UNIVERSIDAD JAUME I

MÁSTER EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL (DISTANCIA)

TESIS FIN DE MÁSTER

PRODUCTOS FINITOS DE ESPACIOS PSEUDOCOMPACTOS

Autora: JHOSSELYNE ESTRELLA OSTAIZA GARCÍA
jhosseostaiza@gmail.com

Tutor: MANUEL SANCHIS LÓPEZ, Ph.D
manuel.sanchis@mat.uji.es

OCTUBRE, 2023

DECLARACIÓN

Yo JHOSSELYNE ESTRELLA OSTAIZA GARCÍA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría que no ha sido previamente presentado para ningún grado de calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Universidad Jaume I, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Jhosselyne Estrella Ostaiza García

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JHOSSELYNE ESTRELLA OSTAIZA GARCÍA, bajo mi supervisión.

Manuel Sanchis López, Ph.D
Tutor del Trabajo

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por rodearme siempre de personas maravillosas y extraordinarias toda mi vida.

A mi familia, por las muestras de amor a la distancia que día a día me han dado, por estar allí con los te quieros y los ¡Tú puedes!.

A todos los profesores del máster en Matemática Computacional de la Universidad Jaume I, por compartir su conocimiento, pero en especial quiero agradecer, al Dr. Manuel Sanchis, por guiarme e invertir tiempo y paciencia en el desarrollo de este trabajo. ¡Mil y un gracias!.

A mis amigos, por escucharme y siempre darme aliento.

Al amor de mi vida, por tener paciencia, por el amor y sobre todo por escucharme cada vez que una demostración no tenia sentido.

DEDICATORIA

A todas las personas que encuentran fascinante el mundo de las matemáticas.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo estudiaremos las nociones básicas de los espacios de Tychonoff para los cuales el anillo de las funciones continuas y acotadas, coincide con el anillo de las funciones continuas, a estos espacios los llamaremos pseudocompactos. Daremos algunas caracterizaciones de estos espacios utilizando propiedades y operaciones topológicas. También daremos una breve introducción a los grupos pseudocompactos para poder así enunciar un problema a futuro.

Palabras clave Pseudocompacto, compactaciones de Stone-Čech, producto de espacios pseudocompactos.

Abstract

In this work we will study basic notions of Tychonoff spaces, for which the ring of continuous and bounded functions coincides with the ring of continuous functions, which will be named pseudocompact spaces. We will provide several characterizations of these spaces using topological properties and operations. We will also give a brief introduction to pseudocompact groups to be able to enunciate an unsolved problem for future research.

Key words Pseudocompact, Stone-Čech compactification, Products of Pseudocompact Spaces .

Notación

Notaciones generales

$\emptyset$	Conjunto vacío.
$\mathbb{R}$	Espacio de números reales
$\mathbb{R}_+$	Espacio de los números reales positivos.
$\mathbb{N}$	Espacio de números naturales.
$\mathbb{Z}^+$	Espacio de los enteros positivos.
$I = [0,1]$	Intervalo unidad.
(a,b)	Intervalo abierto.
$f(A)$	Imagen del conjunto A bajo f.
$A \subset B$	El conjunto A esta contenido en el conjunto B.
$B(x,r)$	Bola abierta en $\mathbb{R}$ con centro en x y radio r.
$cl_X(U)$	Clausura de U en el espacio X.
$int_X(U)$	Interior de U en el espacio X.
$\mathcal{P}(U)$	Conjunto de partes de U.
$card(A)$	Cardinalidad del conjunto A.
ω	Primer ordinal infinito.
ω_1	Primer ordinal no numerable.
$X \cong Y$	X es homeomorfo a Y.
$C(U)$	Espacio de funciones continuas a valores reales definidas en U.
$C^*(U)$	Espacio de funciones continuas acotadas a valores reales.
$\beta(X)$	Compactación de Stone-Čech.

Capítulo 1

Introducción

En todo espacio topológico que satisface ciertas restricciones, se pueden asociar dos estructuras algebraicas no triviales: el anillo de funciones acotadas continuas a valores reales y el anillo de todas las funciones continuas con valores reales definidas en ese espacio. Estos anillos gozan de un gran número de interesantes propiedades algebraicas, que están relacionadas con las correspondientes propiedades topológicas del espacio en el que están definidos. Esperaríamos que utilizando técnicas algebraicas apropiadas en el estudio de estos anillos se puedan lograr algunos avances de métodos generales para la solución de problemas topológicos.

En 1948, Edwin Hewitt [7] quería extender la teoría propuesta en anillos de funciones continuas y acotadas con valores reales a anillos con funciones continuas que no necesariamente sean acotadas. Hewitt consideró espacios que admiten funciones continuas que no son acotadas y agrupó los espacios donde las funciones continuas son acotadas en una clase llamada espacios pseudocompactos. Al agrupar estos espacios, Hewitt logró verificar algunos resultados ya conocidos y también demostró que en los espacios Tychonoff todo conjunto numerablemente compacto es pseudocompacto y que la equivalencia entre pseudocompacto y numerablemente compacto se obtiene en espacios metrizables. A partir del trabajo de Hewitt se publicaron una gama amplia de trabajos que exponen las propiedades y diversas caracterizaciones de los espacios pseudocompactos.

Si un espacio X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y todo subconjunto de X también satisface $\mathcal{P}$, entonces decimos que la propiedad $\mathcal{P}$ es heridataria. Si una propiedad $\mathcal{P}$ solo se hereda para subconjuntos cerrados, entonces decimos que la propiedad $\mathcal{P}$ es hereditaria para subconjuntos cerrados.

En 1951, Katětov [9] construyó un ejemplo de un espacio topológico pseudocompacto, el cuál contiene un subconjunto cerrado que no es pseudocompacto, mostrando que la pseudocompacidad no es una propiedad que se herede necesariamente a los subconjuntos cerrados, opuesto a lo tenemos en los espacios compactos.

Un aspecto importante de la teoría de los espacios pseudocompactos es el estudio del producto finito de dichos espacios. En 1959, Frolík [4] abordó este problema. Primero determinó las condiciones para las cuales el producto de dos espacios pseudocompactos es pseudocompacto. Seguidamente estudió qué condiciones debe cumplir un espacio para que el producto con un espacio pseudocompacto cualquiera sea un espacio pseudocompacto. Finalmente, analizó los espacios X en los que la propiedad anterior es hereditaria para subconjuntos cerrados.

Todos los espacios X considerados en esta memoria serán espacios de Tychonoff. Denotaremos por $C(X)$ al anillo de funciones continuas con valores en los reales y por $C^*(X)$ al anillo de funciones continuas y acotadas con valores en los reales. Si no se dice lo contrario, $\mathbb{R}$ es el espacio de los números reales con la topología usual.

La Memoria se estructura de la siguiente manera: en el capítulo *Preliminares* daremos nociones básicas y propiedades importantes de los espacios topológicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. En el capítulo de *Nociones básicas sobre espacios pseudocompactos* presentaremos diferentes caracterizaciones de los espacios pseudocompactos y del producto de espacios pseudocompactos. El capítulo *Grupos topológicos y la clase de Frolík* $\mathfrak{P}$ analizaremos los grupos topológicos pseudocompactos. Finalizaremos con el planteamiento de un problema abierto. Para notación y terminología no definida en la memoria puede consultarse [3].

Capítulo 2

Preliminares

Para el estudio de espacios topológicos pseudocompactos es necesario establecer nociones topológicas que sean útiles para el análisis de dichos espacios. Para ello, en el primer capitulo establecemos las definiciones y propiedades básicas que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Nos centraremos en caracterizaciones topológicas obviando aquellas que involucran teoremas de carácter *funcional* como, por ejemplo, el Teorema de Dini. Comenzaremos por presentar algunas nociones básicas de topología.

2.1. Funciones

DEFINICIÓN 2.1 (Función). *Un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ se denomina una relación. La relación $f \subset A \times B$ se dice que es una función de A a B si para todo $x \in A$ existe un $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ y y está únicamente determinado por x. Es decir, si $(x, y) \in f$ y $(x, y') \in f$, entonces $y = y'$.*

El conjunto A es el dominio y el conjunto B es el rango de la función f.

DEFINICIÓN 2.2 (Imagen e inversa). *Sea $f : A \to B$. Si A_0 es un subconjunto de A, denotamos por $f(A_0)$ al conjunto de todas las imágenes de los puntos de A_0 bajo la función f; este conjunto es llamado la imagen de A_0 bajo f.*

$$f(A_0) = \{b : b = f(a) \text{ para algún } a \in A_0\},$$

y la imagen inversa del conjunto $B_0 \subset B$ bajo f es el conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in A; f(x) \in B\}.$$

2.2. Teoría de conjuntos

Los términos *conjunto finito*, *conjunto infinito*, *conjunto numerable* y *conjunto no numerable* representan tipos de conjuntos que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

DEFINICIÓN 2.3 (Conjunto finito). *Un conjunto A es finito si es vació o si existe una función biyectiva*

$$f : A \to \{1, 2, ..., n\},$$

para algún número entero positivo n. Si A es vacío decimos que A tiene cardinalidad 0; si no, la cardinalidad de A es n.

Como ejemplo de conjunto no finito, tenemos a $\mathbb{Z}^+$, el conjunto de los números enteros no negativos. Además, si B es un subconjunto de un conjunto finito A, entonces B es finito. También, la unión finita y el producto cartesiano finito de conjuntos finitos es finita.

DEFINICIÓN 2.4 (Conjunto infinito numerable). *Un conjunto A es infinito si no es finito. Decimos que es infinito numerable si existe una función biyectiva*

$$f : A \to \mathbb{Z}^+.$$

El conjunto de los enteros es infinito numerable, así como el producto finito de los enteros no negativos.

DEFINICIÓN 2.5 (Conjunto numerable). *Un conjunto es numerable si es finito o infinito numerable.*

Un subconjunto de un conjunto numerable es numerable. La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

2.3. Espacios topológicos

Es esta sección definiremos que es un espacio topológico y daremos algunos conceptos elementales asociados con los espacios topológicos. Las demostraciones de las proposiciones que enunciamos en esta sección se pueden encontrar en [10]

Una topología de un conjunto dado X, es una familia de subconjuntos de X que tienen ciertas características que nos permiten medir de alguna manera la proximidad o lejanía de los subconjuntos que pertenecen a X.

DEFINICIÓN 2.6 (Espacio Topológico). *Un espacio topológico es un par (X, τ) que consta de un conjunto X y una familia τ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $\emptyset$ y X pertenecen a τ.

(2) La unión de elementos de una subfamilia de τ están en τ.

(3) La intersección finita de elementos de τ están en τ.

El conjunto X es llamado espacio, los elementos de X son llamados puntos del espacio, y los subconjuntos de X pertenecientes a τ son llamados conjuntos abiertos del espacio.

EJEMPLO 1 (Topología discreta). Para cualquier conjunto X, la familia $\mathcal{P}(X)$ de todos sus posibles subconjuntos de X satisface los axiomas que definen una topología. A esta le llamaremos topología discreta en X, y al par $(X, \mathcal{P}(X))$ es el espacio discreto X.

DEFINICIÓN 2.7 (Base). *Dado un conjunto X, se dice que una familia de conjuntos abiertos $\mathcal{B}$ es una base para la topología de un espacio topológico (X, τ) si todo subconjunto abierto no vacío de X puede expresarse como la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, una base $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X que satisface :*

(1) Si $x \in V$, V un conjunto abierto (X, τ), entonces existe al menos un $B \in \mathcal{B}$ que $x \in B \subset V$.

(2) Si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Dada una base $\mathcal{B}$ para una topología en X, la topología generada por $\mathcal{B}$ es aquella tal que, U es un abierto si, y solo si, para todo $x \in U$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

DEFINICIÓN 2.8 (Vecindad abierta). *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un conjunto abierto $U \subset X$ es una vecindad abierta de x si $x \in U$.*

DEFINICIÓN 2.9 (Conjunto cerrado). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto F de X es un conjunto cerrado si su complemento es un conjunto abierto; es decir, $X \backslash F \in \tau$.*

DEFINICIÓN 2.10 (Interior de un conjunto). *Sea (X, τ) un espacio topológico. El interior de un subconjunto A de X es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A. Este conjunto se denota por $int_X(A)$.*

PROPOSICIÓN 2.1. *El punto x pertenece al $int_X(A)$ si y solo si existe una vecindad U de x tal que $U \subset A$.*

DEFINICIÓN 2.11 (Clausura de un conjunto). *Sea (X, τ) un espacio topológico. La clausura de un subconjunto A es la intersección de todos los cerrados que contienen a A; este conjunto se denota por $cl_X(A)$.*

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y A, B subconjuntos de X. Entonces*

(1) $x \in cl_X(A)$ si, y solo si, todo conjunto abierto U que contiene a x satisface $U \cap A \neq \emptyset$.

(2) Si B es un conjunto cerrado que contiene a A, entonces $cl(A) \subseteq B$.

(3) Si $A \subseteq B$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.

(4) $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$.

DEFINICIÓN 2.12 (Punto de acumulación). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si A es un subconjunto de X y $x \in X$, decimos que x es un punto límite o punto de acumulación de A si toda vecindad de x interseca a A en algún punto distinto de x. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A se lo nota por A'.*

DEFINICIÓN 2.13 (Conjunto Denso). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de un espacio X es denso en X si $cl(A) = X$.*

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto A es denso en X si, y solo si, todo conjunto abierto $U \neq \emptyset$ satisface $U \cap A \neq \emptyset$.*

DEFINICIÓN 2.14 (Recubrimiento abierto). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\{A_s : s \in S\}$ de subconjuntos abiertos de X es un recubrimiento abierto si se satisface:*

$$\bigcup_{s \in S} A_s = X.$$

DEFINICIÓN 2.15 (Función continua). *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Dada $f : X \to Y$ se dice que es continua si para cada $\mathcal{U} \in \tau_Y$ se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$.*

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *dos espacios topológicos. Dada* $f : X \to Y$*. Las siguientes propiedades son equivalentes*

(1) f *es continua.*

(2) *Dado un subconjunto* A *de* X *tenemos que* $f(cl_X(A)) \subset cl_Y(f(A))$*.*

(3) *Dado un subconjunto cerrado* B *de* Y*, el conjunto* $f^{-1}(B)$ *es cerrado en* X*.*

(4) *Para cada* $x \in X$ *y toda vecindad* V *de* $f(x)$*, existe una vecindad* U *de* x *tal que* $f(U) \subset V$*.*

DEFINICIÓN 2.16 (Conjunto C-sumergible y conjunto C^*-sumergible)**.** *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* P *un subconjunto de* X*. Se dice que* P *es* C*-sumergible (respectivamente,* C^**-sumergible) en* X *si toda función continua (respectivamente, continua y acotada)* $f : P \to \mathbb{R}$ *se puede extender a una función continua (respectivamente, continua y acotada) a todo* X*.*

Introducimos a continuación el concepto de homeomorfismo. Un homeomorfismo entre dos espacios topológicos nos dice ue estos son indistinguibles.

DEFINICIÓN 2.17 (Homeomorfismo)**.** *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *dos espacios topológicos, una función* $f : X \to Y$ *es un homeomorfismo si* f *es biyectiva y tanto* f *como* f^{-1} *son continuas.*

En el caso que exista un homeomorfismo entre X y Y, decimos que X y Y son *homeomorfos*.

2.4. Axiomas de separación

Veamos varios tipos de espacios topológicos que se introducen mediante los denominados axiomas de separación.

DEFINICIÓN 2.18 (Espacio T_1)**.** *Un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio* T_1 *si para cada par de puntos distintos* $x, y \in X$ *existe un conjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$ *y* $y \notin U$*.*

DEFINICIÓN 2.19 (Espacio de Hausdorff)**.** *Un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio de Hausdorff si dado dos puntos distintos* $x, y \in X$*, podemos determinar dos conjuntos abiertos disjuntos* U_1*,* U_2 *tales que* $x \in U_1$ *y* $y \in U_2$*.*

DEFINICIÓN 2.20 (Espacio compacto). *Un espacio topológico (X, τ) es compacto si X es de Hausdorff y todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito.*

DEFINICIÓN 2.21 (Espacio completamente regular). *Un espacio topológico (X, τ) es un espacio completamente regular si para todo subconjunto cerrado F de X y todo punto $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \in F$.*

DEFINICIÓN 2.22 (Espacio Tychonoff). *Un espacio topológico (X, τ) es un espacio de Tychonoff si es un espacio T_1 y es completamente regular.*

OBSERVACIÓN. Todo espacio Tychonoff es de Haussdorf.

DEFINICIÓN 2.23 (Conjunto cero y conjunto cocero). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto Z de X es un conjunto cero si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que satisface $Z = f^{-1}[\{0\}]$.*

Un subconjunto C de X es un conjunto cocero de X si es el complemento de algún subconjunto cero de X.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico. Entonces*

(1) Todo conjunto cero es un subconjunto cerrado de X.

(2) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces los conjuntos:

a) $\{x \in X : f(x) \geq a\}$.

b) $\{x \in X : f(x) \leq a\}$.

c) $\{x \in X : a \leq f(x) \leq b\}$,

son conjuntos cero.

(3) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces los conjuntos:

a) $\{x \in X : f(x) < a\}$.

b) $\{x \in X : f(x) > a\}$.

c) $\{x \in X : a < f(x) < b\}$,

son conjuntos cocero.

DEFINICIÓN 2.24 (Topología producto). *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. La topología producto de $X \times Y$ es la topología que tiene como base la familia*

$\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X, y V es un subconjunto abierto de Y. Estos conjuntos se denominan abiertos canónicos.

DEFINICIÓN 2.25 (Espacio sumergido)**.** *Un espacio topológico X se dice que está sumergido en un espacio topológico Y, si X es homeomorfo a un subespacio de Y.*

Si X está sumergido en Y, entonces podemos identificar X con la imagen del homeomorfismo que lo sumerge en Y.

DEFINICIÓN 2.26 (Compactación de un espacio)**.** *Sea Y un espacio compacto y $g : X \to Y$ un homeomorfismo que hace a X homeomorfo a un subespacio de Y tal que $cl(g(X)) = Y$. El par (Y, g) se denomina una compactación del espacio X.*

Usualmente, X se identifica con $g(X)$ y por una compactación se entiende un espacio compacto en el que X es denso. Frecuentemente, una compactación de un espacio X se obtiene uniendo uno o más puntos a X y luego definiendo una topología de tal manera que el espacio resultante sea compacto y contenga a X como subespacio.

Capítulo 3

Nociones básicas sobre espacios pseudocompactos

En este capítulo revisaremos algunos resultados clásicos relacionados con los espacios pseudocompactos. Los resultados mostrados aquí aparecen en [3], [8] y [4].

3.1. Propiedades Básicas

DEFINICIÓN 3.1 (Espacio pseudocompacto)**.** *Un espacio topológico de Tychonoff* (X, τ) *es pseudocompacto si toda función continua,* $f : X \to \mathbb{R}$*, satisface que* $f[X]$ *es acotado, es decir, existe* $m \in \mathbb{R}$ *tal que,*

$$|f(x)| \leq m \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Ya que la imagen bajo una función continua f de cualquier espacio compacto es un espacio compacto, nos interesaría conocer si esta propiedad también se preserva en los espacios pseudocompacto.

PROPOSICIÓN 3.1. *Si* X *es un espacio pseudocompacto,* Y *un espacio topológico, y existe una función continua* $f : X \to Y$*, entonces* $f(Y)$ *es un espacio pseudocompacto.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f[X] = Y$. Si Y no es un espacio pseudocompacto, entonces existe una función continua $g : Y \to \mathbb{R}$ tal que $g[Y]$ no es acotada. Se tiene que $g \circ f \in C(X)$ y $(g \circ f)[X]$ no es acotada, lo que es una contradicción, ya que $g \circ f$ es una función continua. $\square$

El siguiente concepto es básico en la teoría de los espacios pseudocompactos.

DEFINICIÓN 3.2 (Familia localmente finita). *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Una familia* $\{A_s : s \in S\}$ *de subconjuntos de un espacio* X *se dice que es una familia localmente finita si, para todo punto* $x \in X$*, existe un conjunto abierto* V *que contiene a* x *y que intersecta solo a un número finito de elementos de* $\mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 3.3 (Familia con la propiedad de la intersección finita). *Sean* (X, τ) *un espacio topológico. Una familia* $\{A_s : s \in S\}$ *de subconjuntos de un espacio* X *tiene la propiedad de la intersección finita (p.i.f) si toda subfamilia finita tiene intersección no vacía.*

En el siguiente teorema presentamos varias caracterizaciones de los espacios pseudocompactos.

TEOREMA 3.2. *Para un espacio* (X, τ)*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X *es pseudocompacto.*

(2) Toda familia localmente finita de conjuntos abiertos de X *es finita.*

(3) Toda familia numerable de subconjuntos abiertos de X *con la propiedad de la intersección finita satisface que la intersección de la clausura de sus elementos es no vacía.*

(4) Todo recubrimiento abierto numerable de X *tiene un subrecubrimiento finito tal que su unión es densa en* X.

(5) Todo recubrimiento numerable formado por conjuntos coceros de X *tiene un subrecubrimiento finito.*

(6) X *no contiene una copia* C*-sumergible del espacio discreto de los números naturales.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que existe una familia infinita $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X que es localmente finita. Tomemos un punto $x_i \in U_i$ para todo $i = 1, 2, ...$ Como X es un espacio de Tychonoff, existe funciones continuas $f_i : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_i(x_i) = i$ y $f_i(x) = 0$ para $x \notin U_i$. Como $\mathcal{U}$ es una familia localmente finita, tenemos que la función

$$f = \sum_{i \geq 1} |f_i|$$

esta bien definida, pues en cada punto x solo hay una cantidad finita de sumandos no nulos. Solo nos falta demostrar que f es continua. Sea $x \in X$ y $f(x) \in (a,b)$, determinaremos un vecindad abierta V del punto x tal que $f[V] \subset (a,b)$. Como $\mathcal{U}$ es una familia localmente finita, entonces existe un conjunto abierto O que contiene a x tal que $C = \{n : U_n \cap O \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito. Tomando $C_1 := \{n \geq 1 : f_n(x) > 0\}$ tenemos que

$$C_1 \subset C \quad \text{y} \quad f(y) = \sum_{n \in C_1} f_n(y), \text{ para todo } y \in O,$$

de donde podemos asegurar que C_1 es un conjunto finito, pues es un subconjunto de un conjunto finito. Además, tenemos que la función $\sum\limits_{n \in C_1} f_n$ es continua (por ser la suma finita de funciones continuas), por tanto existe un conjunto abierto W que satisface

$$\sum_{n \in C_1} f_n[W] \subset (a,b).$$

Tomando $V = O \cap W$ se obtiene el resultado deseado, pues

$$f[V] \subset (a,b).$$

Por otro lado, f no es acotada pues $f(x_n) \geq n$, para todo n. Lo cual es una contradicción pues X es un espacio pseudocomapcto.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que existe una familia de subconjuntos abiertos $\{U_n : n \geq 1\}$ con la propiedad de intersección finita que satisface:

$$\bigcap_{n \geq 1} cl(U_n) = \emptyset.$$

Si definimos $V_n = \bigcap_{i \leq n} U_i$, entonces $\{V_n : n \geq 1\}$ es una familia localmente finita de conjuntos abiertos. En efecto, por hipótesis y las leyes de De Morgan tenemos que

$$X = \bigcup_{n \geq 1} [cl(U_n)]^c.$$

Dado un punto $x \in X$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin cl(U_{n_0})$. Por el apartado (1) de la Proposición 2.2 sabemos que existe un conjunto abierto O que contiene a x tal que $O \cap U_{n_0} = \emptyset$. Por tanto, para todo $n \geq n_0$ tenemos que

$$\emptyset = O \cap \bigcap_{i \leq n} U_i = O \cap V_n.$$

Por otro lado, por hipótesis tenemos que $\{V_n : n \geq 1\}$ es finita y entonces existe n_1

tal que si $n \geq n_1$, entonces $V_n = V_{n_1}$ y $V_{n_1} \neq \emptyset$. Por tanto, para $n > n_1$ tenemos

$$V_{n_1} = V_n \subset U_n \subset cl(U_n),$$

y para $n \leq n_1$,

$$V_{n_1} \subset U_n \subset cl(U_n),$$

con lo cual, para todo $n \geq 1$,

$$V_{n_1} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} cl(U_n)$$

de donde $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} cl(U_n) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sea $\{U_n : n \geq 1\}$ un recubrimiento abierto de X tal que todo conjunto finito F cumple

$$X \neq cl\left(\bigcup_{n \in F} U_n\right).$$

Aplicando las leyes de De Morgan, se tiene

$$\emptyset \neq X \backslash \bigcup_{n \in F} cl(U_i).$$

Definamos para todo $n \geq 1$ el conjunto $W_n := X \backslash cl(U_n)$. Entonces

$$\bigcap_{i \leq r} W_i = X \backslash \left(\bigcup_{i \leq r} cl(U_i)\right),$$

con $X \backslash \left(\bigcup_{i \leq r} cl(U_i)\right) \neq \emptyset$. Entonces $\{W_n : n \geq 1\}$ satisface la propiedad de la intersección finita, con lo cual $\bigcap\limits_{n \geq 1} cl(W_n) \neq \emptyset$. Por hipótesis $\{U_n : n \geq 1\}$ es un recubrimiento abierto de X, entonces

$$\bigcap_{n \geq 1} (X \backslash U_n) = X \backslash \bigcup_{n \geq 1} U_n = \emptyset.$$

Por las propiedades de la clausura de un conjunto, tenemos

$$X \backslash cl(U_n) \subset X \backslash U_n.$$

Como U_n es un conjunto abierto, entonces $X \backslash U_n$ es un conjunto cerrado. Por el apartado (2) de la Proposición 2.2 se cumple que

$$cl(X \backslash cl(U_n)) \subset X \backslash U_n, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Por tanto,

$$\bigcap_{n\geq 1} cl(W_n) = \bigcap_{n\geq 1} (cl(X\backslash cl(U_n))) \subset \bigcap_{n\geq 1} (X\backslash U_n) = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción.

(4) $\Rightarrow$ (5) Sean $\{C_n : n \geq 1\}$ un recubrimiento de conjuntos cocero de X y $f_n \in C(X)$ tal que

$$C_n = f_n^{-1}[[0,1]\backslash\{0\}].$$

Definimos $C_{n,i} := f_n^{-1}\left[\left(\frac{1}{i},1\right]\right]$ con $i,n \geq 1$. Notemos que los conjuntos $C_{n,i}$ son conjuntos abiertos de X y

$$C_n = \bigcup_{i\geq 1} C_{n,i} = \bigcup_{i\geq 1} cl(C_{n,i}).$$

En particular, $\{C_{n,i} : n,i \geq 1\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como $\{C_{n,i} : n,i \geq 1\}$ es numerable, entonces por hipótesis sabemos que existe una subfamilia finita $\mathcal{F} = \{C_{n_0,i_0}, ..., C_{n_k,i_k}\}$ de $\{C_{n,i} : n,i \geq 1\}$ que satisface

$$cl\left(\bigcup_{j\leq k} C_{n_j,i_j}\right) = X,$$

lo que implica

$$X = cl\left(\bigcup_{j\leq k} C_{n_j,i_j}\right) = \bigcup_{j\leq k} cl(C_{n_j,i_j}).$$

Es decir, para todo $i \geq 1$ y $n \geq 1$, tenemos

$$cl(C_{n,i}) \subset C_{n,i+1} \subset C_n.$$

Por tanto,

$$X = \bigcup_{j\leq k} C_{n_j},$$

con lo que hemos terminado la demostración.

(5) $\Rightarrow$ (6) Sean $D = \{x_n : n \geq 1\}$ un subespacio numerable discreto de X el cual es C-sumergible en X y tomemos $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_n) = n$ (pues X es de Tychonoff). Supongamos que $\widetilde{f}$ es una extensión continua de f y definamos

$$C_n := \{x \in X : \widetilde{f}(x) < n\}.$$

La familia $\{C_n : n \geq 1\}$ es un recubrimiento de X formado por conjuntos cocero para todo $n \geq 1$, es decir,

$$X = \bigcup_{n \geq 1} C_n,$$

y se tiene un subrecubrimiento finito. Por otro lado, para todo $n \geq 1$ tenemos que $x_n \notin \bigcup_{j \leq n} C_j$ y esto es una contradicción. Por tanto, no existe un subrecubrimiento finito del recubrimiento original.

(6) $\Rightarrow$ (1) Sea X un espacio de Tychonoff que no contiene copias $C-$sumergibles del espacio discreto de los números naturales. Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua no acotada. Definimos, por inducción, la familia $\{C_n : n \geq 1\}$ tal que

$$C_1 := \{x \in X : 1 < f(x)\},$$

y $x_n \in C_n$ con

$$C_{n+1} := \{x \in X : \text{máx}\{n, f(x_n)\} < f(x)\}.$$

Esta familia está bien definida pues $C_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Por otro lado definimos $A := \{x_n : n \geq 1\}$ y

$$O_1 := \{x \in X : f(x) < f(x_2)\} \quad y \quad O_n := \{x \in X : f(x_{n-1}) < f(x) < f(x_{n+1})\}, \quad n > 1.$$

Entonces,

$$O_n \cap A = \{x_n\}.$$

Por tanto, A es un conjunto discreto. Ahora demostremos que A es C-sumergible en X. Para ello definimos, por inducción, la familia $\{F_n : n \geq 1\}$ de conjuntos cerrados como

$$F_0 := \{x \in X : f(x) \leq 1\} \cup \{x \in X : f(x_2) \leq f(x))\},$$

y para todo $n \geq 1$

$$F_n := \{x \in X : f(x) \leq f(x_n)\} \cup \{x \in X : f(x_{n+2}) \leq f(x)\}.$$

Notemos que $x_{n+1} \notin F_n$.

Demostremos que una función continua $h : A \to \mathbb{R}$ tiene una extensión continua a todo X. Dado $n \geq 0$, existen $f_n \in C(X)$ que satisfacen

$$f_n(y) = \begin{cases} h(y) & y \in \{x_{n+1}\}, \\ 0 & y \in F_n. \end{cases}$$

Por otro lado, definimos $G : X \to \mathbb{R}$ como

$$G(x) := \sum_{i\geq 1} f_i(x).$$

Si $z \in X$, existe $n \geq 1$ tal que $f(z) < n$ y, por tanto, $z \in F_{n+1}$. Sin embargo, para todo $m \geq n+1$ se satisface

$$z \in f^{-1}[(-\infty, n)] \subset F_m, \text{ lo que implica que } G(z) = \sum_{i\leq n} f_i(z).$$

Como $\sum_{i\leq n} f_i \in C(X)$, tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad abierta O de x en X tal que

$$\sum_{i\leq n} f_i[O] \subset \left(\sum_{i\leq n} f_i(w) - \epsilon, \sum_{i\leq n} f_i(w) + \epsilon \right).$$

Si $V = f^{-1}[(-\infty, n)] \cap O$, entonces V es un conjunto abierto que contiene a x que satisface

$$G(y) = \sum_{i\leq n} f_i(y) \in \left(\sum_{i\leq n} f_i(w) - \epsilon, \sum_{i\leq n} f_i(w) + \epsilon \right), \quad y \in V.$$

Es decir, $G : X \to \mathbb{R}$ es una función continua.
Por otro lado, para $x_n \in A$ tenemos que $G(x_n) = \sum_{i\geq 1} f_i(x_n)$. Mientras que, para $m \geq n$, tenemos $x_n \in F_m$ y, por tanto, $f_m(x_n) = 0$. Adicionalmente,

$$f_{n-1}(x_n) = h(x_n).$$

Ahora, si $k < n-1$, entonces $x_n \in F_k$. Esto implica que

$$f_k(x_n) = 0,$$

de donde podemos concluir que

$$G(x_n) = f_{n-1}(x_n) = h(x_n),$$

es decir, G es una extensión continua de h y, por tanto, obtenemos una contradicción pues, por hipótesis, tenemos que X no tiene copias $C-$sumergibles del espacio discreto de los números naturales. $\square$

Mediante la proposición anterior podemos caracterizar la pseudocompacidad a través de recubrimientos.

COROLARIO 3.3. *Dado un espacio de Tychonoff (X, τ), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es pseudocompacto.

(2) Todo recubrimiento abierto localmente finito de X es finito.

(3) Todo recubrimiento abierto localmente finito de X tiene un subrecubrimiento finito.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Se tiene del Teorema 3.2.
$(2) \Rightarrow (3)$ Se sigue directamente, pues el recubrimiento es finito.
$(3) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua. Sabemos que la familia

$$\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\},$$

es un recubrimiento abierto localmente finito de $\mathbb{R}$. Entonces

$$\{f^{-1}[(n-1, n+1)] : n \in \mathbb{Z}\},$$

es un recubrimiento abierto localmente finito de X. Por tanto, existe $\{n_1, ..., n_r\} \subset \mathbb{Z}$ tal que

$$\{f^{-1}[(n_i - 1, n_i + 1)] : i \in \{1, ..., r\}\}$$

es un subrecubrimiento finito de X. Si escogemos $m = \text{máx}\{n_i : i \in \{1, ..., r\}\}$, tenemos que para todo punto $x \in X$ satisface

$$|f(x)| \leq |m|,$$

es decir, f es acotada. □

En la demostración del apartado (3) del Teorema 3.2, usamos sucesiones de subconjuntos abiertos que están encajados. Utilizando este hecho podemos demostrar el siguiente corolario.

COROLARIO 3.4. *En un espacio topológico de Tychonoff (X, τ), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es pseudocompacto.

(2) Si $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \subset W_n$, entonces $\bigcap_{n \geq 1} cl(W_n) \neq \emptyset$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean X un espacio pseudocompacto y $\{W_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos de X. Por el Teorema 3.2, la familia $\{W_n : n \geq 1\}$ no es localmente finita; por tanto existe un punto $x \in X$, tal que toda vecindad de x interseca una cantidad infinita de W_n. Por tanto, $x \in \bigcap_{n\geq 1} cl(W_n)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si demostramos que (2) implica que toda familia numerable $\{V_i : i \geq 1\}$ de subconjuntos abiertos de X que satisfacen la propiedad de la intersección finita cumple que $\bigcap_{i\geq 1} cl(V_i) \neq \emptyset$, entonces tendríamos el resultado usando el Teorema 3.2.
Para ello, notemos que si $W_n = \bigcap_{i\leq n} V_i$, entonces $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente con la propiedad de la intersección finita y

$$\bigcap_{i\geq 1} cl(V_i) = \bigcap_{i\geq 1} cl(W_i) \neq \emptyset.$$

por tanto, tenemos que X es pseudocompacto. $\square$

DEFINICIÓN 3.4 (Familia discreta de conjuntos)**.** *Sean (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{A}$ de X es una familia discreta en X si, para todo $x \in X$, existe un conjunto abierto V que contiene a x que satisface*

$$card(\{C \in \mathcal{A} : C \cap V \neq \emptyset\}) \leq 1.$$

Debido a que toda familia discreta es localmente finita, del apartado (2) del Teorema 3.2 obtenemos que un espacio X es pseudocompacto si, y solo si, toda familia discreta de conjuntos abiertos de X es finita. Antes de dar el siguiente resultado demos la definición formal de punto límite.

DEFINICIÓN 3.5 (Punto límite)**.** *Sean X un espacio topológico (X, τ) y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Un punto $x \in X$ es un punto límite de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si todo conjunto abierto V que contiene a x satisface $\{n : U_n \cap V \neq \emptyset\}$ es infinito.*

Es decir, el resultado anterior nos ayuda a caracterizar los espacios pseudocompactos a través de sus puntos límites.

COROLARIO 3.5. *Un espacio topológico (X, τ) es pseudocompacto si, y solo si, toda familia numerable de subconjuntos abiertos no vacíos de X tiene un punto límite.*

Demostración. Veamos que la condición es suficiente. Supongamos que X es un espacio pseudocompacto y que existe una familia $\{U_n : n \geq 1\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que para todo $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que el conjunto $\{n : U_n \cap V \neq \emptyset\}$ es finito. Entonces $\{U_n : n \geq 1\}$ es una familia localmente finita. Por el apartado (2) del Teorema 3.2, tenemos que la familia $\{U_n : n \geq 1\}$ es finita; por tanto, existe $n_0 \geq 1$ tal que para $n \geq n_0$ tenemos $U_n = U_{n_0}$. Sea $x \in U_{n_0}$, se tiene que toda vecindad V de x, satisface

$$\{m : m \geq n_0\} \subset \{m : U_m \cap V \neq \emptyset\},$$

lo que nos proporciona una contradicción.

Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que X no es pseudocompacto. En este caso, existe una familia infinita de subconjuntos discretos no vacíos de X, lo que contradice la definición de punto límite. $\square$

Recordemos que un espacio X es numerablemente compacto si todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

COROLARIO 3.6. *Todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto.*

Demostración. El resultado se deduce de la definición de numerablemente compacto y del Corolario 3.5. $\square$

Para dar un ejemplo que nos permita visualizar que el recíproco del corolario anterior no se satisface, consideraremos espacios de ordinales. Sea ω_1 el primer ordinal no numerable. Es bien conocido que el espacio $[0, \omega_1]$ dotado de la topología del orden es numerablemente compacto: en efecto, si $F \subset [0, \omega_1]$ es un subconjunto numerable, entonces el supremo de F pertenece a $[0, \omega_1]$ y es un punto de acumulación de F.

EJEMPLO 2 (Plano de Tychonoff)**.** Si ω_1 es el primer ordinal no numerable y ω es el primer ordinal infinito entonces el plano de Tychonoff T esta definido como

$$T = \{[0, \omega] \times [0, \omega_1]\} \backslash \{(\omega, \omega_1)\},$$

y es un subespacio del espacio producto $[0, \omega] \times [0, \omega_1]$. Vamos a demostrar que T es un espacio pseudocompacto que no es numerablemente compacto. En efecto, el subconjunto infinito $A = \{(n, \omega_1) : n < \omega\}$ es discreto y cerrado en T; por tanto, T no es numerablemente compacto.

Vamos a demostrar que T es pseudocompacto. Se sabe que la clausura de un subconjunto numerable de puntos aislados de T es compacta. Esto significa que, si

$f : T \to \mathbb{R}$ es una función continua y no acotada, obtenemos un conjunto numerable $\{t_n : n < \omega\}$ de puntos aislados en T tal que $\{f(t_n) : n < \omega\}$ es no acotado en $\mathbb{R}$; entonces $f[cl_T(\{t_n : n < \omega\})]$ es compacto y no acotado, lo que es una contradicción.

Hasta ahora no hemos analizado si existe una la relación entre los espacios compactos y los espacios pseudocompactos. Se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.7. *Todo espacio compacto es pseudocompacto.*

Demostración. Se deduce del hecho de que la imagen de un espacio compacto por una función continua es compacta y del hecho de que loa compactos de $\mathbb{R}$ son acotados. $\square$

A continuación presentaremos una clase de espacios en los que la propiedad de ser pseudocompacto y la propiedad de ser numertablemente compacto son equivalentes.

PROPOSICIÓN 3.8. *Si X es un espacio metrizable, entonces X es compacto si, y solo si, X es pseudocompacto.*

Demostración. La suficiencia se cumple por la Proposición 3.7.

Veamos que la condición es necesaria. Sea X es un espacio metrizable pseudocompacto y supongamos que X no es numerablemente compacto. Entonces, existe un subconjunto cerrado, discreto e infinito $A = \{x_i : i \geq 1\}$ de X tal que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. El resultado se deduce ahora del hecho de que, en un espacio metrizable, todo conjunto cerrado es C-sumergible. $\square$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es

COROLARIO 3.9. *Un espacio X es pseudocompacto si, y solo si, dada una función continua $f : X \to \mathbb{R}$, el conjunto $f[X]$ es compacto.*

Se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.6 (Suma topológica). *Sea $\mathcal{G} = \{(X_i, \tau_i) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y disjuntos dos a dos. Denotando por $X = \amalg_j X_j$ a la unión disjunta. El espacio*

$$\mathcal{O} = \{U \subset X : U \cap X_j \subset X_j \text{ es un conjunto abierto para todo } j\},$$

es una topología de X. Decimos que $(X, \mathcal{O})$ es la suma topológica de la familia $\mathcal{G}$.

La suma topológica de la familia $\mathcal{G}$, denotada por $\bigoplus_{j \in J} X_j$, está formada por subconjuntos abiertos que se obtienen, simplemente, uniendo subconjuntos abiertos de los espacios que se están sumando.

Recordemos que un subconjunto F de un espacio X se dice regular cerrado si $cl_X(int_X F) = F$. La propiedad de ser un espacio pseudocompacto no es hereditaria para subconjuntos cerrados. Este hecho es una consecuencia del apartado (2) de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.10. *En un espacio topológico (X, τ), se verifican las siguientes propiedades*

(1) Si X tiene un subespacio pseudocompacto denso, entonces X es pseudocompacto.

(2) Si todo subconjunto cerrado de un espacio X es pseudocompacto, entonces X es numerablemente compacto.

(3) Todo subconjunto regular cerrado de un espacio pseudocompacto es pseudocompacto.

(4) La suma topológica libre $\bigoplus\{X_s : s \in S\}$ es un espacio pseudocompacto si, y solo si, todo espacio X_s es pseudocompacto y S es un conjunto finito.

Demostración. (1) Sea D un subconjunto pseudocompacto X tal que $cl(D) = X$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existe un intervalo cerrado y acotado K tal que $f[D] \subset K$. Entonces,

$$f[X] \subset f[cl(D)] \subset cl(f[D]) \subset K.$$

Por tanto, X es pseudocompacto.

(2) Recordemos que X es numerablemente compacto si, y solo si, todo subconjunto cerrado y discreto es finito. Sea $D = \{x_n : n \geq 1\}$ un subconjunto cerrado y discreto de X. Ya que D es discreto, tenemos que $\{\{x_n\} : n \geq 1\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos abiertos de D. Pero, por hipótesis, D es pseudocompacto y, por tanto, D es finito. Esto prueba que X es numerablemente compacto.

(3) Sean X un espacio pseudocompacto, A un subconjunto abierto de X y $\mathcal{U}$ una familia localmente finita de subconjuntos no vacíos disjuntos dos a dos de $cl(A)$.

Entonces, $\mathcal{V} = \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos no vacíos disjuntos dos a dos de X. Por tanto, por el Teorema 3.2, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{U}$ son finitos.

(4) Veamos que la condición es suficiente. Supongamos que $X = \bigoplus\{X_s : s \in S\}$ es un espacio pseudocompacto. Entonces los X_s son subconjuntos regulares cerrados de X para todo $s \in S$, de donde todo X_s es pseudocompacto. Además, $\{X_s : s \in S\}$ es una familia localmente finita en X que es finita.

Ahora veamos que la condición es necesaria. Supongamos que existen una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua que no es acotada y un subconjunto $\{x_n : n \geq 1\}$ de X con $x_n \neq x_m$, $n \neq m$ tal que $|f(x_n)| > n$. Entonces, existe un número $s_0 \in S$ y $A \subset \{x_n : n \geq 1\}$ donde A infinito y $A \subset X_{s_0}$. Por lo tanto, $|f|$ es una extensión continua de X_{s_0} que no es acotada; lo que contradice el hecho de que X_{s_0} es un espacio pseudocompacto. Esto concluye la demostración. $\square$

3.2. Espacios Pseudocompactos y la Compactación de Stone-Čech

En esta sección estudiaremos como se comportan los espacios pseudocompactos en relación con la compactación de Stone-Čech. Para ello presentaremos algunos resultados fundamentales de dicha compactación. Estos resultados pueden consultarse en el texto de Gilman and Jerison [5].
Una de las propiedades más interesantes de la compactación de Stone-Čech $\beta(X)$ es que toda función continua $f : X \to K$ de un espacio de Hausdorff compacto K se puede extender de forma única a una función continua $g : \beta(X) \to K$. Pasamos a describir otras propiedades de la compactación de Stone-Čech. Necesitamos alguna notación previa. Al conjunto de todos los conjuntos ceros de un espacio topológico X lo denotaremos por $\mathcal{Z}(X)$; es decir,

$$\mathcal{Z}(X) = \{Z \subset X : Z = f^{-1}[\{0\}], \quad f \in C(X)\}.$$

DEFINICIÓN 3.7 (z-filtro). *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{Z}(X)$ es un z-filtro sobre X si*

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(3) Si $F \subset G$, $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{Z}(X)$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

Un z-ultrafiltro de X es un z-filtro que no está contenido en otro z-filtro de X.

Al conjunto de todos los z-ultrafiltros de X lo denotaremos por βX. Cuando $Z \in \mathcal{F}(X)$, definimos $cl(Z) := \{p \in \beta X : Z \in p\}$. La familia $\{cl(Z) : Z \in \mathcal{Z}(X)\}$ es una base para los subconjuntos cerrados de una topología τ en βX. El espacio $(\beta(X), \tau)$ se denomina la compactación de Stone-Čech de X.

Omitiremos las demostraciones de los siguientes resultados que se puede encontrar en [5].

PROPOSICIÓN 3.11. *Dado un subconjunto denso D de un espacio X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) D es C^*-sumergible en X.

(2) Si Z_1 y Z_2 son dos conjuntos ceros disjuntos de D, entonces

$$cl_{\beta X} Z_1 \cap cl_{\beta X} Z_2 = \emptyset.$$

(3) Si Z_1 y Z_2 son dos conjuntos ceros de D, entonces

$$cl_X Z_1 \cap cl_X Z_2 = cl_X(Z_1 \cap Z_2).$$

TEOREMA 3.12. *Dado un espacio X, la compactación βX es la única compactación de X (salvo homeomorfismos que dejen a X fijo) que satisface las siguientes propiedades:*

(1) Dado un espacio compacto K, toda función continua $g : X \to K$ tiene una extensión continua a $\beta(X)$.

(2) Toda $f \in C^*(X)$ tiene una extensión $f^\beta \in C(\beta X)$.

(3) Dados dos conjuntos ceros disjuntos en X, sus clausuras en $\beta(X)$ son disjuntas.

(4) Si Z_1 y Z_2 son dos conjuntos ceros disjuntos de X, entonces

$$cl_{\beta(X)} Z_1 \cap cl_{\beta(X)} Z_2 = cl_{\beta(X)}(Z_1 \cap Z_2).$$

Vamos a ver a continuación que todo espacio de Tychonoff se puede sumergir como un subespacio cerrado de un espacio pseudocompacto [11].

TEOREMA 3.13. *Todo espacio de Tychonoff puede ser sumergible como un subespacio cerrado de un espacio pseudocompacto.*

Demostración. Sea X un espacio de Tychonoff. Sea $Y = (\beta(X) \times [0, \omega_1)) \cup (X \times \{\omega_1\})$ un subespacio de $\beta(X) \times [0, \omega_1]$. Se tiene que X es homeomorfo a $X \times \{\omega_1\}$. Además, $X \times \{\omega_1\}$ es cerrado en Y.
Vamos a demostrar que Y es pseudocompacto. Para ello, observemos que $\beta(X) \times [0, \omega_1)$ es denso en Y, y que si $\{(z_n, \alpha_n) : n \geq 1\}$ es un subconjunto numerable en $X \times [0, \omega_1)$, entonces está contenido en el subespacio compacto $\beta(X) \times [0, \eta] \subset \beta(X) \times [0, \omega_1)$, donde $\eta = \sup\{\alpha_n : n \geq 1\}$. De aquí se deduce que $\beta(X) \times [0, \omega_1)$ es numerablemente compacto y, por tanto, por el Corolario 3.6, Y es pseudocompacto. □

Vamos a introducir una clase de conjuntos que juegan un papel importante en muchas ramas de la topología.

DEFINICIÓN 3.8 (Conjunto G_δ)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto G de un espacio X se dice que es un G_δ si G es la intersección de una familia numerable de subconjuntos abiertos de X.*

Si X es un espacio, un subconjunto Y de X se dice que es G_δ-denso en X si todo conjunto no vacío de tipo G_δ tiene intersección no vacía con Y. Esto es equivalente a que todo conjunto cero de X interseca a Y. El siguiente teorema caracteriza los espacios pseudocompactos utilizando la compactación de Stone-Čech.

TEOREMA 3.14. *Sea X un espacio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es pseudocompacto.

(2) X es $G_\delta-$denso en cada compactación de X.

(3) X es $G_\delta-$denso en βX.

(4) Todo conjunto cero no vació en βX tiene intersección no vacía con X.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ La demostración la realizaremos por reducción al absurdo. Denotemos por $b(X)$ a una compactación de X y tomemos $\{G_n : n \geq 1\}$ una familia de conjuntos abiertos de $b(X)$ tal que $G = \bigcap_{n\geq 1} G_n$ es un subconjunto G_δ de $b(X)$. Supongamos que $G \cap X = \emptyset$ y tomemos $z \in G$. Entonces, ya que $b(X)$ es de Tychonoff, para todo $n > 1$ existe un conjunto cero Z_n de $b(X)$ tal que $z \in Z_n \subset G_n$. Como la intersección numerable de conjuntos ceros es un conjunto cero, tenemos que $Z = \bigcap_{n\geq 1} Z_n$ es un conjunto cero de $b(X)$ y $z \in Z \subset G$. Sea $f : bX \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $Z = Z(f)$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in b(X)$. Por lo tanto, $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Ya que

$$z \in f^{-1}\left[\left[0, \frac{1}{n+1}\right)\right], \quad n \geq 1.$$

X es denso en $b(X)$, entonces para cada $n \geq 1$, existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) < \frac{1}{n+1}$; por tanto $1/f$ extiende a f continuamente y esta no es acotada, lo cual es una contradicción al ser X pseudocompacto.

(2) $\Rightarrow$ (3) La demostración es obvia, pues por (2) X es G_δ denso en cualquier compactación de X, en particular para la compactación de Stone-Čech.

(3) $\Rightarrow$ (4) Todo conjunto cero es un conjunto G_δ, por tanto, basta aplicar la condición (3) para obtener el resultado.

(4) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ positiva y no acotada. Para $n \geq 1$, definimos $f_n = \text{mín}\{\mathbf{n+1}, f\}$, donde **n+1** es la función constante que asigna a todo $x \in X$ el valor $n+1$. Como las f_n ($n \geq 1$) son funciones continuas y acotadas, por el Teorema 3.12 existen extensiones continuas $f_n^* : \beta X \to \mathbb{R}$. Como estamos realizando la demostración por reducción al absurdo, consideramos la sucesión $F_n = (f_n^*)^{-1}[[n+1, +\infty)]$ ($n \geq 1$) de conjuntos cero no vacíos de $\beta(X)$. Ahjora, para todo $n \geq 1$, existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) > n+1$ y, como por definición de las f_n, tenemos que $f_n(x_n) = n+1$, entonces $x_n \in F_n$. Además, para todo $n \geq 1$ y $x \in X$ $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Por lo tanto, para todo $z \in \beta X$ obtenemos que $f_{n+1}^*(z) \leq f_n^*(z)$. Es decir, $\{F_n : n \geq 1\}$ es una familia decreciente de conjuntos cero no vacíos de βX que tiene la propiedad de la intersección finita. Como βX es compacto, entonces $F = \bigcap_{n \geq 1} F_n$ es no vacío. Al ser todos los conjuntos F_n conjuntos cero, entonces F es un conjunto cero y, por tanto, un conjunto G_δ en βX. Si $z \in X \cap F$, entonces $f_n(z) \geq n$ para todo n. Por otro lado, existe $n_0 \geq 1$ tal que $f(z) \leq n_0$. Por lo tanto, para todo $m > n_0$, $f_m(z) = f(z) < m$. Sin embargo, sabemos que $f_m(z) \geq m$. Esta contradicción implica que $F \cap X = \emptyset$ y, con ello, terminanos la demostración. □

3.3. Producto de dos espacios pseudocompactos

La pseudocompacidad es una propiedad que no se mantiene si consideramos el producto de espacios topológicos. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 3. Existe un espacio pseudocompacto X tal que $X \times X$ no es pseudocompacto.

Vamos a construir el espacio X en la compactación de Stone-Čech $\beta(\mathbb{N})$ de manera recursiva. Para ello, primero definamos los conjuntos,

$$N_1 := \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

y

$$N_2 := \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Estos conjuntos son C^*-sumergibles en $\mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$cl_{\beta(\mathbb{N})} N_i = \beta(\mathbb{N}) = \beta(N_i) \cong_{\mathbb{N}} \beta(\mathbb{N}).$$

Además, por el Teorema 3.12 tenemos

$$\beta(N_1) \cap \beta(N_2) = \emptyset \text{ y } \beta(N_1) \cup \beta(N_2) = \beta(\mathbb{N}).$$

Por otro lado, definamos el homeomorfismo $h : \beta(N_1) \to \beta(N_2)$ tal que $h(2n-1) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea $\phi : \beta(N_1) \cup \beta(N_2) \to \beta(\mathbb{N})$ tal que:

$$\phi(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \in \beta N_1, \\ h^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in \beta N_2. \end{cases}$$

Entonces ϕ no tiene puntos fijos y $\phi \circ \phi$ es la función identidad en $\beta(\mathbb{N})$. Sea $\mathcal{S}$ la familia de todos los conjuntos numerables de $\beta(\mathbb{N})$. Como $card(\beta(\mathbb{N})) = 2^{\mathfrak{c}} = card(\mathcal{S})$, entonces los elementos de $\mathcal{S}$ son conjuntos de la forma $\{S_\lambda : \lambda \in 2^{\mathfrak{c}}\}$. Sea $p_0 \in cl_{\beta(\mathbb{N})} S_0$. Supongamos que para todo $\epsilon < \gamma < 2^{\mathfrak{c}}$ podemos elegir un punto $p_\epsilon \in cl_{\beta(\mathbb{N})} S_\epsilon \backslash \{\phi(p_\delta) : \delta < \epsilon\}$. Tenemos que $card(cl_{\beta(\mathbb{N})} S_\gamma) = 2^{\mathfrak{c}}$. Podemos elegir

$$p_\gamma \in cl_{\beta(\mathbb{N})} S_\gamma \backslash \{\phi(p_\epsilon) : \epsilon < \gamma\}.$$

Definimos nuestro espacio como

$$X := \mathbb{N} \cup \{p_\gamma : \gamma < 2^{\mathfrak{c}}\} \subset \beta(\mathbb{N}).$$

Por construcción, cada subconjunto infinito numerable de X tiene un punto de acumulación en X. Por tanto, X es numerablemente compacto y por el Lema 3.6 pseudocompacto.

Si mostramos que $X \times X$ tiene una copia C-sumergida de los naturales, entonces por el Teorema 3.2(6), el espacio $X \times X$ no es pseudocompacto. Para ello consideremos el conjunto infinito $D := \{(n, \phi(n)) : n \in \mathbb{N}\}$. Por definición de ϕ, cada punto en D es un punto aislado y D es un conjunto abierto y discreto pues $\{(n, \phi(n))\}$ es un abierto de $\beta(\mathbb{N}) \times \beta(\mathbb{N})$.

Por otro lado, si $p \notin \mathbb{N}$, entonces X no contiene ni a p ni a $\phi(p)$. En efecto, si $p, \phi(p) \in X$, tenemos que $p = p_\gamma \notin \mathbb{N}$ para un $\gamma < 2^{\mathfrak{c}}$. Si $\phi(p_\gamma) \in \mathbb{N}$, entonces $\phi \circ \phi(p_\gamma) = p_\gamma \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible. Entonces $\phi(p_\gamma) \notin \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $\phi(p_\gamma) = p_\delta$ para $\delta < 2^{\mathfrak{c}}$. Por la construcción se tiene que nunca $\gamma < \delta$, ya que ϕ no tiene puntos fijos $\gamma \neq \delta$. Pero si $\delta < \gamma$, entonces $p_\gamma = \phi(\phi(p_\gamma)) = \phi(p_\delta)$ y esto es imposible.

Tenemos que $D = (X \times X) \cap G$, con $G = \{(p, \phi(p)) : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ es un subconjunto de $\beta(\mathbb{N}) \times \beta(\mathbb{N})$ y, como G es el grafo de una función continua, G es cerrado. Por tanto, D es un cerrado en $X \times X$. Esto implica que el espacio $X \times X$ no es pseudocompacto.

Estudiaremos a continuación algunas propiedades del producto de espacios pseudocompactos. Comenzaremos con la definición de pseudométrica.

DEFINICIÓN 3.9 (Pseudométrica). *Una pseudométrica en un conjunto X es una función $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ tal que para todo $x, y, z \in X$ se satisface:*

(1) $\rho(x, x) = 0$.

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

El siguiente lema nos ayuda a determinar que el ínfimo sobre un compacto de una función continua es continua.

LEMA 3.15. *Sean (X, τ) un espacio topológico, K un subconjunto compacto y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función continua. Para todo x_1, x_2 y x en X definamos*

$$\phi(x_1, x_2) = \sup_{k \in K} |f(x_1, k) - f(x_2, k)|,$$

y

$$F(x) = \inf_{k \in K} f(x, k).$$

entonces ϕ es una pseudométrica continua en X. También F es una función continua sobre X.

Demostración. Primero demostremos que ϕ es una pseudométrica. Sean $x_1, x_2 \in X$

(1) Por definición de ϕ tenemos que $\phi(x_1, x_1) = \sup_{k \in K} |f(x_1, k) - f(x_1, k)| = 0$.

(2) Para verificar la simetría

$$\phi(x_1, x_2) = \sup_{k\in K} |f(x_1,k) - f(x_2,k)| = \sup_{k\in K} |f(x_2,k) - f(x_1,k)| = \phi(x_2, x_1).$$

(3) Para verificar la desigualdad triangular, usamos propiedades del supremo:

$$\begin{aligned}
\phi(x_1, x_2) &= \sup_{k\in K} |f(x_1,k) - f(x_3,k) + f(x_3,k) - f(x_2,k)| \\
&\leq \sup_{k\in K} |f(x_1,k) - f(x_3,k)| + \sup_{k\in K} |f(x_3,k) - f(x_2,k)| \\
&= \phi(x_1, x_3) + \phi(x_3, x_2)
\end{aligned}$$

Como se verifica (1), (2) y (3), concluimos que ϕ es una pseudométrica. Mientras que para probar la continuidad de ϕ ya que ϕ es una pseudométrica, es suficiente mostrar que para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe un vecindad abierta U de x tal que

$$\phi(x, x') \leq \varepsilon,$$

para todo $x' \in U$. Por continuidad de f sabemos que para todo $k \in K$ podemos escoger una vecindad canónica abierta $W(k) = U(k) \times V(k)$ que contiene a (x,k) tal que, para todo $(x_0, y_0) \in W(k)$

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

Por otro lado, el espacio K es compacto, entonces existe un subconjunto finito M de K tal que la familia $\{V(k) : k \in M\}$ es un recubrimiento finito de K. Escribimos $U = \bigcap_{k\in M} U(k)$. Para todo $x' \in U$ y todo $k \in K$ tenemos que

$$|f(x,k) - f(x',k)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\phi(x, x') \leq \varepsilon$ para todo $x' \in U$.

Para demostrar ahora que F es continua, basta tner en cuenta que para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe una vecindad abierta U de x tal que

$$|F(x) - F(y)| = |\inf_{k\in K} f(x,k) - \inf_{k\in K} f(y,k)| < \varepsilon$$

para todo $y \in U$. □

Como habíamos visto al principio de esta sección, el producto de espacios pseudocompacto no necesariamente es pseudocompacto y por el Teorema 3.2 podemos decir que un espacio X es pseudocompacto si y solo si toda familia localmente finita es finita o equivalentemente si no existe una sucesión localmente finita de conjuntos no vacíos. Por tanto, un espacio no es pseudocompacto si existe una sucesión localmente finita. De manera formal, tenemos el siguiente teorema.

LEMA 3.16. *Sean X y Y dos espacios. Si el espacio $R = X \times Y$ no es pseudocompacto, entonces, existe una sucesión localmente finita $\{U_n \times V_n\}_{n\geq 1}$ de subconjuntos abiertos canónicos no vacíos de $X \times Y$ tal que $\{U_n\}_{n\geq 1}$ y $\{V_n\}_{n\geq 1}$ son sucesiones de conjuntos disjuntos dos a dos.*

Demostración. Supongamos que $R = X \times Y$ no es pseudocompacto y determinemos una sucesión localmente finita de conjuntos abiertos canónicos no vacíos de $X \times Y$. Consideraremos dos casos.

Primer caso: Uno de los dos espacios involucrado en el espacio producto no es pseudocompacto. Supongamos que X no es pseudocompacto, entonces, por el Teorema 3.2, existe una familia localmente finita de subconjuntos abiertos, no vacíos, disjuntos dos a dos $\{U_n : n \geq 1\}$ de X infinita. Por otro lado, como Y es de Tychonoff, entonces podemos escoger una sucesión de subconjuntos abiertos, no vacíos disjuntos dos a dos $\{V_n : n \geq 1\}$ de Y. Si escogemos $\{U_n \times V_n\}_{n\geq 1}$, entonces tenemos una familia localmente finita que es infinita.

Segundo caso: Los dos espacios son pseudocompactos. Sea $\{U'_n \times V'_n : n \geq 1\}$ una familia localmente finita de conjuntos abiertos no vacíos de $X \times Y$. Sean $x \in X$ y $\{U'_{n_k} \times V'_{n_k} : n_k \geq 1\}$ una subfamilia de $\{U'_n \times V'_n : n \geq 1\}$ tal que existe una vecindad abierta U de x con $U \cap U'_{n_k} = \emptyset$ para un número infinito $n_k \geq 1$. Por inducción podemos elegir una sucesión $n_1, n_2, ... \in \mathbb{N}$ y subconjuntos abiertos no vacíos $U_{n_i} \subset U'_{n_i}$ tal que la familia $\{U_{n_i} : i \geq 1\}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Usando el mismo argumento para la familia numerable $\{U_{n_i} \times V'_{n_i} : i \geq 1\}$, obtenemos una subsucesión $\{n_{i_k} : k \geq 1\}$ de $\{n_i : i \geq 1\}$ y subconjuntos abiertos no vacíos $V_{n_{i_k}} \subset V'_{n_{i_k}}$ tal que la familia $V_{n_{i_k}}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Por tanto, la sucesión $\{U_{n_{i_k}} \times V_{n_{i_k}} : k \geq 1\}$ es la familia localmente finita buscada. □

Introducimos a continuación dos conceptos que usaremos posteriormente.

DEFINICIÓN 3.10 (Función Semicontinua Inferioremente y Función Semicontinua Superiormente)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que es semicontinua inferiormente (superiormente) si, para todo $x \in X$ y todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > r$ ($f(x) < r$), existe una vecindad U de x tal que $f(x') > r$ ($f(x') < r$) para todo $x' \in U$.*

Observación. Una función es continua si, y solo si, es semicontinua inferior y superiormente.

Lema 3.17. *Sea $X \times Y$ un espacio Tychonoff pseudocompacto y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para todo $x \in X$, las funciones*

$$F(x) = \inf_{y \in Y} f(x,y) \quad y \quad G(x) = \sup_{y \in Y} f(x,y),$$

son continuas en X.

Demostración. Notemos que $F(x) = \inf_{y \in Y} f(x,y) = -\sup_{y \in Y}[-f(x,y)]$, por tanto bastará demostrar la continuidad de una de las dos funciones. Demostremos que F es continua en X. Como la función F es semicontinua superiormente, pues es un ínfimo de las funciones continuas $f(\cdot, y)$ para $y \in Y$, solo faltaría demostrar que F es semicontinua inferiormente, y así obtendremos que F es continua. Supongamos lo contrario, que F no es semicontinua inferiormente, es decir, existe un $x_0 \in X$ y un número real $\varepsilon > 0$ tal que para toda vecindad U de x_0, existe un $(x,y) \in U \times Y$, tal que $f(x,y) < F(x_0) - 3\varepsilon$.

Por inducción podemos construir puntos (x_n, y_n) y vecindades abiertas $W_n = U_n \times V_n$ de (x_n, y_n) y $W_n' = U_n' \times V_n$ de (x_0, y_n) tal que

(1) $$\begin{aligned} &|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon, && (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in W_n \\ &|f(x_1',y_1) - f(x_2',y_2)| < \varepsilon, && (x_1',y_1),(x_2',y_2) \in W_n'. \end{aligned}$$

(2) $U_n \subset U_{n-1}'$,

(3) $f(x_n, y_n) < F(x_0) - 3\varepsilon$.

Para $i < n$, escogemos x_i, y_i, W_i y W_i' como antes y definimos

$$U := \begin{cases} U_{n-1}' & n > 1, \\ X & n = 1. \end{cases}$$

Como $X \times Y$ es pseudocompacto, podemos elegir $(x_n, y_n) \in U \times Y$ tal que $f(x_n, y_n) < F(x_0) - 3\varepsilon$. De la continuidad de f se deduce que existen U_n, V_n y U_n' tal que $U_n \subset U_{n-1}'$ y $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$ con $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in W_n$, $|f(x_1',y_1) - f(x_2',y_2)| < \varepsilon$ con $(x_1',y_1),(x_2',y_2) \in W_n'$.

Ya que el espacio $X \times Y$ es pseudocompacto, existe un punto de acumulación $(\overline{x}, \overline{y})$ de $\{W_n : n \geq 1\}$. Ya que

$$f(x,y) < F(x_0) - 2\varepsilon \quad (x,y) \in W_n,$$

por la continuidad de f, tenemos que

$$f(\overline{x}, \overline{y}) \leq F(x_0) - 2\varepsilon.$$

Por otro lado, de la condición (2) concluimos que $(\overline{x}, \overline{y})$ es un punto de acumulación de $\{W'_n : n \geq 1\}$. Del hecho de que $f(\overline{x}, \overline{y}) > F(x_0) - \varepsilon$, y la continuidad de f tenemos que

$$f(\overline{x}, \overline{y}) \geq F(x_0) - \varepsilon.$$

Hemos obtenido una contradicción. Esto completa la prueba. $\square$

El siguiente lema se debe a Frolík [4] y juega un papel importante en su prueba de cuándo el funtor de la compactación de Stone-Čech distribuye.

LEMA 3.18. *Sea $X \times Y$ un espacio pseudocompacto y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $b(Y)$ es una compactación de Y tal que $f(x, \cdot)$ puede ser extendida continuamente a $b(Y)$, entonces f tiene una extensión continua a $X \times b(Y)$.*

Demostración. Si extendemos toda función $f(x, \cdot)$ continuamente a $\{x\} \times b(Y)$, obtenemos una función f^* sobre $X \times b(Y)$. Vamos a probar que f^* es la extensión buscada. Dado $(x_0, y_0) \in X \times b(Y)$ y $\varepsilon > 0$, debemos determinar una vecindad $W = U \times V$ de (x_0, y_0) tal que $|f^*(x_0, y_0) - f(x, y)| < \varepsilon$ para todo (x, y) en W. Escojamos una vecindad abierta V de y_0 en $b(Y)$ tal que $|f^*(x_0, y) - f^*(x_0, y_0)| < \varepsilon$ para todo y en V. El espacio $cl_Y(V \cap b(Y))$ es pseudocompacto, por tanto, podemos escoger una vecindad abierta U de x_0 tal que para todo x en U

$$\inf_{y \in V \cap Y} f(x, y) > f^*(x_0, y_0) - 2\varepsilon$$

y

$$\sup_{y \in V \cap Y} f(x, y) < f^*(x_0, y_0) + 2\varepsilon.$$

En consecuencia, tenemos que $|f^*(x, y) - f^*(x_0, y_0)| < 2\varepsilon$ para todo (x, y) en $U \times V$, esto demuestra que f^* es continua. $\square$

El siguiente teorema fue demostrado por Glicksberg, la prueba que presentamos se debe a Frolík [4]; esta prueba es puramente topológica al contrario de la demostración que dio Glicksberg [6] que uso elementos de la teoría de la medida.

TEOREMA 3.19. *Dados dos espacios X y Y , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $X \times Y$ es un espacio pseudocompacto.

(2) Toda función continua y acotada sobre $X \times Y$ posee una extensión continua a $\beta(X) \times \beta(Y)$

(3) Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito $\mathcal{U} = \{W_1, W_2, ..., W_n\}$ de $X \times Y$ tal que la función f en cada uno de estos W_i verifica que

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W_i.$$

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Tenemos que probar que toda función continua y acotada sobre $X \times Y$ posee una extensión continua a $\beta(X) \times \beta(Y)$. Supongamos que $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función continua, $X \times Y$ es un espacio pseudocompacto, entonces f es acotada, por el Lema 3.18, existe una extensión continua de f a $X \times \beta(Y)$ y por este mismo lema esta extensión tiene una extensión continua a $\beta(X) \times \beta(Y)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Supongamos que $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, denotemos por f^* a la extensión continua de f a $\beta(X) \times \beta(Y)$. La familia $\{W_n : n \geq 1\}$ de todos los conjuntos abiertos canónicos de $\beta(X) \times \beta(Y)$ en los cuales f^* varía no más que ε es un recubrimiento abierto de $\beta(X) \times \beta(Y)$. Como $\beta(X) \times \beta(Y)$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{W_1, W_2, ..., W_m\}$. Por lo tanto, la familia

$$\mathfrak{U} = \{W_1 \cap X \times Y, W_2 \cap X \times Y, ..., W_m \cap X \times Y\}$$

es un recubrimiento finito, donde la función f en cada uno de estos W_i verifica que

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W_i,$$

lo que concluye la prueba.

$(3) \Rightarrow (1)$ Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $X \times Y$ no es pseudocompacto. Por el Lema 3.16, existe una familia localmente finita $\{W_n : n \geq 1\} = \{U_n \times V_n : n \geq 1\}$ de subconjuntos abiertos canónicos de $X \times Y$ tal que las familias $\{U_n : n \geq 1\}$ y $\{V_n : n \geq 1\}$ están formadas por conjuntos abiertos disjuntos dos a dos. Elegimos puntos $z_n \in W_n$ y funciones continuas $f_n : X \times Y \to [0, 1]$ tal que $f_n(z_n) = 1$ y $f_n(z) = 0$ para todo $z \notin W_n$. Definimos

$$f = \sum_{n \geq 1} f_n.$$

Al ser la familia localmente finita $\{W_n : n \geq 1\}$, la función f es continua y acotada sobre $X \times Y$. Ahora, si $A = A_1 \times A_2$ es un subconjunto abierto de $X \times Y$ y tomamos dos puntos z_n y z_k con $n \neq k$, entonces f varía ≥ 1 en A, pues, si $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, entonces los puntos (x_n, y_k) pertenecen a A y $f(x_n, y_k) = 0$. Por lo tanto,

$$f(z_n) - f(x_k, y_k) = 1.$$

Se sigue que la condición (3) no se cumple para esta función f y $\varepsilon = 1$. Por lo tanto, (3) implica (1).

□

OBSERVACIÓN. Teniendo en cuenta las propiedades de la compactación de Stone-Čech, del Teorema anterior, podemos deducir que si X e Y son infinitos, entonces que $\beta(X \times Y) = \beta(X) \times \beta(Y)$ si, y solo si, $X \times Y$ es pseudocompacto, es decir, el funtor de la compactación de Stone-Čech disgtribuye. Este resultado es conocido como el Teorema de Glisckberg [6].

Otra caracterización de cuándo el producto de dos espacios pseudocompactos es pseudocompacto nos la proporciona el siguiente resultado. Recordemos que una pseudométrica en un conjunto X se denomina totalmente acotada si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento finito de X formado por bolas abiertas de radio $\varepsilon > 0$.

TEOREMA 3.20. *Sean X y Y dos espacios, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $X \times Y$ *es un espacio pseudocompacto.*

(2) Si X y Y son dos espacios pseudocompactos y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, entonces las funciones

$$\begin{aligned} \Phi : \quad Y &\to C(X) \\ y &\mapsto f(\cdot, y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Psi : \quad X &\to C(Y) \\ x &\mapsto f(x, \cdot) \end{aligned}$$

son continuas.

(3) Para toda función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ continua y acotada, las pseudométricas

$$\varphi(x_1, x_2) = \sup_{y \in Y} |f(x_1, y) - f(x_2, y)|$$

y

$$\psi(y_1, y_2) = \sup_{x \in X} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|$$

son continuas y totalmente acotadas en X y Y.

Demostración. Observemos que si denotamos a $\| \cdot \|$ la norma supremo en $C(X)$ y $C(Y)$, entonces

$$\phi(x_1, x_2) = ||f(x_1, \cdot) - f(x_2, \cdot)||,$$

y

$$\varphi(y_1, y_2) = ||f(\cdot, y_1) - f(\cdot, y_2)||.$$

Por tanto, las funciones Ψ y Φ son continuas si, y solo si, las pseudométricas ϕ y φ son continuas.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $X \times Y$ es pseudocompacto y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, por el Teorema 3.19 existe una extensión continua f^* de f a $\beta(X) \times \beta(Y)$. Por el Lema 3.15 las pseudométricas

$$\phi^*(x_1, x_2) = \sup_{y \in \beta(Y)} |f^*(x_1, y) - f^*(x_2, y)|$$

y

$$\varphi^*(y_1, y_2) = \sup_{x \in \beta(X)} |f^*(x, y_1) - f^*(x, y_2)|$$

son continuas en $\beta(X)$ y $\beta(Y)$ respectivamente. Por lo tanto, ϕ y φ son restricciones de ϕ^* y φ^*. Entonces, ϕ y φ son continuas.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es inmediato.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Por (3) las pseudométricas ϕ y φ son continuas y totalmente acotadas y por tanto podemos determinar recubrimientos finitos de conjuntos abiertos $\{A_i : i \geq 1\}$ y $\{B_j : j \geq 1\}$ de X y de Y respectivamente, tal que los diámetros de A_i en ϕ y B_j en φ son menores que ε. Entonces, $\{A_i \times B_j\}$ es un recubrimiento de $X \times Y$ de conjuntos abiertos canónicos, en donde f varía en cada $A_i \times B_j$ menos que 2ε. Por el Teorema 3.19(3), el espacio $X \times Y$ es pseudocompacto. $\square$

3.3.1. La clase de Frolík $\mathfrak{P}$

Introducimos y estudiamos a continuación la denomina clase de Frolík, la clase de los espacios pseudocompactos cuyo producto por un espacio pseudocompacto cualquiera es un espacio pseudocompacto.

DEFINICIÓN 3.11. *La clase de Frolík $\mathfrak{P}$ está formado por todos los espacios X tal que el espacio producto $X \times Y$ es un espacio pseudocompacto para todo espacio pseudocompacto Y.*

OBSERVACIÓN. Sean X y Y dos espacios, las siguientes propiedades son inmediatas:

(1) Si un espacio X es la imagen bajo una función continua de un espacio que pertenece a la clase $\mathfrak{P}$, entonces X pertenece a $\mathfrak{P}$.

(2) Si X y Y pertenecen a la clase $\mathfrak{P}$, entonces el espacio producto $X \times Y$ pertenece a $\mathfrak{P}$.

(3) Si $X \times Y$ pertenece a la clase $\mathfrak{P}$, entonces X y Y pertenecen a la clase $\mathfrak{P}$.

(4) Si F es un subespacio regular cerrado de un espacio X que pertenece a la clase $\mathfrak{P}$, entonces F pertenece a la clase $\mathfrak{P}$.

Vamos a ver a continuación algunas propiedades de la clase $\mathfrak{P}$.

TEOREMA 3.21. *Si X es un espacio pseudocompacto tal que todo punto $x \in X$ tiene una vecindad que pertenece a la clase $\mathfrak{P}$, entonces X pertenece a $\mathfrak{P}$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que para algún espacio pseudocompacto Y, el espacio $X \times Y$ no es pseudocompacto. Por Lema 3.16, existe una familia localmente finita $\{U_n \times V_n : n \geq 1\}$ que es infinita y $\{U_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos. Sea $x \in X$ y escojamos una vecindad regular cerrada U de x tal que $U \in \mathfrak{P}$; entonces $U \times Y$ es pseudocompacto. Por tanto,

$$(U_n \cap U) \times (V_n \cap Y) = (U_n \times V_n) \cap (U \times Y) \neq \emptyset,$$

solo para un número finito de n, de donde $U_n \cap U \neq \emptyset$ para un número finito de n. Es decir, existe una familia localmente finita $\{U_n : n \geq 1\}$ que es infinita, lo cual es una contradicción, pues X es pseudocompacto. □

No solo los espacios compactos son pseudocompactos sino que se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 3.22. *Los espacios compactos pertenecen a la clase $\mathfrak{P}$.*

Demostración. Sean X un espacio pseudocompacto y K un espacio compacto. Para probar que $X \times K$ es pseudocompacto es suficiente mostrar que toda función continua y acotada $f : X \times K \to \mathbb{R}$ alcanza su cota inferior. Para esto es una consecuencia del Lema 3.15, pues la función

$$F(x) = \inf_{k \in K} f(x, k),$$

es continua. En efecto, como el espacio X es pseudocompacto, la función F alcanza su cota inferior en un punto x y, como la función $f(x, \cdot)$ sobre $\{x\} \times K$ alcanza su cota inferior en un punto y, se tiene que f alcanza su cota inferior en (x, y). Esto completa la prueba. □

TEOREMA 3.23. *Un espacio X pertenece a $\mathfrak{P}$ siempre que una familia infinita de subconjuntos disjuntos no vacíos $\{A_n : n \geq 1\}$ de X, satisface $K \cap A_n \neq \emptyset$, para un número infinito de conjuntos A_n con K un subconjunto compacto de X.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que X no pertenece a $\mathfrak{P}$. En ese caso, existe un espacio pseudocompacto Y tal que $X \times Y$ no es pseudocompacto. Por el Lema 3.16 existe una sucesión localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos $\{U_n \times V_n\}_{n \geq 1}$ de $X \times Y$ tal que $\{U_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de conjuntos disjunta dos a dos. Por hipótesis existe un conjunto compacto K tal que $K \cap U_n \neq \emptyset$ para una infinidaad de n. Como sabemos que los compactos pertenecen a la clase $\mathfrak{P}$, entonces $K \times Y$ es pseudocompacto. Pero $\{(U_n \times V_n) \cap (K \times Y) : U_n \cap K \neq \emptyset\}_{n \geq 1}$ es una familia localmente finita de conjuntos abiertos no vacíos de $K \times Y$ que es infinita. Y esto es una contradicción, pues $K \times Y$ es pseudocompacto, con lo que terminamos la demostración. □

Designamos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales con la topología discreta. Vamos a considerar filtros en $\mathbb{N}$. Resaltemos que, como todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es un conjunto cero, en este contexto coincide el concepto de filtro con el de z-filtro.

Diremos que un espacio X satisface la condición de Frolík si dada una sucesión $\{U_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos abiertos no vacíos, disjuntos dos a dos de X, existe una subsucesión $\{U_{n_k}\}_{k \geq 1}$ tal que cuando $\mathcal{F}$ es un filtro de subconjuntos infinitos de $N = \{n\}$ se verifica

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} cl \left(\bigcup_{k \in F} U_{n_k} \right) \neq \emptyset.$$

El siguiente teorema caracteriza la clase de Frolík $\mathfrak{P}$. El teorema se debe a Frolik

[4] aunque su prueba contiene un error cuando se demuestra la necesidad de la condición propuesta por Frolík, este error fue resuelto por Blasco en [1].

TEOREMA 3.24. *Para un espacio X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X satisface la condición de Frolik.

(2) $X \in \mathfrak{P}$.

(3) $X \times Z$ es pseudocompacto para todo espacio pseudocompacto Z tal que $\mathbb{N} \subset Z \subset \beta\mathbb{N}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que Y es un espacio pseudocompacto. Vamos a probar que $X \times Y$ es un espacio pseudocompacto. Sea $\{U_n \times V_n : n \geq 1\}$ una sucesión de abiertos no vacíos de $X \times Y$ tal que la sucesión $\{U_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de abiertos disjuntos dos a dos (3.16). Por hipótesis existe una subsucesión $\{U_{n_k} : k \geq 1\}$ de $\{U_n : n \geq 1\}$ que satisface la condición de Frolík.

Sea y un punto de acumulación de $\{V_n : n \geq 1\}$. Consideremos la familia $\mathfrak{V}$ de entornos del punto y. Para cada $B \in \mathfrak{V}$, sea $N(B) = \{n : B \cap V_n \neq \emptyset\}$. Evidentemente,

$$\mathfrak{M} = \{N(B) : B \in \mathfrak{V}\}.$$

es un filtro en $\mathbb{N}$. Por nuestra hipótesis, existe un x que satisface la condición de Frolík para el filtro $\mathfrak{M}$. Es fácil ver que (x, y) es un punto de acumulación de $\{U_n \times V_n : n \geq 1\}$. Esto demuestra que $X \times Y$ es pseudocompacto, es decir, $X \in \mathfrak{P}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) es obvia.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que X no satisface la condición de Frolík. Entonces existe una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos $\{U_n :\geq 1\}$ de X tal que cuando N_0 es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, existe un filtro $\mathcal{F}(N_0)$ de partes infinitas de N_0 para el cual

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}(N_0)} cl_X \left(\bigcup_{n \in F} U_n \right) = \emptyset,$$

Sea $\widetilde{\mathcal{F}(N_0)}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$ para el que $\mathcal{F}(N_0)$ es una base y sea $\mathcal{U}_{N_0}$ un ultrafiltro que contenga a $\widetilde{\mathcal{F}(N_0)}$. Consideremos el subespacio de $\beta(\mathbb{N})$

$$Y = \mathbb{N} \cup \{P_{N_0} \in \beta(\mathbb{N}) : \mathcal{U}_{N_0} \text{ converge a } P_{N_0}, N_0 \subset \mathbb{N}, N_0 \text{ infinito}\},$$

y veamos que Y es pseudocompacto. Sea $\{B_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión de abiertos no vacíos, disjuntos dos a dos en Y, y sea

$$N_0 = \{n_k \in \mathbb{N} : n_k \in \mathbb{N} \cap B_k, k = 1, 2, ...\}.$$

Por hipótesis, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}_{N_0}$ sobre $\mathbb{N}$ que converge a $P_{N_0} \in Y$ y tal que $N_0 \in \mathcal{U}_{N_0}$. Por lo tanto $P_{N_0} \in cl_{\beta(\mathbb{N})}(N_0)$ y P_{N_0} es un punto de acumulación de $\{B_k\}_{k\geq 1}$.

Veamos ahora que $X \times Y$ no es pseudocompacto probando que la sucesión de abiertos $\{U_n \times \{n\}\}_{n\geq 1}$ es localmente finita en $X \times Y$. Si $x \in X$ y $P_{N_0} \in Y$, sabemos que

$$\bigcap_{F\in\mathcal{U}_{N_0}} cl_X \left(\bigcup_{n\in F} U_n \right) = \emptyset,$$

por lo tanto, existe una vecindad abierta V de x y $F_0 \in \mathcal{U}_{N_0}$ tales que

$$V \cap \left(\bigcup_{n\in F_0} U_n \right) = \emptyset.$$

Ahora bien, $cl_{\beta(\mathbb{N})}F_0$ es una vecindad de P_{N_0} en $\beta(\mathbb{N})$ y se tiene que

$$(V \times \{cl_{\beta(\mathbb{N})}F_0 \cap Y\}) \cap (U_n \times \{n\}) = \emptyset, \quad n \geq 1.$$

Esto finaliza la prueba. □

3.3.2. Una subclase especial de $\mathfrak{P}$

Como hemos visto en el Teorema 3.10, la pseudocompacidad no necesariamente se hereda para subespacios cerrados. Vamos a analizar una subclase especial de la clase de Frolík.

Definición 3.12. *Designaremos por $\mathfrak{P}_F$ la clase de todos los espacios X tal que todo subespacio cerrado de X pertenece a $\mathfrak{P}$*

El siguiente teorema caracteriza la clase $\mathfrak{P}_F$.

Teorema 3.25. *Un espacio X pertenece a la clase $\mathfrak{P}_F$ si, y solo si, si M es subconjunto infinito de X tal que todo subconjunto compacto K de X intersecta M en K es un conjunto infinito.*

Demostración. Se tiene directamente del Teorema 3.23 y el hecho que todo conjunto compacto pertenece a la clase $\mathfrak{P}$. $\square$

TEOREMA 3.26. *El producto numerable de conjuntos que pertenecen $\mathfrak{P}_F$ pertenece a $\mathfrak{P}_F$.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de espacios de $\mathfrak{P}_F$, y sea $X = \prod_{i\geq 1} X_i$. Demostraremos que X pertenece a $\mathfrak{P}_F$. Para ello es suficiente mostrar que dada una sucesión $\{g_i\}_{i\geq 1}$ en X, entonces toda subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{g_i\}_{i\geq 1}$ tiene clausura compacta en X. X_1 pertenece a $\mathfrak{P}_F$, por tanto, existe un subconjunto infinito N_1 de $\mathbb{N}$ tal que el conjunto de los g_n^i, $n \in N_1$ tiene clausura compacta en X_1. Por inducción podemos obtener una sucesión $\{N_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tal que $N_{n+1} \subset N_n$ y los conjuntos de todos los g_i^n, $i \in N_n$ tiene clausura compacta en X_n. Escojamos una subsucesión $\{g_{n_i}\}_{i\geq 1}$ de $\{g_n\}_{n\geq 1}$ tal que $n_i \in N_{n_i}$. Denotemos por Y_i al conjunto clausura en X_i de el conjunto de todos los $g_{n_k}^i$, $k \geq 1$. El espacio Y_i es compacto. En consecuencia, el producto $Y = \prod_{i\geq 1} Y_i$ es compacto. El resultado se deduce del hecho de que los conjuntos de g_{n_k}, $k \geq 1$ están contenidos en Y. $\square$

Capítulo 4

Líneas futuras

Recordemos qla noción de grupo topológico.

DEFINICIÓN 4.1. *Un grupo (abstracto) es un par $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto no vacío y $\cdot$ es una operación binaria en G que satisface las siguientes propiedades:*

(1) Si $a, b, c \in G$ entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(2) Existe un elemento $e \in G$, llamado elemento neutro, tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$.

(3) Para todo $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$, llamado el inverso de a, tal que, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Entonces al par $(G, \cdot)$ se denomina un grupo.

Si la operación satisface también la propiedad conmutativa se dice que el grupo es abeliano. En este caso, la operación $\cdot$ se suele denotar por $+$ y el elemento inverso se denomina el opuesto.

Un grupo $(G, \cdot)$ dotado con una topología τ se dice que es un grupo topológico, si la operación en G satisface las dos condiciones siguientes:

(1) La operación en G es continua considerada como una función de $G \times G$ en G, donde es $G \times G$ se considera la topología producto.

(2) La función $\phi : G \to G$ tal que $\phi(a) = a^{-1}$, para todo $a \in G$, es continua.

Comfort y Ross [2] demostraron que el producto de dos grupos pseudocompactos es pseudocompactos. Este resultado fue generalizado por Tkachenko [14] quien demostró que todo grupo pseudocompacto pertenece a la clase de Frolík $\mathfrak{P}$. En particular, este resultado implica que el producto infinito de grupos pseudocompactos es pseudocompacto. Este hecho se deduce de que la clase de Frolḱ $\mathfrak{P}$ es cerrada para productos infinitos [11].

Consideramos ahora grupos paratopológicos, es decir grupos G dotados de una topología tal que la operación en G es continua considerada como una función de $G \times G$ en G pero la función $\phi : G \to G$ tal que $\phi(a) = a^{-1}$, para todo $a \in G$, no es necesariamente continua. En este contexto, Ravsky [12] demostró que el producto arbitrario de grupos paratopológicos pseudocompactos es pseudocompacto. En un futuro, estamos interesados en el siguiente problema que permanece abierto:

(PA) ¿Pertenece todo grupo paratopológico pseudocompacto a la clase de Frolík $\mathfrak{P}$?

Bibliografía

[1] J. L. BLASCO, *Pseudocompactness and countable compactness of the product of two topological spaces*, Collect. Math., 29 (1978).

[2] W. W. COMFORT AND K. A. ROSS, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math., 16 (1966), pp. 483–496.

[3] R. ENGELKING, *General Topology*, vol. 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[4] Z. FROLÍK, *The Topological product of two pseudocompact spaces* , Czech Math, (1960), pp. 339–349.

[5] L. GILMAN AND M. JERISON, *Rings of Continuous Functions*, vol. 2, Springer-Verlag New York, 1960.

[6] I. GLICKSBERG, *Stone-Čech compactifications of products* , Trans. Amer. Math, (1959), pp. 369–382.

[7] E. HEWITT, *Rings of Real-Valued Continuous Functions* , American Mathematical Society, (1948), pp. 45–99.

[8] M. HRUŠÁK, A. TAMARIZ-MASCARÚA, AND M. TKACHENKO, *Pseudocompact Topological Spaces*, vol. 55, Springer, 2018.

[9] M. KATĚTOV, *On real-valued functions in topological spaces* , Fund. Math., (1951), pp. 85–91.

[10] J. R. MUNKRES, *Topology*, Prentice Hall, Inc., 2 ed., 2000.

[11] N. NOBLE, *Countably compact and pseudo-compact products*, Czechoslovak Math. J., 19(94) (1969), pp. 390–397.

[12] O. V. RAVSKY, *Paratopological groups. II*, Mat. Stud., 17 (2002), pp. 93–101.

[13] L. STEEN AND A. SEEBACH, *Counterexamples in Topology*, vol. 2, Srpinger - Verlag New York, 1978.

[14] M. G. TKAČENKO, *Compactness type properties in topological groups*, Czechoslovak Math. J., 38(113) (1988).

[15] W. WISTAR AND K. ALLEN, *Pseudocompactness and Uniform Continuity in Topological Groups* , Pacific Journal of Mathematics, (1966).