Grado en Matemática Computacional

Trabajo Final de Grado

El grupo de Baer-Specker

Autor:
Isabel Sepúlveda Alvarado

Tutores académicos:
Mª Vicenta Ferrer González
Salvador Hernández Muñoz

Fecha de lectura: julio de 2022
Curso académico 2021/2022

Resumen

En este documento se detalla el trabajo de fin de grado de la asignatura MT1054 – Trabajo Final de Grado del Grado en Matemática Computacional de la Universidad Jaume I.

En él se estudian varios conceptos de las áreas de la topología y el álgebra para poder demostrar finalmente los Teoremas de Specker, Baer-Specker y Nunke. Estos resultados versan sobre el grupo de Baer-Specker, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, el cual tiene propiedades sorprendentes como el hecho de no ser un grupo libre o que cualquier subgrupo cerrado infinito contenido en él es topológicamente isomorfo al propio grupo de Baer-Specker. Finalmente, se exponen ejemplos de grupos donde no se cumplen las mismas propiedades que en el grupo $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Palabras clave

Grupo de Baer-Specker, Grupo abeliano libre, Topología producto, Homomorfismo de grupos.

Keywords

Baer-Specker group, Free abelian group, Product topology, Homomorphism of groups.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y motivación

La topología es, ciertamente, una rama muy abstracta del conocimiento por su propia naturaleza. Tradicionalmente, se sigue el paradigma euclidiano de formulación de axiomas y definiciones para posteriormente probar los teoremas. Es destacable asimismo que las aplicaciones de la topología son numerosas en el análisis, la geometría y, recientemente, en otras áreas como la física o la informática.

Un teorema fundamental del álgebra lineal establece que todo espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ contiene una base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_\alpha \in V,\, \alpha \in I\}$. Por consiguiente, cualquier vector $\overrightarrow{v} \in V$ puede escribirse de forma única como una combinación lineal

$$\overrightarrow{v} = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha \overrightarrow{e}_\alpha.$$

La complicación surge cuando I es un conjunto infinito. En este caso, se requiere que todos los coeficientes $\lambda_\alpha \in \mathbb{K}$ sean cero, salvo una cantidad finita. Como resultado, la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} f : \bigoplus\limits_{\alpha \in I} K & \longrightarrow & V \\ (\lambda_\alpha) & \longmapsto & \sum\limits_{\alpha \in I} \lambda_\alpha \overrightarrow{e}_\alpha \end{array}$$

es biyectiva. No obstante, se debe tener en cuenta que no podemos escribir explícitamente una base en general. Por ejemplo, para los espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$, como son los números reales $V = \mathbb{R}$ o el producto infinito de los números racionales $V = \prod\limits_{m=1}^{\infty} \mathbb{Q}$. En efecto, para determinar la existencia de una base en espacios vectoriales de dimensión infinita se debe utilizar el Axioma de Elección o, equivalentemente, el Lema de Zorn, y por lo tanto no se puede explicitar. Para enfatizar este aspecto, especialmente en análisis, dicha base se suele denominar *base de Hamel.*

La existencia de una base no es transferible de los espacios vectoriales a los módulos. Es más, un módulo M sobre un anillo R se dice que es *libre* si contiene una base (sistema linealmente independiente y generador de M). En lo que a este trabajo respecta, estamos interesados en los módulos sobre el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, es decir, en los grupos abelianos. Algunos de estos grupos abelianos son libres y otros no lo son. Por ejemplo, el grupo abeliano $\mathbb{Z}(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ no es libre puesto que $n\,x = 0$ (módulo n), $\forall\, x \in \mathbb{Z}(n)$.

En ocasiones, es más complicado saber si un grupo abeliano determinado contiene una base. Consideremos, por ejemplo, los números racionales. Veamos que el grupo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$ no es libre. Supongamos que existe una base $\mathcal{B} = \{e_\alpha \in \mathbb{Q} \,/\, \alpha \in I\}$. Entonces, podemos escribir la unidad de los racionales como combinación lineal de los elementos de la base

$$1 = n_1 e_{\alpha_1} + n_2 e_{\alpha_2} + \ldots + n_r e_{\alpha_r}.$$

Podemos asumir que $n_1 \neq 0$ y que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. A continuación, escogemos un número entero n que no divida a n_1, y escribimos el siguiente número racional como combinación lineal de los elementos de la base

$$\frac{1}{n} = m_1 e_{\beta_1} + m_2 e_{\beta_2} + \ldots + m_s e_{\beta_s},$$

donde suponemos que $\beta_k \neq \beta_l$ si $k \neq l$. Teniendo en cuenta que $n\frac{1}{n} = 1$, obtenemos

$$n m_1 e_{\beta_1} + n m_2 e_{\beta_2} + \ldots + n m_s e_{\beta_s} = 1 = n_1 e_{\alpha_1} + n_2 e_{\alpha_2} + \ldots + n_r e_{\alpha_r}.$$

Como ambas combinaciones lineales son únicas por la definición de base, se tiene que $\exists\, j \in \mathbb{N}$ de manera que $n m_j = n_1$, es decir, que n divide a n_1, con lo cual hemos llegado a una contradicción.

El tema central de este trabajo es el estudio del grupo formado por el producto infinito de los enteros

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \prod_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots$$

Este grupo se llama *grupo de Baer-Specker* y sus elementos son tuplas infinitas sin restricciones. A primera vista, uno puede suponer que es libre. No obstante, como demostraremos a lo largo del trabajo, no lo es. Sus propiedades convierten al *grupo de Baer-Specker* en un grupo muy singular, que tiene un papel realmente destacable en la teoría de grupos abelianos.

La memoria está estructurada como sigue. El capítulo 1 es introductorio y parte de la motivación se ha extraído del artículo [1]. Se ha dedicado el capítulo 2 al desarrollo de los conceptos básicos necesarios para la comprensión del trabajo. En la confección de este capítulo se han utilizado básicamente los libros [2] y [3]. En el capítulo 3 se exponen los resultados principales del trabajo sobre el *grupo de Baer-Specker* ($\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$), viendo que tiene unas propiedades muy singulares. Está basado en los artículos [4], [5], [6] y [7], de los cuales hemos extraído la idea de las demostraciones que aparecen (modificando y/o añadiendo algunas para adecuarlas a los contenidos de este trabajo). En el capítulo 4 se ven una serie de ejemplos que no verifican las singulares propiedades que sí que posee $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Finalizamos el trabajo exponiendo los resultados y conclusiones.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Axioma de elección y sus formulaciones

El Axioma de Elección se utiliza en multitud de ocasiones, incluso de forma inconsciente. Fue propuesto por primera vez por Beppo Levi en 1902, y Paul Cohen en 1963 demostró que es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Sin el Axioma de Elección sería imposible demostrar muchos importantes resultados de la topología y el análisis. Ya que en este trabajo lo vamos a utilizar de manera explícita, lo definimos de la siguiente forma.

Axioma de Elección: *Si I es un conjunto de índices (no vacío) y, para cada $\alpha \in I$, A_α es un conjunto no vacío, entonces hay una función $f : I \to \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ tal que, para cada $\alpha \in I$, $f(\alpha) \in A_\alpha$. La función f se llama* ***función de elección*** *para la familia $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$, y es una función que selecciona un elemento en cada uno de los conjuntos A_α.*

Notemos que una función de elección para la familia $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es precisamente un elemento del producto $\prod\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Por tanto, el Axioma de Elección es equivalente al siguiente axioma.

Axioma del Producto: *Si $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia indexada de conjuntos no vacíos, entonces $\prod\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ es no vacío.*

En la literatura hay otras muchas formulaciones equivalentes al Axioma de Elección. Aquí solamente mencionaremos dos más, aunque ninguna de las cuales es tan intuitiva como el Axioma del Producto.

Un conjunto X con una relación binaria de orden se dice que es parcialmente ordenado. Si dos elementos cualesquiera de X son comparables diremos que X es un conjunto totalmente ordenado. El conjunto X está bien ordenado si además todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo.

No es difícil ver que el buen orden en un conjunto está relacionado con el Axioma de Elección. Si $(X, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, la función $f : \mathcal{P}(X) \to X$, que asigna a cada $A \in \mathcal{P}(X)$ el menor elemento de A, es una función de elección, siendo $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X.

Axioma del Buen Orden: En todo conjunto hay un buen orden.

En matemáticas, especialmente en álgebra, el lema de Zorn juega un papel central. Se usa para demostrar la existencia de ideales maximales, de bases en espacios vectoriales, de ultrafiltros, y de otros conjuntos maximales.

Lema de Zorn: *Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que todo subconjunto totalmente ordenado (**cadena**) tiene una cota superior, entonces $(X, \leq)$ contiene al menos un elemento maximal.*

Este lema es equivalente al Axioma de Elección y se utiliza, por ejemplo, para demostrar la existencia de una base para cualquier espacio vectorial.

Teorema 1. *Todo espacio vectorial V sobre un cuerpo F tiene una base.*

Demostración:
Sea $\mathcal{S}$ la colección de todos los subconjuntos linealmente independientes en V. Ordenamos parcialmente $\mathcal{S}$ de la siguiente manera: si A, $B \in S$ entonces $A \leq B$ si $A \subseteq B$. Por tanto, cada cadena tiene un elemento maximal, que será simplemente la unión de todos los elementos de la cadena (los cuales es sencillo comprobar que son linealmente independientes). Entonces, aplicando el Lema de Zorn, concluimos que todo $\mathcal{S}$ tiene un elemento maximal, al cual denotaremos por $\mathcal{B}$. Afirmamos que $\mathcal{B}$ es una base de V.

Si $\mathcal{B}$ no fuera base, entonces existiría un elemento x en V que no sería generado por $\mathcal{B}$. Pero en este caso, x podría ser añadido a $\mathcal{B}$ (y la unión $\mathcal{B} \cup \{x\}$, de nuevo, sería linealmente independiente), con lo cual llegamos a una contradicción con el hecho de que $\mathcal{B}$ sea maximal. Concluimos pues que $\mathcal{B}$ es una base de V.

$\square$

2.2. Conjuntos numerables y no numerables

Una de las ideas más profundas de las matemáticas modernas es la teoría del infinito de Cantor. Esta teoría consiste en la idea de que tal y como podemos comparar conjuntos finitos por su tamaño, también podemos comparar conjuntos infinitos de la misma manera. Una forma de ejemplificarlo es ver que al tener la noción de que el 2 es un número menor al 3, entonces un conjunto con 2 elementos será "menor" que un conjunto con 3 elementos.

Definición 1. *Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A tiene el mismo cardinal que B (o, equivalentemente, que son* ***equipotentes****) si existe una aplicación $f : A \to B$ biyectiva. Lo denotaremos por $|A| = |B|$.*

Ejemplo 1.
Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ y $C = \{a, b, c, d, e, f\}$. Entonces, A y B tienen el mismo cardinal porque la aplicación $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma), (4, \delta), (5, \varepsilon)\}$ es una biyección de A en B. Podemos encontrar más aplicaciones que también lo sean, pero solo con una es suficiente para probar que $|A| = |B|$. Por otro lado, A y C tienen distinto cardinal, así como B y C.

Notemos también que si $|A| = |B|$ a través de una aplicación f_1 y $|B| = |C|$ a través de una aplicación f_2, entonces $|A| = |C|$ a través de la aplicación $f_2 \circ f_1$. Evidentemente, la relación "tener el mismo cardinal" es una relación binaria de equivalencia y $|A|$ denota la clase de equivalencia del conjunto A.

Nota 1. *En este trabajo tomamos $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ como el conjunto de los números naturales, enteros, racionales y reales, respectivamente.*

Ejemplo 2.
Sea P el conjunto de los números pares enteros e I el conjunto de los números impares enteros.

Entonces, $|P| = |I|$, ya que la función $f(j) = j + 1$ es una biyección entre P e I.

Ejemplo 3.
Sea P el conjunto de los números pares enteros. Entonces, $|P| = |\mathbb{Z}|$, ya que la función $g(j) = \frac{j}{2}$ es una biyección entre P y $\mathbb{Z}$.

Con este último ejemplo podemos observar que es posible establecer una biyección entre un conjunto (los enteros, en este caso) y un subconjunto de él mismo (los números enteros pares, en este caso).

Ejemplo 4.
Veamos que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. Para ello definimos la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ de manera que:

$$f(j) = \begin{cases} -(2j+1)\,, \text{ si } j < 0 \\ \quad 2j+2 \quad, \text{ si } j \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, para valores de j negativos la imagen de la aplicación será 1, 3, 5, ..., para valores de j positivos la imagen de la aplicación será 4, 6, 8, ..., y $f(0) = 2$. Como se puede apreciar, esta aplicación es biyectiva.

Definición 2. *Sean A y B dos conjuntos. Diremos que $|A| < |B|$ si existe una aplicación $f : A \to B$ inyectiva pero no existe niguna aplicación sobreyectiva. Esta notación se lee como "A tiene un cardinal menor a B". Usaremos la notación $|A| \leq |B|$ para indicar que $|A| = |B|$ o bien $|A| < |B|$.*

Notemos que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ implica que $|A| \leq |C|$. Además, si $A \subseteq B$, entonces la aplicación $i : A \to B$ tal que $i(a) = a$ es inyectiva, por lo tanto $|A| \leq |B|$.

Teorema 2. *Sean A y B dos conjuntos. Si existe una aplicación $f : A \to B$ inyectiva y otra aplicación $g : B \to A$ también inyectiva entonces $|A| = |B|$.*

Demostración:
Es conveniente suponer que A y B son disjuntos. En caso contrario podemos reemplazar A por $\{(a, 0) : a \in A\}$ y B por $\{(b, 1) : b \in B\}$. Podemos suponer también que tanto f como g no son sobreyectivas.

Sea $D = f(A)$ la imagen de f y sea $C = g(B)$ la imagen de g. Definamos una cadena como una sucesión de elementos de A o de B, a través de una función $\phi : \mathbb{N} \to (A \cup B)$, tal que:

- $\phi(1) \in B \setminus D$.
- Si para algún j tenemos que $\phi(j) \in B$, entonces $\phi(j+1) = g(\phi(j)) \in A$.
- Si para algún j tenemos que $\phi(j) \in A$, entonces $\phi(j+1) = f(\phi(j)) \in B$.

Como podemos observar, una cadena construida de esta manera es una sucesión de elementos de $A \cup B$ tales que el primer elemento se encuentra en $B \setminus D$, el segundo elemento en A, el tercer elemento en B, y así sucesivamente. Evidentemente, todo elemento de $B \setminus D$ será el primer elemento de al menos una de estas cadenas.

Definamos ahora $S := \{a \in A : a \text{ es un elemento de alguna cadena}\}$. Equivalentemente, $S = \{x \in A : x \text{ se puede escribir como } x = g(f(g \ldots f(g(y)) \ldots))) \text{ para algún } y \in B \setminus D\}$. Observemos que $S \subseteq C$.

Sea ahora la función $k : A \to B$ definida como

$$k(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } x \in A \setminus S \\ g^{-1}(x) & , \text{si } x \in S \end{cases} .$$

Notemos que la segunda parte de la definición de k tiene sentido porque $S \subseteq C$ y g es inyectiva. Sabemos que f y $g^{-1}|_C$ son inyectivas, procedamos ahora a demostrar que k también lo es. Supongamos que $f(x_1) = g^{-1}(x_2)$ para algún $x_1 \in A \setminus S$ y para algún $x_2 \in S$. Se tiene entonces que $x_2 = g(f(x_1))$. Pero, por la definición de S, el hecho de que $x_2 \in S$ implica que $x_1 \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, deducimos que k es inyectiva.

Demostremos a continuación que k es sobreyectiva. Fijemos un $b \in B$. Busquemos un elemento $x \in A$ tal que $k(x) = b$. Nos encontramos, por lo tanto, con dos casos.

- En primer lugar, si $g(b) \in S$ entonces $k(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$, por lo que el elemento x que estamos buscando será $g(b)$.
- En segundo lugar, si $g(b) \notin S$, entonces podemos suponer (y demostraremos más abajo) que $\exists\, x \in A$ tal que $f(x) = b$. En este caso, el elemento x pertenecerá al conjunto $A \setminus S$, ya que si no fuera así x estaría en alguna cadena y entonces $g(f(x)) = g(b)$ también estaría en esta cadena. Por lo tanto $g(b) \in S$, por lo que hemos llegado a una contradicción. Así pues, si $x \in A \setminus S$ entonces $k(x) = f(x) = b$, con lo cual hemos demostrado que x es la antiimagen

de b a través de k. (Para probar que, efectivamente, $\exists\, x \in A$ tal que $f(x) = b$, recurriremos a la reducción al absurdo. Supongamos que $\nexists\, x \in A$ tal que $f(x) = b$, entonces $b \in B \setminus D$, con lo que alguna cadena comenzaría en b y $g(b)$ sería un término de esta cadena, es decir, $g(b) \in S$. Pero $g(b) \notin S$, con lo que llegamos a una contradicción).

$\square$

Nota 2. *Claramente la relación $\leq$ sobre cardinales es una relación binaria de orden.*

Nota 3. *Debemos destacar el hecho de que encontrar una aplicación inyectiva de A en B y otra aplicación inyectiva de B en A, implica que existirá una aplicación biyectiva de A en B. Observemos que estas dos aplicaciones inyectivas pueden no estar relacionadas. En ocasiones es más sencillo construir dos aplicaciones inyectivas independientes que construir una única biyección.*

Ejemplo 5.
El conjunto de todos los pares ordenados de enteros positivos

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(j, k) : j,\ k \in \mathbb{N}\}$$

es equipotente a $\mathbb{N}$. Lo demostraremos utilizando el Teorema 2. La función

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ j & \mapsto & (j, 1) \end{array}$$

es inyectiva. Consideremos ahora la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

$$g(j, k) = j \cdot 10^{(j+k)} + k.$$

Sea n el número de dígitos del número k. Notemos que $g(j, k)$ se obtiene escribiendo los dígitos de j, seguidos de $j + k - n$ ceros y seguidos de los dígitos de k. Por ejemplo,

$$g(23, 714) = 23\underbrace{000\ldots000}_{734}714$$

donde tenemos $23 + 714 - 3 = 734$ ceros entre el 3 y el 7. Claramente la función g también es inyectiva. Concluimos entonces, por el Teorema 2, que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ tienen el mismo cardinal.

Nota 4. *Como hemos visto en los ejemplos anteriores, existe una biyección f entre el conjunto de todos los enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$, entonces la aplicación $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$ es una biyección entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. También existe una biyección h entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$. Por tanto, $h \circ (f \times f)$ es una biyección entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.*

Usaremos el Axioma de Elección para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1. *Si existe una aplicación $f : X \to Y$ sobreyectiva, entonces $|Y| \leq |X|$.*

Demostración:
Definimos en X la siguiente relación binaria de equivalencia:

$$x \sim y \longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

El conjunto cociente $X\backslash \sim$ es el conjunto de las clases de equivalencia $[a]$, donde $a \in X$. Tomemos un representante de cada clase por el Axioma de Elección formando el conjunto de representantes $A \subseteq X$. Se cumple entonces que $\bigcup_{a\in A} [a] = X$ y $[a] \cap [b] = \emptyset$ con $a, b \in A$, $a \neq b$.

Tengamos ahora en cuenta la aplicación restricción

$$f|_A : A \to Y$$

Por un lado, podemos comprobar que es sobreyectiva. Tomemos un elemento $y \in Y$. Dado que la aplicación f es sobreyectiva $\exists\, x \in X$ tal que $f(x) = y$. Además $\exists\, a \in A$ de manera que $x \in [a]$. Se tiene entonces que $f(x) = f(a) = y$.

Por otro lado, veamos que es inyectiva. Sean dos elementos cualesquiera $a, b \in A$ tales que $a \neq b$. Sabemos que $[a] \cap [b] = \emptyset$ y, por ende, $f(a) \neq f(b)$.

Hemos demostrado pues que la aplicación $f|_A$ es biyectiva y entonces se tiene que $|Y| = |A| \leq |X|$.

$\square$

Definición 3. *Si un conjunto A tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$ diremos que A es* ***numerable****.*

Ejemplo 6.
Teniendo en cuenta los ejemplos anteriores, como

$$|I| = |P| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|,$$

se tiene que I, P, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son numerables, siendo I y P el conjunto de los números impares y pares, respectivamente.

Notemos que la palabra “numerable” es muy descriptiva. Si S es un conjunto numerable, entonces podemos pensar que S tiene un primer elemento (el cual se corresponderá con $1 \in \mathbb{N}$), un segundo elemento (el cual se corresponderá con $2 \in \mathbb{N}$), y así sucesivamente. Por lo tanto, lo podemos escribir de la siguiente manera $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$.

Definición 4. *Un conjunto S es **finito** si es el conjunto vacío o si existe una biyección entre S y un conjunto de la forma $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ para algún entero positivo n, en este caso escribiremos $|S| = n$. Si S no es el vacío y no podemos establecer esta biyección entonces el conjunto se dice que es **infinito**.*

Nota 5. *Los conceptos de "finito" e "infinito" se pueden aproximar mediante otras definiciones. Una de ellas define un conjunto infinito como aquel en el que se puede establecer una aplicación inyectiva con un subconjunto propio. Por ejemplo, se puede establecer una aplicación inyectiva entre el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros y el conjunto P de todos los enteros pares. Por el contrario, no se puede establecer una aplicación inyectiva entre un conjunto finito y un subconjunto estricto de sí mismo. Esta última afirmación equivale a verificar que no se puede establecer una aplicación sobreyectiva entre I_k e I_n cuando $k < n$. Se puede demostrar llegando a una contradicción de la siguiente manera:*

Supongamos que existe una aplicación sobreyectiva $f : I_k \to I_n$, la cual podemos ordenar de tal manera que $f(i) < f(j)$ cuando $i < j$. Pero entonces, podemos asumir que la sucesión $\{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$ no se salta ningún número entero, ya que se trata de una sucesión natural de números enteros positivos empezando por el 1. Por consiguiente, la imagen de f es el subconjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$. Y este es un subconjunto propio de $\{1, 2, \ldots, n\}$, por lo tanto f no puede ser sobreyectiva.

Nota 6. *Una propiedad importante de los números naturales $\mathbb{N}$ es que en cualquier subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ existe un mínimo (Axioma del Buen Orden).*

Proposición 2. *Si S es un conjunto numerable y R es un subconjunto de S, entonces o bien R es finito o bien R es numerable.*

Demostración:
Asumamos que R no es el conjunto vacío.

Sea $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Sea j_1 el mínimo de los números enteros positivos tal que $s_{j_1} \in R$. Sea j_2 el menor entero que sigue a j_1 tal que $s_{j_2} \in R$. Si procediendo de esta manera llegamos hasta el elemento n-ésimo terminando el proceso, deducimos que R es finito y tiene n elementos.

Si este procedimiento no termina, entonces obtenemos una numeración de los elementos de R:

$$1 \longleftrightarrow s_{j_1}$$

$$2 \longleftrightarrow s_{j_2}$$

$$\ldots$$

Todos los elementos de R se enumeran de esta manera, ya que $j_l \geq l$. Con lo cual hemos demostrado que R es numerable. $\square$

Nota 7. *Hemos definido como conjunto numerable a un conjunto que es numerable infinito, es decir, si se puede establecer una aplicación biyectiva entre el conjunto y los naturales* $\mathbb{N}$. *En este trabajo, también se llamará numerable a un conjuntos que sea finito.*

Ejemplo 7.
El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales está formado por elementos de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. De este modo podemos identificar a $\mathbb{Q}$ con el conjunto de los pares de enteros (a, b). Después de eliminar los pares duplicados, como por ejemplo $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, y usando el hecho de que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable, entonces deducimos que el conjunto infinito $\mathbb{Q}$ es numerable.

Teorema 3. *Sean* S_1, S_2 *conjuntos numerables y sea* $S = S_1 \cup S_2$. *Entonces,* S *es numerable.*

Demostración:
Enumeremos los elementos de S_1 y S_2,

$$S_1 = \{s_1^1, s_2^1, \ldots\}$$

$$S_2 = \{s_1^2, s_2^2, \ldots\}$$

Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ entonces la función

$$s_j^k \longmapsto (j, k)$$

es una biyección entre S y un subconjunto de $\{(j, k) : j, k \in \mathbb{N}\}$. Sabemos que el conjunto formado por los pares ordenados de $\mathbb{N}$ es numerable por el *Ejemplo 5*, entonces S también es numerable por la Proposición 2.

Si existieran elementos comunes en S_1 y S_2, por el Axioma de Elección, elegiríamos un representante en S_1 y la función anterior sería biyectiva sobre un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y S sería numerable. $\square$

Nota 8. *Es posible definir la suma, multiplicación y exponenciación de cardinales, aunque las propiedades de la suma son las más parecidas a las de la aritmética ordinaria. Dados dos conjuntos finitos y disjuntos, el número de elementos de su unión es la suma del número de elementos de ambos. En la suma de dos cardinales infinitos se generaliza esta idea: Si A y B son dos conjuntos infinitos disjuntos, se define $|A| + |B| := |A \cup B| = \text{máx}\{|A|, |B|\}$.*

Proposición 3. *Si S y T son ambos conjuntos numerables, entonces también lo es*

$$S \times T = \{(s,t) \,/\, s \in S,\, t \in T\}$$

Demostración:
Dado que S es numerable, existe una biyección f entre S y un subconjunto de $\mathbb{N}$. De igual manera existe una biyección g entre T y un subconjunto de $\mathbb{N}$. Por lo tanto, la función

$$(f \times g)(s,t) = (f(s), g(t))$$

es una biyección entre $S \times T$ y un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Y, como este último es un conjunto numerable, también lo será $S \times T$. $\square$

Nota 9. *Para cualesquiera dos conjuntos S y T infinitos se define $|S| \cdot |T| := |S \times T| = \text{máx}(|S|, |T|)$.*

Corolario 1. *Si $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son todos conjuntos numerables, entonces también lo será el conjunto*

$$S_1 \times S_2 \times \ldots S_k = \{(s_1, \ldots, s_k) \,/\, s_1 \in S_1, \ldots,\, s_k \in S_k\}$$

formado por todas las k-tuplas ordenadas $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ con $s_j \in S_j$.

Demostración:
Escribamos $S_1 \times S_2 \times S_3$ como $(S_1 \times S_2) \times S_3$. Como $S_1 \times S_2$ es numerable por la Proposición 3 y S_3 es numerable por hipótesis, entonces también lo será $(S_1 \times S_2) \times S_3 = S_1 \times S_2 \times S_3$. Prosiguiendo inductivamente podemos observar que cualquier producto finito de conjuntos numerables también es un conjunto numerable. $\square$

Corolario 2. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración:
Supongamos que A_1, $A_2, \ldots$ son todos conjuntos numerables infinitos. Si los elementos de A_j se

pueden enumerar de la forma $\{a_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ y los conjuntos A_j son disjuntos por pares, entonces la correspondencia

$$a_k^j \longleftrightarrow (j,k)$$

es una aplicación biyectiva entre la unión de los conjuntos A_j y el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Lo cual demuestra que el corolario es cierto cuando los conjuntos A_j no tienen elementos en común, por la Proposición 2. Si sí que los hubiera, desecharíamos a los duplicados en la unión. Si algún conjunto A_j es finito la aplicación sería inyectiva, y también se verificaría el teorema. $\square$

Nota 10. *Notemos que* $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \{(x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} / \exists\, F \subseteq \mathbb{N}$ *finito,* $x(n) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus F\}$, *equipotente a un subconjunto de* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}^n$, *es numerable.*

Proposición 4. *Sea S cualquier conjunto infinito. Entonces, S tiene un subconjunto T numerable.*

Demostración:
Sea $t_1 \in S$ un elemento cualquiera. Sea ahora $t_2 \in S$ un elemento cualquiera distinto de t_1. Podríamos continuar con este procedimiento y no acabaría nunca, ya que si terminara S sería finito. Con lo cual, estamos construyendo un conjunto numerable $T \subseteq S$. $\square$

Un resultado muy importante de la teoría de conjuntos es el siguiente teorema, conocido como el Teorema de Cantor.

Teorema 4. ***(Teorema de Cantor)*** *Sea S un conjunto cualquiera. Entonces, el conjunto $\mathcal{P}(S)$ de partes de S, formado por todos los subconjuntos de S, tiene una cardinalidad mayor que la de S. Es decir,*

$$|S| < |\mathcal{P}(S)|.$$

Demostración:
Primeramente consideramos la función inyectiva

$$f : S \to \mathcal{P}(S)$$

$$s \mapsto \{s\}$$

Por tanto $|S| \leq |\mathcal{P}(S)|$. Veamos ahora que ninguna función $g : S \to \mathcal{P}(S)$ es sobreyectiva. Bastará con encontrar un subconjunto de S que no sea imagen por g de ningún elemento de S.

Definamos $T = \{s \in S : s \notin g(s)\}$. Asumamos, buscando una contradicción, que $T = g(z)$ para algún $z \in S$. Por la definición de T, el elemento $z \in T$ si y solo si $z \notin g(z) = T$, lo cual es evidentemente una contradicción. Como hemos demostrado g no puede ser sobreyectiva, por tanto $|S| < |\mathcal{P}(S)|$. $\square$

Mostremos a continuación una serie de ejemplos que nos permitirán concluir que $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1]| = |\mathbb{R}|$.

Ejemplo 8.
Veamos que los intervalos $]-1,1[$ y $[0,1]$ son equipotentes. Para ello definimos las funciones

$$\begin{array}{rcl} f :]-1,1[& \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{2} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \rightarrow &]-1,1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array}$$

Ambas funciones son inyectivas. Entonces, por el Teorema 2, $|]-1,1[| = |[0,1]|$.

Ejemplo 9.
El intervalo $]-1,1[$ es equipotente al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Claramente la función

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow &]-1,1[\\ x & \mapsto & \operatorname{arc\,tg}(x) \end{array}$$

es biyectiva.

Ejemplo 10.
El conjunto $\mathcal{P}(X)$ es equipotente a $\{0,1\}^X := \{g : X \rightarrow \{0,1\} \,/\, g \text{ es aplicación}\}$. En efecto, consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \{0,1\}^X \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_A \end{array}$$

donde $\mathcal{X}_A : X \rightarrow \{0,1\}$ es la función característica definida por

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1\,, \text{ si } x \in A \\ 0\,, \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

La aplicación f es biyectiva.

Proposición 5. *Los conjuntos* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *y* $[0,1]$ *tienen el mismo cardinal.*

Demostración:
Comencemos probando que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \geq |[0,1]|$.

Sea la siguiente función, la cual se podría definir como la representación en binario de un determinado número comprendido en el intervalo $[0,1]$.

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$$

$$\bar{x} = (\bar{x}(n))_{n=1}^{\infty} \mapsto f(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}(n)}{2^n}$$

Veamos primero que f está bien definida.

- Si $\bar{x}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(\bar{x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{0}{2^n} = 0$
- Si $\bar{x}(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(\bar{x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$
- Si $\bar{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \Rightarrow 0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{0}{2^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}(n)}{2^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, es decir $0 \leq f(\bar{x}) \leq 1$ y, por tanto, f está acotada en $[0,1]$.

Demostremos ahora que f es sobreyectiva. Sea $y \in [0,1]$ arbitrario, distingamos dos casos:

1) Si $y = 1$, tomamos la sucesión $\bar{x} = (\bar{x}(n))_{n=1}^{\infty} \ / \ \bar{x}(n) = 1 \ \forall n \geq 1$. Entonces, su imagen por f será $f(\bar{x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 = y$.

2) Si $y \neq 1$, busquemos su antiimagen $\bar{x}$ por inducción.

   - $n = 1$.
     Conocemos que $y \in [0,1[= [0, \frac{1}{2}[\bigcup [\frac{1}{2}, 1[$. Distingamos pues ambos casos:
     - Si $y \in [0, \frac{1}{2}[$, definimos $\bar{x}(1) = 0$.
     - Si $y \in [\frac{1}{2}, 1[$, definimos $\bar{x}(1) = 1$.

     Observemos que independientemente de en qué intervalo se encuentre y, podemos escribir $y \in \left[\frac{\bar{x}(1)}{2}, \frac{\bar{x}(1)}{2} + \frac{1}{2}\right[$.

- Supongamos que tenemos definidos $\bar{x}(1), \bar{x}(2), \ldots, \bar{x}(n)$ de manera que $y \in \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i}, \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right[$.

- Definamos $\bar{x}(n+1)$.
$y \in \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i}, \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right[= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}\right[}_{I_1} \cup \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right[}_{I_2}$,

  con lo que de nuevo distinguimos dos casos:

  - Si $y \in I_1$, definimos $\bar{x}(n+1) = 0$.

  - Si $y \in I_2$, definimos $\bar{x}(n+1) = 1$.

  Una vez más, podemos escribir $y \in \left[\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{\bar{x}(i)}{2^i}, \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}\right[$.

Tenemos así definida la sucesión $\bar{x} = (\bar{x}(n))_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $y \in \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i}, \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right[$.

Comprobemos ahora que $\exists\, n_0$ tal que $\bar{x}(n_0) = 0$. En caso contrario $x(n) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y entonces $y \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tomando límites cuando n tiende a infinito, tenemos que $y \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$, con lo cual llegamos a una contradicción.

Veamos finalmente que $y = f(\bar{x})$. Como $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} \leq y < \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} + \frac{1}{2^n}$, volvemos a tomar límites obteniendo que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} \leq y \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{x}(i)}{2^i}$. De lo cual deducimos que

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{x}(i)}{2^i} = f(\bar{x}).$$

Hemos demostrado que la función f es sobreyectiva y por la Proposición 1 se sigue que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \geq |[0,1]|$.

Veamos a continuación que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |[0,1]|$. Llamemos $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y consideremos el conjunto de los números periódicos (puros o mixtos) pertenecientes a X,

$$Y = \{\bar{x} = (\bar{x}(n))_{n=1}^{\infty} \in X : \exists\, n_{\bar{x}} \,/\, \forall n \geq n_{\bar{x}}, \quad \bar{x}(n) = \bar{x}(n_{\bar{x}})\}.$$

Veamos que Y es numerable escribiéndolo como unión numerable de conjuntos numerables. Para ello definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos finitos

$$Y_{k,0} = \{(x(1), x(2), \ldots, x(k-1), 0, 0, \ldots) \,/\, x(j) \in \mathbb{Z},\, 1 \leq j < k\}$$
$$Y_{k,1} = \{(x(1), x(2), \ldots, x(k-1), 1, 1, \ldots) \,/\, x(j) \in \mathbb{Z},\, 1 \leq j < k\}$$

Claramente $|Y_{k,0}| = |Y_{k,1}| = V_{2,k-1} = 2^{k-1}$. La unión $Y_k = Y_{k,0} \cup Y_{k,1}$ sigue siendo un conjunto finito de cardinal $|Y_k| = 2^k$. Por tanto $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$ es numerable por el Teorema 3.

Ya podemos definir una función inyectiva de un subconjunto de X en el intervalo $[0,1]$

$$f : X \setminus Y \longrightarrow [0,1]$$
$$\{\bar{x}(n)\}_{n=1} \mapsto 0'\bar{x}(1)\bar{x}(2)\ldots$$

Por la Definición 2, $|X \setminus Y| \leq |[0,1]|$. Con todos los resultados obtenidos tenemos que

$$|X| = |X \setminus Y| + |Y| = \text{máx}(|X \setminus Y|, |Y|) \leq \text{máx}(|[0,1]|, |Y|) = |[0,1]|,$$

es decir,

$$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |[0,1]|.$$

$\square$

Corolario 3. *Se tiene que* $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Demostración:
Conocemos que $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ por el Teorema de Cantor (Teorema 4) y que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ y $|\mathbb{R}| = |[0,1]|$ por los ejemplos anteriores. Aplicamos ahora la Proposición 5, concluyendo por tanto que

$$|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|.$$

$\square$

Nota 11. *Como hemos visto a lo largo de la sección, los números naturales $\mathbb{N}$ tienen una cardinalidad a la cual denotamos como "numerable" distinta a la de los números reales $\mathbb{R}$ que tienen una cardinalidad a la cual denotaremos como "no numerable". De hecho, los números reales forman un conjunto más grande porque hay una aplicación inyectiva de los números naturales en los reales, pero no al revés. Nos referiremos a la cardinalidad de los números naturales como "numerable", y la denotaremos por $\aleph_0$, y a la cardinalidad de los números reales como "cardinal del continuo", y la denotaremos por $\mathfrak{c}$.*

Es natural plantearse la cuestión de si existe un cardinal estrictamente comprendido entre $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ y $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. G. Cantor se planteó esta pregunta hace cien años, y sus intentos fallidos de resolverla le atormentaron durante sus últimos años.

Nota 12. *Para dos conjuntos cualesquiera A, B infinitos, se define $|A|^{|B|} := |A^B|$, siendo $A^B = \{f : B \to A : f \text{ es una aplicación}\}$. Se puede demostrar que $2^{\aleph_0} = |F|^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, siendo F un conjunto finito. Más todavía, si $|A| \geq \aleph_0$, $2^{|A|} = |F|^{|A|} = \aleph_0^{|A|}$. Notemos que si $f : C \to A^B$ es una aplicación biyectiva entonces también lo es $g : B \times C \to A$ tal que $g(b, c) = f(c)(b)$.*

2.3. Redes y continuidad

Definición 5. *Una relación reflexiva y transitiva $\leq$ en un conjunto D se dice que es una dirección si para cualesquiera $d_1, d_1 \in D$ existe $d_3 \in D$ tal que $d_1 \leq d_3$ y $d_2 \leq d_3$. El par $(D, \leq)$ se llama **conjunto dirigido**.*

Nota 13. *Frecuentemente, una dirección es, además, antisimétrica. En tal caso tenemos un orden parcial.*

Ejemplo 1.
Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Sea $\mathcal{B}_x$ una base local en x. Entonces, $(\mathcal{B}_x, \supseteq)$ es un conjunto dirigido, pues $\supseteq$ es un orden parcial en $\mathcal{B}_x$ ya que si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}_x$, entones existe $\mathcal{B}_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$; es decir, $\mathcal{B}_3$ es mayor que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en el orden $\supseteq$.

Definición 6. *Una **red** en un conjunto X es una aplicación $f : (D, \leq) \to X$, en donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido.*

Con frecuencia, una red $f : D \to X$ se denota con $\{f(d)\}_{d\in D}$ y se lee simplemente “una red $\{f(d)\}_{d\in D}$”; aún más simple, si para $d \in D$, $f(d) = x_d \in X$ se escribe $\{x_d\}_{d\in D}$ y se lee “la red $\{x_d\}_{d\in D}$.

Por supuesto, el conjunto de enteros positivos $\mathbb{N}$ con el orden usual es, como cualquier otro conjunto totalmente ordenado, un conjunto dirigido. Entonces, una sucesión donde el conjunto dirigido es $\mathbb{N}$ es un tipo especial de red.

Definición 7. *Si $f : (D, \leq) \to X$ es una red en X definida por $f(d) = x_d$, entonces se dice que $\{x_d\}_{d\in D}$ está* ***eventualmente*** *en un conjunto $U \subseteq X$ si existe $d_U \in D$ tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_U$. La red $\{x_d\}_{d\in D}$* ***converge*** *a $x \in X$, y se denota como $\{x_d\}_{d\in D} \to x$, si está eventualmente en cada entorno de x, es decir, si para cada U entorno de x existe $d_U \in D$ tal que $x_d \in U$ para cada $d \geq d_U$. El conjunto $\{x_d \,/\, d \geq d_U\}$ se llama la* ***cola*** *de la red f determinado por d_U. Si $\{x_d\}_{d\in D} \to x$, entonces x se llama* ***límite*** *de la red f.*

Un concepto más general que el de límite de una red es el concepto de punto de acumulación de la red.

Definición 8. *Sea $f : (D, \leq) \to X$ la red en X definida por $f(d) = x_d$.*

1. *La red $\{x_d\}_{d\in D}$ está* ***frecuentemente*** *en un conjunto A si para cada $d_0 \in D$, existe $d \geq d_0$ tal que $x_d \in A$.*
2. *Un punto $x \in X$ es un* ***punto de acumulación*** *de una red si $\{x_d\}_{d\in D}$ está frecuentemente en U, para cada U entorno de x.*

Notemos que un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de una red f si cada cola de la red f tiene intersección no vacía con cada entorno de x, y claramente esto ocurre si y solo si x está en la clausura de cada cola de la red f.

Lema 1. *Si $\mathcal{B}$ es una base de entornos de $x \in X$ y para cada $B \in \mathcal{B}$ se escoge $x_B \in B$. Como $(\mathcal{B}, \supseteq)$ es un conjunto dirigido, entonces $\{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ converge a x.*

Demostración:
Sea U un entorno de x. Entonces, existe $B_U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_U \subseteq U$. Por lo tanto, si $B \in \mathcal{B}$ y $B \subseteq B_U$, se sigue que $x_B \in B \subseteq B_U \subseteq U$. Así, $\{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ converge a x. $\square$

Teorema 5. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si hay una red $\{x_d\}_{d\in D}$ en A que converge a x (siendo $\overline{A}$ la clausura de A).*

Demostración:
Condición necesaria: Supongamos que $x \in \overline{A}$ y sea $\mathcal{B}$ una base de entornos en x. Si $B \in \mathcal{B}$, entonces $B \cap A \neq \emptyset$. Luego, por el Axioma de Elección, se puede escoger $x_B \in A \cap B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. La red $\{x_B\}_{B\in(\mathcal{B},\supseteq)}$ está contenida en A y, por el Lema 1, converge a x.

Condición suficiente: Inversamente, supongamos que $x \notin \overline{A}$. Entonces $X \setminus \overline{A}$ es un entorno abierto de x. Por tanto, una red en A no está eventualmente en todo entorno de x, con lo que no puede converger a x . $\square$

Nota 14. *Si X es un espacio métrico, entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si hay una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a x.*

Nota 15. *Sabemos que las funciones entre espacios métricos son continuas si y solo si preservan la convergencia de sucesiones (en este caso se dice que la función es sucesionalmente continua). No obstante, esto es falso cuando se trata de espacios topológicos en general. Para determinar la continuidad de estos espacios podemos utilizar las redes, como veremos en el siguiente teorema.*

Teorema 6. *Una función $h : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es continua en $x \in X$ si y solo si cada vez que una red $\{x_d\}_{d\in D}$ converja a x, la red $\{h(x_d)\}_{d\in D}$ converge a $h(x)$.*

Demostración:
Condición necesaria: Sea V un entorno de $h(x)$. Como h es continua, $h^{-1}(V)$ es un entorno de x, y como $\{x_d\}_{d\in D}$ converge a x, existe $d_0 \in D$ tal que $x_d \in h^{-1}(V)$ y $h(x_d) \in h(h^{-1}(V)) \subseteq V$ para todo $d \geq d_0$; es decir, $\{h(x_d)\}_{d\in D}$ converge a $h(x)$.

Condición suficiente: Supongamos ahora que h no es continua en x. Entonces, existe algún entorno V de $h(x)$ tal que, para cualquier entorno U de x, $h^{-1}(V) \not\supseteq U$, es decir, $U \setminus h^{-1}(V) \neq \emptyset$. Por el Axioma de Elección, tomemos $x_U \in U \setminus h^{-1}(V)$ para cada entorno de U de x. Y, por el Lema 1, si denotamos por $\mathcal{V}_x$ la colección de todos los entornos de x, resulta que la red $\{x_U\}_{U\in(\mathcal{V}_x,\supseteq)}$ converge a x. No obstante, la red $\{h(x_U)\}_{U\in\mathcal{V}_x}$ no converge a $h(x)$ porque no está eventualmente en el entorno V. $\square$

2.4. Filtros y ultrafiltros

Las redes nos permiten describir las nociones de convergencia, clausura y continuidad. Otro concepto para este mismo propósito es el de filtro.

Definición 9. *Sea X un conjunto no vacío. Un **filtro** en X es una familia no vacía $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. *Si* F, $G \in \mathcal{F}$ *entonces* $F \cap G \in \mathcal{F}$.
3. *Si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $F \subseteq G$ *entonces* $G \in \mathcal{F}$. *(Como consecuencia* $X \in \mathcal{F}$*)*

Ejemplo 1.
Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Veamos que $\mathcal{F} = \{V \,/\, V \text{ entorno de } x\}$ es un filtro en X.

Por definición V es entorno de x si $\exists\, A$ abierto tal que $x \in A \subseteq V$. Observemos además que $X \in \mathcal{F}$ y si $F \in \mathcal{F}$ entonces $x \in F$. Por tanto, vemos que se cumplen:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $\exists A_1$, A_2 abiertos de X / $x \in A_1, x \in A_2$. Por tanto $x \in A_1 \cap A_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. Y como $A_1 \cap A_2$ es abierto entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq G$, entonces $\exists A$ abierto de X / $x \in A \subseteq F \subseteq G$. Luego G es un entorno de x y $G \in \mathcal{F}$.

Definición 10. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ se llama **base de filtro** si $\forall\, B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}\ \exists\, B_3 \subseteq \mathcal{B} \,/\, B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. La familia $\mathcal{F} = \{A \subseteq X / \exists\, B \in \mathcal{B}, B \subseteq A\}$ es un filtro de X llamado filtro generado por $\mathcal{B}$.*

Observemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ y, por tanto, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Efectivamente se satisface:

1. $\emptyset \notin \mathcal{B}$, lo que implica que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (por definición de $\mathcal{F}$).

2. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $\exists B_1,\, B_2 \in \mathcal{B} \;/\; B_1 \subseteq F_1,\, B_2 \subseteq F_2$. Y, por definición de $\mathcal{B}$, $\exists B_3 \in \mathcal{B} \;/\; B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Por tanto, $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. Finalmente, por definición de $\mathcal{F}$, tenemos que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

3. Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq G$, entonces $\exists B \in \mathcal{B} \,/\, B \subseteq F \subseteq G$. Por tanto $G \in \mathcal{F}$.

Nota 16. *Una base de filtro genera un único filtro aunque pueda estar contenida en muchos filtros.*

Ejemplo 2.
Sea $\{x_i\}_{i\in D}$ una red en X. Para cada $d \in D$ denotemos por $B_d = \{x_i/i \geq d\}$ la correspondiente cola de la red. Si B_{d_1} y B_{d_2} son dos colas de la red, como D es un conjunto dirigido, $\exists\, d_3 \geq d_1,\, d_2$, y entonces $B_{d_3} \subseteq B_{d_1} \cap B_{d_2}$. Por tanto $\mathcal{B} = \{B_d \,/\, d \in D\}$ es una base de filtro. El filtro $\mathcal{F}$ generado por $\mathcal{B}$ también se llama filtro generado por la red.

Ejemplo 3.
Sea $B_n = [n, \infty[\subseteq \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$. La familia de estos intervalos $\mathcal{B} = \{B_n/n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtros numerable. El filtro $\mathcal{F}$ generado por $\mathcal{B}$ es no numerable y no se puede dar una descripción de $\mathcal{F}$ sin usar $\mathcal{B}$.

Notemos en este ejemplo que la intersección $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. En efecto, si $\exists x \in B_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in [1, \infty[$, entonces $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n_0 \leq x < n_0 + 1$. Por tanto $x \in B_{n_0}$, pero como $x \notin B_{n_0+1}$ hemos llegado a una contradicción. $\square$

Definición 11. *Un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$ se llama **filtro libre** o no principal. Si por el contrario $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F}$ se llama **filtro principal** o fijo.*

*Un filtro $\mathcal{F}$ se dice que es un **ultrafiltro** si es un filtro maximal, es decir, si siempre que $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es un filtro, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.*

Ejemplo 4.
Sea $x \in X$. Veamos que $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X/x \in A\}$ es un ultrafiltro principal.

Notemos que $x \in A$, $\forall A \in \mathcal{F}_x$. Por tanto, $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ y $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$. Se cumple:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$.

2. $A, B \in \mathcal{F}_x \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}_x$.

3. $A \in \mathcal{F}_x$, $A \subseteq B \Rightarrow x \in A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}_x$.

4. $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}_x \Rightarrow \mathcal{F}_x$ es un filtro principal.

5. $\mathcal{F}_x$ es un ultrafiltro. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un filtro / $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{G}$ pero $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{G}$. Entonces, $\exists A \in \mathcal{G}$, $A \notin \mathcal{F}_x \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in X \setminus A \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{G}$. Entonces $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}$. $\square$

Definición 12. *Consideremos los conjuntos $B_n = \{m \in \mathbb{N}/m \geq n\} = [n, \infty[\cap \mathbb{N}$, donde $n \in \mathbb{N}$, y la base de filtro $\mathcal{B} = \{B_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. El filtro generado por $\mathcal{B}$ se llama **filtro de Fréchet**. Denotémoslo como $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{F \subseteq \mathbb{N} \,/\, \exists B_n \in \mathcal{B},\ B_n \subseteq F\}$.*

Nota 17. *Notemos que el filtro de Fréchet es libre, por tanto todo filtro que lo contenga también es libre.*

Teorema 7. *Todo filtro libre en $\mathbb{N}$ contiene al filtro de Fréchet $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.*

Demostración:
Sea $\mathcal{G}$ es un filtro libre en $\mathbb{N}$. Tendremos demostrado el teorema comprobando que $\mathcal{G}$ contiene todos elementos B_n que generan a $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Procedamos por reducción al absurdo.

Supongamos que $\exists\, B_{n_0} \notin \mathcal{G}$, entonces $B_{n_0} \neq G \ \ \forall G \in \mathcal{G}$. Por la Definición 9, sabemos que $\forall\, G \in \mathcal{G}$ se tiene que $G \nsubseteq B_{n_0} = [n_0, \infty[\cap \mathbb{N}$. Por tanto, $\exists\, n_G \in G \,/\, n_G \notin B_{n_0}$. Podemos escribir G de la siguiente manera

$$G = I_G \cup J_G \text{ con } n_G \in I_G \subseteq \{1, \ldots, n_0 - 1\} \text{ y } J_G \subseteq B_{n_0}.$$

Tenemos pues el conjunto finito $\{I_G \,/\, G \in \mathcal{G}\} = \{I_{G_1}, \ldots, I_{G_k}\}$. Además $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{k} G_i \in \mathcal{G}$ por ser $\mathcal{G}$ un filtro.

Supongamos que $\bigcap_{i=1}^{k} I_{G_i} = \emptyset$. Con esta notación,

$$\bigcap_{i=1}^{k} G_i = \bigcap_{i=1}^{k} (I_{G_i} \cup J_{G_i}) = (\bigcap_{i=1}^{k} I_{G_i}) \cup (\bigcap_{i=1}^{k} J_{G_i}) = \bigcap_{i=1}^{k} J_{G_i} \subseteq B_{n_0}.$$

De nuevo por la definición de filtro concluimos que $B_{n_0} \in \mathcal{G}$, con lo que hemos llegado a una contradicción y podemos afirmar que nuestra suposición es falsa, por ende $\bigcap\limits_{i=1}^{k} I_{G_i} \neq \emptyset$.

Entonces tendremos que

$$\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G = \bigcap_{G\in\mathcal{G}} (I_G \cup J_G) \supseteq \bigcap_{G\in\mathcal{G}} I_G = \bigcap_{i=1}^{k} I_{G_i} \neq \emptyset,$$

lo cual se contradice con la hipótesis de $\mathcal{G}$ es un filtro libre (Definición 11). Por lo tanto, $B_n \in \mathcal{G}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, para ver que $\mathcal{F}_\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ tomemos $F \in \mathcal{F}_\mathcal{B}$. Entonces $\exists\, B_n \subseteq F$. Y por la Definición 9 de filtro, tenemos que $F \in \mathcal{G}$. □

Teorema 8. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X entones existe un ultrafiltro $\mathcal{M}$ en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$.*

Demostración:
Sea $\mathcal{B} = \{\mathcal{G}$ filtro en X / $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$ ordenado por la inclusión $\subseteq$ de conjuntos. Veamos que toda cadena de $(\mathcal{B}, \subseteq)$ tiene una cota superior.

Sea $\{\mathcal{G}_i \,/\, i \in I\}$ una cadena en $\mathcal{B}$, es decir, que $\forall \mathcal{G}_{i_1}$, $\mathcal{G}_{i_2}$ pertenecientes a la cadena o bien $\mathcal{G}_{i_1} \subseteq \mathcal{G}_{i_2}$ o bien $\mathcal{G}_{i_2} \subseteq \mathcal{G}_{i_1}$. Consideremos la unión de de los elementos de la cadena $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{G}_i$, que claramente contiene a $\mathcal{F}$. Para ver que está en $\mathcal{B}$ (entonces será una cota superior de la cadena de $\mathcal{B}$) falta comprobar que $\mathcal{G}$ es un filtro:

1. $\emptyset \notin \mathcal{G}$ porque $\emptyset \notin \mathcal{G}_i \ \ \forall i \in I$.
2. A, $B \in \mathcal{G}$ implica que $A \in \mathcal{G}_{i_1}, B \in \mathcal{G}_{i_2}$, para ciertos índices i_1, i_2. Como $\mathcal{G}_{i_1}$ y $\mathcal{G}_{i_2}$ son elementos de una cadena, sabemos que o bien $\mathcal{G}_{i_2} \subseteq \mathcal{G}_{i_1}$ y por tanto A, $B \in \mathcal{G}_{i_1}$, o bien $\mathcal{G}_{i_1} \subseteq \mathcal{G}_{i_2}$ y por tanto A, $B \in \mathcal{G}_{i_2}$. De lo cual deducimos que $A \cap B \in \mathcal{G}_{i_1} \subseteq \mathcal{G}$ o que $A \cap B \in \mathcal{G}_{i_2} \subseteq \mathcal{G}$, respectivamente, es decir, $A \cap B \in \mathcal{G}$.
3. $A \in \mathcal{G}$ y $A \subseteq B$ implican que $A \in \mathcal{G}_{i_0}$, para cierto i_0. Por tanto, como $\mathcal{G}_{i_0}$ es un filtro, se tiene que $B \in \mathcal{G}_{i_0} \subseteq \mathcal{G}$.

Finalmente, aplicando el Lema de Zorn, se tiene que $\mathcal{B}$ contiene un elemento maximal $\mathcal{M}$ y por tanto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$. □

Corolario 4. *Existen ultrafiltros libres en* $\mathbb{N}$.

Demostración:
Por la Nota 17 el filtro de Fréchet y todo filtro que lo contiene son libres. $\square$

Teorema 9. *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro en* X. *Se tiene entonces que*

$$\mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro} \iff \forall A \subseteq X \text{ o bien } A \in \mathcal{F} \text{ o bien } X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

Demostración:
Condición necesaria: Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists A \subseteq X,\ A \neq \emptyset \,/\, A \notin \mathcal{F}$ y $X \setminus A \notin \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{B} = \{F \cap A / F \in \mathcal{F}\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base de filtro.

- $\emptyset \notin \mathcal{B}$ porque en caso contrario $\exists F \in \mathcal{F} \,/\, \emptyset = F \cap A \Rightarrow F \subseteq X \setminus A$ y $X \setminus A \in \mathcal{F}$, con lo cual llegamos a una contradicción.
- Sean $F_1 \cap A,\ F_2 \cap A \in \mathcal{B}$ con $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Como $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, entones $(F_1 \cap A) \cap (F_2 \cap A) = (F_1 \cap F_2) \cap A \in \mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{G}$ el filtro generado por $\mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$. Para ello tomemos $F \in \mathcal{F}$. Entonces, $F \cap A \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Por lo tanto, tenemos que por un lado $F \cap A \subseteq F$ y, como $\mathcal{G}$ es un filtro, se sigue que $F \in \mathcal{G}$ y entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Y como $\mathcal{F}$ es maximal, se cumple que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Por otro lado, tenemos que $F \cap A \subseteq A$ y, como $\mathcal{G}$ es un filtro, se sigue que $A \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$, con lo cual llegamos a una contradicción.

Condición suficiente: Sea $\mathcal{G}$ un filtro tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Entonces, $\exists A \in \mathcal{G} \,/\, A \notin \mathcal{F}$. Además, sabemos por hipótesis que $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Por lo tanto, llegamos a que $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 5. *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro en* X. *Se cumple que*

$$\mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro } \iff \forall\, A,\, B \subseteq X \,/\, A \cup B \in \mathcal{F} \text{ entonces o bien } A \in \mathcal{F} \text{ o bien } B \in \mathcal{F}.$$

Demostración:
Condición necesaria: Sean $A,\ B \subseteq X$ tal que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Supongamos por reducción al absurdo

que $A \notin \mathcal{F}$ y $B \notin \mathcal{F}$. Entonces, por el Teorema 9 anterior, $X \setminus A \in \mathcal{F}$ y $X \setminus B \in \mathcal{F}$. Y, como $\mathcal{F}$ es un filtro, $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) \in \mathcal{F}$. Pero $A \cup B \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro, con lo cual $\emptyset = (A \cup B) \cap (X \setminus (A \cup B)) \in \mathcal{F}$ y llegamos a una contradicción.

Condición suficiente: Supongamos que existe un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Entonces, $\exists A \in \mathcal{G} \,/\, A \notin \mathcal{F}$, lo que implica que $A \subseteq X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{G}$. Por hipótesis, $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, pero $\mathcal{G}$ es un filtro, con lo cual $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$, y tenemos una contradicción. $\square$

Definición 13. *Sea X un espacio topológico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0 a través de $\mathcal{F}$, y se escribe $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{F}}} x_n = x_0$, si $\forall U$ entorno de x_0 $\exists F \in \mathcal{F} \,/\, x_n \in U\ \forall n \in F$.*

Definición 14. *Un espacio topológico (X, τ) es de **Hausdorff** (o T_2) si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen U, $V \in \tau$ tales que $U \cap V = \emptyset$ con $x \in U$ e $y \in V$.*

Teorema 10. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$ entonces cada sucesión en X converge a través de $\mathcal{F}$ a un límite único.*

Demostración:
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Tomemos $F \in \mathcal{F}$, por tanto $F \neq \emptyset$. Definimos $X_F = \{x_n \,/\, n \in F\} \neq \emptyset$. Denotemos por $\overline{X_F}$ su clausura en X.

Veamos que la familia $\{\overline{X_F} \,/\, F \in \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Será suficiente con demostrarlo para 2 elementos, ya que lo podremos generalizar.

Sean $\overline{X_{F_1}}, \overline{X_{F_2}} \in \{\overline{X_F} \,/\, F \in \mathcal{F}\}$ con $F_1 \neq F_2$. Por la Definición 9 de filtro, sabemos que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Denotemos por F a esta intersección. Veamos primero que $X_F = X_{F_1} \cap X_{F_2}$.

- $X_F \subseteq X_{F_1} \cap X_{F_2}$.

  Sea $x_n \in X_F$, entonces $n \in F = F_1 \cap F_2$. Esto implica que $n \in F_1$ y $n \in F_2$, y por tanto $x_n \in X_{F_1}$ y $x_n \in X_{F_2}$, es decir, $x_n \in X_{F_1} \cap X_{F_2}$.

- $X_{F_1} \cap X_{F_2} \subseteq X_F$.

  Sea $x_n \in X_{F_1} \cap X_{F_2}$, es decir, $x_n \in X_{F_1}$ y $x_n \in X_{F_2}$. Por tanto $n \in F_1$ y $n \in F_2$, lo que implica que $x_n \in X_{F_1 \cap F_2} = X_F$.

Tomando clausuras tenemos que $\overline{X_F} = \overline{X_{F_1} \cap X_{F_2}} \subseteq \overline{X_{F_1}} \cap \overline{X_{F_2}}$, y entonces $\overline{X_{F_1}} \cap \overline{X_{F_2}} \neq \emptyset$.

Como X es compacto se cumplirá que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{X_F} \neq \emptyset$. Probémoslo por reducción al absurdo. Supongamos pues que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{X_F} = \emptyset$. Calculamos su complementario,

$$X = X \setminus \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{X_F} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} (X \setminus \overline{X_F}).$$

Entonces, como X es compacto, $\exists F_1, \ldots, F_r \in \mathcal{F} \,/\, X = \bigcup\limits_{i=1}^{r} (X \setminus \overline{X_{F_i}})$. Tomando de nuevo complementarios llegamos a que $\emptyset = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{r} (X \setminus \overline{X_{F_i}}) = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \overline{X_{F_i}}$, lo cual es una contradicción.

Tenemos demostrado ya que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{X_F} \neq \emptyset$. Veamos que su cardinal es 1.

Supongamos ahora que $\exists\, a, b \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{X_F}$, $a \neq b$. Como X es un espacio de Hausdorff entonces $\exists\, U_a$, U_b entornos abiertos de a y b respectivamente tales que $U_a \cap U_b = \emptyset$.

Llamamos $A_1 = \{n \in \mathbb{N} / x_n \in U_a\}$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, por el Teorema 9 sabemos que o bien $A_1 \in \mathcal{F}$ o bien $\mathbb{N} \setminus A_1 \in \mathcal{F}$. Denotemos $F_1 = \mathbb{N} \setminus A_1$. Si $F_1 \in \mathcal{F}$ entonces $X_{F_1} = \{x_n \,/\, n \in F_1\} \subseteq X \setminus U_a$. Como $a \notin X \setminus U_a$ y $\overline{X_{F_1}} \subseteq X \setminus U_a$ entonces $a \notin \overline{X_{F_1}}$, lo cual es una contradicción ya que $a \in \bigcap\limits_{\in\mathcal{F}} \overline{X_F}$. Necesariamente $A_1 \in \mathcal{F}$. Análogamente se demuestra que $A_2 \in \mathcal{F}$.

Por la Definición 9 de filtro, sabemos que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$. Pero $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, lo cual es imposible. Por consiguiente, $|\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{X_F}| = 1$, es decir, $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{X_F} = \{x_0\}$.

Sea U un entorno de x_0. Por lo tanto existe un abierto W tal que $x_0 \in W \subseteq U$. Consideremos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in W\}$. Razonando como antes se llega a que $A \in \mathcal{F}$. De esta manera $x_n \in W \subseteq U$ $\forall n \in A$ y entonces, por la Definición 13, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{F}}} x_n = x_0$. Veamos que es único.

Supongamos que $\exists\, y_0 \in X$ tal que $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{F}}} x_n = y_0$, siendo $y_0 \neq x_0$. Como X es de Hausdorff, $\exists\, U_{x_0}$, U_{y_0} entornos de x_0 e y_0, respectivamente, tales que $U_{x_0} \cap U_{y_0} = \emptyset$. Aplicando la Definición 13 a y_0 tenemos que $\exists\, F_{y_0} \in \mathcal{F}$ de manera que $x_n \in U_{y_0}$, $\forall n \in F_{y_0}$. Además, $X_{F_{y_0}} \subseteq U_{y_0} \subseteq X \setminus U_{x_0}$. Tomando clausuras en X, llegamos a que $\overline{X_{F_{y_0}}} \subseteq X \setminus U_{x_0}$. Por tanto $x_0 \notin \overline{X_{F_{y_0}}}$, lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 3

El grupo de Baer-Specker

El *grupo de Baer-Specker* es el grupo abeliano de aplicaciones

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \,/\, x \text{ es aplicación}\} \equiv \{(x(n))_{n\in\mathbb{N}} / \, x(n) \in \mathbb{Z}\}$$

con la operación suma componente a componente. Notemos que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico completo cuya métrica está definida por la distancia

$$\delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{mín}\{\|x(n) - y(n)\|, 1\}}{2^n}, \quad \forall\, x = (x(n)),\ y = (y(n)) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},$$

y que define la topología producto. (Aquí $\|\ \|$ denota el valor absoluto para distinguirlo del cardinal de un conjunto.) El subgrupo suma directa se denota por

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \{(x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} / \, x(n) = 0, \text{ salvo una cantidad finita de índices}\}.$$

y se considerará equipado con la topología que hereda del producto $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

3.1. Teoremas de Specker

Los resultados de esta sección son puramente algebraicos.

Definición 15. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Llamaremos delta de Kronecker a una función de la forma $\delta_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tal que*

$$\delta_n(k) = \begin{cases} 0\,, & si\ \ k \neq n \\ 1\,, & si\ \ k = n \end{cases}$$

El conjunto $\{\delta_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema linealmente independiente pero no es un sistema generador de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, como demostraremos más adelante.

El siguiente teorema es esencial en los resultados que desarrollamos a lo largo del capítulo.

Teorema 11. ***(Primer Teorema de Specker)*** *Sea $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$ un homomorfismo de grupos, entonces $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h(\delta_n) = 0,\ \forall\, n \geq n_0$.*

Demostración:
La prueba del teorema es un poco técnica. Empecemos considerando la aplicación $y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$y(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ h(\delta_k) = 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \\ \text{máx}\{|h(\delta_k)| \,/\, 1 \leq k \leq n\}, & \text{si } \ \exists\, h(\delta_k) \neq 0, \ \ k \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Notemos que $1 \leq y(n) \leq y(m)$, cuando $n < m$.

Definamos ahora la aplicación $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de forma inductiva como sigue:

$$
\begin{aligned}
&x(1) = y(1)\\
&x(2) = 2x(1)y(2)x(1)\\
&x(3) = 2x(2)y(3)(x(1) + x(2))\\
&\ldots\\
&x(n) = 2x(n-1)y(n)(\sum_{i=1}^{n-1} x(i))\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Notemos que esta aplicación verifica:

i) $1 \leq x(n) < 2^k x(n+k)$, con $k \geq 1$;

ii) $x(i)$ es un múltiplo de $x(n)$, cuando $i \geq n$.

Por consiguiente, podemos expresar x de la forma

$$x = (x(1), x(2), \ldots) = \sum_{i=1}^{n-1} x(i)\delta_i + (0, \ldots, 0, x(n), \ldots) = \sum_{i=1}^{n-1} x(i)\delta_i + x(n) \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, v(n+1), \ldots)}_{w_n}$$

ya que por la propiedad *ii)*, $x(n+k) = x(n)v(n+k)$, para $k \geq 1$.

Así pues, la imagen por el homomorfismo h de x será

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x(i)h(\delta_i) + x(n)h(w_n), \quad \forall\, n \geq 2.$$

Despejando obtenemos

$$x(n)h(w_n) = h(x) - \sum_{i=1}^{n-1} x(i)h(\delta_i)$$

y tomando valor absoluto a continuación,

$$x(n)\|h(w_n)\| = \|h(x) - \sum_{i=1}^{n-1} x(i)h(\delta_i)\| \leq \|h(x)\| + \sum_{i=1}^{n-1} x(i)\|h(\delta_i)\|.$$

Procedamos ahora a evaluar cada uno de los dos sumandos resultantes.

Por un lado, como $h(x) \in \mathbb{Z}$ se tiene por *i)* que $\exists\, n_0 \geq 2$ tal que $\|h(x)\| < \frac{x(n)}{2}$ $\forall n \geq n_0$.

Por otro lado, teniendo en cuenta la definición de $y(n)$ y que $1 \leq x(n-1)$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} x(i)\|h(\delta_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} x(i)y(i) \leq y(n)\sum_{i=1}^{n-1} x(i) \leq \frac{2x(n-1)y(n)(\sum\limits_{i=1}^{n-1} x(i))}{2} = \frac{x(n)}{2}.$$

Ahora que tenemos ambos sumandos acotados superiormente podemos concluir, cuando $n \geq n_0$, que

$$x(n)\|h(w_n)\| < \frac{x(n)}{2} + \frac{x(n)}{2} = x(n).$$

Dado que $x(n) \geq 1$, tenemos que $0 \leq \|h(w_n)\| < 1$, y como $h(w_n) \in \mathbb{Z}$, entonces $h(w_n) = 0$, lo cual implica que

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x(i)h(\delta_i) = \sum_{i=1}^{n} x(i)h(\delta_i), \quad n \geq n_0.$$

Restamos obteniendo que $x(n)h(\delta_n) = 0$, es decir, $h(\delta_n) = 0$, $\forall\, n \geq n_0$. □

Teorema 12. ***(Segundo Teorema de Specker)*** *Sea $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$ un homomorfismo tal que $h(\delta_n) = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $h(x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración:
Denotemos por $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \,/\, p \text{ es un número primo}\}$ el conjunto de los números primos. Consideremos dos sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{P}$ tales que

- $p_n \neq p_m$, cuando $n \neq m$;
- $q_n \neq q_m$, cuando $n \neq m$;
- $p_n \neq q_m$, $\forall n,\ m$.

Definamos una aplicación $d \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: Dado que los elementos de las sucesiones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son primos entre sí, podemos aplicar el Lema de Bezout, por lo que

$$\exists\, a_n,\ b_n \in \mathbb{Z} \,/\ \ a_n \prod_{i=1}^{n} p_i + b_n \prod_{i=1}^{n} q_i = 1.$$

Llamemos

$$d(n) = -a_n \prod_{i=1}^{n} p_i = b_n \prod_{i=1}^{n} q_i - 1.$$

Se puede apreciar que $d(n)$ es un múltiplo de p_i y que $d(n)+1$ es un múltiplo de q_i para $i \leq n$.

Consideremos ahora un elemento arbitrario $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ y definamos al producto $d\,x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ componente a componente, es decir, $(d\,x)(n) = d(n)x(n)$. Lo expresamos de la forma

$$(d(1)x(1), \ldots) = \sum_{i=1}^{n-1} d(i)x(i)\delta_i + (0, \ldots, 0, d(n)x(n), \ldots) = \sum_{i=1}^{n-1} d(i)x(i)\delta_i + p_n \underbrace{(0, \ldots, v(n), \ldots)}_{w_n}$$

ya que $d(n+k)x(n+k) = p_n c(n+k)x(n+k) = p_n v(n+k)$ al ser $d(n+k)$ un múltiplo de p_n para $k \geq 0$.

Calculamos su imagen por h obteniendo que

$$h(d\,x) = \sum_{i=1}^{n-1} d(i)x(i) \underbrace{h(\delta_i)}_{0} + p_n h(w_n) = p_n h(w_n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observemos $h(d\,x) \in \mathbb{Z}$ es un múltiplo de una cantidad infinita de números primos distintos entre sí, y esto no puede ser a menos que $h(d\,x) = 0$.

Consideremos ahora el producto $(d+1)x$ definido por $(d+1)(n) = d(n)+1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Procediendo de manera análoga, llegaremos a que

$$h((d+1)x) = q_n h(u_n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

siendo $u_n = (0, \ldots, 0, \frac{(d(n)+1)x(n)}{q_n}, \frac{(d(n+1)+1)x(n+1)}{q_n}, \ldots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, ya que $d(n+k)+1$ es múltiplo de q_n para $k \geq 0$.

Entonces, como $h(d\,x+x) \in \mathbb{Z}$ y es múltiplo de una cantidad infinita de números primos distintos entre sí, de nuevo podemos deducir que $h(d\,x+x) = 0$.

Hemos llegado a que $h(d\,x) = 0 = h(d\,x+x) = h(d\,x)+h(x)$ concluyendo que $h(x) = 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, como queríamos demostrar. $\square$

A continuación ofrecemos una prueba algebraica del siguiente resultado de carácter topológico. Veremos más adelante que este resultado implica que todo homomorfismo de grupos en $\mathbb{Z}$ es automáticamente continuo (Corolario 6).

Teorema 13. ***(Tercer Teorema de Specker)*** *$Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ es isomorfo algebraicamente a $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.*

Demostración:
En primer lugar, construyamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} H: & Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \\ & \phi & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^{\infty} \phi(\delta_j)\delta_j \end{array}$$

Por el Teorema 11, sabemos que $\exists\, n_\phi \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(\delta_j) = 0$, $\forall\, j > n_\phi$. Por tanto,

$$H(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(\delta_j)\delta_j = \sum_{j=1}^{n_\phi} \phi(\delta_j)\delta_j,$$

o lo que es lo mismo, $H(\phi)(i) = \phi(\delta_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como acabamos de comprobar, H está bien definida, ya que la imagen de un elemento cualquiera perteneciente a $Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ se puede expresar como una suma finita de elementos y, además, ϕ es a su vez una aplicación bien definida.

Veamos a continuación que H es un homomorfismo. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $\phi,\ \psi \in Hom(I, \mathbb{Z})$ arbitrarios, tenemos que:

$$H(\phi+\psi)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi+\psi)(\delta_j)\delta_j(i) = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi(\delta_i)+\psi(\delta_i))\delta_j(i)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \phi(\delta_i)\delta_j(i) + \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\delta_i)\delta_j(i) = H(\phi)(i) + H(\psi)(i) = (H(\phi)+H(\psi))(i).$$

Ahora debemos demostrar que H es una aplicación biyectiva. Para ello, probemos en primer lugar que es inyectiva. Sea $\phi \in \ker(H)$, entonces $H(\phi) = 0$, o lo que es lo mismo, $\phi(\delta_i) = H(\phi)(i) = 0\ \forall\, i \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema 12 concluimos que $\phi = 0$.

Veamos finalmente que H es sobreyectiva. Sea $x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ de tal forma que $x(i) = 0\ \forall i > n_0$, donde $n_0 \in \mathbb{N}$. Definamos la aplicación $\phi_x : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$ tal que para cada $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$,

$$\phi_x(a) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)a(j) = \sum_{j=1}^{n_0} x(j)a(j),$$

que es una suma finita, por lo que la aplicación está bien definida.

Seguidamente veamos que ϕ_x es un homomorfismo. En efecto, sean $a, b \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dos elementos arbitrarios, entonces

$$\phi_x(a+b) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)(a+b)(j) = \sum_{j=1}^{n_0} x(j)(a+b)(j) = \sum_{j=1}^{n_0} x(j)a(j) + \sum_{j=1}^{n_0} x(j)b(j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} x(j)a(j) + \sum_{j=1}^{\infty} x(j)b(j) = \phi_x(a) + \phi_x(b).$$

Consideremos cada componente i de $H(\phi_x)$,

$$H(\phi_x)(i) = \phi_x(\delta_i) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\delta_i(j) = x(i).$$

Observamos que $H(\phi_x) = x$ y, por consiguiente, H es sobreyectiva y por tanto un isomorfismo algebraico. $\square$

3.2. Teorema de Baer-Specker

Sea I un conjunto de índices no vacío. En el lema que demostraremos a continuación usaremos la siguiente notación

$$\mathbb{Z}^I = \{(x(i))_{i\in I} \,/\, x(i) \in \mathbb{Z}\} \text{ (grupo abeliano);}$$

$$\mathbb{Z}^{(I)} = \{(x(i))_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I \,/\, \exists\, F \subseteq I \text{ finito, } x(i) = 0\ \forall i \notin F\} \text{ (subgrupo de } \mathbb{Z}^I\text{);}$$

$$\delta_i \in \mathbb{Z}^{(I)} \text{ tal que } \delta_i(i) = 1 \text{ y } \delta_i(j) = 0,\ i \neq j,\ i, j \in I.$$

Lema 2. *$Hom(\mathbb{Z}^{(I)}, \mathbb{Z}) \backsimeq \mathbb{Z}^I$ (isomorfismo algebraico de grupos).*

Demostración:
Consideremos la aplicación $\Phi : \mathbb{Z}^I \longrightarrow Hom(\mathbb{Z}^{(I)}, \mathbb{Z})$ tal que

$$\Phi(x)(a) = \sum_{i\geq 1} a(i)x(i) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, x = ((x(i)) \in \mathbb{Z}^I,\ \forall\, a = ((a(i)) \in \mathbb{Z}^{(I)}.$$

La aplicación Φ está bien definida puesto que $a(i) = 0$ para todo i, salvo a lo sumo una cantidad finita de índices. Claramente $\Phi(x) \in Hom(\mathbb{Z}^{(I)}, \mathbb{Z})$. Veamos que es biyectiva.

Sobreyectividad: Sea $h \in Hom(\mathbb{Z}^{(I)}, \mathbb{Z})$. Definimos $x = (x(i)) \in \mathbb{Z}^I$ tal que $x(i) = h(\delta_i)$, $\forall i \in I$. Entonces se cumple que $\Phi(x) = h$. En efecto, si $a \in \mathbb{Z}^{(I)}$,

$$\Phi(x)(a) = \sum_{n\geq 1} a(i)x(i) = \sum_{n\geq 1} a(i)h(\delta_i) = h\left(\sum_{n\geq 1} a(i)\delta_i\right) = h(a).$$

Inyectividad: Sea $x \in \mathbb{Z}^I$ tal que $\Phi(x) = 0$. Entonces $\Phi(x)(\delta_i) = x(i) = 0$, $\forall i \in I$, es decir, $x = 0$. $\square$

Nota 18. *Siguiendo los mismos pasos de la demostración anterior se llega a que* $Hom(\mathbb{Z}(p)^{(I)}, \mathbb{Z}(p)) \backsimeq \mathbb{Z}(p)^I$.

Como consecuencia de los resultados anteriores estamos en condiciones de probar que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no tiene base (como $\mathbb{Z}$-módulo).

Teorema 14. ***(Teorema de Baer-Specker)*** $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *no es un grupo libre.*

Demostración:
Hagamos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos pues que existe una base $\mathcal{B} = \{e_i \,/\, i \in I\}$ en $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Notemos que $|I| = |\mathcal{B}| = |\langle\mathcal{B}\rangle| = |\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \langle\, \mathcal{B}\,\rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\mathcal{B})} \\ \displaystyle\sum_{\substack{\text{finita} \\ n_i \in \mathbb{Z}}} n_i e_i & \mapsto & x \,/\, x(e_i) = n_i, \end{array}$$

es un isomorfismo. Por tanto tenemos que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \langle \mathcal{B} \rangle \backsimeq \mathbb{Z}^{(\mathcal{B})}$.

Teniendo en cuenta además el Teorema 13 y el Lema 2, llegamos a que

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \backsimeq Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) \backsimeq Hom(\mathbb{Z}^{(\mathcal{B})}, \mathbb{Z}) \backsimeq \mathbb{Z}^{\mathcal{B}}.$$

Pero por las Notas 10 y 12, el Teorema de Cantor y el Corolario 3, $|\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}| = \aleph_0 < \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = |\mathbb{Z}^{\mathcal{B}}|$, lo cual es una contradicción. Por tanto el grupo $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es libre. $\square$

3.3. Teorema de Nunke

Sea el producto directo de grupos cíclicos $\mathbb{Z}^I = \{(x(i))_{i\in I} \ / \ x : I \to \mathbb{Z}\}$, donde I es un conjunto (finito o infinito) de índices. Tomemos para $\mathbb{Z}$ la topología discreta y para $\mathbb{Z}^I$ la correspondiente topología producto, es decir, que para un elemento $a \in \mathbb{Z}^I$, una base de entornos de a estará por formada por los abiertos

$$V_F^a = \prod_{i\in I} V_i \equiv \prod_{i\in F} \{a(i)\} \times \prod_{i\notin F} \mathbb{Z},$$

siendo F un subconjunto finito de I.

El subgrupo *suma directa* será denotado por $\mathbb{Z}^{(I)} = \{(x(i))_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I / \exists F \subseteq I$ finito, $x(i) = 0, \ \forall i \in I \setminus F\}$, y se considerará equipado con la topología que hereda del producto $\mathbb{Z}^I$.

Lema 3. *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to a$ en $\mathbb{Z}^I \iff \forall i \ \exists n_i \ / \ a(i) = a_n(i), \ \forall n \geq n_i$.*

Demostración:
Condición necesaria: Supongamos primero que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to a \in \mathbb{Z}^I$. Si consideramos los abiertos básicos

$$V_{\{i\}}^a = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z} \times \{a(i)\} \times \mathbb{Z} \times \ldots,$$

entonces $\exists \, n_i \in \mathbb{N} \ / \ a_n \in V_{\{i\}}^a, \ \forall n \geq n_i$. Por tanto $a_n(i) = a(i), \ \forall \, n \geq n_i$.

Condición suficiente: Supongamos ahora que $\forall \, i \ \exists \, n_i \ / \ a(i) = a_n(i), \ \forall \, n \geq n_i$. Tomemos un abierto básico V_F^a entorno de a en la topología producto de $\mathbb{Z}^I$, donde $F = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq I$ finito. Por hipótesis,

$$a(i_j) = a_n(i_j), \quad \forall \, n \geq n_{i_j}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Sea $n_0 = \max\{n_{i_1}, \ldots, n_{i_k}\}$. Por tanto $a(i_j) = a_n(i_j)$, $\forall\, n \geq n_0$. Lo que implica que $a_n \in V_F^a$, $\forall\, n \geq n_0$. De lo cual concluimos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to a$. $\square$

Nota 19. *De manera análoga se demuestra que una red* $\{a_d\}_{d\in D} \to a$ *en* $\mathbb{Z}^I \iff \forall\, i\ \exists\, d_i\ /$ $a(i) = a_d(i),\ \forall d \geq d_i$.

Lema 4. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* $\mathbb{Z}^I$, *entonces* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ *si y solo si existe un único homomorfismo* $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^I$ *tal que* $h(\delta_n) = a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demostración:
Condición necesaria: Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{Z}^I$ y supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. Por el Lema 3, se cumple que $a_n(i) = 0$, $\forall\, n \geq n_i$, .

Ahora vamos a definir la aplicación h a través de sus componentes. Sea $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Para cada componente $i \in \mathbb{N}$, definimos

$$h(x)(i) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x(k)a_k(i) = \sum_{k=1}^{n_i-1} x(k)a_k(i).$$

Por tanto la aplicación h tal que $h(x) = (h(x)(i))_{i\in I}$ está bien definida ya que la suma anterior es finita. Veamos que es un homomorfismo. Comprobémoslo en en cada componente i.

$$\begin{aligned} h(x+y)(i) &= \sum_{k<n_i}(x+y)(k)a_k(i) = \sum_{k<n_i}(x(k)+y(k))a_k(i) = \sum_{k<n_i}[x(k)a_k(i) + y(k)a_k(i)] \\ &= \sum_{k<n_i} x(k)a_k(i) + \sum_{k<n_i} y(k)a_k(i) = h(x)(i) + h(y)(i) = (h(x)+h(y))(i). \end{aligned}$$

Además se cumple que $h(\delta_n)(i) = \sum_{k<n_i} \delta_n(k)a_k(i) = a_n(i)$. Por tanto $h(\delta_n) = a_n$.

Procedemos ahora a demostrar la unicidad de h. Supongamos lo contrario, es decir, que existe otro homomorfismo $f : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^I$ tal que $f(\delta_n) = a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces, el homomorfismo $(h-f) : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^I$ verifica

$$(h-f)(\delta_n) = h(\delta_n) - f(\delta_n) = a_n - a_n = 0,$$

Por el segundo teorema de Specker (Teorema 12), se tiene que $h - f = 0$, es decir, $h = f$, llegando a una contradicción.

Condición suficiente: Sea $\pi_i : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo que determina la proyección i-ésima de los elementos de $\mathbb{Z}^I$.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\pi_i \circ h"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}^I \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

donde $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^I$ es un homomorfismo tal que $h(\delta_n) = a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por el primer teorema de Specker (Teorema 11) podemos encontrar un número natural $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 = (\pi_i \circ h)(\delta_n) = \pi_i(h(\delta_n)) = \pi_i(a_n) = a_n(i), \ \ \forall\, n \geq n_i.$$

Por tanto $a_n(i) = 0$, $\forall n \geq n_i$, lo que implica, por el Lema 3, que

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0\cdot$$

$\square$

Lema 5. *Sean I y J dos conjuntos arbitrarios no vacíos, entonces todo homomorfismo $f : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}^J$ es sucesionalmente continuo.*

Demostración:
Sea $f : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}^J$ un homomorfismo. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ en $\mathbb{Z}^I$. Como $\{x_n - x\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \in \mathbb{Z}^I$, aplicando el Lema 4, podemos encontrar un homomorfismo $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^I$ tal que $h(\delta_n) = x_n - x$.

Consieremos a continuación el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\pi_j \circ f \circ h"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}^I \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^J \arrow[u, "\pi_j"'] \end{tikzcd}$$

Aplicando el primer teorema de Specker (Teorema 11) y el Lema 4, sabemos que $\exists\, n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_j$ se cumple que

$$0 = (\pi_j \circ f \circ h)(\delta_n) = \pi_j(f(x_n - x)) = \pi_j(f(x_n) - f(x)) = f(x_n)(j) - f(x)(j).$$

De donde se obtiene que $f(x_n)(j) = f(x)(j), \forall\, n \geq n_j$. Teniendo en cuenta el Lema 3 concluimos que

$$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow f(x) \in \mathbb{Z}^J.$$

$\square$

Corolario 6. *Todo homomorfismo* $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{Z}^J$ *es continuo para cualquier conjunto* J*.*

Demostración:
Aplicamos la Nota 15 al espacio métrico $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Corolario 7. $Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) = CHom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ *(homomorfismos continuos).*

Lema 6. *Sea* H *un subgrupo de* $\mathbb{Z} \Longrightarrow \exists\; d \in H \;/\; H = \langle\, d \,\rangle$*.*

Demostración:
Consideremos el subconjunto de números naturales $H_+ = \{h \in H/h > 0\}$. Si $H_+ = \emptyset$, entonces $H = \{0\}$, por ser subgrupo.

Supongamos ahora que $H_+ \neq \emptyset$ y sea d el mínimo elemento de H_+. Por tanto $\langle\, d \,\rangle \subseteq H$. Tomemos $h \in H$, $h \neq 0$.

- Si $h \in H_+$, entonces $h \geq d$ y realizando la división euclidea obtenemos la expresión

  $$h = c\,d + r, \quad 0 \leq r < d, \quad c,\; d \in \mathbb{Z}.$$

  Como $r = h - c\,d \in H_+$ y d es el elemento mínimo de H_+, deducimos que $r = 0$, es decir, $h = c\,d \in \langle\, d \,\rangle$.

- Si $h \notin H_+$, tomamos su opuesto $-h \in H_+$. Siguiendo los pasos del caso anterior llegamos a que $-h \in \langle\, d \,\rangle$, y por tanto $h \in \langle\, d \,\rangle$.

Podemos concluir ya que $H = \langle\, d \,\rangle$.

$\square$

Lema 7. *Sea H un subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Se cumple entonces que $x \in \overline{H} \iff \exists \; \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H \;/\; x(i) = u_n(i), \; \forall i \leq n$.*

Demostración:
Condición necesaria: Sea $x \in \overline{H}$. Entonces, como $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico, por la Nota 14, sabemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ que converge a x.

Por el Lema 3, sabemos que $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

$$x_n(1) = x(1), \text{ si } n \geq n_1;$$

$$x_n(2) = x(2), \text{ si } n \geq n_2 \geq n_1;$$

$$\ldots$$

$$x_n(i) = x(i), \text{ si } n \geq n_i \geq \ldots \geq n_2 \geq n_1;$$

$$\ldots$$

La sucesión que buscamos en H está formada por

$$u_1 = x_{n_1} = (x(1), x_{n_1}(2), x_{n_1}(3), \ldots);$$

$$u_2 = x_{n_2} = (x(1), x(2), x_{n_2}(3), \ldots);$$

$$\ldots$$

$$u_n = x_{n_n} = (x(1), x(2), x(3), \ldots, x(n), x_{n_n}(n+1), \ldots);$$

$$\ldots$$

Los elementos de esta sucesión verifican que $u_n(i) = x(i), \; \forall \, i \leq n$.

Condición suficiente: Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in H \;/\; x(i) = u_n(i) \; \forall i \leq n$. Por el Lema 3, tenemos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, y por la Nota 14, $x \in \overline{H}$. □

Nota 20. *Denotaremos $P_n = \{x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} / \; x(i) = 0, \; i < n\}$, $n \geq 1$. Si $A \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, entonces $\overline{A} \cap P_n = \overline{A \cap P_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Lema 8. *$\{P_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de 0 en $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración:
Sea V_F^0 entorno de $0 \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ con $F \subseteq \mathbb{N}$ finito. Sea $m = \text{máx}\{x \,/\, x \in F\}$. Se sigue que $0 \in P_{m+1} \subseteq V_F$.

$\square$

Nota 21. *Por abuso de notación, diremos que un subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ (o $\mathbb{Z}^I$) es un producto cuando es topológicamente isomorfo a un producto de grupos.*

Teorema 15. ***(Teorema de Nunke).*** *Todo subgrupo cerrado de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es un producto.*

Demostración:
Sea A un subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Busquemos en primer lugar una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente a 0 inductivamente utilizando el Lema 6.

- $A \cap P_1 = A \Rightarrow \pi_1(A)$ es un subgrupo de $\mathbb{Z} \Rightarrow \exists d_1 \in \mathbb{N} \;/\; \pi_1(A) = \langle\, d_1 \,\rangle$.
  Si $d_1 = 0 \Rightarrow$ tomamos $a_1 = 0$.
  Si $d_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, a_1 \in A \;/\; \pi_1(a_1) = d_1$.

- $A \cap P_2$ es subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \pi_2(A \cap P_2)$ es subgrupo de $\mathbb{Z} \Rightarrow \exists d_2 \in \mathbb{N} \;/\; \pi_2(A \cap P_2) = \langle\, d_2 \,\rangle$.
  Si $d_2 = 0 \Rightarrow$ tomamos $a_2 = 0$.
  Si $d_2 \neq 0 \Rightarrow \exists\, a_2 \in A \cap P_2 \;/\; \pi_2(a_2) = d_2$.

  ...

- $A \cap P_n$ es subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \pi_n(A \cap P_n)$ es subgrupo de $\mathbb{Z} \Rightarrow \exists d_n \in \mathbb{N} \,/\, \pi_n(A \cap P_n) = \langle\, d_n \,\rangle$.
  Si $d_n = 0 \Rightarrow$ tomamos $a_n = 0$.
  Si $d_n \neq 0 \Rightarrow \exists\, a_n \in A \cap P_n \;/\; \pi_n(a_n) = d_n$.

  ...

Observemos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obtenida verifica:

i) $a_n(i) = 0,\ i < n$;

ii) $a_n(n) = 0 \Longleftrightarrow a_n = 0$;

iii) $\forall u \in A \cap P_n \Longrightarrow \pi_n(u) \in \langle\, d_n \,\rangle = \langle\, a_n(n) \,\rangle$.

La propiedad *i)* nos indica que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. Con lo cual, si aplicamos el Lema 4, podemos encontrar un único homomorfismo $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tal que $h(\delta_n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos a continuación que $h(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}) = \overline{A}$.

Probemos primero que $h(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}) \subseteq \overline{A}$. Sea $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Consideremos la sucesión de sumas parciales asociadas a x y su imagen por h:

$$x_1 = x(1)\delta_1 = (x(1), 0, 0, \ldots) \Rightarrow h(x_1) = x(1)a_1 \in A;$$

$$x_2 = x(1)\delta_1 + x(2)\delta_2 = (x(1), x(2), 0, \ldots) \Rightarrow h(x_2) = x(1)a_1 + x(2)a_2 \in A;$$

$$\ldots$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x(i)\delta_i = (x(1), x(2), \ldots, x(n), 0, \ldots) \Rightarrow h(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x(i)a_i \in A;$$

$$\ldots$$

La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Como h es un homomorfismo, por el Lema 5, es sucesionalmente continuo, y entonces $\{h(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to h(x) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Pero $h(x_n) \in A \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, luego $h(x) \in \overline{A}$.

Demostremos ahora que $\overline{A} \subseteq h(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$. Sea $y \in \overline{A}$. Busquemos $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tal que $h(x) = y$. Procederemos por inducción componente a componente utilizando el Lema 7 y la propiedad *iii)* en cada paso.

- $y \in \overline{A} \Longrightarrow \exists\, y_1 \in A = A \cap P_1 \;/\; \pi_1(y) = \pi_1(y_1) \in \langle a_1(1)\rangle \Longrightarrow \exists\, x(1) \in \mathbb{Z} \,/\, y(1) = x(1)a_1(1)$.
- $y - x(1)a_1 \in \overline{A} \cap P_2 = \overline{A \cap P_2} \Longrightarrow \exists\, y_2 \in A \cap P_2 \;/\; \pi_2(y - x_1a_1) = \pi_2(y_2) \in \langle a_2(2)\rangle \Longrightarrow \exists\, x(2) \in \mathbb{Z} \,/\, y(2) = x(1)a_1(2) + x(2)a_2(2)$.
- $y - x(1)a_1 - x(2)a_2 \in \overline{A} \cap P_3 = \overline{A \cap P_3} \Longrightarrow \exists\, y_3 \in A \cap P_3 \;/\; \pi_3(y - x_1a_1 - x_2a_2) = \pi_3(y_3) \in \langle a_3(3)\rangle \Longrightarrow \exists\, x(3) \in \mathbb{Z} \,/\, y(3) = x(1)a_1(3) + x(2)a_2(3) + x(3)a_2(3)$.

  $\ldots$

Hemos obtenido una sucesión $\{x(i)\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $y - \sum_{i=1}^{n} x(i)a_i \in \overline{A} \cap P_{n+1}$. Por tanto, por el Lema 3, se tiene que la sucesión $\{\sum_{i=1}^{n} x(i)a_i\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$.

Llamemos $z_n = \sum_{i=1}^{n} x(i)\delta_i \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Por un lado se tiene que $h(z_n) = \sum_{i=1}^{n} x(i)a_i$, y por tanto la sucesión $\{h(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$. Por otro lado, como $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x = (x(1), x(2), \ldots)$ (Lema 3) y h es un homomorfismo sucesionalmente continuo, se tiene que $\{h(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to h(x)$ (Lema 5). De lo cual se puede concluir que $y = h(x)$, ya que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Hausdorff.

Consideremos el conjunto de índices $J = \{j \in \mathbb{N} \,/\, a_j = 0\}$. Denotemos a los siguientes productos por

$$P(J) = \{x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \,/\, x(j) = 0 \quad \forall j \in J\} \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}\setminus J} \times \{0\}^J;$$
$$P(\mathbb{N} \setminus J) = \{x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \,/\, x(j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus J\} \cong \mathbb{Z}^J \times \{0\}^{\mathbb{N}\setminus J}.$$

Claramente $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = P(J) \oplus P(\mathbb{N} \setminus J)$ y $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/_{P(\mathbb{N}\setminus J)} \cong P(J)$. Demostremos ahora que $\ker(h) = P(\mathbb{N} \setminus J)$.

Veamos primero que $P(\mathbb{N} \setminus J) \subseteq \ker(h)$. Sea $x \in P(\mathbb{N} \setminus J)$, entonces $x(j) = 0 \; \forall j \notin J$. Por la unicidad del homomorfismo h se tiene que en cada componente

$$h(x)(i) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x(j)a_j(i) = 0,$$

ya que si $j \in \mathbb{N} \setminus J$, entonces $x(j) = 0$, y si por el contrario $j \in J$, entonces $a_j = 0$. Por tanto $h(x) = 0$, es decir, $x \in \ker(h)$.

Veamos ahora que $\ker(h) \subseteq P(\mathbb{N} \setminus J)$. Tomemos $x \in \ker(h)$, $x \neq 0$, y sea k el primer natural tal que $x(k) \neq 0$.

Supongamos que $x \in P(J)$, entonces $x(j) = 0$, $\forall j \in J$. Por tanto $k \notin J$ y por *ii*), $a_k(k) \neq 0$. La componente k de $h(x)$ es

$$h(x)(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j a_j(k) = x(k)a_k(k) \neq 0,$$

ya que $a_j(k) = 0$ si $k < j$ y $x(j) = 0$ si $j < k$. Por tanto, $x \notin \ker(h)$, lo cual es una contradicción.

Por tanto $x \notin P(J)$. Como $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = P(J) \oplus P(\mathbb{N} \setminus J)$, descomponemos

$$x = \underbrace{x - x_j}_{\in P(J)} + \underbrace{x_j}_{\in P(\mathbb{N}\setminus J)}$$

Pero $P(\mathbb{N} \setminus J) \subseteq \ker(h)$, entonces como $0 = h(x) = h(x - x_j)$ y $x - x_j \in P(J)$, necesariamente $x - x_j = 0$, es decir $x = x_j \in P(\mathbb{N} \setminus J)$.

Teniendo en cuenta todos los resultados obtenidos y el primer teorema de isomorfismo, podemos concluir que

$$\overline{A} = Im(h) \cong P(J),$$

el cual es un producto, como queríamos demostrar.

$\square$

Corolario 8. *Todo subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ que no es finitamente generado es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración:
Siguiendo los pasos de la demostración anterior, se observa que $\mathbb{N} \setminus J$ es infinito y por lo tanto equipotente a $\mathbb{N}$.

$\square$

Capítulo 4

Contraejemplos

4.1. Ejemplo de grupo que no cumple los teoremas de Specker

Teorema 16. *Existe un homomorfismo no nulo $\phi : \mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}(p)$ tal que $\phi(\delta_i) = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ y que además no es (sucesionalmente) continuo.*

Demostración:
$\mathbb{Z}(p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$, el grupo cíclico de orden p, es un grupo topológico compacto (finito) de Hausdorff (discreto). Por tanto $\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}$ es también un grupo topológico compacto por ser producto de compactos.

Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro libre de $\mathbb{N}$, que sabemos que existe por el Corolario 4. Definimos la aplicación

$$\phi : \mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{Z}(p)$$
$$\bar{x} = (x(n))_{n=1}^{\infty} \longmapsto \phi(\bar{x}) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \mathcal{F}}} x(n)$$

Por el Teorema 10 tenemos que ϕ está bien definida, ya que existe el límite y es único. Veamos ahora que es un homomorfismo. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}(n)^{\mathbb{N}}$, entonces $\bar{x} + \bar{y} = \bar{z} = (z(n))_{n=1}^{\infty}$, $z(n) = x(n) + y(n)$. Vamos a demostrar que $\phi(\bar{x} + \bar{y}) = \phi(\bar{x}) + \phi(\bar{y})$. Llamemos $a = \phi(\bar{x})$ y $b = \phi(\bar{y})$.

Tomemos un entorno U de $a + b$. Como $\{a\}$ es un entorno de a en $\mathbb{Z}(p)$, entonces $\exists\, F_a \in \mathcal{F}$ tal que $x(n) = a$, $\forall\, n \in F_a$. Análogamente, como $\{b\}$ es un entorno de b en $\mathbb{Z}(p)$, entonces $\exists\, F_b \in \mathcal{F}$ tal que $x(n) = b$, $\forall\, n \in F_b$.

Teniendo en cuenta la definición 9 de filtro, $F_a \cap F_b = F \in \mathcal{F}$. Sea $n \in F$, entonces se tiene que $z(n) = x(n) + y(n) = a + b \in U$. Por tanto

$$\phi(\bar{x} + \bar{y}) = \phi(\bar{z}) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \mathcal{F}}} z(n) = a + b = \phi(\bar{x}) + \phi(\bar{y}).$$

Veamos ahora que $\phi(\delta_i) = 0$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Llamemos $c_i = \phi(\delta_i)$. Como $\{c_i\}$ es un entorno de c_i en $\mathbb{Z}(p)$, entonces $\exists\, F_i \in \mathcal{F}$ tal que $\delta_i(n) = c_i \in \{0, 1\}$, $\forall\, n \in F_i$.

Supongamos que $\exists\, \delta_{i_0}$ cuya imagen $\phi(\delta_{i_0}) = 1 = c_{i_0}$. Entonces $\delta_{i_0}(n) = 1$, $\forall n \in F_{i_0}$. Por tanto $F_{i_0} = \{i_0\}$. Por el Teorema 7, el filtro $\mathcal{F}$ contiene al filtro de Fréchet y por tanto a los conjuntos $B_n = [n, +\infty[\bigcap \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, que lo generan. Entonces se tiene $B_{i_0+1} \cap F_{i_0} = \emptyset \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción ya que $\mathcal{F}$ es un filtro. Por tanto $\phi(\delta_i) = 0$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Finalmente, estudiemos si ϕ es sucesionalmente continua. Consideremos la sucesión $\{\bar{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}$ cuyos elementos de $\bar{z}_n = ((z_n(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ son de la forma

$$z_n(i) = \begin{cases} 0\,, \text{ si } i < n \\ 1\,, \text{ si } i \geq n \end{cases}$$

Veamos que $\{\bar{z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\bar{0}$ en $\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}$. Sea

$$V_k = \{0\} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N} \setminus I_k}$$

un entorno básico de $\bar{0}$ en $\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}$, siendo $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Claramente, $\bar{z}_n \in V_k$, cuando $n > k$.

Estudiemos ahora la convergencia de $\{\phi(\bar{z}_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Llamemos $l_n = \phi(\bar{z}_n)$. Nuevamente, como $\{l_n\}$ es un entorno de l_n en $\mathbb{Z}(p)$, entonces $\exists\, F_n \in \mathcal{F}$ tal que $z_n(i) = l_n \in \{0, 1\}$, $\forall i \in F_n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y evaluamos $\phi(\bar{z}_n) - \phi(\bar{z}_{n+1}) = \phi(\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}) = \phi(\delta_n) = 0$. Por tanto, $\phi(\bar{z}_{n+1}) = \phi(\bar{z}_n) = \phi(\bar{z}_1) \in \{0, 1\}$. Si $\phi(\bar{z}_1) = l_1 = 0$, entonces se tiene por un lado que $z_1(i) = l_1 = 0$, $\forall i \in F_1$, y por otro lado, por la definición de z_1, que $z_1(i) = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$, lo que implica que $F_1 = \emptyset$, contradiciendo la definición de filtro. Por consiguiente se cumple que $\phi(\bar{z}_n) = \phi(\bar{z}_1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observamos que la sucesión de las imágenes $\{\phi(\bar{z}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $1 \neq \phi(\bar{0}) = 0$, por lo que el homomorfismo ϕ no es continuo. $\square$

4.2. $\mathbb{Z}(p)^{(\mathbb{N})}$ no es isomorfo a $Hom(\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}(p))$

El siguiente resultado algebraico (que no vamos a demostrar) caracteriza cuándo $\mathbb{Z}(n)$ es un cuerpo, con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 17. *Para todo $p, n \in \mathbb{N}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\mathbb{Z}(p^n)$ *es un dominio de integridad (finito).*
- $\mathbb{Z}(p^n)$ *es un cuerpo.*
- p *es un número primo.*

A partir de ahora p simboliza un número primo.

Corolario 9. $\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{Z}(p)$*. Por tanto tiene una base de Hamel.*

Demostración:
Es sencillo comprobar que se cumplen los axiomas pertinentes de un espacio vectorial. La existencia de una base es consecuencia del Teorema 1. □

Nota 22. *Si denotamos por $\mathcal{B}$ una base de Hamel de $\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}$, se tiene por la Nota 12 que*

$$|\mathcal{B}| = |\langle\, \mathcal{B}\,\rangle| = |\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{Z}(p)|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Corolario 10. $Hom(\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}(p)) \backsimeq \mathbb{Z}(p)^{\mathcal{B}}$*, siendo $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{Z}(p)$.*

Demostración:

Si enumeramos los elementos de la base $\mathcal{B} = \{e_i \,/\, i < \mathfrak{c}\}$, podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \langle\, \mathcal{B}\, \rangle & & \longrightarrow & \mathbb{Z}(p)^{(\mathcal{B})} \\ \sum\limits_{\substack{\text{finita} \\ n_i \in \mathbb{Z}(p)}} & n_i e_i & \mapsto & x \,/\, x(e_i) = n_i \cdot \end{array}$$

que es un isomorfismo algebraico. Por tanto, tenemos que $\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}} = \langle\, \mathcal{B}\, \rangle \backsimeq \mathbb{Z}(p)^{(\mathcal{B})}$.

Por otro lado, por la Nota 18, $Hom(\mathbb{Z}(p)^{(\mathcal{B})}, \mathbb{Z}(p)) \backsimeq \mathbb{Z}(p)^{\mathcal{B}}$.

Uniendo ambos resultados tenemos que $\mathbb{Z}(p)^{(\mathcal{B})} \backsimeq Hom(\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}(p))$. $\square$

Teorema 18. *$Hom(\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) \ncong \mathbb{Z}(p)^{(\mathbb{N})}$.*

Demostración:
Por un lado, notemos que $\mathbb{Z}(p)^{(\mathbb{N})}$ es equipotente a un subconjunto de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}(p)^n$, que es numerable. Por lo tanto, $|\mathbb{Z}(p)^{(\mathbb{N})}| = \aleph_0$.

Por otro lado, si $\mathcal{B}$ es una base de Hamel de $\mathbb{Z}(p)$, tenemos por el Corolario 10 y la Nota 22 que

$$|Hom(\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})| = |\mathbb{Z}(p)^{\mathcal{B}}| = |\mathbb{Z}(p)|^{|\mathcal{B}|} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} > \aleph_0.$$

Hemos demostrado pues que $Hom(\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) \ncong \mathbb{Z}(p)^{(\mathbb{N})}$. $\square$

4.3. Ejemplo de grupo no topológicamente isomorfo a un producto

Lema 9. *Denotemos por $I = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ el grupo de Baer-Specker. Entonces $Hom(I, \mathbb{Z})$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{Z}^I$ con la topología producto.*

Demostración:
$Hom(I, \mathbb{Z})$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}^I$. Para comprobar que es un subgrupo cerrado tomemos una red $\{\phi_d\}_{d\in D} \subseteq Hom(I, \mathbb{Z})$ convergente a $f \in \mathbb{Z}^I$ y veamos que $f \in Hom(I, \mathbb{Z})$.

Como $\{\phi_d\}_{d\in D} \to f \in \mathbb{Z}^I$ con la topología producto, por la Nota 19, se tiene que $\forall x \in I$ $\exists\, d_x \in D$ de manera que $\phi_d(x) = f(x)$, $\forall\, d \geq d_x$.

Sean $x,\, y \in I$ cualesquiera. Al ser D un conjunto dirigido sabemos que $\exists\, d_0 \in D$, $d_0 \geq d_x,\ d_y,\ d_{x+y}$. Si tomamos $d \geq d_0$, se tiene por un lado que $\phi_d(x+y) = f(x+y)$ y por otro lado, como ϕ_d es un homomorfismo, se tiene que $\phi_d(x+y) = \phi_d(x) + \phi_d(y) = f(x) + f(y)$. Hemos obtenido que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, es decir, $f \in Hom(I, \mathbb{Z})$. $\square$

Corolario 11. *El grupo $Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ no es un producto.*

Demostración:
El producto infinito de grupos no triviales de menor cardinal es $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, que tiene de cardinal el continuo (ver Proposición 5 y Ejemplos 8 y 9).

Por el tercer teorema de Specker (Teorema 13), se tiene que $Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, el cual es numerable. Por lo tanto, $Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ no puede ser un producto. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos realizado un estudio sobre el grupo de Baer-Specker $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, y hemos demostrado que satisface algunas propiedades muy singulares.

(1) Todo homomorfismo $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^J$ es continuo, donde J es un conjunto de índices cualquiera. Esto implica que todo homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$ es continuo.

(2) $Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ es isomorfo algebraicamente a $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.

(3) Todo subgrupo cerrado de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ que no es finitamente generado es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, es decir, tiene topología producto.

(4) $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es un grupo libre.

Contrastando estas propiedades del grupo $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ mostramos los siguientes contraejemplos:

Como contraejemplo a (1) hemos encontrado un homomorfismo no nulo $\phi : \mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}(p)$ que no es continuo.

Como contraejemplo a (2) hemos visto que $Hom(\mathbb{Z}(p)^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ no es isomorfo algebraicamente a $\mathbb{Z}(p)^{(\mathbb{N})}$.

Como contraejemplo a (3) hemos encontrado el subgrupo cerrado $Hom(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}}$, el cual no es un producto.

Como contraejemplo a (4) tenemos que las sucesiones acotadas de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ sí son un grupo libre. No hemos incluido dicha demostración en este trabajo debido a la extensión del mismo, pero podría ser una manera de continuarlo en un futuro.

Bibliografía

[1] Schröer, S. (2007). *Baer's result: The infinite product of the integers has no basis.* Mathematisches Institut, Heinrich-Heine-Universität, 40225 Düsseldorf, Germany.

[2] Roberts, W. R. G. y Benítez, R. (2017). *Topología General* (1.a ed.). Trillas.

[3] Krantz, S. G. (2009). *Essentials of Topology with Applications.* Taylor & Francis.

[4] Nunke, R. J. (1962). *On direct products of infinite cyclic groups.* Proceedings of the American Mathematical Society, 13(1), 66–71.

[5] Specker, E. (1950). *Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen.* Portugaliae Mathematica, 9., 131-140

[6] Blass, A. (1994). *Characteristics and the Product of Countably Many Infinite Cyclic Groups.* Journal of Algebra, 169, 512–540.

[7] Dudley, R. M. (1961). *Continuity of homomorphisms.* Duke Mathematical Journal, 28(4), 587–594.