UNIVERSITAT JAUME I

Grado en Matemática Computacional

Trabajo Final de Grado

Complejos simpliciales y semigrupos numéricos

Autor:
Àngel Ruiz Fas

Tutor académico:
Julio José Moyano Fernández

Fecha de lectura: 10 de julio de 2023
Curso académico 2022/2023

Resumen

El eje principal de este documento son los semigrupos numéricos, un tipo especial de monoides cuyas características y propiedades se estudian a lo largo de este Trabajo de Fin de Grado. El objetivo final de éste es trazar una relación entre estas estructuras algebraicas y otro tipo de conjuntos denominados “complejos simpliciales”. Para ello, el trabajo se dividirá en tres partes. En primer lugar, definiremos los conceptos básicos relacionados con los semigrupos numéricos así como las particularidades más relevantes de los mismos. Además, repasaremos otras estructuras algebraicas importantes como los anillos, los cuerpos y los espacios vectoriales. Después, pasaremos a caracterizar los símplices y los complejos simpliciales, así como una serie de aplicaciones lineales que resultan necesarias para nuestro objetivo final. Finalmente, se mostrará la forma en la que todos estos conceptos se relacionan mediante la demostración de un teorema y algún ejemplo.

Palabras clave

Semigrupo numérico, complejo simplicial, homología, serie de Poincaré, característica de Euler

Keywords

Numerical semigroup, simplicial complex, homology, Poincaré series, Euler characteristic

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este documeto se corresponde con el Trabajo de Final de Grado de los estudios de Matemática Computacional. Su objetivo principal es aplicar los conocimientos de álgebra lineal adquiridos a lo largo de los estudios de grado para así entender los complejos simpliciales. Esto nos permitirá relacionar estos conjuntos con otras estructuras algebraicas importantes como son los semigrupos numéricos, un tipo particular de monoides.

Para conseguir el objetivo planteado previamente, el trabajo se dividirá en tres partes. En primer lugar, basándonos en los contenidos de [5], [4] y [2], definiremos el concepto de monoide y de semigrupo numérico y repasaremos los fundamentos de otras estructuras algebraicas como los anillos, los cuerpos y los espacios vectoriales. Dichas estructuras aparecerán secundariamente en posteriores capítulos. Además, repasaremos algunas características de los semigrupos numéricos.

Posteriormente pasaremos a estudiar los símplices y los complejos simpliciales, apoyándonos en los libros [3] y [6]. Estas estructuras supondrán la herramienta principal con la que trabajar en este documento. Daremos sus definiciones básicas y después mostraremos una serie aplicaciones lineales importantes con complejos simpliciales que nos permitirán construir, a través de su núcleo y su imagen, unos grupos de homología que resultarán relevantes a la hora de dar la última definición del capítulo, que será la que nos permita relacionar los dos conceptos protagonistas de este trabajo.

Finalmente, a partir de los conocimientos adquiridos y de parte del contenido del artículo [1], trazaremos la relación que buscamos entre los semigrupos numéricos y los complejos simpliciales. Para ello, daremos una definición previa y finalizaremos con un ejemplo ilustrativo aplicando todo lo aprendido y usando herramientas computacionales.

Capítulo 2

Fundamentos

En este primer capítulo estudiaremos las estructuras algebraicas más importantes que utilizaremos a lo largo del desarrollo de nuestro trabajo. Además, veremos los conceptos fundamentales en el estudio de los semigrupos numéricos, que suponen uno de los ejes centrales del mismo.

2.1. Estructuras algebraicas

Las estructuras algebraicas que necesitaremos a lo largo de esta memoria son los monoides (con los semigrupos numéricos como caso particular), los anillos y cuerpos y los espacios vectoriales. Recordamos brevemente estas nociones siguiendo [2] y [4].

2.1.1. Monoides y semigrupos

Definición 2.1. *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ y $+ : S \times S \to S$ una operación binaria asociativa sobre S. Denominamos* ***semigrupo*** *al par $(S, +)$.*

En adelante, supondremos que $+$ es también una operación conmutativa. Además, la omitiremos a la hora de referirnos a un semigrupo, denotándolo símplemente como S. Además, será necesario definir el conjunto $S^* = S \setminus \{0\}$.

Definición 2.2. *Sea M un semigrupo. Diremos que M es un* ***monoide*** *si tiene elemento neutro, es decir, si existe un elemento $e \in M$ tal que $m + e = e + m = m$ para todo $m \in M$.*

En la siguiente sección se define una clase de monoides llamada *semigrupos numéricos.* Asumiremos a partir de ahora que, cuando hablemos de semigrupos numéricos, éstos tendrán estructura de monoide, es decir, poseerán elemento neutro aditivo. Se ha decidido mantener la nomenclatura por razón de la tradición.

Ejemplo 2.1. Sea $S = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ con la suma usual $+$. El par $(S, +)$ es un monoide (de hecho será un semigrupo numérico).

El estudio de las subestructuras es importante en la matemática moderna. En el caso de los semigrupos se habla de subsemigrupos.

Definición 2.3. *Sea S un semigrupo. Sea $T \subseteq S$ cerrado con la operación binaria $+$ definida en S. Entonces decimos que T es un* ***subsemigrupo*** *de S.*

En el caso de un monoide, de forma totalmente análoga se definiría el concepto de submonoide.

2.1.2. Anillos y cuerpos

Las estructuras centrales del álgebra abstracta son las de anillo y cuerpo, que definimos a continuación.

Definición 2.4. *Sea R un conjunto no vacío y sean $+ : R \times R \to R$ y $\cdot : R \times R \to R$ dos operaciones binarias. La terna $(R, +, \cdot)$ es un* ***anillo*** *si cumple las siguientes condiciones:*

1. *$(R, +)$ es un grupo abeliano.*
2. *$(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$ y $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$, para cualesquiera $r, s, t \in R$.*
3. *$(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$, para cualesquiera $r, s, t \in R$*

Si existe $e \in R$ tal que $e \cdot r = r \cdot e = r$ para todo $r \in R$, entonces se dice que R es un ***anillo con unidad****.*

Cuando nos refiramos a un anillo, prescindiremos en su notación de las operaciones binarias $+$ y $\cdot$ y lo denotaremos simplemente como R. Además, dados $r, s \in R$, podemos omitir el símbolo $\cdot$ de forma que $r \cdot s = rs$.

Ejemplo 2.2. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la suma y el producto usual forma un anillo.

Definición 2.5. *Un anillo en el que todo elemento distinto del elemento neutro posee inverso multiplicativo se llama **cuerpo**.*

Ejemplo 2.3. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales o los números reales $\mathbb{R}$ junto con las respectivas operaciones de adición y multiplicación usuales poseen estructura de cuerpo.

2.1.3. Espacios vectoriales

En el caso del álgebra lineal, con ayuda de la estructura de cuerpo se define la estructura de espacio vectorial como sigue.

Definición 2.6. *Sean K un cuerpo y V un conjunto no vacío y sean $+ : V \times V \to K$ y $\cdot : K \times V \to V$ dos operaciones binarias. Llamamos K-**espacio vectorial** a la terna $(V, +, \cdot)$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, *para todos* $u, v, w \in V$.
2. $u + v = v + u$, *para cualesquiera* $u, v \in V$.
3. *Existe* $e \in V$ *tal que* $e + v = v + e = v$, *para todo* $v \in V$.
4. *Para cualquier* $v \in V$, *existe* $w \in V$ *tal que* $v + w = w + v = e$.
5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, *para todos* $v \in V$, $\lambda, \mu \in K$.
6. $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v$ *y* $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$, *para cualesquiera vectores* $u, v \in V$, *y cualesquiera escalares* $\lambda, \mu \in K$.
7. $1v = v$, *para todo* $v \in V$.

Al igual que con los anillos, para referirnos a un espacio vectorial $(V, +, \cdot)$, prescindiremos de las operaciones binarias y lo nombraremos simplemente como V. Nótese que aquí omitimos también el símbolo $\cdot$ de forma que, dados $v \in V$ y $\lambda \in K$, podemos escribir $\lambda \cdot v = \lambda v$.

Por otro lado, la subestructura correspondiente a los espacios vectoriales es la de subespacio vectorial. Si nos decantamos por una definición axiomática de subespacio, podemos decir la siguiente.

Definición 2.7. *Sea V un espacio vectorial. Sea $U \subseteq V$. Se dice que U es un **subespacio vectorial** de V si:*

1. U *contiene al vector* 0 *de* V.

2. $u + v \in U$ *para todo* $u, v \in U$.

3. $\lambda u \in U$ *para cualquier vector* $u \in U$ *y para cualquier escalar* $\lambda \in K$.

Nos interesa también definir el concepto de (sub)espacio vectorial cociente, para lo cual necesitamos, en primer lugar, la siguiente relación.

Definición 2.8. *Sea* V *un espacio vectorial y sea* U *un subespacio vectorial de* V. *Sean* $v, w \in V$. *Definimos en* V *la relación binaria* $\mathcal{R}$ *de la siguiente forma:*

$$v\mathcal{R}w \quad \textit{si y solo si} \quad v - w \in U$$

Veamos ahora que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Para ello, debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.

1. **Reflexividad:** Sea $v \in V$. Hemos de ver que $v\mathcal{R}v$, es decir, que $v - v \in U$. Pero $v - v = 0$ y $0 \in U$ por ser el neutro de la suma. Luego $\mathcal{R}$ es reflexiva.

2. **Simetría:** Sean $v, w \in V$. Supongamos que $v\mathcal{R}w$, es decir, que $v - w \in U$. Tenemos que demostrar que $w\mathcal{R}v$, dicho de otra forma, que $w - v \in U$. Sabemos que $v - w = u \in U$. Multiplicando por -1 a ambos lados obtenemos que $w - v = -u$. Pero $-u \in U$ ya que $u \in U$ y $\lambda u \in U$ para todo $\lambda \in K$ y para todo $u \in U$. Por tanto, $\mathcal{R}$ es simétrica.

3. **Transitividad:** Sean $u, v, w \in V$. Supongamos que $u\mathcal{R}v$ y $v\mathcal{R}w$. Hemos de ver que $u\mathcal{R}w$, o lo que es lo mismo, que $u - w \in U$. Sabemos que $u - v = x_1 \in U$ y $v - w = x_2 \in U$. Sabemos que la suma de dos elementos de U está también dentro de U, por tanto, sumando los elementos anteriores obtenemos $x = x_1 + x_2 = (u - v) + (v - w) = u - v + v - w = u - w$, lo que implica que $u - w = x \in U$ y, por tanto, $u\mathcal{R}w$. Así, $\mathcal{R}$ es transitiva.

Como $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, podemos definir el correspondiente conjunto cociente, denotado V/U, donde la clase de equivalencia de un elemento $v \in V$ es precisamente:

$$[v] = v + U = \{v + u, u \in U\}$$

Estamos interesados en relacionar la dimensión del espacio vectorial cociente V/U con las dimensiones de V y U en el caso en que sean finitas. Efectivamente, existe una identidad que las relaciona, que es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Si* V *es un espacio vectorial de dimensión finita y* U *es un subespacio vectorial de* V, *entonces* $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$.

Demostración. Sean $n = \dim(V)$ y $m = \dim(U)$. Una base de U es $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Podemos completar esta base para obtener una base de V con la forma $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Veamos que $\{e_{m+1} + U, e_{m+2} + U \ldots, e_n + U\}$ es base de V/U. Para ello, hemos de notar que $[u] = [0]$ para todo $u \in U$ y, por tanto, $[0] = U$. Veamos primero que este conjunto de vectores es linealmente independiente.

Tomamos una combinación lineal de $\{e_{m+1} + U, e_{m+2} + U \ldots, e_n + U\}$ y la igualamos a $[0]$:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i (e_i + U) = [0]$$

Hemos de comprobar que $e_i = 0$ para todo i. Como $[0] = U$, tenemos:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i (e_i + U) = U$$

Esto podemos reescribirlo, aplicando la propiedad distributiva, como

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i + U = U.$$

Esto es equivalente a decir que $\sum\limits_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i \in U$, o lo que es lo mismo, a que $\sum\limits_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i = u$ con $u \in U$. Como $u \in U$, podemos escribir u como combinación lineal de los elementos de la base de U de forma que $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$. De este modo tenemos:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$$

Pasando el sumatorio del lado derecho de la igualdad al izquierdo y eliminando la notación de sumatorios obtenemos la siguiente igualdad:

$$\lambda_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \lambda_n e_n - \lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_m e_m = 0$$

Tenemos pues una combinación lineal de los vectores $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ igualada a 0. Como estos vectores forman una base de V, son linealmente independientes, y por tanto, $e_i = 0$ para todo i. En particular, $e_i = 0$ para todo $i \in \{m + 1, \ldots, n\}$. Como consecuencia de esto, $\{e_{m+1}+U, e_{m+2}+U \ldots, e_n+U\}$ es linealmente independiente, ya que hemos obtenido una combinación lineal de dichos vectores igualada a 0 donde todos los coeficientes son 0.

Veamos ahora que estos vectores son un sistema generador. Sea $v \in V$. Podemos escribirlo en relación a la base como $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m + \lambda_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \lambda_n e_n$. Tomamos ahora la clase $[v] = v+U = (\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_m e_m+\lambda_{m+1} e_{m+1}+\ldots+\lambda_n e_n)+U$. Pero $\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_m e_m$ es base de U, luego $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m = u$ con $u \in U$. Tenemos entonces, volviendo a la igualdad anterior, que $v+U = u+(\lambda_{m+1} e_{m+1}+\ldots+\lambda_n e_n)+U = (\lambda_{m+1} e_{m+1}+\ldots+\lambda_n e_n)+U$. Esto se puede reescribir como $v+U = \lambda_{m+1}(e_{m+1}+U)+\ldots+\lambda_n(e_n+U)$. Por tanto, $\{e_{m+1}+U, e_{m+2}+U \ldots, e_n+U\}$ es un sistema generador de V/U.

Finalmente, como $\{e_{m+1}+U, e_{m+2}+U \ldots, e_n+U\}$ es un sistema generador de V/U linealmente independiente, queda demostrado que es una base de V/U de dimensión $n-m$. $\square$

2.2. Semigrupos numéricos

En este trabajo se precisa estudiar un tipo especial de monoides: los semigrupos numéricos. Lo primero es definirlos.

Definición 2.9. *Un submonoide aditivo S del monoide aditivo $(\mathbb{N},+)$ se dice que es un **semigrupo numérico** si su complemento es un conjunto finito, esto es, si el conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ posee cardinal finito. Lo elementos del complemento se llaman lagunas o* gaps *de S.*

La mayor laguna de un semigrupo numérico posee un nombre especial:

Definición 2.10. *Sea S un semigrupo numérico. El **número de Frobenius** de S, denotado $F(S)$, es el mayor número $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \notin S$.*

Por norma general, en lugar de trabajar con el número de Frobenius, usaremos el concepto de *conductor* de S, denotado como $c(S)$, que es el menor número $s \in S$ tal que $s+n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos además que $c(S) = F(S)-1$. Se ve que no hay diferencia en usar uno u otro más allá que razones de tradición en según qué referencia se lea.

Si S es un semigrupo numérico y $c(S)$ es su conductor, podemos expresar dicho semigrupo de la siguiente forma:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, c(S), \rightarrow\}$$

Definición 2.11. *Sea S un semigrupo numérico y sea $A \subseteq S$. Definimos:*

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{N},\ a_i \in A \right\}$$

El conjunto $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico al que llamamos ***semigrupo numérico generado por*** *A. Decimos que S está generado por A si $S = \langle A \rangle$*

Ejemplo 2.4. Consideremos $S = \langle A \rangle = \langle 5, 7, 11 \rangle$. El semigrupo numérico S generado por A es $\{0, 5, 7, 10, 11, 14, \rightarrow\}$.

El hecho de que un semigrupo numérico tenga complemento finito se puede leer también en sus generadores de la manera siguiente.

Lema 2.1. *Sea $A \subset \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$. El conjunto $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico si y sólo si* $\mathrm{mcd}(A) = 1$.

Demostración. Supongamos primero que $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico. Veamos que $\mathrm{mcd}(A) = 1$. Sea $s \in \langle A \rangle$ y sea $d = \mathrm{mcd}(A)$. Como $s \in \langle A \rangle$, $d \mid s$, ya que existe $a \in A$ tal que $a \mid s$ y además $d \mid a$ por ser d el máximo común divisor de A. Sea c el conductor de $\langle A \rangle$. Sabemos que $x + 1 \in \langle A \rangle$ para todo $x \in \langle A \rangle$ tal que $x > c$. Por tanto, $d \mid x$ y $d \mid x + 1$. Consecuentemente, la única opción es que $d = 1$.

Supongamos ahora que $\mathrm{mcd}(A) = 1$. Hemos de probar que $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico. Para ello, basta demostrar que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es finito. Como $\mathrm{mcd}(A) = 1$, entonces existen $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{Z}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $z_1 a_1 + \ldots + z_n a_n = 1$. Para aquellos $z_i < 0, i \in \{1, \ldots, n\}$, movemos el término $z_i a_i$ al lado derecho de la ecuación. Así obtenemos unos índices $i_1, \ldots i_k, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $z_{i_1} a_{i_1} + \ldots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \ldots - z_{j_l} a_{j_l}$. Por tanto, existe $s \in \langle A \rangle$ tal que $s + 1 \in \langle A \rangle$. Veamos que si $n \geq (s-1)s + (s-1)$, entonces $n \in \langle A \rangle$. Sean $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = qs + r$ con $0 \leq r < s$. Como $n \geq (s-1)s + (s-1)$ y $n = qs + r$, entonces $qs + r \geq (s-1)s + (s-1)$ y como $r < s$, $(s-1) - r \geq 0$. Con estas desigualdades podemos obtener que $qs - (s-1)s \geq (s-1) - r \geq 0$, lo que nos lleva a que $qs - (s-1)s \geq 0$ y por tanto, $q \geq (s-1) \geq r$. Así, podemos escribir la expresión $n = (rs + r) + (q - r)s = r(s+1) + (q-r)s$. Obtenemos de este modo que $n \in \langle A \rangle$ por ser una combinación lineal de dos elementos de $\langle A \rangle$ con coeficientes positivos. Por tanto, $\langle A \rangle$ es infinito y $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es finito. Como consecuencia, $\langle A \rangle$ es, un semigrupo numérico. □

Existe un sistema de generadores distinguido en el sentido de que contiene el número mínimo de ellos necesario para generar el semigrupo; se llama sistema minimal de generadores. El siguiente resultado asegura su existencia en nuestro contexto.

Lema 2.2. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema generador de S. Además, dicho conjunto se encuentra contenido en todos los sistemas generadores de S, lo que implica que es minimal.*

Demostración. Sea $s \in S^*$. Si $s \in S^* \setminus (S^* + S^*)$, se cumple que s está formado por elementos de $S^* \setminus (S^* + S^*)$. En caso contrario, existen dos elementos $x, y \in S^*$ tales que $s = x + y$.

Repitiendo este proceso para x e y, tras un número finito de pasos, obtenemos una colección de elementos $s_1, \ldots, s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ tales que $s = s_1 + \ldots + s_n$. De este modo, queda demostrado que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema generador de S.

Comprobemos ahora el segundo punto. Sea A un sistema generador de S. Consideremos $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Como A es un sistema generador de S, existen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$. Pero como $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ y, por tanto, $x \notin S^* + S^*$, entonces la única opción es que $x = a_i$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, $S^* \setminus (S^* + S^*) \subseteq A$. $\square$

Otro sistema de generadores distinguido de un semigrupo numérico, aunque no minimal, es el siguiente.

Definición 2.12. *Sea un S un semigrupo numérico. Sea $n \in S, n \neq 0$. El* ***conjunto de Apéry*** *de n en S se define como:*

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}.$$

Ejemplo 2.5. Sea $S = \langle 5, 7, 11 \rangle = \{0, 5, 7, 10, 11, 14, \rightarrow\}$. Entonces $Ap(S, 5) = \{0, 7, 11, 14, 18\}$.

En el conjunto de Apéry de S con respecto a n están representadas todas las clases módulo n de la manera siguiente:

Lema 2.3. *Consideremos un semigrupo numérico S y sea $n \in S$ tal que $n \neq 0$. Entonces $Ap(S, n) = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, donde w_i es el menor elemento de S congruente con i módulo n para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.*

Demostración. Consideremos $w_i \in Ap(S, n)$. Supongamos que $w_i \equiv i \pmod{n}$. De este modo, $w_i = i + kn,\ k \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que w_i no es el menor elemento de S congruente con i módulo n. En ese caso, existe $x \in S \setminus Ap(S, n)$ tal que x es el menor elemento de S congruente con i módulo n, de forma que $x = i + k_1 n,\ k_1 \in \mathbb{N}$ con $k_1 < k$. Tenemos así, por un lado que $i = w_i - kn$ y por otro que $i = x - k_1 n$. Igualando tenemos que $w_i - kn = x - k_1 n$, lo que equivale a que $w_i = x + (k - k_1)n$. Hemos de notar que, como $k > k_1$, entonces $k - k_1 > 0$. Como $x \notin Ap(S, n)$, entonces $x - n \in S$. En este supuesto, $w_i - n = x + (k - k_1)n - n = (x - n) + (k - k_1)n$, pero $x - n = s_1 \in S$ y $(k - k_1)n = s_2 \in S$, luego $w_i - n = s_1 + s_2 = s \in S$. Por tanto, $w_i \notin Ap(S, n)$, lo que contradice nuestro supuesto inicial. $\square$

Además, podemos escribir el semigrupo numérico en función de los elementos del conjunto de Apéry de la siguiente forma:

Lema 2.4. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S \setminus \{0\}$. En ese caso, para todo $s \in S$, existe un único par $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ tal que $s = kn + w$.*

Demostración. Sea $w_i \in Ap(S,n)$. Por el lema anterior sabemos que w_i es el menor elemento de S congruente con i módulo n. Por tanto, $w = i + k_1 n,\ k \in \mathbb{N}$. Sea $s \in S$. Supongamos que $s \equiv i \pmod{n}$, lo que equivale a que $s = i + k_2 n$. Como w_i es el menor elemento de S congruente con i módulo n, entonces $k_2 > k_1$, luego $k_2 - k_1 = k > 0$. Aislando la i obtenemos, por un lado, que $i = w_i - k_1 n$ y por otro, que $i = s - k_2 n$. Igualando tenemos que $w_i - k_1 n = s - k_2 n$. Esto es equivalente a que $s = w_i - k_1 n + k_2 n = w_i + (k_2 - k_1)n = w_i + kn$, como queríamos demostrar. □

Estas definiciones nos ayudan para probar la unicidad del sistema minimal de generadores de un semigrupo numérico.

Lema 2.5. *Todo semigrupo numérico admite un único sistema generador minimal. Este sistema generador minimal es finito.*

Demostración. Sabemos por el Lema 2.2 que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es el sistema generador minimal de S. Veamos que es finito.

Sabemos por el Lema 2.4 que para todo $n \in S^*$ tenemos que $S = \langle Ap(S,n) \cap \{n\} \rangle$. Como $Ap(S,n) \cap \{n\}$ es finito, deducimos que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ también lo es ya que, como hemos dicho, todo sistema generador de S está contenido en $S^* \setminus (S^* + S^*)$. □

Para terminar este apartado, vamos a considerar una función generatriz asociada a un semigrupo numérico.

Definición 2.13. *Sea S un semigrupo numérico. Se define la* ***función generatriz de S****, también llamada* ***serie de Poincaré de S*** *o* ***serie de Hilbert de S*** *como la serie formal de potencias:*

$$P_S(t) = \sum_{s \in S} t^s$$

Obsérvese que las series de Poincaré son series de potencias formales, es decir, se consideran sin aludir siquiera a su convergencia o divergencia (como sucede cuando se consideran series de potencias en Análisis). Estas series de potencias con coeficientes en un anillo R forman, a su vez, un anillo que se denota por $R[\![t]\!]$.

El siguiente resultado muestra que la serie de Poincaré asociada a un semigrupo numérico es una función racional, es decir, es un cociente de dos polinomios. De hecho, el denominador adopta las tres formas del enunciado siguiente.

Proposición 2.1. *$P_S(t)$ es una función racional, es decir, puede escribirse como cociente de dos polinomios. De hecho, admite tres escrituras diferentes:*

1. $P_S(t) = \frac{Q(t)}{1-t}$ *con* $Q(t) = [(1-t)\sum\limits_{k\in S,\ k<c} t^k] + t^c \in \mathbb{Z}[t]$ *y siendo* $c = c(S)$ *el conductor de* S.
2. $P_S(t) = \frac{\tilde{Q(t)}}{(1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_r})}$ *siendo* $\{a_1, \ldots, a_r\}$ *los generadores minimales de* S *y* $\tilde{Q(t)} \in \mathbb{Z}[t]$.
3. $P_S(t) = \frac{\sum\limits_{w\in Ap(S,a_1)} t^w}{1-t^{a_1}}$ *siendo* $Ap(S,a_1) = \{w_0 = 0, w_1, \ldots, w_{a_1-1}\}$ *el conjunto de Apéry de* S *con respecto a* a_1.

Demostración. Vamos a ver como llegar a la expresión deseada en cada caso:

1. Sean $\{s_1, \ldots, s_g\} \in S$ tales que $s_i < c$ para todo $i \in \{1, \ldots, g\}$. De esta forma podemos escribir $P_S(t)$ de forma que $P_S(t) = t^{s_1} + \ldots + t^{s_g} + t^c + t^{c+1} + t^{c+2} + \ldots$. Sacando factor común de los términos elevados a elementos del semigrupo iguales o mayores al conductor obtenemos que $P_S(t) = t^{s_1} + \ldots + t^{s_g} + t^c \sum\limits_{j=0}^{\infty} t^j$. Pero este último sumatorio es una serie geométrica, por lo que $\sum\limits_{j=0}^{\infty} t^j = \frac{1}{1-t}$. De este modo, $P_S(t) = \sum\limits_{k\in S,\ k<c} t^k + t^c \frac{1}{1-t} = \frac{[(1-t)\sum\limits_{k\in S,\ k<c} t^k] + t^c}{1-t}$, como queríamos demostrar.
2. Como $\{a_1, ..., a_r\}$ son los generadores minimales de S, sabemos que podemos escribir cualquier elemento de S como combinación lineal de $\{a_1, ..., a_r\}$ con coeficientes positivos de forma única. Por tanto, dado $s \in S$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}$ únicos tales que $s = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r$. De este modo observamos que $P_S(t) = \sum\limits_{s\in S} t^s = \sum\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{N}} t^{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r} = \sum\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{N}} (t^{a_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (t^{a_r})^{\lambda_r}$. Aplicando la fórmula de la suma de una serie geométrica a cada término del producto que aparece dentro del sumatorio, obtenemos que, efectivamente, $P_S(t) = \frac{\tilde{Q(t)}}{(1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_r})}$.
3. Tenemos que $Ap(S,a_1) = \{w_0 = 0, w_1, \ldots, w_{a_1-1}\}$ Sabemos por el Lema 2.4 que, dado $s \in S$, podemos escribir $s = ka_1 + w$ con $k \in \mathbb{N}$ y $w \in Ap(S,a_1)$. Por tanto, podemos escribir $P_S(t)$ como $P_S(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ w\in Ap(S,a_1)} t^{ka_1+w} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ w\in Ap(S,a_1)} (t^{a_1})^k \cdot t^w = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (t^{a_1})^k \sum\limits_{w\in Ap(S,a_1)} t^w$. Pero $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (t^{a_1})^k$ es una serie geométrica, luego podemos escribir $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (t^{a_1})^k = \frac{1}{1-t^{a_1}}$. Por tanto, $P_S(t) = \frac{1}{1-t^{a_1}} \sum\limits_{w\in Ap(S,a_1)} t^w = \frac{\sum\limits_{w\in Ap(S,a_1)} t^w}{1-t^{a_1}}$, como queríamos demostrar.

$\square$

Pasemos ahora a mostrar ejemplos del cálculo de la serie de Poincaré.

Ejemplo 2.6. Vamos a calcular la serie de Poincaré de tres semigrupos numéricos distintos en sus tres formas:

1. Sea $S = \langle 5, 7\rangle = \{0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, \rightarrow\}$. Tenemos que $c(S) = 24$. Por tanto, la primera escritura de la serie de Poincaré es:

$$P_S(t) = \frac{[(1-t)(1+t^5+t^7+t^{10}+t^{12}+t^{14}+t^{15}+t^{17}+t^{19}+t^{20}+t^{21}+t^{22})]+t^{24}}{1-t}$$

$P_S(t) =$

$$\frac{1-t+t^5-t^6+t^7-t^8+t^{10}-t^{11}+t^{12}-t^{13}+t^{14}-t^{16}+t^{17}-t^{18}+t^{19}-t^{23}+t^{24}}{1-t}$$

Ahora, considerando $a_1 = 5$, podemos obtener que $Ap(S, 5) = \{0, 7, 14, 21, 28\}$. Por tanto, la tercera escritura de la serie de Poincaré para este semigrupo es:

$$P_S(t) = \frac{1+t^7+t^{14}+t^{21}+t^{28}}{1-t^5}$$

Finalmente, sabiendo que $P_S(t) = \frac{\tilde{Q(t)}}{(1-t^5)(1-t^7)}$ en su segunda forma, podemos calcular $\tilde{Q(t)}$ igualando esta seguna forma a la tercera. De este modo:

$$\frac{\tilde{Q(t)}}{(1-t^5)(1-t^7)} = \frac{1+t^7+t^{14}+t^{21}+t^{28}}{1-t^5}$$

$$\frac{\tilde{Q(t)}}{1-t^7} = 1+t^7+t^{14}+t^{21}+t^{28}$$

$$\tilde{Q(t)} = (1+t^7+t^{14}+t^{21}+t^{28})(1-t^7) = 1-t^{35}$$

Por tanto:

$$P_S(t) = \frac{1-t^{35}}{(1-t^5)(1-t^7)}$$

2. Consideremos ahora el semigrupo $S = \langle 4, 6, 13\rangle = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, \rightarrow\}$. La primera escritura de la serie de Poincaré es:

$$P_S(t) = \frac{[(1-t)(1+t^4+t^6+t^8+t^{10}+t^{12}+t^{13}+t^{14})]+t^{16}}{1-t}$$

$$P_S(t) = \frac{1-t+t^4-t^5+t^6-t^7+t^8-t^9+t^{10}-t^{11}+t^{12}-t^{15}+t^{16}}{1-t}$$

Tomando $a_1 = 4$, observamos que $Ap(S, 4) = \{0, 6, 13, 19\}$, por lo que la tercera escritura de la serie de Poincaré es:

$$P_S(t) = \frac{1 + t^6 + t^{13} + t^{19}}{1 - t^4}$$

Ahora, aplicando el mismo procedimiento que en el caso anterior podemos obtener $\tilde{Q(t)}$:

$$\frac{\tilde{Q(t)}}{(1 - t^4)(1 - t^6)(1 - t^{13})} = \frac{1 + t^6 + t^{13} + t^{19}}{1 - t^4}$$

$$\frac{\tilde{Q(t)}}{(1 - t^6)(1 - t^{13})} = 1 + t^6 + t^{13} + t^{19}$$

$$\tilde{Q(t)} = (1 + t^6 + t^{13} + t^{19})(1 - t^6)(1 - t^{13}) = t^{38} - t^{26} - t^{12} + 1 = (1 - t^{12})(1 - t^{26})$$

Por tanto, la segunda escritura de la serie de Poincaré en este caso es:

$$P_S(t) = \frac{(1 - t^{12})(1 - t^{26})}{(1 - t^4)(1 - t^6)(1 - t^{13})}$$

3. Finalmente, tomemos $S = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle = \{0, 5, 6, 7, 8, 10, \rightarrow\}$. Como en los casos anteriores, la primera escritura de la serie de Poincaré es inmediata:

$$P_S(t) = \frac{[(1 - t)(1 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8)] + t^{10}}{1 - t}$$

$$P_S(t) = \frac{1 - t + t^5 - t^9 + t^{10}}{1 - t}$$

Si escogemos $a_1 = 5$, tenemos que $Ap(S, 5) = \{0, 6, 7, 8, 14\}$. Conseguimos así la tercera escritura de la serie de Poincaré:

$$P_S(t) = \frac{1 + t^6 + t^7 + t^8 + t^{14}}{1 - t^5}$$

Calculamos ahora $\tilde{Q(t)}$ de igual modo que en los casos anteriores:

$$\frac{\tilde{Q(t)}}{(1 - t^5)(1 - t^6)(1 - t^7)(1 - t^8)} = \frac{1 + t^6 + t^7 + t^8 + t^{14}}{1 - t^5}$$

$$\frac{\tilde{Q(t)}}{(1 - t^6)(1 - t^7)(1 - t^8)} = 1 + t^6 + t^7 + t^8 + t^{14}$$

$$\tilde{Q(t)} = (1 + t^6 + t^7 + t^8 + t^{14})(1 - t^6)(1 - t^7)(1 - t^8)$$

$$\tilde{Q(t)} = 1 - t^{12} - t^{13} - t^{14} - t^{15} - t^{16} + t^{19} + t^{20} + t^{21} + t^{22} + t^{23} - t^{35}$$

Esto implica que la segunda escritura de la serie de Poincaré para este semigrupo es:

$$P_S(t) = \frac{1 - t^{12} - t^{13} - t^{14} - t^{15} - t^{16} + t^{19} + t^{20} + t^{21} + t^{22} + t^{23} - t^{35}}{(1 - t^5)(1 - t^6)(1 - t^7)(1 - t^8)}$$

Capítulo 3

Complejos simpliciales y su homología

Una vez hemos mostrado las estructuras algebraicas básicas que necesitaremos a lo largo de este trabajo, podemos pasar a presentar en este capítulo otro de los ejes centrales del mismo: los complejos simpliciales. La referencia bibliográfica básica utilizada en la elaboración de este capítulo es [3].

3.1. Complejos simpliciales

Empezaremos este capítulo exponiendo las nociones básicas relacionadas con los complejos simpliciales. Para ello, necesitamos primero una definición que nos ayude a construir el resto de la sección.

Definición 3.1. *Decimos que un subconjunto finito $\{v_0, v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ es **independiente afín** si el conjunto de vectores $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_r - v_0\}$ es linealmente independiente.*

Una vez tenemos esta defínción, podemos empezar a hablar sobre los símplices y los complejos simpliciales.

Definición 3.2. *Sea $\{v_0, v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto independiente afín. Podemos definir el **r-símplice** con vertices $v_0, v_1, \dots, v_r$ como el subconjunto:*

$$\langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \;\middle|\; t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} t_i = 1 \right\}$$

Cabe destacar que r es la dimensión del símplice.

Definición 3.3. *Sea $\sigma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_r \rangle$ un r-símplice. Una **cara** de σ es un símplice τ cuyos vértices son un subconjunto de los de σ.*

Definición 3.4. *Sea L un conjunto finito no vacío de símplices en $\mathbb{R}^n$. El conjunto L es un **complejo simplicial geométrico** si cumple las siguientes dos condiciones:*

1. *Si $\sigma \in L$ y τ es una cara de σ, entonces $\tau \in L$.*
2. *Si σ_1 y σ_2 son dos símplices en L, entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ o $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara de σ_1 o σ_2.*

Definición 3.5. *Sea Δ un par formado por un conjunto finito de vértices $V = V(\Delta)$ y un conjunto de caras $S = S(\Delta)$ formado por subconjuntos de V. El conjunto Δ es un **complejo simplicial abstracto** si cumple las siguientes dos condiciones:*

1. *$\emptyset \subset S$.*
2. *Si $F \in S$ y $G \subset F$, entonces $G \in S$.*

Podemos observar que, dado un complejo simplicial geométrico L, si tomamos un símplice $\sigma \in L$, podemos definir un complejo simplicial abstracto Δ de forma que $V(\Delta)$ y $S(\Delta)$ sean, respectivamente, los vértices y las caras de σ.

En adelante, trabajaremos fundamentalmente con complejos simpliciales abstractos. De esta forma, cuando usemos el término «complejo simplicial», nos estaremos refiriendo a un complejo simplicial abstracto.

Definición 3.6. *Consideremos un complejo simplicial Δ y sea F una de sus caras. Las dimensiones de F y Δ son, respectivamente:*

1. $\dim(F) = |F| - 1$
2. $\dim(\Delta) = \sup\{\dim(F) \mid F \in \Delta\}$

Podemos referirnos a una cara de dimensión q como una *q-cara* o un *q-símplice.*

Ejemplo 3.1. En la siguiente figura podemos observar un complejo simplicial con 4 vértices y con las siguientes caras:

0-caras: $[x_1]$, $[x_2]$, $[x_3]$, $[x_4]$
1-caras: $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_1, x_3]$, $[x_1, x_4]$, $[x_3, x_4]$
2-caras: $[x_1, x_2, x_3]$

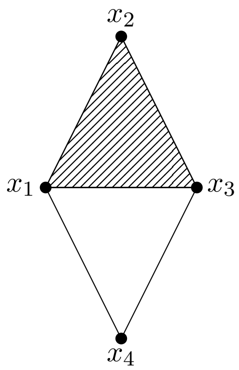

Figura 3.1: Complejo simplicial de dimensión 2

Definición 3.7. *Consideremos un complejo simplicial Δ y tomemos una q-cara $F \in \Delta$ con vértices $\{v_0, v_1, \ldots, v_q\}$. Dos ordenaciones de los vértices $v_{i_0} < \ldots < v_{i_q}$ y $v_{j_0} < \ldots < v_{j_q}$ son* ***equivalentes*** *si $(i_0, \ldots, i_q)$ es una permutación par de $(j_0, \ldots, j_q)$.*

Esto supone una relación de equivalencia dado que el conjunto de permutaciones pares forma un grupo. Además, para $q > 1$, todas las posibles ordenaciones $v_0, \ldots, v_q$ quedan divididas en dos clases de equivalencia. Una ordenación $v_0, \ldots, v_q$ se denota por $[v_0, v_1, \ldots, v_q]$.

Definición 3.8. *Un* ***q-símplice orientado*** *de Δ es un q-símplice F cuyo conjunto de vértices ordenado pertenece a una de las clases de equivalencia mencionadas anteriormente.*

3.2. Homología

Una vez familiarizados con los complejos simpliciales, en esta sección definiremos una serie de aplicaciones y de características acerca de las mismas que nos resultarán útiles más tarde en esta memoria.

Definición 3.9. *Sea K un cuerpo y sea Δ un complejo simplicial. Sea $C_q(\Delta)$ un K-espacio vectorial que contiene los q-símplices orientados de Δ y cuya dimensión, denotada por $c_q(\Delta)$, es igual al número de q-símplices de Δ. Definimos el homomorfismo $\partial_q : C_q(\Delta) \to C_{q-1}(\Delta)$ como:*

$$\partial_q([v_0, v_1, \ldots, v_q]) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \ldots, v_q]$$

El símbolo $\hat{v}_i$ indica que eliminamos dicho elemento en el término correspondiente del sumatorio.

Destacamos que, por convención, $c_{-1} = 1$.

Proposición 3.1. *Dado un complejo simplicial* Δ, $\partial_q \partial_{q+1} = 0$

Demostración. La composición de funciones $\partial_q \partial_{q+1}$ puede calcularse de la siguiente forma:
$\partial_q \partial_{q+1}([v_0, \dots, v_{q+1}]) = \partial_q(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v_i} \dots, v_{q+1}]) =$
$\sum_{i=0}^{q+1}(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_{q+1}] + \sum_{j=i}^{q} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, \hat{v_{j+1}}, \dots, v_{q+1}]) =$
$\sum_{i=0}^{q+1}\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_{q+1}] + \sum_{i=0}^{q+1}\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, \hat{v_{j+1}}, \dots, v_{q+1}]$

Pero en esta situación, los coeficiente del sumando $[v_0, \dots, \hat{v_k}, \dots, \hat{v_l}, \dots, v_{q+1}]$ en cada sumatorio son $(-1)^{k+l}$ y $(-1)^{k+l-1}$. Por tanto, al sumar los dos sumatorios, obtenemos que, para cada sumando, su coeficiente es $(-1)^{k+l} + (-1)^{k+l-1} = (-1)^{k+l-1}(-1+1) = 0$. Por tanto:
$\sum_{i=0}^{q+1}\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_{q+1}] + \sum_{i=0}^{q+1}\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, \hat{v_{j+1}}, \dots, v_{q+1}] =$
$\partial_q \partial_{q+1}([v_0, \dots, v_{q+1}]) = 0.$ $\square$

A partir del resultado de la proposición anterior, podemos obtener el complejo de cadena $C(\Delta) = \{C_q(\Delta), \partial_q\}$, el cual denotamos como el *complejo de cadena orientado de* Δ.

Ahora, si definimos $\partial_0(v) = \epsilon(v) = 1$ para todo vértice v de Δ y $C_{-1}(\Delta) = K$, teniendo en cuenta que $d = \dim(\Delta)$, podemos definir el siguiente complejo de cadena $C_*(\Delta)$, el cual denotamos como *complejo de cadena de* Δ *aumentado*:

$$0 \longrightarrow C_d(\Delta) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(\Delta) \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0(\Delta) \xrightarrow{\epsilon} K \longrightarrow 0$$

Además, podemos definir el núcleo y la imagen del homomorfismo ∂_q obteniendo así los conjuntos $Z_q(\Delta, K) = \ker(\partial_q)$ y $B_q(\Delta, K) = \mathrm{im}(\partial_{q+1})$. Denotamos $Z_q(\Delta, K)$ como los *ciclos* de Δ y $B_q(\Delta, K)$ como las *fronteras* de Δ. Teniendo en cuenta que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$, entonces $\mathrm{im}(\partial_{q+1}) \subset \ker(\partial_q)$.

Por otra parte, tomando $Z_q(\Delta, K)$ y $B_q(\Delta, K)$ y aprovechando la propiedad con la que terminamos el párrafo anterior, podemos definir el espacio vectorial cociente $\tilde{H}_q(\Delta; K) = Z_q(\Delta, K)/B_q(\Delta, K)$ con $q > 0$. Denotamos este espacio vectorial como el *q-ésimo grupo de homología simplicial de* Δ *con coeficientes en* K.

Ahora, nos interesará conocer la dimensión de estos conjuntos. Para ello, mostraremos una definición inicial y una proposición que nos relacionará la dimensión con el número de componentes conexas de un complejo simplicial.

Definición 3.10. *Dado un complejo simplicial* Δ *y su q-ésimo grupo de homología simplicial* $\tilde{H}_q(\Delta; K)$*, se define* $\tilde{h}_q(\Delta; K)$ *como la dimensión de* $\tilde{H}_q(\Delta; K)$*.*

Un caso particular del cálculo de $\tilde{h}_q(\Delta; K)$ puede observarse en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sea* Δ *un complejo simplicial no vacío. Entonces,* $\tilde{H}_0(\Delta, K)$ *es un* K*-espacio vectorial de dimensión* $r-1$*, siendo* r *el número de componentes conexas de* Δ*.*

Demostración. Sea $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de vértices de Δ y sean $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ sus componentes conexas. Sea V_i el conjunto de vértices de Δ_i. Tomamos ahora un vértice de cada conjunto V_i de forma que $x_i \in V_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Además, V puede escribirse como la unión disjunta $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$. Definimos con esto $\beta_i = x_i - x_r$ y $\bar{\beta}_i = \beta_i + \mathrm{im}(\partial_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Hemos de demostrar pues que $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_{r-1}\}$ es una base de $\tilde{H}_0(\Delta; K)$.

Veamos primero que $\bar{\mathcal{B}}$ es linealmente independiente. Para ello, hemos de comprobar que, dada la expresión $\sum_{i=1}^{r-1} a_i \bar{\beta}_i = \bar{0}$ con $a_i \in K$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{r-1} = 0$. Pero $\sum_{i=1}^{r-1} a_i \bar{\beta}_i = \bar{0}$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{r-1} a_i \beta_i \in \mathrm{im}(\partial_1)$, ya que $\tilde{H}_0(\Delta; K) = \ker(\partial_0)/\mathrm{im}(\partial_1)$. Esto implica que $x_i \in \mathrm{im}(\partial_1)$. Además, $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_{r-1}\beta_{r-1} = a_1(x_1 - x_r) + a_2(x_2 - x_r) + \ldots + a_{r-1}(x_{r-1} - x_r) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{r-1}x_{r-1} - (a_1 + \ldots + a_r)x_r$. Tenemos también, por otro lado, que $C_1(\Delta) = C_1([v_i, v_j]) = v_j - v_i$, luego $\mathrm{im}(\partial_1) = \langle (v_i - v_j) \rangle$. Teniendo todo esto en cuenta, podemos escribir $\sum_{i=1}^{r-1} a_i\beta_i = \sum_{x_i, x_j \in V} b_{ij}(x_i - x_j)$. Como V es la unión disjunta de los conjuntos de vértices de las componentes conexas, entonces $\sum_{x_i, x_j \in V} b_{ij}(x_i - x_j) = \sum_{x_i, x_j \in V_1} b_{ij}(x_i - x_j) + \ldots + \sum_{x_i, x_j \in V_r} b_{ij}(x_i - x_j)$. De este modo, concluimos que $a_k\beta_k = \sum_{x_i, x_j \in V_k} b_{ij}(x_i - x_j)$, con $k \in \{1, \ldots, r-1\}$. Si aplicamos ∂_0 a ambos lados de la igualdad obtenemos, por un lado, que $\partial_0(a_k\beta_k) = a_k\partial_0(\beta_k) = a_k$ ya que $\partial_0(v) = \epsilon(v) = 1$ y, por otro lado, que $\partial_0(\sum_{x_i, x_j \in V_k} b_{ij}(x_i - x_j)) = 0$ debido a que $\sum_{x_i, x_j \in V_k} b_{ij}(x_i - x_j) \in \mathrm{im}(\partial_1) \subset \ker(\partial_0)$. Por tanto, $a_k = 0$ para todo k, lo que implica que $\bar{\mathcal{B}}$ es linealmente independiente.

Ahora hemos de comprobar que $\bar{\mathcal{B}}$ es un sistema generador de $\tilde{H}_0(\Delta; K)$. Para ello, hemos de ver que podemos obtener cualquier punto $x_{i_1} - x_{j_1} + \mathrm{im}(\partial_1)$ a partir de elementos de $\bar{\mathcal{B}}$. Sea $x_{i_1} \in V_m$ y sea $x_{j_1} \in V_s$. Además, tenemos $\bar{\beta}_m = x_m - x_r + \mathrm{im}(\partial_1)$ con $x_m \in V_m$ y $\bar{\beta}_s = x_s - x_r + \mathrm{im}(\partial_1)$ con $x_s \in V_s$. Como Δ_m y Δ_s son componentes conexas, existen dos caminos $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}, x_m$ en Δ_m y $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}, x_s$ en Δ_s que unen x_{i_1} con x_m y x_{j_1} con

x_s respectivamente de forma que $x_{i_1} = (x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \ldots + (x_{i_l} - x_m) = x_{i_1} - x_m$ y $x_{j_1} = (x_{j_1} - x_{j_2}) + (x_{j_2} - x_{j_3}) + \ldots + (x_{j_p} - x_s) = x_{j_1} - x_s$. Por tanto, como hemos podido escribir x_{i_1} y x_{j_1} en función de x_m y x_s respectivamente y $\bar{\beta}_m = x_m - x_r + \mathrm{im}(\partial_1)$ y $\bar{\beta}_s = x_s - x_r + \mathrm{im}(\partial_1)$, obtenemos que $x_{i_1} - x_{j_1} + \mathrm{im}(\partial_1) = (x_m - x_r) - (x_s - x_r) + \mathrm{im}(\partial_1) = [(x_m - x_r) + \mathrm{im}(\partial_1)] - [(x_s - x_r) + \mathrm{im}(\partial_1)] = \bar{\beta}_m - \bar{\beta}_s$.

Hemos visto pues que $\bar{\mathcal{B}}$ es un sistema generador de $\tilde{H}_0(\Delta; K)$ linealmente independiente, luego es una base de $\tilde{H}_0(\Delta; K)$ de dimensión $r - 1$, como queríamos demostrar. $\square$

Finalmente, aprovechando la definición de la dimensión del q-ésimo grupo de homología simplicial de un complejo simplicial así como de los espacios vectoriales $C_q(\Delta)$ que definimos inicialmente en este apartado, podemos dar una definición final que nos resultará de gran utilidad en el último capítulo de esta memoria.

Definición 3.11. *Sea Δ un complejo simplicial de dimensión d. Se define la* ***característica de Euler aumentada*** *como la expresión:*

$$\tilde{\chi}(\Delta, K) = \sum_{k=-1}^{d} (-1)^k c_k(\Delta) = \sum_{k=-1}^{d} (-1)^k h_k(\Delta; K)$$

La definición anterior no depende del cuerpo K escogido, por lo que podemos escribir la característica de Euler aumentada simplemente como $\tilde{\chi}(\Delta)$. Se añade el adjetivo "aumentada" porque consideran complejos simpliciales aumentados, en el sentido de que incorporan también al conjunto vacío.

Vemos un ejemplo del cálculo de la característica de Euler aumentada:

Ejemplo 3.2. Consideremos el complejo simplicial Δ del Ejemplo 3.1. Observamos en dicho ejemplo que el complejo simplicial tiene dimensión 2 y posee cuatro 0-caras, cinco 1-caras y una 2-cara. Por tanto, con esta información se obtiene que:

$$\tilde{\chi}(\Delta) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 4 + (-1)^1 \cdot 5 + (-1)^2 \cdot 1 = -1 + 4 - 5 + 1 = -1$$

Capítulo 4

Semigrupos numéricos y complejos simpliciales

En este capítulo final usaremos todo lo que se ha expuesto hasta el momento para trazar un vínculo entre los semigrupos numéricos y los complejos simpliciales. Su contenido está inspirado en las partes comprendidas de la lectura del artículo de Campillo y Marijuán [1]. También se ha recurrido al libro [6] para aclarar los conceptos involucrados.

4.1. El conjunto Δ_m

Empezaremos esta sección definiendo un conjunto que se puede obtener a partir de un elemento de un semigrupo numérico y de sus generadores minimales.

Definición 4.1. *Consideremos un semigrupo numérico* $S = \langle a_1, \ldots, a_g \rangle$ *y sea* $m \in S$*. Sea* $I = \{1, \ldots, g\}$*. Se define el conjunto* $\Delta_m = \{J \subset I : m - \sum\limits_{j \in J} a_j \in S\}$*.*

Hay que notar que, dado $m \in S$, si $\sum\limits_{i \in I} a_i$ es mayor o igual que el conductor de S, entonces el conjunto Δ_m contendrá todos los posibles subconjuntos de I. De esto se deduce que Δ_m contendrá todos los posibles subconjuntos de I si m es mayor o igual que $\sum\limits_{i \in I} a_i + c(S)$.

Ahora a través de la demostración del siguiente lema, podremos ver que el conjunto Δ_m es un complejo simplicial.

Lema 4.1. *El conjunto* Δ_m *es un complejo simplicial.*

Demostración. Hemos de ver que Δ_m cumple los dos axiomas de los complejos simpliciales, es decir, que $\emptyset \in \Delta_m$ y que si $F \in \Delta_m$ y $G \subset F$, entonces $G \in \Delta_m$.

Empecemos comprobando el primer axioma. Tenemos que $\sum\limits_{j\in\emptyset} a_j = 0$. Esto supone que $m - \sum\limits_{j\in\emptyset} a_j = m - 0 = m$. Como m es un elemento de S, atendiendo a nuestro supuesto inicial, entonces $m - \sum\limits_{j\in\emptyset} a_j \in S$, luego $\emptyset \in \Delta_m$.

Ahora veamos que, dado $F \in \Delta_m$, si $G \subset F$, entonces $G \in \Delta_m$. Sabemos que, si $F = \{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_l\} \in \Delta_m$, siendo $G = \{g_1, \ldots, g_l\} \subset F$, entonces $m - (a_{f_1} + \ldots + a_{f_p} + a_{g_1} + \ldots + a_{g_l}) = m - a_{f_1} - \ldots - a_{f_p} - a_{g_1} - \ldots - a_{g_l} = s \in S$. Podemos escribir de este modo $m - a_{g_1} - \ldots - a_{g_l} = s + a_{f_1} + \ldots + a_{f_p}$. Pero la parte derecha de la igualdad es un elemento de S por ser suma de elementos del semigrupo, ya que $a_{f_1}, \ldots, af_p$ son generadores del mismo. Por tanto, $G \in \Delta_m$. □

En este punto, podemos decir, aprovechando este lema y la anotación posterior a la Definición 4.1, que Δ_m será un complejo simplicial completo con los vértices $a_1, \ldots, a_r$ (es decir, contendrá todas las caras posibles con dichos vértices) si $m \geq \sum\limits_{i\in I} a_i + c(S)$.

4.2. Cálculo de la serie de Poincaré usando Δ_m

Para terminar este capítulo, a partir del complejo simplicial Δ_m definido anteriormente, podemos pasar a observar la relación que existe entre los semigrupos numéricos y los complejos simpliciales, la cual se basa en el cálculo de la característica de Euler aumentada de Δ_m

Teorema 4.1. *Sea $S = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ un semigrupo numérico y sea $P_S(t) = \frac{\tilde{Q}(t)}{(1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_r})}$ su serie de Poincaré. Entonces $\tilde{Q}(t) = \sum\limits_{m\in S} -\tilde{\chi}(\Delta_m)t^m$.*

Demostración. Partiendo de la escritura de la serie de Poincaré anterior, podemos obtener la expresión:

$$\tilde{Q}(t) = (1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_r})P_S(t) = (1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_r})\sum_{m\in S} t^m = \sum_{m\in S}(1-t^{a_1})\ldots(1-t^{a_r})t^m$$

Como $a_1, \ldots, a_r$ son elementos de S por ser sus generadores minimales, podemos desarrollar el producto de polinomios que aparece dentro del sumatorio para obtener así la igualdad $\tilde{Q}(t) = \sum\limits_{m\in S} q_m t^m$, con $q_m \in \mathbb{Z}$. De este modo, esta demostración se reduce a probar que el coeficiente q_m es igual a la característica de Euler aumentada $\tilde{\chi}(\Delta_m)$ con signo negativo.

Consideremos para ello el conjunto Δ_m de cada término del sumatorio. Para cada $F \in \Delta_m$, sabemos que $m - \sum\limits_{f \in F} a_f = m_F$ con $m_F \in S$. De este modo, $m = m_F + a_F$ siendo $a_F = \sum\limits_{f \in F} a_f$. Teniendo esto, si volvemos a la escritura inicial de $\tilde{Q}(t)$ como producto de polinomios, aprovechando el resultado que acabamos de obtener podemos observar que:

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{m \in S} \sum_{F \in \Delta_m} t^{m_F + a_F} = \sum_{m \in S} \sum_{F \in \Delta_m} \Big(\prod_{a_f \in F} (-t^{a_f}) \Big) t^{m_F}$$

De este modo, podemos ver fácilmente que cada término del sumatorio interior estará multiplicado por 1 o -1 dependiendo del número de términos del productorio, es decir, de $|F|$. De este modo, se puede observar que $q_m = \sum\limits_{F \in \Delta_m} (-1)^{|F|}$. Como $\dim(F) = |F| - 1$, tomando $d = \dim(\Delta_m)$, esta expresión se puede reescribir como:

$$q_m = \sum_{F \in \Delta_m} (-1)^{\dim(F)+1} = \sum_{F \in \Delta_m} (-1) \cdot (-1)^{\dim(F)} = -\sum_{F \in \Delta_m} (-1)^{\dim(F)} = -\sum_{k=-1}^{d} (-1)^k c_k(\Delta_m)$$

Sin embargo, por definición, $\sum\limits_{k=-1}^{d} (-1)^k c_k(\Delta_m) = \tilde{\chi}(\Delta_m)$, por lo que $q_m = -\tilde{\chi}(\Delta_m)$, tal como queríamos demostrar. $\square$

Veamos ahora un ejemplo en el que se aplica el resultado de este teorema.

Ejemplo 4.1. Consideremos el semigrupo numérico $S = \langle 5, 7 \rangle$. En este caso, $c(S) = 24$. Para todo $m \in S$, sabemos que $\emptyset \in \Delta_m$ por ser Δ_m un complejo simplicial. Por tanto, Δ_m puede tomar los siguientes valores, teniendo en cuenta que Δ_m será el complejo simplicial completo si $m \geq 5 + 7 + 24 = 36$:

- $\Delta_m = \{\emptyset\}$
- $\Delta_m = \{\emptyset, \{5\}\}$
- $\Delta_m = \{\emptyset, \{7\}\}$
- $\Delta_m = \{\emptyset, \{5\}, \{7\}\}$
- $\Delta_m = \{\emptyset, \{5, 7\}\}$
- $\Delta_m = \{\emptyset, \{5\}, \{5, 7\}\}$
- $\Delta_m = \{\emptyset, \{7\}, \{5, 7\}\}$
- $\Delta_m = \{\emptyset, \{5\}, \{7\}, \{5, 7\}\}$

Ahora, en cada caso, podemos calcular la característica de Euler aumentada:

- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 0 = -1$
- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 0 = 0$
- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 0 = 0$
- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 2 + (-1)^1 \cdot 0 = 1$
- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 1 = -2$
- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 1 = -1$
- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 1 = -1$
- $\tilde{\chi}(\Delta_m) = (-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 2 + (-1)^1 \cdot 1 = 0$

De este modo, sólo necesitamos saber el conjunto Δ_m para cada $m \in S$ para así poder calcular la serie de Poincaré de S. Es importante ver también que $\tilde{\chi}(\Delta_m) = 0$ para todo $m \geq 36$. Para obtener los complejos simpliciales Δ_m, hemos escrito una función en GAP usando el paquete "NumericalSgps"que nos permite obtener estos conjuntos automáticamente para todos los elementos del semigrupo menores que el conductor de S multiplicado por una constante n que se ha de pasar como argumento a la función. Esta es la definición de dicha función:

```
PrintShadedSets := function(s, n)
    c := Conductor(s);
    i := 1;
    while s[i] < n * c do
        SS := ShadedSetOfElementInNumericalSemigroup(s[i], s);
        Print(s[i], ":   ", SS, "\n");
        i := i + 1;
    od;
end;
```

Para $S = \langle 5, 7 \rangle$ y $n = 2$ obtenemos la siguiente salida:

```
s := NumericalSemigroup(5, 7);;
PrintShadedSets(s, 2);
0:   [ [  ] ]
5:   [ [  ], [ 5 ] ]
7:   [ [  ], [ 7 ] ]
```

```
10:   [ [  ], [ 5 ] ]
12:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
14:   [ [  ], [ 7 ] ]
15:   [ [  ], [ 5 ] ]
17:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
19:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
20:   [ [  ], [ 5 ] ]
21:   [ [  ], [ 7 ] ]
22:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
24:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
25:   [ [  ], [ 5 ] ]
26:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
27:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
28:   [ [  ], [ 7 ] ]
29:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
30:   [ [  ], [ 5 ] ]
31:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
32:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
33:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
34:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
35:   [ [  ], [ 5 ], [ 7 ] ]
36:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
37:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
38:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
39:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
40:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
41:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
42:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
43:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
44:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
45:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
46:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
47:   [ [  ], [ 5 ], [ 5, 7 ], [ 7 ] ]
```

Con todo esto deducimos que, en este caso, $\tilde{Q}(t) = t^0 - t^{35} = 1 - t^{35}$, por tanto:

$$P_S(t) = \frac{1 - t^{35}}{(1 - t^5)(1 - t^7)}$$

Este resultado se corresponde con el que vimos en el primer punto del Ejemplo 2.6.

Bibliografía

[1] Marijuan C. Campillo, A. Higher order relations for a numerical semigroup. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 3(2):249–260, 1991.

[2] G Colomé and Miró-Roig R.M. *Algebra Lineal, una puerta de entrada a la matemáticas.* Ediciones Electrolibris, 2014.

[3] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[4] G. Navarro and G.N. Ortega. *Un curso de álgebra.* Col-lecció Educacció: Materials. Universidad de València Servicio de Publicaciones, 2002.

[5] J.C. Rosales and P.A. García-Sánchez. *Numerical Semigroups.* Developments in Mathematics. Springer New York, 2012.

[6] R. Villarreal. *Monomial Algebras.* Chapman & Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, 2018.