An application of the mean value theorem to study numerical series
Una aplicación del teorema del valor medio para estudiar series numéricas

Clara Burgos
Departamento de Matemática Aplicada e
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València, Valencia, España
claburs@doctor.upv.es

Julia Calatayud
Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I, 12071, Castellón, España
calatayj@uji.es

Juan Carlos Cortés
Departament de Matemática Aplicada e
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València, Valencia, España
jccortes@mat.upv.es

Marc Jornet
Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I, 12071, Castellón, España
jornet@uji.es

Resumen

In this note we show an application of the mean value theorem to derive the convergence/divergence of numerical series. In particular, our analysis allows us to derive the convergence of p-series and to derive the classical Cauchy condensation test.

Motivación

El objetivo de esta nota es mostrar una sencilla aplicación del Teorema del Valor Medio (TVM) para establecer un criterio que permite analizar la convergencia/divergencia de ciertas series de números positivos.

Empezamos nuestra exposición con dos casos particulares, que servirán para comprender mejor la generalización posterior que se establece en el criterio de convergencia que demostramos al final de esta nota.

Ejemplo 1. *Consideremos la función $f(x) = \ln(x)$ en el dominio $x > 0$. Como para cada $m \geq 1$ entero, $f(x)$ es continua en el intervalo $x \in [m, m+1]$ y es derivable en $x \in]m, m+1[$, podemos aplicar el TVM y garantizar que existe al menos un valor $c_m \in]m, m+1[$ de modo que*

$$\frac{1}{c_m} = \ln(m+1) - \ln(m), \qquad m < c_m < m+1. \tag{1}$$

Observemos que $g(x) := f'(x) = 1/x$ es una función positiva y decreciente ($g'(x) = f''(x) = -1/x^2 < 0$) para $x > 0$. Por tanto, de la desigualdad del dominio dada en (1) se deduce

$$m < c_m < m+1 \Rightarrow \frac{1}{m+1} < \frac{1}{c_m} < \frac{1}{m}.$$

De esta desigualdad y de (1), se obtiene

$$\frac{1}{m+1} < \ln(m+1) - \ln(m) < \frac{1}{m}.$$

Si escribimos esta desigualdad para $m = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos:

$$\begin{array}{lclcccc}
m = 1 & \Rightarrow & \frac{1}{2} & < & \ln(2) - \ln(1) & < & 1, \\[2ex]
m = 2 & \Rightarrow & \frac{1}{3} & < & \ln(3) - \ln(2) & < & \frac{1}{2}, \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\[2ex]
m = n & \Rightarrow & \frac{1}{n+1} & < & \ln(n+1) - \ln(n) & < & \frac{1}{n}.
\end{array}$$

Sumando término a término esta cadena de desigualdades, y teniendo en cuenta que $\ln(1) = 0$*, se obtiene*

$$\sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m} < \ln(n+1) < \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}.$$

Observemos que la suma de la derecha, $H_n := \sum_{m=1}^{n} 1/m$*, representa la suma parcial n-ésima de la serie armónica* $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m$*. Si tomamos límites en la desigualdad de la derecha, se tiene:*

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) \leq \lim_{n\to\infty} H_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m},$$

de donde se deduce que la serie armónica es divergente.

En el segundo ejemplo nos apoyaremos en un razonamiento similar para probar la convergencia de una importante serie numérica de términos positivos.

Ejemplo 2. *Para facilitar el razonamiento seguimos una presentación similar a la anterior. Ahora consideraremos la función* $f(x) = -1/x$*,* $x > 0$*, y aplicamos el TVM en el intervalo* $x \in [m, m+1]$*, siendo* $m \geq 1$ *entero. Ello nos permite asegurar la existencia de, al menos, un valor* $c_m \in]m, m+1[$ *de modo que*

$$\frac{1}{c_m^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}, \qquad m < c_m < m+1. \tag{2}$$

Claramente $g(x) := f'(x) = 1/x^2$*,* $x > 0$*, es una función positiva y decreciente (*$g'(x) = f''(x) = -2/x^3 < 0$*). Por tanto,*

$$m < c_m < m+1 \Rightarrow \frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{c_m^2} < \frac{1}{m^2}.$$

Aplicando esta última desigualdad, de (2) *se obtiene*

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m^2}.$$

Si escribimos esta desigualdad para $m = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccc}
m = 1 & \Rightarrow & \dfrac{1}{2^2} & < & 1 - \dfrac{1}{2} & < & 1, \\[2ex]
m = 2 & \Rightarrow & \dfrac{1}{3^2} & < & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} & < & \dfrac{1}{2^2}, \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\[2ex]
m = n & \Rightarrow & \dfrac{1}{(n+1)^2} & < & \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} & < & \dfrac{1}{n^2}.
\end{array}$$

Sumando término a término esta cadena de desigualdades, se obtiene

$$\sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m^2} < 1 - \frac{1}{n+1} < \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}.$$

Ahora vamos a partir de la desigualdad de la izquierda para obtener, tras manipulaciones algebraicas sencillas, la suma n-ésima, $S_n := \sum_{m=1}^{n} 1/m^2$, de la serie $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^2$,

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m^2} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} = S_n < 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} S_n < \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 2,$$

de donde se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es convergente.

1. Un criterio para probar la convergencia/divergencia de series numéricas de términos positivos

Motivados por los ejemplos anteriores, supongamos $f(x) \in \mathcal{C}^2(]0, \infty[)$ tal que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$, es decir, creciente y cóncava. Si aplicamos el TVM en el intervalo $]m, m+1[$, $m \geq 1$ entero, se concluye:

$$\text{existe al menos un } c_m \in]m, m+1[\text{: } f'(c_m) = f(m+1) - f(m). \tag{3}$$

Como $f'(x)$ es decreciente (pues $(f'(x))' = f''(x) < 0$), se tiene:

$$m < c_m < m+1 \Rightarrow f'(m+1) < f'(c_m) < f'(m). \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce

$$f'(m+1) < f(m+1) - f(m) < f'(m).$$

Desarrollando esta desigualdad para $m = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc} m=1 & \Rightarrow & f'(2) & < & f(2)-f(1) & < & f'(1), \\ m=2 & \Rightarrow & f'(3) & < & f(3)-f(2) & < & f'(2), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m=n & \Rightarrow & f'(n+1) & < & f(n+1)-f(n) & < & f'(n). \end{array}$$

Si sumamos término a término y simplificamos los términos centrales (que forman una suma telescópica), se deduce

$$\sum_{m=2}^{n+1} f'(m) < f(n+1) - f(1) < \sum_{m=1}^{n} f'(m). \tag{5}$$

Como $f' > 0$, entonces f es creciente y por tanto solamente se presentan dos posibilidades sobre el comportamiento asintótico de f. A continuación, analizamos cada caso.

- Caso 1: Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.
  Tomemos límites cuando $n \to \infty$ en la desigualdad de la derecha de (5), entonces en este caso se tiene

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} f(n+1) - f(1) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f'(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f'(m).$$

Obsérvese que $f(1) < +\infty$ porque $f(x)$ es continua para $x = 1 > 0$. Por tanto, se deduce que la serie de términos positivos (pues $f'(x) > 0$, $x > 0$) dada por $\sum_{m=1}^{\infty} f'(m)$, es divergente.

- Caso 2: Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = M < +\infty$.
  Consideremos la desigualdad de la izquierda de (5) y completemos la serie que queda en el término izquierdo empezando en $m = 1$:

$$\sum_{m=1}^{n+1} f'(m) < f(n+1) - f(1) + f'(1).$$

  Ahora tomemos límites cuando $n \to \infty$ en esta desigualdad. Esto conduce a que

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} f'(m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n+1} f'(m) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} f(n+1) - f(1) + f'(1) = M - f(1) - f'(1) < +\infty. \end{aligned}$$

  Obsérvese que hemos usado que $f(1)$ y $f'(1)$ son finitos porque $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas para $x = 1 > 0$. Por tanto, se deduce que la serie de términos positivos, $\sum_{m=1}^{\infty} f'(m)$, es convergente.

Resumiendo, hemos establecido el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Sea $f(x) \in \mathcal{C}^2(]0,\infty[)$ tal que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. Se cumplen los siguientes resultados para la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$:*

i) Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ diverge.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ converge.

Notemos que, puesto que f es creciente, se tiene que cumplir o bien $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$ (no acotabilidad) o bien $\lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty$ (acotabilidad). Como $f'(x) > 0$, se tiene que cumplir o bien $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) = +\infty$ o bien $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) < +\infty$. Por tanto, asumiendo que $f(x) \in \mathcal{C}^2(]0,\infty[)$ tal que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$, la conclusión del Teorema 1.1 se puede reescribir como

$$\lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} f'(n) < +\infty. \tag{6}$$

Acabamos este apartado deduciendo el criterio de condensación de Cauchy como una consecuencia del Teorema 1.1. Ciertamente, esta deducción es más técnica que la demostración clásica que podemos encontrar en la mayoría de los textos sobre series numéricas.

Teorema 1.2. *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un sucesión de números positivos decreciente. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Demostración. Podemos tomar una función f con $f' > 0$ y $f'' < 0$, tal que $f'(n) = a_n$. Para su construcción, se toma una función decreciente y positiva que pase por los a_n en n y se define f como una primitiva; obsérvese que esto es consistente con que a_n es una sucesión de números positivos y monótona decreciente. Puesto que f' es decreciente, se tiene que

$$\begin{aligned} f'(2^n)2^n = f'(2^n)(2^{n+1} - 2^n) &\geq \int_{2^n}^{2^{n+1}} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq f'(2^{n+1})(2^{n+1} - 2^n) \\ &= f'(2^{n+1})2^n = \frac{1}{2} f'(2^{n+1})2^{n+1}. \end{aligned}$$

Sumando para $n = 1, 2, \ldots$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(2^n)2^n \geq \underbrace{\int_2^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x}_{= \lim\limits_{n\to\infty} f(n) - f(2)} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} f'(2^n)2^n. \tag{7}$$

Así, teniendo en cuenta que $a_n := f'(n)$ y la regla de Barrow, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} f'(n) < +\infty \overset{(6)}{\iff} \lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty$$

$$\overset{\text{Barrow}}{\iff} \int_2^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \overset{(7)}{\iff} \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} f'(2^n)2^n < +\infty$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} f'(2^n)2^n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n}2^n < +\infty.$$

2. Aplicaciones

Acabamos esta nota presentando algunos ejemplos de series de interés donde la aplicación del Teorema 1.1 permite deducir su convergencia/divergencia.

Ejemplo 3. *Para $p > 1$ finito, consideremos la función $f_p(x) = M - \frac{K}{x^p}$, $K > 0$, $M \in \mathbb{R}$, en el dominio $x > 0$. Observemos que cumple las hipótesis del Teorema 1.1,*

$$f_p'(x) = Kpx^{-(p+1)} > 0, \quad f_p''(x) = -Kp(p+1)x^{-(p+2)} < 0, \qquad \forall x > 0.$$

Además, $\lim_{n\to\infty} f_p(n) = M < +\infty$. Por tanto, aplicando el Teorema 1.1–ii) se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_p'(n)$ converge, o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}, \quad p = 1, 2, \ldots \quad \textit{converge.}$$

Este es un resultado bien conocido (por ejemplo aplicando el test integral o el test de condensación de Cauchy), y de hecho en algunos casos particulares se conoce la suma. Por ejemplo, para $p = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

Ejemplo 4. *Ahora aplicaremos el Teorema 1.1 a la función $f_r(x) = M - Kr^x$, $K > 0$, $0 < r < 1$, $M \in \mathbb{R}$, en el dominio $x > 0$. En primer lugar, comprobamos que se cumplen las hipótesis del teorema,*

$$f_r'(x) = -Kr^x \ln(r) > 0, \quad f_r''(x) = -Kr^x(\ln(r))^2 < 0, \qquad \forall x > 0.$$

Además, $\lim_{n\to\infty} f_r(n) = M < +\infty$. Por el Teorema 1.1–ii) obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_r'(n)$ converge, o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty, \quad 0 < r < 1,$$

lo cual es bien conocido, al tratarse de la serie geométrica.

El siguiente ejemplo, ilustra la aplicación del Teorema 1.1 para demostrar la divergencia de una serie, también bien conocida.

Ejemplo 5. *Sea la función* $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, *la cual cumple las condiciones del Teorema 1.1,*

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \qquad \forall x > 0.$$

Claramente, $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$. *Por el Teorema 1.1–i) obtenemos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ *diverge, o equivalentemente,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty.$$

El resultado es un caso particular de la conocida divergencia de la serie subarmónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, $0 < p < 1$.

Conclusiones

En esta nota hemos introducido un sencillo criterio para estudiar la convergencia de series numéricas de términos positivos que está basado en la aplicación del Teorema del Valor Medio. Los resultados nos han permitido deducir, de un modo diferente al habitual, la convergencia o divergencia de algunos tipos importantes de series numéricas, como las p-series o las series geométricas, si bien el resultado establecido es susceptible de aplicarse a más tipos de series numéricas. También hemos obtenido una prueba del criterio clásico de condensación de Cauchy como consecuencia del principal resultado del trabajo. Creemos que el contenido del artículo puede ser de utilidad para presentar, de un modo alternativo, resultados clásicos de la teoría de series numéricas.

Referencias

[1] T. M. Apostol (1976), *Análisis Matemático*, Ed. Reverté, Barcelona.

[2] J. de Burgos Román y otros (2010), *Sucesiones y Series*, García-Maroto Editores, Madrid.