INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE VARIEDADES

Trabajo Fin De Grado

Autor:
Marc Valls Rebollar

Director:
José Antonio López Ortí

Julio 2023

Resumen

En el presente trabajo se aborda el estudio de las variedades diferenciables. Estas son la generalización del estudio de la geometría de curvas y superficies, la cual se ha hecho de modo local en cursos anteriores a través de parametrizaciones de las mismas. La extensión natural de estas parametrizaciones nos lleva al concepto de carta.

Las variedades diferenciables aparecen de modo natural en análisis de varias variables cuando tenemos un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido mediante un conjunto de k funciones $F_1, \ldots, F_k$ con diferenciable $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $k = 1, \ldots, k$, con $k < n$ cuyos gradientes son independientes en cada punto del conjunto $M = F_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap F_k^{-1}(0)$.

El Teorema de la Función Implícita nos asegura la existencia de cartas en el entorno de cada punto, esto es que en cada punto de M hay un entorno abierto del mismo donde hay $n - k$ variables independientes en función de las cuales podremos determinar el valor del resto de variables. Las variables independientes citado anteriormente, nos proporcionará un sistema de coordenadas locales alrededor del punto considerado al cual denominaremos carta.

En los capítulos posteriores se define de modo abstracto el concepto de variedad diferenciable, de atlas y de función diferenciale.

Posteriormente, se define vector tangente a una variedad en un punto. a partir de este concepto se define se espacio tangente a una variedad en un punto, así como u dual espacio cotangente.

En la siguiente sección se define el concepto de fibrado tangente y cotangente como la unión de los espacios tangentes y cotangentes a la variedad, inicial, la cual llamarеremos variedad de base, en todos sus puntos. Estos conjuntos se dotaran de una estructura de variedad diferenciable inducida por la estructura diferencable de variedad de base.

Finalmente, se introduce el concepto de aplicación diferenciable entre variedades, así como el de imagen recíproca.

Este trabajo no es más que una primera introducción al cálculo en variedades, el cual es de enorme riqueza y cuyas aplicaciones abarcan amplios campos.

Palabras clave

Geometría Diferencial. Variedades Diferenciables. Fibrado Tangente. Fibrado Cotangente. Diferencial de una aplicación entre variedades.

Keywords

Differential geometry, Differential manifolds. Tangent bundle. Cotangent bundle. Differential of a map between manifolds.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se pretende iniciar el estudio de ciertas estructuras llamadas variedades diferenciables, que extienden de modo natural el concepto de curvas y superficies en R^3.

La primera cuestión a considerar es el estudio de qué estructura puede dotarse a subconjuntos de R^n de la forma:

$$M = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n | F_1(\overrightarrow{x}) = 0, \ldots, F_k(\overrightarrow{x}) = 0\}$$

con $k < n$ y $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables de clase C^k y $\{dF_1(\overrightarrow{x}), \cdots, dF_k(\overrightarrow{x})\}$ linelmente independientes en todo punto $\vec{x} \in M$. Estos conjuntos los denominaremos variedades diferenciables, concepto que iremos precisando conforme avance el trabajo.

Variedades diferenciables son la esfera en $\mathbb{R}^3$, el toro en $\mathbb{R}^3$ la hipersfera en $\diagdown^5$, etc.

Si se da una aplicación $f : M \to N$ entre dos variedades M y N en principio no es posible calcular de algún modo su diferencial. Por ello es necesario introducir el concepto de variedad dferenciable para poder extender de algún modo la topología, el cálculo diferencial y el cálculo integral a estos conjuntos. En este trabajo no se abordará el cálculo integral en variedades, y el cálculo diferencial se hará solo de forma somera.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la introducción se expone de modo somero el problema. En el capítulo 2 se introducen los elementos necesarios del cálculo diferencial de varias variables, llegándose a resultados fundamentales, como el Teorema de la Función Implícita y el Teorema de la Función Inversa. A continuación se expone el concepto de espacio dual de un espacio vectorial y el de aplicación traspuesta, para finalmente introducir el concepto de relación binaria de equivalencia y de conjunto cociente.

En el capítulo 3 se define de modo abstracto el concepto de variedad diferenciable, donde aparecen las cartas y el concepto de atlas o estructura diferenciable.

En el capítulo 4 se introduce el concepto de vector tangente a una variedad en un punto a través de una relación binaria de equivalencia, la cual induce un conjunto cociente, lo que da lugar al espacio tangente a una variedad en un punto, T_mM. Así como su dual, T_m^*M, llamado espacio cotangente. También se estudian las bases inducidas en T_mM y T_m^*M por una carta F de funciones coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$.

En el capítulo 5 se introducen los fibrados tangente y cotangente, $TM = \bigcup\limits_{m \in M} T_mM$ y $T^*M = \bigcup\limits_{m \in M} T_m^*M$, así como las cartas inducidas en cada uno de estos fibrados por una carta F de la variedad M. También se estudia el concepto de proyección del fibrado tangente y cotangente sobre la variedad, así como el concepto de diferencial de una aplicación entre variedades y el de imágen recíproca por una aplicación (aplicación traspuesta de la diferencial).

Finalmente, se exponen las principales conclusiones y perspectivas de este trabajo.

Capítulo 2

PRELIMINARES

2.1. Introducción

En este capítulo vamos a efectuar un repaso de ciertos resultados del cálculo diferencial de varias variables, necesarios para una correcta comprensión de aquello que se desarrollará en capítulos posteriores. A continuación, se introducirá el concepto de Espacio Dual de un espacio vectorial estudiándose sus propiedades fundamentales. Finalmente, se recuerda el concepto de conjunto cociente por una relación de equivalencia, el cual será necesario también en capítulos posteriores [1] y [5].

2.2. Resultados básicos del cálculo diferencial en varias variables

Definición de Continuidad: Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es continua en $a \in X$ si:

Para cada $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$, implica que $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$. Es decir, para cada $B_Y(f(a), \epsilon)$, existe $B_X(a, \delta)$ tal que $f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \epsilon)$

Teorema 1. Una función entre dos espacios métricos $f : X \to Y$ es continua si, y solo si, la imagen de cualquier sucesión de X convergente a un punto $x \in X$, converge a $f(x)$.

Demostración. $(\to)$ Supongamos que f es continua. Sea (x_n) una sucesión contenida en X convergente a x. Como f es continua, dada una bola $B(f(x), \epsilon)$, $\exists$ otra bola $B(x, \delta)$

cuya imagen está dentro de $B(f(x), \epsilon)$, es decir:

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$$

Como x es el límite de (x_n), $\exists N$, a partir del cual todos los términos de la sucesión están en $B(x, \delta)$:

$$x_n \in B(x, \delta), n \geq N \rightarrow f(x_n) \in f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$$

por lo tanto la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x)$

($\leftarrow$) Supongamos ahora que se cumple la condición del enunciado, por lo que veamos que f es continua $\forall x$. Por reducción al absurdo, si f no es continua en un punto x, $\exists$ una sucesión que converge a x pero cuya imagen no converge a $f(x)$. Para ello, si f no es continua, $\exists$ una bola $B(f(x), \epsilon)$ dentro de la cual ninguna bola con centro x se aplica. En particular, existen puntos en las bolas $B(x, \frac{1}{n})$, con n entero positivo, que no van a $B(f(x), \epsilon)$:

$$x_n \in B(x, \frac{1}{n}), f(x_n) \neq B(f(x), \epsilon)$$

Por lo que la sucesión (x_n) converge a x, pero la sucesión $(f(x_n))$ no converge a $f(x)$. $\square$

Nota: Cuando no se preste a confusión, utilizaremos la notación $B_r(x_0)$ para referirnos a $B(x_0, r)$ y lo usaremos indistintamente.

Teorema 2. Sea f una función continua en un conjunto cerrado S de R^n, cuya imagen sea un conjunto T de R^k. Si Y es cerrado, con $Y \subset T$, la imagen inversa $f^{-1}(Y)$ será un subconjunto cerrado de S.

Demostración. Sea $x \in (f^{-1}(Y))'$. Entonces, x también es punto de acumulación de S, por tanto, $x \in S$ ya que S es cerrado. Tenemos que demostrar que $x \in f^{-1}(Y)$ ó $f(x) \in Y$. $\exists$ X_n una sucesión cuyos términos son puntos de $f^{-1}(Y)$ de modo que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como f es continua en S y $x \in S$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Pero cada punto $f(x_n) \in Y$, ya que $x_n \in f^{-1}(Y)$; además, como Y es cerrado, se tiene que $f(x) \in Y$, es decir, $x \in f^{-1}(Y)$. Esto prueba que $f^{-1}(Y)$ es cerrado. $\square$

Teorema 3. Sea f una función continua en un conjunto abierto S de R^n, cuya imagen sea un conjunto T de R^k. Si Y es abierto, con $Y \subset T$, la imagen inversa $f^{-1}(Y)$ será un subconjunto abierto de S.

Demostración. Tenemos que demostrar que $f^{-1}(Y)$ es una unión de conjuntos abiertos. Supongamos que $x_0 \in f^{-1}(Y)$. Entonces:

$$\exists y_0 \in Y \text{ tal que } y_0 = f(x_0)$$

Como Y es abierto, $\exists r > 0$ de manera que $B(y_0, r) \subset Y$. Si $r = \epsilon$, $\exists \delta > 0$ al que $\forall x \in B_(y_0, \delta) \subset Y$. El conjunto abierto $B(x_0, \epsilon) \cap S$ es, por tanto, un subconjunto abierto de $f^{-1}(Y)$. Pero la unión de todos los abiertos $Bx_0, \epsilon) \cap S$ obtenidos al recorrer x_0 todo $f^{-1}(Y)$, es exactamente $f^{-1}(Y)$. Luego $f^{-1}(Y)$ es abierto, ya que la unión de abiertos es abierto. □

Nota: Sea $f : X \to Y$ una aplicación, donde $(X, \tau), (Y, \tau')$ son espacios topológicos generales. Diremos que f es continua si $\forall\, W \in \tau'$ se tiene que $f^{-1}(W) \in \tau$, esto es que la antiimagen por f de un abierto de Y es abierto en X. En espacios métricos la continuidad queda caracterizada por sucesiones, lo que no es cierto en un espacio topológico cualquiera.

Teorema 4. Sea f una función continua en un conjunto compacto $S \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que $f(S) \subset \mathbb{R}^m$. Entonces $f(S)$ es un conjunto compacto.

Demostración. Sea F un recubrimiento abierto de $f(S)$ entonces $f(S) \subset \bigcup_{A \in F} A$.

Sea $x \in S$, entonces $f(x)$ pertenece a uno de los abiertos de F, a ese abierto lo llamaremos A_x.

Como A_x es abierto, $A_x \bigcup f(S)$ abierto en $f(S)$ y por tanto $f^{-1}(A_x \bigcup f(S)$ es abierto en A.

Sea f^{-1} la antiimagen por f, evidentemente $\{f^{-1}(A_x \bigcup f(S)) | x \in S\}$ es un cubrimiento abierto de S por por tanto existe un subcubrimiento finito de S dado por $\{f^{-1}(A_{x_i} \bigcup f(S)) | i = 1, \dots, k\}$ con $x_i \in f(S)$.

Por otra parte $\{A_{x_i} \bigcup f(S) = f\, f^{-1}(A_{x_i} \bigcup f(S)) | i = 1, \dots, k\}$ y por tanto se tiene que $\{(A_{x_i} \bigcup f(S)) | i = 1, \dots, k\}$ es un cubrimiento abierto de $f(S)$ y evidentemente también lo es $\{(A_{x_i} | i = 1, \dots, k\}$ lo cual constituye un subcubrimiento finito de $f(S)$ del cubrimiento inicial F resultado e ello la compacidad de $f(S)$. □

Teorema 5. Sea f una función continua en un conjunto compacto $S \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que $f(S) \subset \mathbb{R}^m$ y que f es biyectiva, es decir, existe la función inversa f^{-1}. En estas condiciones f^{-1} es continua en $f(S)$.

Demostración. Sea $y \in (f(S))'$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, siendo $(y_n)_{n=1}^{+\infty} \in f(S)$. Sea $x_n = f^{-1}(y_n)$. El conjunto infinito $\{x_1, x_2, ...\} \subset S$, tiene un punto de acumulación en S, llamémosle x. Podemos elegir en $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ otra sucesión $(x'_n)_{n=1}^{+\infty}$ / $\lim_{n\to\infty}(x'_n) = x$.

Como f es continua $\to \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(x) = y$, ya que $(f(x'_n))_{n=1}^{+\infty} \subset (y_n)_{n=1}^{+\infty}$. Por consiguiente, $x = f^{-1}(y)$, lo que implica que x es el único punto de acumulación de $\{x_1, x_2, ...\}$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, lo que equivale a $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$. Por lo que f^{-1} es continua en y. □

Definición 1. (Función diferenciable):

Sea $\overrightarrow{f} : D \to \mathbb{R}^m$, siendo D dominio de $\mathbb{R}^n$. Sea $\overrightarrow{x_0} \in D$. Diremos que $\overrightarrow{f}$ es diferenciable en $\overrightarrow{x_0}$ si, $\exists \delta > 0$ / $\forall \overrightarrow{v} \in R^n$, con $||\overrightarrow{v}|| \leq \delta$, satisface que:

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) = D\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) \cdot (\overrightarrow{v}) + \epsilon(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{v})$$

de modo que $D\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal y

$$\lim_{||\overrightarrow{v}||\to 0} \frac{\epsilon(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{v})}{||\overrightarrow{v}||} = 0.$$

Nota: D$\overrightarrow{f}(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to R^m)$, siendo $\mathcal{L}$ el espacio vectorial de los homomorfismos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Además, diremos que $\overrightarrow{f}$ es diferenciable en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si lo es en todos los puntos de U. Denotaremos por $D\vec{f}(\vec{x})$ a:

$$D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}}$$

Por abuso de lenguaje, identificaremos $D\vec{f}(\vec{x_0})$ con su representación matricial, la cual depende de las bases elegidas. La matriz diferencial también se denomina matriz jacobiana o simplemente jacobiano, y se denota por $J\vec{f}(\vec{x_0})$ o también $J_{\vec{f}}(\vec{x_0})$. Cuando $F : R^n \to \mathbb{R}$, usaremos dF para denotar la diferencial.

Teorema 6. . **Teorema del Valor Medio n-dimensional: Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$, $a, b \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función continua y diferenciable en en Ω. Entonces $\forall\, a, b \in \Omega$, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = Df(c) \cdot (b - a)$ donde $(a, b) = \{a + t(b - a) |\, t \in]0, 1[\}$.**

Demostración. Definamos una función $\psi : [0, 1] \to R$, escribiendo $\psi(t) = f(a + t(b - a))$ $\forall\ t \in [0, 1]$. Entonces ψ es continua y, por la regla de la cadena, es derivable en (0, 1), siendo su derivada:

$$\psi'(t) = Df(a + t(b - a))(b - a) \quad \forall t \in (0, 1)$$

El Teorema del Valor Medio para funciones reales de variable real nos da un $t_0 \in (0, 1)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(t_0) = Df(a + t_0(b - a))(b - a)$$

Tomando $c = a + t_0(b - a) \in (a, b)$, tenemos:

$$f(b) - f(a) = D_f(c) \cdot (b - a)$$

□

Teorema 7. Sea K bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro $\overrightarrow{x_0}$, y $\overline{K}$ la esfera cerrada. Sea $\overrightarrow{f} = (f_1, ..., f_n) : \overline{K} \to R^n$ continua y biyectiva en $\overline{K}$. Supongamos que $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ las parciales si $x \in K$. Supongamos que el determinante jacobiano $|J_{\vec{f}}(x)| \neq 0$ $\forall x \in K$. Entonces $\vec{f}(K)$ contiene un entorno de $\vec{f}(x_0)$.

Demostración. Sea $F_r(K) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}| = r\}$ la frontera de K, con r = radio de K. Como $F_r(K)$ es cerrada y acotada $\to F_r(K)$ es compacta.

Definamos una función real, $g : F_r(K) \to \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{x} \to g(\overrightarrow{x}) = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})|$, entonces g es continua y $g(\overrightarrow{x}) > 0$.

Por el teorema de Weierstrass se tiene que, si f es una función continua definida en un compacto, $\exists x_1, x_2 \in F_r(K)$, tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in F_r(K)$. Es decir, alcanza su máximo y su mínimo en el compacto.

Como g es continua y definida en un compacto, por el Teorema de Weierstrass, se tiene que g alcanza su mínimo absoluto, m, en algún punto de $F_r(K)$. Como $g(x) > 0 \to m > 0$.

Sea $T = B_{\frac{m}{2}}(\overrightarrow{f}(x_0))$. Tenemos que demostrar que $T \subset \overrightarrow{f}(K)$. Para ello, si $\overrightarrow{y} \in T \to \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{f}(K)$.

Sea $\overrightarrow{y} \in T$. Definamos una función real y continua definida en el compacto $\overrightarrow{K}$, $h : \overrightarrow{K} \to R \ / \ \overrightarrow{x} \to h(\overrightarrow{x}) = |f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{y}|$.

Por Weierstrass, h alcanza su mínimo absoluto en $\overline{K}$. En el centro tenemos que $h(\overrightarrow{x_0}) = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) - \overrightarrow{y}|$. Como $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$ es el centro de T y $\overrightarrow{y} \in T \to h(\overrightarrow{x_0}) = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) - \overrightarrow{y}| < \frac{m}{2}$

Por tanto, el valor mínimo de h en $\overline{K}$ debe ser menor que $\frac{m}{2}$. Pero en $\overrightarrow{x} \in F_r(K) \rightarrow h(\overrightarrow{x}) = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{y}| = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) - \overrightarrow{y}| \geq |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})| - |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})| = g(x) - |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) - \overrightarrow{y}| > g(x) - \frac{m}{2} \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$

Por lo que el mínimo no puede estar en $F_r(K)$, estará en el interior de K, es decir, $\overrightarrow{a} \in K$

La función h^2 también debe alcanzar su mínimo en $\overrightarrow{a}$.

$h^2 = (\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{y})^2 = \sum_{r=1}^{n} (\overrightarrow{f_r}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{y_r})^2$ y la diferencial de h^2, Dh^2, debe anularse en a:

$Dh^2(\overrightarrow{a}) = \sum_{r=1}^{n} 2 \cdot (\overrightarrow{f_r}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{y_r}) \cdot D\vec{f} = \sum_{r=1}^{n} (\overrightarrow{f_r}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{y_r}) \cdot D\vec{f} = 0$

$$Dh^2(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\overrightarrow{a}) - y_1 \\ \vdots \\ f_n(\overrightarrow{a}) - y_n \end{pmatrix} = 0$$

Siendo la primera matriz la diferencial de f.

$dh^2(\overrightarrow{a})$ se reduce a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(f_1(\overrightarrow{a}) - y_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(f_2(\overrightarrow{a}) - y_2) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(f_n(\overrightarrow{a}) - y_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(f_1(\overrightarrow{a}) - y_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(f_2(\overrightarrow{a}) - y_2) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(f_n(\overrightarrow{a}) - y_n) = 0$$

Cuando tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas igualadas a 0, la solución es

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

En nuestro caso:

$$(f_1(\overrightarrow{a}) - y_1) = \cdots = (f_n(\overrightarrow{a}) - y_n) = 0$$

Es decir:

$$(f_1(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{y}) = 0 \rightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{y}$$

Entonces, como $\overrightarrow{a} \in K$:

$$\overrightarrow{y} \in f(K)$$

$\square$

Teorema 8. Sea $f \in C^1$, $f = (f_1, \cdots, f_n)$: $S \subset \mathbb{R}^n \to f(S)$

Supongamos que $|J_f(x_0)| \neq 0$ en un punto $x_0 \in S$.

Entonces, $\exists r > 0$, $B_r(x_0)$ donde f es biyectiva.

Demostración. Sea $Z = (z_1, \cdots, z_n) \in Rn \cdot n$, donde cada $z_i \in R^n$

Definamos una función real h:

$h : \mathbb{R}^{\cdot n} \to R$ definida de la siguiente manera:

Sea $z \in R^{n \cdot n}$, $h(z) = det[D_j f_i(z_i)] = J_f(Z)$

Siendo $det[D_j f_i(z_i)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z_1) \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(z_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(z_n) \end{pmatrix}$

h es continua, ya que la matriz es continua y su determinante es suma y diferencia de producto de funciones continuas.

Sea $z_0 = (x_0, \cdots, x_0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$h(z_0) = det[D_j f_i(z_i)] = J_f(x_0) \neq 0$

Por tanto, $\exists r > 0$, $B(x_0, r)$ donde $J_f(x_0) \neq 0$ $\forall z_i \in B(x_0, r)$

Falta demostrar que f es biyectiva en ese entorno. Lo haremos por reducción al absurdo. Sea $x, y \in B(x_0, r)$ tal que $x \neq y$ y supongamos que $f(x) = f(y)$.

Como un entorno abierto es convexo, $B(x_0.r)$ es convexo. Como es convexo, el segmento rectilíneo $L(x, y) \subset B(x_0, r)$ y podemos aplicar el Teorema del Valor Medio n-dimensional. Es decir:

$\exists z_i \in L(x, y) \subset B(x_0, r) \ / \ f(y) - f(x) = J_f(z_i) \cdot (y - x)$

Pero, como $f(y) = f(x)$ por hipótesis $\to 0 = f(y) - f(x) = J_f(z_i) \cdot (y - x)$, es decir:

$J_f(z_i) \cdot (y - x) = 0 \to \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) \cdot a_{ik} = 0$, siendo $a_{ik} = D_k f_i(z_i)$

El determinante de este sistema no es cero, ya que $z_i \in B(x_0, r)$. Entonces: $y_k - x_k = 0 \to y_k = x_k$ $\forall k \to x = y$. Contradicción! por tanto f es biyectiva □

2.3. Teoremas de la Función Inversa y de la Función Implícita

Teorema 9. Teorema de la Función Inversa: Sean $S, T)$ abiertos de $\mathbb{R}^n$,$\vec{f} = (f_1, \cdots, f_n) \in C'(S)$, $\vec{f} : S \to T$. Supongamos que el Jacobiano $J_f(x_0) \neq 0$ en algún punto $x_0 \in S$. Entonces existe una función única $\vec{g}$ y dos abiertos $X \subset S$ e $Y \subset T$ tales que:

1) $x_0 \in X$ y $\vec{f}(x_0) \subset Y$

2) $Y = \vec{f}(X)$

3) $\vec{f}$ **es biyectiva en** X

4) $\vec{g}$ **está definida:** $\vec{g} : Y \to X$ **tal que, si** $\vec{f}(x) \in Y \to \vec{g}(\vec{f}(x)) = x \ \forall x \in X$

5) $\vec{g} \in C'$ **en** Y

Demostración. Por simplicidad denotaremos por f y g a $\vec{f}$ y $\vec{g}$ siempre que no se induzca a confusión.

Como $f \in C' \to J_f$ es continuo. Y como $J_f(x_0) \neq 0 \to \exists$ un entorno $N_1(x_0)$ donde $J_f(x) \neq 0 \ \forall x \in N_1(x_0)$.

Por el Teorema 8 existe otro entorno $N(x_0) \subset N_1(x_0)$ donde f es biyectiva. Sea $\overline{K}$ la esfera cerrada de centro x_0, $\overline{K} \subset N(x_0) \subset N_1(x_0)$. Sea K la esfera abierta correspondiente.

Por el Teorema 7 se tiene que $f(K)$ contiene un entorno de $f(x_0)$ al cual denominaremos Y. Sea $X = f^{-1}(Y) \cap K$. Por el Teorema 3 resulta que X es abierto. Por el Teorema 5, $\exists g : f(\overline{K}) \to \overline{K}$, tal que, si $f(x) \in f(\overline{K}) \to g(f(x)) = x \ \forall x \in \overline{K}$. g es continua. Como $X \subset \overline{K}$ e $Y \subset f(\overline{K})$, quedan demostradas las partes 1), 2), 3) y 4).

Definamos, como en el Teorema 8, una función real h:

$$h : \mathbb{R}^{n \cdot n} \to R$$

tal que, si $z \in R^{n \cdot n} \to h(z) = J_f(z)$, con $z = (z_1, \cdots, z_n)$ y $z_i \in R^n$

Entonces, $\exists$ un entorno $N_2(x_0) \ / \ h(z) \neq 0$ si cada $z_i \in N_2(x_0)$. Podemos suponer que $N(x_0) \subset N_2(x_0)$, entonces $\overline{K} \subset N_2(x_0)$ y $h(z) \neq 0$ si $z_i \in \overline{K}$

Para demostrar el punto 5):

Sea $g = (g_1, \cdots, g_n)$. Sea $y \in Y$, y sea el cociente incremental $\frac{[g_k(y+\lambda u_r) - g_k(y)]}{\lambda}$, con $y = (y_1, \cdots, y_r, \cdots, y_n)$ y u_r la base canónica. Como Y es abierto $\to y + \lambda u_r \in Y$ si $|\lambda|$ es suficientemente pequeño. Sea $x = g(y)$ y $x' = g(y + \lambda u_r)$, como g es continua $\to x, x' \in X$. Recordemos que $g = f^{-1}$

$$f_i(x') - f_i(x) = f_i(g(y+\lambda u_r)) - f_i(g(y)) = (y+\lambda_r) - y = (y_1, y_2, \cdots, y_r + \lambda, \cdots, y_n) - (y_1, y_2, \cdots, y_r, \cdots,$$

Pero esto es igual a λ si $i = r$, o igual a 0 si $i \neq r$

Por el Teorema del Valor Medio $\to \frac{f_i(x') - f_i(x)}{\lambda} = J_f(z_i) \cdot \frac{x' - x}{\lambda}$. con $z_i \in L(x, x') \subset K$

$\frac{f_i(x') - f_i(x)}{\lambda}$ es igual a 0 ó 1, depende de si $r \neq i$ o $r = i$.

Esto es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{g_1(y+\lambda u_r) - g_1(y)}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{g_n(y+\lambda u_r) - g_n(y)}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$1 = (\frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_r}{\partial x_n}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{g_1(y+\lambda u_r)-g_1(y)}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{g_n(y+\lambda u_r)-g_n(y)}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$0 = (\frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{g_1(y+\lambda u_r)-g_1(y)}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{g_n(y+\lambda u_r)-g_n(y)}{\lambda} \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{g_1(y+\lambda u_r)-g_1(y)}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{g_n(y+\lambda u_r)-g_n(y)}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estando el 1, único término independiente no nulo en la posición r, y siendo $J_f(z_i) \neq 0$ el sistema tendrá una única solución. Resolviendo mediante la regla de Cramer:

$$\frac{g_i(y+\lambda u_r)-g_i(y)}{\lambda} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots 0 \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots 0 \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}},$$

resulta que el cociente incremental existe y es continuo.

Si $\lambda \to 0$, $x' \to x$ por ser g continua. Por tanto, $z_i \to x$, ya que $z_i \in L(x, x')$. Pero, $\lim_{\lambda \to 0} \frac{g_i(y+\lambda u_r)-g_i(y)}{\lambda} = D_r g_i(y)$. Siendo $D_r g_i(y)$ cada parcial de g.

Como el límite existe, también existe la matiz diferencial $D_r g_i(y)$ y es continua y por tanto, $\to g \in C'$ □

Teorema 10. Teorema de la Función Implícita: Sea $f = (f_1, \cdots, f_n)$ definida en

$S \subset R^{n+k}$.

$$f : S \subset R^{n+k} \to R^n$$

Siendo $f \in C'$ en S. Sea $(x_0; t_0) \in S \subset R^{n+k}$ / $f(x_0; t_0) = 0$ y $J_f(x_0; t_0) \neq 0$. Entonces: $\exists$ un entorno $T_0(t_0) \subset R^k$ y una función $g : T_0 \subset R^k \to R^n$ tal que, si $t_0 \in T_0 \to g(t_0) = x_0$

Cumpliéndose que:

1) $g \in C'$ **en** T_0

2) $g(t_0) = x_0$

3)$f(g(t); t) = 0 \ \forall t \in T_0$

Demostración. Aplicamos el Teorema de la Función Inversa a $F = (F_1, \cdots, F_n; F_{n+1}, \cdots, F_{n+k})$

$$F : S \subset R^{n+k} \to R^{n+k}$$

Si $1 \leq m \leq n \to F_m(x; t) = f_m(x; t)$

Si $1 \leq m \leq k \to F_{m+n}(x; t) = t_m$

Recordemos que los puntos de R^{n+k} tienen la forma $(x; t) = (x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_k)$ Podemos escribir $F = (f; I)$ donde $f = (f_1, \cdots, f_n)$ e I es la función identiad $I(t) = t$ $\forall t \in R^k$

$J_F(x; t) = J_f(x; t)$. Por lo que $J_F(x; t) \neq 0$

$F(x_0; t_0) = (f_1(x_0; t_0), \cdots, f_n(x_0; t_0); t_0, \cdots, t_0) = (0, \cdots, 0; t_0, \cdots, t_0) = (0; t_0)$

Según el Teorema de la Función Inversa, $\exists$ los conjuntos abiertos X e Y / $(x_0; t_0) \in X$ y $(0; t_0) \in Y$, de manera que F es biyectiva en X y que $X = F(Y)$. Además, $\exists$ una función inversa G / $G \in C'$ en Y

$$G : Y \to X$$

definida tal que si $F(x; t) \in Y \to G(F(x; t)) = (x; t)$

Definimos la función vectorial G de la siguiente manera:

$$G = (v; w) = (v_1, \cdots, v_n; w_1, \cdots, w_k)$$

Podemos expresar v y w explícitamente. Si escribimos la ecuación $G(F(x; t)))(x; t)$ en función de v y w:

$$v(F(x; t)) = x$$

$$w(F(x; t)) = t$$

Todo punto $(x; t) \in Y$ puede ser escrito de manera única en la forma:

$$(x; t) = F(x'; t')$$

para algún $(x';t') \in X$, ya que F es biyectiva en X y la inversa $F^{-1}(Y)$ contiene a X. Además, por cómo definimos F: Si

$$F(x';t') = (x;t) \rightarrow t = t'$$

Entonces:

$$v(x;t) = v(F(x';t)) = x'$$

y también:

$$w(x;t) = w(F(x';t)) = t$$

Luego G puede ser descrita así, sea $(x;t) \in Y$:

$$G(x;t) = (x';t)$$

siendo $x' \in R^n \ / \ F(x';t) = (x;t)$, ya que, si:

$$F(x';t) = (x;t) \rightarrow G(x;t) = G(F(x';t)) = (x';t) = (v(x;t);t)$$

Esto implica:

$$F(v(x;t),t) = F(x';t) = (x;t)$$

$\forall (x;t) \in Y$

Entonces, ya podemos definir el conjunto T_0 y la función g del Teorema, sea:

$$T_0 = \{t \in R^k/(0;t) \in Y\}$$

Para cada $t \in t_0$ definimos $g(t) = v(0;t)$. T_0 es abierto, además $g \in C'$ en T_0, porque $G \in C'$ en Y, y los componentes de g son tomados de G.

$$g(t_0) = v(0;t_0) = v(F(x_0;t_0)) = x_0 \rightarrow g(t_0) = x_0$$

Finalmente:

$$F(v(x;t);t) = (x;t) \quad \forall (x;t) \in Y$$

Considerando los componentes R^n de F:

$$f(v(x;t);t) = x$$

Tomando $x = 0$, $\forall t \in T_0$:

$$f(v(0;t);t) = 0$$

Pero $v(0;t) = g(t)$, entonces:

$$f(g(t);t) = 0$$

$\square$

2.4. Espacio Dual

Definición: Sea V un K-espacio vectorial. Se denomina **espacio dual de V**, y se le denota V^*, al k-espacio vectorial:

$$V^* = \{f : V \to K\}.$$

tal que f es una transformación lineal. A los elementos de V^* los llamaremos formas lineales o 1-formas.

Vamos a intentar calcular una base de V^*. Para tal fin, consideremos $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de V. Construyamos n formas lineales, $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$, dando la imagen de cada vector de la base B:

$$\varphi_i : V \to K$$

$$\varphi_i(v_1) = 0$$

$$\varphi_i(v_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_i(v_i) = 1$$

$$\vdots$$

$$\varphi_i(v_n) = 0$$

con $1 \leq i \leq n$.

Por lo que tenemos n aplicaciones lineales tales que $\varphi_i(v_j) = 0$ si $i \neq j$, y $\varphi_i(v_j) = 1$ si $i = j$. Esto lo podemos abreviar de la siguiente forma:

$$\varphi_i(v_j) = \delta_i^j$$

siendo δ_i^j la delta de Kronecker, cuyo valor es 0 cuando $i \neq j$, y 1 cuando $i = j$.

Veamos que $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ es base de V^*. Como tenemos n vectores, y $dim(V^*) = n$, sólo queda ver que son linealmente independientes.

Supongamos que $r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \cdots + r_n\varphi_n = 0$, es decir, $\forall v \in V$:

$$(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \cdots + r_n\varphi_n)(v) = 0$$

Si, por ejemplo, hacemos $v = v_1$, tenemos:

$$(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \cdots + r_n\varphi_n)(v_1) = 0 \rightarrow r_1\varphi_1(v_1) + r_2\varphi_2(v_1) + \cdots + r_n\varphi_n(v_1) = 0$$

sólo $\varphi_1(v_1) \neq 0$, entonces, si $r_1\varphi_1(v_1) = 0$ y $\varphi_1(v_1) = 1$, significa que $r_1 = 0$.

Haciendo lo mismo para cada componente de la base de B, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, tenemos que $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$. Por lo que $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ es base de V^*, y la llamamos **base dual** de B.

Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V y sea $B^* = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ su base dual:

- Dado $v \in V$, podemos escribir $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = a_1v_1 + \cdots a_nv_n$ con $a_i \in K$. Entonces, para cada $1 \leq j \leq n$,

$$\varphi_1(v) = \varphi_1(a_1v_1 + \cdots a_nv_n) = a_1\varphi_1(v_1) + \cdots a_n\varphi_1(v_n) = a_1$$

$$\varphi_2(v) = \varphi_2(a_1v_1 + \cdots a_nv_n) = a_1\varphi_2(v_1) + \cdots a_n\varphi_2(v_n) = a_2$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(v) = \varphi_n(a_1v_1 + \cdots a_nv_n) = a_1\varphi_n(v_1) + \cdots a_n\varphi_n(v_n) = a_n$$

  Luego $v_B = (\varphi_1(v), \cdots, \varphi_n(v)) \rightarrow v_B = (a_1, \cdots, a_n)$

- Sea $\varphi \in V^*$; $\varphi = \beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_n\varphi_n$. Entonces, $\forall\ 1 \leq j \leq n$:

$$\varphi(v_1) = (\beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_n\varphi_n)(v_1) = \beta_1\varphi_1(v_1) + \cdots + \beta_n\varphi_n(v_1) = \beta_1$$

$$\varphi(v_2) = (\beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_n\varphi_n)(v_2) = \beta_1\varphi_1(v_2) + \cdots + \beta_n\varphi_n(v_2) = \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\varphi(v_n) = (\beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_n\varphi_n)(v_n) = \beta_1\varphi_1(v_n) + \cdots + \beta_n\varphi_n(v_n) = \beta_n$$

  Luego $\varphi_{B^*} = (\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$

Proposición: Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sea V^* su espacio dual. Sea $B_1 = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ una base de V^*. Entonces existe una única base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de V que satisface $B^* = B_1$.

Demostración. Sea $B_2 = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base de V y B_2^* su base dual. Para cada $1 \leq i \leq n$, se tiene que:

$$(\varphi_1)_{B_2^*} = (\varphi_1(w_1), \cdots, \varphi_1(w_n))$$

$$(\varphi_2)_{B_2^*} = (\varphi_2(w_1), \cdots, \varphi_2(w_n))$$

$$\vdots$$

$$(\varphi_n)_{B_2^*} = (\varphi_n(w_1), \cdots, \varphi_n(w_n))$$

Como $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces se tiene que $\{(\varphi_1)_{B_2^*}, (\varphi_2)_{B_2^*}, \cdots, (\varphi_n)_{B_2^*}\}$ también es linealmente independiente. Esto implica que la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) \cdots \varphi_1(w_n) \\ \varphi_2(w_1) \cdots \varphi_2(w_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(w_1) \cdots \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Ya que sus filas son linealmente independientes.

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz inversa de M, entonces $M \cdot A = I$, siendo I la matriz identidad. Entonces:

$$\delta_{ij} = (M \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \cdot A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i(w_k) \cdot a_{kj} = \varphi_i(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot w_k)$$

Para cada $1 \leq j \leq n$, $v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot w_k$, es decir:

$$v_1 = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \cdots + a_{n1} \cdot w_n$$

$$v_2 = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + \cdots + a_{n2} \cdot w_n$$

$$\vdots$$

$$v_n = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \cdots + a_{nn} \cdot w_n$$

Entonces, está claro que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ Para acabar de demostrar que es $\{v_1, \cdots, v_n\}$ base, como tiene $dim = n = dim(V) = dim(V^*)$ falta ver que este conjunto es linealmente independiente. Para ello, si $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n = 0$, tenemos que:

$$0 = \varphi_1(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j) = a_1\varphi_1(v_1) + \cdots a_n\varphi_1(v_n) = a_1 \to a_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$0 = \varphi_n(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j) = a_1\varphi_n(v_1) + \cdots a_n\varphi_n(v_n) = a_n \to a_n = 0$$

Por lo que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es linealmente independiente y es base. Falta probar la unicidad.

Supongamos que $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{u_1, \cdots, u_n\}$ son dos bases de V tales que:

$$B^* = (B')^* = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$$

entonces, $\forall\ 1 \leq i \leq n$,

$$(u_i)_B = (\varphi_1(u_i), \cdots, \varphi_n(u_i)) = (\delta_{1,i}, \ldots, \delta_{i,i}, \ldots, \delta_{n,i}) = (v_i)_B$$

entonces $u_i = v_i$, y queda probada la proposición. □

Definición 2. *Sea V un K-espacio vectorial y sea S un subespacio de V. Llamamos* **anulador de** S *al conjunto:*

$$S^o = \{f \in V^*/f(s) = 0\ \ \forall s \in S\} = \{f \in V^*/S \subseteq Kef(f)\}$$

obviamente S^o es un subespacio de V^*, ya que:

- $0 \in S^o$
- *Si $f, g \in S^o$, entonces $f(s) = 0$ y $g(s) = 0\ \forall\ s \in S$. Entonces $(f+g)(s) = f(s) + g(s) = 0\ \forall\ s \in S$. Luego, $f + g \in S^o$*
- *Si $\lambda \in K$ y $f \in S^o$, entonces $(\lambda \cdot f)(s) = \lambda \cdot f(s) = \lambda \cdot 0 = 0$, $\forall\ s \in S$. Luego $\lambda \cdot f \in S^o$*

Proposición: Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea S un subespacio de V. Entonces, $dim(S^o) = n - dim(S)$

Demostración. Sea $\{v_1, \cdots, v_r\}$ una base de S, y sean $v_{r+1}, \cdots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ es una base de V. Sea $B^* = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \cdots \varphi_n\} \subset V^*$ la base dual de B. Entonces, $\forall\ r+1 \leq i \leq n$, tenemos que:

$$\varphi_{r+1}(v_1) = \varphi_{r+1}(v_2) = \cdots = \varphi_{r+1}(v_r) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(v_1) = \varphi_n(v_2) = \cdots = \varphi_n(v_r) = 0$$

Como φ_i se anula sobre todo el subespacio $S \rightarrow \{\varphi_{r+1}, \cdots \varphi_n\} \subseteq S^o$. Esto implica que $\{\varphi_{r+1}, \cdots \varphi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, por ser parte de una base. Falta ver que también es un sistema generador.

Sea $g \in S^o$, como B^* es una base de $V^* \rightarrow \exists\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ tales que:

$$g = \alpha_1 \cdot \varphi_1 + \alpha_2 \cdot \varphi_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi_n$$

Pero, $\alpha_i = g(v_i)$, ya que:

$$g(v_i) = (\alpha_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + \alpha_i \cdot \varphi_i + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi_n)(v_i) = \alpha_1 \cdot \varphi_1(v_i) + \cdots + \alpha_i \cdot \varphi_i(v_i) + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi_n(v_i) = \alpha_i$$

Además, como $g \in S^o$ y $\{v_1, \cdots, v_r\}$ es una base de $S \rightarrow g(v_i) = 0\ \forall 1 \leq i \leq r$. Por tanto, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ y, entonces, $g \in <\varphi_{r+1}, \cdots, \varphi_n>$. Por lo que $\{\varphi_{r+1}, \cdots \varphi_n\}$ es una base de S^o, de donde:

$$dim(S) + dim(S^o) = n$$

□

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Su **Espacio Bidual** V^{**} consiste en los funcionales lineales $V^* \rightarrow K$, y las operaciones lineales en V^{**} están definidas punto a punto.

Sea $a \in V$. Denotemos por Θ_a a la aplicación $\Theta_a : V^* \rightarrow K$ definida tal que, si $\varphi \in V^*$, entonces:

$$\Theta_a(\varphi) := \varphi(a)$$

Para ver que $\Theta_a \in V^{**}$ basta probar que Θ es una aplicación aditiva y homogénea:

- Aditividad: sean $\varphi, \phi \in V^*$, entonces:

$$\Theta_a(\varphi + \phi) = (\varphi + \phi)(a) = \varphi(a) + \phi(a) = \Theta_a(\varphi) + \Theta_a(\phi)$$

- Homogeneidad: Sea $\varphi \in V^*$ y $\lambda \in K$. Entonces:

$$\Theta_a(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)(a) = \lambda\varphi(a) = \lambda\Theta_a(\varphi)$$

Definición: Sean $(E, +, \cdot)$ y $(F, +, \cdot)$ dos espacios vectoriales de dimensión n, m respectivamente sobre K. Sea $f : E \to F$ homomorfismo de espacios vectoriales. Entonces, definimos la **aplicación traspuesta de** f a:

$$f^* = f^T : F^* \to E^*$$

donde, si $g \in F^* \to f^T(g)$, es la aplicación:

$$f^T(g) : E \to K$$

donde, si $v \in E \to f^T(g)(v) = g(f(v))$. Siengo g lineal y $f(v) \in F$

f^T es homomorfismo de espacios vectoriales, porque, si $g, h \in F^*$ y $\alpha, \beta \in K$:

$$f^T(\alpha \cdot g + \beta \cdot h) = (\alpha \cdot g + \beta \cdot h)(f(v)) = \alpha \cdot g(f(v)) + \beta \cdot h(f(v)) = \alpha \cdot f^T(g) \cdot v + \beta \cdot f^T(h) \cdot v$$

Es fácil probar que:

- A es la matriz de f en la base B de E, B' de F
- A^T es la matriz de f^T en la base $(B')^*$ de F^*, B* de E

2.5. Relación Binaria de Equivalencia y Conjunto Cociente

Una relación binaria es una relación de equivalencia si y solo si es reflexiva, simétrica y transitiva. Es decir, si A es un conjunto, entonces R es una RBE si cumple las siguientes propiedades:

Reflexiva: $\forall x \in A$, $(x, x) \in R$

Simétrica: $(x, y) \in R \to (y, x) \in R$

Transitiva: $(x, y), (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

La RBE define un conjunto de clases. De modo que la clase:

$$[x] = \{y \in A/x \sim y\}$$

Sea R una relación binaria de equivalencia en el conjunto A, definimos al **conjunto cociente** por la relación R al conjunto:

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}$$

También se le conoce como **conjunto de clases**, ya que este conjunto tendrá como elementos a las clases de equivalencia de una relación. Dado $y \in [x]$, se dice que y es un representante de la clase $[x]$.

Capítulo 3

VARIEDADES DIFERENCIALES

3.1. Introducción

En muchos problemas de la geometría, mecánica, etc, existe un subconjunto de R^n como región en la que se puede variar la posición de un punto, el cuál está definido por ciertas ecuaciones. Las coordenadas que nos definen la configuración de un sistema, deben de satisfacer ciertas ecuaciones. A modo de ejemplo, el movimiento de una varilla rígida de longitud l como extremo fijo en $(x_0,\, y_0,\, z_0)$, puede tener otro extremo en:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = l^2$$

Por tanto, sólo serán admisibles como soluciones del problema aquellas que, además de satisfacer las ecuaciones de Lagrange, satisfagan también la ecuación anterior.

En general, las coordenadas $x_1, \cdots, x_n$ que definen un problema mecánico o de otro tipo deben de cumplir m ecuaciones:

$$F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

$$F_2(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$F_m(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

siendo $m < n$.

Si estas funciones $F_k : \mathbb{R}^n \to R^m$ son diferenciables, nos definirán una **variedad diferenciable** en R^n cuando el rango de la diferencial de $\overrightarrow{F}$ es igual a m en todos los puntos de su dominio.

Si $F_k(\vec{x_0}) = 0 \ \forall k = 1, \cdots, m$, entonces:

$$rango(D\vec{F}(\vec{x_0})) = m$$

en un entorno U de $\vec{x_0}$, $1 \leq$.

Más en general, existe σ, una permutación de S_m de modo que i $l = m - n$ se tiene que

$$det(\frac{\partial F_k}{x_{\sigma(i)}}) \neq 0$$

con $i = 1, \cdots, n$. Por el Teorema de la Función Implícita:

$$x_{\sigma(1)} = x_{\sigma(l)}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l)})$$

$$\vdots$$

$$x_{\sigma(n} = x_{\sigma(m1}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l)})$$

Esto define una aplicación $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ donde Ues un abierto en $\mathbb{R}^l$ dado por el teorema de a función implícita de modo que $\phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l)}) = (x_1, \ldots, x_m) \in M$ para un entorno de cada punto $\vec{x_0} \in M$.

Al conjunto de variables independientes $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l)})$ lo llamaremos carta loca de M centrada en el punto $\vec{x_0}$ de M.

Por tanto, realmente nos basta, en el entorno de cada punto, con $l = n - m$ coordenadas independientes para definir el sistema.

Si se tiene un dominio abierto W en $\mathbb{R}^l$ relacionado con el abierto $U \subset \mathbb{R}^l$ mediante un función biyectiva y diferenciable $\vec{g}$, se tiene otra carta local entorno a $\vec{x_0} \in M$ dada por $(W, \phi \circ \vec{g})$.

En lo sucesivo estudiaremos de un modo más abstracto desde un punto de vista topológico el concepto de variedad diferenciable.

Para la confección de este capítulo utilizaremos [5], [2] y [4].

3.2. Variedades

Para definir desde un punto de vista más abstracto del concepto de variedad diferenciable procederemos como sigue

Definición 3. *Sea M un espacio topológico. Una carta local en $m \in M$ es una aplicación $F : U \to W$, siendo U abierto en M y W abierto de $\mathbb{R}^n$, tal que F es un homeomorfismo (F biyectiva; F y F^{-1} continuas). Diremos que M es una variedad n-dimensional.*

Al abierto U se le suele denominar como $\operatorname{def}(F)$ y a W como $\operatorname{im}(F)$. A la aplicación F se le denomina carta local en la variedad M. Cuando denotemos una carta simplemente por F debe ser tenido en cuenta que F lleva asociados los abiertos $\operatorname{def} F$ e $\operatorname{im} F$)

Definición 4. *Sea M un espacio topológico. Una estructura diferenciable de dimensión n y clase C^k en M (o subatlas de dimensión n y clase C^k) es una familia de cartas $\{F_i\}_{i \in I}$ tal que:*

1) $\bigcup_{i \in I} def(F_i) = M$

2) $\forall\, i, j \in I$ *con* $\operatorname{def} F_i \cap \operatorname{def} F_j \neq \emptyset$ *se verifica*

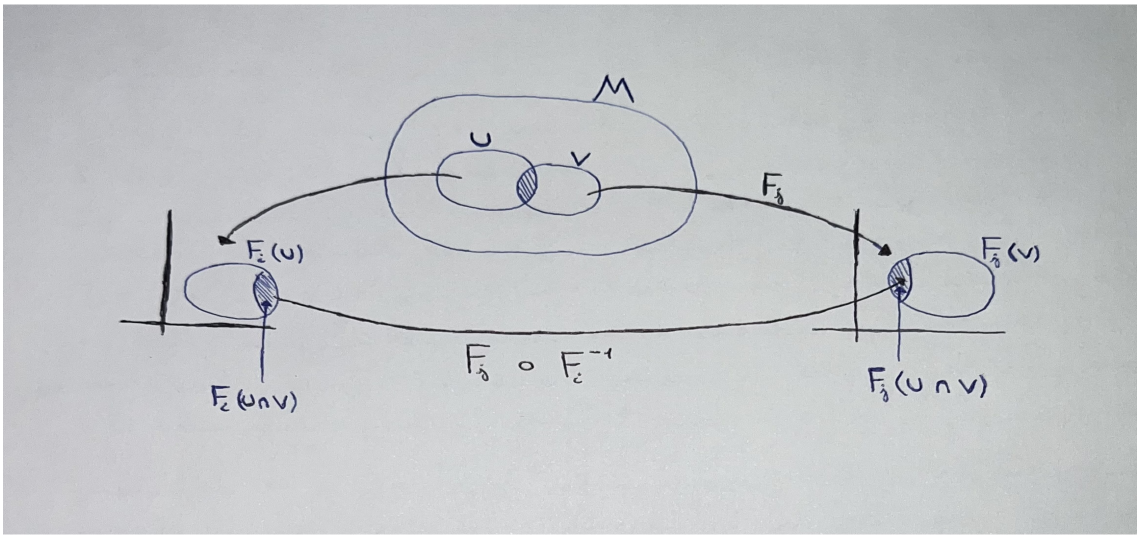
$$F_j \circ F_i^{-1} : F_i(\operatorname{def} F_i \cap \operatorname{def} F_j) \to F_j(\operatorname{def} F_i \cap \operatorname{def} F_j),$$

es una aplicación de clase C^k biyectiva.

A la segunda propiedad se la conoce como Condición de Compatibilidad de Cartas. (En la siguiente figura, $U = def(F_i)$ y $V = def(F_j)$).

Si $k = 0$ la variedad se denomina variedad topológica.

Nota: Mientras no se exprese lo contrario, se trabajará con variedades de clase C^∞



Definición 5. *Sea $\{F_i\}_{i\in F}$, $\{G_j\}_{j\in J}$ dos subatlas en M, diremos ambos subatlas son coptibles y lo denotaremos por que $\{F_i\} \sim \{G_j\}$ si su unión es un subatlas en M. Esta relación es de equivalencia.*

Se sobreentiende que estamos hablando de subatlas de la misa dimensión y de la misma clase.

Definición 6. *Un atlas en un subatlas maximal, o equivalentemente una clase de equivalencia de subatlas .*

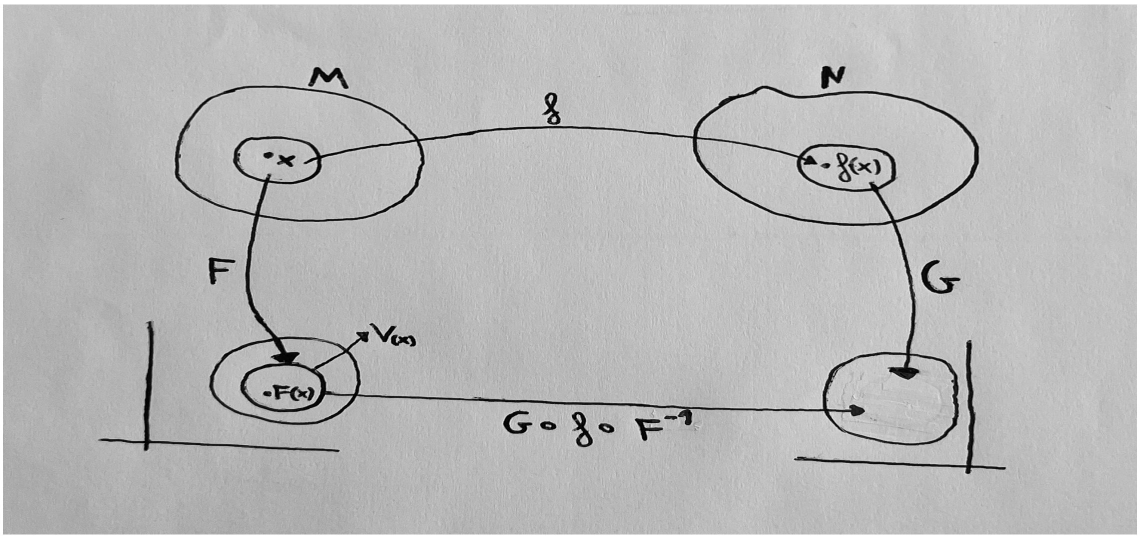
Definición 7. *Una* **variedad diferenciable** *de dimensión n y clase C^k es un par formado por un espacio topológico M y un atlas de clase C^k y dimensión n.*

Definición 8. *Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ una aplicación. Diremos que f es una aplicación diferenciable de clase C^k si $\forall x \in M$ y $\forall$ F carta de M, G carta de N con $f(x) \in G$, se verifica que:*

$$G \circ f \circ F^{-1} : im(F) \cap V_{(x)} \to im(G)$$

es de clase C^k, siendo $V_{(x)}$ entorno de $F(x)$

Si $dim(N) = dim(M)$ y además $f : M \to N$ y $f^{-1} : N \to M$ son diferenciables, decimos que f es un **difeomorfismo** *y que M y N son variedades difeomorfas.*



Definición 9. *Sea M una variedad diferenciable y $\{F_i\}_{i\in I}$ atlas de M. Sea $N \subset M$, diremos que N es una* **subvariedad de M** *si $\{F'_i\}_{i\in I} = \{F_i \cap N\}_{i\in I}$ forma un atlas de N.*

Nota: Esta definición no es la mas general de subvariedad, pero para este trabajo es suficiente.

Teorema 11. Toda variedad es subvariedad de R^N, con N lo suficientemente grande.

No se incluye la demostración, por ser excesivamente larga y compleja, lo cual excede en mucho los objetivos de este trabajo.

3.3. Variedades embebidas

Decimos que M es una subvariedad k-dimensional embebida de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ si en un entorno $U \in R^n$ de cada punto $m \in M$ hay $n - k$ funciones:

$$f_1 : U \to \mathbb{R}$$

$$f_2 : U \to \mathbb{R}$$

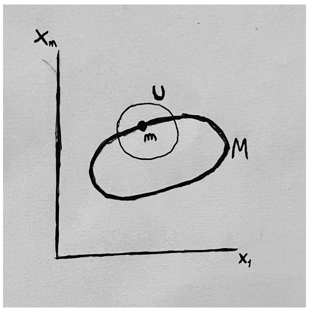
$$\vdots$$

$$f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$$

tal que la intersección de U con $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ viene dada por:

$$\vec{x} \in \bigcap_{i=1}^{n-k} f_i^{-1}$$

y los vectores gradientes de cada función $(grad(f_i))$ en x son linealmente independientes.



Se puede demostrar que cada variedad puede ser embebida en algún espacio euclídeo.

Nota: Como norma general denotaremos con F, G, etc, a las cartas y a f, g a las aplicaciones entre variedades. Así mismo, denotaremos por $\vec{\nabla} f_i = df_i$ (aplicación dferencial).

En las variedades embebidas, sea $\overrightarrow{f} : R^n \to R^{n-k}$, la diferencial de esta funcíon vectorial es:

$$D\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_{n-k} \end{pmatrix}$$

cuyo rango es $n - k$.

$\exists x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_{n-k}}$ de modo que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_{n-k}}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}}, \cdots, \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_{n-k}}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{i_2}}, \cdots, \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{i_{n-k}}} \end{pmatrix}$$

tiene rango $n-k$

Por el Teorema de la Función Implícita:

$$x_{i_1} = x_{i_1}(x_{i_{n-k+1}}, \ldots, x_{i_n})$$

$$x_{i_2} = x_{i_2}(x_{i_{n-k+1}}, \ldots, x_{i_n})$$

$$\vdots$$

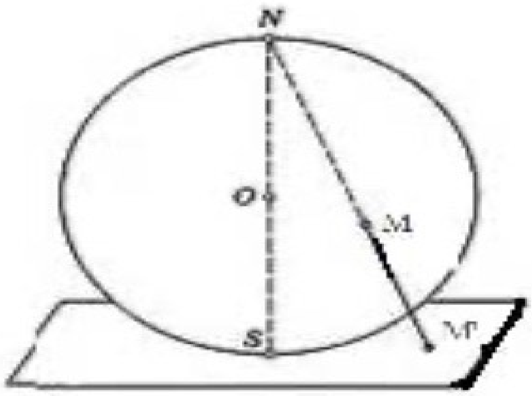
$$x_{i_{n-k}} = x_{i_{n-k}}(x_{i_{n-k+1}}, \ldots, x_{i_{n-k}})$$

siendo $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_{n-k}}$ las coordenadas de una carta F en el abierto de m.

$$def(F) = U \cap M$$

3.4. Ejemplos

- Sea S^2 la esfera unitaria con ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. Sea $N=(0,0,1)$ un punto sobre ella (el polo norte) y el punto S es el polo sur. Sea $Z=-1$ el plano tangente a la esfera en el punto S. Sea NM la recta determinada por los puntos $M \in S^2$ y N. Como se ve en la siguiente imagen, M' es el punto de intersección de la recta NM con el plano π. Diremos que M' es la **proyección estereográfica** del punto $M \in S^2$ al plano $Z=-1$.



Podemos definir la recta NM de la siguiente manera:

$$NM = \{(0,0,1) + t((x,y,z) - (0,0,1)) : t \in R\}$$

por lo que debemos encontrar $t \in R$ tal que la tercera coordenada sea -1. Un punto de la recta NM tiene la forma $(t \cdot x, t \cdot y, t \cdot (z-1)+1)$, donde, si igualamos la tercera coordenada a -1:

$$t \cdot (z-1)+1 = -1 \rightarrow t(z-1) = -2 \rightarrow t = \frac{2}{1-z}$$

por lo que, la aplicación que manda cualquier punto de la esfera (menos el polo norte) al plano $Z = -1 \in R^2$ podemos definirla así:

$$F_1 : S^2 \setminus N \rightarrow R^2 :$$

tal que, $F_1(x,y,z) = (\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z})$. Por lo que F_1 está bien definida. Demostremos que es inyectiva. Sean (x,y,z) y $(u,v,w) \in S^2 \setminus N$, entonces:

$$F_1(x,y,z) = F_1(u,v,w) \rightarrow \frac{2x}{1-z} = \frac{2u}{1-w} \ \ y \ \ \frac{2y}{1-z} = \frac{2v}{1-w}$$

pero, $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $u^2+v^2+w^2 = 1$, lo que implica que:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+w}{1-w}$$

con lo que, al desarrollar, nos queda que $z = w$, lo que implica que $x = u$ y $y = v$. Entonces F_1 es inyectiva. Veamos que también es sobreyectiva. En efecto, para un punto (x,y) del plano, lo consideramos como $(x,y,-1)$ y escribimos la recta que lo une con N de esta forma:

$$NM' = \{(0,0,1) + s((x,y,-1)-(0,0,1)) : s \in R\}$$

de donde un punto de NM' tiene la forma $(s \cdot x, s \cdot y, 1-2s)$. Un punto pertenece a la esfera si y solo si:

$$(sx)^2 + (sy)^2 + (1-2s)^2 = 1$$

y esto pasa para $s = \frac{4}{x^2+y^2+4}$. Por lo que:

$$F_1^{-1} : R^2 \rightarrow S^2$$

si $(x,y) \in R^2$, entonces $F_1^{-1}(x,y) = (\frac{4x}{x^2+y^2+4}, \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4})$ es la inversa deseada. Por lo que F_1 es una aplicación biyectiva. Y, como F_1 y F_1^{-1} son continuas, la proyección estereográfica es un **homeomorfismo**, es decir, es una carta de la esfera.

Siguiendo un procedimiento similar pero calculando la proyección estereográfica desde el polo sur, obtenemos que F_2 también es una carta de la esfera y que $\{F_1, F_2\}$ forma un subatlas de S^2, ya que cumplen la condición de compatibilidad de cartas.

Capítulo 4

ESPACIO TANGENTE Y COTANGENTE

.

4.1. Introducción

A continuación, veremos que, si M es una variedad diferenciable de dimensión n y clase k, con $k > 0$, es posible encontrar en cada punto $m \in M$, un espacio vectorial real de dimensión n llamado **espacio tangente a M en m**. Al mismo tiempo, podemos encontrar el **espacio cotangente**, que es el espacio dual del espacio tangente.

Este capítulo lo abordaremos a partir de [5], [2] y [4].

4.2. Espacio tangente

Definición 10. *Sea M una variedad diferenciable. Sea $m \in M$. Representamos por $\Gamma(M, m)$ al conjunto de curvas diferenciables:*

$$\sigma : I_\sigma = \,]-a, a[\; \rightarrow \; M$$

tales que $\sigma(0) = m$.

En $\Gamma(M, m)$ definimos la relación $\sim$ como:

$$\alpha \sim \beta \longleftrightarrow \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \beta)}{dt}(0)$$

con α, $\beta \in \Gamma(M, m)$ y $\forall f : M \to R$ diferenciable. Esta relación es una relación binaria de equivalencia. Sea $M_m = \frac{\Gamma(M,m)}{\sim}$ el conjunto cociente (también representado como $T_m M$). A este conjunto lo llamaremos **espacio tangente a** M **en** m*. Sea $p : \Gamma(M, m) \to M_m$ la proyección natural que aplica cada curva $\sigma \in \Gamma(M, m)$ en su clase de equivalencia. Sea $v = p(\sigma) \in M_m$; $f : U \to R$ (U entorno abierto de m en M), definimos:*

$$v(f) = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt}(0).$$

A $v(f)$ se le denomina acción de v sobre f en m. Evidentemente, se tiene:

1) $v(a \cdot f) = a \cdot v(f)$

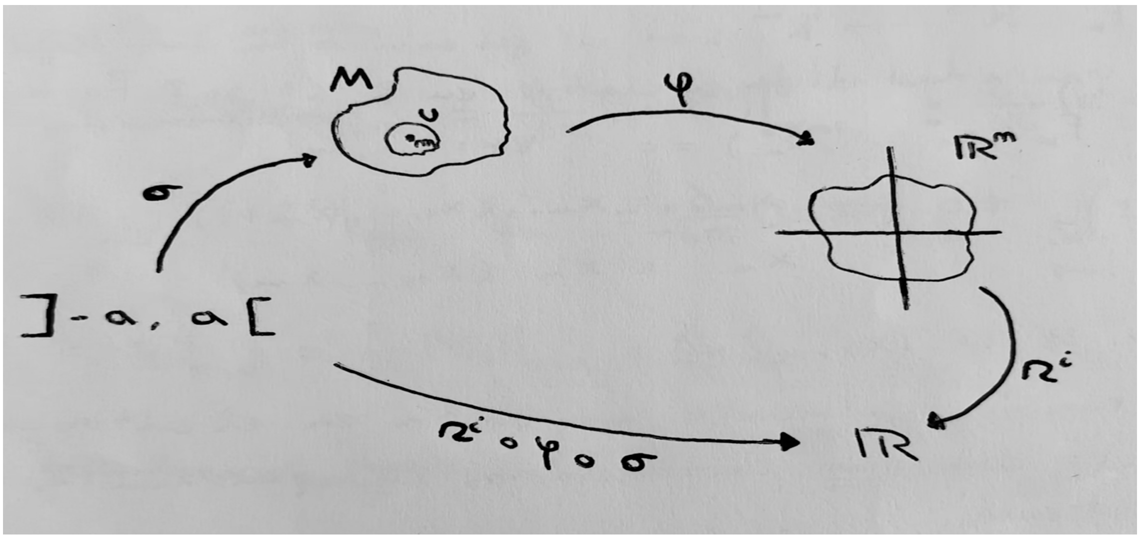
2) $v(f + g) = v(f) + v(g)$

3) $v(f \cdot g) = \frac{d[(f \cdot g) \circ \sigma]}{dt}(0) = \frac{d[(f \circ \sigma) \cdot (g \circ \sigma)]}{dt}(0) = (g \circ \sigma)(0) \cdot v(f) + (f \circ \sigma)(0) \cdot v(g)$
$= g(m) \cdot v(f) + f(m) \cdot v(g)$

v es por tanto una **derivación** *en el álgebra de funciones diferenciales en U.*

Teorema 12. El espacio tangente $T_m M$ es un espacio vectorial de dimensión igual a la dimensión de la vaiedad M.

Demostración. Un vector $v \in T_m M$ queda totalmente determinado por su acción sobre las funciones diferenciables definidas en entornos de m. Sean $a, b \in R$; $v, w \in T_m M$ $v = p(\alpha)$; $w = p(\beta)$, con α, $\beta \in \Gamma(M, m)$.



Sea φ una carta de M centrada en un $\varphi(m) = 0$. Llamaremos **ecuaciones de** $\alpha : I \to M$ **en esta carta** a las funciones:

$$\alpha^i(t) = r^i \circ \varphi \circ \alpha(t) = \varphi^i \circ \alpha(t)$$

$$\alpha(t) = \varphi^{-1}(r^1 \circ \varphi \circ \alpha, \cdots, r^n \circ \varphi \circ \alpha) = \varphi^{-1}(\varphi^1 \circ \alpha, \cdots, \varphi^n \circ \alpha) = \varphi^{-1}(\alpha^1(t), \cdots, \alpha^n(t))$$

siendo r^i = i-ésima proyección de R^n sobre R.

Sea $\gamma \in \Gamma(M, m)$; y sean $a, b \in R$, entonces:

$$\gamma^i = a \cdot \alpha^i + b \cdot \beta^i \to \gamma(t) = \varphi^{-1}(\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$$

es diferenciable. Por otra parte,

$$\gamma(0) = \varphi^{-1}(a \cdot \alpha^1(0) + b \cdot \beta^1(0), \cdots, a \cdot \alpha^n(0) + b \cdot \beta^n(0)) = \varphi^{-1}(0) = m$$

por lo que $\gamma \in \Gamma(M, m)$.

Sea $f : U \subset M \to R$ diferenciable, $m \in U$.

$$p(\gamma)(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(\gamma(0))) = \frac{d(r^i \circ \varphi \circ (a \cdot \alpha + b \cdot \beta))}{dt}(0) =$$

$$a \cdot (\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(0) \cdot \frac{d(r^i \circ \varphi \circ \alpha)}{dt}(0)) + b \cdot (\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(0) \cdot \frac{d(r^i \circ \varphi \circ \beta)}{dt}(0)) =$$

$$a \cdot (\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0)) + b \cdot (\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0)) = a \cdot v(f) + b \cdot w(f) = a \cdot p(\alpha) + b \cdot p(\beta)$$

Como la suma de vectores tangentes está definida y también el producto por un escalar, por tanto T_mM **tiene estructura de Espacio Vectorial** □

4.2.1. Base de T_mM

Teorema 13. *Sea M variedad diferenciable, con $m \in M$. Sea φ carta y sean las curvas $\tau_j \in \Gamma(M, m)$ $\forall$ $1 \leq j \leq n$. Estas curvas constituyen una base de T_mM*

Demostración. Dada la carta φ, consideremos las curvas $\tau_j \in \Gamma(M, m)$ $\forall$ $1 \leq j \leq n$, dadas por las ecuaciones $(r^i \circ \varphi \circ \tau)(t) = (\tau^i_j)(t) = \delta^i_j \cdot t$. Es decir:

$$\varphi(\tau_1)(t) = (t, 0, \cdots, 0)$$

$$\varphi(\tau_2)(t) = (0, t, \cdots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\varphi(\tau_n)(t) = (0, 0, \cdots, t)$$

Sea $\alpha \in \Gamma(M, m) \to$ Veamos que $\{p(\tau_1), \cdots, p(\tau_n)\}$ es una base de T_mM.

Sea $f : M \to R$ diferenciable, entonces:

$$p(\tau_j)(f) = \frac{d(f \circ \tau_j)}{dt}(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(m)) \cdot \frac{d(r^i \circ \varphi \circ \tau_j)}{dt}(0) =$$

Pero como $\frac{d(r^i \circ \varphi \circ \tau_j)}{dt}(0) = \frac{d\tau_j}{dt}(0) = \frac{d(\delta^i_j \cdot t)}{dt}(0) = \delta^i_j$

$$p(\tau_j)(f) = \frac{d(f \circ \tau_j)}{dt}(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(m)) \cdot \frac{d(r^i \circ \varphi \circ \tau_j)}{dt}(0) =$$

$$\frac{d(f \circ \varphi^{-1})}{dr_i}(\varphi(m)) \cdot \delta^i_j = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(m))$$

Consideremos la combinación lineal: $\sum_{i=1}^n v(\varphi^i) \cdot p(\tau_i)$ con $v = p(\alpha)$ para algún $\alpha \in \Gamma(M, m)$.

Entonces:

$$(\sum_{i=1}^n v(\varphi^i) \cdot p(\tau_i))(f) = \sum_{i=1}^n v(\varphi^i) \cdot p(\tau_i)(f) = \sum_{i=1}^n \frac{d(\varphi^i \circ \alpha)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(m)) =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(r^i \circ \varphi \circ \alpha)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(m)) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) = v(f)$$

Tenemos que $v = \sum_{i=1}^n v(\varphi^i) p(\tau_i)$, es decir, los vectores $p(\tau_i) \in T_mM$ forman un **sistema generador** de T_mM

Veamos que, además, son Linealmente Independientes.

Si existe una combinación lineal tal que $\lambda^i \cdot p(\tau_i) = 0 \to \forall j, 1 < j < n$

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda^i \cdot p(\tau_i) \cdot \varphi^j = \sum_{i=1}^n \lambda^i \cdot \frac{d(\varphi^j \circ \tau_i)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \cdot \frac{d.(\delta^j_i \cdot t)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \cdot \delta^j_i = \lambda^j$$

Por lo que $\lambda^j = 0$, $\forall j, 1 < j < n$. Por tanto $p(\tau_i)$ son Linealmente Independientes y:

$$\{p(\tau_1), p(\tau_2), \cdots, p(\tau_n)\}$$

es una base de T_mM y $dim(T_mM) = n = dim(M)$. □

Nota: Dada una carta F de coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$, denotaremos por abuso de lenguaje y practicidad, $p(t_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$, pues $p(t_i)f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(m)$ (entendiendo que f está representada en la carta F, esto es por $f \circ F^{-1}$)

4.2.2. Cambio de base en T_mM

Teorema 14. (Cambio de base) Sean F, G dos cartas en M con $m \in def(F)$ y $m \in def(G)$. Sea $F = (x_1, \cdots, x_n)$ y $G = (y_1, \cdots, y_n)$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Demostración. Aplicamos la igualdad anterior sobre cada una de las componentes $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, de donde resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(y_k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|_m \delta_{jk} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

por lo que queda demostrado el teorema. □

4.3. Espacio cotangente

Llamamos espacio cotangente a M en m al espacio dual de T_mM, y a sus elementos los llamamos 1-formas. El espacio cotangente lo solemos representar por T_m^*M ó M_m^*.

Sea:

$$f : M \to R$$

una función diferenciable.

Definición 11. *Llamaremos diferencial de f en m a la aplicación $d_mf \in T_m^*M$:*

$$(d_mf)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f \circ F^{-1}}{\partial x_i} \cdot v_i = (\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(m))f = v(f)$$

$$(d_m f)(a\cdot v + b\cdot w)(f) = a\cdot d_m f(V) + b\cdot d_m f(w)$$

por lo que esta aplicación es lineal..

Dada una carta de coordenadas x^i, $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m$ forma una base de T_mM. Su base dual es $d_m x^i$, ya que:

$$d_m x^i(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

4.3.1. Cambio de base en T^*_mM

Sea otra carta de coordenadas y^i, entonces $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_m$ forma otra base. Por lo que $d_m y^i$ son bases de T_mM y T^*_mM. Tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m = \sum_j a^j_i \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_m$$

entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m \cdot y^r = \sum_j a^r_i \frac{\partial y^r}{\partial y^j}\Big|_m = a^r_i = \frac{\partial y^r}{\partial x^i}\Big|_m \to \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_m \cdot \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_m$$

Análogamente se comprueba que

$$d_m x^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big|_m \cdot d_m y^j$$

.

Capítulo 5

FIBRADO TANGENTE Y COTANGENTE

.

5.1. Introducción

A continuación vamos a definir, a partir de los espacios tangente y cotangente, dos variedades: el fibrado tangente (TM) y el fibrado cotangente (T^*M), los cuales son de gran interés en desarrollos posteriores.

Las principales fuentes de este capítulo son [5], [2] y [4].

5.2. El fibrado tangente

Sea M una variedad diferenciable, consideremos los conjuntos $TM = \bigcup\limits_{m \in M} T_m M$ y $T^*M = \bigcup\limits_{m \in M} T_m^* M$. Sea $v_m \in T_m M$, definimos la aplicación:

$$\pi : TM \to M$$

donde, dado $v_m \in TM$, se tiene que $\pi(v_m) = m$. Además π es una aplicación suprayectiva.

Sea $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ un atlas de M. En TM, definimos $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de modo que:

def $(\phi_i) = \pi^{-1}(\text{def}(\varphi_i))$.

$$\phi_i : def(\phi_i) \to \mathbb{R}^{2n}$$

donde, si $v_m \in def(\phi_i)$, se define $\phi_i(v_m) = (\varphi_i(m), d_m x_i^j(v_m))$. Siendo x_i^j la j-ésima función coordenada de la carta φ_i.

$$\bigcup_{i\in I} def(\phi_i) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(def(\varphi_i)) = \pi^{-1}(\bigcup_{i\in I} def(\varphi_i)) = \pi^{-1}(M) = TM$$

ϕ_i es una biyección de def(ϕ_i) en el abierto im(φ_i) $\times$ R^n. Ya que, ϕ_i es inyectiva, pues φ_i lo es y $d_m x_i^j$ es base de $T_m^* M$, además, ϕ_i es suprayectiva, pues $(t^i, p^j) \in \varphi_i(def(\varphi_i)) \times R^n$. Entonces:

$$\phi_i(\sum_j p^j \frac{\partial}{\partial x_i^j}(\phi_i^{-1}(t^1, \cdots, t^n)) = (\varphi^i(\phi_i{-}1(t^1, \cdots, t^n)), d_m x_i^k(\sum_k p^j \frac{\partial}{\partial x_i^j})) =$$

$$(t^1, \cdots, t^n, \sum_k p^j \frac{\partial x_i^k}{x_i^j}(\phi_i^{-1}(t^1, \cdots, t^n)) = (t^1, \cdots, t^n, p^1, \cdots p^n)$$

Sean φ y ψ dos cartas de M, con def(φ) $\cap$ def(ψ) $\neq \emptyset$.

Sean $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ dos cartas de TM con def($\bar{\varphi}$) $\cap$ def($\bar{\psi}$) $\neq \emptyset$, inducidas por las cartas φ y ψ de M, siendo $(x^1, \cdots, x^n)$ las coordenadas de φ y $(y^1, \cdots, y^n)$ las coordenadas de ψ.

Sea $(t^i, p^j) \in \bar{\psi}(def(\bar{\varphi}) \cap def(\bar{\psi}))$, entonces:

$$\bar{\psi}^{-1}(t^i, p^j) = \sum_i p^i \frac{\partial}{\partial y_i}(\psi^{-1}(t^i))$$

Por otra parte:

$$\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1} = \bar{\varphi}(\sum_i p^i \frac{\partial}{\partial y_i}(\psi^{-1}(t^i))) = (\varphi \circ \psi^{-1}(t), d_m x^j(\sum_i p^i \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi^{-1}(t))) =$$

$$(\varphi \circ \psi^{-1}(t), \sum_i p^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(\psi^{-1}(t^i)))$$

Como $\varphi \circ \psi^{-1}$ es diferenciable y $\sum_{i=1}^n p^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(\psi^{-1}(t^i))$ también lo son $\rightarrow$ $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1}$ es diferenciale. Por tanto $\{\bar{\varphi}_i\}_{i\in I}$ es un subatlas de TM.

A TM, con esta estructura, se le denomina **variedad tangente**. Análogamente, se puede dotar a $T_m^* M$ de una estructura de variedad diferenciable, donde:

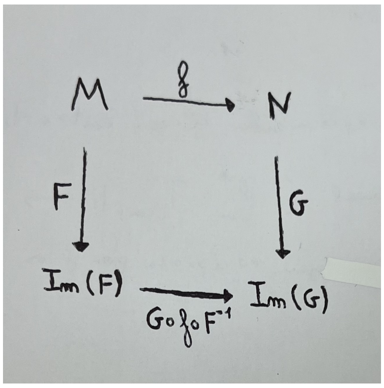
$$\pi : TM \rightarrow M$$

es una aplicación diferenciable y abierta, es decir, la imagen de un abierto es un abierto.

Un fibrado vectorial de dimensión k sobre una variedad de base M y dimensión n, es $M \times V$, donde V es un espacio vectorial. Evidentemente, la variedad tangente $TM \simeq M \times \mathbb{R}^n$ y, por tanto, es un fibrado vectorial. A TM se le denomina fibrado tangente a M. Si $\pi : TM \rightarrow M$, aplica $v \in TM$ en $\pi(v) = m$, y se le denomina **proyección del fibrado**.

5.3. Diferencial de una aplicación

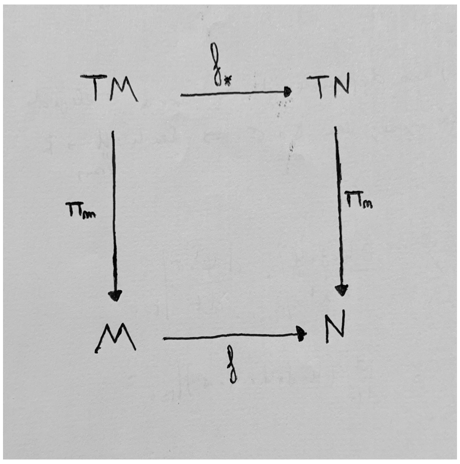
Sean M y N dos variedades diferenciables. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable, con dim(M) = k_1 y dim(N) = k_2. Sea $m \in M, f(m) \in N$. Sean F, G cartas tal que $m \in def(F)$ y $f(m) \in def(G)$.



Diremos que, si $Im(F)$ = imagen de F = abierto de R^{k_1} y Im(G) = imagen de G = abierto de R^{k_2}, entonces:

f es diferenciable si $G \circ f \circ F^{-1}$ es diferenciable en $F(m)$, y esto es independiente de las cartas elegidas, debido a la Condición de Compatibilidad de cartas (explicada en el capítulo 2).

Llamamos **diferencial de** f **a** f_*.



Siendo π_m la proyección del fibrado en la variedad y, de modo que

$$\pi^{-1}(m) = T_m M$$

y también:

$$\pi(T_mM) = m$$

Sea $m \in M$; $\Gamma(M,m)$; $v_m \in T_mM$, entonces $\exists\, \sigma \in \Gamma(M,m)$ tal que $p\,\sigma = v_m$
$f \circ \sigma$ es una curva de $\Gamma(N, f(m))$. Tomamos:

$$f_{*m}(v_m) = p(f \circ \sigma)$$

Veamos que $f_{*m}(v_m)$ no depende de la curva σ elegida como representante de la clase.

Sea $\gamma \sim \sigma$ y sea $h : U \to R$, entonces, si φ es una carta:

$$p(f \circ \sigma)(h) = \frac{d(\, h \circ f \circ \sigma)}{dt}(0) = \frac{d(\, h \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma)}{dt}(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(\, h \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(f(m)) \cdot \frac{d(\, \varphi^i \circ \sigma)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(\, h \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(f(m)) \cdot \frac{d(\, \varphi^i \circ \gamma)}{dt}(0) =$$

$$= \frac{d(\, h \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma)}{dt}(0) = \frac{d(\, h \circ f \circ \gamma)}{dt}(0) = p(f \circ \gamma)(h)$$

Por lo que $p(f \circ \sigma) = p(f \circ \gamma)$

Teorema 15. La aplicación:

$$f_{*m} : T_mM \to T_{f(m)}N$$

es lineal.

Demostración. Sea $a, b \in R$ y sean $v, w \in T_mM$. Sea $h : M \to R$, entonces

$$\exists \alpha, \beta \in \Gamma(M,m)$$

tal que $v = p(\alpha); w = p(\beta)$

Además, $f_{m*}(a \cdot v + b \cdot w) = p(f(a \cdot \alpha + b \cdot \beta))$, por lo que

$$f_{m*}(a \cdot v + b \cdot w)h = p(f(a \cdot \alpha + b \cdot \beta))h =$$

$$= \frac{d(h \circ f(a \cdot \alpha + b \cdot \beta))}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(h \circ f)}{\partial x_i}(m) \cdot \frac{d(a \cdot \alpha^i + b \cdot \beta^i)}{dt}(0) =$$

$$= a \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(h \circ f)}{\partial x_i}(m) \cdot \frac{d\alpha^i}{dt}(0) + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(h \circ f)}{\partial x_i}(m) \cdot \frac{d\beta^i}{dt}(0) =$$

$$= a \cdot \frac{d(h \circ f \circ \alpha)}{dt}(0) + b \cdot \frac{d(h \circ f \circ \beta)}{dt}(0) = a \cdot p(f \circ \alpha)h + b \cdot p(f \circ \beta)h =$$

$$= a(f_{m*}(v))h + b(f_{m*}(w))h = (a \cdot f_{m*}(v) + b \cdot f_{m*}(w))h.$$

Para todo h, tenemos que:

$$f_{m*}(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot f_*(v) + b \cdot f_*(w)$$

por lo que f_{m*} es lineal y queda demostrado. $\square$

Teorema 16. (Regla de la cadena)

Sean M, N, S **variedades diferenciables. Sean** $f : M \to N$ **y** $h : N \to S$ **, entonces se tiene que** $(h \circ f)_*(v) = h_* \circ f_*$

Demostración. Sea $v \in T_{\vdots}mM$ y sea $v = p(\alpha)$, entonces

$$(h \circ f)_{*m}(v) = p((h \circ f) \circ \alpha) = p(h \circ (f \circ \alpha)) =$$

$$= h_{*f(m)}p(f(\alpha)) = h_{*f(m)} \circ f_{*m}(v)$$

por tanto

$$(h \circ f)_{*m}h_{*f(m)} \circ f_{*m}$$

lo que de modo genérico resulta

$$(h \circ f)_*(v) = h_* \circ f_*$$

$\square$

5.4. Fibrado Cotangente e Imagen Recíproca

Llamamos **fibrado cotangente** de la variedad M a:

$$T^*M = (TM^*) = \bigcup_{m \in M} T_m^*M$$

Por otra parte, $T^*M \simeq M \times (\mathbb{R}^n)^*$ y, por tanto, es un fibrado vectorial.

Sea la aplicación $\pi : T^*M \to M$ donde si $w \in T^*M$, entonces $\pi(w) = m$. A esta aplicación se la denomina **proyección del fibrado**.

Definido el fibrado cotangente, dada una aplicación diferenciable, $f : M \to N$, donde M y N son variedades diferenciables, llamamos imágen recíproca de f (o retroacción) a la aplicación definida por:

$$f_m^* : T_{f(m)}N \to T_mM$$

siendo f_m^* el dual de f_*. Llamaremos **imagen recíproca por** f a:

$$f^*(\sigma) = f_m^*(\sigma)$$

si $\sigma \in T_{f(m)}^*M$.

Estos conceptos que aquí aparecen de modo somero son de gran importancia en campos tales como la mecánica clásica, Cuando se tiene un sistema mecánico sometido a restricciones de igualdad, aparece de modo natural la llamada variedad de configuración V la cual representa el conjunto de posiciones en que e puede encontrar el sistema mecánico. El análisis del movimiento entorno a un punto de un estado posible representado por un unto de la variedad de configuración se realiza mediante el uso de castas locales alrededor de ese punto. La velocidades son vectores tangentes a l variedad de configuración .

La mecánica clásica desde un punto de vista matemático se trata desde el punto de vista lagrangiano, a partir de principios variacionales, existiendo una función llamada lagrangiano $L : TV \to \mathbb{R}$. a partir de la cual se puede estudiar todo el movimiento

Un punto de vista más geométrico es la mmeánica hamiltoniana que parte de una función H llamada hamiltoniano H y que es una aplicación de da llamada variedad de fases $M = T^*V$ en $\mathbb{R}$.

La variedad de fases puede ser dotada de una estructura geométrica natural, la cual induce as ecuaciones de movimiento. Un magnifico estudio de estos métodos puede verse en [2].

Obviamente es mucho el trabajo que resta para llegar a estas formulaciones, siendo este trabajo únicamente una primera introducción a estos campos.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este trabajo, en primer lugar, a través del Teorema de la Función Implícita y el Teorema de la Función Inversa se introduce el concepto de carta local definida en un subconjunto de R^n dado por $F_1(\overrightarrow{x}) = 0, \ldots, F_k(\overrightarrow{x}) = 0$, donde con $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable de clase C^k y rango$\{dF_1(\overrightarrow{x}), \ldots, dF_k(\overrightarrow{x})\} = k$ en $M = \overrightarrow{F}^{-1}(0)$.

A continuación se define de modo abstracto el concepto de variedad diferenciable de manera que mediante el uso de cartas puede representarse localmente como abiertos de $\mathbb{R}^n$, lo cual da lugar a la introducción de una topología en la variedad. Este enfoque aorta una visión más topológica del concepto de variedad.

La definición de espacio tangente y cotangente y la posterior construcción de los fibrados tangentes y cotangentes permite el cálculo de la diferencial de una aplicación y de su imagen recíproca.

Finalmente, indicar que conceptos tan sencillos como los el conjunto de vectores fijos de $\mathbb{R}^3$, no es mas que $T\mathbb{R}^3$. También decir que TM es el conjunto base donde se construye la mecánica lagrangiana, y en T^*M, la hamiltoniana. Aunque no haremos hincapié en esto en el presente trabajo.

Este trabajo es una base para el posterior estudio de subvariedades, campos vectoriales tensoriales, álgebra exterior de una variedad, derivada de Lie, diferencial exterior, integración en variedades, etc. Esto es un amplio campo de las matemáticas donde se puede formular de un modo correcto una gran cantidad de problemas, si bien esto excede en mucho lo que es este trabajo de fin de grado.

Bibliografía

[1] APOSTOL T.M. Análisis Matemático. *Editorial Reverté, S.A. , Barcelona 1976.*

[2] ARNOLD V.I. Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin 1992

[3] ARNOLD V.I. Métodos Matemáticos Mecánica Clásica, Editorial Paraninfo Madrid 1983

[4] HICKS NOEL J. *Notas en Geometría Diferencial*, Editorial Hispano Europea, Barcelona 1974.

[5] SPIVAK MICHAEL Cálculo en Variedades. Editorial Reverté, Barcelona 1988