UNIVERSITAT JAUME I

Grado en Matemática Computacional

Trabajo Final de Grado

Irracionalidad y Transcendencia de π

Autor:
Rubén Alemán

Tutores académicos:
Maria Vicenta Ferrer
Salvador Hernández

Fecha de lectura: __ de Junio de 2023
Curso académico 2022/2023

Resumen

A lo largo de este proyecto se presenta el trabajo de Fin de Grado de Matemática Computacional. Está dedicado a estudiar algunas de las singulares propiedades del número π. Al comienzo del trabajo se comenta la historia y aplicaciones del número π en las matemáticas y en otras ciencias. A continuación se define el número π como el resultado de la evaluación de una integral definida y posteriormente se demuestra que π es un número irracional y trascendente. Asimismo, en el camino, se prueba también la trascendencia del número e.

Palabras clave

Número irracional, algebraico y trascendente, polinomio con coeficientes enteros, número π, número e.

Keywords

Irrational, algebraic and transcendental number, polynomial with integer coefficients, π number, e number.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y Motivación

El número π ha fascinado a matemáticos, científicos y entusiastas durante siglos. Su misteriosa naturaleza, historia intrigante y propiedades matemáticas únicas lo convierten en un tema de estudio apasionante. Desde su descubrimiento inicial hasta las aplicaciones modernas en diversas ramas del conocimiento, el número pi ha desafiado nuestra comprensión y ha dejado una huella indeleble en el mundo de las matemáticas.

La constante π es ampliamente conocida como la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Sin embargo, su importancia trasciende más allá de esta definición elemental. A lo largo de los siglos, matemáticos han explorado exhaustivamente las propiedades de pi, desentrañando sus patrones aparentemente infinitos y su relación con otros conceptos matemáticos fundamentales.

Este Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo principal profundizar en el estudio de pi, centrándonos específicamente en dos de sus propiedades más notables: su irracionalidad y trascendencia. La irracionalidad de pi significa que no puede expresarse como una fracción exacta y que sus dígitos decimales se extienden infinitamente sin repetirse. La trascendencia, por su parte, es una propiedad aún más sorprendente: significa que pi no es la solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

La comprensión de la irracionalidad y trascendencia de pi ha sido un desafío constante para los matemáticos a lo largo de la historia. La demostración rigurosa de estas propiedades requiere una combinación de razonamiento lógico, análisis matemático y técnicas avanzadas. Sin embargo, su importancia va más allá de la mera curiosidad matemática. El número π está presente en diversas áreas de la ciencia y la tecnología, desde la física y la ingeniería hasta la informática y la estadística. Su estudio nos brinda una visión más profunda de la estructura y la belleza intrínseca de las matemáticas, y nos ayuda a comprender mejor el mundo que nos rodea.

Esta investigación es relevante en el contexto actual, ya que el número pi sigue siendo objeto de estudio y exploración en la vanguardia de las matemáticas. Al profundizar en su historia y en las propiedades que lo definen, podremos apreciar la belleza y la complejidad de este número universal.

Este TFG, se divide en cuatro capítulos. En el primer capitulo es introductorio y en él se plantea la introducción y la motivación de los resultados que se abordan en el trabajo.

En el segundo capitulo, comentaremos la historia de pi, desde los primeros intentos de aproximación en la antigüedad hasta los desarrollos modernos. Analizaremos los diferentes métodos utilizados para calcular pi con mayor precisión a lo largo de los siglos y examinaremos las contribuciones de matemáticos destacados. En este capítulo hemos usado las referencias [2, 4, 5]

La tercer capitulo se centra en las propiedades de π, es aquí donde se centra el peso del trabajo. En primer lugar se realiza una definición del mismo a partir de la longitud y el diámetro de una circunferencia cualquiera. Seguidamente encontramos la primera propiedad, la irracionalidad. Antes del teorema principal podemos ver una serie de proposiciones y observaciones que nos ayudan a comprender la demostración, ya que es muy técnica. Una vez finalizado con esto, encontramos la segunda y última propiedad, la trascendencia. En este punto encontramos dos teoremas importantes, la trascendencia del número e y la del número π. Del mismo modo que con la irracionalidad antes de tratar estos teoremas principales, tratamos una serie de observaciones que nos ayudan a comprender las demostraciones principales. Para la confección de este capitulo hemos utilizado las siguientes referencias [1, 2, 3, 4, 5].

En el último capítulo se hace una reflexión sobre lo que se ha trabajado mostrando un resumen con las conclusiones.

Capítulo 2

Historia y aplicaciones del número π

La historia del número π se remonta a miles de años atrás y su estudio ha desempeñado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas y en numerosas aplicaciones prácticas a lo largo de la historia. En las siguientes páginas, exploraremos en detalle la historia de π y las diversas aplicaciones que ha tenido en diferentes campos.

El número π, aproximadamente igual a 3.14159, representa la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Su valor es constante e irracional, lo que significa que no puede ser expresado de manera exacta como una fracción. A lo largo de los siglos, matemáticos de diferentes civilizaciones han investigado y utilizado π en sus estudios y aplicaciones prácticas.

Una de las primeras civilizaciones que se interesó por π fue la antigua civilización egipcia. Aunque no tenían un conocimiento exacto de su valor, utilizaron una aproximación de π igual a 3 en sus cálculos arquitectónicos. Los egipcios construyeron grandes monumentos, como las pirámides, utilizando fórmulas basadas en esta aproximación.

En la antigua Mesopotamia, los matemáticos también estudiaron el número π. Alrededor del año 1900 a.C., los babilonios obtuvieron una aproximación de π alrededor de 3.125 utilizando métodos geométricos. Esta aproximación fue inscrita en la tableta de Susa, una antigua tabla de arcilla que contiene numerosos problemas matemáticos.

Uno de los primeros intentos documentados de calcular π con mayor precisión se encuentra en los textos matemáticos del antiguo Egipto y Babilonia. En el papiro de Ahmes, un documento egipcio que data de alrededor del año 1650 a.C., se encuentra una fórmula que estima π como $(\frac{16}{9})^2$, aproximadamente igual a 3.1605.

En el antiguo mundo griego, se realizaron importantes avances en el estudio de π. El matemático griego Arquímedes (287-212 a.C.) fue uno de los primeros en intentar calcular el valor exacto de π. Utilizando el método de la cuadratura, Arquímedes demostró que π se encuentra entre 3 + 1/7 y 3 + 10/71.

Durante la Edad Media, el estudio de π continuó en Europa y en el mundo islámico. Al-Khwarizmi, un matemático y astrónomo persa del siglo IX, desarrolló una aproximación de π utilizando un polígono de 96 lados inscrito en un círculo. Esta aproximación, fue utilizada durante muchos siglos y era 3.1416.

En el Renacimiento, el interés por π se reavivó con el advenimiento de la imprenta y la difusión de conocimientos matemáticos. El matemático alemán Ludolph van Ceulen (1540-1610) calculó π con una precisión sin precedentes para su época. Van Ceulen obtuvo π con 35 decimales utilizando un método de polígonos inscritos y circunscritos.

En el siglo XVII, el cálculo de π se convirtió en un desafío matemático apasionante. Numerosos matemáticos contribuyeron con nuevas aproximaciones y fórmulas para calcular π con mayor precisión. Entre ellos, destacan los matemáticos John Wallis, James Gregory y John Machin.

John Wallis (1616-1703), matemático inglés, descubrió la fórmula de Wallis, que relaciona π con una serie infinita de fracciones. Esta fórmula permitió calcular π con una precisión sin precedentes y proporcionó un método teórico para su estudio.

A finales del siglo XVII, James Gregory (1638-1675), matemático y astrónomo escocés, y Gottfried Leibniz (1646-1716), matemático alemán, investigaron la aproximación al número π. Independientemente, desarrollaron una serie infinita conocida como la serie de Gregory-Leibniz, o más simplemente, serie de Leibniz, que permite calcular π mediante la suma de una serie alternada. La fórmula de Leibniz para calcular el número π es

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots .$$

Para demostrar que la serie infinita $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge a $\frac{\pi}{4}$ se considera la descomposición

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Integrando esta igualdad se obtiene

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}(1) - \operatorname{arc\,tg}(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Como

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}\,x < \int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2n+3},$$

que tiende a 0 cuando n tiende a infinito, tomando límites se llega al resultado deseado.

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) realizó importantes avances en el estudio de π. Euler demostró que π es un número irracional, lo que significa que no puede ser expresado como una fracción exacta de dos números enteros. Además, Euler estableció la notación π para representar el número, en honor a la palabra griega "periferia". Además Euler resolvió el famoso Problema de Basilea de teoría de números, planteado por primera vez por Pietro Mengoli. El problema de Basilea consiste en encontrar la suma exacta de los inversos de los cuadrados de los enteros positivos, esto es, la suma exacta de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Los argumentos de su demostración estaban basados en manipulaciones que no estaban aún justificadas. La prueba correcta no es difícil y puede encontrarse en wikipedia.

En el siglo XIX, el matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920) hizo contribuciones notables al estudio de π. Ramanujan descubrió numerosas series infinitas y fórmulas que convergen rápidamente al valor de π, lo que permitió calcularlo con una precisión significativa. Sus resultados revolucionaron el campo de las matemáticas y le valieron reconocimiento y admiración en todo el mundo.

En el siglo XX, el cálculo de π se convirtió en un desafío tecnológico. Con el advenimiento de las computadoras, fue posible calcular π con una precisión cada vez mayor. En 1949, la computadora ENIAC calculó π con 2.037 dígitos decimales, estableciendo un nuevo récord en ese momento.

El cálculo de los dígitos de π se convirtió en un tema de interés y competencia entre los matemáticos y los entusiastas de las computadoras. En 1989, el matemático japonés Yasumasa Kanada utilizó la supercomputadora Hitachi S-820 para calcular π con más de 16 millones de dígitos decimales, estableciendo un nuevo récord mundial.

En la actualidad, el cálculo de los dígitos de π sigue siendo un desafío en el campo de la computación de alto rendimiento. Los investigadores continúan utilizando métodos avanzados y técnicas de optimización para calcular π con una precisión cada vez mayor. En 2020, el récord mundial para el cálculo de los dígitos de π alcanzó más de 50 billones de dígitos decimales.

Además de su estudio teórico, el número π ha tenido numerosas aplicaciones prácticas a lo largo de la historia. Una de las aplicaciones más evidentes de π se encuentra en la geometría y la trigonometría. El valor de π se utiliza en fórmulas para calcular la longitud de la circunferencia de un círculo, el área de un círculo y el volumen de una esfera.

En la arquitectura y la ingeniería, π es esencial para el diseño y la construcción de estructuras circulares, como puentes, ruedas y edificios. El uso adecuado de π garantiza la precisión y la estabilidad de estas estructuras, permitiendo a los arquitectos y los ingenieros crear construcciones seguras y duraderas.

El número π también tiene aplicaciones en la física. En la mecánica, π aparece en ecuaciones que describen la frecuencia y el período de oscilación de un péndulo, la velocidad de un fluido en un tubo y la resistencia al flujo en una tubería. Estas aplicaciones son cruciales para comprender y diseñar sistemas mecánicos y fluidos en campos como la aerodinámica, la hidráulica y la acústica.

En la estadística y la probabilidad, π también encuentra aplicaciones significativas. Aparece en fórmulas y distribuciones estadísticas, como la distribución normal o gaussiana, que se utiliza para modelar fenómenos naturales y sociales. Además, π se utiliza en el cálculo de probabilidades, como en la fórmula de la distribución de la chi-cuadrado y la distribución de Student, que son fundamentales en el análisis estadístico.

En el ámbito de la computación, π ha desempeñado un papel relevante. Los dígitos de π se han utilizado como una fuente aleatoria para generar números pseudoaleatorios en algoritmos y simulaciones computacionales. Además, el estudio y el cálculo de los dígitos de π han impulsado el desarrollo de técnicas avanzadas de computación y han establecido récords en el cálculo de dígitos decimales.

El número π también ha encontrado aplicaciones en la teoría de números y la física teórica. En la teoría de números, π está estrechamente relacionado con la distribución de números primos, uno de los temas más profundos y misteriosos de las matemáticas. El estudio de las propiedades de los números primos y su relación con π ha llevado a importantes avances en la teoría de números y ha planteado preguntas fascinantes sobre la distribución de los números primos.

En la física teórica, π ha encontrado aplicaciones sorprendentes. En la teoría de cuerdas y la teoría de campos, π aparece en ecuaciones que describen el campo electromagnético, la entropía de un agujero negro y diversas fórmulas relacionadas con la física cuántica. Estas aplicaciones profundizan nuestra comprensión del universo y la naturaleza de la realidad misma.

En el campo de la criptografía y la seguridad de la información, π también juega un papel crucial. Se utiliza en algoritmos criptográficos, como el cifrado RSA, que aseguran la confidencialidad y la integridad de la información transmitida a través de redes de comunicación.

Además de sus aplicaciones científicas y tecnológicas, π ha capturado la imaginación y la curiosidad de las personas a lo largo de la historia. Ha sido objeto de investigaciones, competencias y celebraciones especiales. El Día de π, celebrado el 14 de marzo (3/14 en el formato de fecha americano), es una fecha en la que se honra y se celebra este número irracional.

En resumen, el número π ha tenido un impacto significativo en una amplia gama de aplicaciones a lo largo de la historia. Desde la geometría y la trigonometría hasta la física, la estadística, la computación, la teoría de números y la física teórica, π ha sido una constante matemática fundamental en el desarrollo de teorías, fórmulas y modelos que han revolucionado nuestra comprensión del mundo que nos rodea.

La presencia de π en estas aplicaciones no solo muestra su importancia matemática, sino también su relevancia práctica en numerosos campos científicos y tecnológicos. El número π, con su valor aparentemente simple pero infinitamente complejo, continúa desafiando a los matemáticos, inspirando nuevos descubrimientos y revelando conexiones sorprendentes entre diferentes áreas del conocimiento humano.

En conclusión, la historia de π es una historia de fascinación y exploración matemática. Desde las antiguas civilizaciones hasta la era de la computación moderna, π ha sido un número intrigante y versátil. Su estudio ha permitido avances científicos y tecnológicos en campos tan diversos como la geometría, la física, la estadística y la criptografía. A lo largo de los siglos, π ha demostrado ser una constante matemática fundamental y un símbolo de la belleza y la complejidad de las matemáticas. Su historia y sus aplicaciones continúan inspirando a matemáticos y científicos en su búsqueda por comprender el mundo que nos rodea.

Capítulo 3

Propiedades del número π

3.1. Definición del número π

Hay muchas definiciones del número π. Hemos elegido la siguiente.

Definición 1 *Definimos el número π como el resultado de la siguiente integral*

$$\pi := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

En la antigüedad se descubrió que dadas dos circunferencias distintas de longitudes L y l, y radios R y r, respectivamente, se cumplía la siguiente relación

$$\frac{L}{2R} = \frac{l}{2r},$$

y está razón es lo que posteriormente se llamó π.

Proposición 1 *Sea C una circunferencia de longitud L y radio R. Entonces*

$$\frac{L}{2R} = \pi.$$

Demostración:

Cualquier circunferencia en el plano, mediante una traslación, se puede centrar en el origen. Consideremos la función $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $C(x, y) = x^2 + y^2$. La ecuación de la circunferencia de radio R y centro $(0, 0)$ viene dada a través de la curva de nivel

$$C(x, y) = R^2.$$

Si despejamos la variable y como función de la variable x obtenemos las dos curvas que forman la circunferencia,

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Para calcular la longitud de esta circunferencia consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (\underbrace{x}_{\phi_1(x)}, \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{\phi_2(x)}). \end{array}$$

Como $\phi_1'(x) = 1$ y $\phi_2'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, entonces la longitud de la curva que queda sobre el eje x (media circunferencia) viene dada por la expresión

$$\frac{L}{2} = \int_{-R}^{R} |\phi'(x)| \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{R})^2}} \mathrm{d}x.$$

Hacemos el cambio de variable $t = \frac{x}{R}$, de donde $\mathrm{d}x = R\mathrm{d}t$, obteniendo el resultado deseado,

$$\frac{L}{2R} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \mathrm{d}t = \pi.$$

■

3.2. El número π es irracional

En esta sección vamos a demostrar que π es un número irracional. Aquí, y en el resto de la memoria, supondremos conocidas las propiedades del número π relacionadas con las funciones trigonométricas. Antes de realizar la demostración de la irracionalidad de π necesitamos dos observaciones previas.

Observación 1

Sea n un número natural. Consideremos la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Claramente esta función satisface que

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \quad \text{si} \quad 0 < x < 1.$$

Una propiedad importante de $f_n(x)$ se descubre al desarrollar el numerador $x^n(1-x)^n$ de la función. Como resultado obtenemos que la mayor potencia de x es $2n$ y la menor n, por lo tanto podemos escribir $f_n(x)$ como

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

donde los coeficientes c_i son números enteros. Obviamente

$$f_n^{(k)}(x) = 0 \quad \text{si} \quad k > 2n, \quad \text{y} \quad f_n^{(k)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad k < n.$$

Veamos qué pasa con las derivadas ${f_n}^{(k)}(x)$ cuando $n \leq k \leq 2n$.

$$\begin{aligned}
{f_n}^{(n)}(x) &= \tfrac{1}{n!}(n!c_n + \text{ términos de } x)\\
{f_n}^{(n+1)}(x) &= \tfrac{1}{n!}((n+1)!c_{n+1} + \text{ términos de } x)\\
&\,.\\
&\,.\\
&\,.\\
f_n^{(2n)}(x) &= \tfrac{1}{n!}(2n)!c_{2n}.
\end{aligned}$$

Si sustituimos en las derivadas cuando $x = 0$ tendremos

$$\begin{aligned}
{f_n}^{(n)}(0) &= c_n\\
{f_n}^{(n+1)}(0) &= (n+1)c_{n+1}\\
&\,.\\
&\,.\\
&\,.\\
{f_n}^{(2n)}(0) &= (2n)(2n-1)\cdots(n+1)c_{2n}.
\end{aligned}$$

Podemos ver que el resultado de estas derivadas siempre es un número entero. Por lo tanto

$$f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Volvamos a la expresión de f_n y la evaluamos sobre $x - 1$. Podemos ver que

$$f_n(1-x) = \tfrac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = \tfrac{x^n(1-x)^n}{n!} = f_n(x).$$

Por lo tanto

$${f_n}^{(k)}(x) = (-1)^k {f_n}^{(k)}(1-x).$$

Sustituyendo $x = 1$ en esta igualdad comprobamos que las sucesivas derivadas también dan números enteros.

$$f_n^{(k)}(1) = (-1)^k {f_n}^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Observación 2

Sea a un número real, y $\epsilon > 0$. Podemos encontrar un número natural $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$\frac{a^n}{n!} < \epsilon.$$

Para demostrar la afirmación anterior tomemos $n \geq 2a$, entonces

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} \leq \frac{n}{2(n+1)} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

Fijemos pues $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq 2a$ y apliquemos la relación anterior sucesivamente. Entonces tendremos que

$$\begin{array}{rcl} \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} & < & \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!} \\ \\ \frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} & < & \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ \frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} & < & \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}. \end{array}$$

Como la sucesión $\{\frac{1}{2^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, podemos encontrar k lo suficiente grande para que

$$2^k > \frac{a^{n_0}}{\epsilon\, n!}.$$

Entonces

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \epsilon.$$

Teorema 1 *El número π es irracional.*

Demostración:

Si comprobamos que π^2 es irracional entonces π será irracional. Procedamos por reducción al absurdo. Suponemos entonces que π^2 es racional, es decir,

$$\pi^2 = \frac{a}{b} \qquad \text{con} \;\; a,\, b \in \mathbb{N}.$$

La prueba es muy técnica. Consideremos la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$G(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) + \cdots\cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right),$$

siendo $f_n(x)$ la función definida en la Observación 1.

Veamos que cada uno de los sumandos de $G(x)$ cuando $x = 0$ o $x = 1$ es un número entero. En efecto, para $0 \le k \le n$ se cumple la relación

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n \left(\pi^2\right)^{n-k} = b^n \left(\tfrac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k. \tag{1}$$

Sabemos además por la Observación 1 que tanto $f_n^{(k)}(0)$ como $f_n^{(k)}(1)$ son enteros. Por tanto todos los sumandos de $G(0)$ y $G(1)$ son números enteros.

Si derivamos $G(x)$ dos veces obtenemos

$$G''(x) = b^n \left(\pi^{2n} {f_n}''(x) - \pi^{2n-2} {f_n}^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n {f_n}^{(2n+2)}(x)\right). \tag{2}$$

Como el grado más alto de x en $f_n(x)$ es $2n$, es obvio que el último término $(-1)^n {f_n}^{(2n+2)}(x)$ será 0. Ahora con la suma de (1) y (2) tenemos que

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x), \tag{3}$$

en el que se anulan todos los términos de $G''(x)$ excepto el primero.

Ahora definimos la función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$H(x) = G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x).$$

Derivando tenemos

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x)\cos(\pi x) + G''(x)\sin(\pi x) - \pi G'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 G(x)\sin(\pi x) \\ &= (G''(x) + \pi^2 G(x))\sin(\pi x). \end{aligned}$$

Aplicando (3) llegamos a

$$H'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x).$$

Integrando y teniendo en cuenta el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos

$$
\begin{aligned}
\pi^2 \textstyle\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx &= H(1) - H(0)\\
&= G'(1)\sin\pi - \pi G(1)\cos\pi - G'(0)\sin 0 + \pi G(0)\cos 0\\
&= \pi(G(1) + G(0)).
\end{aligned}
$$

Como hemos visto antes $G(0)$, $G(1) \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$\pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx \in \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, por la Observación 1 sabemos que

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1,$$

y entonces

$$0 < \pi a^n f_n(x)\sin(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1.$$

Por lo tanto, tendremos que

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Por la Observación 2, sabemos que si n es lo suficiente grande,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Pero también sabemos que el resultado de esta integral es un número entero y no existe ningún entero entre el 0 y el 1, llegando a una contradicción. Por lo tanto π^2 es irracional, lo que comporta que π sea irracional. ∎

3.3. El número π es trascendente

Antes de demostrar que π es un número trascendente, realizaremos una serie de observaciones y una demostración complementaria que nos ayudará a comprender mejor la demostración del teorema principal de esta sección.

Observación 3

Sean p y m dos números naturales. Consideremos la función $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida

$$f_p(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-m)^p}{(p-1)!}.$$

Si $0 \leq x \leq m$, se cumple que $-m \leq -j \leq x-j \leq m-j < m$, para $j \in \{1, ..., m\}$, y tenemos la acotación

$$|f_p(x)| \leq \frac{m^{p-1}m^{mp}}{(p-1)!} = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

Estudiemos ahora las sucesivas derivadas de f_p. Para ello introducimos la siguiente notación. Llamemos $g_0(x) = x^{p-1}$ y $g_j(x) = (x-j)^p$, $1 \leq j \leq m$. Entonces la derivada i-ésima de f_p se puede expresar de la forma

$$f_p^{(i)}(x) = \sum_{i_0+\cdots i_m = i} \frac{g_0^{(i_0)}(x) g_1^{(i_1)}(x) \cdots g_m^{(i_m)}(x)}{(p-1)!},$$

donde $0 \leq i_j \leq i,\ \ i_j \in \mathbb{Z},\ \ 0 \leq j \leq m.$

Como $f_p(x)$ es un polinomio de grado $mp+p-1$, es obvio que

$$f_p^{(i)}(x) = 0, \quad \text{si} \quad i > mp+p-1.$$

Las funciones $g_j(x)$ solo se anulan en $x = j$, $0 \leq j \leq m$. Además $g_0^{(i_0)}(0) = 0$ cuando $i_0 < p-1$, y $g_0^{(p-1)}(0) = (p-1)!$. Con estas observaciones $f_p^{(i)}(0) = 0$ cuando $1 \leq i < p-1$,

$$f_p^{(p-1)}(0) = \sum_{p-1+0\cdots+0=p-1} \frac{g_0^{(p-1)}(0)g_1(0)\cdots g_m(0)}{(p-1)!} = (-1)^{mp}(m!)^p \in \mathbb{Z},$$

y para $i \geq 0$,

$$f_p^{(p+i)}(0) = \sum_{p-1+i_1\cdots i_m=p+i} \frac{g_0^{(p-1)}(0)g_1^{(i_1)}(0)\cdots g_m^{(i_m)}(0)}{(p-1)!}$$

$$= p \sum_{i_1+\cdots i_m=i+1} g_1^{(i_1)}(0)\cdots g_{j-1}^{(i_{j-1})}(0)(p-1)\cdots(p-i_j+1)(-j)^{p-i_j}g_{j+1}^{(i_{j+1})}(0)\cdots g_m^{(i_m)}(0) \in \mathbb{Z},$$

ya que en cada expresión $i_1+\cdots+i_m = i+1$ siempre existe $i_j > 1$ y por tanto $g_j^{(i_j)}(x) = p\cdots(p-i_j)(x-j)^{p-i_j}$. Los términos distintos de cero aparecen de sumandos en los que el factor x^{p-1} se ha derivado $p-1$ veces.

Si ahora tenemos en cuenta que $g_j^{(i_j)}(j) = 0$ cuando $i_j < p$, y que $g_j^{(p)}(j) = p!$, obtenemos

$$f^{(i)}(j) = 0, \quad 1 \leq i < p,$$

y para $i \geq 0$,

$$f_p^{(p+i)}(j) = \sum_{i_0+\cdots i_{j-1}+i_{j+1}+\cdots i_m=i} \frac{g_0^{(i_0)}(j)\cdots g_{j-1}^{(i_{j-1})}(j)g_j^{(p)}(j)g_{j+1}^{(i_{j+1})}(j)\cdots g_m^{(i_m)}(j)}{(p-1)!}$$

$$= p \sum_{i_0+\cdots i_{j-1}+i_{j+1}+\cdots i_m=i} g_0^{(i_0)}(j)\cdots g_{j-1}^{(i_{j-1})}(j)g_{j+1}^{(i_{j+1})}(j)\cdots g_m^{(i_m)}(j) \in \mathbb{Z}.$$

Los términos distintos de cero aparecen de sumandos en los que el factor $(x-j)^p$ se ha derivado p veces.

Podemos afirmar que cada $f_p^{(i)}(j)$ será un número entero divisible por p, exceptuando un caso en concreto, cuando $j = 0$ e $i = p-1$.

Definición 2 *Un número complejo es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ si es raíz de una ecuación polinómica con coeficientes racionales. Es decir, α es algebraico si existen números racionales $a_0, a_1, \ldots, a_n$, con algún $a_i \neq 0$, tales que*

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Nota 1 *Observemos que los coeficientes α_j en la ecuación anterior se pueden tomar enteros, pues basta multiplicar por el mínimo común múltiplo de todos sus denominadores.*

Proposición 2 *Si α es un número algebraico entonces α^2 e $i\alpha$ también lo son.*

Demostración:

Como α es algebraico existen a_0, $a_1, \ldots,$ $a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ tales que $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$. El polinomio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ es de grado n, por tanto tiene n raíces α, $\alpha_2, \ldots,$ α_n en $\mathbb{C}$. Descompongamos $p(x)$ en función de sus raíces,

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Si lo multiplicamos por

$$p(-x) = (-1)^n(x + \alpha)(x + \alpha_2) \cdots (x + \alpha_n)$$

obtendremos el polinomio en x^2 con coeficientes racionales,

$$q(x^2) = p(x)p(-x) = (-1)^n(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \alpha_2^2) \cdots (x^2 - \alpha_n^2),$$

de donde

$$q(x) = (-1)^n(x - \alpha^2)(x - \alpha_2^2) \cdots (x - \alpha_n^2).$$

Claramente observamos mirando el primer factor que $x = \alpha^2$ es raíz de este polinomio.

Si ahora multiplicamos $q(x^2)$ por $q(-x^2)$ obtenemos el polinomio

$$r(x) = (x^4 - \alpha^4)(x^4 - \alpha_2^4) \cdots (x^4 - \alpha_n^4),$$

cuyos coeficientes siguen siendo racionales. Como $(i\alpha)^4 = \alpha^4$, tenemos que $r(i\alpha) = 0$, es decir, $i\alpha$ es una raíz de la ecuación $r(x) = 0$.

$\blacksquare$

Definición 3 *Un número complejo es trascendente si no es algebraico sobre $\mathbb{Q}$, es decir, si no es raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales.*

Veamos a continuación que el número e es trascendente. La prueba es muy técnica y facilitará la comprensión del Teorema principal donde demostraremos que el número π es trascendente.

Teorema 2 *El número e es trascendente.*

Demostración:

Razonando por reducción al absurdo, supongamos teniendo en cuenta la Nota 1 que se cumple la igualdad

$$a_m e^m + \ldots + a_1 e + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{Z},)$$

donde $a_0 \neq 0$ sin pérdida de generalidad.

Ahora tomamos la función $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la Observación 3 definida por

$$f_p(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-m)^p}{(p-1)!},$$

donde suponemos que p es un número primo. Definimos a continuación la función $F_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$F_p(x) = f_p(x) + f_p'(x) + \ldots + f_p^{(mp+p-1)}(x).$$

Derivando obtenemos

$$F_p'(x) = f_p'(x) + f_p^{(2)}(x) + \ldots + f_p^{(mp+p-1)}(x) + \underbrace{f_p^{(mp+p)}(x)}_{0}.$$

Por la Observación 3, sabemos que el último termino será 0. Restando,

$$\begin{aligned} F_p'(x) - F_p(x) &= \quad f_p'(x) + \ldots + f_p^{(mp+p-1)}(x) \\ &\quad -f_p(x) - f_p'(x) - \ldots - f_p^{(mp+p-1)}(x) \\ &= -f_p(x). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la siguiente derivada,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x}F_p(x)\right) = -e^{-x}F_p(x) + e^{-x}F_p'(x) = e^{-x}(F_p'(x) - F_p(x)) = -e^{-x}f_p(x),$$

si la integramos y aplicamos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos, cuando $1 \leq j \leq m$,

$$a_j \int_0^j e^{-x} f_p(x)\mathrm{d}x = a_j \left[-e^{-x}F_p(x)\right]_0^j = a_j F_p(0) - a_j e^{-j} F_p(j).$$

Multiplicando esta expresión por e^j y sumando para $j = 0, 1, \ldots, m$, llegamos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m a_j e^j \int_0^j e^{-x} f_p(x)\mathrm{d}x &= F_p(0) \underbrace{\sum_{j=0}^m a_j e^j}_{0} - \sum_{j=0}^m a_j F_p(j) \\ &= -\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{mp+p-1} a_j f_p^{(i)}(j). \end{aligned}$$

Vamos a estudiar por separado el primer término y el último en estas igualdades, que se cumplen para cualquier número natural p. Como el conjunto de primos $\mathbb{P}$ es infinito numerable, lo podemos expresar de la forma $\mathbb{P} = \{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$, donde $p_n < p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Consideramos ahora la sucesión de funciones $\{f_{p_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ definidas como en la Observación 3, y que verifican cuando $0 \leq x \leq m$,

$$|f_{p_n}(x)| \leq \frac{m^{mp_n+p_n-1}}{(p_n-1)!} = \frac{(m^{m+1})^{p_n-1}}{(p_n-1)!}\frac{m^m}{p_n}.$$

Por la Observación 2, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ para cualquier a número real, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} |f_{p_n}(x)| = 0, \quad 0 \leq x \leq m.$$

Por un lado tenemos

$$|\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f_{p_n}(x)\mathrm{d}x| \leq \sum_{j=0}^{m} |a_j|\, e^j \int_0^j e^{-x}\, |f_{p_n}(x)|\mathrm{d}x,$$

que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$. Por tanto podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f_{p_n}(x)\mathrm{d}x| < \frac{1}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Por otro lado, por la definición de $F_{p_n}(x)$ y la Observación 3, se deduce que

$$F_{p_n}(0) = f_{p_n}^{(p_n-1)}(0) + p_n N_0(p_n), \quad \text{para cierto } N_0(p_n) \in \mathbb{Z}.$$

$$F_{p_n}(j) = p_n N_j(p_n), \quad \text{para cierto } N_j(p_n) \in \mathbb{Z},\ 1 \leq j \leq m.$$

Si elegimos ahora un número primo $p_n > \max\{m, p_{n_0}, a_0\}$, la expresión

$$a_0 f_{p_n}^{(p_n-1)}(0) = a_0(-1)^{p_n} \cdots (-m)^{p_n} \text{ no es múltiplo de } p_n,$$

y llegamos a una contradicción ya que

$$-\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{mp_n+p_n-1} a_j f_{p_n}^{(i)}(j) = -a_0 f_{p_n}^{(p_n-1)}(0) - p_n \sum_{j=0}^{m} a_j N_j(p_n) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Por lo tanto el número e es trascendente. ∎

Definición 4 *Un polinomio $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ se dice que es simétrico si para cualquier permutación $\sigma:\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\to\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ se tiene que $(f\circ\sigma)(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.*

Ejemplo: Consideremos el polinomio de tercer grado

$$p(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)=x^3+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Observemos que los polinomios

$$\begin{aligned} A_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\\ A_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,\\ A_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \end{aligned}$$

son simétricos y se llaman funciones elementales simétricas en 3 indeterminadas.

Análogamente se definen las funciones elementales simétricas en general $A_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $1\le j\le n$, como los coeficientes que acompañan a las potencias x^{n-j} en la expansión del polinomio $p(x)=(x+\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, es decir,

$$A_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\sum_{i_1<\ldots<i_j}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_j}.$$

Nota 2 *Teniendo en cuenta las igualdades de Cardano-Vieta, se puede ver que hay una relación entre los coeficientes de cualquier polinomio y las funciones elementales simétricas sobre las raíces del polinomio. En efecto, consideremos un polinomio descompuesto en función de sus raíces,*

$$p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),\ a_n\neq 0.$$

Entonces se tiene que

$$A_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(-1)^j\,\frac{a_{n-j}}{a_n}.$$

Nota 3 *Vamos a usar el orden lexicográfico para comparar monomios de la forma $\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n}$. Así, diremos que el monomio $\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n}$ tiene menor orden que el monomio $\alpha_1^{j_1}\cdots\alpha_n^{j_n}$ si en la primera posición, llamémosla k, donde $i_k\neq j_k$ entonces $i_k<j_k$.*

Observación 4

Veamos a continuación que dado un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes racionales y raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces cualquier polinomio simétrico $q(x_1, \ldots, x_n)$ de n indeterminadas con coeficientes racionales evaluado en estas raíces también es un número racional, es decir, $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}$. Avanzaremos paso a paso.

• Si $c\,\alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n}$, $c \neq 0$, es el término de mayor orden en un polinomio simétrico $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, entonces $i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_n$. En caso contrario, $\exists\, i_k < i_{k+1}$, entonces si σ es una permutación sobre $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, el polinomio $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (q \circ \sigma)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ contiene el término $c\,\alpha_1^{i_1} \cdots, \alpha_k^{i_{k+1}} \alpha_{k+1}^{i_k} \cdots \alpha_n^{i_n}$, de mayor orden que $c\,\alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n}$, lo cual es una contradicción.

• El término de mayor orden en la expansión del polinomio $A_1^{i_1 - i_2}(\overrightarrow{\alpha}) \cdots A_{n-1}^{i_{n-1} - i_n}(\overrightarrow{\alpha}) A_n^{i_n}(\overrightarrow{\alpha})$ es $\alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n}$, siendo $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. El término de mayor orden en un producto de polinomios es el producto de los términos de mayor orden en cada polinomio. Los términos de mayor orden en A_1, $A_2, \ldots$, A_n son respectivamente α_1, $\alpha_1\alpha_2, \ldots$, $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$. Por tanto, el término de mayor orden en el producto es $\alpha_1^{i_1 - i_2} (\alpha_1\alpha_2)^{i_2 - i_3} \cdots (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{i_n} = \alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n}$.

• Si $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es un polinomio simétrico con coeficientes enteros no nulo, el siguiente algoritmo proporciona un polinomio h en n indeterminadas con coeficientes enteros de grado menor o igual al grado de q tal que $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(A_1(\overrightarrow{\alpha}), \ldots, A_n(\overrightarrow{\alpha}))$.

Algoritmo:

Paso 0) Tomar $l = 1$ y $q_1 = q$.

Paso 1)
- *a*) Encontrar el monomio de mayor orden en q_l, $c\,\alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n}$, $c \neq 0$, $(i_1 \geq \ldots \geq i_n.)$
- *b*) $h_l(y_1, \ldots, y_n) = c\,y_1^{i_1 - i_2} \cdots y_{n-1}^{i_{n-1}} y_n^{i_n}$.
- *c*) $q_{l+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - h_l(A_1, \ldots, A_n)$.
- *d*) Cambiar l por $l + 1$.
- *e*) Si $q_l \neq 0$ volver a *a*) y repetir Paso 1); en caso contrario pasar a Paso 2).

Paso 2) $h = h_1 + h_2 + \ldots + h_{l-1}$.

La demostración de que el algoritmo funciona se hace por inducción sobre el número de monomios de orden menor que el de mayor orden en $q(\overrightarrow{\alpha})$. Observemos, por la Nota 2, que $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(A_1(\overrightarrow{\alpha}), \ldots, A_n(\overrightarrow{\alpha})) \in \mathbb{Q}$.

Como consecuencia se tiene que si $\beta_1, \cdots, \beta_m$, son todas las sumas de exactamente k raíces α_j, $1 \leq j \leq n$, del polinomio $p(x) = a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$, entonces podemos encontrar un polinomio $p_k(x)$ de grado m con coeficientes en $\mathbb{Q}$ cuyas raíces son $\beta_1, \ldots, \beta_m$.

Observación 5

Sea $\theta(x) = c_r x^r + \ldots + c_1 x + c_0$ un polinomio con coeficientes enteros donde $c_0 \neq 0$. Si $\beta_1, \ldots, \beta_l$ son sus distintas raíces con multiplicidades $m_1 \leq \ldots \leq m_l$, respectivamente, podemos expresar el polinomio como

$$\theta(x) = c_r(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_l)^{m_l}, \; m_1 + \ldots + m_l = r.$$

Las sucesivas derivadas darán polinomios con coeficientes enteros.

Sea p un número natural. Consideremos la función $f_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida de la siguiente manera,

$$f_p(x) = \frac{c_r^{rp-1} x^{p-1} \theta(x)^p}{(p-1)!}.$$

Observemos que $f_p(x)$ es una función holomorfa por ser polinómica (de grado $p - 1 + rp$). Calculemos las sucesivas derivadas al igual que hicimos en la Observació 3.

- $f_p^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \ldots, p-2;$
- $f_p^{(p-1)}(0) = (-1)^{rp} c_r^{(r+1)p-1} \beta_1^p \cdots \beta_r^p = c_r^{rp-1} c_0^p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$
- $f_p^{(k)}(0) = pN_k, \; N_k \in \mathbb{Z}, \; k = p, p+1, \ldots, p-1+rp.$

Por la estructura que tiene el polinomio $\theta(x)$, tenemos

- $\sum\limits_{j=1}^{l} f_p^{(k)}(\beta_j) = 0 \quad (0 < k < m_1 p)$

Cada derivada de orden p o superior tiene un factor p y un factor c_r^{rp-1}, ya que debemos derivar $\theta(x)^p$ suficientes veces para obtener un valor distinto de 0 y $f_p^{(k)}(\beta_j)$ un polinomio en β_j de grado como mucho $rp - 1$.

La suma de $f_p^k(\beta_j)$, para $1 \leq j \leq l$, considerada como polinomio en $\beta_1, \ldots, \beta_l$, es una función simétrica. Teniendo en cuenta la Observación 4, esta suma es un número entero que además es múltiplo de p. Por lo tanto

- $\sum\limits_{j=1}^{l} f_p^{(k)}(\beta_j) = pM_k, \; M_k \in \mathbb{Z}, \quad k = p, \ldots, p + rp - 1.$

Teorema 3 ***(Lindemann)*** *El número π es trascendente.*

Demostración:

Razonando de nuevo por reducción al absurdo, supongamos que π es un número algebraico. Entonces, por la Proposición 2, el número complejo $i\pi$ también será algebraico y raíz de cierto polinomio $\theta_1(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Denotemos sus raíces como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y supondremos que $\alpha_1 = i\pi$. Si descomponemos $\theta_1(x)$ en función de sus raíces obtenemos la relación que hay entre ellas y los coeficientes del polinomio. Así,

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)\\ &= x^n \underbrace{-\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)}_{a_{n-1}} x^{n-1} + \underbrace{\left(\sum_{1\le j_1<j_2\le n}\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\right)}_{a_{n-2}} x^{n-1} + \ldots + \underbrace{(-1)^n\alpha_1\cdots\alpha_n}_{a_0}.\end{aligned}$$

Sabemos que $e^{i\pi}+1=0$, entonces añadiendo factores tendremos la igualdad

$$(e^{\alpha_1}+1)\cdots(e^{\alpha_n}+1)=0.$$

Si expandimos la expresión anterior obtendremos

$$e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} + \ldots + \sum_{1\le j_1<j_2\le n} e^{\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}} + \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j} + 1 = 0.$$

Vamos a construir a continuación un polinomio con coeficientes racionales cuyas raíces son los exponentes de e en la expansión anterior,

$$p(x) = \underbrace{(x \underbrace{-(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)}_{a_{n-1}})}_{\theta_n(x)} \ \cdots \underbrace{\prod_{1\le j_1<j_2\le n}(x-(\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}))}_{\theta_2(x)} \underbrace{\prod_{j=1}^{n}(x-\alpha_j)}_{\theta_1(x)}.$$

Los coeficientes de cada polinomio $\theta_k(x)$ son números racionales, funciones de los coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, del primer polinomio $\theta_1(x)$, cuyas raíces son los α_j. Por ejemplo, si $n=3$, entonces $\theta_2(x) = x^3 + 2a_2x^2 + (a_2^2+a_1)x + a_2a_1 - a_0$.

Vamos a eliminar ahora los factores de $p(x) = \theta_n(x)\cdots\theta_2(x)\theta_1(x)$ de la forma x, si los hay, correspondientes a las sumas de α_j que sean nulas, y que seguirá siendo un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Teniendo en cuenta la Nota 1 podemos escribir el nuevo polinomio de la forma

$$\theta(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \ldots c_1 x + c_0, \quad c_j \in \mathbb{Z},\ 1 \leq j \leq 0,\ c_r\, c_0 \neq 0,$$

y cuyas raíces son sumas no nulas de α_j. Vamos a llamar a estas raíces: $\beta_1, \ldots \beta_r$ (pueden repetirse).

Si descomponemos $\theta(x)$ en función de sus raíces obtenemos la relación entre ellas y los coeficientes del polinomio. Así

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= c_r(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_r) \\
&= c_r x^n \underbrace{-c_r\left(\sum_{j=1}^{r}\beta_j\right)}_{c_{r-1}} x^{r-1} + \underbrace{c_r\left(\sum_{1\leq j_1<j_2\leq n}\beta_{j_1}\beta_{j_2}\right)}_{c_{r-2}} x^{r-1} + \ldots + \underbrace{(-1)^r c_r \beta_1\cdots\beta_r}_{c_0}.
\end{aligned}$$

Si volvemos a tener en cuenta la igualdad $(e^{\alpha_1}+1)\cdots(e^{\alpha_n}+1) = 0$, con la nueva notación la igualdad se convierte en

$$e^{\beta_1} + \ldots e^{\beta_r} + \underbrace{e^0 + \ldots + e^0 + 1}_{N} = 0,$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j} + N = 0, \text{ donde } N \geq 1,\ N \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Ahora consideramos la función definida en la Observación 5, $f_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f_p(x) = c_r^{rp-1} x^{p-1} \frac{\theta(x)^p}{(p-1)!},$$

Sea $F_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función holomorfa definida a partir de f_p como

$$F_p(x) = f_p(x) + f_p'(x) + \ldots + f_p^{(rp+p-1)}(x).$$

Derivando obtenemos

$$F_p'(x) = f_p'(x) + f_p^{(2)}(x) + \ldots + f_p^{(rp+p-1)}(x) + \underbrace{f_p^{(rp+p)}(x)}_{0}.$$

Si ahora restamos, $F_p'(x) - F_p'(x) = -f_p(x)$.

Teniendo en cuenta la siguiente derivada,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x}F_p(x)\right) = e^{-x}(F_p'(x) - F_p(x)) = -e^{-x}f_p(x),$$

si la integramos (no importa el camino elegido) y aplicamos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos

$$e^{-x}F_p(x) - F_p(0) = -\int_0^x e^{-y}f_p(y)\,\mathrm{d}y$$

Consideramos a continuación la parametrización $\psi_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\psi_\lambda(x) = \lambda x$, donde $0 \leq \lambda \leq 1$, la integral se transforma en

$$F_p(x) - e^x F_p(0) = -x\int_0^1 e^{(1-\lambda)x} f(\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Si sustituimos x por β_j y sumamos para $1 \leq j \leq r$, considerando además que $\sum e^{\beta_i} + N = 0$ en (1), donde $N \geq 1$, tenemos la igualdad

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{r} F_p\left(\beta_j\right) + NF_p(0)}_{I(p)} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f_p\left(\lambda\beta_j\right)\mathrm{d}\lambda}_{II(p)}$$

Vamos a estudiar las dos partes de la igualdad por separado. Centrándonos en primer lugar en la expresión $I(p)$. Veamos que para un primo p lo suficientemente grande, esta parte es un número entero distinto de 0.

Teniendo en cuenta la Observación 5,

$$I(p) = \sum_{j=1}^{r} F_p\left(\beta_j\right) + NF_p(0) = \sum_{k=p}^{rp+p-1} \sum_{j=1}^{r} f_p^{(k)}(\beta_j) + Nf_p^{(p-1)}(0) + N \sum_{k=p}^{rp+p-1} f_p^{(k)}(0)$$

$$= \underbrace{p \sum_{k=p}^{rp+p-1} (M_k + NN_k)}_{M \in \mathbb{Z}} + \underbrace{Nc_r^{rp-1} c_0^p}_{C \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} = pM + C.$$

Como el conjunto de números primos $\mathbb{P}$ es numerable, podemos elegir un número primo $p_1 > C = Nc_r^{rp-1}c_0^p$, y entonces $I(p_1) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, que es a lo que queríamos llegar.

Evaluemos a continuación la expresión $II(p)$,

$$|II(p)| = |\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f_p\left(\lambda\beta_j\right) \mathrm{d}\lambda| \leq \sum_{j=1}^{r} |\beta_j| \int_0^1 |e^{(1-\lambda)\beta_j}| \, |f_p\left(\lambda\beta_j\right)| \mathrm{d}\lambda.$$

Acotemos cada factor de la integral por separado. Así para $1 \leq j \leq r$, teniendo en cuenta que $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$|e^{(1-\lambda)\beta_j}| = |e^{(1-\lambda)(Re\beta_j + Im\beta_j)}| = e^{(1-\lambda)Re\beta_j} \leq \begin{cases} e^{Re\beta_j} & \text{si} \quad Re\beta_j > 0 \\ 1 & \text{si} \quad Re\beta_j \leq 0. \end{cases}$$

Veamos qué pasa ahora con $f_p\left(\lambda\beta_j\right)$.

$$f_p\left(\lambda\beta_j\right) = \frac{c_r^{rp+p-1}\lambda^{p-1}\beta_j^{p-1} \prod_{k=1}^{r} (\lambda\beta_j - \beta_k)^p}{(p-1)!} = \frac{c_r^{rp+p-1}\lambda^{p-1}\beta_j^{p-1}(\lambda-1)^p\beta_j^p \prod_{k=1(k\neq j)}^{r} (\lambda\beta_j - \beta_k)^p}{(p-1)!}$$

$$= (\lambda(\lambda-1))^{p-1} \frac{\left(c_r^{r+1}\beta_j^2 \prod_{k=1(k\neq j)}^{r} (\lambda\beta_j - \beta_k)\right)^{p-1}}{(p-1)!} c_r^r \beta_j (\lambda - 1) \prod_{k=1(k\neq j)}^{r} (\lambda\beta_j - \beta_k).$$

Entonces, como $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene que

$$|\lambda(\lambda-1)| = \lambda(1-\lambda) \leq \frac{1}{4},$$

$$|\lambda\beta_j - \beta_k| \leq \lambda|\beta_j| + |\beta_k| \leq |\beta_j| + |\beta_k|,$$

y

$$|f_p(\lambda\beta_j)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{p-1} \frac{\left(|c_r|^{r+1}|\beta_j|^2 \prod_{k=1(k\neq j)}^{r} (|\beta_j|+|\beta_k|)\right)^{p-1}}{(p-1)!} \underbrace{|c_r|^r|\beta_j| \prod_{k=1(k\neq j)}^{r} (|\beta_j|+|\beta_k|)}_{A}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{p-1} \frac{(|c_r||\beta_j|A)^{p-1}}{(p-1)!} A,$$

que tiende a 0 cuando p tiende a infinito teniendo en cuenta la Observación 2 y además que $\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{p-1} = 0$. Luego

$$\lim_{p\to\infty} f_p(\lambda\beta_j) = 0.$$

Si ahora tenemos en cuenta todas las acotaciones llegamos a que

$$\lim_{p\to\infty} II(p) = 0.$$

Por tanto podemos encontrar un número natural p_2 lo suficientemente grande para que

$$-\frac{1}{2} < II(p_2) < \frac{1}{2}.$$

Hemos llegado a una contradicción tomando un primo p_0 mayor que p_1 y p_2, ya que

$$I(p_0) = \sum_{j=1}^{r} F_{p_0}(\beta_j) + NF_{p_0}(0) = -\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f_{p_0}(\lambda\beta_j)\, \mathrm{d}\lambda = II(p_0),$$

donde la primera parte de la igualdad en un número entero distinto de 0 y la última parte se encuentra en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Por lo tanto podemos concluir que el número π es trascendente.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Conclusiones

En este Trabajo de Fin de Grado sobre el número π, he realizado un estudio en profundidad de algunas de sus propiedades más importantes. He tenido la oportunidad de sumergirme en la fascinante historia y las múltiples aplicaciones de este número icónico. A lo largo de mi investigación, he descubierto que π va más allá de su definición básica como la relación entre la longitud y el diámetro de una circunferencia, y se convierte en un elemento fundamental en el mundo de las matemáticas.

La historia de π se remonta a la antigüedad, y me ha sorprendido cómo este número ha capturado la imaginación de los matemáticos y científicos a lo largo de los siglos. Desde las primeras estimaciones aproximadas en civilizaciones antiguas hasta los cálculos más precisos y los récords de dígitos en la era moderna, π ha sido objeto de constante exploración y búsqueda de su verdadero valor. Sin embargo, lo que más me ha impactado son las demostraciones de la irracionalidad y la trascendencia de π. La prueba de estos resultados de compleja demostración, revelan la verdadera profundidad y complejidad de este número.

A un nivel personal, para realizar este TFG he tendido que utilizar muchos conocimientos previos y he tratado con artículos que contenían demostraciones muy técnicas. Ha sido un trabajo arduo, pero muy gratificante. El número π es un ejemplo perfecto de cómo un concepto matemático aparentemente simple puede tener ramificaciones y aplicaciones infinitas. Además, me ha recordado la importancia de la perseverancia y la curiosidad en la investigación matemática, ya que el cálculo y la determinación precisa de π han sido un desafío constante a lo largo de la historia.

Bibliografía

[1] DEMIDOVICH - MARON, B. *Calculo numérico fundamental*, Paraninfo, 1977.

[2] JONES, A., MORRIS, S., PEARSON, K., *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Springer Verlag, 1994.

[3] MAYER, S. *The trascendence of* π, nota manuscrita, 2006.

[4] NIVEN, I. *Irrational Numbers*, Willy and Sons, 1956.

[5] SPIVAK, M. *Calculus*. Reverte, 1981.