UNIVERSITAT JAUME I

Grau en Matemàtica Computacional

Treball Final de Grau

# Suprem i ínfim de successions de nombres difusos

*Autora:*
Lorena Peydro Ibáñez

*Tutor acadèmic:*
Manuel Sanchis López

Data de lectura: Juliol de 2023
Curs acadèmic 2022/2023

## Resum

Donem una condició necessària i suficient perquè el parell de funcions en $[0,1]$, $(\sup_n (u_n)^-(\lambda))$ i $(\sup_n (u_n)^+(\lambda))$ , determinen un nombre difús i donem una condició perquè el suprem i l'ínfim d'una successió de nombres difusos tinga la propietat d'aproximació per a la mètrica $D$. A més, presentem un criteri perquè una funció contínua de valors difusos definida en un interval tancat i acotat assolisca el seu suprem i ínfim.

## Paraules clau

Nombre difús, successió de nombres difusos, suprem (ínfim) d'una successió de nombres difusos, funció contínua.

## Keywords

Fuzzy numbers, sequence of fuzzy numbers, supremum (infimum) of a sequence of fuzzy numbers, continuous function.

# Índex

# Capítol 1

# Introducció

## 1.1 Context i motivació del projecte

En els treballs [4, 5], els autors van suggerir l'existència de les sumes inferior i superior d'una funció $f$ amb valors difusos i les integrals inferior i superior de $f$ en la manera habitual. De fet, la prova de la seva existència necessita utilitzar que els conjunts acotats de nombres difusos amb els que treballen han de tindre suprem i ínfim.

No obstant això, esta propietat no és trivial. Aquest problema es tracta en [1] on es demostra que un conjunt acotat de nombres difusos té suprem i ínfim i es dona la representació concreta del suprem i de l'ínfim. En particular, per a una successió acotada de nombres difusos $\{u_n\}_{n\geq 1}$, si les funcions usuals $(\sup_n (u_n)^-(\lambda))$ i $(\sup_n (u_n)^+(\lambda))$ en $[0,1]$ determinen un nombre difús $u_s$, aleshores $u_s = \sup_n \{u_n\}$.

Donada una successió $\{u_n\}$ de nombres difusos, en la Memòria donem una condició necessària i suficient perquè les funcions en $[0,1]$ definides com $(\sup_n (u_n)^-(\lambda))$ i $(\sup_n (u_n)^+(\lambda))$ determinen un nombre difús.

També presentarem un exemple en què la funció *suprem* (el mateix resultat també és cert per a funció *ínfim*) del suprem d'una successió de nombres difusos no coincideix amb el suprem de la successió.

Obtenim una condició suficient perquè el suprem (i l'ínfim) d'una successió de nombres difusos preserve les propietats d'aproximació de la mètrica $D$. A més, donem un exemple d'una funció en $[0,1]$ a valors en els nombres difusos que no assoleix el seu suprem. Relacionem que aquest tipus de funcions assolisquen el suprem i ínfim amb la propietat d'aproximació per a la mètrica $D$. Els resultats presentats estan basats en [2].

## 1.2 Notació i Preliminars

Una successió $u_1, u_2, u_3, \ldots$ es denotarà per $\{u_n\}_{n\geq 1}$. Els nombres reals es denoten per $\mathbb{R}$ i els naturals per $\mathbb{N}$. Quan els considerem com espais topològics, els suposem dotats de la topologia usual.

Denotem per $\mathbb{E}^1$ els conjunts difusos reals, és a dir, les aplicacions $u\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ que satisfacen les següents propietats:

(i) $u$ és normal, és a dir, existeix un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(x_0) = 1$.

(ii) $u$ és convex, és a dir, $u(rx+(1-r)y) \leq \min(u(x), u(y))$ per a qualsevol $x, y \in \mathbb{R}$ i $r \in [0,1]$.

(iii) $u(x)$ és semi-contínua superiorment.

(iv) $[u]^0 = \mathrm{cl}\{x \in \mathbb{R}\colon u(x) > 0\}$ és un conjunt compacte.

Els elements que pertanyen a $\mathbb{E}^1$ s'anomenen nombres difusos.

Un concepte capital quan treballem amb nombres difusos és la noció de $\lambda$-tall amb $\lambda \in (0,1]$. Es defineix el $\lambda$-tall i es denota per $[u]^\lambda$ el conjunt:

$$[u]^\lambda := \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda\}$$

per a $\lambda \in (0,1]$. El $\lambda$-tall per a $\lambda = 0$ és el conjunt $\mathrm{cl}\{x \in \mathbb{R}\colon u(x) > 0\}$ definit prèviament i que s'anomena *el suport* de $u$.

Cal destacar que, per la propietat (iii), els $\lambda$-talls són conjunts tancats de $\mathbb{R}$, i per la propietat (ii) són intervals. És a dir, si $\lambda \in (0,1]$, aleshores $u(\lambda) = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$. Igual passa amb $u^0$. Cal notar que els $\lambda$-talls són conjunts compactes perquè estan inclosos en el suport.

En aquest treball, considerarem a $\mathbb{E}^1$ com un espai mètric amb la mètrica: $D : \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida com:

$$D(u,v) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max(|u^-(\lambda) - v_\lambda^-|, |u^+(\lambda) - v_\lambda^+|).$$

Aquesta mètrica té les següents propietats:

- $(\mathbb{E}^1, D)$ és un espai mètric complet.
- $D(ku, kv) = |k| D(u,v)$ per a qualsevol $u, v \in \mathbb{E}^1$ i $k \in \mathbb{R}$.
- $D(u+w, v+w) = D(u,v)$ per a qualsevol $u, v, w \in \mathbb{E}^1$.

Un aspecte bàsic en esta Memòria és definir un ordre en el conjunt $\mathbb{E}^1$ dels nombres difusos. L'ordre *natural* considerat en $\mathbb{E}^1$ ve definit de la següent manera. Donats dos nombres difusos $u, v \in \mathbb{E}^1$, direm que $u \leq v$ si, i només si,

$$[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] \leq [v]^\lambda = [v^-(\lambda), v^+(\lambda)]$$

per a tot $\lambda \in [0,1]$.

És a dir, utilitzem l'ordre d'intervals. Per tant, $u \leq v$ si, i només si,

$$u^-(\lambda) \leq v^-(\lambda) \text{ i } u^+(\lambda) \leq v^+(\lambda)$$

per a tot $\lambda \in [0,1]$.

Els conceptes que utilitzem en la Memòria i no definits ací, s'introduiran en el moment de ser usats.

### 1.2.1 Teorema de representació de Goetschel i Voxman

En general, treballar amb la definició de nombre difús no és intuïtiu i, segons el context, pot ser complicat tècnicament. Afortunadament, els nombres difusos admeten una representació que permet treballar amb ells d'una manera més senzilla que si apliquem directament la definició. Aquesta representació és l'anomenat Teorema de representació de Goetschel i Voxman.

**Teorema 1.1** (Teorema de representació de Goetschel i Voxman [3]). *Si* $u \in \mathbb{E}^1$ *i* $[u]^\lambda := [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0,1]$, *aleshores el parell de funcions* $u^-(\lambda)$ *i* $u^+(\lambda)$ *tenen les següents propietats:*

1. $u^-(\lambda)$ *és una funció acotada, no decreixent i contínua per l'esquerra a l'interval* $(0,1]$.
2. $u^+(\lambda)$ *és una funció acotada, no creixent i contínua per l'esquerra a l'interval* $(0,1]$.
3. $u^-(\lambda)$ *i* $u^+(\lambda)$ *són funcions contínues per la dreta en* $\lambda = 0$.
4. $u_1^- \leq u_1^+$.

*Recíprocament, si la parella de funcions* $\alpha(\lambda)$ *i* $\beta(\lambda)$ *satisfan les condicions anteriors, aleshores existeix un únic* $u \in \mathbb{E}^1$ *tal que* $[u]^\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ *per a* $\lambda \in [0,1]$.

Notem que el Teorema de representació de Goetschel i Voxman identifica un nombre difús amb dues funcions monòtones reals definides en l'interval $[0,1]$, és a dir, permet treballar amb la teoria de funcions quan analitzem propietats de $\mathbb{E}^1$. Aquest fet és especialment rellevant en Anàlisi Difusa.

# Capítol 2

# Els resultats

Direm que un subconjunt $A \subset \mathbb{E}^1$ és acotat superiorment si existeix un nombre difús $v \in \mathbb{E}^1$, denominat cota superior de $A$, tal que $u \leq v$ per a qualsevol $u \in A$. Denotarem $v = \sup_{u \in A} u$ al suprem de $A$ si $v$ és una cota superior de $A$ i $v \leq w$ per a qualsevol cota superior $w \in A$. Els conceptes de conjunt acotat inferiorment, de cota inferior i de ínfim de $A$ es defineixen de manera similar. Es diu que $A$ està acotat si està acotat superiorment i inferiorment.

En el Teorema 2.1 es demostra que un conjunt acotat $M$ de nombres difusos té suprem i ínfim; així mateix es dona una representació de $\sup A$ i $\inf A$.

**Teorema 2.1.** *[1] Suposem que $\{u_t : t \in \Omega\} \subset \mathbb{E}^1$ és un conjunt acotat, aleshores el seu suprem i el seu ínfim existeixen i estan determinants per les dues funcions següents de $\lambda \in [0,1]$ que defineixen un nombre difús:*

$$(u^-_{s,\Omega}(\lambda), u^+_{s,\Omega}(\lambda)),$$

$$(u^-_{I,\Omega}(\lambda), u^+_{I,\Omega}(\lambda)),$$

*on*

$$u^-_{s,\Omega}(\lambda) = \begin{cases} u^-_s(\lambda) & \textit{per a } \lambda \in (0,1], \\ u^-_s(0+0) & \textit{per a } \lambda = 0, \end{cases}$$

$$u^+_{s,\Omega}(\lambda) = \begin{cases} u^+_s(\lambda) & \textit{per a } \lambda \in [0,1] \setminus \{\lambda^s_m\}, \\ u^+_s(\lambda^s_m - 0) & \textit{per a } \lambda = \lambda^s_m \quad (m = 1, 2, ...), \end{cases}$$

$$u^-_{I,\Omega}(\lambda) = \begin{cases} u^-_I(\lambda) & \textit{per a } \lambda \in [0,1] \setminus \{\lambda'_m\}, \\ u^-_I(\lambda'_m + 0) & \textit{per a } \lambda = \lambda'_m \quad (m = 1, 2, ...), \end{cases}$$

$$u^+_{I,\Omega}(\lambda) = \begin{cases} u^+_I(\lambda) & \textit{per a } \lambda \in (0,1], \\ u^+_I(0 + 0) & \textit{per a } \lambda = 0, \end{cases}$$

$$u^-_s(\lambda) = \sup_{t\in\Omega}(u_t)^-(\lambda), \qquad u^+_s(\lambda) = \sup_{t\in\Omega}(u_t)^+(\lambda),$$

$$u^-_I(\lambda) = \inf_{t\in\Omega}(u_t)^-(\lambda), \qquad u^+_I(\lambda) = \inf_{t\in\Omega}(u_t)^+(\lambda),$$

*i* $u^+_s(\lambda)$ *i* $u^-_t(\lambda)$ *presenten una discontinuïtat en els punts* $\{\lambda^s_m\}$ *i* $\{\lambda'_m\}$*, respectivament.*

No obstant, la representació obtinguda no proporciona una descripció *natural* de $\sup A$ (respectivament de $\inf A$) i no ha estat molt utilitzada en la pràctica. En aquesta Memòria demostrarem una condició necessària i suficient per tindre una representació *natural* de $\sup A$ i $\inf A$. El següent concepte proporciona una propietat fonamental en el desenvolupament de la Memòria.

**Definició 2.1.** *Direm que una successió de funcions* $f_m(\lambda)\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ *(*$m = 1, 2, ...$*) convergeix per l'esquerra quasi uniformement a* $f(\lambda)$ *si, per a qualsevol* $\lambda_0 \in (0,1]$ *i* $\varepsilon > 0$*, existeixen* $\delta > 0$ *i* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tals que* $|f_m(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon$*, sempre que* $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$ *(*$\lambda \in [0, \delta)$*) i* $m \geq m_0$*.*

Presentem a continuació una condició necessària i suficient perquè el suprem d'una successió de nombres difusos definisca un nombre difús.

**Teorema 2.2.** *Siga* $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{E}^1$ *una successió acotada. La parella de funcions* $\sup\limits_n(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\sup\limits_n(u_n)^+(\lambda)$ *determinen un nombre difús* $u \in \mathbb{E}^1$ *si, i només si,* $\sup\limits_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\sup\limits_{1\leq n\leq m}(u_n)^+(\lambda)$ *convergeixen per l'esquerra quasi uniformement a* $\sup\limits_n(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\sup\limits_n(u_n)^+(\lambda)$*, respectivament.*

*Demostració.*

<u>Suficiència.</u> Hem de demostrar que $\sup\limits_n(u_n)^-(\lambda)$ i $\sup\limits_n(u_n)^+(\lambda)$ satisfan les quatre condicions

del Teorema de representació. Tenint en compte la definició de suprem hi ha prou amb demostrar que $\sup_n (u_n)^-(\lambda)$ i $\sup_n (u_n)^+(\lambda)$ són continus per l'esquerra en $\lambda \in (0,1]$ i continus per la dreta en $\lambda = 0$. Com que la demostració és similar, és suficient amb veure que $\sup_n (u_n)^-(\lambda)$ és continu per l'esquerra en $\lambda \in (0,1]$.

Per demostrar-ho, notem que, per hipòtesi, per a cada $\varepsilon > 0$ existeix un nombre positiu $\delta_0$ i $m_0 \in N$ de manera que per a qualsevol $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0]$, tenim

$$|\sup_n (u_n)^-(\lambda) - \sup_{1 \le n \le m} (u_n)^-(\lambda)| < \varepsilon/3 \qquad \text{per a tot } m \ge m_0. \tag{2.1}$$

A continuació, prenem $\varepsilon_n = \sup_{1 \le l \le m_0} (u_l)^-(\lambda_0) - u_n^-(\lambda_0)$ on $1 \le n \le m_0$. Definim els subconjunts $I, J$ tals que $\{n : 1 \le n \le m_0\} = I + J$. El subconjunt $I$ està format pels $n$ tals que $\varepsilon_n = 0$, mentre que el subconjunt $J$ conté els $n$ tals que $\varepsilon_n > 0$. Per a qualsevol $\varepsilon > 0$, s'elegeix un nombre positiu $N(m_0)$ que satisfaça $\max_{1 \le n \le m_0} \varepsilon_0 / N(m_0) < \varepsilon/3$. Com que $u_n^-(\lambda)$ $(1 \le n \le m_0)$ és contínua per l'esquerra en $\lambda_0$, existeix $\delta_{m_0} \in (0, \delta_0)$ tal que

$$|u_n^-(\lambda) - u_n^-(\lambda_0)| < \min_{l \in J} \varepsilon_l / 2N(m_0) \qquad \text{per a tot } \lambda \in (\lambda_0 - \delta_{m_0}, \lambda_0]. \tag{2.2}$$

Si per a algun $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_{m_0}, \lambda_0)$ arbitrari, existeix $n(\lambda) \in J$ tal que $\sup_{1 \le l \le m_0} (u_l)^-(\lambda) = u_{n(\lambda)}^-(\lambda)$, aleshores prenent $n_0 \in I$, per (2.2) s'infereix que

$$u_{n_0}^-(\lambda) > u_{n_0}^-(\lambda_0) - \min_{l \in J} \varepsilon_l / 2N(m_0) \ge u_{n_0}^-(\lambda_0) - \varepsilon_n(\lambda)/2N(m_0).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} 0 \le u_{n(\lambda)}^-(\lambda_0) - u_{n(\lambda)}^-(\lambda) &= u_{n_0}^-(\lambda_0) - \varepsilon_{n(\lambda)} - u_{n(\lambda)}^-(\lambda) \\ &\le u_{n_0}^-(\lambda_0) - \varepsilon_{n(\lambda)}(1 - 1/2N(m_0)) - u_{n(\lambda)}^-(\lambda). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Per (2.3) tenim que

$$u_{n(\lambda)}^-(\lambda) + \varepsilon_{n(\lambda)}(1 - 1/2N(m_0)) = \sup_{1 \le l \le m_0} (u_l)^-(\lambda) + \varepsilon_{n(\lambda)}(1 - 1/2N(m_0)) \le u_{n_0}^-(\lambda),$$

el que implica una contradicció, ja que si $\sup_{1 \le l \le m_0} (u_l)^-(\lambda) = u_{n(\lambda)}^-(\lambda)$ s'obté que $n(\lambda) \in I$. Per (2.2) s'arriba a

$$|\sup_{1 \le l \le m_0} (u_l)^-(\lambda) - \sup_{1 \le l \le m_0} (u_l)^-(\lambda_0)| = |u_{n(\lambda)}^-(\lambda) - u_{n(\lambda)}^-(\lambda_0)| < \min_{l \in J} \varepsilon_l / 2N(m_0) < \varepsilon/3. \tag{2.4}$$

Finalment, aplicant la desigualtat triangular i combinant les equacions (2.1) i (2.4) , es conclou que

$$
\begin{aligned}
|\sup_n(u_n)^-(\lambda) - \sup_n(u_n)^-(\lambda_0)| \leq |\sup_n(u_n)^-(\lambda) - \sup_{1\leq n\leq m_0}(u_n)^-(\lambda)| \\
+ |\sup_{1\leq n\leq m_0}(u_n)^-(\lambda) - \sup_{1\leq n\leq m_0}(u_n)^-(\lambda_0)| + |\sup_{1\leq n\leq m_0}(u_n)^-(\lambda_0) - \sup_n(u_n)^-(\lambda_0)| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

per a tot $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_{m_0}, \lambda_0]$.

Necessitat. Únicament cal demostrar que $\sup\limits_{1\leq n\leq m} u_n^-(\lambda)$ convergeix quasi uniformement per l'esquerra a $\sup\limits_n(u_n)^-(\lambda)$ en $\lambda \in [0,1]$, ja que la demostració per al cas $\sup\limits_n(u_n)^+(\lambda)$ és similar. Per veure que aquesta conclusió es compleix, es suposa que existeixen $\lambda_0 \in (0,1]$ i $\varepsilon_0 > 0$ tals que per a qualsevol $m \in N$ i per a qualsevol successió decreixent $\{\delta_m\}_{m\geq 1}$ que convergeix a 0, existeix $\lambda_m \in (\lambda_0 - \delta_m, \lambda_0]$ que satisfà

$$
|\sup_n(u_n)^-(\lambda_m) - \sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_m)| \geq \varepsilon_0 \quad (m = 1, 2, ...). \tag{2.5}
$$

D'acord amb l'equació (2.4) de la demostració de suficiència, s'obté que si $u_n^-(\lambda)(1 \leq n \leq m)$ és contínua per l'esquerra en $\lambda_0$, aleshores $\sup\limits_{1\leq n\leq m} u_n^-(\lambda)$ és també contínua per l'esquerra en $\lambda_0$. Per consegüent, podem suposar que existeix $\delta_m > 0$ tal que

$$
|\sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda) - \sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_0)| < \varepsilon_0/3 \quad \text{per a tot } \lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0]. \tag{2.6}
$$

Com que $\sup\limits_n(u_n)^-(\lambda)$ és contínua per l'esquerra, existeix un $\delta_0 > 0$ tal que

$$
|\sup_n(u_n)^-(\lambda) - \sup_n(u_n)^-(\lambda_0)| \leq \varepsilon_0/3 \quad \text{per a tot } \lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0]. \tag{2.7}
$$

Pel fet que $\sup\limits_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_0)$ és creixent i convergeix a $\sup\limits_n(u_n)^-(\lambda_0)$ es pot afirmar que existeix un $m_0 \in N$ tal que

$$
|\sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_0) - \sup_n(u_n)^-(\lambda_0)| \leq \varepsilon_0/3 \quad (m \geq m_0). \tag{2.8}
$$

Finalment, com que $\delta_m$ és decreixent i convergeix a 0, es pot suposar que $\delta_m < \delta_0$ i, conseqüentment, de les equacions (2.6)-(2.8), s'obté que, quan $m \geq m_0$,

$$
\begin{aligned}
|\sup_n (u_n)^-(\lambda_m) - \sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_m)| &\leq |\sup_n (u_n)^-(\lambda_m) - \sup_n u_n^-(\lambda_0)| \\
&+ |\sup_n (u_n)^-(\lambda_0) - \sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_0)| + |\sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_0) - \sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda_m)| < \varepsilon_0.
\end{aligned}
$$

L'equació anterior contradiu l'equació (2.5) i es conclou la demostració.

■

Si la successió de nombres difusos és creixent, obtenim el següent resultat.

**Corol·lari 2.1.** *Siga* $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{E}^1$ *una successió acotada i siga* $u_n \leq u_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$. *Aleshores, la parella de funcions* $\sup_n (u_n)^-(\lambda)$ *i* $\sup_n (u_n)^+(\lambda)$ *determinen un nombre difús* $u \in \mathbb{E}^1$ *si, i només si,* $u_n^-(\lambda)$ *i* $u_n^+(\lambda)$ *convergeixen per l'esquerra quasi uniformement a* $\sup_n (u_n)^-(\lambda)$ *i* $\sup_n (u_n)^+(\lambda)$, *respectivament.*

*Demostració.* Per hipòtesi, sabem que $u_n \leq u_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$ i, conseqüentment s'obté que:

$$
\begin{aligned}
\sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda) &= u_m^-(\lambda), \\
\sup_{1\leq n\leq m}(u_n)^+(\lambda) &= u_m^+(\lambda).
\end{aligned}
$$

Com que ambdues funcions convergeixen, aplicant el teorema anterior, obtenim el resultat desitjat.

■

**Observació 2.1.** *De manera anàloga s'obté una versió del Teorema 2.2 i del Corol·lari 2.1 per a l'ínfim. És a dir, en una successió acotada* $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{E}^1$, *la parella de funcions* $\inf_n (u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_n (u_n)^+(\lambda)$ *determinen un nombre difús* $u \in \mathbb{E}^1$ *si, i només si,* $\inf_{1\leq n\leq m}(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_{1\leq n\leq m}(u_n)^+(\lambda)$ *convergeixen quasi uniformement a* $\inf_n (u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_n (u_n)^+(\lambda)$, *respectivament. A més, si en aquesta successió* $u_n \leq u_{n+1}$, *la parella de funcions* $\inf_n (u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_n (u_n)^+(\lambda)$ *determinen un nombre difús* $u \subset \mathbb{E}^1$ *si, i només si,* $u_n^-(\lambda)$ *i* $u_n^+(\lambda)$ *convergeixen quasi uniformement a* $\inf_n (u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_n (u_n)^+(\lambda)$, *respectivament.*

Per al següent exemple necessitarem el següent resultat.

**Corol·lari 2.2.** *[1] Siga* $\{u_t : t \in \omega\} \subset \mathbb{E}^1$ *un conjunt acotat. Si la parella de funcions usuals* $u_s^-(\lambda) = \sup_{t\in\omega}(u_t)^-(\lambda)$, $u_s^+(\lambda) = \sup_{t\in\omega}(u_t)^+(\lambda)$ *en l'interval* $[0,1]$ *determinen un nombre difús* $u_s \in \mathbb{E}^1$*, aleshores* $u_s = \sup_{t\in\omega}(u_t)$*. Similarment, la conclusió per a l'ínfim també es compleix.*

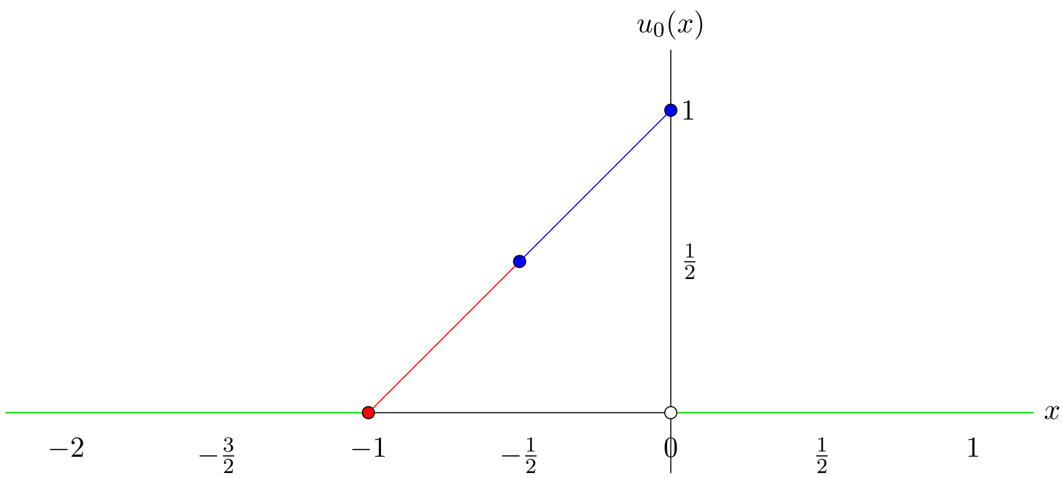
El següent exemple clarifica els resultats obtinguts anteriorment. Mostrarem que el valor de $\sup_n(u_n(x))$ no té perquè coincidir amb $(\sup_n(u_n))(x)$.

**Exemple 2.1.** Considerem la successió de nombres difusos:

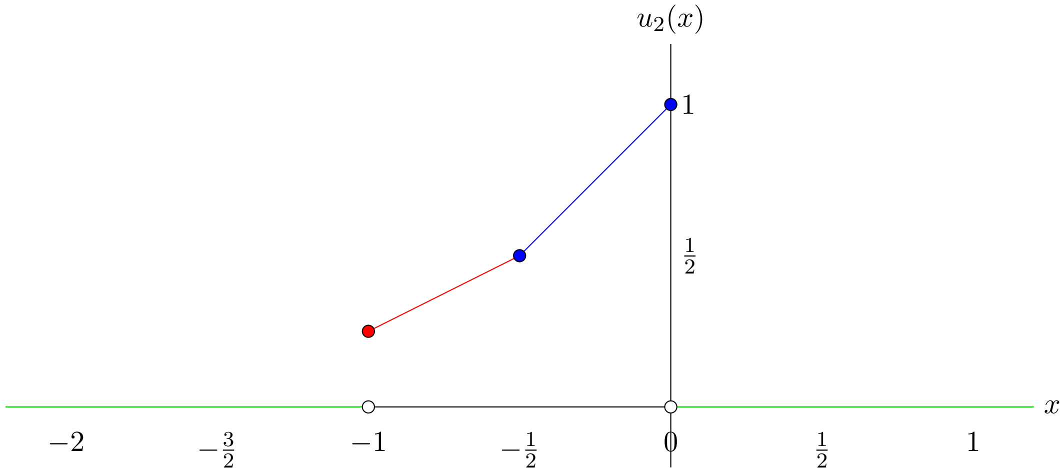
$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} + \frac{1+1/n}{2} & \textit{si } x \in [-1,-1/2), \\ 0 & \textit{si } x \notin [-1,0], \\ 1+x & \textit{si } x \in [-1/2,0]. \end{cases}$$

Anem a visualitzar la funció $u_n$ per a alguns valors de $n$.

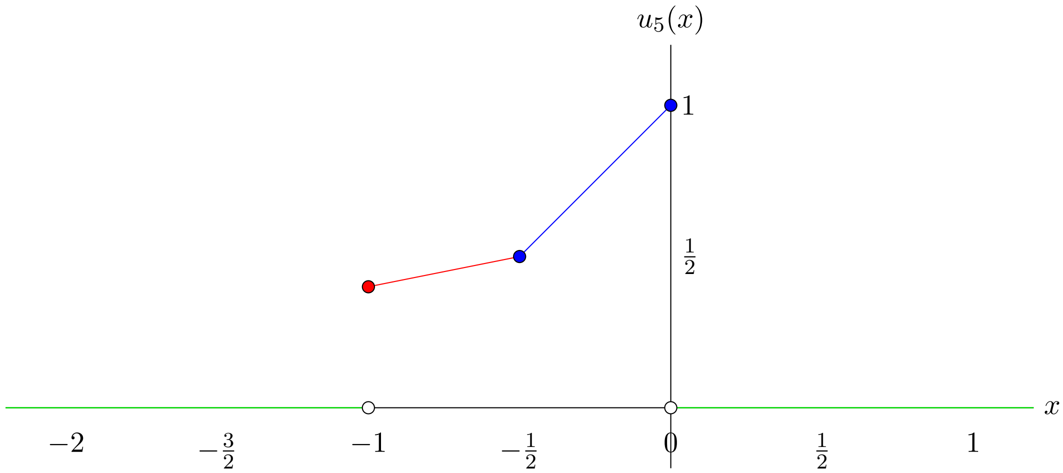
- Per a $n = 0$:



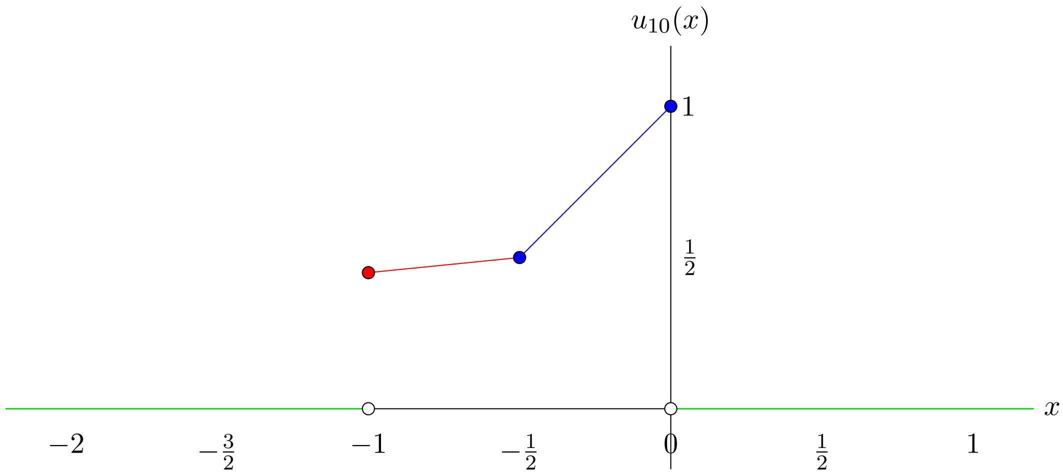
- Per a $n = 2$:



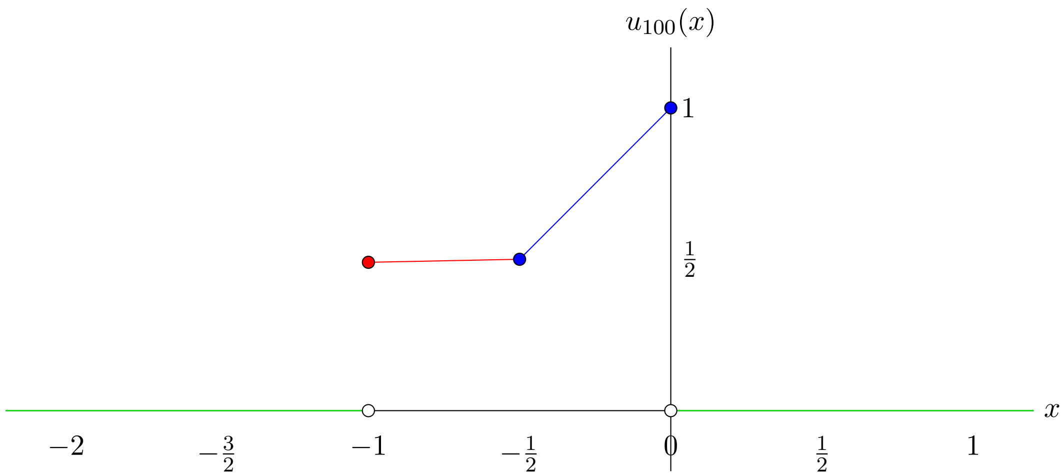

- Per a $n = 5$:



- Per a $n = 10$:




- Per a $n = 100$:




A continuació calculem els $\lambda$-talls. És fàcil veure que $u_n^+(\lambda) = 0 \quad$ per a tot $\lambda \in [0, 1]$, ja el valor que pren $u_n(x)$ no depèn d'$n$ quan $x \in [-1/2, 0]$ i és en $x = 0$ on s'assoleix l'extrem superior de l'interval $[u_n]^\lambda = [u_n^-(\lambda), u_n^+(\lambda)]$.

Per calcular $u_n^-(\lambda)$ farem un estudi segons els diferents valors que pot prendre $\lambda$, tenint en compte que es $u_n$ és una funció creixent per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Primer prenem $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$. Per calcular $u_n^-(\lambda)$ únicament s'ha de considerar l'interval

$x \in [-1/2, 0]$ de la funció $u_n(x)$. Perquè $1 + x \geq \lambda$ quan $x \in [-1/2, 0]$ s'ha de tindre que $x \geq \lambda - 1$ quan $\lambda \in [1/2, 1]$. Aleshores es veu fàcilment que $u_n^-(\lambda) = \lambda - 1$ quan $\lambda \in [1/2, 1]$.

Veiem ara altre cas a estudiar. Perquè $u_n^-(\lambda) = -1$, s'ha de complir que

$$0 \leq \lambda < \frac{-1}{n} + \frac{1 + 1/n}{2}.$$

Per tant

$$0 \leq \lambda \leq \frac{-2 + n + 1}{2n},$$

és a dir,

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1 - 1/n}{2}.$$

Així doncs $u_n^-(\lambda) = -1$ quan $\lambda \in [0, \frac{1-1/n}{2})$.

Finalment, queda estudiar el cas en el que $\frac{1-1/n}{2} \leq \lambda < \frac{1}{2}$. En aquest cas el valor que pren $u_n^-(\lambda)$ dependrà del valor de $n$. Per obtindre el valor de la funció en l'interval $\lambda \in [\frac{1-1/n}{2}, \frac{1}{2}]$, hem de calcular el punt de tall de la recta $u_n(x) = \lambda$ i de la recta $u_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{1+1/n}{2}$.

$$\lambda = \frac{x}{n} + \frac{1 + 1/n}{2},$$

aleshores

$$\frac{2n\lambda - n - 1}{2} = x,$$

és a dir,

$$x = n(\lambda - n/2) - 1/2).$$

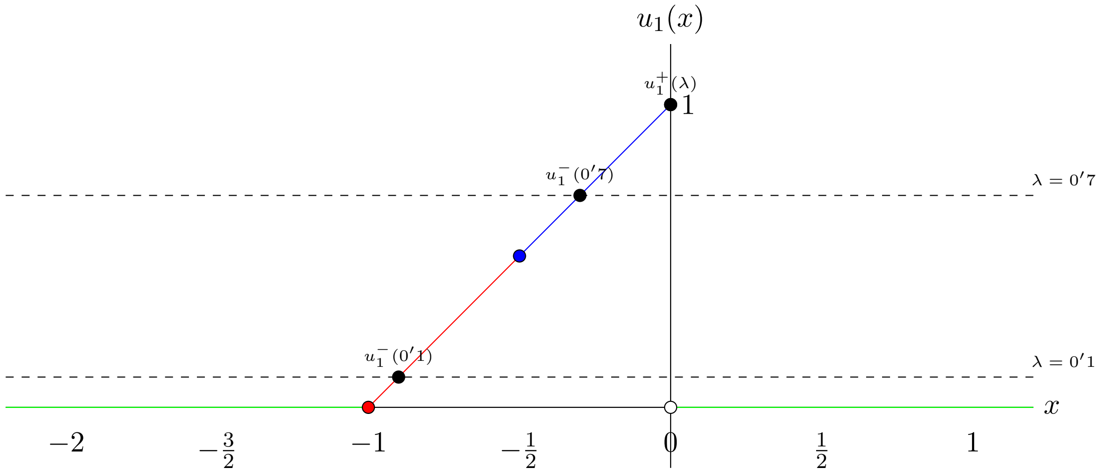
Es conclou que $u_n^-(\lambda) = n(\lambda - n/2) - 1/2)$ quan $\lambda \in [\frac{1-1/n}{2}, 1/2]$.

L'anterior estudi demostra que:

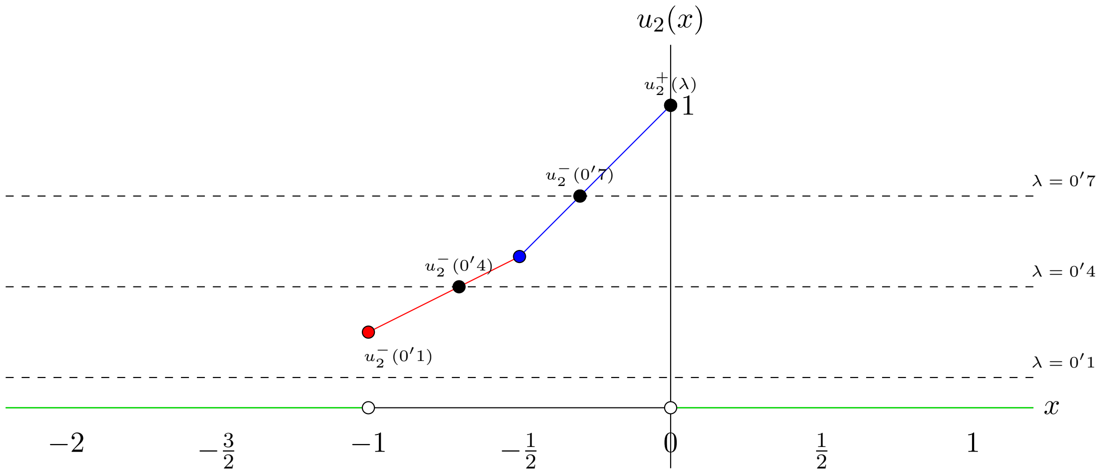
$$u_n^-(\lambda) = \begin{cases} -1 & si\ \lambda \in [0, \frac{1-1/n}{2}), \\ n(\lambda - 1/2) - 1/2 & si\ \lambda \in [\frac{1-1/n}{2}, 1/2], \\ \lambda - 1 & si\ \lambda \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

A continuació es representen gràficament els resultats per a alguns valors de $n$.

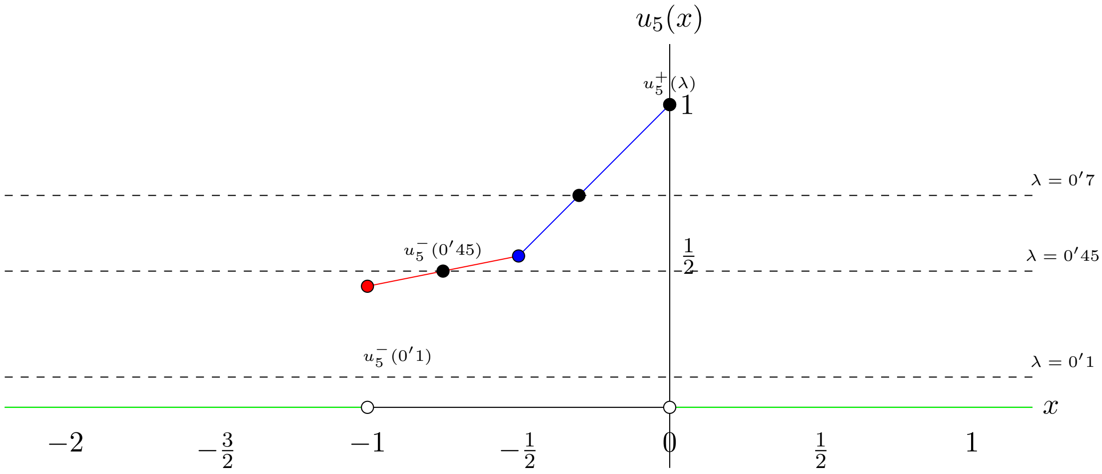
- Per a $n = 1$:



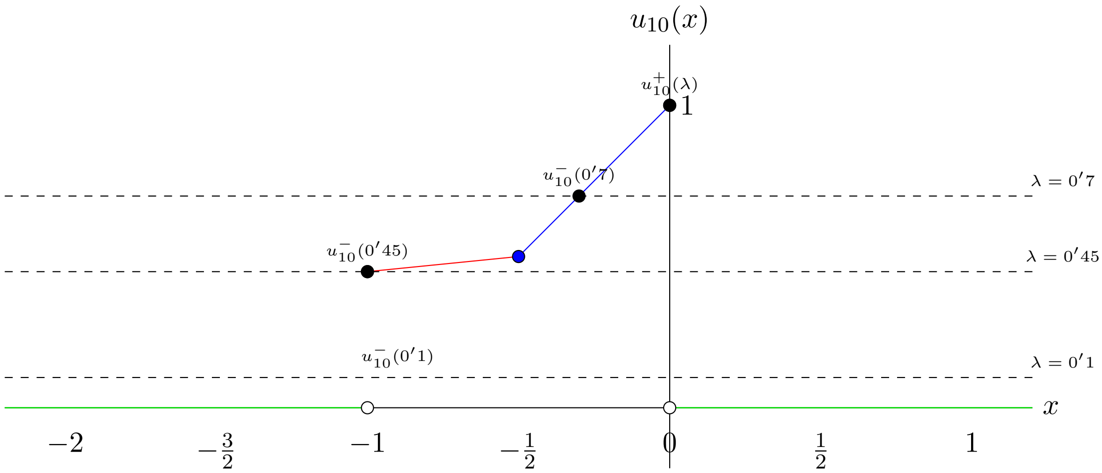

- Per a $n = 2$:



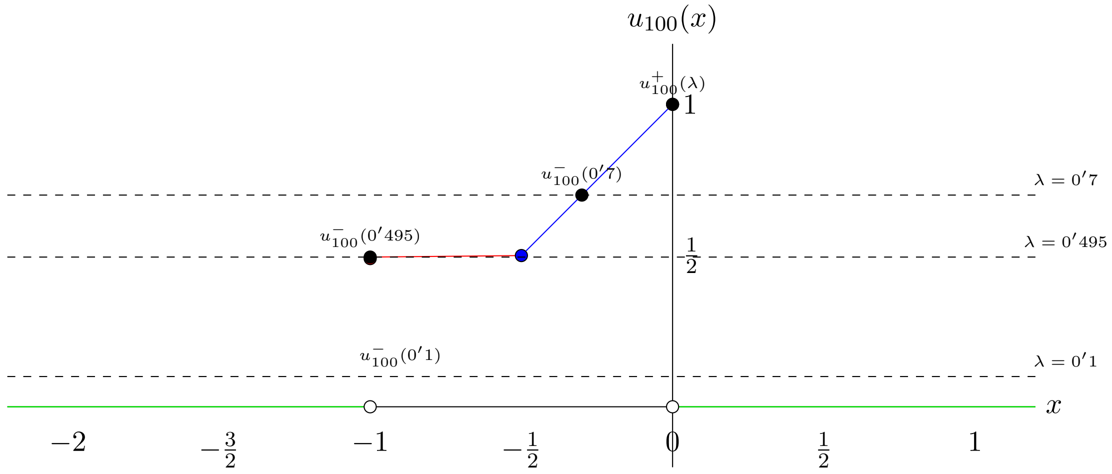
- Per a $n = 5$:




- Per a $n = 10$:



- Per a $n = 100$:




Seguidament estudiem el valor de $\sup_n(u_n(x))$.

Després de calcular els $\lambda$-talls, es conclou que $\sup_n(u_n)^+(\lambda) = 0$ si $\lambda \in [0, 1]$.

Per calcular $\sup_n(u_n)^-(\lambda)$ sabem que per a $\lambda \in [0, 1/2)$ existeix $n_0$ tal que

$$(1 - 1/(n_0 + 1))/2 > \lambda \geq (1 - 1/n_0)/2.$$

Així doncs prenent $\lambda \in [0, (1 - 1/n)/2)$ quan $n \geq n_0 + 1$, pels càlculs anteriors s'obté que

$$u_n^-(\lambda) = -1.$$

De forma similar, prenent $\lambda \in [(1 - 1/n)/2, 1/2)$ quan $n \leq n_0$, tenim que

$$u_n^-(\lambda) = n(\lambda - 1/2) - 1/2.$$

En conclusió, per a $\lambda \in [0, 1/2)$, tenint en compte que l'expressió $n(\lambda - 1/2) - 1/2$ únicament pot tindre com a resultat valors negatius, es té

$$\sup_n(u_n)^-(\lambda) = \max_{1 \leq n \leq n_0} \{n(\lambda - 1/2) - 1/2, -1\} = 1 \cdot (\lambda - 1/2) - 1/2 = \lambda - 1.$$

Pels càlculs dels $\lambda$-talls és obvi que $sup_n(u_n)^-(\lambda) = \lambda - 1$ amb $\lambda \in [1/2, 1]$. Per tant, es pot afirmar que

$$\sup_n(u_n)^-(\lambda) = \lambda - 1 \text{ quan } \lambda \in [0, 1].$$

Com que el parell de funcions en $\lambda \in [0,1]$ $\alpha(\lambda) = \lambda - 1$ i $\beta(\lambda) = 0$ determinen un nombre difús $u(x)$, pel Corol·lari 2.2, la funció

$$u(x) = \begin{cases} 1 + x & si\ x \in [-1, 0], \\ 0 & si\ x \notin [-1, 0], \end{cases}$$

determina el suprem de la successió de nombres difusos. D'altra banda,

$$u^*(x) = \sup_n (u_n(x)) = \begin{cases} 1 + x & si\ x \in [-1/2, 0], \\ 0 & si\ x \notin [-1, 0], \\ 1/2 & si\ x \in [-1, -1/2]. \end{cases}$$

Òbviament $u^* \in \mathbb{E}^1$. Conseqüentment, $u^*(x) = \sup\limits_n (u_n(x)) \neq (sup_n u_n)(x)$.

Recordem que una successió $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{E}^1$ convergeix a $u \in \mathbb{E}^1$ per a la topologia induïda per la mètrica $D$ si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un nombre natural $n_0$ tal que per a tot $n \geq n_0$, es compleix que $D(u_n, u) \leq \varepsilon$. És un fet ben conegut que la convergència en $(\mathbb{E}^1, D)$ és equivalent a la convergència uniforme en $\lambda$ de la successió dels extrems dels $\lambda$-talls dels elements de la successió. Per aquest fet, a vegades es diu que la successió $\{u_n\}_{n \geq 1}$ convergeix uniformement a $u$.

**Teorema 2.3.** *Siga* $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{E}^1$ *una successió acotada tal que* (i) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$, (ii) $u_n^-(\lambda)$ *i* $u_n^+(\lambda)$ *convergeixen uniformement a* $\inf\limits_n (u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf\limits_n (u_n)^+(\lambda)$ *respectivament en* $\lambda \in [0, 1]$. *Aleshores* $\{u_n\}_{n \geq 1}$ *convergeix uniformement a* $\inf\limits_n (u_n)$.

*Demostració.* Per l'Observació 2.1, el parell de funcions $\inf\limits_n (u_n)^-(\lambda)$ i $\inf\limits_n (u_n)^+(\lambda)$ determinen un nombre difús $\inf\limits_n (u_n)$. Per hipòtesi, per a un $\varepsilon > 0$ arbitrari, existeix $n_0 \in N$ tal que per a tot $m \geq n_0$:

$$\begin{aligned} D(\inf_n (u_n), u_m) &= \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|\inf_n (u_n)^-(\lambda) - u_m^-(\lambda)|, |\inf_n (u_n)^+(\lambda) - u_m^+(\lambda)|\} \\ &\leq \max\{\sup_{\lambda \in [0,1]} |\inf_n (u_n)^-(\lambda) - u_m^-(\lambda)|, \sup_{\lambda \in [0,1]} |\inf_n (u_n)^+(\lambda) - u_m^+(\lambda)|\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

S'ha demostrat, per tant, que la successió $u_n$ convergeix a $\inf\limits_n u_n$.

■

**Observació 2.2.** *Els resultats per al suprem s'obtenen de forma similar. És a dir, siga* $\{u_n\} \subset \mathbb{E}^1$ *un conjunt acotat tal que* (i) $u_n \leq u_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$, (ii) $u_n^-(\lambda)$ *i* $u_n^+(\lambda)$ *convergeixen uniformement a* $\sup_n(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\sup_n(u_n)^+(\lambda)$ *respectivament en* $\lambda \in [0, 1]$. *Aleshores* $u_n$ *convergeix a* $\sup_n(u_n)$.

**Observació 2.3.** *La condició (ii) del Teorema 2.3 no es pot canviar per les condicions de que* $u_n^-(\lambda)$ *i* $u_n^+(\lambda)$ *convergeixen per l'esquerra quasi uniformement a* $\inf_n(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_n(u_n)^+(\lambda)$ *respectivament en* $\lambda \in [0, 1]$. *De fet, per l'Exemple 2.1 tenim:*

$$\inf_n(u_n)^-(\lambda) = \begin{cases} \lambda - 1 & si\ \lambda \in (1/2, 1], \\ -1 & si\ \lambda \in [0, 1/2], \end{cases}$$

amb $\inf_n(u_n)^+(\lambda) = 0$ i amb $\lambda \in [0, 1]$.

*Per aquesta raó, el parell de funcions* $\inf_n(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_n(u_n)^+(\lambda)$ *determinen el nombre difús* $\inf_n(u_n)$. *Clarament,* $u_n^-(\lambda) \geq (u_{n+1})^-(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$. *Aleshores, segons el Corol·lari 2.1,* $u_n^-(\lambda)$ *i* $u_n^+(\lambda)$ *convergeixen per l'esquerra quasi uniformement a* $\inf_n(u_n)^-(\lambda)$ *i* $\inf_n(u_n)^+(\lambda)$ *respectivament amb* $\lambda \in [0, 1]$. *Però, per altra banda és té que:*

$$\begin{aligned} D(\inf_n(u_n), u_m) &= \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \max\{|\inf_n(u_n)^-(\lambda) - (u_m)^-(\lambda)|, |\inf_n(u_n)^+(\lambda) - u_m^+(\lambda)|\} \\ &\geq |\inf_n(u_n)^-(1/2) - u_m^-(1/2)| = |-1 - (-1/2)| = 1/2 \quad (m = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

*Per tant,* $u_n$ *no convergeix a* $\inf_n u_n$.

En [1, teorema 3.1] es demostra que una funció contínua $f\colon [a, b] \to \mathbb{E}^1$ té suprem i ínfim. Com l'Exemple 2.2 posa de manifest, una tal funció $f$ no té per què assolir el seu suprem i el seu ínfim. Anem a donar a continuació una condició necessària i suficient perquè una funció a valors difusos i definida en $[0, 1]$ assolisca el seu suprem i el seu ínfim. Direm que un conjunt acotat $A \subset \mathbb{E}^1$ té la propietat d'aproximació per a la mètrica $D$ si el suprem de $A$ (respectivament, l'ínfim de $A$) és el límit d'una successió en $A$.

**Teorema 2.4.** *Si* $u : [a, b] \to \mathbb{E}^1$ *és contínua, aleshores* $u$ *assoleix el seu suprem si, i només si,* $u([0, 1])$ *té la propietat d'aproximació per a la mètrica* $D$.

*Demostració.*

Necessitat. Com que existeix $t_0 \in [a,b]$ tal que $u(t_0) = \sup_{t\in[a,b]} u(t)$, per a un $\varepsilon > 0$, tenim:

$$D(\sup_{t\in[a,b]} u(t), u(t_0)) = 0 < \varepsilon.$$

Per tant, es conclou que $u([0,1])$ té la propietat d'aproximació.

Suficiència. Per hipòtesi, existeix $t_n \in [a,b]$ tal que

$$D(\sup_{t\in[a,b]} u(t), u(t_n)) < 1/2^n, n = 1, 2, ...$$

Per compacitat, podem triar una subsuccessió $\{t_{n_k}\}_{n\geq 1}$ de $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tal que $t_{n_k}$ convergeix a $t_0 \in [a,b]$. Com que $u(t)$ és contínua, existeix $k_0$ tal que $D(u(t_{n_k}), u(t_0)) \leq 1/2^k$ per qualsevol $k \geq k_0$. Conseqüentment, quan $k \geq k_0$, per la desigualtat triangular, tenim

$$D(\sup_{t\in[a.b]} u(t), u(t_0)) \leq D(\sup_{t\in[a,b]} u(t), u(t_{n_k})) + D(u(t_{n_k}), u(t_0)).$$

Com que s'ha provat que $D(\sup_{t\in[a,b]} u(t), u(t_n)) < 1/2$ i que $D(u(t_{n_k}), u(t_0)) \leq 1/2^k$ quan $k \geq k_0$, concloem que

$$D(\sup_{t\in[a,b]} u(t), u(t_0)) \leq 1/2^{n_k} + 1/2^k \leq 1/2^{(k-1)}.$$

Aleshores, $D(\sup_{t\in[a,b]} u(t), u(t_0)) = 0$ i, conseqüentment, $\sup_{t\in[a,b]} u(t) = u(t_0)$.

■

**Observació 2.4.** *De manera similar es demostra que si* $u : [a,b] \to \mathbb{E}^1$ *és contínua, aleshores* $u(t)$ *assoleix el seu ínfim si, i només si, existeix* $t_0$ *tal que l'ínfim convergeix en* $(\mathbb{E}^1, D)$ *a* $u(t_0)$ *quan* $t \in [a,b]$.

Al següent exemple mostrem que existeix una funció contínua definida en $[0,1]$ a valors difusos que, a diferència de les funcions reals, no assoleix el seu suprem.

**Exemple 2.2.** Definim la funció $\phi : [0,1] \to (\mathbb{E}^1, D)$ de manera que, per a cada $t \in [0,1]$, tenim:

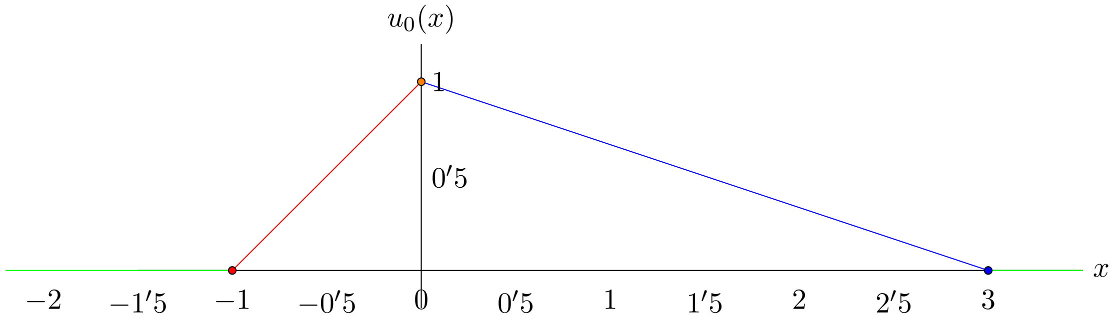
$$\phi(t) = u_t : \mathbb{R} \to [0,1]$$

on, per a cada $x \in \mathbb{R}$, $u_t(x)$ està definida com:

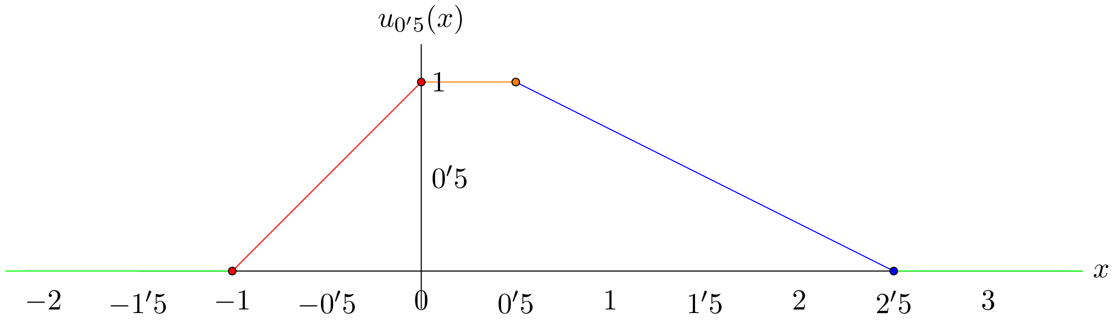
$$u_t(x) = \begin{cases} 1+x, & si\ x \in [-1,0], \\ 0 & si\ x \notin [-1,3-t], \\ 1 & si\ x \in (0,t], \\ 1+\frac{1}{2t-3}(x-t) & si\ x \in [t,3-t]. \end{cases}$$

En primer lloc visualitzem la funció $u_t(x)$ per a alguns valors de $t$:

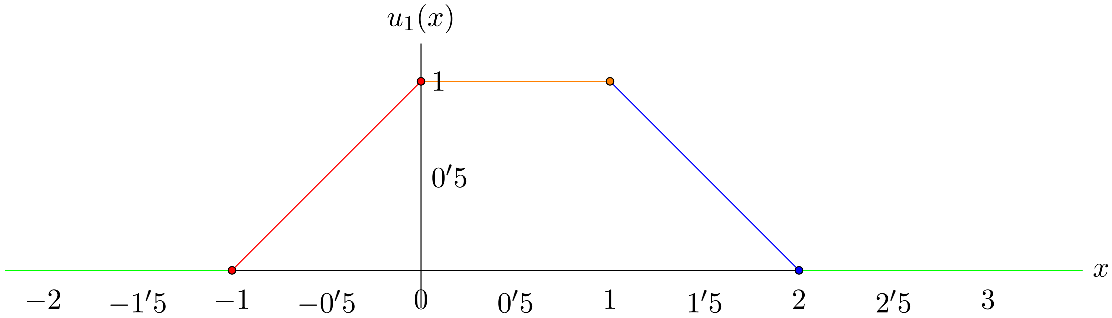
- Per a $t = 0$:




- Per a $t = 0'5$:



- Per a $t = 1$:




En segon lloc calculem els $\lambda$-talls $[u_t]^\lambda := [u_t^-(\lambda), u_t^+(\lambda)]$ per estudiar si els $u_t$ compleixen les condicions del Teorema de Representació de Goetschel i Voxman, és a dir, si la funció $\phi$ està ben definida.

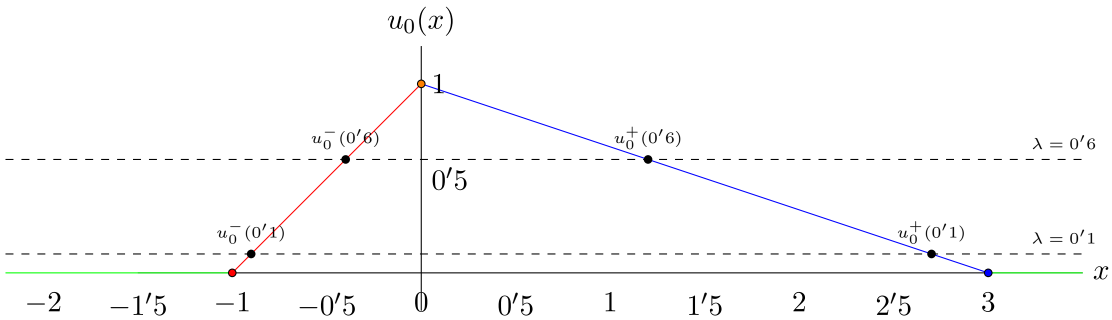
Estudiarem els següents casos:

1. Si $x \in [-1, 0]$, aleshores $u_t(x) = 1 + x$, per tant, $1 + x \geq \lambda$, és a dir, $x \geq \lambda - 1$.
2. Si $x \in (0, t)$, aleshores $u_t(x) = 1$, per tant $1 \geq \lambda$.
3. Si $x \in [t, 3 - t]$, aleshores $u_t(x) = 1 + \frac{1}{2t-3}(x - t)$, per tant $1 + \frac{1}{2t-3}(x - t) \geq \lambda$, és a dir, $x \leq 2\lambda t - t - 3\lambda + 3$.

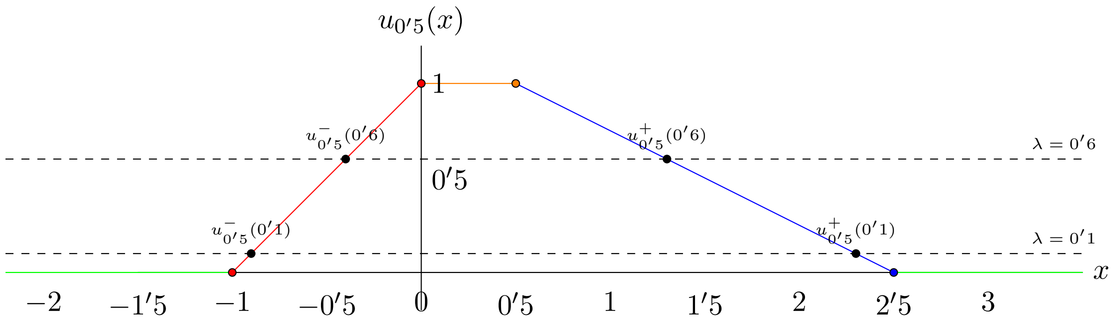
Com que $u_t^-(\lambda) := \min\{x \in \mathbb{R} | u_t(x) \geq \lambda\}$ i $u_t^+(\lambda) := \max\{x \in \mathbb{R} | u_t(x) \geq \lambda\}$, l'estudi anterior ens permet afirmar que $u_t^-(\lambda) = \lambda - 1$ i que $u_t^+(\lambda) = 2\lambda t - t - 3\lambda + 3 = (2\lambda - 1)t - 3(\lambda - 1)$.

A continuació representem gràficament els $\lambda$-talls per a alguns valors de $\lambda$.

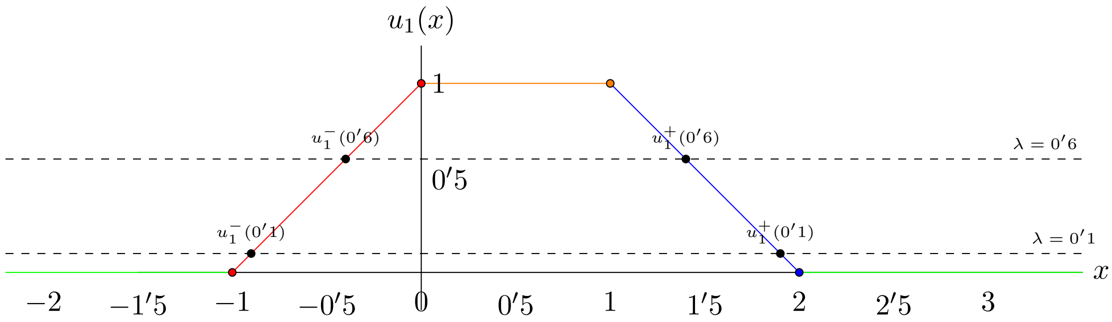
- Per a $t = 0$:



- Per a $t = 0'5$:




- Per a $t = 1$:




Seguidament estudiarem que $[u_t]^\lambda = [u_t^-(\lambda), u_t^+(\lambda)]$ compleix les quatre condicions del Teorema de Representació de Goestchel i Voxman.

- Les condicions 1, 2 i 3 del Teorema són fàcils de veure, ja que $u_t^-(\lambda)$ i $u_t^+(\lambda)$ són funcions polinòmiques en $\lambda \in [0, 1]$ i, per tant són funcions contínues en aquest interval.

- Finalment verificarem que es compleix la condició 4 del teorema. Per comprovar-ho cal demostrar que $u_t^-(1) \leq u_t^+(1)$ per a qualsevol $t \in [0, 1]$. Per a la funció $u_t^-$ tenim que

$$u_t^-(1) = 1 - 1 = 0,$$

i per a la funció $u_t^+$ tenim que

$$u_t^+(1) = (2 - 1)t - 3 + 3 = t.$$

Com que $t \in [0, 1]$, és clar que $u_t^-(1) \leq u_t^+(1)$.

En tercer lloc demostrarem que $\phi$ és contínua en $t \in [0,1]$. Considerem la successió $\{t_n\}_{n\geq 1}$ que convergeix a $t_0 \in [0,1]$, és a dir existeixen un $\varepsilon > 0$ i un $n_0$ tal que per a tot $n \geq n_0$, es compleix $|t_n - t_0| < \varepsilon$. Anem a demostrar que $\{\phi(t_n)\}_{n\geq 1}$ convergeix a $\phi(t_0)$, és a dir, donat un $\varepsilon > 0$, veurem que $D(\phi(t_n), \phi(t_0)) < \varepsilon$ per a tot $n \geq n_0$ (és a dir, donat un $\varepsilon > 0$, el $n_0$ per a la successió $\{t_n\}_{n\geq 1}$ i per a la successió $\{\phi(t_n)\}_{n\geq 1}$ és el mateix).

Com que $\phi(t) = u_t$, hem de demostrar que $\{u_{t_n}\}$ convergeix a $u_{t_0}$ quan $\{t_n\}$ convergeix a $t_0$. Per tant, hem de verificar que $D(\{u_{t_n}\}, u_{t_0}) < \varepsilon$.

Tenim que

$$|u^-_{t_n}(\lambda) - u^-_{t_0}(\lambda)| = |\lambda - 1 - (\lambda - 1)| = 0,$$

i que

$$|u^+_{t_n}(\lambda) - u^+_{t_0}(\lambda)| = |(2\lambda - 1)t_n - 3(\lambda - 1) - ((2\lambda - 1)t_0 - 3(\lambda - 1))| = |(t_n - t_0)(2\lambda - 1)|.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} D(u_{t_n}, u_{t_0}) = & \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|u^-_{t_n}(\lambda) - u^-_{t_0}(\lambda)|, |u^+_{t_n}(\lambda) - u^+_{t_0}(\lambda)|\} = \\ & \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{0, |(t_n - t_0)(2\lambda - 1)|\} = |t_n - t_0| < \varepsilon, \end{aligned}$$

per a tot $n \geq n_0$.

Aleshores, això demostra que $\phi$ és contínua en $\in [0,1]$.

Finalment veurem que $u_t$ no assoleix el seu suprem.

$$\sup_{t\in[0,1]} u^+_t(\lambda) = \begin{cases} -3(\lambda - 1) & \text{si } \lambda \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2 - \lambda & \text{si } \lambda \in (\frac{1}{2}, 1], \\ \frac{3}{2} & \text{si } \lambda = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

S'infereix, per tant, que per a $\lambda \in [0, \frac{1}{2}$ i $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$, $u^+_t(\lambda)$ assoleix el seu suprem en $t = 0$ i en $t = 1$, respectivament. Com que no existeix cap $t_0$ tal que per a qualsevol $\lambda \in [0,1]$ es tinga que

$$\sup_{t\in[0,1]} u^+_t(\lambda) = u^+_{t_0}(\lambda),$$

es conclou que $u_t$ no assoleix el seu suprem.

# Capítol 3

# Conclusions

Com es posa de manifest en [1], el suprem i l'ínfim d'un conjunt acotat $M$ de nombres difusos no té per què vindre definit de forma *natural*, és a dir, com un suprem o un l'ínfim de les funcions $u^+$ i $u^-$ d'un subconjunt adequat de $M$. En aquesta Memòria presentem una condició necessària i suficient perquè aquesta representació *natural* del suprem i de l'ínfim es done quan treballem amb una successió. El resultat permet treballar de forma senzilla en els contextos on la presència de conjunts acotats és fonamental, com ara la definició d'integral difusa.

Presentem una caracterització de quan una funció a valors difusos definida en un interval tancat i acotat de la recta real assoleix el seu suprem i el seu ínfim. La caracterització posa de manifest que, al contrari del cas real, existeixen funcions contínues $f\colon [a,b] \to \mathbb{E}$ que no satisfan aquesta propietat. També donem un exemple concret d'aquesta situació. La caracterització té potencials aplicacions en l'Anàlisi difusa.

# Bibliografia


[1] W. Congxin, W. Cong, *The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 210 (1997), 499–510.

[2] W. Congxin, W. Cong, *Some notes on the supremum and infimum of the set of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 103 (1999) 183–187.

[3] R. Goetschel, W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems, 18 (1986), 31–42.

[4] M. Matloka, *On fuzzy integral*, in: Proc. Polish Symp. Interval and Fuzzy Math., Poznan, 1986, pp. 163–170.

[5] S. Nanda, *On integration of fuzzy mappings*, Fuzzy Sets and Systems, 32 (1989), 95–101.