



GRADO EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

TRABAJO FINAL DE GRADO

El conjunto de Cantor

Autor:
Álex DEL MORAL EDO

Tutores académicos:
M^a Vicenta FERRER GONZÁLEZ
Salvador HERNÁNDEZ MUÑOZ

Fecha de lectura: 09 de Junio de 2023
Curso académico 2022/2023

Resumen

En este documento se detalla el trabajo de fin de grado de la asignatura MT1054 – Trabajo Final de Grado del Grado en Matemática Computacional de la Universidad Jaume I.

En esta memoria se hace un estudio desde el punto de vista topológico del conjunto de Cantor. Se ve su construcción primigenia y se demuestran diferentes propiedades que lo hacen un conjunto realmente único, como ser totalmente desconexo, raro, perfecto, compacto, no numerable y no vacío. El resultado principal del documento llega al demostrar la existencia de un homeomorfismo entre el conjunto de Cantor y el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Finalmente, se muestra la aparición del conjunto de Cantor en ciertas dinámicas de la familia cuadrática.

Palabras clave

Conjunto de Cantor, funciones dinámicas

Keywords

Cantor set, dynamic functions

Índice general

1. Introducción y Motivación	7
2. Introducción al conjunto de Cantor	9
2.1. Construcción	9
2.2. Propiedades	12
2.3. Generalización	22
3. Funciones dinámicas	27
3.1. Introducción a las funciones dinámicas	27
3.2. La familia cuadrática	31
4. Conclusiones	37

Capítulo 1

Introducción y Motivación

Antes de pasar con la estructura de la memoria, se ha considerado interesante arrojar un poco de historia sobre el origen del conjunto de Cantor. Lo primero a destacar es que pese a que el conjunto se le haya atribuido a Georg Cantor, de ahí su nombre, este no fue el primero en descubrir "los conjuntos de Cantor". Además, aunque el conjunto de Cantor esté asociado hoy en día a un concepto geométrico, Cantor en ningún momento fue motivado por este campo, de hecho pudo haber llegado a su descubrimiento desde un punto de vista meramente aritmético.

Para entender el contexto, las matemáticas entre el 1870 y 1885, estaban enfretándose a dos desafíos:

- 1) Las condiciones bajo las cuales una función puede ser integrada.
- 2) La unicidad de los desarrollos por series trigonométricas.

Bernhard Riemann y Hermann Hankel, se centraron en la primera cuestión. Bernhard Riemann propuso condiciones que podrían proporcionar respuestas a estas preguntas, consolidando las bases del desarrollo de la teoría de la medida y la integración. Hermann Hankel trabajó en la integrabilidad de las funciones, relacionándola con ciertos conjuntos de puntos asociados a la función. Hankel se quedó estancado en sus investigaciones debido a su falta de comprensión acerca de los conjuntos infinitos.

Por ello, fue H. J. S. Smith quien continuó con los avances en este campo y publicó en 1875 un artículo donde se desmentían algunas afirmaciones que había dado anteriormente Hankel. Smith construyó un conjunto raro mediante un proceso de subdivisión infinita de intervalos. En la actualidad, se sabe que dicho conjunto es un conjunto de Cantor, y por tanto se convertiría en el primer registro publicado de dicho conjunto.

Georg Cantor comenzó a estudiar la topología de conjuntos después de completar su tesis sobre teoría de números en 1867. Trabajó en la unicidad de las series trigonométricas con Eduard Heine, centrándose en estas cuestiones.

El matemático alemán avanzó en este problema teniendo siempre en consideración a los conjuntos infinitos. En una serie de artículos publicados entre 1879 y 1884, Cantor introdujo las nociones de puntos límites de un conjunto, conjuntos densos y conjuntos perfectos. Después de haber introducido el término perfecto, Cantor afirma que los conjuntos perfectos no tienen el porqué ser densos, y es aquí, donde Cantor proporciona como contraejemplo el conjunto de Cantor ternario, la cual se ha convertido en la forma más usual de ver a este conjunto. Por desgracia, no parece haber ninguna evidencia sobre cómo Cantor llegó al conjunto de Cantor, pero por su carrera como matemático y su introducción aritmética del propio conjunto, podemos suponer que llegó a través del marco aritmético de las expansiones binarias y ternarias.

En la actualidad, el conjunto de Cantor sigue siendo uno de esos objetos matemáticos que abren la puerta a un nuevo universo de preguntas y respuestas. Tal es así que pese a haber sido "definido" por el mismo Georg Cantor en 1883, este conjunto y sus propiedades siguen siendo dignos de estudio a día de hoy. El conjunto de Cantor ha sido utilizado como contraejemplo para múltiples teoremas topológicos que se creían ciertos para todos los conjuntos, y es que éste es tan peculiar que incluso llegó a asombrar a su propio creador con diferentes paradojas y contradicciones que tenía per se dicho conjunto. Así mismo, el conjunto de Cantor ha sido utilizado en varias áreas de las matemáticas y en algunas fuera de ellas como física, música e incluso finanzas.

Ya conocido el contexto, se procede a explicar la estructura que sigue la memoria. El capítulo 1 es introductorio y se pretende hacer ver al lector la relevancia del conjunto de Cantor (véase [2]). A continuación, en el capítulo 2 se procede a explicar qué es el conjunto de Cantor, así como ver su construcción, sus múltiples propiedades topológicas y sus respectivas demostraciones, aquí también se verá la generalización del conjunto de Cantor (véase [3, 4, 5]). Posteriormente, en el capítulo 3 se hace una breve introducción a los sistemas dinámicos, enfocándonos en la familia cuadrática (véase [1, 6]). Para cerrar este capítulo veremos una relación clara entre estos sistemas y el conjunto de Cantor. Al final de la memoria tenemos las observaciones y conclusiones.

Capítulo 2

Introducción al conjunto de Cantor

2.1. Construcción

La construcción del conjunto de Cantor, de primeras no es un concepto difícil de entender. De hecho, una persona con pocos conocimientos acerca de las matemáticas puede llegar a comprenderlo, ahora bien, el nivel de complejidad que podemos alcanzar partiendo de una base tan sencilla es lo realmente sorprendente del conjunto de Cantor.

En esta sección vamos a desarrollar el fundamento teórico que hemos trabajado en esta memoria. Veremos la construcción en la que pensó originalmente el autor o supuesto autor del conjunto. También se verá otra posible definición que se basa en la misma construcción.

Naturalmente, sobra decir que esta no es la única construcción existente. De hecho, en la Sección 3.3, se verán distintas generalizaciones del conjunto. La construcción y generalización de Cantor no solo nos proporciona un ejemplo concreto de un objeto matemático interesante, sino que también nos brinda una visión más amplia sobre la naturaleza de los conjuntos infinitos y las posibilidades infinitas que pueden surgir a partir de elementos simples.

Lo que sí acontece en esta sección es la explicación de dos puntos de vista diferentes de la misma construcción, el geométrico y el numérico. Tanto la construcción geométrica como la construcción numérica del conjunto de Cantor son complementarias y nos brindan diferentes perspectivas para comprender la naturaleza y las propiedades de este conjunto único. Veamos primero la perspectiva geométrica, que de primeras es más sencilla de entender, y luego pasaremos a la parte numérica.

Desde el punto de vista geométrico, el conjunto de Cantor se construye a partir del intervalo real $[0, 1]$. A continuación, dividimos el intervalo en 3 subintervalos de la misma longitud, en este caso $\frac{1}{3}$. Ahora quitamos el tercio que queda en el interior, que en esta primera iteración es el abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, y nos quedamos con los dos restantes. Repetimos el proceso que hemos hecho con el intervalo $[0, 1]$ con los dos subintervalos que nos hemos quedado y así sucesivamente. Gráficamente quedaría así:

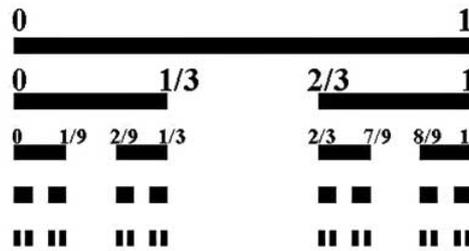


Figura 2.1 Definición geométrica del conjunto de Cantor

Una vez vista la construcción geométrica, es mucho más sencillo entender la construcción numérica. En realidad ambas construcciones son la misma, solo que la primera viene dada por un punto de vista más gráfico, dividiendo los segmentos literalmente, y la segunda desde un enfoque más aritmético, dándonos incluso la expresión general de los intervalos tomados y quitados en cada iteración. Veamos esto con más detalle. Para ello usaremos la siguiente notación. Si $S \subseteq \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$, definimos el conjunto $p + \frac{1}{3}S := \{x \in \mathbb{R} : x = p + \frac{s}{3}, s \in S\}$.

Definición 1. Se define el conjunto C de Cantor como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n,$$

donde

$$C_1 = [0, 1],$$

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right), \quad n > 1.$$

En particular, $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, y así sucesivamente.

Nota 1. Esta es la definición que emplearemos y a la que haremos referencia para extraer la mayor parte de las propiedades del conjunto. Notar que esta definición viene dada por los intervalos que tomamos en cada iteración. Existen muchas otras definiciones equivalentes. Por

ejemplo, podemos definir el conjunto de Cantor como el complementario de la unión de los abiertos complementarios a C_n .

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

donde $I_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $I_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, y así sucesivamente, llegando a la expresión general

$$I_n = (\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1.$$

La explicación de este término general es la siguiente. El denominador es prácticamente trivial. En cada iteración se elimina una tercera parte de la parte ya dividida previamente. Por ejemplo, en I_2 estamos dividiendo cada tercio de nuevo entre tres, i.e, tenemos $\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$. Aplicando esto en cada iteración, el denominador resulta en 3^n . Para entender los valores que toma la variable k , o más bien su máximo valor en cada iteración de n , notar que para $n = 1$ se elimina 1 intervalo, para $n = 2$ se eliminan 2 intervalos, para $n = 3$ se eliminan 4, para $n = 4$ se eliminan 8, y así sucesivamente. Luego para $n = j$ tenemos que se quitan 2^{j-1} intervalos distintos. Finalmente, el numerador nos permite "saltar" de un intervalo a otro, de tal forma que todos los numerados que tengan la iteración j los tiene $j - 1$.

Notar que en esta definición estaríamos considerando la unión de abiertos, en lugar de la intersección de cerrados. Evidentemente, se define el mismo conjunto que en la definición anterior.

Nota 2. *Notemos que todos los elementos de C se pueden escribir de la forma*

$$\frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \frac{2a_3}{3^3} + \frac{2a_4}{3^4} + \dots, \quad \text{donde } a_i \in \{0, 1\}$$

Esto se debe a que los elementos de C no necesitan la aparición del dígito 1 para ser expresados en su forma ternaria. Veamos esto con más detalle. Todo número del intervalo $[0, 1]$ puede ser expresado en base 3, usando únicamente los dígitos 0, 1 y 2. En la primera iteración se elimina el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, por lo que todos los elementos de la forma 0.1xxx... quedan eliminados. En la segunda iteración, eliminamos los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, donde se eliminan los elementos de la forma 0,01xxx... y 0,21xxx..., respectivamente. En cuanto al caso de los bordes, siempre se podrán expresar de dos maneras distintas, por ejemplo, en la primera iteración, el borde $\frac{1}{3}$ puede expresarse tomando el 0 ó el 1, por ello tomaremos la representación 0,02222... en base 3. La cuestión es que siempre podremos tomar una expresión en la que no aparezca el dígito 1. En el Teorema 6

2.2. Propiedades

El conjunto de Cantor tiene una gran cantidad de propiedades, algunas de ellas realmente sorprendentes. Entre otras tenemos que el conjunto de Cantor es no numerable, compacto, metrizable y totalmente desconexo. A continuación, veremos qué supone cada una de ellas, así como su respectiva demostración.

Primero recordaremos algunas definiciones y conceptos topológicos para poder entender mejor las posteriores demostraciones.

Definición 2. Diremos que un conjunto X es desconexo si existen dos conjuntos abiertos, A y B no triviales (no son el vacío ni el propio conjunto X), tales que $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$. Llamaremos conexo a aquel conjunto que no sea desconexo.

Nota 3. (Nota1) Un conjunto X es desconexo si existe $Y \subseteq X$ que sea abierto y cerrado a la vez. En este caso se dice que Y separa a X . Evidentemente $X \setminus Y$ también lo separa.

Demostración:

Para ver que X es desconexo necesitamos ver que no es conexo, es decir, que existen A y B (no triviales) con $A \cap B = \emptyset$, tales que $X = A \cup B$. Por hipótesis, Y es abierto y cerrado. Sabemos entonces que $X \setminus Y$ es también abierto, por ser el complementario de un cerrado. Entonces, ya tenemos $Y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ y a su vez $Y \cup (X \setminus Y) = X$, siendo ambos abiertos. ■

Definición 3. La componente conexa C_x de un punto $x \in X$ es la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen a x . Un conjunto X es totalmente desconexo cuando la componente conexa de cada $x \in X$ es trivial, es decir, cuando $C_x = \{x\}$ para todo $x \in X$.

Una vez vistas las definiciones referentes al concepto de conexidad, procedemos con el teorema que demuestra la primera propiedad que veremos del Conjunto de Cantor.

Teorema 1. El Conjunto de Cantor es totalmente desconexo y no tiene la topología discreta.

Demostración:

Primero veremos que el Conjunto de Cantor C es totalmente desconexo.

Sea $x \in C$ y sea C_x su componente conexa. Tenemos que ver que $C_x = \{x\}$. Para ello tomemos $y \in C$, $y \neq x$. Sea $d = |x - y|$, la distancia entre ambos puntos. Sabemos que $\exists n \in \mathbb{N}$

suficientemente grande tal que $\frac{1}{3^{n-1}} < d$. Por ende, $l(I_{n,j}) = \frac{1}{3^{n-1}} \forall j$, donde l es la longitud del intervalo y $I_{n,j}$ es cada uno de los intervalos que hay en n -ésima iteración que constituye C_n . Así, si $x \in I_{n,j_0}$ arbitrario entonces $y \notin I_{n,j_0}$, ya que la distancia entre los puntos es mayor que la longitud total del intervalo.

El intervalo I_{n,j_0} es cerrado en \mathbb{R} , entonces $I_{n,j} \cap C$ es cerrado en C (y en \mathbb{R}), $\forall j$ en la iteración n -ésima. Por tanto $\bigcup_{j \neq j_0} (I_{n,j} \cap C)$ es cerrado, por ser una unión finita de cerrados. Como $I_{n,j_0} \cap C = C \setminus \bigcup_{j \neq j_0} (I_{n,j} \cap C)$, tenemos que $I_{n,j_0} \cap C$ es abierto en C . Lo mismo para el resto de $I_{n,j}$, cuando $j \neq j_0$. Con todo sabemos que $I_{n,j} \cap C$ es abierto y cerrado a la vez en C . Podemos expresar $C = (I_{n,j} \cap C) \cup (C \setminus (I_{n,j} \cap C))$.

Sea $D \subseteq C$ conexo. Entonces $D \subseteq I_{n,j} \cap C$ ó bien $D \subseteq C \setminus (I_{n,j} \cap C)$ exclusivamente. De no ser así, D no podría ser conexo en C , ya que podríamos encontrar dos abiertos disjuntos cuya unión sería todo D . En particular $x \in C_x \subseteq I_{n,j_0} \cap C$. Como $y \notin I_{n,j_0}$ entonces $y \notin C_x$. Pero y es un punto arbitrario, por tanto se cumplirá para cualquier otro punto, luego tenemos que $C_x = \{x\}$, $\forall x \in C$. De esta forma, ya tenemos demostrado que el conjunto de Cantor es totalmente desconexo.

Ahora veamos que C no tiene la topología discreta. Para ello veremos que C tiene al menos un punto de acumulación, ya que en la topología discreta todos los puntos son aislados.

Por la Nota 2 todos los elementos de C se pueden escribir de la forma

$$\frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \frac{2a_3}{3^3} + \frac{2a_4}{3^4} + \dots, \quad \text{donde } a_i \in \{0, 1\}$$

Tomemos ahora la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq C$, donde

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^{2k}} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^2}\right)^k = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{9}\right)^k = 2 \frac{\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} = 2 \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}} = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{8} = \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{4}.$$

Sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{4}.$$

Acabamos de ver que $\frac{1}{4}$ es un punto de acumulación en C , demostrando entonces que C no tiene topología discreta. Ya tenemos demostrado que el conjunto de Cantor es totalmente

disconexo y no tiene la topología discreta. ■

En el Teorema 1 hemos podido ver una propiedad que rompe con nuestra intuición, ya que cuando pensamos en puntos aislados en los que cada componente conexa es el propio punto, la topología discreta es la primera que nos viene a la cabeza. Pese a ello, podemos encontrar muchos otros conjuntos en los que también sucede lo mismo, por ejemplo, el conjunto de los números irracionales.

La propiedad que demostraremos a continuación sí es realmente peculiar, y para entenderla mejor veamos lo siguiente. Observemos que en la primera iteración quitamos un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{3}$, en la segunda 2 intervalos abiertos de longitud $\frac{1}{3^2}$, y así sucesivamente, es decir, en la iteración n -ésima quitamos 2^{n-1} intervalos abiertos de longitud $\frac{1}{3^n}$. Así pues, si sumamos las longitudes de cada uno de los trozos (intervalos) que quitamos obtendremos la longitud total de la unión de todos los conjuntos quitados al intervalo $[0, 1]$. Nos queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} \right) = 1$$

El conjunto de Cantor tiene longitud 0, en el sentido de que su complementario $[0, 1] \setminus C$ tiene longitud 1. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Es el conjunto de Cantor un conjunto vacío? No, realmente no lo es y veamos el porqué.

Teorema 2. *El conjunto de Cantor no es el conjunto vacío.*

Demostración:

Hemos definido Cantor como $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ donde $C_1 = [0, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, ... Luego en cada iteración en la que pasamos de un C_i a C_{i+1} estamos manteniendo por lo menos dos puntos. Por ejemplo, en la primera iteración en la que el intervalo eliminado es el abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, dejamos pues los puntos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ dentro del conjunto. Como C es la intersección de todos los C_n , estos puntos del 'borde' siempre estarán en los nuevos intervalos. Entonces podemos asegurar que C no es vacío y, de hecho, como hay infinitas iteraciones, será infinito. ■

La demostración anterior se ve con claridad gráficamente, por ello puede resultar útil complementarla con una imagen. La fig. 2.2 nos muestra con claridad la conservación referida en la

demostración de los puntos de los bordes.

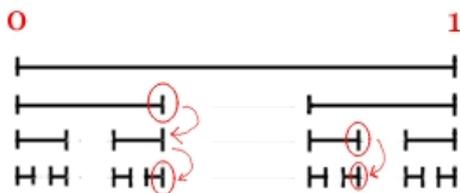


Figura 2.2 Conservación de los bordes en las iteraciones

Definición 4. Un subespacio A de un espacio topológico X es raro (o denso en ninguna parte) si su clausura tiene un interior vacío. Esto es, si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Nota 4. Sea A un subconjunto de un espacio topológico X , entonces $\text{int}(A) = X \setminus (\overline{X \setminus A})$. Por tanto A es raro si y solo si $X \setminus \overline{A}$ es denso en el espacio X . Veamos esto con más detalle.

$$\text{int}(\overline{A}) = \emptyset \iff X \setminus \text{int}(\overline{A}) = X \iff \overline{X \setminus \overline{A}} = X,$$

es decir, $X \setminus \overline{A}$ es denso en X .

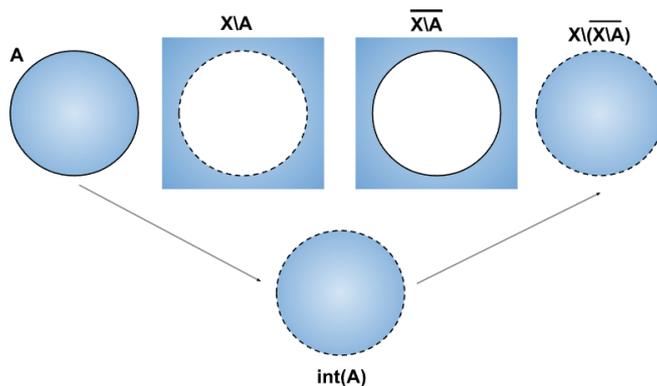


Figura 2.3 Explicación gráfica de $\text{int}(A) = X \setminus (\overline{X \setminus A})$

Teorema 3. El conjunto de Cantor es cerrado y raro.

Demostración: El conjunto de Cantor lo hemos definido como $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ donde $C_1 = [0, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, ..., todos ellos cerrados, sabiendo además que la intersección infinita

de cerrados es cerrado, ya tenemos que el conjunto de Cantor es cerrado. Como hemos visto en la demostración del Teorema 1, la componente conexa para cada punto del conjunto de Cantor es el propio punto, luego no hay ningún intervalo abierto en su interior, por lo que no contiene intervalos de longitud no nula. Esto mismo lo habíamos observado en la discusión anterior al ver que la longitud del conjunto de Cantor es nula. Por tanto, $\text{int}(C) = \emptyset$, lo que indica que C es raro. ■

Teorema 4. *El conjunto de Cantor es compacto.*

Demostración: Por el teorema de Heine-Borel sabemos que cerrado y acotado implica compacto. Ya hemos visto que Cantor es cerrado en el Teorema 3. Ver que es acotado es trivial, sabiendo que $C \subseteq [0, 1]$, con ínfimo 0 y supremo 1. ■

Para demostrar que el conjunto de Cantor no es numerable necesitamos demostrar previamente el siguiente teorema.

Teorema 5. $\exists h : C \rightarrow [0, 1]$ *función sobreyectiva no decreciente.*

Demostración: Definimos h de la siguiente forma:

$$h : C \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

con $a_n \in \{0, 1\}$ y donde $x \in C$ lo representamos en base 3 como $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$, por la Nota 2.

Veamos en primer lugar que h está bien definida. Para esto es necesario ver que la sucesión definida como función es convergente y además converge a un punto de la imagen, es decir, a un punto del intervalo $[0, 1]$.

Sea $x \in C$, luego $h(x) = h\left(\frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \frac{2a_3}{3^3} + \dots\right) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \dots$ Sabiendo que los $a_n \in \{0, 1\}$ tendremos la siguiente desigualdad,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Por el criterio de comparación de series, acabamos de encontrar una serie mayorante que converge, luego sabemos que nuestra serie original converge a un número menor o igual que 1, y evidentemente mayor o igual que 0, ya que es la suma términos positivos. Ya tenemos que la función es convergente y converge al intervalo $[0,1]$.

Obviamente la función h es monótona creciente. Veamos ahora que h es sobreyectiva. Para ello necesitamos comprobar que $\forall w \in [0, 1] \exists x \in C$ tal que $h(x) = w$. Todo número del intervalo $[0, 1]$ se puede expresar en su forma binaria como

$$w := \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \dots, \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

Entonces tomaremos como antiimagen $x \in C$ tal que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2a_j}{3^j} \in C$, por la Nota 2. Así pues, ya tenemos que $h(x) = w$. Por tanto, h es sobreyectiva. ■

Definición 5. Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A tiene el mismo cardinal que B si existe una aplicación $f : A \rightarrow B$ biyectiva. Un conjunto diremos que es numerable si tiene el mismo cardinal que \mathbb{N} . La relación “tener el mismo cardinal” es una relación binaria de equivalencia. La clase de equivalencia de un conjunto A la denotaremos por $\#A$ y la llamaremos cardinal de A .

Corolario 1. El conjunto de Cantor es no numerable.

Demostración:

Para ver que el conjunto de Cantor no es numerable es suficiente con encontrar una aplicación sobreyectiva de C a otro conjunto no numerable.

En el Teorema 5 ya tenemos definida la función $h : C \rightarrow [0, 1]$ sobreyectiva. Por tanto $\#C \geq \#[0, 1]$.

A su vez $C \subseteq [0, 1]$, luego $\#C \leq \#[0, 1]$. Por consiguiente

$$\#C = \#[0, 1].$$

Dado que el conjunto $[0, 1]$ no es numerable, concluimos que el conjunto de Cantor tampoco

es numerable. ■

Finalizaremos esta sección demostrando que el conjunto de Cantor se puede identificar con el conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} : x \text{ es una aplicación}\}$. Empecemos familiarizándonos con este conjunto.

Sea $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, entonces lo podemos escribir de la forma $x = (x(n))_{n \geq 1} = (x(1), x(2), \dots)$. Observemos que un elemento $t = (t(1), t(2), \dots, t(n)) \in \{0, 1\}^n$ se puede identificar, con abuso de notación, con el elemento $(t(1), \dots, t(n), 0, 0, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, añadiendo ceros, y diremos que concatenamos la sucesión de ceros a t . De la misma manera podemos concatenar a t elementos de $\{0, 1\}^m$. Por ejemplo si $s = (s(1), \dots, s(m))$, entonces $ts = (t(1), t(2), \dots, t(n), s(1), \dots, s(m), 0, 0, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Por comodidad no indicaremos la concatenación con la sucesión de ceros.

Dotaremos al conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de una relación binaria de orden: diremos que $x < y$, $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, si y sólo si $x(1) < y(1)$, o bien $\exists n > 1$ tal que $x(1) = y(1), \dots, x(n-1) = y(n-1)$, pero $x(n) < y(n)$. Es fácil comprobar que la relación anterior es de orden y se llama *orden lexicográfico*.

Consideremos ahora dos elementos cualesquiera $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, entonces $x = (x(1), x(2), \dots)$ e $y = (y(1), y(2), \dots)$, donde $x(i), y(i) \in \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Definimos la siguiente métrica:

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(i)-y(i)|}{2^i}$$

La función d está bien definida puesto que $d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Para comprobar que d es una métrica necesitamos ver que cumple las siguientes condiciones:

- 1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$
- 2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 3) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y$
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z$

Veamos que efectivamente cumple las 4 condiciones anteriores. Sean $x = (x(i))_{i \geq 1}$, $y = (y(i))_{i \geq 1}$ y $z = (z(i))_{i \geq 1}$ tres elementos arbitrarios.

$$1) \quad d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(i)-y(i)|}{2^i} \geq 0 \text{ ya que } |x(i) - y(i)| \geq 0, \forall i \geq 1.$$

$$\begin{aligned}
2) \quad d(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x(i)-y(i)|}{2^i} = 0 \iff |x(i) - y(i)| = 0, \forall i \iff x(i) = y(i), \forall i \iff x = y. \\
3) \quad d(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x(i)-y(i)|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x(i)-y(i)|}{2^i} = d(y, x). \\
4) \quad d(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(i)-y(i)|}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(i)-z(i)+z(i)-y(i)|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(i)-z(i)|+|z(i)-y(i)|}{2^i} = d(x, z) + d(z, y).
\end{aligned}$$

Acabamos de comprobar por tanto que la distancia definida es una métrica.

Nota 5. *Cualquier número $x \in [0, 1]$ se puede expresar en forma binaria $x = (0.x(1)x(2)\dots)_2$ e identificar con un elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y de esta manera utilizar esta métrica sobre números en binario.*

Teorema 6. $\exists f : C \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ homeomorfismo que conserva el orden .

Demostración: Usaremos la siguiente notación en la demostración. Dados dos subconjuntos A y B de números reales diremos que $A < B$ si $a < b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$. Además si A está acotado llamaremos diámetro de A al número $diam(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Vamos a encontrar por inducción una colección $\{M_t : t \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\}$ de subconjuntos abiertos y cerrados (clopen) en C tales que

- i) $\bigcup_{t \in \{0, 1\}^n} M_t = C$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- ii) si $t < s$, y $t, s \in \{0, 1\}^n$ entonces $M_t < M_s$;
- iii) si $t < s$, $t \in \{0, 1\}^n$, $s \in \{0, 1\}^m$ y $n < m$, entonces $M_s \subseteq M_t$.

El conjunto de Cantor lo hemos definido como $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ donde $C_1 = [0, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, \dots , todos ellos cerrados.

$n = 1$ Definimos teniendo en cuenta el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ quitado en C_2 ,

$M_0 := (-\infty, \frac{1}{2}) \cap C = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap C$, abierto y cerrado en C y cerrado en \mathbb{R} ; y

$M_1 := (\frac{1}{2}, +\infty) \cap C = [\frac{1}{2}, +\infty) \cap C$, abierto y cerrado en C y cerrado en \mathbb{R} .

Observemos que $M_0 \cap M_1 = \emptyset$, $M_0 \cup M_1 = C$, $M_0 < M_1$ y $diam(M_0) = diam(M_1) \leq \frac{1}{2}$.

$n = 2$ Definimos teniendo en cuenta los intervalos quitados en C_3 ,

$$M_{00} := (-\infty, \frac{1}{4}) \cap C = (-\infty, \frac{1}{4}] \cap C, \text{ clopen en } C \text{ y cerrado en } \mathbb{R};$$

$$M_{01} := (\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}) \cap C, \text{ clopen en } C.$$

$$M_{00} \cap M_{01} = \emptyset, M_{00} \cup M_{01} = M_0, M_{00} < M_{01} \text{ y } \text{diam}(M_{00}) = \text{diam}(M_{01}) \leq \frac{1}{4}.$$

Análogamente definimos

$$M_{10} := (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cap C, \text{ clopen en } C;$$

$$M_{11} := (\frac{3}{4}, +\infty) \cap C \text{ clopen en } C.$$

$$M_{10} \cap M_{11} = \emptyset, M_{10} \cup M_{11} = M_1, M_{01} < M_{10} < M_{11} \text{ y } \text{diam}(M_{10}) = \text{diam}(M_{11}) \leq \frac{1}{4}.$$

...

$n - 1$ Suponemos que ya hemos definido $\{M_t : t \in \{0, 1\}^{n-1}\}$.

n Procederíamos como en los casos $n = 1$ y $n = 2$. Consideraremos en el intervalo $[0, 1]$ los intervalos que forman C_{n+1} y los puntos medios de los intervalos que se quitan en la iteración $n + 1$ de la construcción de C . Cada conjunto M_t , $t \in \{0, 1\}^{n-1}$ lo dividiremos en dos clopen de C , teniendo en cuenta el punto medio del intervalo que quitamos más cercano a M_t . Llamaremos M_{t0} al clopen que queda a la izquierda y M_{t1} el que queda a la derecha y que verifican

$$M_{t0} \cap M_{t1} = \emptyset, M_{t0} \cup M_{t1} = M_t, M_{t0} < M_{t1} \text{ y } \text{diam}(M_{t0}) = \text{diam}(M_{t1}) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Obtendremos de esta manera la colección de abiertos y cerrados a la vez en C ,

$$\{M_{t0}\}_{t \in \{0,1\}^{n-1}} \cup \{M_{t1}\}_{t \in \{0,1\}^{n-1}} = \{M_s\}_{s \in \{0,1\}^n},$$

que además verifican

$$\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} M_s = C,$$

y si $t < s$, $t, s \in \{0, 1\}^n$, entonces $M_t < M_s$ y $\text{diam}(M_t) = \text{diam}(M_s) \leq \frac{1}{2^n}$.

Hemos terminado con el proceso de inducción. Cada conjunto M_t es cerrado en \mathbb{R} , subconjunto del conjunto de Cantor C , que es compacto, por tanto también es compacto.

Observemos que si fijamos $x \in C$, el proceso de inducción genera una sucesión decreciente de conjuntos $\{M_{t_n}\}_{t_n \in \{0,1\}^n}$ conteniendo a x . En efecto, $x \in C = M_0 \cup M_1$, y como M_0 y M_1 son disjuntos, entonces x está en uno de ellos, llamémosle M_{t_1} , $t_1 \in \{0, 1\}$. Ahora $x \in M_{t_1} = M_{t_10} \cup M_{t_11}$, pero M_{t_10} y M_{t_11} son conjuntos disjuntos, entonces x está en uno de ellos, llamémosle M_{t_2} , $t_2 = t_1 i$, donde $i \in \{0, 1\}$. Por tanto $x \in M_{t_2} \subseteq M_{t_1}$. Procediendo de esta manera llegamos a que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n}$. Además, como $\text{diam}(M_{t_n}) \leq \frac{1}{2^n}$, se deduce que $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n}$.

Dado que cada t_n se forma concatenando 0 ó 1 a t_{n-1} , estamos definiendo un único elemento $t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, donde para cualquier n , los primeros n -dígitos de t serán los dígitos de t_n . Se define la función

$$f : C \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

como

$$f(x) = t \text{ si } \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n} \text{ y } t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

Dado $t \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y $t_n = (t(1), t(2), \dots, t(n))$, los conjuntos M_{t_n} son compactos (son cerrados dentro del compacto C) y constituyen una cadena decreciente donde $M_{t_{n+1}} \subseteq M_{t_n}$, por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n} \neq \emptyset$. (En caso contrario $M_{t_1} \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus M_{t_n})$, donde los conjuntos $\mathbb{R} \setminus M_{t_n}$ son abiertos, entonces $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_r$ tales que $M_{t_1} \subseteq \bigcup_{j=1}^r (\mathbb{R} \setminus M_{t_{n_j}})$. Por tanto $M_{t_1} \cap (\bigcap_{j=1}^{\infty} M_{t_{n_j}}) = M_{t_{n_r}}$, lo cual es una contradicción). Ya que $\text{diam}(M_{t_n}) \leq \frac{1}{2^n}$, se deduce que existe un único punto $x \in C$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n} = \{x\}$. Por la definición de f , obtenemos que $f^{-1}(t) = x$, lo que demuestra la biyectividad de f .

Ahora veamos que f es continua. Sea $x \in C$ y $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq C$ una sucesión convergente a x . Denotamos por $t = f(x)$ y $s^{(m)} = f(x_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Podemos encontrar n_0 tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$. Por otro lado sabemos que $\exists \{t_n\}_{n=1}^{+\infty} / \{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} M_{t_n}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Como $M_{t_{n_0}}$ es abierto en C , $x_m \in M_{t_{n_0}}$, a partir de un cierto m_0 . Si $m \geq m_0$, entonces $M_{t_j} = M_{s_j^{(m)}}$ para $1 \leq j \leq n_0$. Por lo tanto $t_j = s_j^{(m)}$ cuando $1 \leq j \leq n_0$, y $m \geq m_0$.

Evaluamos ahora

$$d(f(x), f(x_m)) = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \frac{|t(j) - s^{(m)}(j)|}{2^j} \leq \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon, \quad \forall m \geq m_0.$$

Por tanto la sucesión $\{f(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ convergente a $f(x)$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, lo que indica que f es una función continua.

Debido a que C es compacto, la continuidad de f implica la continuidad de f^{-1} .

Veamos finalmente que f conserva el orden. Sean $x, y \in C$ tales que $x < y$. Entonces $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n}$ e $\{y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{s_n}$, para ciertas sucesiones $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}, \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Sea n_0 el menor natural tal que $t_{n_0}(n_0) < s_{n_0}(n_0)$, por lo que $t_{n_0}(j) = s_{n_0}(j)$, $1 \leq j < n_0$. Entonces

$M_{t_{n_0}}, M_{s_{n_0}} \subseteq M_{t_{n_0-1}} = M_{s_{n_0-1}}$, pero $M_{t_{n_0}} < M_{s_{n_0}}$. Luego $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t < s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f(y)$, ya que $t(j) = t_{n_0}(j) = s_{n_0}(j) = s(j)$, $1 \leq j < n_0$ y $t(n_0) = t_{n_0}(n_0) < s_{n_0}(n_0) = s(n_0)$. ■

Corolario 2. *La aplicación definida en el Teorema 5 es continua.*

2.3. Generalización

Para generalizar el conjunto de Cantor veremos previamente unos resultados que nos permitirán obtenerlo de una forma más manejable. Esta idea se basa en buscar otro conjunto que cumpla las mismas propiedades topológicas que el conjunto de Cantor. Posteriormente veremos ejemplos, donde la dimensión se conserva o se aumenta.

Teorema 7. *Sea S un conjunto no vacío, totalmente desconexo, perfecto, compacto y métrico. Sea $A \subseteq S$ no vacío, abierto y cerrado, entonces A es también totalmente desconexo, perfecto, compacto y métrico.*

Demostración:

Necesitamos comprobar que A es totalmente desconexo, perfecto y compacto. Como A es cerrado en S , A es compacto, ya que todo subconjunto cerrado de un compacto es a su vez compacto. A su vez, como A es abierto en S , A es totalmente desconexo. Solo falta ver que A es perfecto. Sea $x_0 \in A$, como S es perfecto y $x_0 \in A \subseteq S$, entonces existe una sucesión (x_n) en S convergente a x_0 . Dado que A es abierto y contiene a x_0 , también contendrá a todos los x_n salvo una cantidad finita. Por tanto x_0 es punto de acumulación en A y, dado que es arbitrario, se cumple $\forall x \in A$. ■

Teorema 8. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, totalmente desconexo, perfecto, compacto y métrico. Entonces $\exists f : S \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ homeomorfismo que conserva el orden ($\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ está ordenado lexicográficamente).*

Demostración:

El conjunto S es acotado. Sean $a := \inf(S)$ y $d := \sup(S) - a = \text{diam}(S)$. Dado que S es totalmente desconexo $\exists c \in [a + \frac{1}{4}d, a + \frac{3}{4}d] \setminus C$. En caso contrario, $[a + \frac{1}{4}d, a + \frac{3}{4}d] \setminus C = \emptyset$, luego $I := [a + \frac{1}{4}d, a + \frac{3}{4}d] \subseteq S$, y esto es imposible porque el intervalo I es conexo en \mathbb{R} y S es totalmente desconexo.

Procederoms igual que en la demostración del Teorema 6. Definimos $M_0 := (-\infty, c) \cap S$ y $M_1 := (c, +\infty) \cap S$, abiertos y cerrados (clopen) a la vez en S , y por tanto también totalmente desconexos, perfectos, compactos y métricos por el Teorema 7. Además sabemos que

$$\text{diam}(M_0) \leq \frac{3}{4} \text{diam}(S) \quad \text{y} \quad \text{diam}(M_1) \leq \frac{3}{4} \text{diam}(S).$$

Ahora, para $n > 1$, aplicamos el paso anterior para cada $t \in \{0, 1\}^{n-1}$ obteniendo

$$M_{t,0}, M_{t,1} \subseteq M_t, \text{ con } M_{t,0} < M_{t,1} \text{ y } \text{diam}(M_{t,i}) \leq \frac{3}{4} \text{diam}(M_t) \text{ para } i \in \{0, 1\}.$$

De esta manera conseguimos una sucesión de conjuntos, $\{M_s\}_{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$, tales que, $\forall r, s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ verifican

$$\begin{cases} \text{diam}(M_s) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{diam}(C), \\ \text{si } r < s \implies M_r < M_s. \end{cases}$$

Además para cualquier n fijado, tenemos que $S = \bigcup_{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} M_s$.

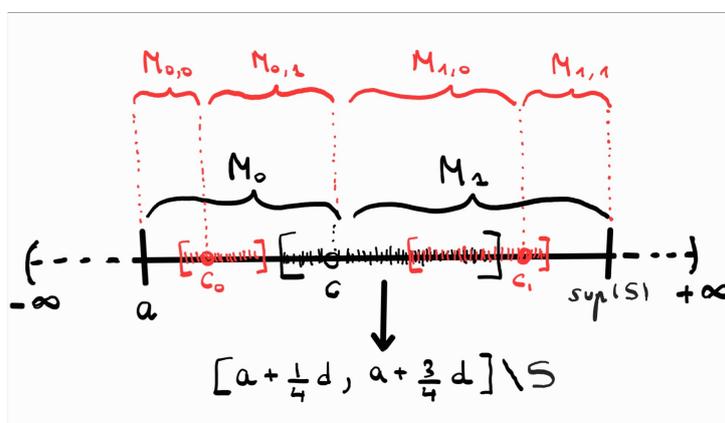


Figura 2.4 Ilustración con $n = 1$ y $n = 2$

Ahora fijamos $x \in S$. Por la construcción que acabamos de ver, existe una sucesión de conjuntos $\{M_{t_n}\}_{t_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ que contienen a x . Además, dado que cada t_n se forma concatenando 0 ó 1 a t_{n-1} , estamos definiendo un único elemento $f(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ donde para cualquier n , los

primeros n -dígitos de $f(x)$ serán los términos de t_n . Ya tenemos la aplicación $f : S \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Veamos ahora la otra dirección.

Para ver que f es biyectiva, notar que si $t \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y $t_n = (t(1), t(2), \dots, t(n))$, entonces $f^{-1}(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n}$ contiene un único punto, ya que $\{M_{t_n}\}$ es una sucesión decreciente infinita de conjuntos compactos cuyo diámetro tiende a 0.

De manera similar a la demostración del Teorema 6 se puede comprobar la aplicación f es continua, cerrada y conserva el orden. ■

Nota 6. *El Teorema sigue siendo válido cuando S es un conjunto no vacío, totalmente desconexo, perfecto, compacto y métrico que no sea subconjunto de números reales.*

En una primera instancia, es difícil imaginar que existe una relación entre el conjunto de Cantor y el conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Sin embargo, el Teorema 6 y el Teorema 8 permiten hacernos a la idea de los diferentes formatos en los que podemos encontrar un conjunto de Cantor. Esto nos lleva a una nueva definición radicalmente distinta a la vista en un inicio, que nos servirá para comprender mejor las posteriores generalizaciones del conjunto de Cantor y darnos cuenta de que en realidad todos son el mismo tipo de conjunto.

Definición 6. *Un espacio de Cantor es un espacio no vacío, totalmente desconexo, perfecto, compacto y métrico.*

Así, cualquier conjunto que cumpla con las propiedades mencionadas en la Definición 6 es un espacio de Cantor. Podemos conseguir un espacio de Cantor en \mathbb{R} tomando intervalos de diferente longitud a $\frac{1}{3}$. Veámoslo.

Generalización unidimensional del conjunto de Cantor. Lo primero, es tomar una longitud que se encuentre en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$. Esto se debe a que si la longitud fuese mayor que $\frac{1}{2}$, evidentemente no podríamos hacer la partición del intervalo $[0, 1]$. Ahora, al igual que se hacía con $\frac{1}{3}$ eliminamos el intervalo del medio I_0 . Su longitud será $(1 - 2\delta)$, ya que nos estaremos quedando con dos intervalos de longitud δ . Luego tenemos:

$$[0, 1] - I_0 = [0, \delta] \cup [1 - \delta, 1]$$

donde $I_0 = (\delta, 1 - \delta)$. En la siguiente iteración, de los intervalos $[0, \delta]$ y $[1 - \delta, 1]$, eliminamos un nuevo intervalo en cada uno de ellos, $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$, respectivamente. La longitud de los nuevos trozos quitados será $(\delta - 2\delta^2)$ por el mismo razonamiento de la primera iteración. Si definimos I_1 como la unión de $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$ tenemos:

$$I_1 = (\delta^2, \delta - \delta^2) \cup (1 - \delta + \delta^2, 1 - \delta^2)$$

Por tanto ahora tendríamos los intervalos $[0, \delta^2]$, $[2\delta^2, \delta]$, $[1 - \delta, 1 - 2\delta^2]$ y $[1 - \delta^2, 1]$. Siguiendo de la misma manera obtendríamos un espacio homeomorfo al conjunto de Cantor, pero en lugar de hacerlo con $\frac{1}{3}$, con el valor δ escogido al inicio.

Generalización multidimensional del conjunto de Cantor. La generalización del conjunto de Cantor también se puede llevar a otras dimensiones, por ejemplo podemos pasar a \mathbb{R}^2 utilizando el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De manera similar, podemos extender el conjunto de Cantor a 3 dimensiones, en el que la construcción se basa en la eliminación del tercer cubo intermedio al igual que la construcción estándar, pero en \mathbb{R}^3 . Este espacio de Cantor tridimensional da pie a un nuevo fractal y se le conoce como el 'polvo de Cantor'. En la figura 2.5 se puede intuir su construcción y entender el porqué de ese nombre.

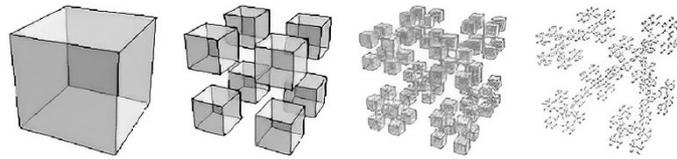


Figura 2.5 Ilustración con $n = 1$ y $n = 2$

Capítulo 3

Funciones dinámicas

El objetivo de esta nueva sección es introducir algunas ideas fundamentales de los sistemas dinámicos. Los conceptos de caos y fractal, se relacionan de forma intrínseca con estos sistemas. El término fractal se puede definir de forma coloquial como un objeto geométrico en el que se repiten los patrones a diferentes escalas y con diferente orientación. Por otra parte, el caos lo veremos como la incertidumbre a la hora de predecir el comportamiento de ciertas funciones al ser iteradas. Nos centraremos en la aplicación cuadrática $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x) = x^2 + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Veremos cómo va cambiando la dinámica de la función F a medida que vamos modificando los valores de c . De hecho, cuando pasamos al plano complejo, esta aplicación se divide en dos partes bien diferenciadas, la primera, dominada y bien entendida, y la segunda, que da pie a conjuntos, donde las dinámicas son más caóticas y complejas.

Uno de los lugares donde a veces es posible observar estas dinámicas complejas es en un fractal. En concreto, en el espacio unidimensional la mayoría de dinámicas complejas ocurren en un fractal, el fractal más básico de todos, un espacio de Cantor. Así es, otra de las maravillosas propiedades de este conjunto, por si en el capítulo anterior no eran pocas, es que el conjunto de Cantor es un fractal.

Ahora empezaremos introduciendo las nociones comportamiento periódico y caótico, dinámica simbólica y bifurcación.

3.1. Introducción a las funciones dinámicas

Veamos cómo podemos estudiar desde cero la dinámica de una función, concretamente de una función suave, cuya definición damos a continuación.

Definición 7. Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es suave cuando es de clase C^∞ , es decir, cuando tiene derivadas continuas de cualquier orden en todo su dominio.

Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Nuestro objetivo es conocer la dinámica de la función F , y esto se traduce en conocer el comportamiento de F sobre cualquier punto tras cierto número de iteraciones. Escribiremos F^n para referirnos a la n -ésima iteración de F . Esto es,

$$F^2 = F \circ F, \quad F^3 = F \circ F \circ F,$$

y así sucesivamente. Dado un punto p perteneciente al dominio de F , la siguiente sucesión de puntos,

$$p, F(p), F^2(p), F^3(p), \dots,$$

es lo que se conoce como la órbita de p . Luego, nuestro objetivo es poder saber cuál es el destino de esas órbitas, o sea qué sucede en $F^n(p)$ cuando $n \rightarrow \infty$. ¿Siempre serán iguales?, ¿podremos encontrar un patrón? o ¿serán completamente aleatorias? Este estudio, cuando se trata de una función cuadrática en \mathbb{R} es una cuestión difícil, pero muy interesante.

Pero, ¿por qué es interesante el comportamiento de estas órbitas? Básicamente, el estudio de las iteraciones surgió con el objetivo de poder entender el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. De hecho, las ecuaciones diferenciales dan lugar a mapas iterados de dos formas distintas. La numérica, en métodos que integran ecuaciones diferenciales de forma numérica, como el Runge-Kutta. Y por otra parte, cuando todas las curvas que son solución intersectan con una superficie, dando pie a lo que se conoce como un mapa de Poincaré.

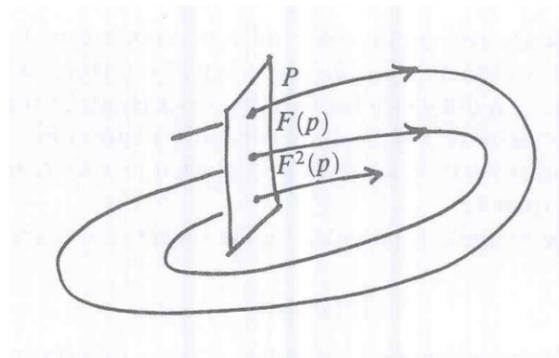


Figura 3.1 Mapa de Poincaré

Naturalmente, la iteración también surge en otros campos donde no necesariamente hay una ecuación diferencial. Un ejemplo de ello es la ecuación logística, usada en ecología para calcular el crecimiento de la población de una determinada especie. La ecuación logística viene dada por

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n)$$

donde P_n es el porcentaje de población en la generación n -ésima (respecto a un umbral fijado) y k es una constante que depende de las condiciones ecológicas. Ahora, notar que si transformamos la ecuación a la forma $F(x) = kx(1 - x)$, dada una población inicial P_0 , es posible calcular P_n de la siguiente forma:

$$P_0, P_1 = F(P_0), P_2 = F^2(P_0), \dots$$

Una vez visto el contexto de la iteración y su importancia, vamos a continuar con otro ejemplo sencillo, no sin antes ver ciertas definiciones que aparecerán de ahora en adelante y serán clave en el estudio del comportamiento de las órbitas.

Definición 8. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que

- x_0 es un punto fijo si $F(x_0) = x_0$, y por tanto todas sus órbitas se repiten;
- x_0 es un punto periódico de periodo n si $F^n(x_0) = x_0$, pero $F^i(x_0) \neq x_0$ cuando $0 < i < n$, por tanto sus órbitas se repiten de forma periódica y tendrá tantos valores distintos como periodicidad tenga su órbita;
- x_0 es eventualmente periódico si $F^n(x_0) = F^{n+m}(x_0)$, pero x_0 no es periódico;
- x_0 es un eventualmente fijo si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(x_0)$ es punto fijo, pero x_0 no lo es.

Definición 9. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto periódico de periodo n . Diremos que

- x_0 es atractor si $|(F^n)'(x_0)| < 1$;
- x_0 es repulsor si $|(F^n)'(x_0)| > 1$;
- x_0 es neutral si $|(F^n)'(x_0)| = 1$.

Veamos con un ejemplo sencillo alguno de los términos definidos arriba. Para ello, usaremos la función $F(x) = x^2$, cuyas órbitas se pueden obtener incluso con calculadora. Tenemos diferentes casos:

$$\begin{aligned} F^n(x) &\rightarrow \infty \text{ si } |x| > 1, \\ F^n(x) &\rightarrow 0 \text{ si } |x| < 1, \\ F^n(1) &= 1 \text{ para todo } n, \\ F^n(-1) &= 1 \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

En este ejemplo los puntos 0 y 1 son puntos fijos, ya que sus órbitas siempre son 0 y 1, respectivamente. Notar que su comportamiento es distinto, ya que las órbitas de puntos cercanos a 0 tienden a 0, sin embargo los puntos cercanos a 1 ó bien se van a infinito ó bien se van a 0. Por otra parte, el punto -1 es eventualmente fijo, ya que el primer punto de la órbita es -1 (él mismo) y a partir de la primera iteración ya es siempre 1.

Una técnica para estudiar las dinámicas unidimensionales es gráficamente. Esta forma nos va a permitir ver el comportamiento que va a tener cada punto de manera cualitativa, evidentemente. Para ello, tan solo se necesita dibujar la gráfica de la función que estamos estudiando y la diagonal $x = y$, y seguir el procedimiento que veremos a continuación. Supongamos que p es el punto que queremos estudiar, los pasos son:

- 1) Desde (p, p) trazar una línea vertical hasta encontrar la gráfica de F .
- 2) Desde el punto $(p, F(p))$ obtenido en 1), trazar una línea horizontal hasta la diagonal.

Simplemente repitiendo reiteradas veces el paso 1) y 2), podremos apreciar el comportamiento que sigue la órbita del punto p . Este procedimiento se puede ver en la Figura 3.2.

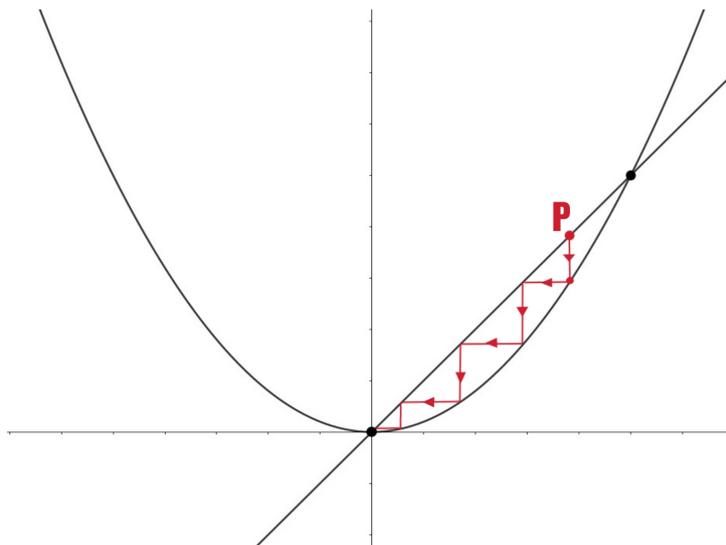


Figura 3.2 Análisis gráfico de las órbitas de p

Notar que se cumple lo que se había visto en el análisis numérico. La gráfica muestra cómo las órbitas de $p < 1$ se acercan al 0, que efectivamente es un punto atractor. También destacar que los dos puntos fijos, 0 y 1, son los dos puntos de intersección de F con la diagonal, y esto no es una casualidad.

3.2. La familia cuadrática

Ahora sí, procedemos a analizar el caso protagonista de este capítulo, la familia cuadrática. Esta familia viene dada por todas las curvas expresadas como

$$F_c(x) = x^2 + c,$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Veremos qué sucede cuando c decrece y nos daremos cuenta de que esta familia contiene toda la complejidad de los sistemas de mayor dimensión.

El primer valor que vamos a tener en cuenta es $\frac{1}{4}$ porque para tener raíces reales en la ecuación $F_c(x) = x$, c tiene que ser menor o igual que $\frac{1}{4}$. Aquí tenemos diferentes casos a analizar según el valor de c .

- Si $c > \frac{1}{4}$, la gráfica queda sobre la diagonal. Luego tenemos $F_c^n(x) \rightarrow \infty, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Si $c = \frac{1}{4}$, la gráfica es tangente a la diagonal en $x = \frac{1}{2}$, por lo que éste es el único punto fijo.
- Si $c < \frac{1}{4}$, la gráfica pasa por debajo de la diagonal y tiene 2 puntos fijos.

Vamos a centrarnos en el tercer caso. Para calcular los puntos fijos numéricamente tan solo debemos resolver la ecuación $F_c(x) = x$, que al fin y al cabo es calcular los puntos de intersección entre la gráfica de F y la diagonal. Así,

$$x^2 + c = x \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Cada una de las soluciones nos da un punto fijo distinto, que llamaremos p_+ (el mayor) y p_- (el menor). Se cumple que $F'_c(p_+) > 1$, para cada $c < \frac{1}{4}$, siendo p_+ un punto repulsor. Por el contrario, si $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, se puede comprobar que $|F'_c(p_-)| < 1$, y entonces p_- es un punto atractor. Veámoslo.

Sabemos que $p_- = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2} \in \mathbb{R} \iff 1 - 4c \geq 0 \iff c \leq \frac{1}{4}$. Además, la derivada $F'_c(x) = 2x$. Luego

$$\begin{aligned} |F'_c(p_-)| < 1 &\iff |1 - \sqrt{1-4c}| < 1 \iff -1 < 1 - \sqrt{1-4c} < 1 \\ &\iff 2 > \sqrt{1-4c}, \quad 1 - 4c > 0 \iff -\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Por otro lado $p_+ = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} \in \mathbb{R} \iff 1-4c \geq 0 \iff c \leq \frac{1}{4}$. Entonces

$$|F'_c(p_+)| < 1 \iff 1 + \sqrt{1-4c} > 1 \iff 1-4c > 0 \iff c < \frac{1}{4}.$$

Notemos que cuando $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, si $x \in I_c := (-p_+, p_+)$, entonces $F_c^n(x) \rightarrow p_-$, pero si $|x| > p_+$, entonces $F_c^n(x) \rightarrow \infty$. Cuando ocurre este tipo de comportamiento se dice que hay una bifurcación.

Hemos partido de un único punto fijo cuando $c = \frac{1}{4}$ a tener dos puntos fijos diferentes, uno atractor y otro repulsor. A este tipo de bifurcación en concreto se le llama bifurcación punto-silla. Gráficamente se puede ver de forma más clara todo lo anteriormente explicado, por ello es recomendable ir siguiendo los gráficos de la Figura 3.3.

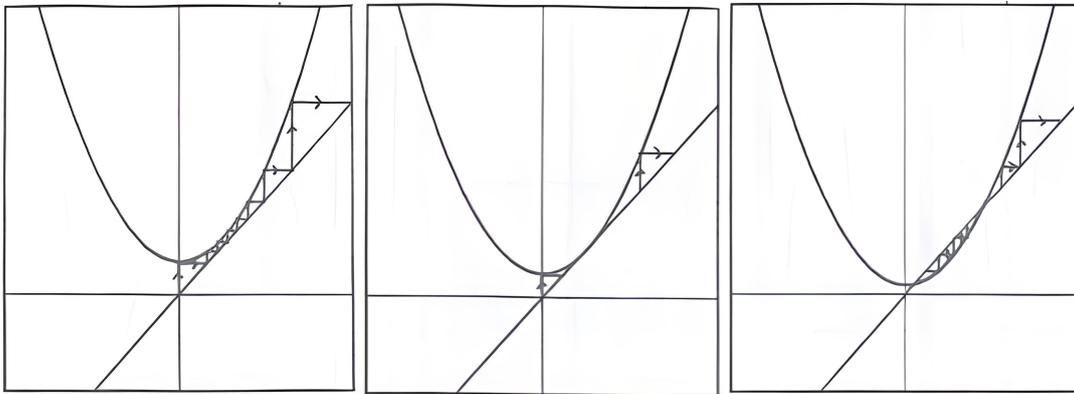


Figura 3.3 Gráficas de F_c con $c > \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$ y $c < \frac{1}{4}$, respectivamente

A continuación, se seguirá trabajando con la misma función $F_c(x) = x^2 + c$, pero en este caso para el valor $c < -2$, que es cuando $F_c(0) < -p_+$. Aquí ocurren ciertas dinámicas interesantes que no nos ofrecen otros valores, y además, este valor nos llevará al teorema con el que se cerrará esta memoria. Lo que se pretende con este valor es crear un nuevo conjunto y llegar finalmente a que éste es un espacio de Cantor. Para poder seguir la explicación es recomendable seguir el gráfico de la figura 3.4.

A partir de ahora, fijamos un valor para c tal que $c < -2$, por esto mismo podremos escribir la función F_c y el intervalo I_c sin subíndice, esto es, F e I , respectivamente. Primero, encerraremos tanto la gráfica de la función F como la diagonal en un cuadrado con centro en $(0, 0)$ y con vértices en $(-p_+, -p_+)$ y (p_+, p_+) , inferior izquierda y superior derecha, respectivamente. Consideramos el intervalo $I = [-p_+, p_+]$ sobre el eje de las x y definimos $A_0 = (-a_0, a_0)$ como el

conjunto de los $x \in I$ tales que $F(x) < -p_+$, es decir, los x donde la gráfica de F se sale del cuadrado por la parte inferior, que es un intervalo abierto. Notemos que $F^2(a_0) = F(-p_+) = p_+$. Cuando $x \in A_0$, $F(x) < -p_+$, y es fácil ver gráficamente que las órbitas de x tienden a ∞ . Por esto mismo, nos centraremos únicamente en los puntos $x \in I \setminus A_0$. Notar que si $c = -2$, la gráfica de F es tangente a lado inferior del cuadrado, sin salir de éste. Para comprobarlo tan solo necesitamos resolver la ecuación $F(0) = c = -p_+$.

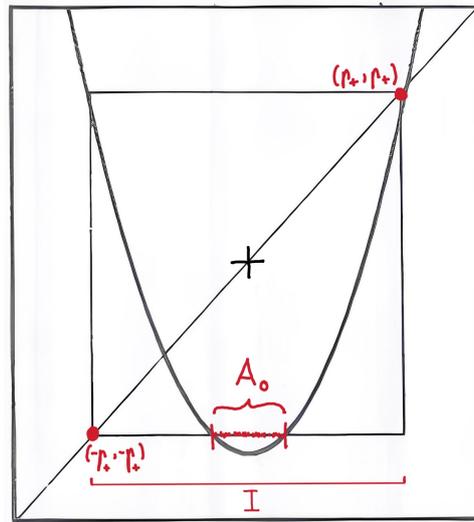


Figura 3.4 Análisis gráfico de las órbitas de p

Observemos que F es estrictamente decreciente sobre el subintervalo $[-p_+, -a_0]$ y estrictamente creciente sobre el subintervalo $[a_0, p_+]$ de $I \setminus A_0$, y su imagen sobre cada uno de ellos, $F([-p_+, -a_0]) = F([a_0, p_+]) = I$, cubre todo el intervalo I . Entonces, por simetría, sabemos que existe un intervalo abierto en cada uno de los subintervalos anteriores, $(-b_1, -a_1) \subseteq [-p_+, -a_0]$ y $(a_1, b_1) \subseteq [a_0, p_+]$, de manera que si x pertenece a uno de ellos entonces $F(x) \in A_0$. Notemos que $F^3(a_1) = F(-p_+) = p_+ = F^3(b_1)$. Sea $A_1 = (-b_1, -a_1) \cup (a_1, b_1)$ la unión de estos dos nuevos subintervalos. Luego, si $x \in A_1$ entonces $F(x) \in A_0$ y $F^2(x) < -p_+$, y al igual que antes $F^n(x) \rightarrow \infty$. De esta forma nos damos cuenta de que las dinámicas interesantes estarán en $I \setminus (A_0 \cup A_1)$. Ahora la imagen de F^2 sobre cada uno de los cuatro subintervalos de $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ vuelve a ser el intervalo I completo, luego podemos encontrar 4 nuevos intervalos abiertos en cada uno de ellos donde las órbitas de sus puntos saldrán de I después de 3 iteraciones. Eliminamos también estos 4 subintervalos.

Siguiendo de la misma manera, llegamos a que hay exactamente 2^n intervalos abiertos formados por puntos cuyas órbitas se escapan de I después de $n + 1$ iteraciones. Esta construcción

inductiva, ya nos recuerda a algo visto en esta memoria, efectivamente, a la construcción del conjunto de Cantor. Definimos pues el conjunto

$$\Lambda := \{x \in I : F^n(x) \in I, \forall n \geq 0\}.$$

Este conjunto está formado por aquellos puntos x cuyas órbitas nunca escapan de I .

Lema 1. *Existe $c_* < -2$ tal que si $c < c_*$ entonces*

$$|F'_c(x)| = |2x| > 1, \quad \forall x \in I \setminus A_0 = [-p_+, -a_0] \cup [a_0, p_+].$$

Demostración:

Sea $c < -2$, entonces el conjunto A_0 es un intervalo no trivial. De hecho, $A_0 = (-a_0(c), a_0(c))$ donde $0 < a_0(c) < p_+$. Notar que escribimos $a_0(c)$ para destacar que su valor depende del c escogido. Veamos cuánto vale $a_0(c)$. Se tiene que $F(a_0(c)) = a_0^2 + c = -p_+$. A partir de ahora para facilitar la notación trabajaremos con $d = -c$. Por tanto nos queda

$$a_0(d)^2 = d - \frac{1 + \sqrt{1 + 4d}}{2}.$$

Veamos a continuación que $\lim_{d \rightarrow +\infty} a_0(d)^2 = +\infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow +\infty} \left(d - \frac{1 + \sqrt{1 + 4d}}{2} \right) &= \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow +\infty} (2d - 1 - \sqrt{1 + 4d}) = \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{(2d-1)^2 - (1+4d)}{2d-1 + \sqrt{1+4d}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{4d^2 - 8d}{2d-1 + \sqrt{1+4d}} = +\infty. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $\lim_{d \rightarrow +\infty} a_0(d)^2 = +\infty$, y entonces $\lim_{d \rightarrow +\infty} a_0(d) = +\infty$. De esta forma, podemos asegurar que dada una cota $K = \frac{1}{2}$, existe $d_* > 2$ tal que si $d > d_*$, entonces $a_0(d) > \frac{1}{2}$, o equivalentemente, volviendo a la notación original, existe $c_* < -2$ tal que si $c < c_*$, entonces $2a_0(c) > 1$, lo que implica que

$$F_c(x) \geq F_c(a_0(c)) = 2a_0(c) > 1, \quad \forall x \in [a_0(c), p_+(c)].$$

Análogamente obtendríamos que

$$-1 < F_c(-a_0(c)) \leq F_c(x), \quad \forall x \in [-p_+(c), -a_0(c)].$$

■

Teorema 9. Si $c \leq c_*$, entonces Λ es un conjunto de Cantor.

Demostración:

Podemos escribir $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} [I \setminus (\bigcup_{i=0}^n A_i)]$, donde los conjuntos A_i , $i \geq 0$, son los intervalos abiertos que vamos obteniendo en el proceso descrito anteriormente. Entonces Λ es intersección infinita de cerrados, y por tanto cerrado y compacto.

Veamos que Λ es totalmente desconexo. Para ello hay que tener en cuenta que cualquier intervalo en \mathbb{R} es un conjunto conexo y que la imagen de un conexo mediante una función continua también es un conexo. Tomemos un intervalo $[x, y] \subseteq \Lambda$, entonces $F^n([x, y])$ es un conjunto conexo, $\forall n \geq 0$.

Sabemos que $A_0 \cap F^n([x, y]) = \emptyset$, $\forall n \geq 0$, ya que las órbitas de los puntos de A_0 salen de I y eso no sucede con los puntos de $[x, y] \subseteq \Lambda$. Como $|F(z)| > 1$, $\forall z \in I \setminus A_0$, entonces podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|F'(z)| > \lambda > 1 \forall z \in I \setminus A_0$. Veamos a continuación que las sucesivas iteraciones de F verifican que

$$|(F^n)'(z)| > \lambda^n > 1, \quad \forall z \in [x, y].$$

En efecto hallemos en primer lugar, aplicando la regla de la cadena, la derivada de cada potencia de F .

$$\begin{aligned} F(z) &\longrightarrow F'(z) \\ F(F(z)) = F^2(z) &\longrightarrow (F^2)'(z) = F'(F(z))F'(z) \\ F(F(F(z))) = F^3(z) &\longrightarrow (F^3)'(z) = F'(F^2(z))F'(F(z))F'(z) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ F^n(z) &\longrightarrow (F^n)'(z) = F'(F^{n-1}(z))F'(F^{n-2}(z))\dots F'(z) = \prod_{i=0}^{n-1} F'(F^i(z)). \end{aligned}$$

Entonces para cada $z \in [x, y]$ tenemos

$$\begin{aligned} |(F^n)'(z)| &= |F'(F^{n-1}(z))| |F'(F^{n-2}(z))| \dots |F'(F(z))| |F'(z)| \\ &> |F'(F^{n-1}(z))| |F'(F^{n-2}(z))| \dots |F'(F(z))| \lambda. \end{aligned}$$

Además, como $z \in [x, y]$, tenemos que $F^i(z) \in I - A_0$, $\forall i \geq 1$. Así pues se cumple que $|F'(F^i(z))| > \lambda$, $\forall i \geq 1$. Entonces podemos escribir

$$|(F^n)'(z)| > |F'(F^{n-1}(z))||F'(F^{n-2}(z))| \cdots |F'(F(z))| \lambda > \lambda \cdot \lambda \cdots \lambda = \lambda^n.$$

Si $x < y$, por el Teorema del valor medio, F^n expande el intervalo $[x, y]$ mediante un factor λ^n . Veamos esto con detalle. Como $F^n([x, y]) \subseteq [-p_+, p_+]$, tenemos las siguientes desigualdades:

$$2p_+ \geq |F^n(x)| + |F^n(y)| \geq |F^n(x) - F^n(y)| = |(F^n)'(\theta)||x - y| > \lambda^n|x - y|,$$

donde $\theta \in (x, y)$. Pero a partir de cierto n la expresión $\lambda^n|x - y| \geq 2p_+$, llegando a una contradicción. Esto solo se evita si $x = y$. De esta manera ya tenemos demostrado que Λ es totalmente desconexo.

Finalmente, veamos que Λ es perfecto. Sea $x \in \Lambda$ y sea el abierto $J_\epsilon := (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Dado que F^n expande el intervalo tenemos que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{ si } n \geq n_0 \text{ entonces } \overline{A_0} = [-a_0, a_0] \subseteq F^n(J_\epsilon).$$

Así, $-a_0 \in F^{n_0}(J_\epsilon)$ y $a_0 \in F^{n_0}(J_\epsilon)$. Por tanto, $\exists y \in J_\epsilon$ tal que

$$\begin{aligned} F^{n_0}(y) &= a_0, \\ F^{n_0+1}(y) &= F(a_0) = -p_+, \\ F^{n_0+2}(y) &= F(-p_+) = p_+, \\ F^{n_0+j}(y) &= p_+, \quad j \geq 3. \end{aligned}$$

Además

$$F^j(y) \in \Lambda, \quad 0 \leq j \leq n_0 + 2,$$

ya que de lo contrario sus órbitas se escaparían. Esto implica que

$$y \in \Lambda \cap J_\epsilon = \Lambda \cap (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

Si aplicamos este razonamiento utilizando los intervalos $J_{\frac{1}{m}}$, donde $m \geq 1$, tenemos que

$$\exists y_m \in \Lambda \cap (x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Luego, como $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} = 0$ y $x - \frac{1}{m} < y_m < x + \frac{1}{m}$, por el teorema del emparedado, concluimos que $\lim_{m \rightarrow +\infty} y_m = x$. ■

Acabamos de ver que efectivamente el conjunto Λ es un espacio de Cantor. Esto en realidad se cumple para cualquier valor $c < -2$, pero en esta memoria no se verá esa demostración. Λ no es solo un conjunto de Cantor, también es un fractal. Esto no es raro dado que en la mayoría de casos, donde suceden las dinámicas más interesantes de una función, se suele generar un nuevo fractal.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta memoria se ha tratado en primer lugar la construcción del conjunto de Cantor, desde varias perspectivas. Por otra parte, se han visto y demostrado las propiedades principales del conjunto de Cantor, como que es métrico, totalmente desconexo, perfecto, no numerable y no es vacío.

Posteriormente, se ha demostrado uno de los teoremas fundamentales en esta memoria, donde se demuestra que el conjunto de Cantor es en realidad homeomorfo al conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Sabiendo esto se pueden demostrar, en ocasiones de manera más sencilla y directa, las propiedades del conjunto de Cantor, sin embargo se ha considerado mejor no hacerlo así, para poder tratar al conjunto desde su punto de vista más primigenio. Cerrando el capítulo de Cantor, se ha hablado de sus generalizaciones tanto unidimensional como de más dimensiones, profundizando más en la primera de ellas.

Finalmente, se ha introducido el estudio de funciones dinámicas con ciertos conceptos básicos como iteración, órbita, punto fijo, punto eventualmente fijo, punto repulsor, punto atractor, etcétera. Se ha entrado en más profundidad en la familia de las funciones cuadráticas, concretamente en la función $F_c(x) = x^2 + c$, donde se ha ido estudiando las distintas dinámicas de la función al variar el valor de c . Como cierre del capítulo y de la propia memoria, se ha demostrado un teorema el cual mostraba que en las dinámicas de la función F_c con $c < -2$ (lo suficientemente pequeño), aparecía el conjunto de Cantor.

Bibliografía

- [1] DEVANEY, ROBERT L., *Chaos and Fractals: The Mathematics Behind Computer Graphics. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics Volume 39*, 1-14 (1988).
- [2] FLERLON, JULIAN F., A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function, *Math. Magazine*, Vol. 67, No. 2, 136–140, (1994).
- [3] KRANTZ, STEVEN G., *Essentials of Topology with Applications*, CRC Press, 2009.
- [4] NELSON, DYLAN R., The Cantor set, a brief introduction, University of Waterloo, <https://www.math.uwaterloo.ca/~xzliu/cantor-set.pdf>
- [5] PEARCE, JAMIE. A brief introduction to the Cantor set , The University of Texas at Austin, <https://web.ma.utexas.edu/users/drp/files/Spring2020Projects/drpfinalproject%20-20Jamie%20Pearce.pdf>
- [6] UNAM, MÉXICO. Conjuntos conexos. <https://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/conexos.pdf>. [Consulta 23 de Mayo de 2023]