Trabajo Final de Máster - Curso 2022/2023

# Deconstrucción del concepto de división en 1.º ESO al estilo de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau.

Autora: **Paula Badía Adrián**

Tutor académico : Pablo Gregori

---

Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

# Resumen

En este Trabajo de Final de Máster se ha se presenta una experiencia de deconstrucción del concepto de división en un aula del primer nivel de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), basada en la Teoría de Situaciones Didácticas del profesor e investigador Guy Brousseau. Para esto, se ha hecho uso del fondo documental CRDM-Guy Brousseau emplazado en la Universidad Jaume I de Castellón (UJI), siendo este el único centro que alberga la información para llevar a efecto investigaciones sobre Teoria de Situaciones Didácticas.

Fundamentándonos en la experimentación que el propio Brousseau implementó en la escuela maternal y primaria Jules Michelet de Talence (Francia), en la cual se introdujo tal noción matemática a los alumnos de tercer, cuarto y quinto grado (entre 8 y 11 años), se plantea uno de sus problemas a nuestro alumnado. Tomando en consideración que estos aprendices ya conocen y dominan esta operación, les privaremos de su uso con objeto de contemplar las alternativas que idean. La finalidad de esta práctica es poder entrever, a partir de los resultados obtenidos, de qué manera fue enseñada la división a nuestro estudiantado y los efectos que estas prácticas han derivado.

# Índice general


**1. Motivación** **1**

**2. Marco teórico** **3**

2.1. Breve reseña sobre Guy Brousseau . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

2.2. La Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau . . . . . . . . . . . . . . . 6

**3. El Centro de Recursos CRDM-Guy Brousseau y un problema de investigación en Didáctica de las Matemáticas** **15**

3.1. El Centro de Recursos CRDM-Guy Brousseau . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

3.2. Una secuencia de aprendizaje de la división en la Escuela Michelet de Francia . 17

**4. Una experiencia de deconstrucción del concepto de división en 1.º ESO** **25**

4.1. Ficha didáctica de la situación a experimentar y observar . . . . . . . . . . . . . 25

4.2. Desarrollo de la experimentación . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

4.3. Resultados . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

**5. Conclusiones** **37**

**6. Valoración Personal** **41**

**Bibliografía** **43**

# Capítulo 1

# Motivación

La Universidad Jaume I de Castellón (UJI) alberga una gran cantidad de recursos documentales y bibliográficos producidos en las investigaciones del matemático y profesor francés Guy Brousseau. En concreto, estos se encuentran en el *Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas - Guy Brousseau* (CRDM- Guy Brousseau), creado en 2010 por el *Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones* (IMAC) de la UJI. La finalidad de la fundación de este centro es posibilitar recursos para seguir indagando en el campo de la didáctica matemática, colaborando en su utilización y difusión para producir nuevas investigaciones sobre problemas y dificultades actuales de la enseñanza de las Matemáticas.

Entre los muchos registros documentales que podemos encontrar sobre Guy Brousseau en el CRDM-Guy Brousseau, está su trabajo sobre la introducción de la división en el tercer, cuarto y quinto grado de la escuela primaria (8-11 años). Si bien el aprendizaje de este concepto matemático forma parte de esta primera etapa educativa, llegados a secundaria encontramos, frecuentemente, dificultades a la hora de resolver problemas que implican su ejecución [Fregona, 2021]. Por este motivo, hemos considerado de interés trabajar en esta dirección con alumnado de primero de la ESO.

Siguiendo esta línea, hemos preparado una experiencia basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y en su trabajo de la división en la escuela J. Michelet de Francia. A través de esta y mediante ingeniería didáctica, se pretende dejar entrever la manera en la que la noción matemática que nos atañe fue introducida a nuestro alumnado. Igualmente, analizaremos los resultados y las posibles causas de los mismos, concluyendo los efectos que las metodologías utilizadas han tenido en su aprendizaje.

Con tales efectos, el resto del documento queda organizado de la siguiente manera: en primer lugar, en el Capítulo 2, hablaremos sobre las bases teóricas que permiten conocer el impacto de las investigaciones que realizó el doctor Guy Brousseau, profundizando en una de sus obras maestras como es su *Teoría de las Situaciones Didácticas*. Seguidamente, en el Capítulo 3 se ampliará la información sobre el Centro de Recursos CRDM-Guy Brousseau de la UJI, que mencionábamos previamente, y profundizaremos en el estudio sobre la introducción de la división, en torno al que se hará la experiencia de este TFM. A continuación, en el Capítulo 4 se detallará la experiencia en el aula con alumnos de 1.º de la ESO sobre el concepto de división. Finalmente, las conclusiones sacadas a partir de los resultados obtenidos en la sección anterior, serán descritas en el Capítulo 5.

# Capítulo 2

# Marco teórico

El presente capítulo ha sido redactado en base a la lectura de la tesis [Macías Sánchez, 2016] *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos*, de J. Macías; la visualización de los módulos [Dorier, 2019, Margolinas and Bessot, 2020a] de la unidad sobre Guy Brousseau que se encuentran en la web de la «*International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)*, y los artículos [Brousseau et al., 1990, Brousseau, 1991] *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (primera y segunda parte)*, de Guy Brousseau.

## 2.1. Breve reseña sobre Guy Brousseau

Guy Brousseau es un investigador, matemático y profesor francés nacido en 1933 en Taza (Marruecos) y es considerado uno de los pioneros de la didáctica matemática. Con tan solo 20 años, empezó a dar clases en la región de Lot et Garonne y se casó con Nadine Labeque, con quien trabajó en múltiples de sus investigaciones y trabajos [Dorier, 2019]. Durante su servicio militar a finales de los años 50 pasó un tiempo en París, donde tuvo la oportunidad de seguir las primeras clases donde se impartían las emergentes «nuevas matemáticas» y, de vuelta, las puso en práctica en sus enseñanzas.

Como resultado de esta experiencia, se interesó por los estudios de Jean Piaget (psicólogo, epistemólogo y biólogo suizo) y Célestin Freinet (maestro y pedagogo francés). Pronto se dio cuenta de las limitaciones que estas teorías experimentaban y de la necesidad de crear otras nuevas. En 1960, mientras leía un trabajo del matemático belga Georges Papy, encontró una referencia al libro de Lucienne Félix (matemática y profesora francesa) que presentaba de una forma moderna y novedosa los elementos matemáticos. Con su lectura, reconoció muchas de sus propias ideas en las conjeturas de la autora, así que decidió escribirle una carta donde explicaba sus experimentos y las coincidencias de sus trabajos. Estos fueron los inicios de su colaboración.

En 1964, conoció al matemático francés André Lichnerowicz, quien compartió con él las estrategias de enseñanza que utilizaba. En un principio, Guy Brousseau quedó disgustado con los métodos y expuso sus dudas o contras al respecto. Esto supuso el inicio en sus investigaciones didácticas, que en un primer momento giraban entorno a dos cuestiones principales: las dudas y dificultades de los experimentos, y el miedo a que la reforma de las nuevas matemáticas fracasara por no haber suficientes trabajos previos de investigación, experimentación y observación. Lichnerowicz retó a Brousseau a crear un programa de investigación sobre un análisis de las limitaciones de los experimentos pedagógicos de las matemáticas.

A raíz de esto, se reunieron diversas veces y el contacto con el mundo matemático permitió a Brousseau ir a la universidad y graduarse en el *Bachelor* de matemáticas. Posteriormente, accedió a la *École Normale Supérieure*, recomendado por Lichnerowicz a un amigo suyo llamado Jean Colmez, quien dirigió el doctorado de Brousseau dentro del departamento de matemáticas. Durante este tiempo, estableció relación con algunos formadores de maestros de primaria de la École Normale, quienes más adelante fueron sus alumnos de doctorado. Juntos trabajaron en el Centro Regional de Documentación Pedagógica (CRDP), de donde surgió la idea por parte de René La Borderie de crear, en 1966, el Centro de Investigación en Enseñanza Matemática (CREM - *Centre for Research in Mathematics Teaching*), lugar que permitió establecer los contactos necesarios con el rectorado y la inspección académica, reunir un equipo, precisar los elementos esenciales de los proyectos y simular los diversos aspectos de sus funcionamientos. Este laboratorio posibilitó a Brousseau confrontar sus ideas con las de sus colegas y realizar sus primeros experimentos.

Simultáneamente, algunas sociedades y programas de investigación elaboraron una disertación sólida sobre la educación tradicional de las matemáticas, consistente en la producción de discursos coherentes de explicaciones matemáticas previas a la puesta en práctica del alumnado. Por el contrario, la nueva pedagogía proponía algunas alternativas en la dirección de un aprendizaje constructivo, y defendía la idea de que los alumnos debían tener un papel más activo y participativo en este proceso. No obstante, no había suficientes experiencias que demostraran los beneficios de sus sugerencias. Esta era la dirección en la que Guy Brousseau pretendía trabajar.

La teoría en la que Jean Piaget trabajaba en ese momento [Piaget, 1970], basada en la organización de tareas que revelaran los procesos cognitivos del alumnado, inspiró a Guy Brousseau y lo instigó a analizar las condiciones que debían darse para enseñar los conceptos matemáticos de forma consistente evitando los métodos de la enseñanza tradicional. En otras palabras, mientras Piaget estudiaba los procesos cognitivos en ciertas condiciones, Brousseau pretendía analizar estas mismas condiciones o situaciones que harían posible el aprendizaje.

Para sus investigaciones y la creación de nuevas metodologías, el investigador tenía claro que era fundamental poder realizar observaciones consistentes para la construcción teórica. Asimismo, serían necesarios un equipo de investigación y un lugar donde poder reunirse y hacer tales observaciones. Con este fin, en 1969 creó el *Instituto de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas* (IREM - Institut pour la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) y el *Centro de Observación e Investigación en Enseñanza de las Matemáticas* (COREM - Centre d'Observation pour la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), dirigido por Nadine Brousseau. Este último fue ideado como un dispositivo metodológico de investigación, basado en la observación de las puestas en funcionamiento de las prácticas ideadas y de los conceptos teóricos que se iban elaborando y retroalimentando con la propia contemplación. Cabe hacer especial mención a esta creación, pues suposo uno de los pilares de la adjudicación del premio Felix Klein que recibió el doctor en 2003.

En 1986, tras varios años de investigación, Brousseau defendió su tesis *Theorisation of* *mathematics teaching phenomena*. En 1992 se convirtió en profesor y se retiró seis años después, pero continuó investigando por mucho más tiempo. Actualmente, Brousseau es uno de los mayores referentes de este campo y su *Teoría de Situaciones Didácticas* y los términos que aparecen en esta, se utilizan en infinitud de trabajos de investigación de didáctica de las matemáticas a escala mundial.

## 2.2. La Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau

En primer lugar, cabe mencionar los diferentes significados que adquiere la palabra *didáctica* según las necesidades de las diversas instituciones en las que es utilizada. Comúnmente, el término *didáctica* es empleado para referirse a aquello que es adecuado para enseñar o, citando a Jan Amos Komensky (más conocido como Comenius), es el *arte de enseñar*, o sea, el conjunto de mecanismos usados para hacer conocer o saber algo [Brousseau et al., 1990].

Ahora bien, como se aludía anteriormente, este vocablo adquiere distintos matices según el contexto en el que sea utilizado, identificando así los siguientes cuatro sentidos:

- Palabra culta para designar "enseñanza". La *didáctica* sería, en este caso, el proyecto y acto de enseñar, de transmitir conocimientos.
- Producción, descripción, difusión y análisis de técnicas y medios que sirven para enseñar. El didacta pasa a ser, entonces, una especie de ingeniero que crea y divulga innovaciones.
- Estudio de la actividad de enseñar, es decir, es un proyecto de investigación cuyo objeto de estudio es la enseñanza.
- *Ciencia de la comunicación de los conocimientos y de sus transformaciones*, encargada de teorizar la confección y transmisión de saberes. Esta connotación se pone en entredicho si se tiene en cuenta que implica hechos relacionados con múltiples disciplinas, y de una manera específica para cada una de estas. Así, dedicarse a la didáctica en este sentido supondría que los expertos en un campo del saber, deberían salir de este en diversas

ocasiones o bien limitarse a un papel técnico. Consecuentemente, esta aceptación se vuelve insostenible [Brousseau, 1991].

Con todo, el programa que plantean las dos primeras acepciones es inmenso y desordenado, pero ninguna de estas puede ser refutada. De este modo, una teorización específica, como resultado del entendimiento de *didáctica* en el tercer sentido, posibilitaría una puesta en común de los distintos sectores científicos y un mejor reparto de responsabilidades. Ahora bien, la validez de esta teoría sujeta a la reflexión de quienes la practican, es cuestionable.

En relación al ámbito que nos atañe, Guy Brousseau define la *didáctica de las matemáticas* como la ciencia que estudia las condiciones específicas para la difusión de los conocimientos matemáticos necesarios para la ocupación humana [Margolinas and Bessot, 2020a]. No obstante, esta descripción es demasiado amplia y está más relacionada en el contexto matemático que en el escolar. Asimismo, no hace referencia a las mejoras educativas, puesto que, si bien como maestro y ciudadano siempre mostró interés por estas, nunca fueron su objeto de investigación.

La experta en educación matemática Michelle Artigue, clarificó en una entrevista realizada en 2017 [Gascón and Nicolás, 2017] que, como campo de investigación, la didáctica ha evolucionado particularmente en la sociedad francesa como un área que da prioridad al análisis y entendimiento de las complejidades de los procesos de enseñar y aprender matemáticas, con la ambición de promover la difusión intencionada de las matemáticas en la sociedad.

A finales de los años setenta, Brousseau tuvo un gran papel en el desarrollo de la Didáctica Matemática como disciplina científica. En su libro publicado en 1997, en el cual estudiaba las situaciones didácticas, manifestó la necesidad de considerar la variedad de significados del concepto *didáctica*, haciendo referencia a las derivaciones o modificaciones de la noción aportadas por otros campos de investigación. Insistía en que la definición de "didáctica" en el campo de las matemáticas no podía importarse directamente de la psicología o lingüística, sino que el término debía ser reflexionado y ajustado. Brousseau considera la didáctica de las matemáticas una investigación científica fundamental en el sentido aportado en el *International Council of Science* (2004).

Por un lado, la *investigación científica básica* se describe como una investigación teórica o experimental esencial para el avance del conocimiento. Por otro lado, la *investigación aplicada* es aquella que crea conocimientos a través de la observación de la puesta en práctica de los experimentos. Ocasionalmente, la primera de estas es considerada prescindible y totalmente reemplazable por la segunda. Sin embargo, en la realidad se encuentran indisolublemente entrelazas. De hecho, las innovaciones son prácticamente imposibles sin una previa investigación. Por este motivo, Guy Brousseau organizaba para sus trabajos tanto investigaciones científicas básicas como aplicaciones, siendo las segundas el medio para conseguir las primeras.

Ahora bien, para las investigaciones es necesario crear y contemplar situaciones que no se dan en el sistema ordinario de enseñanza, lo que se considera *ingenieria didáctica*. Adicionalmente, es fundamental asegurar el valor y rigor científico de los resultados, y para lo cual, hay que ser capaz de juzgar la autenticidad de los hechos observados. Se deben cumplir algunos requisitos, como los principios generales de la observación científica o las normas institucionales, considerar también los métodos de observación óptimos y velar por la calidad y estabilidad del funcionamiento de la escuela. A esos efectos, resulta esencial una elaboración teórica previa, compaginando la teoría con la observación. Esta técnica ha sido bautizada como *phenomenotechnique* y defiende la idea de que ningún fenómeno ocurre de manera natural, sino que debe ser concebido, caracterizado e interpretado sin dividir la mente entre un pensamiento puramente práctico y uno puramente teórico.

Como último paso previo antes de adentrarnos en los fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, cabe hacer mención al *aspecto dual del conocimiento*. Los matemáticos son frecuentemente vistos como cuerpos de conocimiento, como productores de los saberes matemáticos escritos y formalizados. Empero, estos matemáticos están en busca de respuestas útiles que aún no están estructuradas y formalizadas. La *Teoría de las Sitaciones Matemáticas* (TSM) de Brousseau es un ambicioso y revolucionario proyecto que modela a los matemáticos como creadores de conocimientos que resultan útiles en determinadas circunstancias [Margolinas and Bessot, 2020b]. En la TSM se referencia al aspecto dual del conocimiento, distinguiendo dos tipos:

- ***Conocimiento situacional***. Son conocimientos adquiridos en situaciones concretas y que frecuentemente son difíciles de expresar o explicar, no obstante ser totalmente capaces de ejecutarlos. Una característica muy común es que se ponen de manifiesto cuando nos encontramos en situaciones parecidas de distintas circunstancias.

- ***Conocimiento institucional***. Es un conocimiento explícito desarrollado en una institución, el cual se encuentra escrito, explicado y formalizado en la literatura.

Estos dos tipos de conocimiento no son disconexos, por el contrario, están íntimamente ligados en el proceso de aprendizaje. Cuando un conocimiento situacional puede ser útil y reconocido, se convierte en un conocimiento institucional mediante una transformación denominada *institucionalización*. Recíprocamente, si un conocimiento institucional sirve para resolver un problema en una situación determinada, pasa a ser un conocimiento situacional mediante una *transposición*.

$$\begin{tikzcd}
\text{Conocimiento situacional} \arrow[r, bend left, "\text{Institucionalización}"] & \text{Conocimiento institucional} \arrow[l, bend left, "\text{Trasposición}"]
\end{tikzcd}$$

Las matemáticas son entendidas como un conocimiento exclusivamente institucional y parece complicado verlas como saberes situacionales, este fue precisamente el proyecto en el cual trabajó Guy Brousseau.

Seguidamente, descontextualizando parcialmente del ámbito matemático, trataremos el trabajo de la *Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau*, proyecto en el que estuvo implicado durante gran parte de su vida laboral. Cuando se habla de *situaciones didácticas*, se hace referencia a aquellas prácticas o actividades que son diseñadas y puestas en funcionamiento por un sujeto, en este caso el profesorado, con el propósito de enseñar un conocimiento a otro sujeto, el alumnado ([Brousseau and Balacheff, 1998], citado en [Macías Sánchez, 2016]). En contraposición, una *situación no didáctica* es aquella generada de manera espontánea, sin haber sido trazada intencionadamente para que tenga lugar un aprendizaje, y sin la presencia de una parte docente y una estudiante.

Con todo, dentro de las *situaciones didácticas*, se pueden distinguir dos enfoques totalmente dispares: el clásico y el planteado por Brousseau. Por su parte, según la corriente tradicional, el aprendizaje tiene lugar tras la explicación del docente, es decir, el profesor explica y el alumno aprende de esta explicación, tomando el primero el papel de transmisor de conocimientos, el guía. De esta manera, los saberes no están contextualizados, son estudiados de memoria y el alumnado está limitado a la hora de construir sus propios conocimientos.

Por otra lado, en la teoría de Brousseau se parte de una situación resistente que se le presenta al alumnado, y el nuevo conocimiento sería el producto del reacondicionamiento que este lleve a cabo para superarla. Esta teoría está cimentada por la teoría constructivista del conocimiento, que propugna la idea de que este se produce tras un complejo proceso de construcción que el individuo lleva a cabo en interacción con la realidad [Payer, 2005]. Así, la importancia no reside solamente en las respuestas, sino en los mecanismos de resolución ejecutados para obtenerlas.

Dicho en otras palabras, parafraseando al propio Guy Brousseau, el alumno aprende enfrentándose a un medio que se le manifiesta repleto de contradicciones y dificultades. Las estrategias de adaptación que el estudiante desarrolla generan nuevos conocimientos, prueba de los cuales son las respuestas que se obtienen. En este sentido, una *situación didáctica* es el procedimiento en el cual el docente aporta el medio didáctico y el alumno construye el conocimiento a través del dispositivo cognitivo que pone en funcionamiento. Dicho *medio* no es solamente el primer problema que se plantea, sino todos aquellos que puedan ir surgiendo en el transcurso de la resolución del mismo. En suma, el término *situación didáctica* va más allá de una actividad práctica, pues con esta se ambiciona que el alumnado adquiera un conocimiento concreto que aparecerá como la solución preeminente entre otras resoluciones óptimas posibles.

Llegados a este punto, resulta evidente que en esta teoría resaltan tres grandes roles: el profesor, el medio y el alumno, cuyas funciones son distintas:

- El **medio**, del que ya hemos hablado previamente, y que es esa situación problema que se le presenta al alumno y cuya resolución conllevará al aprendizaje de un nuevo conocimiento.

- El **profesor**, que ya no se limita a transmitir conocimientos, sino que su labor pasa a ser la de guía del saber. Es quien diseña y prepara las situaciones, de las cuales el alumnado adquirirá los nuevos conocimientos, anticipándose a las diversas alternativas que pueden surgir y las modificaciones que pueden darse en el medio tras las acciones de los aprendices; todo esto evitando los juicios de valor y la anticipación de información. Este trabajo descrito que realiza el docente se conoce como una puesta en práctica de la ***ingeniería didáctica***.

- El **estudiante**, quien debe implicarse en la resolución del problema, intentando actuar sobre el medio ayudándose de aquellos saberes que considere oportunos, validando las consecuencias de sus acciones según los resultados obtenidos y efectuando las modificaciones que sean necesarias para lograr su objetivo.

Asimismo, los elementos que modelan un medio (elegidos por el profesor) y todas las alternancias que se dan en este por los actos ejecutados por los estudiantes, son denominadas ***variables didácticas***.

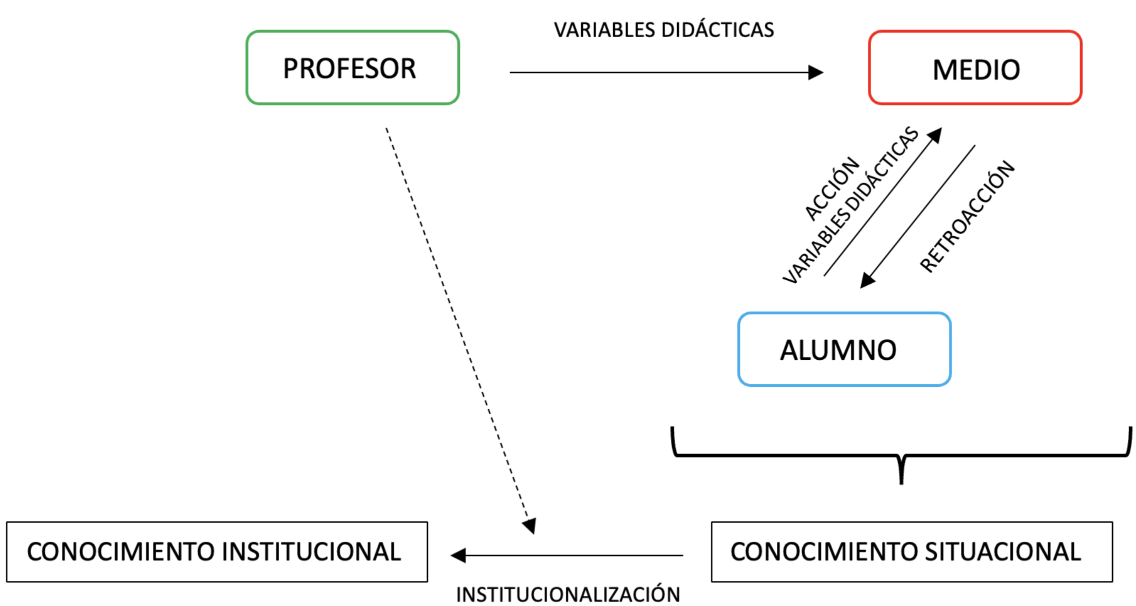


Figura 2.1: Esquema situación de aprendizaje

A modo de resumen, podríamos afirmar que una situación didáctica es un desafío que le presenta un medio, proporcionado por la parte docente, a un estudiante, y para la resolución del cual necesita llevar a cabo una serie de estrategias que esconden un conocimiento a aprender. En esta dirección, el primer planteamiento que lleva a cabo el aprendiz (denominado *estrategia base*) se apoya en conocimientos previos no óptimos para esta circunstancia. Tras una validación de la misma, y un cambio por parte del docente de las características de la coyuntura, reconocerá que no es la conveniente y deberá modificarla, apareciendo así el conocimiento aspirado. Este tipo de situaciones son denominadas *situaciones a-didácticas* por Guy Brousseau, y se singularizan por no poder ser dominadas de forma conveniente sin la puesta en práctica de de los conocimientos o saberes que se pretenden alcanzar y que, por otra parte, sancionan las acciones que toma el alumno sin intervención del docente, o sea, evidencian si son correctas o no las decisiones tomadas.

Según [Chamorro, 2005], las características principales que presentan las situaciones a-didácticas son:

- La respuesta al problema debe poder ser divisada por el alumnado.
- Los conocimientos previos deben resultar insuficientes rápidamente.
- Existencia de un medio de validación que permita retroacciones.
- Se debe poder repetir diversas veces.
- El conocimiento que se pretende adquirir debe mostrarse como conductor para llegar a la estrategia óptima.

Como se puede ver, ni todas las situaciones didácticas son a-didácticas, ni todas las situaciones didácticas son iguales, sino que podemos establecer una clasificación según qué hace el alumno en cada caso:

- ***Situación de acción***. El alumno pone en práctica diversas acciones sobre el medio, tomando conciencia del reto planteado y decidiendo qué estrategia base utilizar.
- ***Situación de formulación***. El alumno coopera con el resto de compañeros, pudiendo intercambiar ideas.

- ***Situación de validación***. El alumno comunica los métodos seguidos y los resultados obtenidos para que otros evalúen su planteamiento. La parte docente no debe emitir ningún juicio al respecto, se debe limitar a gestionar el funcionamiento del medio.

- ***Situación de institucionalización***. El alumno consigue resolver el problema empleando estrategias que esconden el conocimiento matemático anhelado, pero no es consciente de este. Por este motivo, al finalizar la situación a-didáctica, es esencial que el docente se encargue de explicitar la relación existente entre el planteamiento que el alumno hace para resolver esa situación, y el saber que se pretendía aprender.

Por último, con respecto a las funciones que cumplimentan los docentes y los estudiantes dentro de una situación didáctica de las que se hablaba previamente, cabe mencionar el conocido como ***contrato didáctico***. Según Guy Brousseau, el contrato didáctico es aquello que el alumno espera del profesor y lo que el profesor espera del alumno, a saber, son las expectativas generadas o la relación que mantienen estudiante y profesor en el proceso de aprendizaje de un saber concreto. En su perspectiva más clásica, el docente es quien adoctrina y juzga, mientras que el alumno se limita a copiar y aprender la información proporcionada por el primero. Resulta evidente que esta postura entra totalmente en contradicción con las intenciones de la teoría de Brousseau. En este caso, la función del enseñante es dar a conocer de forma clara y directa la situación del saber que pretende que su estudiantado adquiera. Las complicaciones del contrato se producen cuando el alumnado se niega a responsabilizarse de la resolución del problema, dando lugar a algunas contradicciones:

- El docente no puede ayudar al alumno. Todo lo que haga en esta dirección, limitará al estudiante a tomar un camino concreto que lo privará del descubrimiento autónomo de la solución y, por tanto, del aprendizaje.

- Si el alumno acepta que el profesor le presente el nuevo conocimiento, renunciará al aprendizaje (entendido este último en el sentido de la teoría de Brousseau).

Con tal de sortear estos antagonismos, estudiantes y docentes adoptan ciertas posturas basadas en el contrato didáctico: por su parte, los primeros piden al profesor que sus planteamientos sean tales que estos tengan ya las herramientas para resolverlos, en tanto que el profesor se deja convencer, teniendo la falsa sensación de que los primeros aprenden. Cuando estas actitudes se llevan al extremo, dan lugar a los *efectos del contrato*:

- ***Efecto Topaze***. Si bien la situación se plantea de forma abierta con el fin de enriquecer el proceso de aprendizaje, ante el fracaso el profesor va proporcionando información al estudiantado. De esta manera, la respuesta final obtenida es la que se desea pero se da desprovista de sentido, por estar totalmente determinada por las orientaciones del docente.

- ***Efecto Jourdain***. Evitando el debate y la constatación del fracaso, el profesor acepta respuestas del alumnado cuyas bases son triviales.

- ***Analogía***. A modo de síntesis, es una bajada del nivel que se pretendía alcanzar. Se sustituye el estudio del concepto anhelado por otro análogo más sencillo.

- ***Deslizamiento metadidáctico***. Se produce cuando los conocimientos previos que el alumno podría emplear en la resolución del reto son olvidados, entonces el docente procede a volverlos a enseñar, perdiendo el foco del saber objeto.

En definitiva, si bien los contratos didácticos pueden ser o no favorables, lo que está claro es que el docente es el encargado de hacer una adecuada gestión de los mismos para romper con la visión tradicional, en la cual este es el eje central del aprendizaje. En la teoría de las situaciones, los alumnos tienen el papel protagonista, y son los responsables de su propio aprendizaje. Asimismo, el contrato didáctico no viene prefijado, sino que puede ir cambiando según el transcurso de la situación.

# Capítulo 3

# El Centro de Recursos CRDM-Guy Brousseau y un problema de investigación en Didáctica de las Matemáticas

Para la redacción de este capítulo se han utilizado fundamentalmente dos artículos: *Los Recursos del «Centre Pour l'Observation et la Recherche en Didactique des Mathématiques» (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un Ejemplo: La Enseñanza de la División en la Escuela Primaria* [Brousseau et al., 2012] y *La División en la Escuela Primaria* [Brousseau, 2015].

## 3.1. El Centro de Recursos CRDM-Guy Brousseau

El profesor Guy Brousseau, en convenio con el Instituto de Investigación en Enseñana de las Matemáticas (IREM), creó en 1972 el *Centre d'Observation pour la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (COREM) [Brousseau et al., 2012]. Se trataba de un laboratorio ubicado alrededor de las escuelas públicas J. Michelet de Talence (Burdeos, Francia), dedicado a la investigación sobre la observación de la enseñanza de las matemáticas.

Este espacio permitía confrontar las investigaciones producidas en el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas con la realidad de las aulas. Así, el COREM posibilitaba el diseño y la impartición de clases, la observación de las interacciones entre docentes y alumnos, y la puesta en funcionamiento de estudios realizados por el IREM, conformado por investigadores y estudiantes de postgrado en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Bordeaux, el equipo docente de la propia escuela J. Michelet y profesores formadores de docentes.

Los maestros y las maestras del colegio que formaban parte del COREM tenían reducida su carga lectiva con el fin de poder colaborar en ciertos aspectos de las investigaciones que se llevaban a cabo. En este sentido, algunas de las labores que se ejecutaban en el COREM eran:

- **Preparación de clases** comunes con profesores formadores de maestros o clases objeto de tesis.
- **Observación de las clases** que eran grabadas y, posteriormente, observadas y comentadas colectivamente.
- Reuniones periódicas de investigación.
- Redacción de las planificaciones de docencia y de investigación, y de los informes de las prácticas realizadas.

Con el propósito de llevar a cabo todas estas tareas, el COREM contaba con un edificio para realizar estas contemplaciones en el cual había un aula adaptada a la presencia de observadores y de cámaras. Todos los procedimientos se implementaban bajo unos acuerdos y reglas establecidas entre investigadores y maestros, que garantizaban el normal desarrollo de las clases.

La mayor parte de los recursos documentales y bibliográficos generados a partir de las investigaciones y acciones puestas en funcionamiento por el COREM se encuentran actualmente en el ***Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas - Guy Brousseau*** (CRDM - Guy Brousseau), que depende del *Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones* (IMAC) de la Universitat Jaume I (UJI) de Castelló. Este último tiene como propósito fomentar la investigación en Didáctica de la Matemática (DM) en ámbitos universitarios.

El CRDM - Guy Brousseau dispone de diversos tipos de contenidos accesibles para investigadores acreditados. Entre estos, hay notas, informes, descripciones y discusiones registradas durante los procesos de enseñanza, estudio, aprendizaje y evaluación de las matemáticas en la escuela primaria, clasificados según los cursos, los niveles escolares, los contenidos curriculares o las investigaciones en DM.

Para los interesados, el centro pone a disposición una sala de consulta en la biblioteca de la UJI y material disponible on-line (*https://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/62668*). Este último se encuentra actualmente en proceso de digitalización progresiva, que se irá abordando en la medida que haya investigadores en DM interesados en consultar estos recursos.

## 3.2. Una secuencia de aprendizaje de la división en la Escuela Michelet de Francia

En esta sección hablaremos de una de las grandes investigaciones que Guy Brousseau llevó a cabo junto con su equipo en la Escuela Michelet de Francia [Brousseau, 2015]. Se trata de la introducción de la *división* (euclídea) mediante situaciones de aprendizaje en tercero, cuarto y quinto grado de escolarización (8-11 años). En otras palabras, se pretende que los estudiantes descubran la noción de división como respuesta a lo problemas que se les propondrán. Como se ha mencionado anteriormente, para este tipo de experimentos se debía tener en cuenta el currículum, los objetivos y los saberes de cada curso. Así, análogamente a como se hace en el análisis documental del trabajo en cuestión, distinguiremos las actividades puestas en práctica en cada nivel.

A nivel general, se destacan dos grandes características que debe poseer el alumnado con el que se va a trabajar:

- Teniendo en cuenta que muchas actividades requieren de la comunicación entre el estudiantado, es esencial que posean destreza para debatir, justificar razonamientos e intercambiar información.

- En cuanto a los saberes básicos, es fundamental que demuestren un dominio del funcionamiento de la numeración y pericia a la hora de realizar operaciones como sumas, restas y multiplicaciones, así como entender la relación que estas mantienen.

De este modo, previamente a la puesta en funcionamiento de las actividades que forman parte del estudio, será indispensable asegurar que los estudiantes cumplen estas condiciones. En esta dirección, se proponen ejercicios que pondrán en evidencia el nivel de consolidación que tienen de los mismos y, en caso de que este sea insuficiente, se dedicará cierto tiempo a garantizar su afianzamiento.

### La división: Tercer Grado (8-9 años)

En lo referente al tercer grado, la introducción de la división se lleva a efecto a finales de curso, generalmente. En el estudio de Guy Brousseau, se realizó en una secuencia de cuatro actividades cuya extensión temporal fue de 10 clases. Las dos primeras tareas consisten en la resolución de problemas de división por grupos, llevando a cabo procedimientos aditivos, multiplicativos o sustractivos. En estas se hace uso de hojas grandes de papel y marcadores. En cuanto a la dinámica de la clase, siempre se explica primero cuál es la labor a realizar, a continuación se muestra el enunciado del problema y la parte docente se asegura que todos los participantes lo han entendido, aclarando las palabras incomprendidas o las dudas que surgen y haciendo preguntas. Seguidamente, se deja trabajar al alumnado en equipos y, cuando terminan, exponen y debaten sobre los métodos utilizados y los resultados obtenidos.

Por otro lado, la tercera actividad tiene por objeto la previsión, justificada y posteriormente verificada, del orden de magnitud del cociente. Con tal efecto, se dispone de diversos problemas de división y de una serie de posibles resultados. Los estudiantes deberán rodear aquel número que corresponda a la solución del problema sin efectuarla, y explicar por qué lo han elegido. Tras esta primera parte, realizarán las operaciones pertinentes para verificar sus conclusiones. Finalmente, en la cuarta y última labor, se insiste en la comprensión de problemas, presentando y localizando el número buscado (cociente) a partir de unos enunciados propuestos. En otras palabras, los alumnos deberán resolver las cuestiones explicitando qué están buscando en cada uno de ellos.

## La división: Cuarto Grado (9-10 años)

Este será el curso en el cual se presentará el concepto de *división*. Hasta ahora, en tercero se había realizado una aproximación a esta a través de la relación que mantiene con el producto, la suma y la resta, dotándola así de sentido. Sin embargo, no se ha definido todavía como una nueva operación a utilizar, será en este nivel donde tendrá lugar esta institucionalización.

En la construcción del concepto de división en este curso, se pueden distinguir dos períodos. El primero de estos tiene una duración de tres semanas, y su objetivo es que el alumnado disponga de un algoritmo para dividir números de cualquier magnitud. Por otro lado, el segundo período es el de utilización de esta técnica en problemas que permitan perfeccionarla y entender cómo y cuando hacer uso de la misma.

Análogamente al tercer nivel, se necesitan unos requisitos indispensables para poder llevar a cabo las actividades propuestas en la investigación. Tales condiciones son: la práctica en debates y argumentaciones matemáticas, y el dominio de las operaciones aditivas, sustractivas y multiplicativas. Con el fin de que se cumpla este último, durante el primer trimestre se han puesto en funcionamiento diversas actividades sobre numeración (escritura de un número, escrituras horizontales, descomposición de un número en potencias de diez, etc.) y sobre prácticas operatorias que permiten entender las relaciones entre las operaciones conocidas.

Generalmente, el desarrollo de las clases sigue siempre la misma estructura:

1. **Presentación del problema**: el docente explica qué trabajo van a realizar en la sesión, les presenta el problema a tratar y se asegura del completo entendimiento del mismo mediante preguntas y aclaraciones.

2. **Resolución del problema**: el alumnado resuelve el problema de manera individual o grupal, según se indique en cada actividad. Asimismo, deben estar todos de acuerdo en el algoritmo a seguir y escribir en la hoja, de manera clara y ordenada, los pasos que han seguido y los resultados obtenidos.

3. **Confrontar resultados y métodos**: Cada grupo expone los resultados obtenidos y los métodos empleados. Esta es la parte en la que el estudiantado debatirá y compartirá sus ideas, resultando crucial para la construcción final del concepto a aprender. Cabe mencionar que, normalmente se piden las hojas de las presentaciones antes de empezar esta fase, para evitar cambios y poder contemplar objetivamente el progreso del aprendizaje.

Es importante recordar que el papel docente en todas estas actividades será de *guía* hacia el aprendizaje, pero se evitará opinar, valorar o hacer juicios, con el propósito de que sean los propios alumnos quienes descubran los saberes a adquirir, sin verse influenciados por la opinión ajena.

Para empezar este primer período del que hablábamos, en las dos primeras clases se plantea la resolución de una situación problema de división. Aquellos alumnos que no hayan visto antes esta operación, la tratarán como una situación de búsqueda. En otras palabras, utilizarán los saberes aprendidos en el primer trimestre para intentar resolverla. Para estos primeros problemas, la clase queda dividida en grupos que trabajan de manera conjunta y cooperan. Además, uno de estos resolverá el problema con ayuda de material manipulativo que los estudiantes han ido aportando en el mes que precede a la lección, pudiendo advertir al resto de compañeros de aquellas ideas que consideren importantes y siendo los primeros en compartir los resultados en la tercera fase de la actividad. En esta última etapa de las dos primeras actividades, la maestra lanzó diversas cuestiones acerca de los métodos trabajados y se observó que los aprendices ya eran capaces de emitir juicios argumentados sobre la optimización y operatividad de cada uno.

**Ejemplo de problema**: «*Un criador de aves vende huevos, cada semana, en un supermercado. Esta semana, disponde de* 368 *huevos. Imagina como los puede despachar.*»[1]

Tras estas dos primeras sesiones, se hizo un balance sobre los resultados obtenidos y se observaron dos tipos de comportamientos: los que utilizaban la multiplicación para aproximarse al valor anhelado, y los que utilizaban la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, sin ser esta explicitada. A modo de conclusión, se consideraron necesarios ciertos cambios sobre las variables didácticas que favorecieran a que el proceso tomara la dirección deseada (el

[1] Problema propuesto en la primera clase de introducción a la división en el cuarto grado.

segundo comportamiento). Concretamente, para las siguientes clases se estimó conveniente un cambio en el tamaño del dividendo y del divisor, provocando un aumento en la dificultad de cálculo, que a su vez se contrarrestó con la presencia de un *repertorio* de multiplicaciones, una especie de chuleta con los resultados de algunos productos que tenían que ver con el problema a efectuar.

Con estos cambios puestos en práctica, las siguientes dos lecciones tuvieron por objetivos instalar un debate sobre las características de una solución económica y hacer reflexionar a los alumnos sobre las estrategias seguidas. La dinámica de las clases siguió siendo la misma que las anteriores, pero en la tercera fase se enfatizó en la síntesis del método y el número de pasos realizados. Al analizar los efectos de estos cambios, se infirió que los niños ya conseguían tener un sistema de resolución. El siguiente propósito sería mostrar la utilidad de tal planteamiento en situaciones que parezcan más complicadas en principio. En esta dirección, si bien se seguirá disponiendo del repertorio de multiplicaciones, los números son ideados de manera que la utilización de este se complique y requiera la reinstalación de la sustracción.

**Ejemplo de problema**: «*Un colocador de mosaicos debe cubrir el muro exterior de un inmueble. Dispone de* 34794 *mosaicos. Debe ponerlos en filas de* 171. *¿Cuántas filas completas hará?*»[2]

Siendo así, en las clases que continúan esta secuencia, se plantean situaciones donde la división no es la única operación a realizar o, directamente, no es la que se debe emplear, pretendiendo llegar a la escritura $D = d \cdot q + r$. El propósito final es que el alumnado analice los métodos utilizados y concluya que la estrategia multiplicaciones-restas es la más rápida y segura. Asimismo, se hace discurrir sobre cómo pueden ser verificados los resultados, precisando finalmente que este es el camino para construir la nueva operación. Adicionalmente, en alguna de estas sesiones también se pedirá que sean los estudiantes quienes inventen problemas que impliquen la división, promoviendo una meditación sobre las situaciones óptimas en las que esta se aplica y dotando de sentido a esta noción matemática. En este caso, tendrán lugar algunos cambios como la realización de los problemas sin repertorio, o que algunas tareas se realizarán de

[2] Problema propuesto en la tercera clase de introducción a la división en el cuarto grado.

manera individual con el propósito de que la maestra pueda evaluar el progreso de cada alumno.

**Ejemplo de problema**: «*Un centro turístico organiza unas vacaciones de invierno durante el mes de febrero. Dispone de subsidios de: aportes empresariales* 526890 *F; del municipio* 350000 *F y* 97437 *F, del Ministerior de Deportes. El monto de las vacaciones para un niño es de* 2752 *F.*»[3]

Llegados a este punto, el objetivo de las últimas horas dedicadas a la división será la recapitulación y establecimiento del algoritmo, explicitando cómo reconocer los problemas donde se aplica, utilizando el menor número posible de pasos y dando un sentido a la igualdad $D = d{\cdot}q{+}r$, distinguiendo e identificando cada uno de sus elementos. Para conseguir todo lo mencionado, los alumnos trabajaran individualmente resolviendo diversos problemas o inventando otros nuevos que impliquen una división determinada. Nuevamente, el rol de la maestra sigue siendo el de guía, dirigiendo el debate según la dirección que se pretenda seguir, formulando preguntas clave para el desarrollo de la actividad, ayudando a aquellos que se encuentren bloqueados y limitándose a responder cuestiones puntuales, cuidando de no influenciar en la progresión de búsqueda de los niños y de no emitir juicios de valor.

En suma, así se construye y se dota de sentido al concepto de *división* en cuarto grado. Con esta secuencia de sesiones, se consigue que el alumnado descubra de manera constructiva esta nueva operación y sepa cómo y cuándo aplicarla. Durante el resto del curso, este trabajo continua con el empleo de la división en problemas matemáticos que aparecen en otras unidades, lo que favorece a la consolidación del nuevo conocimiento.

### La división: Quinto Grado (10-11 años)

Respecto al quinto grado, los objetivos perseguidos fueron reforzar los conceptos de cociente y resto, dominar el orden de magnitud del cociente, así como adquirir una estrategia de cálculo económica y recurrente y usarla cuando sea oportuno. Así, se plantearon cinco actividades que se presentarán a continuación.

[3]Problema propuesto en la quinta clase de introducción a la división en el cuarto grado.

En primer lugar, haciendo uso de los conocimientos previos, u otros métodos, el alumnado habrá de buscar la solución a un problema planteado, cosa que se hará trabajando primeramente de manera individual y después colectiva. Además, conviene destacar que el personal docente podrá intervenir pasado el tiempo que considere oportuno para ayudar a los y las alumnas en las dificultades que hayan encontrado, teniendo presente en todo momento que la información proporcionada no ha de estar relacionada con la resolución de la tarea. Al acabar, se recogerán las hojas en las que han trabajado los niños y las niñas y que serán examinadas en la próxima sesión, siempre libres de cualquier juicio.

En segundo lugar, en la siguiente sesión se pretendió analizar y comparar las distintas técnicas usadas en la actividad anterior y mostrar cuál es el algoritmo más económico. Para eso, esta se dividió en tres partes: un análisis colectivo de los procedimientos y los resultados, la comparación de las diferentes divisiones a partir de las hojas expuestas y la realización de una nueva propuesta por el o la docente usando el menor número de "pasos" posible. Así pues, conviene profundizar en la primera de las partes, en la cual el profesorado y el alumnado establecieron una conversación sobre cuál de los métodos usados en los trabajos es más conveniente, económico y más válido, el cual ha de estar gestionado por el o la docente sin emisión de juicio alguno, de manera constructiva y recogiendo las observaciones susceptibles de ser contempladas posteriormente. En este caso, de la experiencia se derivaron tres tipos de métodos: por sustracciones (procedimiento de uno de los grupos que quedó desestimado por considerarse demasiado largo), por encuadramiento con multiplicaciones (seguido por seis de los grupos y también eliminado por implicar tantos pasos) y, por último, el algoritmo de división (usado por quince los grupos y estimado como más o menos económico).

Respecto a la tercera actividad, consiste en poner en práctica el algoritmo definitivo y, para eso, se dividió en cuatro fases: previsión del orden de magnitud del cociente, verificación de las previsiones, implementación del algoritmo, prueba de la división y aplicación. Así pues, se desarrolló del siguiente modo: el profesor o la profesora determinó escribiendo en la pizarra una operación y el alumnado trató de determinar la cantidad de cifras que habría en el cociente sin realizarla, posteriormente se realizó la operación y comprobaron la certeza de sus hipótesis estableciéndose un debate mediante el razonamiento y la explicación de los procedimientos a partir del cual, luego el o la docente explicó el algoritmo definitivo y entendieron que el resto es menor que el divisor (fase que se desarrolló de manera rápida por el dominio de los alumnos y las alumnas respecto al sistema de numeración y los órdenes de magnitud), se planteó cómo comprobar si el resultado de una división es correcta y, por último, se hizo un ejercicio de aplicación intentando saber cuántas cifras habrá en el cociente de una división sin realizar previamente la operación. Cabe destacar, además, que esta técnica, que será la definitiva, ha de reemplazar a la que ya dominaba el alumnado y, en ese sentido, puede ayudar que el maestro proporcione una división en el inicio de cada sesión de la asignatura, para que el alumnado trate de saber cuál será el orden de magnitud del resultado y resuelva la operación durante un tiempo definido (que será disminuido progresivamente), cosa que permitirá que el personal docente observe la evolución individual de los y las alumnas.

En cuanto a la cuarta actividad, se le proporcionará al alumnado una división y habrá de plantear un enunciado que se corresponda con esta. Así, cada uno se leerá en voz alta y el alumnado decidirá los que son correctos y los que no y, de los correctos y más adecuados, se elegirá uno (también teniendo en cuenta el criterio del maestro o la maestra) que se planteará a otra clase del mismo nivel.

Finalmente, la quinta y última actividad consiste en la resolución de un problema planteado que comporta el cálculo de una o varias divisiones. Este puede ser extraído de un manual dirigido al nivel o planteado por el maestro o la maestra, pero siempre tendrá en cuenta las nociones del estudiantado.

# Capítulo 4

# Una experiencia de deconstrucción del concepto de división en 1.º ESO

## 4.1. Ficha didáctica de la situación a experimentar y observar

La división euclídea es un concepto matemático correspondiente al currículum de la escuela primaria. Generalmente, según lo mencionado anteriormente, se empieza a introducir a finales del tercer grado, y es en el curso posterior cuando se trabaja en profundidad este concepto. De este modo, cabe esperar que el alumnado del primer nivel de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) tenga un completo dominio de esta noción, entendiendo su algoritmo y controlando a la perfección en qué situaciones aplicarlo.

Así pues, en esta sección no vamos a hacer una introducción de la división como se realizó en la investigación del doctor Guy Brousseau previamente descrita, sino que lo que se pretende es ver qué alternativas muestra el alumnado frente a la división. Esta práctica permite divisar la forma en la que se introdujo esta operación en su aprendizaje, pues prescindir de esta obligará a utilizar la relación que mantiene con el resto de operaciones que conocen y, la observación de los planteamientos del alumnado, permitirá contemplar si son, o no, conscientes de esta.

En este sentido, lo que haremos será formular un problema de división a un grupo de alumnos que, supuestamente, identificarán de inmediato que se trata de una situación donde encuentran evidente que la forma más eficiente (y tal vez la única) de resolverla es la división euclídea y mediante el algoritmo aprendido en primaria. Sin embargo, les privaremos de su utilización. De este modo, deberán buscar alternativas para resolverlo. De alguna manera, estamos desaprendiendo lo aprendido para dejar entrever de qué forma se introdujo esta operación en los estudios primarios. Se espera que aquellos estudiantes a los cuales se les presento la división y las situaciones de aplicación sin una situación de búsqueda por su parte, presenten dificultades a la hora de resolver este planteamiento, pues no tendrán consolidado el sentido de la división y la relación que mantiene con el resto de operaciones aritméticas. En contraposición, el alumnado con el que se trabajó este concepto basándose en conocimientos previos y de una forma constructiva, sabrán reaccionar rápidamente a la circunstancia planteada.

En pocas palabras, se pretende hacer una *deconstrucción* de la división, esto es, poner en duda los cimientos sobre los cuales erigimos nuestros saberes al respecto de este término. La *deconstrucción* es una corriente filosófica asociada a la obra del autor Jacques Derrida, quien definió este movimiento como una desestabilización de los fundamentos de nuestros conocimientos [Derrida, 2010]. Una manera sencilla de entenderlo es examinar el uso que se hace de esta palabra en la gastronomía. En este contexto, cuando se habla de deconstrucción se hace referencia a una técnica culinaria que descompone un plato en cada uno de sus ingredientes, a fin de crear uno visualmente nuevo pero que mantenga el mismo sabor. Trasladando esta idea al asunto que nos atañe, este plan pretende que el alumnado sepa desmenuzar el algoritmo de la división en las otras operaciones con las que mantiene relación.

Antes de empezar, es conveniente conocer algunas características del alumnado con el que se llevará a efecto esta experiencia. Se trata de un grupo de 20 alumnos del primer curso de la ESO del instituto IES La Vall de Segó, donde realicé las prácticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Teniendo en cuenta las observaciones realizadas durante mi estancia de dos meses y medio en el centro, se puede afirmar que es una clase que presenta, generalmente, una baja autoeficacia y, especialmente, en el caso de la asignatura de matemáticas. Por este motivo, en ocasiones resulta complicado realizar actividades de esta índole, puesto que su primera reacción siempre es mostrarse incapaces y reacios a su implementación, y se necesita insistir para convencerles de su capacidad para ejecutarla.

Asimismo, haciendo referencia a los requisitos indispensables para el funcionamiento de estas actividades en el aula que aludíamos en la investigación de Brousseau —práctica en el debate, hábito en el intercambio de informaciones y destreza en la justificación de afirmaciones—, se puede confirmar que no son precisamente unas características destacables en este grupo de estudiantes, como consecuencia de las costumbres de enseñanza de los docentes en este centro y de los de las escuelas de las que provienen (representativos del sistema educativo español). Estos rasgos dificultan en gran parte nuestros propósitos.

Por otro lado, también es importante tener en cuenta el momento de ejecución de la actividad que nos atañe. La asignatura de prácticas del máster tiene una duración de dos meses y medio aproximadamente, divididos en dos períodos de una extensión de dos semanas y dos meses, respectivamente. Cuando se llevó a cabo este estudio, había terminado la primera fase y, en consecuencia, ya había tenido la posibilidad de percatarme de los atributos generales del grupo y, de igual forma, yo ya no resultaba extraña al alumnado, lo que podría haber dificultado más la labor. En otro orden de ideas, todavía no había impartido la unidad didáctica correspondiente a las tareas del prácticum y esto suponía una ventaja y un inconveniente. Por una parte, aún no me veían como una profesora y, por tanto, no tenían la presión de ser evaluados, lo cual propiciaba la libre ejecución de sus ideas sin ser influenciados por la presión de un juicio posterior. Por otra parte, conocían la unidad didáctica que yo impartiría (Divisibilidad), y dado que estaba relacionada con la tarea que elaborarían, fue percibida por algunos como una evaluación inicial, lo que condicionó el funcionamiento de la clase como se advertirá posteriormente.

En el plano de los saberes previos, la mayoría de estudiantes eran diestros con respecto a la numeración y las prácticas operatorias. Si bien no era un temario recientemente repasado, pues el bloque de aritmética no había sido trabajado en el primer trimestre de este curso. A diferencia de la experiencia llevada a cabo en el trabajo de Guy Brousseau, eran conocimientos asentados por el trabajo en primaria.

Con estas premisas, lo que se hace en este estudio es escoger uno de los problemas que resolvieron los alumnos de la escuela Michelet y ver cómo lo resuelven los estudiantes de primero de la ESO vedando el uso de la operación cociente. Considero que no es una opinión meramente personal cuando afirmo que pretender desconocer un saber tan arraigado es casi más complicado que aprenderlo. En otras palabras, cuando tenemos tan interiorizada una noción y acostumbramos a resolver una situación de una determinada manera, encontrar alternativas puede resultar laborioso. Ahora bien, en este caso es de esperar que, si los alumnos manejan correctamente esta operación, sepan encontrar el camino para solucionarlo óptimamente.

## 4.2. Desarrollo de la experimentación

Inicialmente esta actividad se iba a realizar solamente con fines experimentales, contrastando la experiencia de Brousseau con alumnado de 1.º de la ESO. No obstante, teniendo en cuenta que estaba relacionada con la unidad didáctica a impartir, ha servido de introducción para el caso. Frecuentemente los profesores lidian con preguntas del tipo *"¿para qué necesito conocer este concepto matemático?"*, *"¿qué me aporta?"*, *"no lo voy a usar en mi vida diaria"*. Según la propuesta de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, todas estas cuestiones pueden ser soslayadas si empezamos el aprendizaje a partir de situaciones reales, que muestren a los aprendices las respuestas a estas preguntas. Así, a modo de síntesis, esta tarea ha servido para que aquellos alumnos a los cuales la división les había sido "impuesta" de alguna manera, la doten de sentido y vean que es la vía óptima de resolución, mostrando más predisposición a la hora de profundizar más en este tema.

**Intenciones didácticas**: Esta sesión permitirá al alumnado reflexionar sobre el algoritmo de la división y relacionarlo con el resto de operaciones aritméticas que conocen. Adicionalmente, servirá para repasar conceptos conectados con esta que utilizarán próximamente como, por ejemplo, la *prueba de la división*.

**Material**: Cada estudiante dispone de una hoja de papel A4 con el enunciado del problema escrito y un bolígrafo. No están permitidos los lápices, las gomas ni los típex, para evitar que los niños re-escriban las respuestas.

**Situación de búsqueda**:
Texto del problema [1] (se dispone del enunciado en valenciano y castellano, a elección del alumno).

| |
|---|
| Se quiere distribuir un pastelito[2] a cada uno de los 245 niños de una colonia de vacaciones para la merienda. Cada paquete contiene 18 pastelitos. ¿Cuántos paquetes hay que abrir? |

**Primera parte de la actividad** (10 minutos)

**Consigna oral**: "*Hoy he venido a haceros una prueba, pero no es ningún examen ni os voy a evaluar por esta. Es de matemáticas, pero tranquilos que es muy sencilla y la vais a saber hacer seguro, necesitáis solo conocimientos que habéis visto en primaria. Eso sí, tenéis que hacerlo individualmente, ¿de acuerdo?. Luego compartiremos lo que hayáis pensado cada uno, pero ahora debéis hacerlo solos, en silencio.*".
"*Necesitaréis solamente un bolígrafo, todo lo demás que tenéis en la mesa lo podéis guardar. No vamos a utilizar ni típex, ni lápiz, ni goma, si queréis cambiar algo porque os surgen otras ideas, ponéis lo anterior entre paréntesis pero que se pueda leer. La hoja en la que vais a escribir os la daré yo.*"
"*Voy a leeros el problema y me podéis preguntar aquellas palabras que no entendáis. Luego os lo repartiré, lo leéis individualmente y si tenéis alguna cuestión, me lo decís.*"

(Lectura del enunciado)

[1] Es uno de los problemas presentados en el trabajo original de Guy Brousseau [Brousseau, 2015] en la introducción de la división para el tercer grado.
[2] "alfajor" en el texto original

Los alumnos empiezan a reaccionar: “¡qué fácil!”, “¡qué simple!”, “¡pero si es una división!”.

**Consigna oral**: “Tengo una mala noticia chicos y chicas, ¿sabéis que pasa? que vamos a viajar a la prehistoria y en esos tiempos no hacían matemáticas tal y como las conocemos ahora, no sabían lo que era la división [3]. Sin embargo, sí que eran capaces de hacer reparticiones, ¿verdad?. Pues eso es lo que vamos a hacer nosotros, distribuir los pastelitos sin utilizar la división.”

(Se reparte el enunciado)

Los alumnos leen el enunciado y no hay dudas, todos entienden lo que pide y no hay palabras que generen confusión. Algunos preguntan si pueden multiplicar, la respuesta que se da a fin de no influenciar al resto del alumnado es: “*el único requisito es que no podéis dividir*”. Al principio se genera bastante revuelo y se hacen cuestiones fuera de lugar, teniendo que llamar la atención y pidiendo que se centren en la tarea.

**Segunda parte de la actividad** (20 minutos)

Los estudiantes resuelven el problema de manera individual. La parte docente no debe intervenir en sus procedimientos, no puede confirmar ni desmentir si algo está bien, ni hacer ningún tipo de comentario que interfiera en el algoritmo seguido por cada alumno. Solamente se animará a aquellos que no sepan como empezar, sin orientar los pasos a seguir, limitándose a alentar a la reflexión de la cuestión.

**Consigna oral**: “*Podéis empezar. Por favor, mantened silencio hasta que todos hayamos terminado. No compartáis vuestros resultados. Recordad que es un trabajo individual y que no vais a ser evaluados, sed sinceros y escribid lo que consideréis conveniente.*”

Durante la elaboración de la tarea, me paseo por la clase discretamente observando qué está haciendo cada uno. Algunos alumnos me piden ayuda, intentan que les responda si lo que

[3] Inicialmente solamente se pretendía decir que era demasiado fácil para ellos si utilizaban la división, pero tratándose de un grupo con baja autoeficacia, se ha considerado que inventar esta historia generaría mayor curiosidad y evitaríamos la frustración de aquellos que se sintieran incapaces.

están haciendo es correcto, me limito a responder ”*¿tú qué crees?*”, “*¿tú lo ves lógico?*” o “*¿y tú, consideras que tiene sentido?*”. Hay otros que se desaniman, se tumban en las mesas y se muestran reacios a empezar. A estos últimos me acerco para decirles que piensen, que estoy segura que lo pueden conseguir.

Después de cinco minutos casi todos están ya terminando. Algunos se quedan bloqueados al ver que no es un resultado exacto y les cuesta interpretar que para conseguir repartir los pasteles a todos los niños, deberán abrir un paquete en el que sobrarán. Adicionalmente, después de este tiempo ya se puede contemplar que han salido todos los métodos esperados, incluso algún intento con interpretación gráfica.

A partir de este momento, los estudiantes se empiezan a descontrolar, hay algunos que intentan copiarse, otros que intentan compartir el resultado o que se ven sugestionados por comentarios ajenos de estudiantes que celebran el final del ejercicio. Ha sido necesario llamar la atención diversas veces durante la transición de la actividad y pedir silencio. Cabe mencionar en este punto, que esto es un problema común en este grupo, les cuesta mucho mantener la atención en una actividad y ser respetuosos con los compañeros que no han terminado. A fin de que aquellos procedimientos copiados no afectaran a los resultados de la experiencia, se recogieron inmediatamente las pruebas de los alumnos implicados y se tomó nota de su comportamiento. Igualmente, aquellos estudiantes que tenían el resultado correcto pero no había un desarrollo escrito del procedimiento, se les pidió individualmente que explicaran qué habían hecho, separando aquellos que eran incapaces de hacerlo y cuyo resultado era producto del azar o de copia.

Tras diez minutos, solo faltan tres alumnos que aún no han terminado las operaciones, otro que ha desistido y ha dejado de intentarlo y otros cuatro que están interpretando el resultado obtenido. Además, hay un alumno que ha resuelto el problema por mínimo común múltiplo, para lo que ha utilizado indirectamente la descomposición factorial de un número y divisiones, que estaban prohibidas. En este caso, se le ha pedido que vuelva a empezar y que tenga en cuenta las instrucciones iniciales.

<ins>**Tercera parte de la actividad**</ins> (30 minutos)

Después del tiempo de resolución individual del problema, se recogen las hojas en las que han trabajado los alumnos. A continuación, se piden los resultados numéricos obtenidos por cada uno, sin preocuparse por los métodos. Después, se pedirá a algunos alumnos que salgan a la pizarra a explicar los métodos que han utilizado. Es importante que, durante la realización de la actividad, la parte docente vaya pasando por las mesas discretamente y visualizando los sistemas que han realizado los estudiantes para poder elegir las personas que saldrán a exponer sus procedimientos, aunque lo hará de manera que parezcan escogidos al azar. De este modo, nos aseguramos de que todos los posibles métodos sean expuestos y, simultáneamente, de que la solución obtenida sea la correcta.

**Consigna oral**: "*Bueno, ahora que ya hemos terminado todos, vamos a comentar qué se os ha ocurrido para poner solución a esta situación. Primero, ¿cuántos paquetes hace falta que abramos?, ¿Repartimos todos los pasteles que hay en esos paquetes que abrimos?, ¿Por qué?, ¿Cuántos sobran?* [4]"

(Los alumnos se ponen de acuerdo en el resultado correcto).

**Consigna oral**: "*Ahora, por ejemplo ________, ¿te apetece salir a la pizarra y nos enseñas tus ideas?*"

**Desarrollo**: Los alumnos van exponiendo los procedimientos que han seguido en la pizarra. Simultáneamente, se les plantean algunas preguntas: *¿Por qué has ido sumando (restando o multiplicando) varias veces?, ¿Qué has conseguido?, ¿En qué te has fijado para responder a la cuestión del problema?*. A las cuales responden perfectamente y sin dudar. La intención de estas preguntas es que tengan claramente distinguidos los paquetes del número de pasteles

[4] Como se destaca en diversas ocasiones en el trabajo de Brousseau [Brousseau, 2015], es importante que cuando los alumnos salgan a la pizarra se centren en exponer los métodos implementados. Por este motivo, pedimos antes los resultados para que se den cuenta que, una vez en la pizarra, la solución numérica ya no es relevante.

que hay en estos, dado que en el resultado deben poner el número de paquetes abiertos y el número de pasteles sobrantes. En otras palabras, se pretendía enfatizar en la interpretación de la solución. Sorprendentemente, aunque ha hecho falta llamar la atención diversas veces y volver el foco de atención a la conversación, ha tenido lugar un debate ordenado y constructivo y se ha creado un espacio donde los estudiantes han podido compartir y discutir todas sus ideas.

Por otro lado, al final de la exhibición se cuestiona también qué les ha parecido cada uno de los algoritmos: *¿Cuál de los métodos os parece que está hecho "un poco al azar"?, ¿Cuál os parece "menos al azar"?, ¿Cuál os parece más seguro?, ¿Cuál de los algoritmos se podría acortar?* [5]

Las preguntas son contestadas de forma clara y todos se ponen de acuerdo en que el método de multiplicaciones y restas es el más rápido. Asimismo, uno de los alumnos plantea una pregunta clave: "*Si hubiésemos podido dividir, ¿qué habría pasado?*". Esta cuestión deja entrever que el alumnado no tiene suficientemente consolidada la relación que existe entre estas operaciones aritméticas, sino que la entienden como una noción disconexa del resto de operaciones. De esta manera, se puede concluir que la realización de esta actividad, que inicialmente no estaba prevista dentro de la unidad didáctica, ha tenido un papel fundamental para poder enlazar todas las nociones y presentar la división como una operación que, si bien no es vital porque podría ser sustituida por un procedimiento de sumas, restas o multiplicaciones, sí es la más rápida y óptima para el tipo de problemas donde se ve implicada.

## 4.3. Resultados

En lo referente a los resultados que se esperaba obtener, se confiaba en que surgieran todas las alternativas que han sugerido los estudiantes, con una mayor presencia del método multiplicativo. Asimismo, se conjeturaba que, tras la visualización de este último algoritmo mencionado, surgiera el término de la *prueba de la división*, pues esta está basada precisamente en él. Sin embargo, no ha sido el caso, pero lo que sí han intentado es hacer uso de aspectos

[5] Estas preguntas son las que plantea la maestra en el debate de la primera clase de la introducción de la división en cuarto grado en el trabajo de Brousseau. [Brousseau, 2015]

relacionados con la división, como lo han sido el mínimo común múltiplo o la descomposición factorial. A modo de balance, se observa generalmente, que los alumnos terminan la tarea entre cinco y diez minutos. A partir de ese momento, solo quedan algunos que, si bien han realizado todas las operaciones, encuentran dificultades a la hora de concluir e interpretar los resultados por no ser estos últimos exactos.

Sintetizando, los procedimientos que han efectuado los 20 estudiantes son, como ya se ha aludido previamente, los siguientes:

| | Lo implementan | Error cálculo | Error interpretación |
|---|---|---|---|
| Procedimiento aditivo | 6 | 1 | 1 |
| Procedimiento sustractivo | 3 | 2 | 1 |
| Procedimiento multiplicativo | 7 | 0 | 0 |

Tabla 4.1: Resultados según el procedimiento utilizado.

Los cuatro alumnos restantes que no constan en la tabla no supieron llevar adelante la tarea desde el inicio. Por lo que corresponde a aquellos que efectuaron el procedimiento aditivo, cabe comentar que no es el mismo alumno quien comete el error de cálculo que el que comete el de interpretación. El primero de ellos, si bien no llega a la conclusión deseada, sí entiende qué está calculando. Por el contrario, el segundo no entiende por qué una de las sumas no da como resultado 245 y, entonces se frustra y su conclusión es que *"hay que abrir 252 paquetes"* (resultado de sumar 15 veces 18). En el caso del sustractivo, se observan dos métodos con errores de cálculo y, en uno de estos, hay un despiste por parte del aprendiz que no tiene en cuenta que, para aquellos niños que quedan sin pasteles tras 13 intentos, habrá que abrir un paquete que no se terminará.

Con todo esto, lo que más llama la atención de los datos recogidos en la Tabla 4.1, es que aquellos que han realizado un procedimiento multiplicativo no han cometido ningún error de cálculo ni tampoco de interpretación. Se podría afirmar que son los más próximos al conocimiento de la identidad $D = d \cdot q + r$, lo que ha conllevado a emplear un procedimiento más corto y, por tanto, con menos posibilidad de error. Adicionalmente, todos parecen tener claro qué es lo que buscan y qué es lo que sobra, en otras palabras, ubican el cociente y el resto de la división.

A continuación se muestran algunos ejemplos de resolución llevados a cabo por alumnos del instituto IES La Vall de Segó:

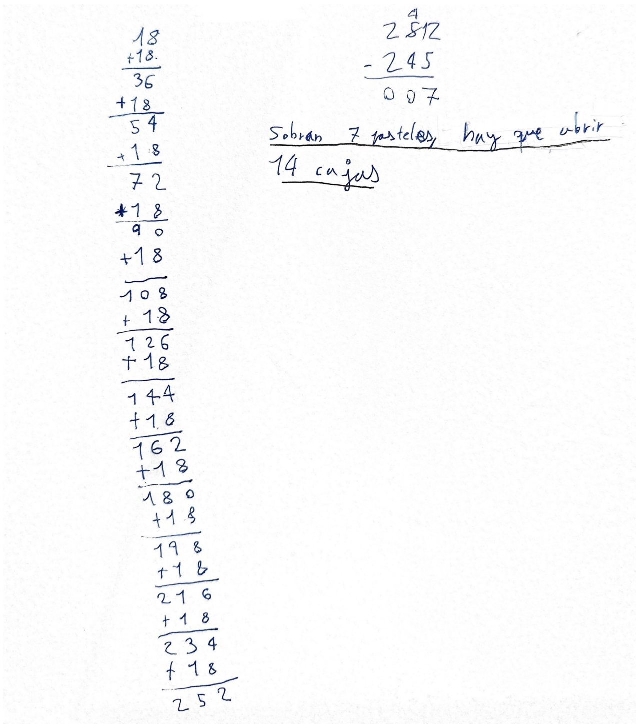


Figura 4.1: Sumas sucesivas. Alumno G.A.G del IES La Vall de Segó.

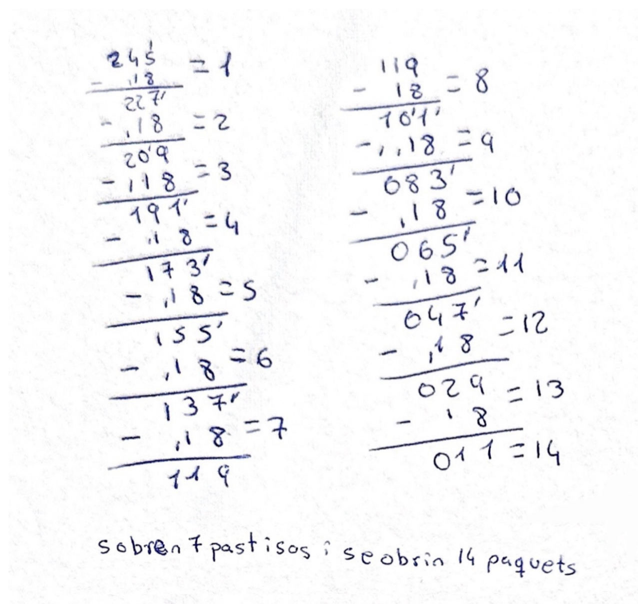


Figura 4.2: Restas sucesivas. Alumno Q.M del IES La Vall de Segó.

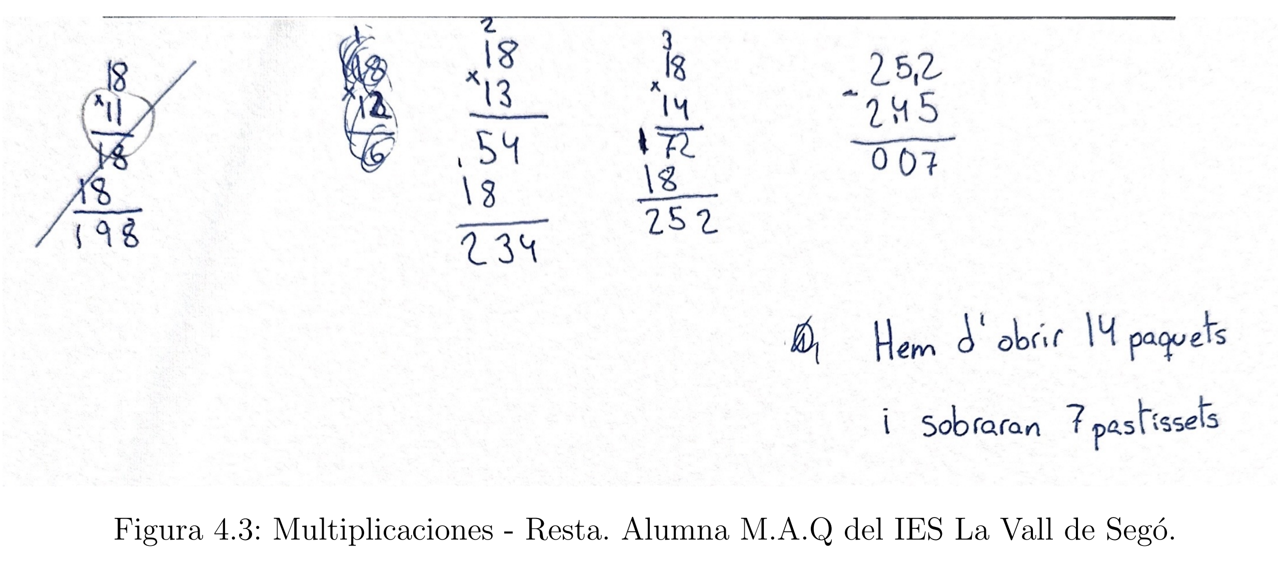


Figura 4.3: Multiplicaciones - Resta. Alumna M.A.Q del IES La Vall de Segó.

# Capítulo 5

# Conclusiones

En primer lugar, hemos de recordar que la actividad implementada en el apartado anterior está planteada para introducir el concepto de *división* en la escuela primaria. En atención a lo cual, no se pueden esperar los mismos resultados en este caso, pues se parte de la idea de que ni siquiera la intención es la misma. Mientras que en la investigación del doctor Guy Brousseau, esta tarea tenía por finalidad presentar esta nueva operación de un modo constructivo mediante situaciones que conducían al alumnado a la búsqueda de soluciones y posterior deducción de la misma, nuestra coyuntura es totalmente distinta.

Los estudiantes con los que se ha experimentado cursan el primer curso de la ESO, nivel en el cual se conoce y se domina el concepto de la división, según el currículum. Por consiguiente, el norte de esta prueba no era que aprendieran o recordaran este conocimiento, sino que intentaran olvidarlo y hallaran alternativas para resolver una situación problema en la cual, normalmente, utilizarían la división. Si bien este ejercicio puede parecer trivial, en ocasiones es más complicado dejar de lado lo aprendido, que aprenderlo desde el principio. Al fin y al cabo, el proceso de la división ya lo tienen interiorizado y es al algoritmo que recurren siempre para poner solución a este tipo de circunstancias. De esta suerte, su privación puede derivar en un reto.

Tras la disección de los resultados obtenidos en la sección anterior, tanto la observación del transcurso del desarrollo individual del problema, como el debate final en el que surgen comentarios del estilo: "*¿qué habría pasado si hubiésemos utilizado la división?*", conducen a pensar que las cuatro operaciones aritméticas que hemos tratado se presentan disconexas en el saber de los estudiantes. Motivo de lo cual sea, seguramente, la forma en la que se introdujeron estas nociones en la escuela primaria. Se sospecha que primeramente se daría a conocer el sistema de división, se aprendería a aplicar por práctica y se vincularía con la multiplicación y la resta más tarde, en la prueba de la división, sin hacer especial hincapié en esto último, simplemente ejecutándolo como comprobación. Estas suposiciones se confirmaron cuando, semanas después en la implementación de la unidad didáctica de *Divisibilidad*, algunos estudiantes afirmaban no acordarse de cómo dividir, refiriéndose concretamente al *método de la cajita* y, sin tener en cuenta, que habían sido capaces de hacerlo unos días atrás.

En definitiva, los resultados y las advertencias hechas, incitan a la reflexión sobre la influencia de la manera de enseñar sobre el aprendizaje de los niños. Según la *Teoría de los esquemas* del psicólogo británico Frederic Bartlett [Bartlett and Bartlett, 1995] citado en [Ruiz Martín, 2020], nuestros recuerdos y conocimientos se almacenan en nuestra memoria formando unas redes o esquemas mentales que conectan los distintos elementos a través de unas relaciones de significado. De esta manera, un nuevo conocimiento es incorporado mediante la unión de este a una estructura de conocimientos previos con los que guarda relación. Por añadidura, cuantas más relaciones podamos encontrar de la nueva anexión con los componentes previos, más aferrado quedará ese nuevo saber. En la enseñanza, los docentes son los encargados de favorecer la creación de estas conexiones mentales en los niños, intentando conectar los nuevos aprendizajes con el mayor número posible de conocimientos previos. Esta tesis reafirma las deducciones sacadas de los resultados de nuestra experiencia. Aparentemente, nuestros alumnos desvinculan las diferentes operaciones aritméticas a causa de un aprendizaje con ausencia de relación semántica entre las mismas que desfavorece al recuerdo de los pasos a seguir y al hallazgo de alternativas frente a la privación de una de estas.

Para finalizar, terminaremos esta sección con unas reflexiones de carácter general sobre la educación y los distintos tipos de niveles educativos.

A causa de la constante evolución de la humanidad, el progreso, la adaptación y la evolución de la sociedad son fundamentales. Como comunidad versátil, debemos saber amoldarnos a los cambios que se producen, habituarnos y enriquecernos de sus ventajas. Con tal efecto, la educación debe continuar aviniéndose a los cambios sociales y culturales que la envuelven, pues es el elemento fundamental para conseguir la sociedad anhelada. En este sentido, es esencial la investigación y la innovación en educación, para lo cual es necesaria la participación de diversos agentes relacionados con la didáctica.

En la linea del punto anterior, no podemos olvidar que la teoría y la práctica deben ir de la mano y, por tanto, la coordinación y cooperación entre investigadores y profesores es primordial. En algunos de sus trabajos, Guy Brousseau hace referencia a la habitual desconexión entre expertos en didáctica y aquellos que la ejercen. De hecho, para sus investigaciones contaba con una comunidad de preparadores de maestros, maestros y científicos didácticos que trabajaban conjuntamente. Tomando esto como ejemplo, la primera cuestión a destacar sería la consideración de los beneficios que comportaría que fuesen los propios profesores quienes dispusieran de tiempo para realizar tales trabajos de investigación, a fin de conocer de primera mano las condiciones óptimas para la ejecución de sus clases.

Por otro lado, y más destacable en vista a los resultados obtenidos en la prueba realizada en este trabajo, se evidencia la carencia de colaboración entre educadores de escuelas primarias y secundarias. Como ya se ha señalado anteriormente, está científicamente demostrado que el aprendizaje se produce a través de redes de saberes conectados que se van desarrollando. Siendo así, para que una persona aprenda un concepto, hemos de ser capaces de darlo a conocer intentando relacionarlo con nociones ya conocidas por el individuo. Si bien estos nexos se elaboran de manera particular, si existiera un consenso en la forma de presentar ciertos términos, facilitaría esta tarea y favorecería al entendimiento del alumnado.

Frecuentemente, los profesores hablan de una "*falta de base*", en especial en el caso de la asignatura de las matemáticas. Tratándose de una materia tan deductiva y constructiva, es vital tener consolidados los cimientos sobre los que se sustenta esta ciencia y, en base a estos, armar los nuevos saberes. Por este motivo, y teniendo en cuenta el funcionamiento de la memoria que se explicaba previamente, negociar acuerdos entre los docentes de los distintos niveles sobre las técnicas de enseñanza, podría mejorar inconmensurablemente el aprendizaje de los estudiantes.

En conclusión, el proceso de aprendizaje que parte de un conocimiento situacional y que posteriormente se institucionaliza, parece ser el método óptimo para consolidar los conceptos que se van aprendiendo. En base a esto, las indagaciones sobre qué situaciones proponer para cada noción, realizadas tanto por investigadores como por los propios maestros y profesores, y el consenso en su implementación, son esenciales para garantizar su funcionamiento y la composición paulatina del conocimiento. Trabajar en esta línea ayudará al establecimiento de las técnicas idóneas para el aprendizaje, si bien estas deberán adaptarse a los tiempos a propósito de los cambios a los que se somete la educación por la evolución de la sociedad.

# Capítulo 6

# Valoración Personal

Como docentes o futuros docentes, considero que velar por el bienestar y por las condiciones óptimas para el proceso de aprendizaje de nuestro alumnado debería ser nuestro pilar fundamental. Como se ha demostrado en infinitud de estudios, y en este mismo trabajo, la tarea de un profesor no es solamente actuar como transmisor de conocimiento. Lejos de esta idea, nuestros comportamientos y la manera de relacionarnos en el aula influyen inconmensurablemente en los estudiantes.

Siguiendo esta línea, a fin de mejorar y mantenernos actualizados acerca de las necesidades educativas y los intereses de nuestro público, la investigación y la innovación juegan un papel esencial. Por este motivo, haber tenido la oportunidad de dar mis primeros pasos en investigación didáctica con la realización de este trabajo ha sido todo un privilegio para mí.

Asimismo, si bien era consciente del impacto que puede tener la cimentación de una buena base para construir los conocimientos de un aprendiz, nunca antes había tenido la posibilidad de evidenciarlo de la manera en la que lo he hecho en este caso. Contemplar estos efectos, me ha hecho reflexionar acerca de la desconexión existente entre las distintas etapas escolares, que desfavorecen en gran medida a nuestro estudiantado. La cooperación y colaboración entre las instituciones educativas de las diferentes etapas son primordiales para el aprendizaje de un individuo.

En pocas palabras, llevar a efecto tanto este TFM como la práctica en el aula, me ha brindado la oportunidad de poder conocer otro tipo de metodologías distintas a las que yo conocía como alumna, y que espero poder poner en práctica en un futuro muy próximo.

# Bibliografía


[Bartlett and Bartlett, 1995] Bartlett, F. C. and Bartlett, F. C. (1995). *Remembering: A study in experimental and social psychology.* Cambridge University Press.

[Brousseau, 1991] Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?(Segunda parte). *Enseñanza de las Ciencias.* R*evista de investigación y experiencias didácticas*, 9(1):10–21.

[Brousseau, 2015] Brousseau, G. (2015). La división en la escuela primaria. `https://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/143287/Brousseau_Division_+escuela+primaria.pdf?sequence=1`. Accedido en febrero de 2023.

[Brousseau and Balacheff, 1998] Brousseau, G. and Balacheff, N. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990.* La pensée sauvage.

[Brousseau et al., 1990] Brousseau, G. et al. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte). *Enseñanza de las ciencias.* R*evista de investigación y experiencias didácticas*, 3(8):259–267.

[Brousseau et al., 2012] Brousseau, G., Orús, P., Fregona, D., and Gregori, P. (2012). Los recursos del ≪Centre pour l'observation et la recherche en didactique des mathématiques≫ (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: la enseñanza de la división en la escuela primaria.

[Chamorro, 2005] Chamorro, M. d. C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil.* Pearson Educación.

[Derrida, 2010] Derrida, J. (2010). Deconstruction. *The Routledge Companion to Critical and Cultural Theory.*

[Dorier, 2019] Dorier, J. L. (2019). ICMI - international commission on mathematical instruction. guy Brousseau Unit. Module 0. Career and Backround. `https://www.youtube.com/watch?v=0yjSux-sZV4&t=360s`. Accedido en marzo de 2023.

[Fregona, 2021] Fregona, D. (2021). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas: Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Libros del zorzal.

[Gascón and Nicolás, 2017] Gascón, J. and Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? the beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, 37(3):9–13.

[Macías Sánchez, 2016] Macías Sánchez, J. (2016). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos*. Tesis, Facultad de Educación. Centro de formación del profesorado. Departamento de Ciencias Experimentales. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

[Margolinas and Bessot, 2020a] Margolinas, C. and Bessot, A. (2020a). ICMI - international commission on mathematical instruction. guy Brousseau Unit. Module 1. Theory of didactical situations in mathematics, an epistemological revolution. `https://www.youtube.com/watch?v=fJAkkheV9Eo&t=162s`. Accedido en marzo de 2023.

[Margolinas and Bessot, 2020b] Margolinas, C. and Bessot, A. (2020b). ICMI - international commission on mathematical instruction. guy Brousseau Unit. Module 2. The dual aspects of knowledge. `https://www.youtube.com/watch?v=qo0DbsVoty0`. Accedido en abril de 2023.

[Payer, 2005] Payer, M. (2005). Teoría del constructivismo social de Lev Vygotsky en comparación con la teoría Jean Piaget. *Caracas, Vanezuela: Universidad Central de Venezuela.*

[Piaget, 1970] Piaget, J. (1970). *Piaget's theory*, volume 1. Wiley New York.

[Ruiz Martín, 2020] Ruiz Martín, H. (2020). *¿Cómo aprendemos? Una aproximación científica al aprendizaje y la enseñanza*. Graó.