UNIVERSITAT JAUME I

Grado en Matemática Computacional

Trabajo Final de Grado

Funciones Esféricas

Autor:
Ernesto Sánchez Armero

Tutor académico:
José Antonio López Ortí

Fecha de lectura: 11 de Julio de 2023
Curso académico 2022/2023

Resumen

En este trabajo se aborda el estudio de un tipo particular de funciones llamadas armónicos esféricos. En primer lugar, se ha estudiado de modo somero el problema de Sturm Liouville, para una vez conocido este, introducir los polinomios de Legendre y las funciones adjuntas de Legendre para finalmente llegar al estudio de los armónicos esféricos.

Estas funciones son de gran interés, ya que en el caso de los polinomios de Legendre son un sistema ortogonal completo en el intervalo [-1, 1] y en el caso de las funciones adjuntas de Legendre también lo son, para funciones continuas en el intervalo [-1, 1] con f(-1) = f(1) = 0.

Los armónicos esféricos constituyen un sistema ortogonal completo sobre la esfera, lo cual permite obtener aproximaciones de funciones definidas sobre la esfera en forma de combinación lineal finita de armónicos esféricos. Por las propiedades anteriores esbozadas, el estudio de estas funciones es necesario y esencial para conocer el campo gravitatorio terrestre, el estudio de la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno, en geodesia, en el estudio de la teoría del potencial etc.

La motivación de este trabajo es el conocimiento de las funciones esféricas, las cuales son necesarias en el estudio de diverso problemas planteados en un dominio próximo a la esfera en los que aparece el operador de Laplace.

Palabras clave

- Polinomio de Legendre
- Función de Legendre asociada
- Funciones especiales
- Armónica esférica

Keywords

- Legendre polynomial
- Associated Legendre function
- Special functions
- Spherical harmmonics

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de ciertas funciones que nos sirvan como base para poder aproximar funciones en el intervalo [-1, 1] como combinación lineal de ellas. Este objetivo se extiende a funciones definidas sobre la esfera.

El método que se va a seguir para ello va a ser el estudio de la ecuación de Laplace sobre la esfera. El análisis de este problema de un modo directo es complejo. Por lo tanto, vamos a realizar un estudio por pasos y más detenido.

El método seguido implica en primer lugar un estudio básico del problema de Sturm-Liouville, el posterior estudio de los polinomios de Legendre a partir del desarrollo del inverso de la distancia entre dos radios vectores. Posteriormente, se extiende este estudio a las funciones adjuntas de Legendre y para finalizar, el estudio de la ecuación de Laplace sobre la esfera.

Este estudio se realiza mediante la técnica de separación de variables, lo que nos lleva a dos problemas de Sturm-Liouville. El primero de ellos, conduce a las funciones asociadas de Legendre y el segundo a la ecuación diferencial del oscilador armónico.

La estructura del trabajo es la siguiente:

En el capítulo 1 se introduce el problema a resolver y se trazan las lineas generales del mismo.

En el capitulo 2 se aborda de modo somero el problema de Sturm-Liouville estudiándose las principales propiedades de las soluciones de este problema. El estudio de este problema es necesario, pues como se vera en los capítulos siguientes, la aparición de este tipo de problemas es continuo y por ellos hemos considerado necesario el estudio del mismo.

En el capitulo 3 se aborda el estudio de los polinomios de Legendre a partir del desarrollo del inverso de la distancia entre dos radios vectores. La introducción de la función generatriz de los polinomios y de su desarrollo en serie de Taylor donde los coeficientes son los polinomios de Legendre, permite por un parte, obtener relaciones de recurrencia entre estos y por otra parte, obtener la ecuación diferencial de Legendre en la cual, constituye un problema de Sturm-Liouville, cuyas funciones propias son los polinomios de Legendre.

En el capitulo 4 se analiza el estudio de las funciones adjuntas de Legendre para ello se estudia, $P_n^{(m)} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$ probando que $v(x) = \frac{d^m P_n}{dx^m}$ satisface una ecuación diferencial derivada de la de Legendre. Una vez multiplicando $v(x)$ por $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$, la función resultante satisface un nuevo problema de Sturm-Liouville, dado por una ecuación diferencial llamada ecuación diferencial adjunta de Legendre. Este capítulo, finaliza con el estudio de la ortogonalidad y completitud del sistema de las funciones adjuntas de Legendre.

En el capitulo 5 se aborda el estudio de la ecuación de Laplace. Para ello, en primer lugar, se escribe en coordenadas esféricas, se aplica el método de separación de variables resultando dos ecuaciones diferenciales. La primera depende de R que no trato en el trabajo. La segunda es la ecuación de Laplace para la esfera. Esta ecuación se resuelve a su vez también mediante separación de variables, donde se obtiene la ecuación diferencial adjunta de Legendre y la ecuación del oscilador armónico. De las soluciones de estas ecuaciones para los valores propios que aparecen, se obtienen los armónicos esféricos. Finalmente, se estudia la ortogonalidad y completitud de estas funciones sobre la esfera.

En el capitulo 6 trata de las principales conclusiones y perspectivas de este trabajo, donde a continuación se incluye la bibliografía empleada.

Capítulo 2

Ecuaciones especiales.

2.1. Introducción

En este capítulo se aborda de modo general el estudio de la ecuación diferencial de las funciones especiales.

Esta ecuación se denomina así, pues muchas de ellas proceden de casos particulares de la misma.

En general se trata de un problema de Sturm-Liouville, el cual se estudia someramente en este capítulo. Una visión más extensa y profunda del mismo puede encontrarse en [6].

2.2. Algunas notas sobre el problema de Sturm-Lioville

La resolución del problema [8]:

Hallar los valores de λ, para los cuales la ecuación homogénea $\Delta v + \lambda v = 0$ tenga soluciones no triviales $v \neq 0$ (funciones propias) en la región T, con la condición homogénea $v|_{\sum} = 0$ en la frontera $\sum$ de T

La aplicación del método de separación de variables, conduce a problemas de tipo Sturm-Lioville,.

Cuando el problema se plantea en $\mathbb{R}^3$ y T es un cilindro o una esfera, sus funciones propias serán las llamadas funciones cilíndricas o funciones esféricas. Estas funciones además de tener un gran interés teórico, son de gran utilidad para resolver numerosos problemas en campos tales como la física matemática, la geodesia, etc.

2.3. Ecuación general de la teoría de las funciones especiales.

La formulación más sencilla para expresar la ecuación diferencial de las funciones especiales aquí consideradas es la siguiente:

$$Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \quad x \in [a, b], \quad \rho(x) > 0,$$

donde L es el operador linean definido sobre las funciones $\mathcal{C}^2[a, b]$

$$Ly = \frac{d}{dx}(k(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y, \quad k(x) \geq 0.$$

donde $k(x) \in \mathcal{C}^1[, b]$ y $q(x) \in \mathcal{C}[, b]$.

Diremos que una función $y : [a, b] \to R$ cumple la condición natural de acotación en a cuando se verifca que $|f(a)| < +\infty$ (respectivamente en b).

Ejemplos de esta clase de ecuaciones diferenciales son:

1) La funciones ecuación de las funciones trigonométricas para el caso de funciones $y : R \to \mathbb{R}$ 2π periódicas

$$a = 0, \quad b = 2\pi, \quad q = 0, \quad k = \rho = cte \quad x \in [0, 2\pi],$$

las cuales satisfacen la condición natural de acotación en a y b.

lo que conduce al problema $\quad y'' + \lambda y = 0.$

Resulta inmediato que para que se cumpla la condición de periodicidad se requiere que $\lambda > 0$.

Otros ejemplos de este problema son

2) La ecuación de Bessel

$$(xy^{'})^{'} + (\lambda x - \frac{n^2}{x})y = 0$$

donde $k(x) = x, \quad \rho(x) = x, \quad q(x) = \frac{n^2}{x}, \quad a = 0, \quad b = r_0$

3) La ecuación de Legendre

$$[(1 - x^2)y^{'}]^{'} + \lambda y = 0$$

donde $k(x) = 1 - x^2, \quad \rho = 1, \quad q = 0, \quad a = -1, \quad b = 1$

4) La ecuación adjuntas de Legendre

$$[(1 - x^2)y^{'}]^{'} + \frac{m^2}{1 - x^2}y + \lambda y = 0$$

donde $k(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}, \quad \rho = 1, \quad a = -1, \quad b = 1$

5) La ecuación de Hermite

$$[xe^{-x^2}y^{'}]^{'} + \lambda e^{-x^2}y = 0,$$

donde $k(x) = e^{-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = e^{-x^2}, \quad a = -\infty, \quad b = \infty$

6) La ecuación de Laguerre

$$[xe^{-x}y^{'}]^{'} + \lambda e^{-x}y = 0,$$

donde $k(x) = xe^{-x}, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = e^{-x}, \quad a = 0, \quad b = \infty$

2.4. Comportamiento de las soluciones en un entorno de x=a si k(a) = 0.

Supondremos que:

1) $k(x) > 0$ para $a < x < b$.

2) $k(x) = (x-a)\varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función continua y φ (a)$\neq$ 0, es decir, k(x) tienen en el punto x = a un cero de primer orden.

Si en la ecuación,

$$Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \quad \text{con} \quad a < x < b \quad \text{y} \quad \rho(x) > 0$$

o bien,

$$Ly = \frac{d}{dx}(k(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y$$

sustituimos

$$q(x) - \lambda\rho(x) = \hat{q}(x),$$

se convierte en

$$Ly = (k(x)y^{'})^{'} - \hat{q}(x)y = 0, \quad a < x < b, \quad k(x) = (x-a)\varphi(x).$$

Todos los resultados obtenidos en los lemas siguientes también mantendrán su validez en $x = b$.

Lema 1. ***Sean*** $y_1(x)$ ***e*** $y_2(x)$ ***dos soluciones linealmente independientes de la ecuación anterior, donde*** $k(x) = (x-a)\ \varphi$***(x),*** $\varphi(a) \neq 0$***. Si*** $y_1(x)$ ***tiene limite finito para*** $x \to a$ ***(***$y_1(a) \neq \infty$***), entonces*** $y_2(x)$ ***se vuelve infinito para x = a.***

Obsérvese que $y_2(x)$ se puede representar, mediante la solución linealmente independiente $y_1(x)$, en forma de cuadratura. Por lo que tenemos

$$y_2(x)Ly_1(x) - y_1(x)Ly_2(x) = [k(x)(y_2y_1^{'} - y_1y_2^{'})]^{'} = 0.$$

De aquí se obtiene que el wronskiano de las funciones y_1 e y_2 es igual a

$$y_1y_2^{'} - y_2y_1^{'} = C/k(x),$$

donde C $\neq 0$. Ahora si dividimos entre y_1^2, tendremos que

$$\frac{y_1y_2^{'}}{y_1^2} - \frac{y_2y_1^{'}}{y_1^2} = \frac{C}{k(x)y_1^2} \to (\frac{y_2}{y_1})' = \frac{C}{k(x)y_1^2}.$$

La integración de está ecuación desde x_0 hasta x nos da lo siguiente

$$y_2(x) = y_1(x)\left[-\int_x^{x_0} \frac{Cd\alpha}{k(x)(\alpha)y_1^2(\alpha)} + C_1\right], \quad a < x \leq x_0. \tag{2.1}$$

La función $y_1(x)$ es finita para x = a y se puede representar de la siguiente forma $y_1(x) = (x-a)^n z_1(x)$, donde $n \geq 0, z_1(x)$ es continua y $z_1(a) \neq 0$.

Si $x_0 \in]a, b]$ es un punto en el que sev erifca $z_1(x) \neq 0$ para $a < x \leq x_0$ obtenemos lo siguiente

$$y_2(x) = (x-a)^n z_1(x)\left\{C_1 - \int_x^{x_0} \frac{Cd\alpha}{(\alpha-a)^{2n+1}\varphi(\alpha)z_1^2(\alpha)}\right\} \tag{2.2}$$

donde $a < x \leq x_0$.

Con esto, aplicamos el segundo teorema del valor medio para la integral de Riemann y obtenemos que

$$y_2(x) = (x-a)^n z_1(x) \left\{ C_1 - A \int_x^{x_0} \frac{d\alpha}{(\alpha - a)^{2n+1}} \right\} \tag{2.3}$$

donde

$$A = \frac{C}{\varphi(\bar{x}) z_1^2(\bar{x})} \neq 0, \quad x < \bar{x} \leq x_0.$$

Después de calcular la integral, se obtiene

$$y_2(x) = \left\{ \begin{array}{c} (x-a)^n z_1(x) \left[C_1 + A \frac{(x_0-a)^{-2n} - (x-a)^{-2n}}{2n} \right] \text{ para n } > 0 \\ \\ y_1(x) \left[C_1 - A \ln \frac{x_0 - a}{x - a} \right] \text{ para n } = 0 \end{array} \right. . \quad \square$$

De esta forma, en ambos casos será

$$\lim_{x \to a} (x-a)^n y_2(x) = \pm\infty$$

Lema 2. ***Si*** $y_1(a) \neq 0$, ***entonces*** $y_2(x)$ ***tiene una singularidad logarítmica en*** $x = a$***.Si*** $y_1(x)$ ***tiene un cero de n-ésimo orden para*** $x = a$***,*** $y_1(x) = (x-a)^n z_1(x)$***,*** $z_1(a) \neq 0$***,*** $n > 0$***, entonces*** $y_2(x)$ ***tiene en*** $x = a$ ***un polo de orden n:***

Es trivial. Como en consecuencia del Lema 1 si $y_(a) = 0)$, entonces $n > 0$ se tiene

$$\lim_{x \to a} y_2(a)(x-a)^n = -A \, \frac{z_1(a)}{2n} \neq 0$$

Si $y_1(a) \neq 0$, resulta $n = 0$, de donde

$$\lim_{x \to a} \frac{y_2(a)}{\ln(x-a)} = -A \neq 0. \quad \square$$

Lema 3. ***Supongamos que*** $k(x) = (x-a)\varphi(x)$***,*** $\varphi(a) \neq 0$ ***y que el coeficiente q(x) está acotado o tiende a*** ∞ ***cuando x*** $\to a$. ***Entonces, para la solución de*** $y_1(x)$ ***acotada en el punto x = a, se cumple la condición*** $\lim_{x\to a} k(x)y_1^{'}(x) = 0$.

Por un lado, supongamos que q(x) está acotada cuando x $\to$ a.

Fijemos cierto valor x_1, $a < x_1 <$ b e integremos desde x a x_1, $a < x < x_1$

$$k(x)y_1^{'}(x) = k(x_1)y_1^{'}(x_1) - \int_x^{x_1} q(\alpha)y_1(\alpha)d\alpha = Q(x). \tag{2.4}$$

De aquí se deduce que Q(x) es una función continua en el segmento a $\leq x \leq x_1$.

Pasando al límite cuando x $\to a$, se aprecia que existe el limite

$$C = [\lim_{x\to a} k(x)y_1^{'}(x), \quad C = Q(a)].$$

Veamos que C = 0.

$$y_1(x) = y_1(x_2) - \int_x^{x_2} \left[\frac{Q(\alpha)}{k(\alpha)}\right] d\alpha = y_1(x_2) - \int_x^{x_2} \left[\frac{Q(\alpha)}{(\alpha-a)\varphi(\alpha)}\right] d\alpha, \tag{2.5}$$

donde $\alpha < x \leq x_2 \leq x_1$.

De aquí se observa que $y_1(x)$ sólo puede estar acotada en el punto x = a con la condición Q(a) = C = 0.

Por otro lado, supongamos que q(x) no está acotada para x $\to a$. Es decir que, q(x) $\to \infty$ para x $\to a$.

Esto significa, que habrá un q(x) > 0 en cierto intervalo a $< x \leq x_1$. En este intervalo, la función $y_1(x)$ es monótona, por lo tanto conserva su signo en cierto intervalo a $< x \leq x_1$, siendo $x_2 \leq x_1$ y tiene $y_1(a)$ cuando x $\to$ a. De (2.5) se tiene que $y_1(a) \to \infty$ salvo que $Q(a) = 0$ de donde se tiene el resultado. $\square$

2.5. Planteamiento de los problemas de contorno.

Gracias a los lemas anteriores podemos obtener una serie de conclusiones para las siguientes ecuaciones:

$$Ly + \lambda \rho y = 0 \quad \text{y} \quad Ly = 0$$

gracias al planteamiento de los problemas de contorno en un intervalo (a, b).

La solución general de las ecuaciones anteriores es:

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

donde por un lado y_1 y y_2 son funciones independientes y A, B son constantes arbitrarias.

Por lo tanto, del lema 1 se tiene que si $y_1(x)$ está acotada para $x = a$ entonces $y_2(x)$ se hace infinita cuando x → a.

Por lo tanto de esta condición

$$\mid y(a) \mid \leq \infty \tag{2.6}$$

conocida como la condición natural de acotación, deducimos que B = 0.

Dicho esto, tenemos el siguiente problema de contorno, hallar los valores propios y las funciones propias $y(x) \neq 0$ de la ecuación:

$$(ky^{'})^{'} - qy + \lambda \rho y = 0, \quad a < x < b, \tag{2.7}$$

donde $k(x) > 0$ para $x > a$ y $k(a) = 0$, con la condición natural de acotación en el punto x = a

$$\mid y(a) \mid \leq \infty \tag{2.8}$$

y por ejemplo la condición de primera especie homogénea , $y(b) = 0$, en el extremo $x = b$.

Dicho esto, formulemos las propiedades generales de las funciones propias y de los valores propios del problema de contorno (2.6) y (2.8):

1) Existe un conjunto infinito de valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n \leq ...$, a los cuales le corresponden las funciones propias $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

2) Para $q \geq 0$, todos los valores propios no son negativos, es decir, $\lambda \geq 0$.

3) Las funciones propias $y_n(x)$ e $y_m(x)$, que corresponden a distintos valores propios λ_n y λ_m, son ortogonales entre si con densidad ρ (x):

$< y_n, y_m >= \int_0^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = 0.$

4) Tiene lugar el teorema del desarrollo: Si la función f(x) f(x) tiene derivada primera continua y derivada segunda continua a trozos en $a < x < b$; entonces $f(x)$ admite un desarrollo en serie en las funciones propias $y_n(x)$ del problema dado, el cual que converge absoluta y uniformemente y viene dado por

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \ f_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}$

Si f(x) satisface a las condiciones de frontera y además si $k(a) = 0$, entonces $| f(a) | \leq \infty$ para $0 \leq q(a) < \infty$ y f(a) = 0 si q(x) $\to \infty$.

Capítulo 3

Polinomios de Legendre

3.1. Introducción.

En este capítulo, se aborda el estudio de los polinomios de Legendre, lo cual es un tópico tratado por mochos autores. En este trabajo nos basaremos principalmente en [1], [2] y [3].

Los polinomios de Legendre aparecen de modo natural en el estudio del inverso de la distancia entre dos radios vectores.

Sea $\triangle$ la distancia entre los puntos M_0 y M.

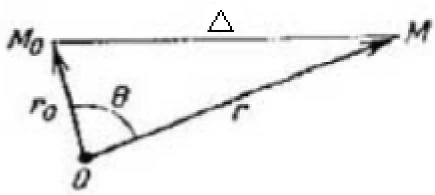

Figura 1

Además tenemos que r y r_0 son los radios vectores y θ es el ángulo entre dichos vectores.

Según la figura y aplicando el teorema del coseno obtenemos que

$$\triangle^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta$$

$$\triangle = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta}$$

$$\frac{1}{\triangle} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta}}.$$

Supongamos que r $> r_0$ y factorizamos la r^2 en la raíz

$$\frac{1}{\triangle} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{r^2[1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2r_0}{r}\cos\theta]}} =$$

$$\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{[1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2r_0}{r}\cos\theta]}}.$$

Definiendo $x = \cos\theta$ donde -1 $\leq x \leq 1$ y $\rho = \frac{r_0}{r} < 1$ dado que $r > r_0$. resulta d

$$\frac{1}{\sqrt{[1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2r_0}{r}\cos\theta]}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}}.$$

A partir de este resultado, definimos que la función generatriz de los polinomios de Legendre como

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} = (1 + \rho^2 - 2\rho x)^{(-\frac{1}{2})} \tag{3.1}$$

donde $0 \leq \rho < 1$ y $-1 \leq x \leq 1$.

3.2. Polinomios de Legendre, fórmula de Rodrigues.

La función $\Psi(\rho, x)$ puede desarrollarse en serie de Taylor respecto a ρ como

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n, \tag{3.2}$$

los coeficientes $P_n(x)$ del (3.2) son los llamados Polinomios de Legendre.

Desarrollando (3.2)

$$\Psi(\rho, x) = P_0(x) + P_1(x)\rho + P_2(x)\rho^2 + P_3(x)\rho^3 + ... + P_k(x)\rho^k + ...$$

Si $\rho = 0$, se ve que $\Psi(0, x) = P_0(x) = 1$.

Los polinomios de Legendre son los coeficientes del desarrollo de Taylor de la función generatriz;así, se tiene

$$P_n(x) = \frac{1}{(n!)}[\frac{d^n\Psi}{d\rho^n}(\rho, x)]|_{\rho=0}. \tag{3.3}$$

Recordar que la derivada de la Fórmula Integral de Cauchy para dervadas es la siguiente:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Upsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(n+1)}} dz$$

donde f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo que contiene a Υ es una curva que rodea a z_0.

Por lo tanto, aplicando La fórmula integral de Cauchy para la circunferencia tendríamos

$$\frac{d^n\psi}{d\rho^n}(\rho, x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\xi, x)}{(\xi - \rho)^{n+1}}\, d\xi$$

La C es un contorno cerrado en el plano que contiene al punto $z = 0$.

Volviendo a (3.2) tendríamos que

$$P_n(x) = \frac{1}{(n!)}[\frac{d^n\Psi}{d\rho^n}(\rho, x)]|_{\rho=0} =$$

$$\frac{1}{(n!)}[\frac{n!}{2\pi i}]\int_C \frac{\psi(\xi, x)}{(\xi - 0)^{n+1}}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\xi, x)}{\xi^{(n+1)}}d\xi$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\xi, x)}{\xi^{n+1}}d\xi. \tag{3.4}$$

Centrémonos ahora en esta igualdad $\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi x} = 1 - z \cdot \xi$

$$1 + \xi^2 - 2\xi x = (1 - z\xi)^2 \quad 1 + \xi^2 - 2\xi x = 1 - z^2\xi^2 - 2z\xi$$

$$\xi^2 - 2\xi x = z^2\xi^2 - 2z\xi \quad \xi^2 - z^2\xi^2 = 2\xi x - 2z\xi$$

$$\xi^2(1 - z^2) = 2\xi(x - z) \rightarrow \xi(1 - z^2) = 2(x - z) \rightarrow \xi = 2\frac{z - x}{z^2 - 1}.$$

Derivando la igualdad anterior

$$d\xi = 2[\frac{1}{z^2 - 1} - 2z\frac{(z - x)}{(z^2 - 1)^2}]dz$$

$$d\xi = 2[\frac{1}{z^2 - 1} - \frac{(z\xi)}{(z^2 - 1)}]dz$$

$$d\xi = 2\frac{1-\xi z}{z^2-1}dz$$

Resumiendo se tiene que

$$\frac{1}{1-\xi z}d\xi = \frac{2}{z^2-1}dz$$

y como

$$\frac{1}{1-\xi z} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2-2\xi x}} = \Psi(\xi, x)$$

se deduce

$$\Psi(\xi, x)d\xi = \frac{2}{z^2-1}dz.$$

Con estos cálculos, sustituyendo en (3.3)

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\xi, x)}{\xi^{n+1}}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_C [\frac{2}{z^2-1}(\frac{1}{\xi^{n+1}})]dz$$

como

$$\xi = 2\frac{z-x}{z^2-1}$$

se quedaría de la siguiente forma,

$$\frac{1}{\pi i}\int_C [\frac{1}{z^2-1}(\frac{1}{\xi^{n+1}})]dz = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} [\frac{1}{z^2-1}(\frac{z^2-1}{z-x})^{(n+1)}(\frac{1}{2^{(n+1)}})]dz,$$

y por tanto

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{(n+1)}\pi i}\int_{C_1} [\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}]dz. \tag{3.5}$$

siendo C_1 un contorno cerrado que rodea al punto z=x.

De la formula integral de Cauchy para derivadas se tiene

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{(n+1)}\pi i}\int_{C_1}[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}]dz = \frac{1}{2^{(n)}2\pi i}\frac{1}{n!}n!\int_{C_1}[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}]dz,$$

y por tanto

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]. \qquad \Box \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) se conoce como fórmula de Rodrigues. A partir de ella resulta inmediato que:

1) $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

2) $P_n(x)$ las potencias de x poseen la misma paridad que el número n, por lo que

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{3.7}$$

Si hacemos que x = 1, resulta que $P_n(1) = 1$ pues igualando las siguientes fórmulas mencionadas anteriormente (3.1) y con (3.2).

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}$$

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n$$

se obtiene lo siguiente

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n.$$

Si x = 1

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\rho^n$$

así,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho)^2}} = \frac{1}{(1-\rho)}.$$

Por lo tanto se obtiene que

$$\frac{1}{(1-\rho)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\rho^n$$

sabiendo que el sumatorio se puede simplificar gracias a que $\rho < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 + \rho + \rho^2 + ... = \frac{1}{(1-\rho)}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-\rho} P_n(1)$$

Así, concluimos que que $P_n(1) = 1 \quad \forall n \geq 0$.

3.3. Fórmulas de recurrencia.

Tomando la fórmula (3.1):

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = (1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{1}{2})}$$

Derivando respecto ρ se obtiene

$$\Psi_\rho(\rho, x) = -\frac{1}{2}(-2x+2\rho)(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{3}{2})}$$

$$= (x-\rho)(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{3}{2})}$$

además si multiplicamos por $(1-2\rho x+\rho^2)$

$$\Psi_\rho(\rho, x)(1-2\rho x+\rho^2) = (x-\rho)(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{3}{2})}(1-2\rho x+\rho^2)$$

$$= (x-\rho)(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{1}{2})} = (x-\rho)\Psi(\rho, x)$$

se obtiene la siguiente igualdad

$$(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_\rho(\rho, x) = (x-\rho)\Psi(\rho, x). \tag{3.8}$$

Por otra parte, tenemos que $\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n$ en serie de potencias de ρ.

Si derivamos respecto ρ

$$\Psi_\rho(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n$$

De la misma forma que antes, multiplicando $\Psi_\rho(\rho, x)$ por $(1-2\rho x+\rho^2)$.

Se tiene

$$\Psi_\rho(\rho, x)(1 - 2\rho x + \rho^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n(1 - 2\rho x + \rho^2) =$$

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n - 2\rho x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n + \rho^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)\rho^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)\rho^n.$$

La idea ahora es poner las 3 series de manera que comiencen por n = 2

$$[(0+1)P_{0+1}(x)\rho^0] + [(1+1)P_{1+1}(x)\rho^1]\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n - 2x1P_1(x)\rho^1 +$$

$$-2x\sum_{n=2}^{\infty}nP_n(x)\rho^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)\rho^n =$$

$$P_1(x)+2P_2(x\rho^1+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n-2xP_1(x)\rho-2x\sum_{n=2}^{\infty}nP_n(x)\rho^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)\rho^n =$$

$$P_1(x) + 2P_2(x)\rho - 2xP_1(x)\rho + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)]\rho^n.$$

Una vez hecho la resolución del lado izquierda de la igualdad (3.9), continuemos pero con el lado derecho.

$$(x - \rho)\Psi(\rho, x) = (x - \rho)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n =$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n-\rho\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n=$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n-\rho\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(x)\rho^n$$

La idea es igual que antes, poner las 3 series de manera que comiencen por n = 2

$$x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n-\rho\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(x)\rho^n=$$

$$xP_0(x)+xP_1(x)\rho+x\sum_{n=2}^{\infty}P_n(x)\rho^n-P_0(x)\rho-\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}(x)\rho^n=$$

$$xP_0(x)+xP_1(x)\rho-P_0(x)\rho+\sum_{n=2}^{\infty}[xP_n(x)-P_{n-1}(x)]\rho^n.$$

Si ahora igualamos ambas y nos centramos solo en los sumatorios, tendremos

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x)-2xnP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)]\rho^n=\sum_{n=2}^{\infty}[xP_n(x)-P_{n-1}(x)]\rho^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x)-(2xn+x)P_n(x)+(n-1+1)P_{n-1}(x)]\rho^n=0.$$

Como p^n su coeficiente, en la serie es igual a cero $\forall$ x, tenemos

$$(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \tag{3.9}$$

Si despejamos $P_{n-1}(x)$, obtengo la Fórmula de recurrencia

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{(n+1)}[x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)] \qquad \square$$

donde se deduce que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.

3.4. Ecuación diferencial de Legendre

Tomando (3.1):

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = (1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{1}{2})}$$

Derivándola respecto x,

$$\Psi_x(\rho, x) = -\frac{1}{2}(2\rho)(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{3}{2})}$$

$$= \rho(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{3}{2})}$$

si ahora multiplicamos a $\Psi_x(\rho, x)$ por $(1-2\rho x+\rho^2)$

$$\Psi_x(\rho, x)(1-2\rho x+\rho^2) = \rho(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{3}{2})}(1-2\rho x+\rho^2)$$

$$= \rho(1-2\rho x+\rho^2)^{(-\frac{1}{2})} = \rho\Psi(\rho, x).$$

Por lo que hemos conseguido la siguiente igualdad

$$(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_x(\rho, x) = \rho\Psi(\rho, x). \tag{3.10}$$

Si despejamos $\Psi(\rho, x)$ de la ecuación (3.9) y (3.11)

$$\Psi(\rho, x) = \frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_\rho(\rho, x)]}{(x-\rho)}$$

y

$$\Psi(\rho, x) = \frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_x(\rho, x)]}{\rho}$$

Igualando y desarrollando

$$\frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_\rho(\rho, x)]}{(x-\rho)} = \frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_x(\rho, x)]}{\rho}$$

$$\frac{[\Psi_\rho(\rho, x)]}{(x-\rho)} = \frac{[\Psi_x(\rho, x)]}{\rho}$$

$$\rho\Psi_\rho(\rho, x) = (x-\rho)\Psi_x(\rho, x).$$

Sabiendo que, $\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n$, deducimos que

$$\Psi_\rho(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n$$

y

$$\Psi_x(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\rho^n$$

sustituyendo en la igualdad anterior

$$\rho\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n = (x-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\rho^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\rho^n = x\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\rho^n - \rho\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\rho^n \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} xP_n'(x)\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)\rho^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\rho^n = xP_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} xP_n'(x)\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)\rho^n.$$

Sabemos del apartado anterior que $P_0(x) = 1$ por lo que $P_0'(x) = 0$.

Por lo tanto, se nos queda los sumatorios

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\rho^n = \sum_{n=1}^{\infty} xP_n'(x)\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)\rho^n \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n'(x)\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)\rho^n = 0 \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nP_n(x)\rho^n - xP_n'(x)\rho^n + P_{n-1}'(x)]\rho^n = 0.$$

Como el coeficiente de ρ^n de la serie obtenido es igual a cero $\forall$ x, obtenemos

$$nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0$$

$$P_{n-1}'(x) = xP_n'(x) - nP_n(x). \tag{3.11}$$

Por otro lado, si tomamos (3.10) y la derivamos respecto x

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - x(2n+1)P'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0.$$

Sustituyendo (3.12) en el último término, se tiene

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - x(2n+1)P'_n(x) + nxP'_n(x) - n^2P_n(x) = 0$$

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (n^2+2n+1)P_n(x) + (-2xn - x + xn)P'_n(x) = 0$$

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (n+1)^2P_n(x) - x(n+1)P'_n(x) = 0$$

$$P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x) - xP'_n(x) = 0$$

$$P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - xP'_{n-1}(x) = 0.$$

Sustituyendo (3.13) de nuevo en el último término, resulta

$$P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - x[xP'_n(x) - nP_n(x)] = 0$$

$$P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - x^2P'_n(x) + nxP_n(x) = 0$$

$$(1-x^2)P'_n(x) - nP_{n-1}(x) + nxP_n(x) = 0.$$

Si derivamos respecto x, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x) - nP_{n-1}(x) + nxP_n(x)] = 0$$

$$-2xP_n'(x) + (1-x^2)P_n''(x) - nP_{n-1}'(x) + nP_n(x) + nxP_n'(x) = 0$$

$$(1-x^2)P_n''(x) - nP_{n-1}'(x) + nP_n(x) + (nx-2x)P_n'(x) = 0.$$

Sustituyendo (3.12) de nuevo en el último término, se tiene

$$(1-x^2)P_n''(x) - n[xP_n'(x) - nP_n(x)] + nP_n(x) + (nx-2x)P_n'(x) = 0$$

$$(1-x^2)P_n''(x) - nxP_n'(x) + n^2P_n(x) + nP_n(x) + (nx-2x)P_n'(x) = 0$$

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + (n^2+n)P_n(x) = 0 \qquad \square$$

De esta forma, obtengo la Ecuación Diferencial de Legendre.

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \tag{3.12}$$

Esta ecuación también se puede definir de la siguiente forma,

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

si λ_n = n(n+1).

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] + \lambda_n P_n(x) = 0.$$

3.5. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre

Dos polinomios de Legendre de distinto órdenes son ortogonales entre sí.

Partiendo de la ecuación (3.13) y tenemos dos polinomios diferentes de Legendre en función de n y m, se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_n] - 2x\frac{d}{dx}[P_n] + n(n+1)P_n = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_m] - 2x\frac{d}{dx}[P_m] + m(m+1)P_m = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden escribir también de esta forma:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}] + n(n+1)P_n = 0$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}] + m(m+1)P_m = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por P_m y la segunda por P_n restando, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}]P_m - \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}]P_n = [m(m+1) - n(n+1)]P_nP_m = 0$$

Si ahora se integra la parte de la izquierda entre -1 y 1

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}]P_m dx - \int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}]P_n dx = 0.$$

Entonces, si $n \neq m$ se tiene

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

3.6. Características de los sistemas de polinomios de Legendre ortogonales.

Por una parte, un sistema de funciones ortogonales se llama cerrado, si no existe ninguna función continua, que no sea nula y que sea ortogonal a todas las funciones del sistema.

Por esta razón, el polinomio de Legendre no tiene soluciones triviales para ningún $\lambda \neq n(n+1)$. Por esto se deduce que $y(x) = 0$.

Por otra parte, un sistema de funciones ortogonales $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ se llama completo en un intervalo [a, b].

Además si un sistema es completo, se tiene lugar a la relación siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n(x)$$

$$f^2(x) = \sum_{n=1\, m=1}^{\infty} x_{nm} \varphi_n(x) \varphi_m(x)$$

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2$$

donde f_n son coeficientes de Fourier de la función $f(x)$.

Es decir,

$$f_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$$

La propiedad de cerrada es una consecuencia de la completitud, también llamado plenitud.

Sea un sistema $\{\varphi_n\}$ de funciones ortogonales, supongamos que existe una función continua f(x) $\neq 0$, ortogonal a todas las φ_n.

Entonces, respecto la plenitud del sistema de funciones $\{\varphi_n\}$, debe tener lugar la siguiente igualdad,

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2 = 0$$

puesto que $f_n = 0$ por hipótesis. De aquí se obtiene que f = 0, lo cual contradice a la hipótesis, es decir, el sistema $\varphi_n(x)$ es cerrado. $\square$

3.7. Norma de los polinomios de Legendre.

Gracias a las fórmulas (3.1) y (3.2) se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n$$

y elevando al cuadrado ambos miembros

$$\frac{1}{1+\rho^2-2\rho x} = [\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n][\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n]$$

e integrando ambos miembros respecto x entre -1 y 1, se obtiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\rho^2-2\rho x}dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty} P_n(x)P_{n'}(x)\rho^{n+n'}dx.$$

Por un lado, si nos centramos en la integral de la izquierda

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\rho^2-2\rho x}dx = \frac{(-1)}{2\rho} ln(1+\rho^2-2\rho x)|_{-1}^{1} = \frac{1}{\rho}[ln(1+\rho)-ln(1-\rho)].$$

Desarrollando en serie de Taylor cada uno de los logaritmos,

$$f(x) = ln(1+\rho)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

así, se deduce a la n

$$ln(1+\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rho^n$$

de la misma forma con el otro logaritmo

$$-ln(1-\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} \rho^n.$$

Si se suman ambos

$$ln(1+\rho) + (-1)ln(1-\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n} \rho^n.$$

Del numerador del sumatorio, se deduce que

$$(-1)^{n+1} - 1 = 0 \text{ si n es par}$$

$$(-1)^{n+1} - 1 = 2 \text{ si n es impar.}$$

Por otro lado, si nos centramos en la derecha y se aplica la ortogonalidad se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} [\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx] \rho^{2n}$$

por lo que se concluye que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = ||P_n^2(x)||^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

De este modo, dadas dos funciones de Legendre, se tendrá:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \text{ si m } \neq \text{ n}$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \text{ si m} = \text{n}$$

3.8. Ceros de los polinomios de Legendre.

El polinomio de Legendre $P_n(x)$ tiene n ceros, que están repartidos por (-1, 1) y su derivada k-ésima, tiene n - k ceros dentro del intervalo y no se anulan en sus extremos.

Demostración:

Para $v = (x^2 - 1)^n$ se anula para los extremos del intervalo (-1, 1)

Para $v' = n(x^2 - 1)^{n-1}$ también se anula en x = 1 y en $x \neq 1$.

Gracias al teorema sabemos que al menos tiene un cero dentro del intervalo.

Lo mismo ocurre con la segunda derivada, tiene al menos 2 ceros dentro del intervalo.

De esta mismo forma, la derivada n-ésima v^n tiene por lo menos n ceros en el intervalo (-1,1), o exactamente n ceros porque se trata ya de un polinomio n-ésimo grado.

Respecto la segunda parte, la derivada de P_n', por el mismo teorema, debe tener al menos n-1 ceros en el intervalo. Pero como este también es un polinomio de (n-1)-énesimo grado, tiene exactamente n-1 ceros. Por lo que la derivada debe ser n-k ceros en el intervalo (-1,1).

Podemos suponer que es cierto todo gracias al Teorema de Comparación de Sturm, citado en [**?**].

Dicho teorema

"Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ dos soluciones independientes. Si x_1 y x_2 son dos ceros consecutivos de $u_1(x)$, entonces existe un único cero de $u_2(x)$ en el intervalo abierto (x_1, x_2)."$\square$

3.9. Acotación de los polinomios de Legendre.

$x \in [-1, 1]$ por lo tanto, $|P_n(x)| = |P_n(\cos\theta)| \leq 1$

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos(\theta) + isen(\theta)\cos\varphi|^n d\varphi$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos^2(\theta) + sen^2(\theta)\cos^2\varphi|^{\frac{n}{2}} d\varphi$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos^2(\theta) + sen^2(\theta)|^{\frac{n}{2}} d\varphi = 1.$$

Capítulo 4

Funciones adjuntas de Legendre.

4.1. Introducción

En este capítulo se estudia un conjunto de funciones $P_n^m(x)$ basadas en los polinomios de Legendre $P_n(x)$ los cuales serán de gran interés en capítulos posteriores.

Este capítulo está basado en [8] y [1].

4.2. Funciones adjuntas.

Las funciones adjuntas de Legendre las obtendremos como solución de la ecuación diferencial adjunta de Legendre, la cual viene dada por

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0, \tag{4.1}$$

donde $x \in [-1,1] \quad |y(\pm 1)| < +\infty$.

Demostremos que $\lambda = n(n+1)$ son valores propios donde $n = m, m+1,$

Si reemplazamos λ en la ecuación diferencial adjunta de Legendre:

$$y''(1-x^2) - 2xy'^{]+y(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2})=0.}(4.2)$$

Y además hacemos la siguiente sustitución: $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}v(x)$ resulta

$$v''(1-x^2) - 2(m+1)xv' + [\lambda - m(m+1)]v = 0. \tag{4.3}$$

Probemos que los polinomios, $v_m(x) = \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$ son soluciones de la ecuación anterior, para lo cual se procede por inducción.

Para $m = 0$, (4.2) resulta la ecuación diferencial de Legendre. Derivando con respeto x se obtiene

$$v_1''(x)(1-x^2) - 2xv_1'(x) - 2v_(x) - 2xv_1'(x) + \lambda v_1(x) = 0.$$

Reagrupando términos es fácil obtener

$$v_1''(x)(1-x^2) - 2(1+1)xv_1'(x) + [\lambda - (1(1+1)]v_1(x) = 0, \tag{4.4}$$

por tanto para $m = 1$ se satisface (4.3).

Supongamos ahora que se cumple (4.3). Derivando respecto a x s tiene

$$v_{m+1}''(1-x^2) - 2xv_{m+1}'(x) - 2(m+1)xv_{m+1}' + [\lambda - m(m+1)]v_{m+1}(x) = 0, \tag{4.5}$$

de donde reordenando se tiene

$$v_{m+1}'(1-x^2) - 2x[(+1)+1]v_{m+1}' + [\lambda - (m+1)m+2)]v_{m+1}(x) = 0$$

lo que confirma la hipótesis de inducción (4.3).

Por lo tanto, $v(x) = \frac{d^m P_n}{dx^m}$ es solución de (4.1) solo si $\lambda = n(n+1)$ para que se cumpla la ecuación de Legendre, donde n es un entero positivo, por lo que se quedaría de la siguiente forma:

$$P_n^{(m)} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}. \tag{4.6}$$

esta expresión se le conoce como las funciones adjuntas de Legendre.

4.3. Norma y ortogonalidad de las funciones adjuntas.

Vamos a calcular la norma $||P_n^{(m)}||$.

Teniendo en cuenta (4.1) y (4.2), si multiplicamos (4.1) por $(1-x^2)^m$ y sabemos que $\lambda = n(n+1)$ y que v(x) = $\frac{d^m P_n}{dx^m}$ y cambiamos m + 1 por m obtenemos

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}] = -[\lambda - m(m-1)](1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}. \qquad (4.7)$$

Introduzcamos la siguiente anotación

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^1 P_n^{(m)} P_k^{(m)} = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\frac{d^m P_k}{dx^m},$$

Se nos queda una integral por partes donde escogemos

$$u = ((1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \rightarrow du = \frac{d}{dx}[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}]$$

$$dv = \frac{d^m P_k}{dx^m} \rightarrow v = \frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}$$

expresándose como,

$$L_{n,k}^m = [\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}(1-x^2)^m]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}]dx$$

con (4.3) y sabiendo de $\lambda = n(n+1)$,

$$L_{n,k}^m = 0 - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}(-[n(n+1)-m(m-1)](1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}})$$

$$L_{n,k}^m = 0 - \int_{-1}^{1} (-[n(n+1) - m(m-1)](1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}})$$

$$L_{n,k}^m = |[n(n+1) - m(m-1)]| \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}$$

$$L_{n,k}^m = |n(n+1) - m(m-1)| L_{n,k}^{m-1} = (n+m)(n+m-1) L_{n,k}^{m-1}$$

De esta fórmula de recurrencia se obtiene que:

$$L_{n,k}^m = (n+m)(n+m-1)...(n+1)n...(n-m+1) L_{n,k}^0 =$$

$$\frac{(n+m)!}{n!} \frac{n!}{(n-m)!} L_{n,k}^0 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} L_{n,k}^0.$$

Por lo tanto, sabiendo que cada polinomio es de Legendre y aplicando la ortogonalidad se deduce que:

$$Si \quad k \neq n$$
$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = 0$$

$$Si \quad k = n$$
$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

es decir, las funciones adjuntas son ortogonales entre si y el cuadrado de la norma será:

$$||P_n^{(m)}||^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{4.8}$$

4.4. Carácter cerrado del sistema de funciones adjuntas.

Para poder demostrar este apartado vamos a necesitar el siguiente teorema:

Teorema 1. *Toda función f(x), continua en el segmento [-1,1] y que se anule en sus extremos, puede ser aproximada uniformemente con cualquier grado de exactitud por una combinación lineal de funciones adjuntas de cualquier orden m.*
Es decir, que f(-1) = f(1) = 0.

Demostración:

En primer lugar, sabemos que las derivadas de los polinomios de Legendre $\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ son polinomios de grado n-m. Es decir,

$\frac{d^m}{dx^m}P_{m+1}(x)$ polinomio de grado 1;

$\frac{d^m}{dx^m}P_{m+k}(x)$ polinomio de grado k;

$\left\{\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\}_{n=m}^{\infty}$ polinomio de grado 0, 1, ... k, ... base de los R[x];

Por lo tanto, se puede realizar una combinación lineal mediante estos polinomios, que junto al Teorema de Weierstrass.

Es un resultado que afirma que las funciones reales continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado pueden ser aproximadas tanto como se quiera por un polinomio. Es decir, los polinomios de coeficientes reales son densos en el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo cerrado.

Para cualquier $\epsilon > 0$ y para cualquier función $\overline{f}(x)$ continua sobre un intervalo [a, b] $\subset \mathbb{R}$, existe un polinomio de coeficientes reales, Q(x), tal que $\forall x \in [a,b] \rightarrow |\overline{f}(x) - Q(x)| < \epsilon$.

Dicho esto, lo aplicamos en nuestro intervalo [-1,1] y con una función $\overline{f}(x)$ continua en este intervalo, $\forall \epsilon > 0 \rightarrow \quad \exists Q(x) \in \mathbb{R} \quad / \quad |\overline{f}(x) - Q(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [-1,1]$.

Q(x) es un polinomio de grado k, por lo tanto $\exists\ c_0, c_1, ...c_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q(x) = \sum_{n=m}^{n_0} c_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$|\overline{f}(x) - \sum_{n=m}^{k} c_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)| < \epsilon.$$

Ahora, realizamos el siguiente cambio, multiplicamos a la desigualdad por $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$

$$|\overline{f}(x)(1-x^2)^{\frac{m}{2}} - \sum_{n=m}^{k} c_n (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)| < \epsilon(1-x^2)^{\frac{m}{2}} < \epsilon$$

y si aplicamos el siguiente cambio,

$$f_1(x) = \overline{f}(x)(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \rightarrow \overline{f}(x) = \frac{f_1(x)}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}$$

Dado f(x) con f(-1) = f(1) = 0 (cumple la hipótesis del teorema) la podemos aproximar uniformemente por una función $f_1(x)$ de manera que

$$\exists\, \delta > 0 \quad / \quad f_1(x) = 0$$

$$\forall x \in [-1, -1-\delta] \cup [1-\delta, 1]$$

$$\exists\, f_1(x) \quad / \quad |f_1(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|f_1(x) - \sum_{n=m}^{k} c_n P_n^m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para } k \geq n$$

Por lo tanto, tenemos

$$|f(x) - \sum_{n=m}^{k} c_n P_n^m(x)| = |f(x) - f_1(x) + f_1(x) - \sum_{n=m}^{k} c_n P_n^m(x)|$$

$$\geq |f(x) - f_1(x)| + |f_1(x) - \sum_{n=m}^{k} c_n P_n^m(x)| \geq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Utilizando este lema, sabemos que cualquier función continua en el intervalo [-1, 1], con cualquier grado de exactitud se puede aproximar en medida mediante la función f(x), continua en el intervalo y que se anula en los extremos.

Tomando una combinación linea de funciones adjuntas que se aproximen uniformemente a la función f(x) se demuestra la plenitud y con esto, la propiedad cerrada del sistema de funciones adjuntas.

Capítulo 5

Funciones esféricas.

5.1. Introducción

En este capítulo tratará el estudio de la ecuación de Laplace, más en particular, la ecuación de Laplace para la esfera.

La solución de este problema proporciona un conjunto de funciones propias $Y_{n,m}(\theta, \psi)$ las cuales constituyen un sistema ortogonal completo sobre la esfera.

El estudio de este capitulo esta basado en [8], [1] y [2].

5.2. La ecuación de Laplace

Dada la ecuación de Laplace, vamos a resolverla mediante el método de separación de variables:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi} = 0. \tag{5.1}$$

Vamos ha realizar la separación de variables de la siguiente forma:

$$u = R(r)Y(\theta, \psi)$$

si cogemos la ecuación (5.1) y sustituimos $u = R(r)Y(\theta, \psi)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR(r)}{dr})Y(\theta,\psi) + R(r)[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\psi)}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\psi)}{\partial\psi^2}] = 0$$

y ahora multiplicando por r^2

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR(r)}{dr})Y(\theta,\psi) + R(r)[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\psi)}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\psi)}{\partial\psi^2}] = 0.$$

Si separamos a la izquierda lo que depende de R(r) y la derecha lo que depende de $Y(\theta, \psi)$

$$\frac{\frac{d}{dr}[r^2\frac{dR(r)}{dr}]}{R(r)} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\psi)}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\psi)}{\partial\psi^2}}{Y(\theta,\psi)}.$$

La parte de la izquierda depende de r y no queda dependiendo de θ ni ψ y la parte de la derecha ocurre lo mismo pero al revés, es decir, depende de θ, ψ y no de r

$$\frac{\frac{d}{dr}[r^2\frac{d\,R(r)}{dr}]}{R(r)} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\psi)}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\psi)}{\partial\psi^2}}{Y(\theta,\psi)} = \lambda.$$

Nos centramos primero en la parte de la izquierda

$$\frac{d}{dr}[r^2\frac{d\,R(r)}{dr}] = \lambda R(r)$$

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2r\frac{d\,R(r)}{dr} - \lambda R(r) = 0$$

estamos ante la ecuación diferencial de Euler.

5.3. La ecuación de Laplace sobre la esfera

La parte de la derecha de la ecuación anterior, se llama ecuación de Laplace de la esfera.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\psi)}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\psi)}{\partial\psi^2} = -\lambda Y(\theta,\psi)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\psi)}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\psi)}{\partial\psi^2} + \lambda Y(\theta,\psi) = 0.$$

Ahora aplicamos separación de variables y multiplicamos por $\sin^2\theta$.

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\psi)}{\partial\theta}) + \frac{\partial^2 Y(\theta,\psi)}{\partial\psi^2} + \lambda\sin^2\theta Y(\theta,\psi) = 0$$

y a continuación vamos a hacer la siguiente sustitución: $Y(\theta,\psi) = \Theta(\theta)\cdot\Psi(\psi)$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta})\Psi(\psi) + \Theta(\theta)\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2} + \lambda\sin^2\theta\Theta(\theta).\Psi(\psi) = 0$$

$$(\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}) + \lambda\sin^2\theta\Theta(\theta)).\Psi(\psi) + \Theta(\theta)\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2} = 0$$

$$(\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}) + \lambda\sin^2\theta\Theta(\theta)).\Psi(\psi) = -\Theta(\theta)\frac{d2\Psi(\psi)}{d\psi^2}$$

$$\frac{(\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}) + \lambda\sin^2\theta\Theta(\theta))}{\Theta(\theta)} = -\frac{\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2}}{\Psi(\psi)}.$$

El lado de la izquierda depende solo de θ y el lado de la derecha depende solo de ψ. Por lo tanto

$$\frac{(\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta})+\lambda\sin^2\theta\Theta(\theta))}{\Theta(\theta)}=-\frac{\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2}}{\Psi(\psi)}=\mu$$

1- Por una parte tenemos

$$\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2}=\mu\Psi(\psi)$$

si nos centramos en la igualdad anterior, tendríamos

$$\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2}-\mu\Psi(\psi)=0.$$

Tenemos una ecuación diferencial de segundo orden donde aplicamos el siguiente cambio,

$$\Psi(\psi)=\exp(r\psi).$$

Por lo tanto, tendríamos el siguiente polinomio característico

$$r^2-\mu=0$$

$$r^2=\mu\rightarrow r=\pm\sqrt{\mu}$$

$$\Psi=Ae^{\sqrt{\mu}\psi}+Be^{-\sqrt{\mu}\psi}.$$

Aquí tenemos dos casos:

1- Si $\mu>0\rightarrow\Psi(\psi)$ no acotada.

2- Si $\mu\leq 0\rightarrow\Psi(\psi)$ acotada en $\Psi=\alpha\cos(\sqrt{-\mu}\psi)+\beta\sin(\sqrt{-\mu}\psi)$

Sabemos que $\Psi(\psi) = \Psi(\psi + 2\pi)$.

Por lo tanto tenemos lo siguiente,

$$\Psi = \alpha \cos(\sqrt{-\mu}\psi) + \beta \sin(\sqrt{-\mu}\psi)$$

$$\Psi = \alpha \cos(\sqrt{-\mu}(\psi + 2\pi)) + \beta \sin(\sqrt{-\mu}(\psi + 2\pi))$$

igualando,

$$\alpha \cos(\sqrt{-\mu}\psi) + \beta \sin(\sqrt{-\mu}\psi) = \alpha \cos(\sqrt{-\mu}(\psi + 2\pi)) + \beta \sin(\sqrt{-\mu}(\psi + 2\pi)).$$

Por lo tanto,

$$\cos(\sqrt{-\mu}\psi) = \cos(\sqrt{-\mu}(\psi + 2\pi))$$

$$\sin(\sqrt{-\mu}\psi) = \sin(\sqrt{-\mu}(\psi + 2\pi))$$

con lo anterior, si hacemos el siguiente cálculo

$$\sqrt{-\mu} = m \in \mathbb{Z}$$
$$-\mu = m^2 \rightarrow \mu = -m^2$$

deducimos que

$$\Psi_m(\psi) = \cos(\mathrm{m}\psi) \text{ si m} \geq 0$$

$$\Psi_m(\psi) = \sin(\mathrm{m}\psi) \text{ si m} < 0$$

2 - Por otra parte esta

$$(\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta})+\lambda\sin^2\theta\Theta(\theta))+\mu\Theta(\theta)=0.$$

Antes de nada, vamos a ver el siguiente cambio que aplicaremos después

$$t=\cos\theta[yportanto]\frac{dt}{d\theta}=-\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}(arccos(\theta))=\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-t^2}.$$

Por simplicidad de la notación y aabusano del lenuaje, denotaremos por $\Theta(t)=\Theta(\theta(t))$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt}=\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

de donde

$$\frac{d\Theta(t)}{d\theta}=\frac{d\Theta(t)}{dt}\frac{dt}{d\theta},$$

por tanto

$$\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}=\frac{d\Theta(\theta)}{dt}\frac{dt}{d\theta}=-\frac{d\Theta(\theta)}{dt}\sin\theta,$$

finalmente

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}=-\frac{d\Theta(t)}{dt}.$$

Después de estas operaciones para aplicar bien los cambios. Tomamos la ecuación del apartado 2 y dividiendo por $\sin^2\theta$ y por otro lado recordamos que $\mu=-m^2$, se tiene

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta})+\lambda\sin^2\theta\Theta+\mu\Theta(\theta)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta})+\lambda\theta\Theta(\theta))+\mu\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}) + (\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta})\Theta(\theta) = 0.$$

Por simplicidad, en lo sucesivo denotaremos por $\Theta = \theta((t))$

$$-\frac{d}{dt}(\sin^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}) + (\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta})\Theta = 0$$

$$-\frac{d}{dt}((1-t^2)(-\frac{d\Theta}{dt}) + (\lambda - \frac{m^2}{1-t^2})\Theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}((1-t^2)(\frac{d\Theta}{dt}) + (\lambda - \frac{m^2}{1-t^2})\Theta = 0. \qquad \square \tag{5.2}$$

Esta es la Ecuación Diferencial de las funciones adjuntas de Legendre.

Gracias a esto hemos concluido que

$$\Theta(t) = P_{n,m}(t) \text{ de donde } \Theta(\theta) = P_{n,m}(\cos\theta, \lambda)$$

Por lo que si m = -n, ... , -1, 0, 1, ... , n.

Deducimos que,

$$\text{Si m} \geq 0 \quad Y_{n,m}(\theta,\lambda) = P_{n,m}(\cos\theta)\cos(m\psi)$$

$$\text{Si m} < 0 \quad Y_{n,m}(\theta,\lambda) = P_{n,m}(\cos\theta)\sin(m\psi)$$

5.4. Ortogonalidad del sistema de funciones esféricas.

Nos vamos a centrar en la superficie $\sum$ de la esfera.

Dadas dos funciones esféricas Y_1 y Y_2 con sus respectivas λ, tenemos

$$\triangle_{\theta,\varphi} Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0; \quad \triangle_{\theta,\varphi} Y_2 + \lambda_1 Y_1 = 0 \tag{5.3}$$

donde

$$\triangle_{\theta,\varphi} Y_1 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\varphi^2}$$

$$\triangle_{\theta,\varphi} Y_2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y_2}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_2}{\partial\varphi^2}$$

$$\iint_{\sum} Y_1 \triangle_{\theta,\varphi} Y_2 \mathrm{d}\Omega = -\iint_{\sum} \frac{\partial Y_2}{\partial\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi}\frac{\partial Y_1}{\partial\varphi}\mathrm{d}\Omega \tag{5.4}$$

con

$$(d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi).$$

Como nos encontramos en la superficie de la esfera, se verifica que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial\theta} i_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi} i_\theta \quad \text{y} \quad div\, \vec{A} = \frac{1}{\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}]$$

De manera que,

$$\triangle_{\theta,\varphi} = div\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u.$$

La fórmula (5.4) se puede escribir entonces de la siguiente forma

$$\iint_{\sum} Y_1 \triangle_{\theta,\varphi} Y_2 = -\iint_{\sum} \operatorname{grad} Y_1 \cdot \operatorname{grad} Y_2 \, d\Omega,$$

cambiando de lugar las Y_1 e Y_2 y restando las fórmula obtenida previa, se obtiene

$$\iint_{\sum} (Y_1 \triangle_{\theta,\varphi} Y_2 - Y_2 \triangle_{\theta,\varphi} Y_1) \, d\Omega = 0.$$

De (5.3) sabemos que:

$$\triangle_{\theta,\varphi} Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0 \rightarrow \triangle_{\theta,\varphi} Y_1 = -\lambda_1 Y_1$$

$$\triangle_{\theta,\varphi} Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0 \rightarrow \triangle_{\theta,\varphi} Y_2 = -\lambda_2 Y_2$$

$$\iint_{\sum} (-\lambda_2 Y_1 Y_2 + \lambda_1 Y_2 Y_1) \, d\Omega = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \iint_{\sum} (Y_1 Y_2) \mathrm{d}\Omega = 0.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\iint_{\sum} (Y_1 Y_2) \mathrm{d}\Omega = 0$$

o bien,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (Y_1(\theta,\varphi) Y_2(\theta,\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi = 0$$

Queda de esta forma demostrado que la ortogonalidad de las funciones esféricas que corresponden a diferentes λ.

5.5. Armónicos esféricos.

Llamaremos armónico esféricos de orden n a cualquier expresión de la forma

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

el cual es combinación lineal de funciones esféricas $Y_{n,m}(\theta,\psi)$.

Para demostrar la ortogonalidad de los armónicos esféricos, veremos en primer lugar la ortogonalidad de las funciones esféricas.

5.5.1. Aplicación a la resolución de la ecuación de Laplace en el espacio.

Ahora vamos a demostrar que las funciones esféricas son ortogonales dos a dos en la esfera. Estudiaremos únicamente el caso en que $k_1, k_2 \leq 0$ por ser en otro caso completamente similar.

$$\iint_{\sum} (Y_n^{(k_1)} Y_m^{(k_2)})\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (Y_n^{((k_1 k)}(\theta,\varphi) Y_n^{(k_2)}(\theta,\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_n^{(k_1)}(\cos\theta) \cos(k_1\varphi) P_m(k_2)(\cos\theta) \cos(k_2\varphi) \sin(\theta) d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k_1\varphi)\cos(k_2\varphi) d\varphi \int_0^{\pi} P_n^{(k_1)}(\cos\theta) P_m^{(k_2)}(\cos\theta) \sin(\theta) d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k_1\varphi)\cos(k_2\varphi) d\varphi \int_{-1}^{+1} P_n^{(k_1)}(t) P_m^{(k_2)}(t) dt.$$

En primer lugar se tiene que si $k_1 \neq k_2$ la integral es nula, y esto para cualquier combinación de signos en $k-1$, k_2

Resolvemos la integral de la izquierda en el caso de que $k_1 = k_2 = k \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k_1\varphi)\cos(k_2\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2(k\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2k\varphi)}{2}d\varphi$$

$$\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{4k\varphi}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

A continuación tenemos dos integrales, la segunda integral, contiene dos funciones adjuntas que como he comentado en el apartado 4.3 ocurre lo siguiente

$$Si\, n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(k_1)}(x)P_m^{(k_2)}(x)dx = 0$$

$$Si\, n = m$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(k_1)}(x)P_m^{(k_2)}(x)dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Y lo visto en el apartado 3.7,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \text{ si m} \neq \text{n}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1} \text{ si m = n.}$$

Por lo tanto en caso de ser $n =$ se tiene que estudiar en función k_1 y k_2 para ver las soluciones. e aso de ser $n \neq m$ el resultado es nulo.

$$\iint_{\sum} (Y_n^{(k_1)} Y_{(k_2)})_{\, d\theta=0, \text{ si } k_1 \neq k_2}$$

$$\iint_{\Sigma} (Y_n^{(k_1)} Y_n^{(k_2)})\, d\theta = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \text{Si } k_1 = k_2 = k \neq 0$$

$$\iint_{\Sigma} (Y_n^{(k_1)} Y_n^{(k_2)})\, d\theta = 2\pi \frac{2}{(2n-1)!}, \text{Si } k_1 = k_2 = 0.$$

Sabiendo esto, vamos a ver la norma:

$$||Y_n^{(k)}||^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [(Y_n^{(k)}(\theta,\varphi)]^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{2}{2n+1} \pi \epsilon_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}$$

donde k > 0 y $\epsilon_k = 1$.

Suponiendo que es posible desarrollar una función arbitraria $f(\theta, \varphi)$ en series por funciones esféricas, que admita término a término la integración se tiene

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

donde A_{nm} y B_{nm} son los coeficientes de Fourier, que se representan así

$$A_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta) \cos m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi}{||Y_n^{(m)}||^2}$$

$$B_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi}{||Y_n^{(m)}||^2}$$

donde

$$|Y_n^{(m)}||^2 = \frac{2\pi\epsilon_m}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}$$

y

$$\epsilon_m = 2 \text{ para m} = 0$$

$$\epsilon_m = 1 \text{ para m} > 0.$$

La solución general de la ecuación de Laplace se puede representar de la forma siguiente:

- Para el problema de contorno interior

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{m} (\frac{r}{a})^n Y_n(\theta,\varphi)$$

- Para el problema de contorno exterior

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{m} (\frac{a}{r})^{n+1} Y_n(\theta,\varphi)$$

donde,

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

es un Armónico esférico.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En el presente trabajo se ha abordado el estudio de la solución de la parte esférica de la ecuación de Laplace mediante el método de separación de variables.

Para ello se ha estudiado en primer lugar, la ecuación general de la teoría de las funciones especiales. A continuación, se han obtenido de forma detallada los polinomios de Legendre, sus relaciones de recurrencia, su ecuación diferencial y su completitud, lo que permite obtener aproximaciones finitas de funciones continuas en [-1, 1] como combinaciones lineales finitas de polinomios de Legendre hasta cualquier orden de precisión prefijado previamente.

Dado que es conveniente la aproximación del producto de $f(x)$ y $g(x)$ se incluye en las referencias del articulo de Adams [4] sobre el producto de polinomios de Legendre.

A continuación, se trata un estudio similar para las funciones adjuntas de Legendre, cuyo producto puede manipularse como en [7].

Finalmente, se resuelve el caso de la ecuación de Laplace para la esfera bidimensional, obteniéndose su solución mediante separación de variables que nos conduce a la ecuación diferencial adjunta de Legendre y la conocida del oscilador armónico, las cuales nos proporcionan la solución de la misma. Estas funciones resultan un sistema ortogonal completo sobre la esfera, apto por tanto para aproximar funciones definidas en la esfera mediante combinaciones lineales finitas de armónicos esféricos. Para el manejo del producto de la aproximación a dos funciones resuelta necesario la manipulación de productos de armónicos esféricos para la cual puede seguirse entre otros el camino marcado en [7]

Como posible vía para completar este trabajo, esta el estudio de los armónicos elipsódicos, el estudios de otras familias de polinomios ortogonales, el estudio de las aplicaciones de los armónicos esféricos a la resolución de problemas, tales como la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno, el estudio del potencial terrestre, entre otros.

Este es un campo muy extenso del cual en este trabajo solo se realiza como primera aproximación.

Bibliografía

[1] Ayant, Y; Borg, M. *Funciones especiales. PEARSON EDUCACION, 1974.*

[2] Hobson, Ernest William. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics Reissue Edition. Reissue, 2012.*

[3] Apostol, Tom. *Análisis Matemáticos (2ª Edición). Reverte 1986.*

[4] JC, Adams. *On the expression for the product of any two Legendre's coefficients by means of a series of Legendre's coefficientes. Proc Roy Soc London, 1878.*

[5] TISSERAND, Félix. *Traite De Mécanique Céleste Tomo 2 François. Gauthiere-Villars Paris, 1891.*

[6] Valdivia Ureña, Manuel. *Análisis Matemático III, UNED, 1998.*

[7] Forner Gumbau, Manuel. *Design of a Mathematica package to develop the product of some spherical functions as linear combinations of themselves. SciencieDirect 2019.*

[8] Tijonov, A; Samarsky, A; 1980. *Ecuaciones de la física matemática. Moscú, 1978.*