UNIVERSITAT
JAUME•I

TRABAJO DE FINAL DE MÁSTER

UNIDAD DIDÁCTICA: FUNCIONES ELEMENTALES

Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñamiento de Idiomas

Especialidad: Matemáticas

Alumno: Antonio Rodríguez González

Tutor: Julio José Moyano Fernández

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecer a mi tutor de este trabajo de fin de máster Julio José Moyano Fernández por haberme indicado los mejores pasos a seguir para realizar tal proyecto guiándome en cada momento y solucionando las dudas que iban surgiendo durante la realización del mismo.

Dar las gracias también al departamento de matemáticas del IES Benigasló (La Vall de Uxó), en especial a mi tutora de prácticas Maria José Jover Bernús y a Carlos Martínez Moliner, por haberme apoyado y ayudado ante la primera impresión como docente siempre valorando positivamente mi labor durante mi estancia en prácticas, completando satisfactoriamente la unidad didáctica impartida.

1. OBJETIVOS

Los objetivos que se quieren alcanzar con este trabajo se desglosan a continuación:

- Aplicar los hábitos de estudio, trabajo y disciplina para afianzar las tareas de aprendizaje y desarrollo personal.
- Impulsar el espíritu emprendedor, además de iniciativa personal, confianza, tomar decisiones y asumir responsabilidades de cara a los alumnos/as.
- Identificar los ODS aplicados en la unidad didáctica a impartir.
- Realizar una primera toma de contacto reflexiva desde el lado del docente en un centro educativo.
- Ganar experiencia de cara a un futuro laboral como docente.
- Impartir una unidad didáctica completa correctamente sobre un tema a escoger.
- Corregir por primera vez una evaluación de tipo examen.
- Presentar una propuesta de autoevaluación diferente a los alumnos/as.
- Presentar una situación de aprendizaje a la unidad didáctica.

2. ANTECEDENTES

A lo largo de este apartado, se va a desglosar toda la información pertinente a la unidad didáctica que se va a desarrollar en el apartado 3. Contiene una breve introducción, seguido por el marco teórico de la unidad didáctica y su aplicación a la vida real.

2.1. INTRODUCCIÓN

Un punto muy importante a destacar para este trabajo es decidir a qué grupo se le quiere impartir. Esta unidad didáctica trata de la representación gráfica de funciones y está dirigida al alumnado de 4.º ESO, donde es cierto que han llegado a ver pinceladas más básicas en el curso anterior, por lo que éste les va a servir como refuerzo e incluso aprenderán nuevos conceptos relacionados con el tema de representaciones de funciones. Se van a introducir nuevas nociones como: las funciones logarítmicas, las de valor absoluto, las de proporcionalidad inversa, de radicales y de exponenciales. Todo esto evidentemente detallado en el apartado *2.3. Marco Teórico*. Es cierto que a la hora de explicar estos nuevos conceptos, quitando la excepción del alumnado más avanzado, puede que se requiera de una explicación lenta y concienzuda, ya que puede ser costoso de visualizar a primera vista. Por tanto, se necesita paciencia y un buen *feedback* por parte del docente hacia los alumnos, motivándolos siempre a realizar los ejercicios para que no decaigan las ganas por aprender este tema y las matemáticas en general.

Haciendo referencia a la bibliografía que se va a utilizar, se emplea el libro de 4.º ESO de la editorial Anaya unidades 5 a 8 *[Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I., & Colera Cañas, R. (2016). Matemáticas Orientadas a los Enseñamientos Académicos 4.º ESO (pp. 100–119). Carlos Vallejo. Carlos Vallejo]*. Esta editorial ha optado por partir el temario en tres libros distintos, sin presentar razón alguna por la cual se han hecho esto, por lo que el tema que se va a impartir está incluído en el libro 2 conteniendo las unidades 5 a 8. El tema respectivo que se va a explicar es la *Unidad 5. Funciones Elementales.*

Asimismo, esta unidad contiene una extensión de situaciones de aprendizajes bastante breve de apenas dos páginas y los saberes básicos (aunque no especificados como tal) a continuación de las situaciones de aprendizaje iniciales. Además, al final de esta unidad se observa que tiene los siguientes extras para beneficiar al alumnado:

- Una hoja con tres ejercicios resueltos para que el alumno pueda observar cómo debe ser una correcta resolución de un problema de este tema.

- 53 ejercicios y problemas a resolver sin su solución, recalcando la dificultad de cada uno de ellos mediante un cuadrilátero partido en tres partes, significando máxima dificultad cuando el cuadrilátero es coloreado totalmente, y de dificultad baja siendo coloreado en una sola parte. siendo coloreado.
- Un taller de matemáticas, basado en la resolución gráfica de un problema de relojes de arena.
- Un apartado llamado "infórmate" conteniendo aparte de un texto informativo dos preguntas acerca de una función representativa del Carbono 14.
- Actividades de refuerzo.
- Una autoevaluación con resolución en la página web de la editorial.

2.2. RELACIÓN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES CON LOS OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE (ODS)

Los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) son una serie de 17 objetivos establecidos por la Organización de las Naciones Unidas (ONU) en el año 2015. Tienen como misiones principales reducir al máximo la pobreza, proteger el medio ambiente y el planeta y garantizar la prosperidad para toda la población mundial. [ONU (s/f)]

Estos objetivos están conectados entre sí y se enfocan en diversos temas como la salud, la educación, la igualdad de género, la energía limpia, la reducción de la desigualdad, entre otros.

Las funciones matemáticas son una parte importante del plan de estudios de matemáticas de 4º de la ESO. En este curso, los alumnos aprenden a representar, analizar y resolver problemas de las funciones que se explican en el punto *2.3. Marco Teórico.* Por ello resulta muy pertinente tratar de desarrollar alguno de los ODS en este tema en particular.

A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo las funciones matemáticas pueden contribuir a la consecución de los ODS:

- ODS 3: Salud y bienestar: Las funciones matemáticas se utilizan en la modelización matemática de enfermedades y epidemias para predecir su propagación y controlarlas.

- ODS 7: Energía asequible y no contaminante: Las funciones matemáticas se utilizan en la modelización de sistemas.
- ODS 4: Educación de calidad: El estudio de las funciones en matemáticas puede contribuir a lograr este objetivo, ya que proporciona a los estudiantes una base sólida en habilidades matemáticas que son esenciales para la educación superior y la formación profesional.
- ODS 8: Trabajo decente y crecimiento económico: El análisis de funciones económicas, como las funciones de producción y de costos, puede ayudar a los estudiantes a entender mejor cómo funciona la economía y cómo las empresas pueden maximizar sus ganancias y crear empleos decentes.
- ODS 9: Industria, innovación e infraestructura: El estudio de las funciones también puede estar relacionado con este objetivo, ya que las funciones son herramientas esenciales en la modelización y optimización de sistemas técnicos e industriales.
- ODS 11: Ciudades y comunidades sostenibles: La planificación urbana y la gestión del transporte son áreas en las que se utilizan funciones para optimizar y mejorar los sistemas de infraestructura en las ciudades.
- ODS 13: Acción por el clima: Las funciones también pueden ser utilizadas para modelar el cambio climático y analizar el impacto de las emisiones de gases de efecto invernadero en el medio ambiente.

2.3. MARCO TEÓRICO

En este apartado se detallan dos puntos importantes. El primero es la metodología docente, esto es, la descripción de la forma de impartir las clases, así como las formas en la que los alumnos aprenden los conceptos de la unidad didáctica, y por otro lado, los propios contenidos sobre la representación de funciones. Se articulan en torno a siete subapartados respecto a las funciones elementales que se explican en clase.

Además, se hará hincapié en la forma geométrica de sus correspondientes gráficas, pues la experiencia de las prácticas en el IES dice que el alumnado no tiene interiorizada la representación geométrica (de forma personal, esto se percibe también en el primer curso del grado que realicé, por lo que creo que una mejora en el enfoque de este tema puede ser el énfasis en la representación gráfica de funciones: este comportamiento cualitativo es interesante no solo para aquellos y aquellas estudiantes que vayan a cursar grados de ingenierías, física, química o matemáticas, sino también en ciencias económicas y sociales).

2.3.1. Metodologías de Enseñanza-Aprendizaje

Antes de todo, cabe definir el término metodología didáctica. Este término se refiere al conjunto de estrategias, enfoques y técnicas que se utilizan para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se puede considerar como un marco teórico y práctico que guía al docente en la selección y aplicación de métodos pedagógicos para lograr los objetivos educativos. Además, su objetivo principal es promover un ambiente de enseñanza efectivo, que estimule el interés en el alumnado por aprender la materia.

La LOMCE define en su artículo 35 la metodología didáctica en el bachillerato, en consonancia con lo anterior, como el conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados. La nueva ley (LOMLOE) modifica el artículo de la siguiente manera [BOE (s/f)]

> 1. Las actividades educativas en el bachillerato favorecerán la capacidad del alumno para aprender por sí mismo, para trabajar en equipo y para aplicar los métodos de investigación apropiados. Asimismo, se prestará especial atención a la orientación educativa y profesional del alumnado incorporando la perspectiva de género.
>
> 3. En la organización de los estudios de Bachillerato se prestará especial atención a los alumnos y alumnas con necesidad específica de apoyo educativo. A estos efectos se establecerán las alternativas organizativas y metodológicas y las medidas de atención a la diversidad precisas para facilitar el acceso al currículo de este alumnado.

Es decir, la nueva ley recoge específicamente que la metodología empleada habría de tener en cuenta la atención a la diversidad, así como la perspectiva de género. Ambos aspectos quedan también recogidos en la enumeración de principios pedagógicos que establece el Artículo 19 de la LOMLOE. Los principios pedagógicos deberían ser el respaldo para la aplicación de las diferentes metodologías didácticas que se pueden emplear, con sus características intrínsecas asociadas (carácter motivador, participativo, etc.)

La elección de una metodología u otra depende de varios factores, tanto intrínsecos como extrínsecos en referencia al estudiante. Por ejemplo, Fortea [Fortea Bagán, 2019, p. 10] menciona los resultados de aprendizaje u objetivos previstos, las características del estudiantado (lo que saben de cursos anteriores, su motivación, etc.), las características del profesorado (estilo docente, motivación, etc.), las peculiaridades propias de la materia a impartir (énfasis teórico o práctico, complejidad para el alumnado…) y las condiciones materiales en las que se enmarca la docencia (recursos económicos disponibles, tiempo, características físicas de aula, número de alumnos, etc.)

Por ello, a lo largo de la estancia en prácticas y con ello las clases impartidas por mi persona, se debe decir que de todos los tipos de clasificaciones de metodologías de enseñanza-aprendizaje que existen, las que se han empleado, ya que resultan más efectivas, se destacan a continuación:

- **<u>Lección Magistral</u>**

Partiendo de la base de que consiste en una presentación de un tema concreto de forma lógica y estructurada para facilitar información al alumnado, se ha de decir que este método se ha utilizado en el 50% de las horas totales de clases, ya que la explicación de cada apartado de la unidad didáctica requiere de un tiempo considerable para que todo el alumnado entendiese lo que se les está enseñando. Es cierto que el alumnado no interviene tanto como en otros métodos de enseñanza ya que está constantemente recibiendo información nueva por lo que su labor es escuchar y absorber toda la información posible.

Tras esta experiencia en estas prácticas en el IES se puede afirmar que la participación del alumnado es en mayor parte en el método de enseñanza de resolución de ejercicios y problemas.

Por otro lado, hay que añadir que esta metodología de enseñanza tiene una gran ventaja a su favor, y es que mediante la lección magistral se puede llegar a abarcar una cantidad de contenidos muy grande y emitir al alumnado información abundando acerca del tema que se está impartiendo.

- **<u>Resolución de ejercicios y problemas</u>**

Este tipo de metodología ocupa el 30% del tiempo en clase, ya que es imprescindible que el alumno ponga en práctica los conocimientos adquiridos durante la lección magistral del profesorado. Además, la mayor parte de la intervención del alumnado viene en este método, ya que es cuando surgen las dudas una vez intentan resolver los ejercicios. Este tiempo es muy necesario e importante ya que las dudas se resuelven al momento, bien entre compañeros y bien preguntando al profesorado, yéndose a casa satisfechos pensando en que han entendido lo que se les ha estado explicando durante la clase.

Hay que añadir que este tipo de aprendizaje se ve asociado con el aprendizaje basado en problemas o ABP, otro de los métodos empleados al alumnado.

- **<u>Aprendizaje basado en problemas (ABP)</u>**

Puede llegar a sonar contradictorio emplear el ABP tras impartir lecciones magistrales al inicio de cada sesión, ya que el aprendizaje basado en problemas consiste en que el alumnado aprenda e interiorice los conceptos tras la realización reiterada de problemas ‘’tipo’’, pero se he de decir que a estos niveles (4.º ESO) hay algún alumnado que no capta conceptos matemáticos abstractos a simple vista, tales como la definición de dominio de una función, y no es hasta que observan mediante ejercicios lo que significa, y es ahí cuando entienden el concepto. Es por ello que en las sesiones, se han combinado tanto las lecciones magistrales como el ABP para que el alumnado puede sentirse contento consigo mismo y adquiera una práctica para realizar los ejercicios que próximamente van a tener que realizar en un examen.

Es cierto que existe una desventaja acerca de este método y es si solamente se le enseña al alumno problemas ‘’tipo’’ poniendo en práctica el ABP, aprenderán un patrón o una serie de pasos a seguir para resolver un problema determinado sin entender realmente lo que están haciendo, y la finalidad de aprender matemáticas no es aprender un procedimiento, sino entender el porqué del procedimiento. Es por ello que se combina con la lección magistral, para que por lo menos puedan ver de dónde proviene cada uno de las expresiones y términos empleados.

- **Aprendizaje cooperativo**

Por último, en las sesiones se dedicaba el 20% restante del tiempo a la realización de problemas en grupo. Es cierto que tenían una mayor complejidad ya que al ser más personas y poder comunicarse entre ellos, llegan antes a la solución.

De entre todas las formas de implementación orientadas al aprendizaje cooperativo, la técnica empleada es el llamado Puzzle de Aronson (también llamado método Jigsaw) [Jiménez, JM, Vargas, M., María, V., & Santamaría, LM (s/f)]. Su objetivo principal es fomentar el aprendizaje cooperativo y reducir los prejuicios y estereotipos en el aula (lo cual se alinea con los principios pedagógicos establecidos en la LOMLOE, ya comentados). El Puzzle de Aronson basa su efectividad en la idea de que los estudiantes aprenden mejor cuando trabajan juntos en grupos reducidos y se ayudan fuertemente.

Por tanto, se propone un problema, dividido en cinco tareas a ejecutar para su resolución. Se divide al alumnado en cinco grupos de cinco personas, y a cada miembro del grupo se le asigna una de las cinco tareas a ejecutar dentro de la resolución del problema. Por ejemplo, el problema puede ser definir una función a trozos y las tareas a ejecutar serían, por ejemplo, cómo obtener la pendiente de una recta, cómo definir una parábola dados ciertos puntos del plano, etc. Una vez asignadas las tareas, los representantes de cada grupo de la tarea correspondiente se reúnen a su vez en un grupo para discutir la solución. Obtenida esta, se vuelven a formar los grupos de partida para resolver el problema propuesta.

La Universidad Politécnica de Valencia ha puesto a disposición de quien quiera acceder a su página web una buena explicación de los diferentes tipos de metodologías de enseñanza-aprendizaje. Aunque están orientadas a la Educación Superior, su descripción y funcionamiento es transferible a la Educación Secundaria y Bachillerato.
A continuación se describe la materia a impartir.

2.3.2. Las Funciones Elementales

1. Funciones lineales

Una función lineal es el tipo de función algebraica más básica que se puede encontrar en matemáticas. Su representación geométrica está dada por una recta en un plano de dos dimensiones, con correspondientes coordenadas (digamos) *x* e *y*, que adopta la expresión algebraica en forma de ecuación:

$$y = mx + n \,, \tag{1}$$

donde:

- *y* = eje de coordenadas vertical;
- *m* = pendiente de la recta;
- *x* = eje de coordenadas horizontal;
- *n* = ordenada del origen en el eje vertical.

Si se representa la ecuación (1) en un plano con valores de *m* y *n* no nulos, se observa que se traza una recta como la de la siguiente figura, Figura 1:

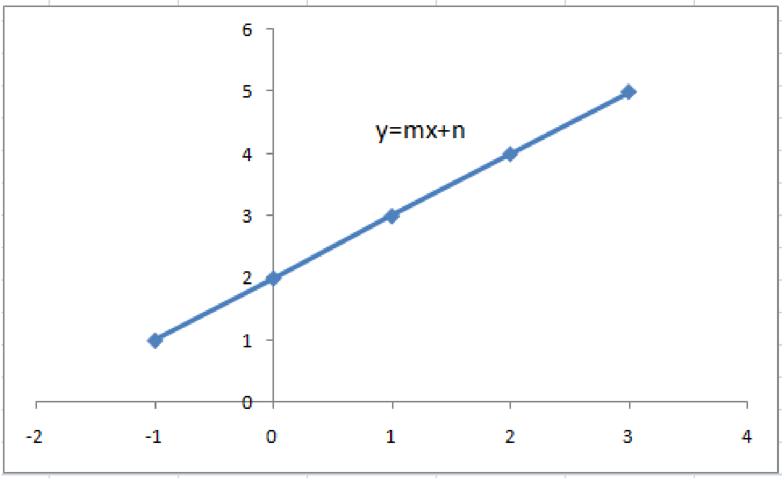


Figura 1. Representación de una función lineal de la forma *y=mx+c*

También se estudian otros dos casos, uno en el que *m=0*, y otro, el que *n=0*. En la Figura 2 se ve representado el caso de que la pendiente es nula, *m=0*. Se observa una recta horizontal que corta el eje *y* y tiene la ordenada en el origen *n.* Véase representado a continuación:

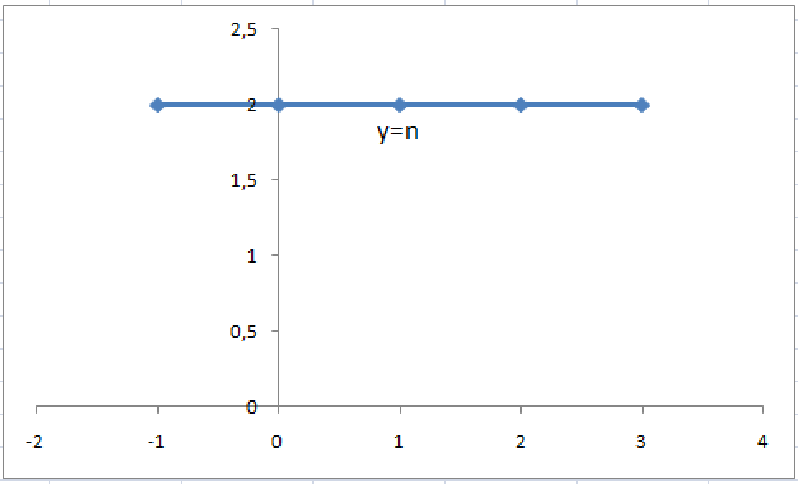


Figura 2. Representación función lineal con *m=0*

Seguidamente se plantea el otro caso, donde *n=0* y es por ello que la recta corta el eje *y* por el (0,0). Véase la Figura 3 a continuación:

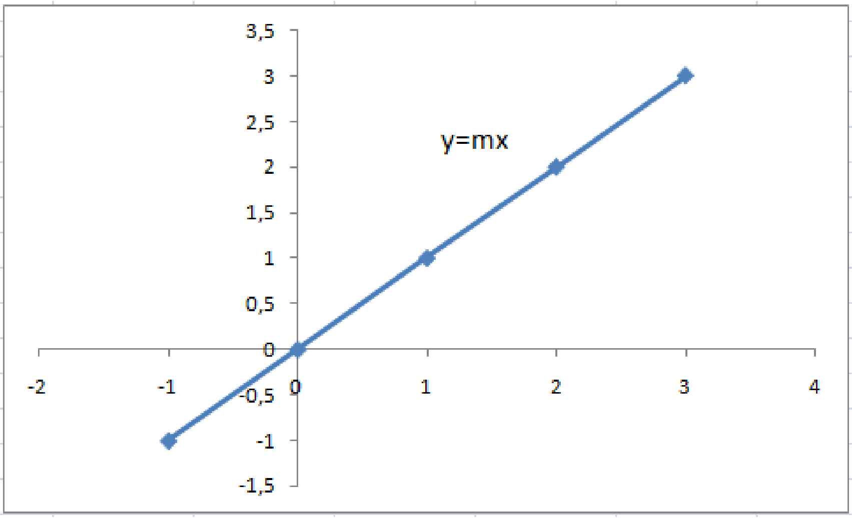


Figura 3. Representación de función lineal donde n=0

Además, estos tipos de funciones lineales pueden verse representadas en una misma gráfica, dando como resultado a las llamadas funciones lineales a trozos. A continuación se muestra un ejemplo de gráfica con tres funciones lineales en la Figura 4:

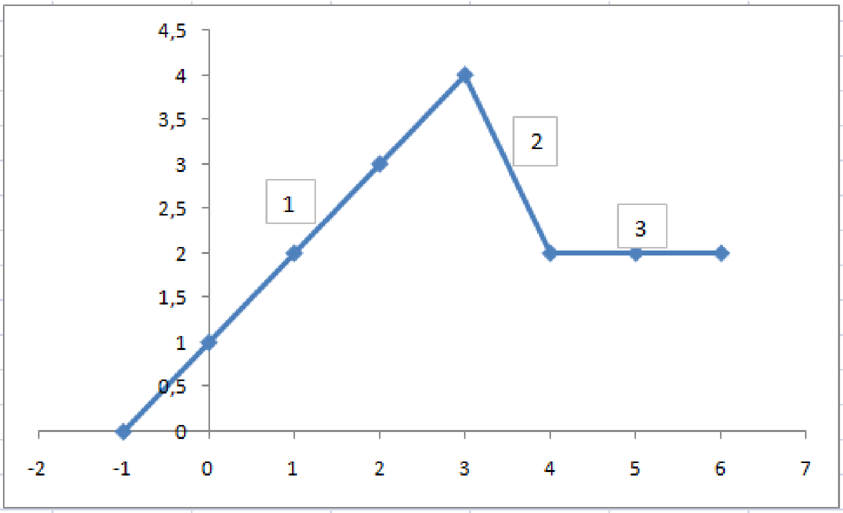


Figura 4. Representación de funciones lineales a trozos

Las representaciones lineales de funciones lineales a trozos se describe por rangos en su dominio de definición, como en el ejemplo: existen tres segmentos de recta. Entonces tomando como ejemplo la Figura 4, la función lineal a trozos se describe como:

$$f(x)= \begin{cases} x+1 & \text{si } -1\leq x<3 \\ -2x+10 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 2 & \text{si } 4\leq x<6 \end{cases}$$

Se insiste en que, en realidad, los rangos del ejemplo representan segmentos de recta. Obviamente se puede dar el caso de que se tengan las rectas "completas", y no solo un intervalo "acotado" de ellas como sucede en el ejemplo: en tal caso la función se describe con el signo "mayor que" o "menor que": $x <$ ó > x.

2. Funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas son el segundo tipo de funciones elementales que se ven en este tema de 4.º ESO. Se definen mediante la siguiente expresión general:

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \qquad (2)$$

donde:

- *a,b,c* son parámetros que definen la función y *a* es distinto de 0 para que se tenga una *verdadera* función cuadrática.

La representación de la función dada por una ecuación cuadrática describe una parábola; se trata de funciones continuas en todo $\Re$. Cada una de estas parábolas tienen un eje paralelo al eje *y*. Además, es importante mencionar el hecho de que la convexidad de la curva o parábola depende del signo del coeficiente de x^2, es decir, de *a,* y afecta a la representación de las siguientes maneras:

- La forma será igual entre dos parábolas si el coeficiente *a* es el mismo, solamente variará la posición en el plano en el que se encuentre.
- Si *a*>0, la parábola tendrá sus puntas hacia arriba, si *a*<0, las tendrá apuntando hacia abajo.
- Cuanto más grande sea el valor absoluto de *a*, es decir $|a|$, más “estrecha” será la parábola.

Tras un corto estudio cualitativo que introduzca al alumnado en el problema a tratar, se puede introducir el término de *concavidad,* el cual es un término controvertido (ya que a veces se llama *convexo* a lo *cóncavo*, o al revés: depende de dónde se sitúe el observador) que pretende indicar hacia qué dirección está orientado el vértice de la parábola. Con los puntos *a*, *b* y *c*, se puede saber a simple vista cómo será la forma de la curva aproximadamente; punto a favor para los alumnos ya que les dará una mayor facilidad y destreza para resolver este tipo de problemas. A continuación se muestra la Figura 5, un ejemplo de una parábola sencilla.

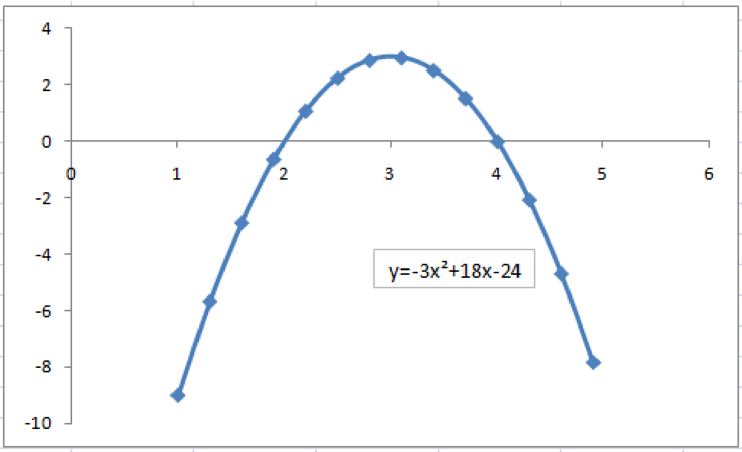


Figura 5. Parábola sencilla

A continuación, se va a introducir cómo se trazan estas parábolas de forma simple, para que cuando el alumno proceda a realizar el ejercicio, le sea cómodo y para nada complicado. Por tanto se aplica un método bastante sencillo basado en encontrar los puntos de corte con los ejes además de las coordenadas del vértice de la parábola (el pico de la curva).

MÉTODO DE REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Partiendo de una función cuadrática en forma de $y = ax^2 + bx + c$, se empieza a operar aplicando la expresión siguiente para hallar la abscisa (punto en el eje *x*) del vértice de la parábola:

$$p = \frac{-b}{2a} \,, \qquad (3)$$

donde:

- *p* = valor de la abscisa
- *b*, *a* = coeficientes de la función cuadrática.

Por tanto, sustituyendo los coeficientes de la ecuación (2) en la ecuación (3) se obtendrá un valor para la abscisa. Seguidamente, para encontrar el valor de la ordenada (punto del eje *y*), se sustituye este valor en la *x* de la ecuación (2), de la forma que $f(x) = y$. Finalmente, el vértice se expresa en forma de coordenada (*x,y*).

Por consiguiente, se deben hallar los puntos de corte en ambos ejes. Primero de todo, se debe tener en consideración que no siempre existen, ya que dependiendo de la forma de la parábola, puede cruzar o no por los ejes. Por ejemplo, si la parábola se encuentra en el cuadrante (+,+) y tiene el coeficiente *a* >0, sus puntas estarán hacia arriba por lo que no cortan el eje *x* , es más, si se intenta resolver esa ecuación, dará como resultado números imaginarios para ambos valores de *x*. Es por ello que, una vez se obtengan las coordenadas del vértice, se deben calcular los puntos alrededor de la abscisa para poder trazar la parábola y saber qué forma adopta. Tras esto, se observa si se pueden hallar los valores de los ejes o no.

Si se da el caso de que la parábola cruza por el eje *x*, para poder saber en qué punto o puntos son, simplemente se aplica la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado y se obtienen los valores de *x* . Por otro lado, si se da el caso de que corta al eje *y*, sustituyendo el valor de *x* más cercano al vértice en la ecuación cuadrática dada, se obtendrá el punto de intersección en el eje *y* .

Para una mejor visualización de lo explicado, se presenta la Figura 6, que muestra una parábola conteniendo de forma visual todos parámetros que se piden, y sirve como ejemplo de una resolución correcta de un ejercicio de este apartado.

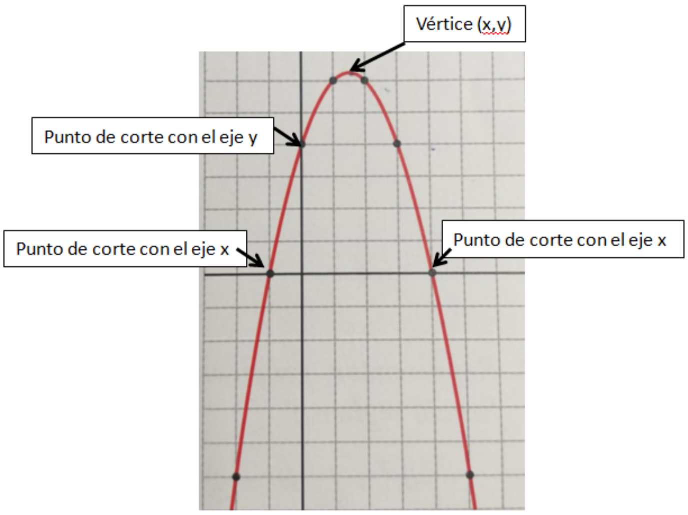


Figura 6. Representación de una parábola indicando sus puntos de corte y vértice. *Figura obtenida del libro: Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I., & Colera Cañas, R. (2016). Matemáticas Orientadas a los Enseñamientos Académicos 4.º ESO (pp. 100–119). Carlos Vallejo. Carlos Vallejo.*

A continuación se presenta también cómo resolver un sistema de ecuaciones de forma gráfica. Es decir, dadas dos funciones (una lineal y la otra cuadrática), hallar los puntos de corte. Evidentemente, los puntos de corte serán aquellos en los que ambas funciones se crucen entre sí. Se ha de enfatizar que la intersección corresponde, algebraicamente, a la resolución de un sistema de ecuaciones (no necesariamente lineales, como en este caso).

Concluimos este subapartado sobre funciones cuadráticas y su método de representación gráfica mostrando un ejemplo representativo de una resolución correcta de este tipo de problemas:

Dadas las funciones:

$$\begin{cases} y=-2x^2 + 5x - 2 \\ y= x - 2 \end{cases}$$

Y tras representarlas gráficamente:

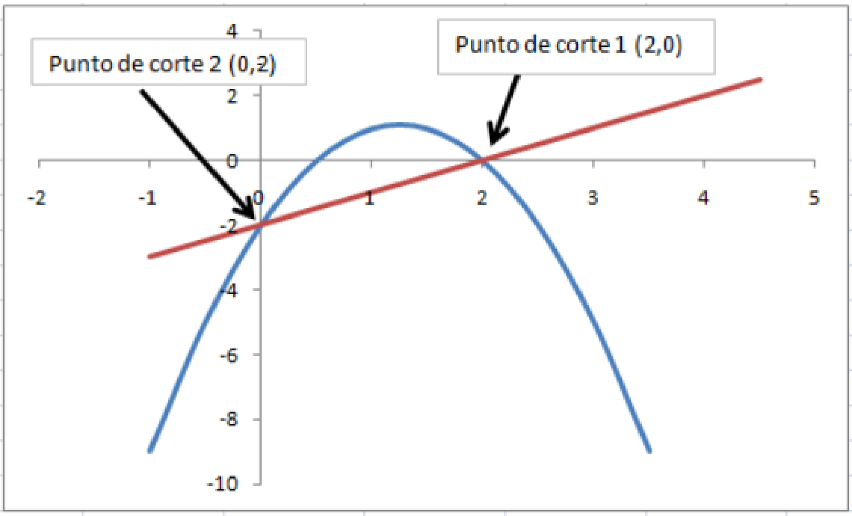


Figura 7. Resolución del ejemplo

Por tanto las soluciones de este sistema son los dos puntos de corte que se observan en este la Figura 7. Es decir, solución 1: x=2, y=0; solución 2: x=0, y=-2.

3. <u>Funciones con valor absoluto</u>

En este subapartado, se procede a explicar el tercer tipo de función elemental. Se trata de las funciones con valor absoluto, es decir:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

En términos generales y coloquialmente hablando, si se da el caso de encontrarse con este tipo de función, la imagen es siempre positiva o cero (el valor negativo no existe, por así decir) y siempre se presenta como resultado un número no negativo. El alumnado tiene que, al menos, interiorizar el mensaje de que "básicamente es hacer lo negativo, positivo" cuando se trata la noción de valor absoluto. A continuación se proponen varios ejemplos numéricos para entender mejor este concepto.

Ejemplos:

- $|-\ 3| = 3$
- $|9| = 9$
- $|0| = 0$
- $|-\ 15| = 15$

Con ello, se puede introducir el concepto de valor absoluto en el contexto de las funciones. Si se quiere sacar el valor absoluto de una función, representado en la forma $y = |f(x)|$, se debe aplicar una simetría con el eje *x*, y por tanto, la parte de la función que sea negativa pasará a ser positiva, al igual que con los ejemplos de los números. Véase a continuación la Figura 8, donde se ve representado un ejemplo de función muy simple con valor absoluto.

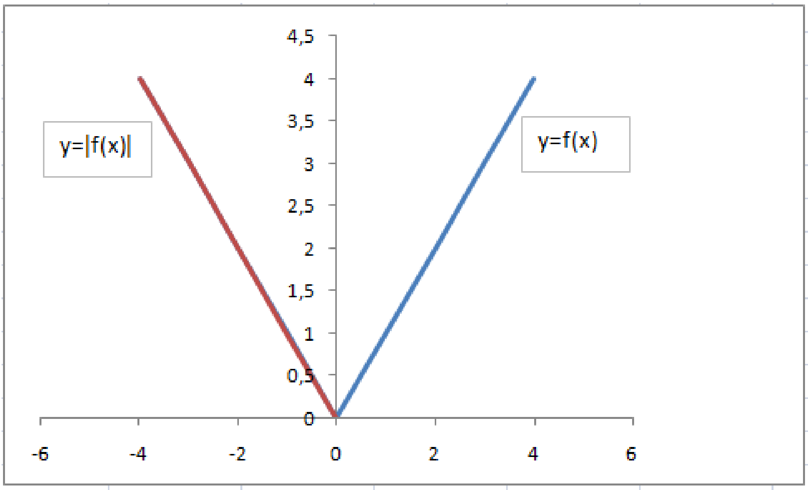


Figura 8. Representación de una función con valor absoluto

Tal y como se observa, partiendo de la función original (azul), si se hace una simetría en el eje *x*, todos los valores negativos se convierten en positivos y por tanto se reflejan tal y como se observa en la recta roja, representando así los nuevos valores positivos. Por tanto, la función de valor absoluto adoptaría la forma de "V" que se ve en la Figura 8.

A continuación se muestra otro ejemplo en la Figura 9 (más que el grafo final se muestra el proceso de construcción), cumpliendo exactamente el mismo criterio que el ejemplo de arriba.

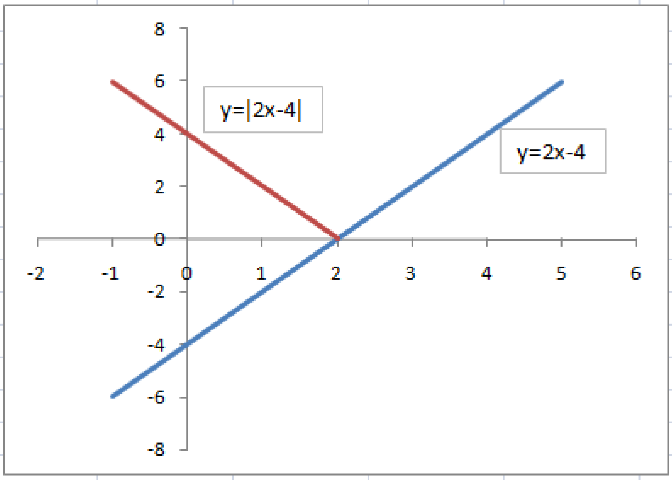


Figura 9. Proceso para la representación de una función con valor absoluto

La relación entre "función valor absoluto" y simetría ha de quedar clara a la vista de los ejemplos.

4. <u>Funciones de proporcionalidad inversa</u>

Este tipo de representación tiene unas características que las hacen diferentes del resto de funciones elementales. A continuación se enumeran estas características:

- Son curvas con nombre de hipérbolas y no llegan a *x*=0, y por tanto el dominio de definición es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- En el caso de la función básica $f(x) = \frac{1}{x}$, Cuando más se acerca *x* a 0 por la izquierda, mayores serán los valores de *y*, aunque no se alcanza ninguno. Aparece así una noción intuitiva de límite de una función en un punto, que, en este caso, tiene un significado geométrico en el concepto de asíntotas.
- La curva tiene dos partes, una en el cuadrante positivo y otra en el cuadrante negativo, que son simétricas entre sí respecto al orígen de coordenadas.

Además, este tipo de funciones sigue la siguiente expresión general:

$$y = \frac{k}{x \pm a} + b \,, \tag{4}$$

donde:

- *a*: valor arbitrario de desplazamiento del eje de simetría respecto al eje de coordenadas.
- *b*: valor arbitrario de desplazamiento en el eje vertical de las curvas.

Las curvas resultantes son un tipo distinguido de secciones cónicas: hipérbolas. Las hipérbolas que se trazan varían según el valor de *k*, ya que en caso de que ésta sea positiva, la curva se encuentra en el primer y tercer cuadrante, mientras que si *k* es negativa, ocupa los cuadrantes segundo y cuarto. Además, cuanto mayor sea el valor absoluto de *k*, es decir $|k|$, más separada está la curva de las asíntotas. Para visualizar mejor las hipérbolas, se adjunta a continuación la Figura 10, que representa un ejemplo de función de proporcionalidad inversa con *k* positiva, y a su derecha, con *k* negativa.

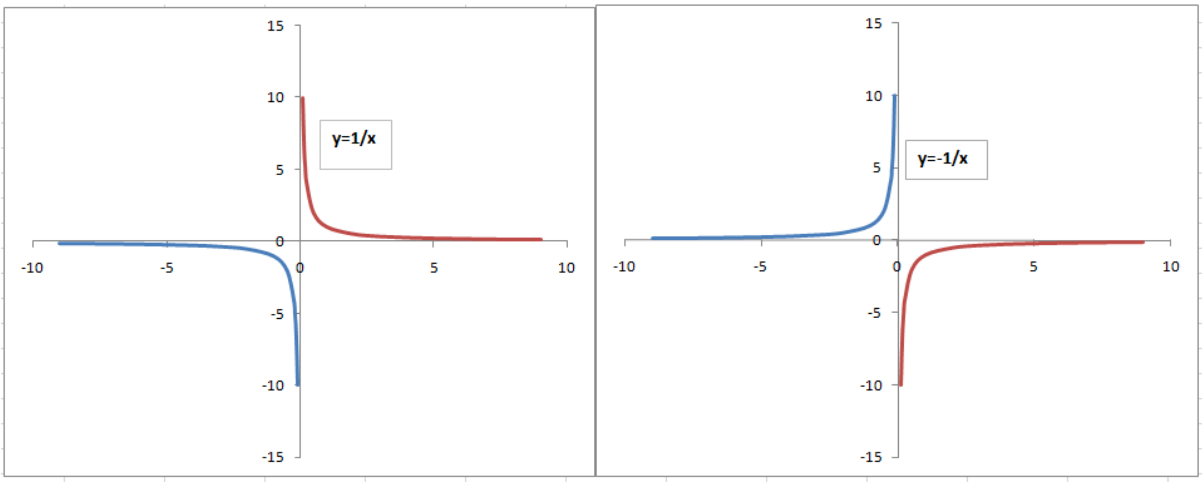


Figura 10. Representación gráfica de dos funciones de proporcionalidad inversa

En el caso en el que *a* no sea 0, es decir *a* son todos los números reales, la recta de simetría ya no estará sobre el eje de coordenadas, si no que estará desplazado según el valor de *a* en el sentido opuesto a su signo. A continuación se muestra la Figura 11 conteniendo un claro ejemplo de una representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa con forma de ecuación (4) con una valor de *a*=2:

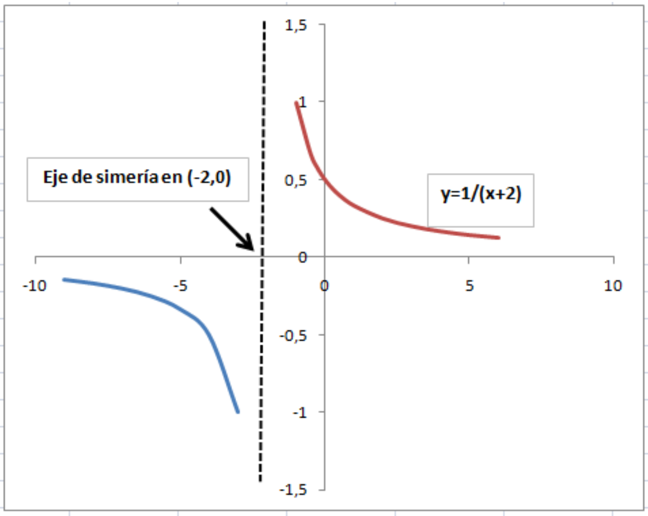


Figura 11. Representación gráfica de función de proporcionalidad inversa con parámetro *a*=2

Como se observa en la Figura 11, el eje de simetría se ha desplazado del (0,0) a (-2,0), debido a que el parámetro *a* es 2, y por tanto se desplaza hacia la izquierda. En caso de que *a*=-2, el eje de simetría se situaría en el (2,0) desplazándose dos unidades a la derecha.

Normalmente, teniendo una de las hipérbolas y el eje de simetría, se puede hallar la hipérbola simétrica a ésta, resultando ser de mayor facilidad para los alumnos en un examen y evitando la necesidad de un cálculo "número a número" hasta conseguir trazar la curva.

Se puede recalcar, para terminar, el concepto de asíntota (como recta tangente a la curva trazada por el grafo de la función "en el infinito"). Se podrían discutir ejemplos de asíntotas verticales y horizontales, pero un estudio de las asíntotas oblicuas, cuya descripción involucra la ecuación de una recta en el plano, parece aconsejable posponerlo a cursos superiores.

5. <u>Funciones radicales</u>

Este tipo de funciones está definido por raíces cuadradas, es decir, están expresadas de la forma:

$$y = a \pm \sqrt{x + b} \qquad (5)$$

donde *a*, *x* y *b* son constantes numéricas que afectan a la forma de la curva representada. Estas curvas adoptan la forma de semiparábolas tumbadas. A continuación se adjunta la Figura 12, una representación de una función radical.

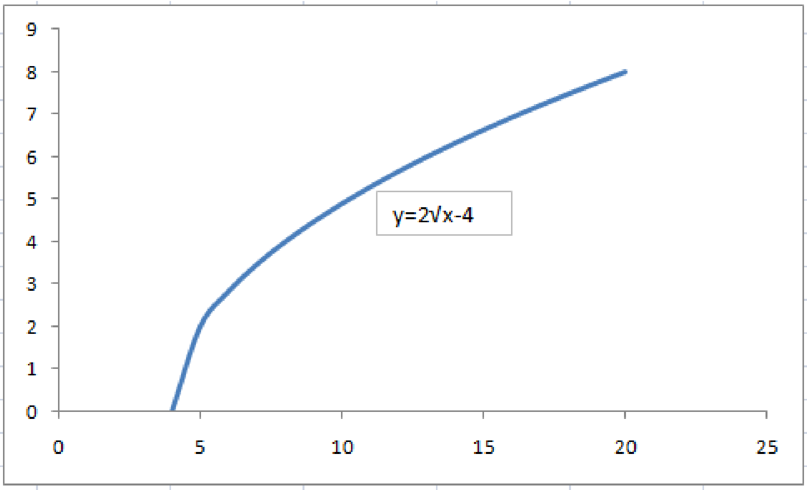


Figura 12. Representación de una función radical

En términos generales, su representación depende del signo de *x* y de los valores de *a* y *b*. Es por ello que:

- Si *x* es positiva, la curva gira hacia la derecha.
- Si *x* es negativa, la curva gira hacia la izquierda.
- Si *a* es positiva, la curva estará encima del eje *X.*
- Si *a* es negativa, la curva estará por debajo del eje *X.*
- El valor de *b* hace que la curva se traslade hacia los lados.

6. <u>Funciones exponenciales</u>

Este tipo de funciones adoptan una forma de curva bastante conocida, ya que se encuentran en multitud de aplicaciones, como pueden ser los crecimientos bacterianos, crecimientos de población y celulares, entre otros muchos ejemplos.

Este tipo de función está representada mediante la siguiente expresión:

$$y = f(x) = a^x$$

donde:

- *a* = base de un número real positivo distinto de 1;

- x = exponente.

Como en las funciones anteriores, este tipo de representación gráfica varía según el valor de *a* de la forma siguiente:

- Si $a>1$, son de forma creciente y crecen más rápido cuanto más grande sea *a*.
- Si $0<a<1$ son decrecientes y decrecen más rápido cuanto menor sea *a*.

A continuación se adjunta la Figura 13 donde se ve representada una función exponencial:

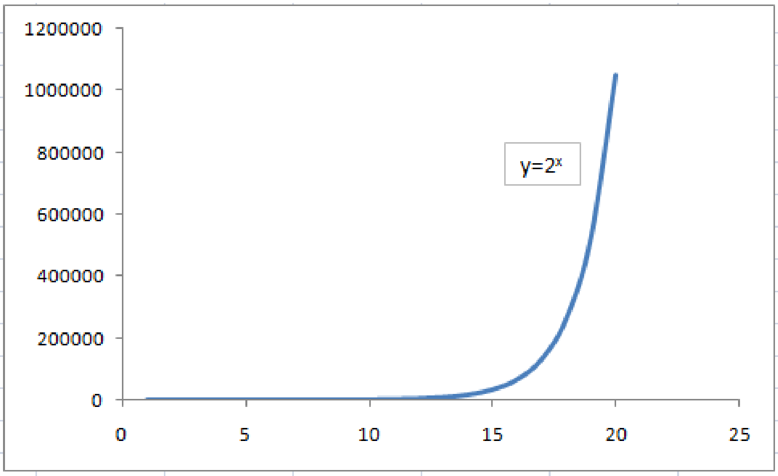


Figura 13. Representación gráfica de una función exponencial

7. Funciones logarítmicas

Este tipo de funciones, una vez representadas, se observa que tienen una gráfica invertida respecto a la de las funciones exponenciales (tal y como sucedía entre funciones cuadráticas y radicales). Aquí convendría señalar, de manera sencilla, que no es casual: unas funciones son las funciones inversas de las otras, porque su “composición” da la función identidad (que es la expresión matemática del “no hacer nada”; a veces este tipo de expresiones coloquiales pueden ayudar a captar la atención del alumnado, siempre que luego se aclare suficientemente las limitaciones que conllevan). En este caso, se puede escribir explícitamente esta “inversión”:

$$\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P,$$

donde:

- a = base logarítmica / base de un número real positivo distinto de 1.

- P =Constante a operar / resultado de la exponencial.

A la hora de representar gráficamente ambas funciones, se adjunta la Figura 14 en la que se muestra una función exponencial y una logarítmica. Esta figura es una fotografía escaneada del libro de texto: *Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I., & Colera Cañas, R. (2016). Matemáticas Orientadas a los Enseñamientos Académicos 4.º ESO (pp. 100–119). Carlos Vallejo. Carlos Vallejo.*

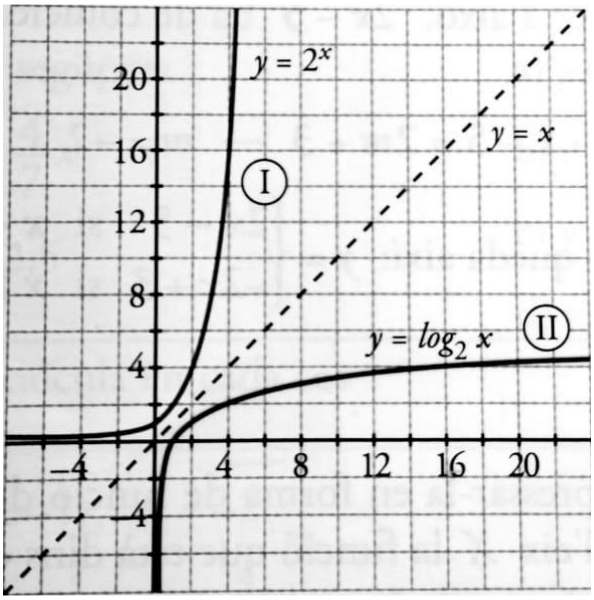


Figura 14. Representación gráfica de una función logarítmica junto con una de tipo exponencial

Además, las representaciones de las funciones logarítmicas pueden variarse según parámetros que aparecen en la expresión $log_a P = x$, de la forma siguiente:

- Si a>1 se forma automáticamente la inversa de la exponencial, definida por los valores mayores a 0.
- La curva logarítmica pasa por los puntos (1,0) y (a,1).

Por consiguiente, es conveniente hacer ver estos casos en los que la curva es ascendente (es decir, monótona creciente), aunque es cierto que al aumentar, la velocidad de crecimiento disminuye (si bien no es el momento de mencionar el concepto de derivada explícitamente).

2.4. APLICACIÓN DEL MARCO TEÓRICO

En este apartado se van a introducir dónde se pueden encontrar, como respuesta a un sistema, las distintas representaciones gráficas de las funciones explicadas en el punto anterior. Evidentemente, pueden haber factores externos al sistema que afecten a la forma de la curva que se debe formar teóricamente, pero se asume que estas perturbaciones son despreciables.

2.4.1. Funciones lineales

Las funciones lineales se pueden ver representadas ante:

- Sistemas de control: los controladores de sistemas tienen una respuesta lineal ante los sistemas que actúan con una entrada y salida. Este campo de controladores de sistemas se ven en ingeniería.
- Sistemas mecánicos: se suelen ver en las cuerdas, la relación fuerza-deformación de un material, etc.
- Sistemas financieros: se emplean modelos lineales para realizar el análisis entre variables financieras tales como la tasa de interés y el precio de las acciones.
- Sistemas de transporte: flujo de tráfico en carretera, relación entre velocidad y densidad de tráfico, etc.

2.4.2. Funciones cuadráticas y parábolas

Las funciones cuadráticas y parábolas se ven en los siguientes puntos entre otros muchos:

- Sistema de tiro: el movimiento de un objeto lanzado en un ángulo trazará una trayectoria parabólica debido a la acción de la gravedad. Puede ser usado para calcular la altura máxima que alcanzará una pelota o la distancia que alcanzará desde el punto de lanzamiento.
- Sistemas ópticos: las formas de los espejos y lentes parabólicas. Ambas usadas para la construcción de telescopios y otros instrumentos ópticos.

- Aplicación a los dispositivos reflectores y focos de iluminación para concentrar la luz en una dirección específica.

2.4.3. Funciones con valor absoluto

Este tipo de funciones se aplican directamente a los siguientes campos:

- Circuitos eléctricos con diodos: al utilizarse diodos, la respuesta gráfica de la corriente que lo atraviesa, puede tener una forma de valor absoluto.
- Sistemas de procesamiento de imágenes: las respuestas tras el procesamiento dan un valor absoluto en ciertas regiones de la imagen, lo que puede ser causado por presencia de bordas o cambios de intensidad de la imagen.

2.4.4. Funciones de proporcionalidad inversa

Este tipo de funciones se aplican a los siguientes campos donde las respuestas gráficas tienen la característica de una curva inversamente proporcional:

- Sistemas de amortiguación: la fuerza de amortiguación (como la de un coche) es proporcional a la velocidad de movimiento, representándose gráficamente como una curva hiperbólica.
- Sistemas de filtrado: tiene como respuesta una representación inversamente proporcional a la frecuencia.
- Sistemas eléctricos: las relaciones entre las corrientes y la resistencia es inversamente proporcional.
- Sistemas de fluidos: tanto en líquidos como en gases, la relación entre la velocidad de flujo y la presión son inversamente proporcionales, por lo que la respuesta gráfica tendrá forma de la Figura 10.

2.4.5. Funciones radicales

Las funciones radicales se ven representadas en los siguientes campos:

- Movimientos circulares: la posición de un objeto que cumple un movimiento circular uniforme tiene como respuesta una función radial.

- Vibraciones mecánicas: los sistemas mecánicos que vibran a una frecuencia determinada son modelados mediante funciones radicales, como la función seno o coseno, que describen la amplitud de la vibración en función del tiempo.
- Flujo de fluidos:el flujo de líquidos a través de un orificio o una tubería obtiene una respuesta gráfica en forma de función radial.

2.4.6. Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son las más conocidas ya que son las que más se suelen escuchar. Por tanto, se ven las funciones exponenciales en los siguientes campos, adoptando una curva de la forma que se representa en la Figura 13:

- Sistemas de crecimiento: el aumento de la población de una especie o el valor de una inversión financiera y tienen una tasa de crecimiento exponencial, es decir aumentar doblando o triplicando el número anterior de forma muy corta en el tiempo.
- Sistemas de radiación: aumento del nivel de material radiactivo en el ambiente tras una reacción en cadena.
- Sistemas de circuitos eléctricos RLC: contienen una resistencia, una inductancia y un capacitor, haciendo que la señal de entrada sea de función exponencial. Esto se ve en el módulo de electrónica y grados ingenieriles.

2.4.7. Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas se ven en los siguientes campos:

- Sistemas biológicos: la respuesta ante la muerte de una población bacteriana tiene forma logarítmica, es decir, forma opuesta a la exponencial.

- Sistemas económicos: las curvas de oferta y demanda se encuentran de la forma logarítmica, y muestran cómo el precio de un bien o servicio varía dependiendo de la demanda del mismo.

3. UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado se expone la unidad didáctica elegida (Tema 5: funciones elementales). En primer lugar se citan las competencias específicas a conseguir por parte del alumnado, y seguidamente se desarrolla la propia unidad, estableciendo objetivos didácticos, temporalización, elementos curriculares, evaluación, y demás información relevante. Finalmente se propone una mejora de la unidad didáctica.

3.1. COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Se presentan las competencias que los alumnos deberían lograr estudiando este tema. En la Tabla 1 se indican alguna de estas.

- Competencias clave (CC)
- Comunicación lingüística (CCL)
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)
- Competencia digital (CD)
- Aprender a aprender (CAA)
- Competencias sociales y cívicas (CSYC)
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)
- Conciencia y expresiones culturales (CEC).

3.2. UNIDAD DIDÁCTICA

A continuación se adjunta la unidad didáctica explicada amplia y profundamente. Se adjuntan algunos enlaces a material disponible en internet.

Tabla 1. Unidad didáctica

UNIDAD DIDÁCTICA 4º ESO D	
Objetivos didácticos	**Punto de partida de la unidad**
▪Conocer gráfica y analíticamente diversas familias de funciones. Manejar diestramente algunas de ellas (lineales, cuadráticas...). ▪Interpretar y representar funciones definidas a trozos	▪ **Expectativas de la Unidad:** El alumnado trabajará con funciones, identificándolas. Conocerán las distintas formas de representarlas (enunciado, expresión algebraica, tabla, gráfica).

<table>
<tr><th>Temporalización</th><td rowspan="2">Reconocerán, analizarán y calcularán las características de una función, incluidas las funciones a trozos (dominio, recorrido, continuidad, puntos de corte, crecimiento y decrecimiento, simetrías y periodicidad). Representarán gráficamente las funciones.

▪ El alumnado ya sabe:
Cómo se determina si un punto pertenece a una función, saben si un punto pertenece a la gráfica de una función, además saben representar una función lineal.

▪ Pronóstico de dificultades:
A la hora de analizar y operar con las características de las funciones, y funciones de mayor complejidad.</td></tr>
<tr><td>10 sesiones de 55 minutos cada una y 1 sesión de evaluación de 1 hora:

▪ Sesión 1: Funciones lineales
▪ Sesión 2: Funciones cuadráticas
▪ Sesión 3:Funciones de proporcionalidad inversa
▪ Sesión 4: Funciones radicales
▪ Sesión 5: Funciones exponenciales
▪ Sesión 6:Funciones logarítmicas
▪ Sesión 7:Funciones de valor absoluto
▪ Sesión 8:Puzzle de Aronson
▪ Sesión 9:Evaluación
▪ Sesión 10: Autoevaluación</td></tr>
<tr><th>Elementos Curriculares</th><th>Materiales y recursos emprendidos</th></tr>
<tr><td>▪Función lineal. Pendiente de una recta.
▪Tipos de funciones lineales. Función de proporcionalidad y función constante.
▪Obtención de información a partir de dos o más funciones lineales referidas a fenómenos relacionados entre sí.
▪Expresión de la ecuación de una recta conocidos un punto y la pendiente.
▪Funciones definidas mediante «trozos» de rectas. Representación.
▪Obtención de la ecuación correspondiente a una gráfica formada por trozos de rectas.
▪Representación de funciones cuadráticas. Obtención de la abscisa del vértice y de algunos puntos próximos al vértice. Métodos sencillos para representar parábolas.
▪Estudio conjunto de rectas y parábolas.</td><td>● Pizarra
● Libro de texto Anaya 4º ESO
● Tizas
● Folios o libretas
● Bolígrafos o lápices de colores
● Vídeos explicativos:
Funciones cuadráticas:
https://www.youtube.com/watch?v=J3qQWvxqFI4
Funciones radicales:
https://www.youtube.com/watch?v=v-YhApxH33k
Funciones proporcionalidad inversa:
https://www.youtube.com/watch?v=hS_Jz</td></tr>
</table>

▪Interpretación de los puntos de corte entre una función lineal y una cuadrática. ▪Funciones radicales. ▪Funciones de proporcionalidad inversa ▪La hipérbola. ▪Funciones exponenciales. ▪Funciones logarítmicas.	Pc7Yx8&t=881s *Funciones exponenciales:* https://www.youtube.com/watch?v=_RsWTvD6Hqk&t=187s *Funciones logarítmicas:* https://www.youtube.com/watch?v=gJKTrzll7Lk

Desarrollo de la unidad didáctica

Sesión 1: Funciones lineales

Durante esta sesión, el alumnado repasarán los conceptos de este tipo de funciones que dieron ya el curso anterior, por lo que en un principio se les tiene que hacer ameno y entender lo que están haciendo con facilidad.

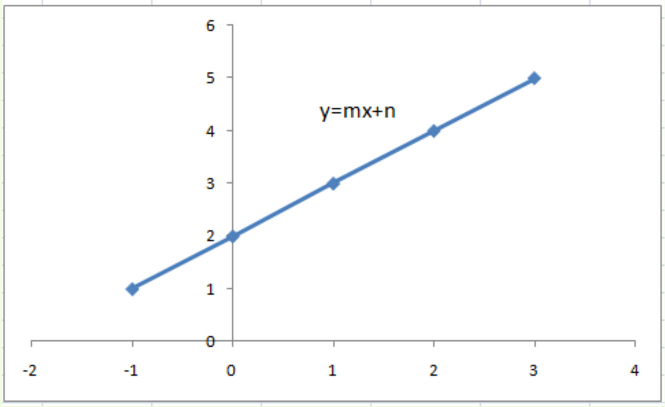
La clase comienza con una explicación teórico-práctica de las funciones lineales, dejando clara la definición de función lineal y su expresión matemática:

$$y = mx + c$$

Donde:

- y = eje de coordenadas vertical
- m = pendiente de la recta
- x = eje de coordenadas horizontal
- c = ordenada del origen en el eje vertical

Y adopta la forma:



Esto se explica en pocos minutos, ya que conceptualmente no tiene mucha complicación. Aunque hay que tener en cuenta aquel alumno o alumna que se le presenten dudas acerca del temario y resolverlas explicándoselas de nuevo tantas veces como sea necesario. Este debe durar la mitad de la clase.

Seguidamente, se realiza una ronda de ejercicios. El alumnado debe realizar en sus libretas: Página 102 1b) 3b) 3d). Mientras ellos hacen los ejercicios, el docente se pasa por las mesas comprobando que todo esté yendo correctamente y ofreciendo ayuda a aquel o aquella que lo necesite. Una vez hechos, lo corregirán los propios alumnos en la pizarra.

Tras esto, se da por finalizada la clase.

Sesión 2: Funciones cuadráticas

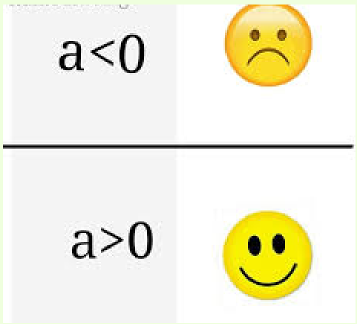
En esta segunda sesión, el profesor comenzará la clase introduciendo las funciones cuadráticas y que se expresan de la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Donde:

- *a, b, c* son parámetros que definen la función

Seguidamente, se explica que las funciones cuadráticas dan lugar a parábolas cuando se representan gráficamente y que pueden tener las puntas hacia arriba o hacia abajo. A continuación se les enseña en una diapositiva la siguiente imagen de humor:



La finalidad de esta imagen es proporcionarles una mejor visión de qué dirección toma a parábola, es decir, en el caso de que el valor de *a* sea negativa, la parábola tendrá sus puntas hacia abajo, tal y como se observa en la cara de la parte de arriba, y en caso de que *a* sea positiva, la parábola tendrá sus puntas hacia arriba, tal y como se dibujaría una sonrisa. Esto puede parecer algo infantil, pero servirá bastante de ayuda a los alumnos en el examen.

Una vez explicado este concepto, el profesor sigue con los siguientes pasos para trazar la parábola correctamente y responder de forma completa un ejercicio de este tipo de función. Por consiguiente, los siguientes pasos que debe explicar son:

- La forma será igual entre dos parábolas si el coeficiente *a* es el mismo, solamente variará la posición en el plano en el que se encuentre.
- Cuanto más grande sea el valor absoluto de *a*, es decir $|a|$, más estrecha será la parábola.

Tras esto, el profesor realizará el siguiente ejemplo, que se basa en la resolución completa de uno de los ejercicios.

Ejemplo 1

Dibuja gráficamente $y = x^2 - 6x + 5$.

- Vértice: $V_x = p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$; $V_y = y = 3^2 - 6(3) + 5 = -4$

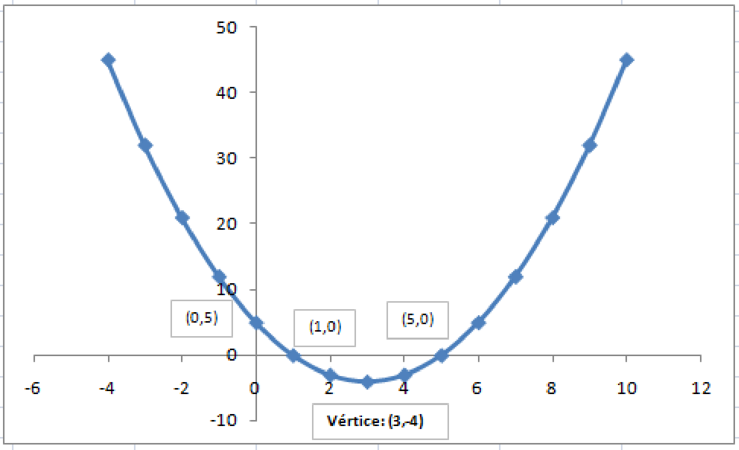
Vértice en: (3,-4)

- Punto de corte con los ejes:

En eje *x*: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dando lugar a $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$

En eje *y*: cuando x=0, y = $0^2 - 0x + 5$ por tanto *y* = 5

Punto de corte con los ejes en: (5,0), (1,0), (0,5)



Seguidamente, el profesor indica al alumnado realizar ejercicios por su cuenta, que posteriormente los resolverán en la pizarra. Los ejercicios son: Página 105, 2a) 2d) 2e).

Tras la realización de los ejercicios, se dará por concluída la sesión.

Sesión 3: Funciones de proporcionalidad inversa

La sesión comienza con la corrección en la pizarra por parte del profesor de algunos de los ejercicios pendientes por corregir de la sesión anterior. No debe ocupar esto mucho tiempo.

A continuación, se procede a explicar el punto correspondiente a las funciones de proporcionalidad inversa. Se introduce el concepto de la expresión general que este tipo de funciones sigue:

$$y = \frac{k}{x \pm a} + b$$

Además, se deja claro que los coeficientes a y b desplazan las curvas en horizontal (eje de simetría) y vertical respectivamente dependiendo del signo, y que el valor de k cambia la forma de las curvas.

Seguidamente, se procede a realizar la explicación de un ejercicio bastante característico de resolución de estas funciones. Se parte del ejemplo de la función simple:

<u>Ejemplo 1</u>

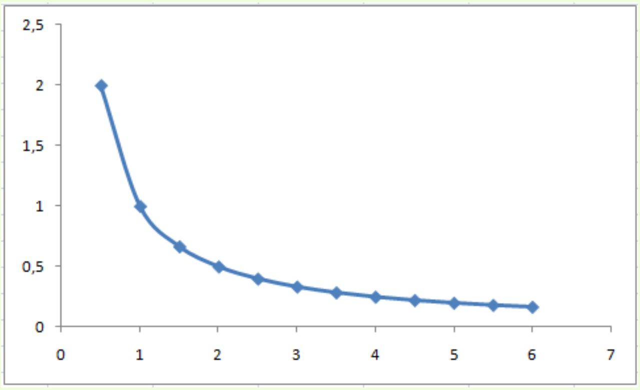
Se parte del ejemplo de la función simple:

$$y = \frac{1}{x}$$

El primer paso es observar el valor de *a*, que en este caso *a*=0 (por lo que el eje de simetría estará en el (0,0)), y observar si *x* es mayor o menor que *a*, es decir, si x<a o x>a. Esto sirve para ver en qué cuadrante se encuentran las dos curvas, por lo que aplicado a este ejemplo, las curvas estarán en los cuadrantes 1º y 3º.

En un principio, el alumnado debe saber la forma que adoptan las curvas y que ambas deben ser simétricas respecto al eje de simetría, pero en el caso de querer trazar ajustadamente ambas curvas, se sacan puntos de coordenadas dándole valores a *x* y sacando los valores de *y.* Para sacar la curva simétrica, se cambian los signos de *x* y de *y.*

La solución de la función es:



Una vez explicado este ejemplo, y tras la confirmación de que los alumnos y alumnas entienden lo que hacen, se procede a indicar una serie de ejercicios a realizar en sus cuadernos. Los ejercicios son: Página 108, 1c) 2a).

Tras esto se da por finalizada esta clase.

Sesión 4: Funciones radicales

En esta sesión, se introducen las funciones radicales, y se enseña la forma de la curva que se traza. El profesor debe explicar que estas funciones siguen la siguiente expresión:

$$y = a \pm \sqrt{x + b}$$

Seguidamente, el profesor explica que el alumnado se fije en el signo de *x*, ya que en el caso de que sea positivo, la curva tenderá hacia la derecha y si el signo es negativo, la curva tenderá hacia la izquierda. Además, hay que observar también el signo de *a*, es decir, si *a*>0 la curva estará sobre el eje *X*, en cambio si *a*<0, las curvas estarán por debajo del eje *X*. También explicar que el parámetro b desplaza las curvas en el eje horizontal.

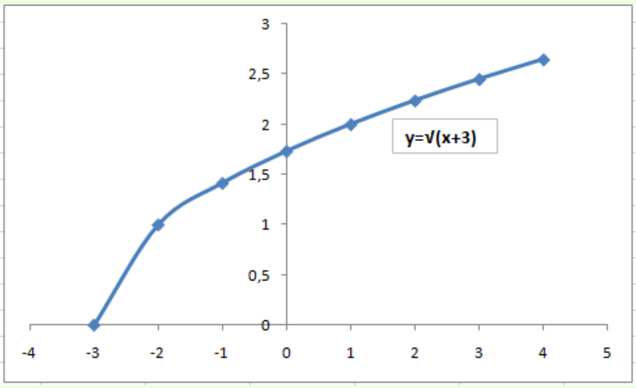
Tras la breve explicación teórica, el docente procede a realizar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

$$y = \sqrt{x + 3}$$

Los pasos a realizar son los siguientes:

1) Obtener el dominio: $x + 3 = 0$, entonces : $x > 3$
2) Signo de x: positivo (+), entonces la curva va hacia la derecha
3) Signo de a: positivo, por tanto la curva estará por encima del eje x.
4) Representación gráfica:



Finalmente, se da por finalizada la clase.

Sesión 5: Funciones exponenciales

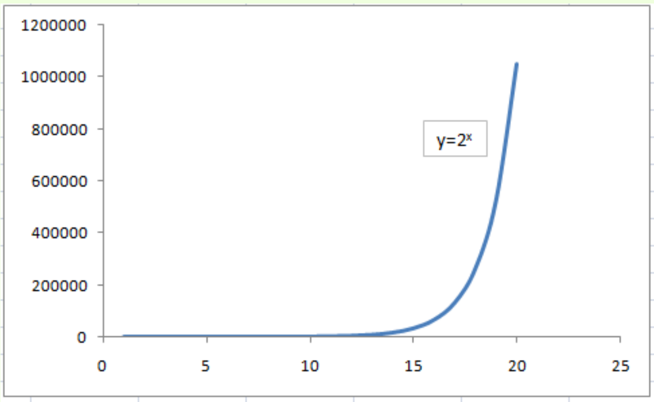
El docente empieza la sesión con una explicación teórico-práctica de las funciones exponenciales, explicando a los alumnos que estas funciones adoptan la forma:

$$y = a^x$$

Y anota gráficamente la forma que tiene en la pizarra. Además, explica a continuación que:

- Si *a*>1, son de forma creciente y crecen más rápido cuanto más grande sea *a*
- Si 0<*a*<1 son decrecientes y decrecen más rápido cuanto menor sea *a*

Tras esto, para ofrecerles una mayor facilidad a la hora de representar estas funciones, les indica que las funciones exponenciales cruzan seguro por los puntos: (0,1) y (1,*a*). Para que los alumnos tengan una mejor idea de la forma que adopta una función exponencial, se les pone el ejemplo siguiente:



Por consiguiente, les indica que realicen los ejercicios de la página 110: 2a) 2c) y 2d)

A continuación, se corrigen en la pizarra para que el alumno obtenga un *feedback* de lo que han hecho.

Tras esto se da por finalizada la clase.

Sesión 6: Funciones logarítmicas

A lo largo de esta sesión, se introduce el término de funciones logarítmicas, en el que se debe explicar que estas funciones son las opuestas o inversas de las exponenciales, expresándose tal que:

$$log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

Donde:

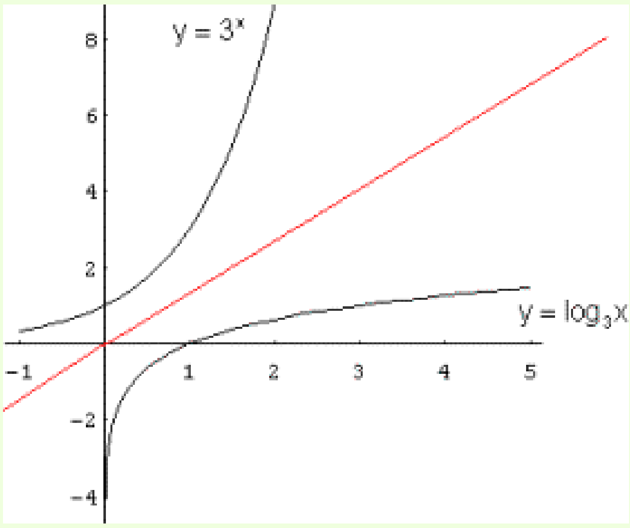
- a = base logarítmica / base de un número real positivo distinto a 1
- P =Constante a operar / resultado de la exponencial

A la hora de representar una función logarítmica, se le explica al alumnado que la curva pasa por los puntos (1,0) y (a,1), y que los puntos consiguientes se deben conseguir con una tabla de valores. Es por ello que para una mejor visualización y entendimiento, se realiza el siguiente ejemplo:

<u>Ejemplo 1</u>

$$y = log_3 x$$

Se establece el dominio (x>0) y a curva pasa por los puntos (1,0) y (1,3), dando la forma siguiente:



https://matematicasmodernas.com/funciones-logaritmicas-y-exponenciales/

Tras este ejemplo, los alumnos deben realizar los ejercicios de la página 111 el 1b) y 1c)

Los ejercicios se corrigen en la pizarra para que los alumnos tengan realizados los ejercicios correctamente.

Finalmente, se da por concluída la sesión.

Sesión 7: Funciones de valor absoluto

A lo largo de esta sesión, el docente introduce el tema explicando la definición de valor absoluto, que aplicado a funciones, siempre tendrá valores positivos, y se explica que se representa de la siguiente manera:

$$y = |f(x)|$$

Es por ello que si se representa gráficamente, la función estará trazada siempre por encima del eje *X*. Entonces, para que el alumno entienda cómo se representa este tipo de funciones, se propone el siguiente ejemplo:

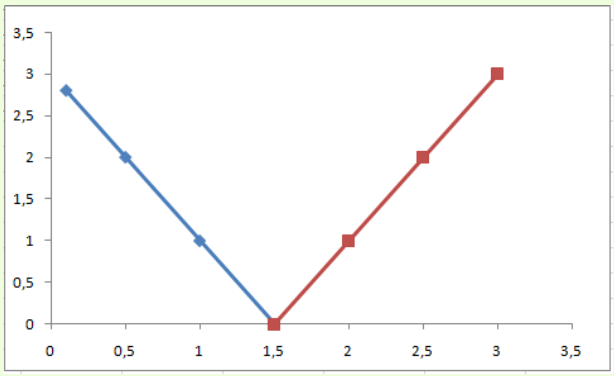
Ejemplo 1 - Función lineal

$$y = |3 - 2x|$$

El primer paso es ubicar donde cruza el eje *X*, entonces igualamos la función a 0, despejando *x*. En este caso *x*=1,5, por lo que cruza el eje *X* en (1,5 , 0). Por consiguiente deben definir la función a trozos, resultando ser:

$$y = \begin{cases} 3-2x & x < 3/2 \\ -(3-2x) & x >= 3/2 \end{cases}$$

Tal y como se observa en la definición de la función de arriba, el tramo del valor absoluto lleva un signo negativo delante, para expresar que todos los puntos que se definen en ese tramo, son positivos. Esto se observa sustituyendo cualquier valor menor de 3/2 en el primer "trozo" *y*=3-2*x* que dará como resultado un valor negativo, es por ello que si se le pone el signo negativo delante, automáticamente será positivo. A continuación se adjunta la gráfica de la función en valor absoluto, donde el tramo, donde la recta azul es la recta original, y la roja la recta de valor absoluto, es por ello que en la definición se presenta con un signo negativo delante.



Ejemplo 2 - Función cuadrática

$$y = |x^2 - 3x - 4|$$

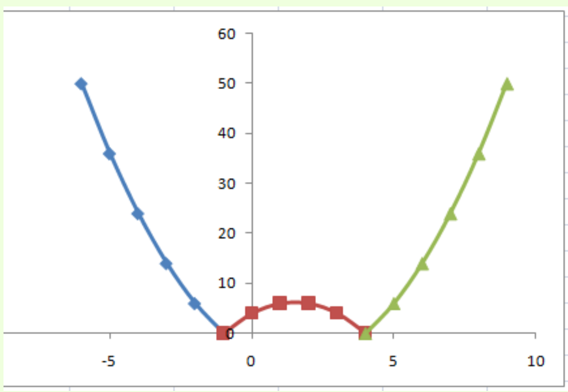
Para este caso, el procedimiento sigue siendo el mismo, aunque la función cambie. La resolución de esta función es la siguiente:

El primer paso es obtener los valores de x y esos serán los puntos que cortan en el eje X. Aplicando pues la ecuación de segundo grado, se obtiene que $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$. Por tanto tenemos tres tramos a definir, y se describe como:

$$y = \begin{cases} x^2-3x-4 & x<-1 \\ -(x^2-3x-4) & -1<=x<=4 \\ x^2-3x-4 & x>4 \end{cases}$$

Dándole valores a los diferentes tramos, se observa que el que da números negativos es el del medio, por tanto debemos de cambiar el signo a negativo. Además, para trazar la curva, para aquellos tramos los cuales no contengan el vértice, simplemente se trazarán mediante una tabla de valores, y aquel trozo que incluya el vértice, deberá aplicarse la ecuación: $Vértice\ x = \frac{-b}{2a}$ y $Vértice\ y = f(\frac{-b}{2a})$.

Finalmente, la función quedaría representada de la forma siguiente:



Tras estos ejemplos, el alumnado procede a realizar los ejercicios 2b) y 2d) de la página 107, corrigiéndose al acabar, y se da por finalizada la última sesión lectiva. Se aconseja finalmente a los alumnos que estudien para la siguiente clase, ya que se les realizará un examen.

Sesión 8: Puzzle de Aronson

Esta sesión consiste en la realización de un ejercicio en grupo sobre funciones a trozos la cual los alumnos van a tener que definir. Para ello, se aplica el método del Puzzle de Aronson.

En primer lugar, se forman los grupos base de 5 personas. Seguidamente, a cada una de ellas se les asigna una función elemental a estudiar y analizar, y posteriormente se deben juntar en nuevos grupos específicos dependiendo de qué función les haya tocado estudiarse, es decir, todos los que deben estudiarse las funciones lineales juntos, etc. Tras 20 minutos, el alumnado volverá a los grupos base e intentarán resolver el ejercicio poniendo en práctica lo que han estudiado en los grupos específicos.

Al finalizar la clase, deben entregar el ejercicio y el profesorado los corregirá e enviará por email. También recuerda al alumnado que en la siguiente sesión tendrán que realizar el examen.

Sesión 9: Evaluación

Esta sesión es la del examen (adjunto en el apartado de Anexos de este trabajo). El alumnado se sentará individualmente durante los 55 minutos que dura el examen y el profesor irá dando vueltas al aula controlando a los alumnos. Al finalizar irán entregando el examen.

Sesión 10: Autoevaluación

En esta sesión, se presenta un sistema de evaluación diferente. Los alumnos corregirán una copia de su examen junto con el profesorado que corregirá en la pizarra. Tras finalizar con la corrección del examen, se les entregará una serie de preguntas acerca de cómo pueden mejorar en esta materia y sobre la motivación acerca del estudio de esta pregunta que deberán contestar en no más de diez minutos. Las preguntas que destacan son:

- ¿Cuánto tiempo le has dedicado a prepararte este examen en casa?
- ¿Consideras merecida la nota que has obtenido?

- ¿Que aspectos debes mejorar de cara a un futuro examen?
- ¿Cómo los puedes mejorar?

Una vez transcurrido el tiempo, el profesorado les repartirá su examen corregido y comprobarán que fallos tienen y se darán cuenta de cómo se corrige correctamente los problemas y cuestiones que se les pedía. La hoja de preguntas deben guardársela para que les sirva como punto de partida hacia un futuro mejor.

Evaluación			
Criterios de evaluación	**Estándares de evaluación**	**Competencias Clave**	**Técnicas e instrumentos**
1. Manejar con destrezas las funciones lineales.	1.1. Representa una función lineal a partir de su expresión analítica. 1.2. Obtiene la expresión analítica de una función lineal conociendo su gráfica o alguna de sus características. 1.3.Representa funciones definidas «a trozos». 1.4.Obtiene la expresión analítica de una función definida «a trozos» dada gráficamente.	CCL CMCT CD CAA CEC	Registro de observación de cuaderno.
	2.1. Representa una parábola a partir de la ecuación		

2. Conocer y manejar con soltura las funciones cuadráticas	cuadrática correspondiente. 2.2. Asocia curvas de funciones cuadráticas a sus expresiones analíticas. 2.3. Escribe la ecuación de una parábola conociendo su representación gráfica en casos sencillos. 2.4.Estudia conjuntamente las funciones lineales y las cuadráticas (funciones definidas «a trozos», intersección de rectas y parábolas).	CCL CMCT CD CAA CEC	Diana de autoevaluación de la gestión y la organización semanal.
3. Conocer otros tipos de funciones, asociando la gráfica con la expresión analítica.	3.1. Asocia curvas a expresiones analíticas (proporcionalidad inversa, radicales, exponenciales y logaritmos). 3.2. Maneja con soltura las funciones de proporcionali-dad inversa y las radicales. 3.3 Maneja con soltura las funciones exponenciales y las logarítmicas	CCL CMCT CD CAA CEC	Registro de observación de cuaderno.

En esta tabla se presentan las competencias citadas anteriormente.

3.3. SISTEMA DE EVALUACIÓN

Además, hay que hacer especial hincapié en la forma de evaluación. El método didáctico de evaluación propuesto que se propone para esta unidad didáctica es el siguiente. La evaluación consta de una prueba final escrita individual, valorada en un 80%, y la evaluación colectiva empleando el puzzle de Aronson, valorada en un 20%.

El examen individual se basa en la resolución de problemas numéricos similares a los realizados en clase, además de unas cuestiones teóricas (definiciones) en las que el alumnado pueda demostrar, ya en este curso, su capacidad para redactar en un lenguaje más o menos simbólico, en una proporción de 80 a 20.

La prueba colectiva pretende evaluar la capacidad comunicativa del alumnado, su grado de interacción con el resto de componentes del grupo, su grado de autonomía y su capacidad de resolver mediante la información recibida en clase por el profesorado un problema determinado en acorde con el tema impartido.

En ella serían evaluadas las cinco competencias de trabajo colectivo [Guijarro, E., Babiloni, E., & Fernández-Diego, M. (s/f). p.498], a saber cooperación, responsabilidad individual, comunicación, trabajo en equipo, y autoevaluación.

Respecto a la autoevaluación, se propone tanto en esta prueba colectiva como en el examen individual. En la prueba del puzzle de aronson, los equipos tendrán la oportunidad de analizar la pertinencia y utilidad de las cuestiones propuestas y las acciones efectuadas. Con ello se pretende obtener una valiosa información de cara a una potencial mejora de la dinámica de trabajo en grupo.

En lo que toca a la autoevaluación de la prueba escrita, tras la realización del examen, se propone que el alumnado realice una autocorrección de sus exámenes de forma individual para que observen donde han fallado y así corregir sus errores. A la par, el docente corrige en la pizarra el propio examen y así muestran los pasos correctos y los resultados de las realizaciones de los ejercicios propuestos. La calificación que se den a sí mismos en sus exámenes no es vinculante, ya que solamente cuenta la que el profesor les ponga, por lo que no les valdrá la pena subirse la nota o puntuarse por lo alto.

El objetivo de este método es conseguir una comparación de lo que es una respuesta a un ejercicio bien realizado e intentar que no cometan el mismo fallo en otro futuro examen, además de que observen sus puntos más fuertes y los más débiles, haciendo especial hincapié en estos e intentar mejorarlos.

A este método hay que añadirle que tras autocorregir sus exámenes, deberán rellenar una hoja con una serie de preguntas que se les realizarán para que el alumnado aumenten su nivel de satisfacción y motivación hacia una evolución en su aprendizaje de matemáticas y hacerles ver que tienen aún un margen de mejora.

Seguidamente, una vez hayan redactado y visto lo que están haciendo bien o mal y cómo lo pueden mejorar, se dispone a entregarles su examen corregido por el docente, realizando así una comparativa de correcciones. Los alumnos/as se darán cuenta de si han sido justos con ellos mismos. Lo normal en estos casos es que indirectamente, ellos/as se hayan puntuado por lo alto por su propio beneficio, pero les vendrá bien saber cómo se corrige correctamente para que en futuros exámenes redacten sus respuestas de la forma más correcta, cuidando además sus conocimientos matemáticos para tener una respuesta acertada.

La evaluación, así descrita, estaría temporizada en tres sesiones: una para la prueba escrita, otra para su autoevaluación, y una tercera para la prueba colectiva y su autoevaluación.

3.4. PROPUESTA DE MEJORA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

A la vista de los apartados anteriores, se añaden algunos comentarios para completar el diseño de la unidad didáctica, basados en lo vivido en el *practicum* y en la propia experiencia como estudiante de ingeniería. Esencialmente pensamos que una mejora sobre la unidad didáctica se puede llevar a cabo dando mucha importancia a los dos aspectos siguientes.

En primer lugar, se ha querido dar mucho valor a la representación gráfica de las funciones frente al concepto mismo de función, mucho más abstracto. Un motivo para ello es pensar que se trata de 4º de ESO, por lo que esta asignatura es común para todos los estudiantes, tanto para los que se van a centrar después en la rama científico-tecnológica, como los de ciencias sociales o humanidades. Por ello, el tratamiento cualitativo del concepto de función real de variable real a través de su gráfica es esencial en el posterior desarrollo de las asignaturas para todos ellos. No es que la expresión explícita de la función carezca de importancia, simplemente resulta útil (y les resultará en el futuro) saber asignar a cada tipo de expresión su gráfica particular.

Un segundo aspecto a resaltar que puede pensarse como mejora es justamente incidir en el uso de los parámetros en las expresiones algebraicas que dan la regla de asignación de la función, y analizar de manera sencilla el cambio de la gráfica de la función según van cambiando estos parámetros (por ejemplo, si la parábola que describe una función dada por un polinomio cuadrático está abierta hacia arriba o hacia abajo según el signo que tenga el monomio de grado dos, etc.)

Estos dos puntos se adecúan a la experiencia del aula durante el *practicum* y a la propia experiencia vivida en los primeros cuatrimestres del grado que cursé, ingeniería química, donde en muchas asignaturas era fundamental tener una noción básica del comportamiento cualitativo de funciones; tema que parece extrapolable a otros grados del ámbito de las ciencias sociales, por ejemplo.

4. ADAPTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA A LA NUEVA NORMATIVA (LOMLOE)

En este año vigente, la nueva normativa LOMLOE (Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación) no está aplicada aún a 4.º ESO, ya que solamente afecta a los cursos impares, es decir, 1.º y 3.º ESO. Por tanto al impartir esta unidad didáctica aún no se ha llegado a implantar la LOMLOE ya que sigue implantada la LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa). Sin embargo, está al caer que la LOMCE se implante en su totalidad en los cuatro cursos de la ESO. Es por ello que en este apartado se procede a explicar la adaptación que se tendría que hacer para cumplir con la nueva normativa LOMCE.

En cuanto a la primera adaptación que se realizaría en la unidad didáctica en acorde con la LOMCE es implantar una serie de situaciones de aprendizaje complementarias a lo que es el temario. Es decir, las situaciones de aprendizaje son aquellas aplicaciones de la vida real que utilizan lo que se explica en clase, para que el alumno visualice dónde se aplican cada uno de los temas que van a estudiar. Con esto, se pretende que el alumnado se vea motivado a estudiar matemáticas ya que está viendo que lo que está estudiando tiene un fin interesante en la vida llegando a darse cuenta de que las matemáticas son algo más que números y letras. Esto también puede orientar al alumnado de cara a un futuro profesional, ya que puede ver si de verdad quiere optar por estudiar una carrera de ámbito técnico o no, ya que sentirá al instante una motivación de cara a su estudio.

Por otro lado, la LOMLOE indica un cambio en el lenguaje y formas de expresión de cara al alumnado. Esto se ve reflejado en las palabras clave como la del temario. Por ejemplo, adaptando la unidad didáctica a la nueva ley, un tema recibiría el nombre de saber básico, es por ello que el conjunto de temas a estudiar es el conjunto de saberes básicos que deben de saber para progresar.

Además, la LOMLOE también manifiesta el hecho de siempre tender hacia el positivismo. Por ello, a la hora de evaluar al alumnado mediante un examen, en el caso de que no les haya salido muy bien, siempre poner un comentario positivo o motivador, por ejemplo: ‘’¡Aún queda margen de mejora! ¡Sé que puedes hacerlo!''. Lo que se pretende es fomentar un cierto grado de satisfacción al alumno/a, ya que no está todo perdido y confía en que el profesor sabe que lo puede hacer mejor. La finalidad simplemente es que el alumno en ningún caso se venga abajo y acabe tirando la toalla por la asignatura.

4.1. APLICACIÓN DE SITUACIÓN DE APRENDIZAJE A LA NUEVA LEY

En este subapartado se describe una aplicación de situación de aprendizaje a la unidad didáctica. Se trata de sumergir al alumnado en una situación que pueda relacionar fácilmente con su vida cotidiana y en la que se plantee, apelando a métodos matemáticos relacionados con la unidad didáctica que se pretende trabajar (en este caso, las funciones elementales), cuestiones transversales, como por ejemplo, el cuidado por el medio ambiente, el respeto a la diversidad, etc.

En el caso concreto de este trabajo, las funciones, independientemente de qué tipo sean, son representaciones de fuentes de información numéricas reflejadas una frente a la otra. Es por ello que se presenta el caso de Lluïsa, alumna de un instituto ubicado en Castellón que cursa 4.º de la ESO y que actualmente vive a la otra punta de la ciudad, por lo que ir andando no es la opción más viable. Sin embargo, ella está plenamente concienciada con el medio ambiente y no ve con buenos ojos emitir CO_2 a la atmósfera, ya que si todos los días contamina, le sabe muy mal. Además, tuvo una charla en el colegio acerca de Greta Thunberg, y corroboró aún más sus pensamientos acerca de emisiones netas e intentar ser los más *ecofriendly.*

Por tanto Lluïsa, tras una extensa reflexión acerca de qué alternativas son las mejores para ir al colegio contaminando lo menos posible, se plantea las siguientes:

- Utilizar el tram
- Ir en bus
- Ir con sus padres en el coche
- Ir en patinete eléctrico

Tras obtener estas ideas de transporte, consulta fuentes en internet acerca de emisiones medias de cada uno de estos medios de transporte. Observa además que, debido a la gran profesionalidad de todas estas fuentes, todos los datos se ven reflejados mediante gráficas, representando las emisiones de CO_2 con los kilómetros a recorrer. Finalmente, Lluïsa decide escoger la opción de irse con sus padres al colegio, ya que les pilla de paso y no contribuiría en absoluto a la huella de carbono, además, es lo más seguro para ella.

5. CONCLUSIONES

Para concluir con este trabajo de final de máster, se va a realizar un análisis acerca de si se han cumplido los objetivos establecidos en el punto *1.Objetivos* y haciendo alguna relación con los ODS encontrados en el punto *2.2. Relación de las funciones elementales con la organización de desarrollo sostenible (ODS).*

En primer lugar, en cuanto al primero de los objetivos: ‘’Aplicar los hábitos de estudio, trabajo y disciplina para afianzar las tareas de aprendizaje y desarrollo personal’’, se relaciona con el ODS 4: Educación de calidad, ya que sólamente con una disciplina bien impartida y con un trabajo constante, se fomenta una educación de calidad en el aprendizaje y desarrollo personal del alumnado. Se puede decir que esto es viable en un alto porcentaje, ya que sin disciplina un alumno no consigue los resultados deseados, sin embargo hay influencias externas al centro educativo y al docente que puede afectar en el rendimiento del alumno, sea o no disciplinado y trabajador, por lo que a la hora de aplicar unos hábitos de estudios correctos, y fomentar así una educación de calidad, no siempre depende del docente en sí, sino del ambiente y el entorno en el que se mueve el alumno.

El segundo de los objetivos: ‘’Impulsar el espíritu emprendedor, además de iniciativa personal, confianza, toma de decisiones y asumir responsabilidades de cara a los alumnos/a’’, se ha conseguido con éxito ya que a lo largo de toda la estancia en el instituto se ha fomentado una autonomía propia en la toma de decisiones para beneficiar siempre en todo momento al alumnado, razonando mis explicaciones y facilitándoles el entendimiento de la unidad didáctica impartida.

En tercer lugar, en cuanto al tercero de los objetivos: ‘’Identificar los ODS aplicados en la unidad didáctica a impartir’’, se puede afirmar con totalidad que se han hallado. Se pueden ver descritos en el apartado *2.2. Relación de las funciones elementales con la organización de desarrollo sostenible (ODS).*

Por consiguiente, en cuanto a los siguientes dos objetivos: ‘’Realizar una primera toma de contacto desde el lado del docente en un centro educativo’’ y ‘’Ganar experiencia de cara a un futuro laboral como docente’’ van relacionados. Es decir, gracias a la estancia en este centro educativo, se ha realizado un toma de contacto por primera vez en un centro como docente y evidentemente hay muchas diferencias respecto a cuando uno es alumno/a.

Además, gracias a esta estancia, se ha ganado experiencia de cara a dar clase y dar explicaciones más razonadas para que el alumnado lo entienda lo máximo posible de cara a un futuro laboral ejerciendo esta profesión.

En cuanto al siguiente de los objetivos: ‘’Impartir una unidad didáctica completa correctamente sobre un tema a escoger’’, se ha impartido con satisfacción en el tiempo establecido en la Tabla 1. Además, hay que mencionar que el departamento de matemáticas ha ayudado a cómo exponer cada punto del tema correctamente para el beneficio del alumno, dando consejos acerca de en qué apartados son los más importantes a tener en cuenta para poder explicarselo a los alumnos/as de la mejor manera posible, ya que, este temario es la base de futuros conocimientos más complejos.

Respecto a los dos últimos objetivos detallados: ‘’Corregir por primera vez una evaluación de tipo examen’’ y ‘’Presentar una propuesta de autoevaluación diferente a los alumnos/as’’ se puede decir que se ha logrado realizar un examen y posteriormente corregirlo con un una tasa de aprobados del 75% (21/28). Por otro lado, en cuanto a la propuesta de autoevaluación, es la mencionada en el apartado *3.2. Unidad Didáctica*, recalcando que es una propuesta de autoevaluación para reforzar al alumnado en su motivación y aprendizaje de cara a futuros exámenes.

Finalmente, concluir este trabajo diciendo que esta experiencia ha resultado ser muy útil para conocer el mundo en el que se rodea un docente y dar una pincelada acerca de cómo sería un futuro laboral como profesor de matemáticas de la ESO.

6. REFERENCIAS

Apuntes de EQ-1018 Electrotécnia y Electrónica. *Grado en Ingeniería Química*. (2019)

Apuntes de EQ-1023 Sistemas Automáticos. *Grado en Ingeniería Química*. (2021)

Apuntes de EQ-1026 Fundamentos de Máquinas y Estructuras.(2022) *Grado en Ingeniería Química.*

Brizuela, M.C. (2014) *Funciones Logarítmicas y Exponenciales, Matemáticas Modernas,* disponible en: https://matematicasmodernas.com/funciones-logaritmicas-y-exponenciales/

Guijarro, E., Babiloni, E., & Fernández-Diego, M. (s/f). *APLICACIÓN DEL PUZZLE DE ARONSON PARA TRABAJAR EL APRENDIZAJE COLABORATIVO Y EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS GENÉRICAS DE LOS ESTUDIANTES* . Upv.es. https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/82240/INNODOCT%202014_14038%20Aplicacion%20puzzle%20Aronson.pdf?sequence=1, página 498

Jiménez, JM, Vargas, M., María, V., & Santamaría, LM (s/f). *Aprendizaje cooperativo en entornos virtuales: el método Jigsaw en asignaturas de estadística* . Uclm.es.de https://www.uclm.es/-/media/Files/C01-Centros/cu-csociales/documentos2007/03_2007.ashx?la=es

Libro Anaya: Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I., & Colera Cañas, R. (2016). *Matemáticas Orientadas a los Enseñamientos Académicos 4.º ESO* (pp. 100−119). Carlos Vallejo. Carlos Vallejo.

Metodologías de enseñanza aprendizaje: Aprendizaje + Docencia: UPV. (s/f.). https://www.upv.es/contenidos/PAD/info/1076633normalc.html

Objetivos y Metas del Desarrollo Sostenible - Desarrollo Sostenible (s/f) disponible en:. https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/sustainable-development-goals/

N. 340 M. 30 de D. (s/f). *BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO*. Boe.es. Disponible en: https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf

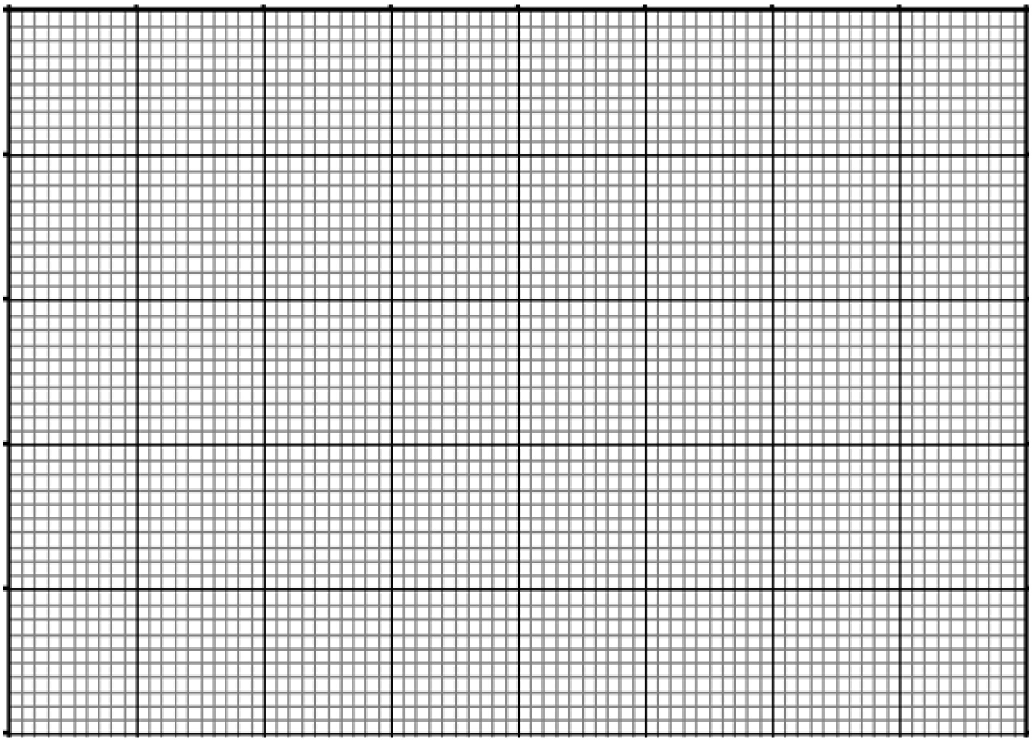
7. ANEXO

A continuación se adjunta la evaluación que se les pone el día del examen al alumnado.

EXAMEN MATEMÁTICAS TEMA 5: FUNCIONES ELEMENTALES	4 ESO CURSO 2022/2023	NOTA
NOMBRE Y APELLIDOS:	FECHA:	

1. **Indica todos los elementos importantes de la siguiente función y representa la parábola en el papel milimetrado. (2p)**

$$y = -x^2 + 4x - 3$$



2. Dada la función $y = 3^x$, contesta a las siguientes preguntas, y justifica tu respuesta: (2p)

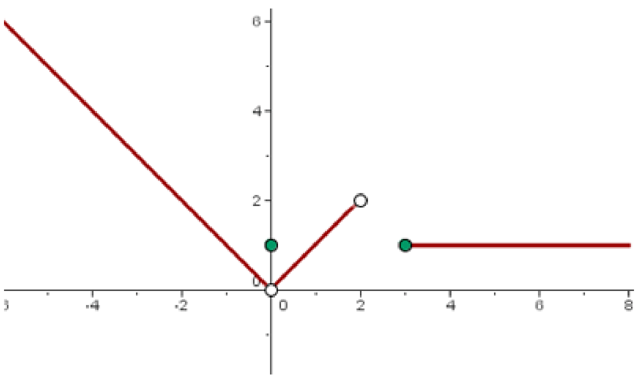
a) ¿Cúal es su dominio?

b) ¿En qué dos puntos pasa con seguridad?

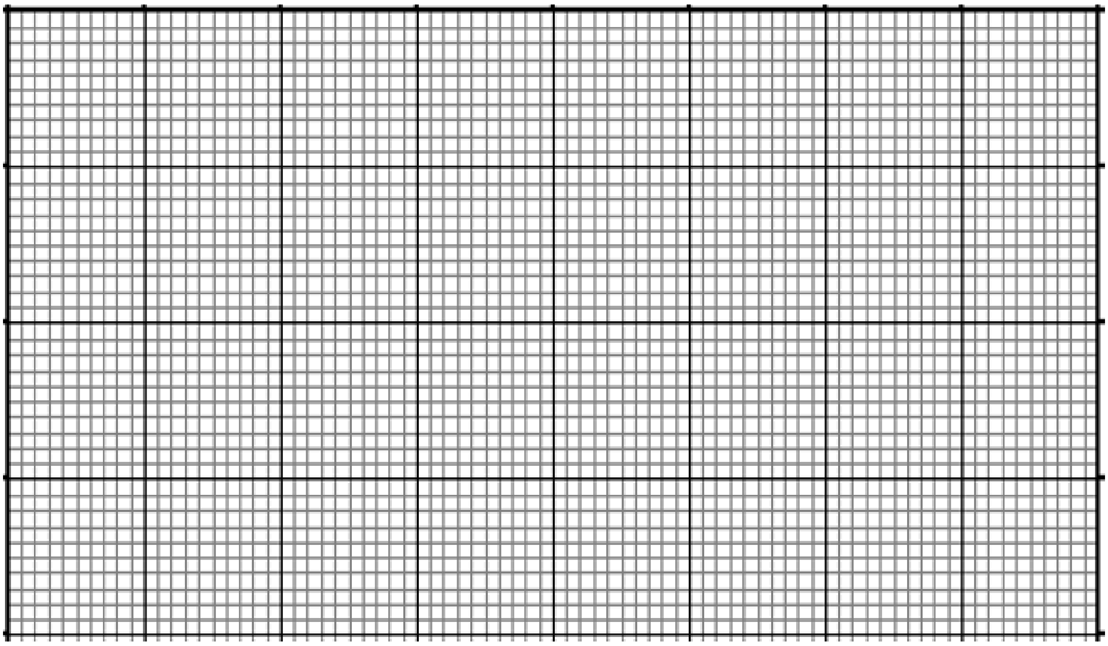
c) ¿La función es creciente o decreciente?

d) ¿Cuál es su función inversa o recíproca?

3. Observa la siguiente gráfica y determina la expresión analítica de la función. (2p)



4. Representa en el siguiente papel milimetrado la siguiente expresión: $y = |x^2 - 3x - 4|$. Y expresa la función sin utilizar el valor absoluto (del tipo definida a trozos). (1,5p)



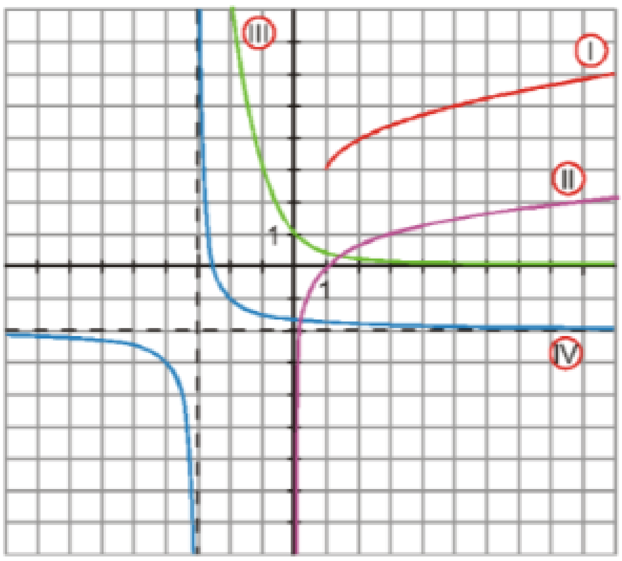
5. Asocia en cada expresión con la curva que le corresponde: (0,5p)

a) $y = 3 + \sqrt{x - 1}$

b) $y = - 2 + \frac{1}{x+3}$

c) $y = (\frac{1}{3})^x$

d) $y = log_3 x$



6. Responde a las siguientes preguntas tipo test (2p)

a) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

- ☐ Las parábolas son polinomios de segundo grado
- ☐ Las rectas son polinomios de primer grado
- ☐ Las rectas sólo pueden cortar a uno de los ejes
- ☐ Las parábolas o tienen máximos o tienen mínimos

b) La recta que pasa por los puntos (1,0) y (0,-3) tiene como ecuación:

- ☐ y=3x-3
- ☐ y=2x-3
- ☐ x-2y=1
- ☐ $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

c) ¿Cuál es verdadera?

- ☐ $log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$
- ☐ $log_P a = x \Leftrightarrow a^x = P$
- ☐ $log_a P = x \Leftrightarrow x^a = P$
- ☐ Todas son incorrectas

d) En las funciones radicales:

- ☐ Si *x* tiene el signo positivo, la curva va hacia la derecha.
- ☐ Si *a* tiene el signo positivo, la curva estará por encima del eje x
- ☐ Si *a* tiene el signo positivo, la curva estará por debajo del eje x
- ☐ La primera y la segunda son correctas.

e) Haz un círculo en verdadero o falso y justifica tu respuesta si es falso.

i) Las funciones con valor absoluto están compuestas por dos asíntotas simétricas entre sí. **VERDADERO / FALSO**

ii) Si se representan dos funciones radicales idénticas pero de signo cambiado, da como resultado a una parábola tumbada. **VERDADERO / FALSO**

iii) El valor absoluto de una función puede dar un valor negativo. **VERDADERO / FALSO**

iv) Las funciones exponenciales pueden ser representaciones del resultado del crecimiento de una población. **VERDADERO / FALSO**