las clases.	El material se ajusta perfectamente a la planificación de las sesiones que tiene programadas el/la profesor/a. De hecho, el uso del material reduce considerablemente las sesiones de aprendizaje de la unidad didáctica.	25%
<b>Utilidad de los ejemplos que aparecen en el proyecto</b>	Los ejemplos que se muestran son demasiado escasos para comprender cómo se aplica el material a las actividades. El/La profesora necesita de muchas horas extra para aprender a utilizar el material correctamente y completar sus aplicaciones.	Los ejemplos que se muestran son escasos para comprender cómo se aplica el material a las actividades. Aunque algunos son útiles, otras aplicaciones necesarias para la unidad didáctica no aparecen.	Los ejemplos que se muestran son útiles para comprender cómo se aplica el material a las distintas actividades. Aunque no aparecen todas las situaciones, la lista de ejemplos es suficiente para poder deducir el resto.	Los ejemplos que se muestran son muy útiles para comprender cómo se aplica el material a las distintas actividades. La lista de ejemplos que aparece es muy completa.	25%
<b>Facilidad a la hora de conseguir los recursos</b>	El/La profesor/a le ha resultado prácticamente imposible conseguir los recursos para fabricar el material ya sea por tema económico o por disponibilidad en su entorno cercano.	El/La profesor/a ha tenido ciertas dificultades en la obtención del material. Este sobrepasa levemente el presupuesto o el lugar dónde se obtuvo en lugares especializados.	El/La profesor/a considera que ha sido fácil la obtención del material y a un precio accesible.	El/La profesor/a ya disponía del material o le ha resultado extremadamente fácil la obtención del material.	25%
<b>Sugerencias de aspectos a mejorar</b>					

Figura 13. Rúbrica correspondiente al cuestionario 2. Imagen propia.