Grado en Matemática Computacional

Trabajo Final de Grado

El Problema de Sturm-Liouville. Polinomios de Legendre.

Autor:
Carlos Remacha Sidro

Tutor académico:
José Antonio López Ortí

Fecha de lectura: 10 de octubre de 2022
Curso académico 2021/2022

Resumen

Gran parte del estudio se enfoca en el problema de Sturm-Liouville, que es un problema de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello, en primer lugar se estudian los teoremas de Sturm, lo que incluye los teoremas de comparación y separación.

A continuación, se enuncia el problema de Sturm-Liouville, estudiando las soluciones correspondientes a los valores propios, las funciones propias. También se estudian las propiedades de ortogonalidad, así como el teorema de oscilación.

Finalmente, se estudia un caso práctico: los polinomios de Legendre, los cuales aparecen en múltiples escenarios de índole matemática y física. Se obtienen a partir de su función generatriz y se acaba probando que son solución de un problema particular de Sturm-Liouville.

Palabras Clave

Ecuaciones diferenciales. Problema de Sturm-Liouville. Funciones especiales. Polinomios de Legendre.

Keywords

Differential equations. Sturm-Liouville problem. Special functions. Legendre polynomials.

Índice general

1. Introducción

Este estudio forma parte de los denominados problemas de frontera o de contorno, los cuales surgieron ante cuestiones de carácter físico durante el siglo XVIII relacionados con muy diversos problemas, como por ejemplo el problema de la conducción del calor en una barra o el problema de la cuerda vibrante.

Jacques C. F. Sturm y Joseph Liouville estudiaron este tema por separado y más tarde colaboraron juntos para conseguir desarrollar lo que finalmente se llamaría la teoría de Sturm-Liouville, la cual supuso un importante avance en el campo de la física matemática.

También, muchas funciones especiales son soluciones de un problema de Sturm-Liouville. Por todo esto, el problema de Sturm-Liouville es uno de los problemas más interesantes de la teoría de ecuaciones diferenciales.

En este trabajo se comienza por la reducción de la ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden a forma normal, para más tarde poder exponer los teoremas de Sturm, relacionados con la comparación, separación y evaluación de los ceros o raíces de las soluciones de la ecuación. Luego se expone el problema de Sturm-Liouville y se muestran propiedades como la de ortogonalidad o completitud.

Más tarde se reduce el sistema de Sturm-Liouville a forma normal para así poder demostrar diversas proposiciones las cuales permitirán llegar a demostrar el importante teorema de oscilación. Por último, se estudian los polinomios de Legendre y se trata una aplicación práctica del sistema de Sturm-Liouville a la denominada ecuación de Legendre, la cual constituye un caso particular del problema de Sturm-Liouville.

La aplicación de los polinomios de Legendre a la física matemática resulta ser casi imprescindible, principalmente en la que es conocida como Teoría del Potencial y muchos otros problemas de naturaleza física cuya resolución desemboca en estos polinomios.

Gracias a diversas herramientas y técnicas de distintos ámbitos de las matemáticas, como puede ser el desarrollo de soluciones en serie o la integración en variable compleja, se consigue finalmente obtener los resultados requeridos para demostrar la eficiencia de los métodos.

2. Forma normal para la ecuación lineal y homogénea de orden dos.

Sea la E. D. lineal y homogénea de orden dos

$$y''(x) \; + \; A(x)\cdot y'(x) \; + \; B(x)\cdot y(x) \; = \; 0 \qquad (2.1)$$

En donde *A(x)* y *B(x)* son funciones continuas en el intervalo cerrado [*a*, *b*].

Queremos reducir esta ecuación a la forma normal

$$z''(t) \; + \; C(t)\cdot z(t) \; = \; 0$$

Para lograr esto, comencemos poniendo la ecuación (2.1) de la forma

$$\frac{d}{dx}[K(x)\cdot y'(x)] \; + \; Q(x)\cdot y(x) \; = \; 0 \qquad (2.2)$$

y desarrollando esta ecuación obtenemos

$$K(x)\cdot y''(x) \; + \; K'(x)\cdot y'(x) \; + \; Q(x)\cdot y(x) \; = \; 0$$

Para que esta ecuación coincida con (2.1), se tiene que dar que

$$\frac{1}{(K(x))} \; = \; \frac{(A(x))}{(K'(x))} \; = \; \frac{(B(x))}{(Q(x))} \qquad (2.3)$$

Centrándonos en la primera igualdad, tenemos que

$$\frac{1}{(K(x))} \; = \; \frac{(A(x))}{(K'(x))} \quad ; \quad \frac{(K'(x))}{(K(x))} \; = \; A(x) \quad ; \quad \int [\frac{(K'(x))}{(K(x))}]dx \; = \; \int A(x)dx \quad ;$$

$$\ln(K(x))dx \; = \; \int A(x)dx \quad ; \quad K(x) \; = \; e^{[\int A(x)dx]}$$

Ahora, de los extremos de la igualdad (2.3) tenemos que

$$\frac{1}{(K(x))} \; = \; \frac{(B(x))}{(Q(x))} \quad ; \quad Q(x) \; = \; B(x)\cdot K(x) \quad ; \quad Q(x) \; = \; B(x)\cdot e^{[\int A(x)dx]}$$

Por lo que sustituyendo los valores de *K(x)* y *Q(x)*, la ecuación (2.2) nos queda de la forma

$$\frac{d}{dx}[y'(x)\cdot e^{[\int_a^x A(u)du]}] \; + \; B(x)\cdot e^{[\int_a^x A(u)du]}\cdot y(x) \; = \; 0 \qquad \text{donde} \quad x\in[a,b] \qquad (2.4)$$

Ahora, sea $t=t(x)$ una función de x en [*a*, *b*], estrictamente creciente, tal que

$$t \;=\; t(x) \;=\; \int_a^x [e^{[-\int_a^v A(u)du]}]\,dv$$

Evaluando esta función en ambos extremos del dominio, tenemos que para $x=a$ y $x=b$ se tiene

$$t(a) \;=\; \int_a^a [e^{[-\int_a^v A(u)du]}]\,dv \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad t(b) \;=\; \int_a^b [e^{[-\int_a^v A(u)du]}]\,dv \;=\; H$$

Por lo tanto, también se puede definir x como función de t: $\qquad x=x(t)$ para $t\in[0,H]$.

Por otra parte, si derivamos $t(x)$ con respecto de x tenemos

$$\frac{d}{dx}t(x) \;=\; e^{[-\int_a^x A(u)du]}$$

Entonces, notemos que

$$y'(x) \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; (\frac{dy}{dx})\cdot(\frac{dt}{dt}) \;=\; (\frac{dy}{dt})\cdot(\frac{dt}{dx}) \;=\; \frac{dy}{dt}\cdot e^{[-\int_a^x A(u)du]}$$

Sustituyendo este resultado por $y'(x)$ en (2.4) nos da que

$$\frac{d}{dx}[\frac{dy}{dt}\cdot e^{[-\int_a^x A(u)du]}\cdot e^{[\int_a^x A(u)du]}] \;+\; B(x)\cdot e^{[\int_a^x A(u)du]}\cdot y(x) \;=\; 0 \qquad ;$$

$$\left.\frac{d}{dx}\cdot[\frac{dy}{dt}] \;+\; B(x)\cdot e^{[\int_a^x A(u)du]}\cdot y(x) \;=\; 0 \qquad\right\} \quad (2.5)$$

Centrándonos en el primer sumando de esta ecuación tenemos

$$\frac{d}{dx}\cdot[\frac{dy}{dt}] \;=\; \frac{d}{dt}\cdot[\frac{dy}{dx}] \;=\; \frac{d}{dt}\cdot[\frac{dy}{dt}\cdot e^{[-\int_a^x A(u)du]}] \;=\; \frac{(d^2 y)}{dt^2}\cdot e^{[-\int_a^x A(u)du]}$$

Por lo que sustituyendo esto en (2.5), nos queda

$$\frac{(d^2 y)}{dt^2}\cdot e^{[-\int_a^x A(u)du]} \;+\; B(x)\cdot e^{[\int_a^x A(u)du]}\cdot y(x) \;=\; 0$$

y multiplicando toda la ecuación por $e^{[\int_a^x A(u)du]}$ obtenemos

$$\frac{(d^2 y)}{dt^2} \;+\; B(x)\cdot(e^{[\int_a^x A(u)du]})^2\cdot y(x) \;=\; 0$$

Teniendo en cuenta que x depende de *t*, e y depende de x, reescribimos esta ecuación de la siguiente manera

$$\left.\frac{(d^2 y(x(t)))}{dt^2} + B(x(t))\cdot(e^{[\int_a^{x(t)} A(u)du]})^2\cdot y(x(t)) = 0 \right\} \quad (2.6)$$

En este punto, si ponemos

$$y(x(t)) = z(t) \qquad \text{y} \qquad B(x(t))\cdot(e^{[\int_a^{x(t)} A(u)du]})^2 = C(t)$$

podemos escribir (2.6) de la forma

$$\left.\frac{(d^2 z(t))}{dt^2} + C(t)\cdot z(t) = 0 \qquad \text{para} \quad t\in[0,H] \right\} \quad (2.7)$$

que es la forma normal de la ecuación (2.1).

Probemos ahora que la función $y(x)$ es una solución de (2.1) si y sólo si $y(x(t))=z(t)$ es una solución de (2.7).

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones de (2.1).

Sean $z_1(t)$ y $z_2(t)$ las soluciones de (2.7) transformadas de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ respectivamente.

Partiendo del Wronskiano de las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tenemos

$$W(y_1(x),y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x(t)) & y_2(x(t)) \\ \frac{dy_1}{dx}(x(t)) & \frac{dy_2}{dx}(x(t)) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x(t)) & y_2(x(t)) \\ (\frac{dy_1}{dt})\cdot(\frac{dt}{dx}) & (\frac{dy_2}{dt})\cdot(\frac{dt}{dx}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ (\frac{dz_1}{dt})\cdot(\frac{dt}{dx}) & (\frac{dz_2}{dt})\cdot(\frac{dt}{dx}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ \frac{dz_1}{dt} & \frac{dz_2}{dt} \end{vmatrix}\cdot(\frac{dt}{dx}) =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix}\cdot e^{[-\int_a^{x} A(u)du]} = W(z_1(t),z_2(t))\cdot e^{[-\int_a^{x(t)} A(u)du]}$$

Por lo tanto, dado que la exponencial no puede ser cero, $W(y_1(x),y_2(x))$ únicamente se anulará en [*a*, *b*] si y sólo si $W(z_1(t),z_2(t))$ se anula en [0, *H*].

Equivalentemente, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes si y sólo si $z_1(t)$ y $z_2(t)$ son linealmente independientes.

Ahora, comprobemos que la reducción de la ecuación diferencial lineal y homogénea a forma normal llevada a cabo no altera los ceros o raíces de las soluciones de la ecuación.

Tenemos que $y(x)$ es una solución de (2.1) y $z(t)$ es una solución de (2.7) transformada de $y(x)$.

Sea x_0 un cero de $y(x)$ en [a, b].

Si $t_0 = t(x_0)$, se da que

$$z(t_0) = z(t(x_0)) = y(x_0) = 0$$

Por lo que todo cero de $y(x)$ se transforma en un cero de $z(t)$.

Dado que $t = t(x)$ es una función estrictamente creciente en el intervalo [a, b], dos ceros consecutivos de $y(x)$ se transforman en dos ceros consecutivos de $z(t)$.

Del mismo modo, sea t_1 un cero de $z(t)$ en [0, H].

Si $x_1 = x(t_1)$, se tiene que

$$y(x_1) = y(x(t_1)) = z(t_1) = 0$$

Por lo que todo cero de $z(t)$ se transforma en un cero de $y(x)$.

Dado que $x = x(t)$ es una función estrictamente creciente en el intervalo [0, H], dos ceros consecutivos de $z(t)$ se transforman en dos ceros consecutivos de $y(x)$.

3. Teoremas de Sturm

Sean las ecuaciones diferenciales

$$y_1''+A(x)\cdot y_1'+B(x)\cdot y_1 = 0 \qquad (3.1)$$

$$y_2''+A(x)\cdot y_2'+B_1(x)\cdot y_2 = 0 \qquad (3.2)$$

siendo $A(x)$, $B(x)$ y $B_1(x)$ funciones continuas en el intervalo cerrado [a, b].

Teorema 3.1. (Teorema de comparación de Sturm)

Sean $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *dos soluciones no idénticamente nulas de (3.1) y (3.2) respectivamente. Sean* x_1 *y* x_2 *dos ceros consecutivos de* $y_1(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$.

Entonces se tiene que:

– *Si* $B(x)\leqslant B_1(x) \quad \forall x\in[x_1,x_2]$, *entonces* $y_2(x)$ *tiene un cero en el intervalo cerrado* $[x_1,x_2]$.

– *Si* $B(x)\leqslant B_1(x) \quad \forall x\in[x_1,x_2]$ *donde no se tiene que* $B(x)\equiv B_1(x)$, *entonces* $y_2(x)$ *tiene un cero en el intervalo abierto* (x_1,x_2).

<u>Demostración:</u>

Por medio del cambio de variable independiente

$$t = t(x) = \int_a^x [e^{-\int_a^v (A(u)du)}]dv$$

las ecuaciones (3.1) y (3.2) se convierten en

$$z_1''(t)+c(t)\cdot z_1(t) = 0 \qquad (3.3)$$

$$z_2''(t)+c_1(t)\cdot z_2(t) = 0 \qquad (3.4)$$

donde $t\in[0,H]$.

También, la solución $y_1(x)$ de (3.1) se transforma en la solución $z_1(t)$ de (3.3).

Del mismo modo, la solución $y_2(x)$ de (3.2) se transforma en la solución $z_2(t)$ de (3.4).

Además, si x_1 y x_2 son dos ceros consecutivos de la función $y_1(x)$, tenemos que $t_1=t(x_1)$ y $t_2=t(x_2)$ son dos ceros consecutivos de la función $z_1(t)$.

Deducimos de $B(x)\leqslant B_1(x) \quad \forall x\in[x_1,x_2]$ que obviamente

$$c(t) \;=\; B(x(t))\cdot[e^{(\int_a^{x(t)} A(u)du)}]^2 \;\leq\; B_1(x(t))\cdot[e^{(\int_a^{x(t)} A(u)du)}]^2 \;=\; c_1(t) \qquad \text{con} \quad t\in[0,H]$$

Por otro lado, desarrollemos

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)] \;=\; z_1'(t)\cdot z_2'(t)+z_1(t)\cdot z_2''(t)-z_1''(t)\cdot z_2(t)-z_1'(t)\cdot z_2'(t) \;=$$

$$=\; z_1(t)\cdot z_2''(t)-z_1''(t)\cdot z_2(t)$$

y como sabemos de (3.3) y (3.4) que $z_1''(t)=-c(t)\cdot z_1(t)$ y que $z_2''(t)=-c_1(t)\cdot z_2(t)$, sustituyendo estas en el resultado anterior tenemos que

$$z_1(t)\cdot z_2''(t)-z_1''(t)\cdot z_2(t) \;=\; -c_1(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)-[-c(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)] \;=$$

$$=\; -c_1(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)+c(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t) \;=\; [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)$$

Recapitulando, tenemos que

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)] \;=\; [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)$$

Ahora integramos ambos lados de esta igualdad entre t_1 y t_2

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)]\right)dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \quad ;$$

$$z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)\,\Bigg|_{t_1}^{t_2} \;=\; \int_{t_1}^{t_2}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \quad ;$$

$$\int_{t_1}^{t_2}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \;=\; z_1(t_2)\cdot z_2'(t_2)-z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)-z_1(t_1)\cdot z_2'(t_1)+z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1)$$

Puesto que $z_1(t_2)\cdot z_2'(t_2)=0$ al ser $z_1(t_2)=0$ por ser t_2 un cero de $z_1(t)$ y dado que $-z_1(t_1)\cdot z_2'(t_1)=0$ al ser $z_1(t_1)=0$ por ser t_1 un cero de $z_1(t)$, tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \quad = \quad -z_1{}'(t_2)\cdot z_2(t_2)+z_1{}'(t_1)\cdot z_2(t_1)$$

Primera parte.

Ahora supongamos que la primera parte del teorema no es cierta, es decir, supongamos que no existe ningún cero de $y_2(x)$ en el intervalo $[x_1,x_2]$.

Como $y_2(x)$ es una función continua en el intervalo [*a*, *b*], también será continua en el intervalo $[x_1,x_2]$, dado que $[x_1,x_2]\subset[a,b]$.

Tomando que no existe ningún cero de $y_2(x)$ en el intervalo $[x_1,x_2]$, entonces $y_2(x)$ no se anula en este intervalo y por tanto $y_2(x)$ tendrá signo constante a lo largo de todo el intervalo.

Equivalentemente, podemos afirmar que $z_2(t)$ tendrá signo constante a lo largo de todo el intervalo $[t_1,t_2]$.

Además, como t_1 y t_2 son dos ceros consecutivos de $z_1(t)$, y teniendo en cuenta que $z_1(t)$ es una función continua a lo largo de todo el intervalo $[0,H]$, tenemos que $z_1(t)$ tiene signo constante en el intervalo abierto (t_1,t_2).

Ahora supongamos que $z_2(t)>0 \quad \forall t\in[t_1,t_2]$. Si tuviéramos que $z_2(t)<0 \quad \forall t\in[t_1,t_2]$, razonaríamos con la solución $-y_2(x)$ de (3.2), la cual tiene exactamente los mismos ceros que $y_2(x)$. Por la misma razón, podemos suponer que $z_1(t)>0 \quad \forall t\in(t_1,t_2)$.

La solución de (3.3) que se anula en t_1 y que también tiene nula la derivada en t_1 es la idénticamente nula, por tanto $z_1{}'(t_1)\neq 0$. Análogamente, tenemos que $z_1{}'(t_2)\neq 0$.

Por otro lado, por la definición de derivada de $z_1(t)$ en el punto t_1

$$z_1{}'(t_1) \quad = \quad \limsup_{t\to t_1}\left[\frac{(z_1(t)-z_1(t_1))}{(t-t_1)}\right] \quad = \quad \limsup_{t\to t_1}\left[\frac{(z_1(t))}{(t-t_1)}\right]$$

dado que $-z_1(t_1)=0$ por ser t_1 un cero de z_1.

Entonces, como $z_1(t)>0 \quad \forall t\in(t_1,t_2)$ y como $\limsup_{t\to t_1}(t-t_1)>0$, tenemos que $z_1{}'(t_1)>0$ dado que $z_1{}'(t_1) \;=\; \limsup_{t\to t_1}\left[\frac{(z_1(t))}{(t-t_1)}\right] \;>\; 0$.

Adicionalmente, por la definición de derivada de $z_1(t)$ en el punto t_2 tenemos que

$$z_1'(t_2) \;=\; \liminf_{t\to t_2}\left[\frac{(z_1(t)-z_1(t_2))}{(t-t_2)}\right] \;=\; \liminf_{t\to t_2}\left[\frac{(z_1(t))}{(t-t_2)}\right]$$

dado que $-z_1(t_2)=0$ por ser t_2 un cero de z_1.

Entonces, como $z_1(t)>0 \quad \forall t\in(t_1,t_2)$ y como $\liminf_{t\to t_2}(t-t_2)<0$, tenemos que $z_1'(t_2)<0$ dado que $z_1'(t_2) \;=\; \liminf_{t\to t_2}\left[\frac{(z_1(t))}{(t-t_2)}\right] \;<\; 0$.

Por lo tanto, volviendo a la integral

$$\left.\int_{t_1}^{t_2}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \;=\; -z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)+z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1)\right\} \qquad (3.5)$$

En el lado derecho tenemos los elementos $z_1'(t_2)<0$, $z_2(t_2)>0$, $z_1'(t_1)>0$ y $z_2(t_1)>0$.

por lo que los sumandos tienen los signos

$$-z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2) \;>\; 0 \qquad \text{y} \qquad z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1) \;>\; 0$$

y todo junto:

$$-z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)+z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1) \;>\; 0$$

Ahora, en el lado izquierdo de la igualdad (3.5) tenemos que

como $c(t) \;=\; B(x(t))\cdot[e^{(\int_a^{x(t)} A(u)du)}]^2 \;\le\; B_1(x(t))\cdot[e^{(\int_a^{x(t)} A(u)du)}]^2 \;=\; c_1(t)$ para $t\in[0,H]$,

entonces $c_1(t)\geqslant c(t)$ y por tanto $c(t)-c_1(t)\leqslant 0 \quad \forall t\in[0,H]$.

También, como hemos supuesto que $z_1(t)\geqslant 0$ y $z_2(t)>0 \quad \forall t\in[t_1,t_2]$

entonces tenemos que $z_1(t)\cdot z_2(t)\geqslant 0 \quad \forall t\in[t_1,t_2]$.

Por lo que, recapitulando, tenemos que los signos de los elementos del lado izquierdo de la igualdad (3.5) son

$$c(t)-c_1(t)\leqslant 0 \quad \text{y} \quad z_1(t)\cdot z_2(t)\geqslant 0 \qquad \forall t\in[t_1,t_2].$$

por consiguiente, claramente tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \;\le\; 0$$

Entonces, como el lado derecho de la igualdad (3.5) era $-z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)+z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1)>0$, tenemos que combinado con el valor de la integral del lado izquierdo de (3.5):

$$\int_{t_1}^{t_2} [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \quad < \quad -z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)+z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1)$$

desigualdad la cual se contradice enormemente con la igualdad (3.5).

Por tanto, la suposición que habíamos hecho de $z_2(t)>0 \quad \forall t\in[t_1,t_2]$ no es cierta, $z_2(t)$ sí se anula para algún punto en el intervalo $[t_1,t_2]$, y por consiguiente existe un cero de $z_2(t)$ en el intervalo cerrado $[t_1,t_2]$.

Llamemos t_3 a este cero tal que $z_2(t_3)=0$ con $t_3\in[t_1,t_2]$.
Sea $x_3=x(t_3)$ tal que $x_3\in[x_1,x_2]$.
Como t_3 es un cero de $z_2(t)$, entonces x_3 es un cero de $y_2(x)$. Por lo tanto, queda demostrada la primera parte del teorema de comparación.

Segunda parte.

Procedamos como hemos hecho para la primera parte y supongamos que la segunda parte del teorema no es cierta, es decir, supongamos que no existe ningún cero de $y_2(x)$ en el intervalo abierto (x_1,x_2), o lo que es lo mismo, que $y_2(x)$ no se anula para ningún valor de x en el intervalo abierto (x_1,x_2).
Equivalentemente, $z_2(t)$ no se anula en (t_1,t_2).
$z_1(t)$ tampoco se anula en (t_1,t_2).

De igual manera que hemos hecho en la demostración de la primera parte, supongamos que $z_2(t)>0$ y $z_1(t)>0 \quad \forall t\in(t_1,t_2)$.

Del mismo modo que antes, obtendremos que $z_1'(t_1)>0$ y $z_1'(t_2)<0$.

Por lo que volviendo a la igualdad (3.5), tendremos que los sumandos del lado derecho de la igualdad tendrán los signos

$$-z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)\geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1)\geqslant 0$$

por lo que nos queda que todo el lado derecho de la igualdad es

$$-z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)+z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1)\geqslant 0$$

Y de la primera parte sabemos que el lado izquierdo de la igualdad (3.5),
$[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)$, es menor o igual que cero en el intervalo cerrado $[t_1,t_2]$ y no es idénticamente nula en este intervalo, por tanto

$$\int_{t_1}^{t_2} [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \;<\; 0$$

Por lo tanto, juntando las dos desigualdades que acabamos de obtener, nos queda la relación

$$\int_{t_1}^{t_2} [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt \;<\; -z_1'(t_2)\cdot z_2(t_2)+z_1'(t_1)\cdot z_2(t_1)$$

lo que se contradice radicalmente con la igualdad (3.5).

Por consiguiente, la suposición inicial que hemos hecho es falsa, lo que implica que $z_2(t)$ sí se anula en el intervalo abierto (t_1,t_2), es decir, existe un cero $t_4\in(t_1,t_2)$ de $z_2(t)$ de manera que $z_2(t_4)=0$.
Como t_4 es un cero de $z_2(t)$, entonces $x_4=x(t_4)$ es un cero de $y_2(x)$, con $x_4\in(x_1,x_2)$.
De este modo, ha quedado demostrada la segunda parte del teorema de comparación.

Teorema 3.2. (Teorema de separación de Sturm)

Sean $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$ *dos soluciones independientes de (3.1) .*
Si x_1 *y* x_2 *son dos ceros consecutivos de* $u_1(x)$, *entonces existe un único cero de* $u_2(x)$ *en el intervalo abierto* (x_1,x_2).

Demostración:

Para demostrarlo apoyándonos en el teorema de comparación, digamos que $u_2(x)$ es una solución de (3.2) donde tenemos que $B(x)\equiv B_1(x)$, de esta manera (3.1) y (3.2) son la misma ecuación diferencial y $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$ *son dos soluciones de la misma ecuación diferencial*.

Por lo tanto, aplicando la primera parte del teorema de comparación, tenemos que $u_2(x)$ tiene un cero, al que denominaremos x_3, tal que $x_3\in[x_1,x_2]$. Entonces $u_2(x_3)=0$.

Por otro lado, sabemos que x_1 es un cero de $u_1(x)$.
Si también se diera que x_1 fuera un cero de $u_2(x)$, tal que $u_2(x_1)=0$, se tendría que el Wronskiano de las funciones $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$ en x_1 sería

$$W(u_1(x_1),u_2(x_1)) \;=\; \begin{vmatrix} u_1(x_1) & u_2(x_1) \\ u_1'(x_1) & u_2'(x_1)\end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ u_1'(x_1) & u_2'(x_1)\end{vmatrix} \;=\; 0$$

por lo que las soluciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ serían linealmente dependientes, lo que es una clara contradicción frente a la hipótesis inicial del teorema. Por lo tanto, sabemos que $u_2(x_1)\neq 0$ y que por tanto x_1 no es un cero de $u_2(x)$.

Del mismo modo, se obtiene que $u_2(x_2) \neq 0$, por lo que x_2 tampoco es un cero de $u_2(x)$.

Entonces, claramente tenemos que $x_3 \in (x_1, x_2)$.

Probemos ahora que x_3 es el único cero de $u_2(x)$ que existe en el intervalo abierto (x_1, x_2).

Para ello, comencemos suponiendo que hubiese más de un cero de la solución $u_2(x)$ en el intervalo (x_1, x_2).
Entonces deberían existir dos ceros consecutivos x_4 y x_5 de $u_2(x)$ en el intervalo (x_1, x_2), dado que si no fuese así, habría un conjunto denso de ceros de $u_2(x)$ en (x_1, x_2), y por consiguiente $u_2(x)$ se anularía en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, por ser una función continua, lo cual va en contra de la hipótesis.

Si aplicamos la parte demostrada del teorema, podríamos determinar un punto x_6 tal que

$$x_6 \in (x_4, x_5) \subset (x_1, x_2)$$

en el que se anularía la solución $u_1(x)$, es decir, se tendría que $x_6 \in (x_1, x_2)$ es un cero de $u_1(x)$, pero esto es imposible dado que x_1 y x_2 son dos ceros consecutivos de $u_1(x)$ en ese intervalo.

Por tanto, la suposición que hemos hecho es falsa, y por lo tanto no existe más de un cero de la solución $u_2(x)$ en el intervalo (x_1, x_2). x_3 es el único cero de $u_2(x)$ en ese intervalo.

Teorema 3.3.

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones no idénticamente nulas de (3.1) y (3.2) respectivamente, de manera que $y_1(a) = y_2(a)$, $y_1'(a) = y_2'(a)$, $B(x) < B_1(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el número de ceros de $y_2(x)$ en [a, b] es mayor o igual que el número de ceros de $y_1(x)$ en el mismo intervalo.

Demostración:

Con el cambio de variable independiente

$$t = t(x) = \int_a^x [e^{-\int_a^v (A(u)du)}]dv$$

las ecuaciones (3.1) y (3.2) se transforman en

$$z_1''(t) + c(t) \cdot z_1(t) = 0 \qquad (3.3)$$

$$z_2''(t)+c_1(t)\cdot z_2(t) \;=\; 0 \tag{3.4}$$

donde $t\in[0,H]$.

También, las soluciones $y_1(x)$ de (3.1) se transforman en las soluciones $z_1(t)$ de (3.3). Asimismo, las soluciones $y_2(x)$ de (3.2) se transforman en las soluciones $z_2(t)$ de (3.4).

Si x_0 es el primer cero de $y_1(x)$ en el intervalo]*a*, *b*], entonces sabemos que $t_0=t(x_0)$ es el primer cero de $z_1(t)$ en el intervalo]0, *H*].

Deducimos de $B(x)<B_1(x) \quad \forall x\in[x_1,x_2]$ que obviamente

$$c(t) \;=\; B(x(t))\cdot[e^{(\int_a^{x(t)} A(u)du)}]^2 \;<\; B_1(x(t))\cdot[e^{(\int_a^{x(t)} A(u)du)}]^2 \;=\; c_1(t) \qquad \text{con} \quad t\in[0,H]$$

Por otro lado, desarrollemos

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)] \;=\; z_1'(t)\cdot z_2'(t)+z_1(t)\cdot z_2''(t)-z_1''(t)\cdot z_2(t)-z_1'(t)\cdot z_2'(t) \;=$$
$$=\; z_1(t)\cdot z_2''(t)-z_1''(t)\cdot z_2(t)$$

y como sabemos de (3.3) y (3.4) que $z_1''(t)=-c(t)\cdot z_1(t)$ y que $z_2''(t)=-c_1(t)\cdot z_2(t)$, sustituyendo estas en el resultado anterior tenemos que

$$z_1(t)\cdot z_2''(t)-z_1''(t)\cdot z_2(t) \;=\; -c_1(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)-[-c(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)] \;=$$
$$=\; -c_1(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)+c(t)\cdot z_1(t)\cdot z_2(t) \;=\; [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)$$

Recapitulando, tenemos que

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)] \;=\; [c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)$$

Ahora integremos ambos lados de esta igualdad entre 0 y t_0

$$\int_0^{t_0} (\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)])dt \;=\; \int_0^{t_0}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)dt \quad ;$$

$$z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)\Big|_0^{t_0} \;=\; \int_0^{t_0}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)dt \quad ;$$

$$\int_0^{t_0}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)dt \;=\; z_1(t_0)\cdot z_2'(t_0)-z_1'(t_0)\cdot z_2(t_0)-z_1(0)\cdot z_2'(0)+z_1'(0)\cdot z_2(0)$$

Como t_0 es un cero de $z_1(t)$, entonces $z_1(t_0)\cdot z_2{}'(t_0)=0$.

Además, como $y_1(a)=y_2(a)$, deducimos que $z_1(0)=z_2(0)$.

De igual forma, como $y_1{}'(a)=y_2{}'(a)$, deducimos que $z_1{}'(0)=z_2{}'(0)$.

Entonces tenemos que $-z_1(0)\cdot z_2{}'(0)+z_1{}'(0)\cdot z_2(0) \;=\; -z_1(0)\cdot z_1{}'(0)+z_1{}'(0)\cdot z_1(0) \;=\; 0$

Por lo que volviendo a la integral resulta que

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{t_0}[c(t)-c_1(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt &= -z_1{}'(t_0)\cdot z_2(t_0)\\ \int_0^{t_0}[c_1(t)-c(t)]\cdot z_1(t)\cdot z_2(t)\,dt &= z_1{}'(t_0)\cdot z_2(t_0)\end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

Ahora supongamos que $z_2(t)$ no se anula en el intervalo abierto $(0,t_0)$.
Como $z_1(0)=z_2(0)$ y $z_1{}'(0)=z_2{}'(0)$, puede ocurrir o bien que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ sean ambos positivos o bien que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ sean ambos negativos a lo largo de todo este intervalo.

Dado que $z_1(t_0)=0$ y $z_1(t)$ no es idénticamente nula en el intervalo $[0,H]$, tenemos que $z_1{}'(t_0)\neq 0$ al aplicar el teorema de unicidad para la solución del problema de condiciones iniciales en una ecuación diferencial ordinaria.

En el caso en que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ sean positivas, tendremos que

$$z_1{}'(t_0) \;=\; \liminf_{t\to t_0}\left[\frac{(z_1(t)-z_1(t_0))}{(t-t_0)}\right] \;=\; \liminf_{t\to t_0}\left[\frac{(z_1(t))}{(t-t_0)}\right] \;<\; 0$$

puesto que t_0 será mayor que t.

Por tanto, el producto a la derecha de la igualdad (3.6) será negativo o cero, mientras que la integral a la izquierda de la igualdad será positiva, por lo que se trata de una contradicción.

En el caso en que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ sean negativas, tendremos que

$$z_1{}'(t_0) \;=\; \liminf_{t\to t_0}\left[\frac{(z_1(t)-z_1(t_0))}{(t-t_0)}\right] \;=\; \liminf_{t\to t_0}\left[\frac{(z_1(t))}{(t-t_0)}\right] \;>\; 0$$

Por lo que, de nuevo, el producto a la derecha de la igualdad (3.6) será negativo o cero, mientras que la integral a la izquierda de la igualdad será mayor que cero, por lo que se trata de una contradicción.
Entonces debemos afirmar que $z_2(t)$ sí se anula en el intervalo abierto $(0,t_0)$.

Si t_1 y t_2 son dos ceros consecutivos de $z_1(t)$, aplicando el Teorema 3.1 obtenemos que existe un cero t_3 en el intervalo abierto (t_1, t_2) de $z_2(t)$.

Concluimos entonces que la cantidad de ceros de $z_2(t)$ en el intervalo $]0, H]$ es mayor o igual que la cantidad de ceros de $z_1(t)$ en ese mismo intervalo, por tanto la cantidad de ceros de $y_2(x)$ en el intervalo $]a, b]$ es mayor o igual que la cantidad de ceros de $y_1(x)$ en ese mismo intervalo.

Por último, como $y_1(a) = y_2(a)$, el número de ceros de $y_2(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ es mayor o igual que el número de ceros de $y_1(x)$ en este mismo intervalo.

4. Sistema de Sturm-Liouville

Al siguiente sistema se le llama sistema de Sturm-Liouville.

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\cdot y'\right) \;+\; \left(\lambda\rho(x)-q(x)\right)y \;=\; 0 & \text{(4.1a)} \\[2ex] a_1\cdot y(a)+a_2\cdot y'(a)=0 \;\;;\;\; |a_1|+|a_2|\neq 0 & \text{(4.1b)} \\[2ex] b_1\cdot y(b)+b_2\cdot y'(b)=0 \;\;;\;\; |b_1|+|b_2|\neq 0 & \text{(4.1c)} \end{array}\right\} \quad (4.1)$$

Donde $p(x)$, $\rho(x)$ y $q(x)$ son funciones reales continuas y definidas sobre el intervalo cerrado [*a*, *b*]. Además, $p(x)>0$ y $\rho(x)>0$ a lo largo de todo el intervalo [*a*, *b*]. También, $p'(x)$ es continua en todo el intervalo. Por último, λ es un parámetro real.

El problema de Sturm-Liouville consiste en estudiar las soluciones $y(x)$ para los distintos valores de λ que cumplen las denominadas condiciones de contorno (4.1b) y (4.1c).

Definición 1

Se les llama valores propios o autovalores a los valores de λ para los que existen soluciones no triviales de (4.1).

Definición 2

Si λ_n es un autovalor e $y_n(x)$ es una solución del sistema (4.1) correspondiente a λ_n, entonces decimos que $y_n(x)$ es una autofunción o función propia correspondiente a λ_n.

Teorema 4.1.

Sea λ_n un autovalor de (4.1), el conjunto de las soluciones del sistema (4.1) correspondientes a este valor propio forman un espacio vectorial de dimensión uno sobre el cuerpo de los números reales.

<u>Demostración:</u>

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones propias de (4.1) correspondientes a λ_n.

Dividiremos la demostración en dos partes, la primera tomando el valor de $a_2 \neq 0$ y la segunda tomando $a_2 = 0$.

Entonces, suponiendo primero que $a_2 \neq 0$, si $y_2(a) = 0$ tendremos que por (4.1b)

$$a_1 \cdot y_2(a) + a_2 \cdot y_2'(a) = 0 \quad ; \quad a_2 \cdot y_2'(a) = 0 \quad ; \quad y_2'(a) = 0$$

ya que $a_2 \neq 0$.

Por el teorema de unicidad de la solución de una ecuación diferencial, con condiciones iniciales, resulta que $y_2(x) \equiv 0$ para todo $x \in [a, b]$, lo cual es una contradicción. Por tanto $y_2'(a) \neq 0$.

Ahora, $y_1(x) - c \cdot y_2(x)$ es una función que claramente satisface la ecuación diferencial (4.1a),

siendo $c = \dfrac{(y_1(a))}{(y_2(a))}$

*S*e cumple que

$$y_1(a) - c \cdot y_2(a) \; = \; y_1(a) - \frac{(y_1(a))}{(y_2(a))} \cdot y_2(a) \; = \; y_1(a) - y_1(a) \; = 0$$

Por otro lado, reorganizando (4.1b) tenemos que

$$a_1 \cdot y(a) + a_2 \cdot y'(a) = 0 \quad ; \quad a_2 \cdot y'(a) \; = \; -a_1 \cdot y(a) \quad ; \quad y'(a) \; = \; -\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot y(a)$$

Por consiguiente, para $y_1'(a)$ e $y_2'(a)$ tenemos que

$$y_1'(a) \; = \; -\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot y_1(a) \qquad ; \qquad y_2'(a) \; = \; -\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot y_2(a)$$

por lo que

$$y_1'(a) - c \cdot y_2'(a) \; = \; -\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot y_1(a) - c \cdot \left(-\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot y_2(a)\right) \; = \; -\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot y_1(a) + c\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot y_2(a) \; =$$

$$= \; \left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot (c \cdot y_2(a) - y_1(a)) \; = \; \left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot \left(\frac{(y_1(a))}{(y_2(a))} \cdot y_2(a) - y_1(a)\right) \; = \; \left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot (y_1(a) - y_1(a)) \; =$$

$$= \; \left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot 0 \; = \; 0$$

Por tanto $y_1'(a) - c \cdot y_2'(a) \; = \; 0$ y aplicando de nuevo el teorema de unicidad nos queda que

$$y_1(x) - c \cdot y_2(x) \; = \; 0 \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b]$$

lo que implica que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes.

Para la segunda parte de la demostración, suponemos que $a_2 = 0$.

De (4.1b), $|a_1| + |a_2| \neq 0$, observamos que necesariamente $a_1 \neq 0$.

Poniendo ahora $k = \dfrac{(y_1'(a))}{(y_2'(a))}$ y sabiendo que la ecuación diferencial (4.1a) es satisfecha por la

función $y_1(x) - k \cdot y_2(x)$, se verifica además que

$$y_1'(a) - k \cdot y_2'(a) \;=\; y_1'(a) - \frac{(y_1'(a))}{(y_2'(a))} \cdot y_2'(a) \;=\; y_1'(a) - y_1'(a) \;=\; 0$$

Por otra parte, reorganizando (4.1b) tenemos que

$$a_1 \cdot y(a) + a_2 \cdot y'(a) = 0 \;\;;\;\; a_1 \cdot y(a) \;=\; -a_2 \cdot y'(a) \;\;;\;\; y(a) \;=\; -\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot y'(a)$$

Entonces para $y_1(a)$, $y_2(a)$ tenemos que

$$y_1(a) \;=\; -\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot y_1'(a) \qquad ; \qquad y_2(a) \;=\; -\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot y_2'(a)$$

por lo que

$$y_1(a) - k \cdot y_2(a) \;=\; -\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot y_1'(a) - k \cdot \left(-\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot y_2'(a)\right) \;=\; -\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot y_1'(a) + k\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot y_2'(a)\text{¿} \;=$$

$$= \;\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot \left(k \cdot y_2'(a) - y_1'(a)\right) \;=\; \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot \left(\frac{(y_1'(a))}{(y_2'(a))} \cdot y_2'(a) - y_1'(a)\right) \;=\; \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot \left(y_1'(a) - y_1'(a)\right) \;=$$

$$= \;\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot 0 \;=\; 0$$

Por tanto $y_1(a) - k \cdot y_2(a)$ $= 0$ y aplicando de nuevo el teorema de unicidad nos queda que

$$y_1(x) - k \cdot y_2(x) \;=\; 0 \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b]$$

lo que implica que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes.

Para concluir, toda función de la forma $\alpha \cdot y_1(x)$, con α real, es solución del sistema (4.1), por lo que el espacio de las soluciones de (4.1) correspondiente a λ_n es de dimensión uno.

Definición 3

Sean $f_1(x)$ *y* $f_2(x)$ *funciones continuas sobre el intervalo* [*a*, *b*].

Se dice que las funciones $f_1(x)$ *y* $f_2(x)$ *son ortogonales respecto a la función peso* $g(x)$ *si se cumple que*

$$\int_a^b f_1(x) \cdot g(x) \cdot f_2(x) \ = \ 0$$

Teorema 4.2.

Si $y_n(x)$ *e* $y_m(x)$ *son dos autofunciones de (4.1) correspondientes a los valores propios* λ_n *y* λ_m *(con* $\lambda_n \neq \lambda_m$ *) respectivamente, entonces* $y_n(x)$ *e* $y_m(x)$ *son ortogonales en el intervalo [a, b] con respecto a la función peso* $\rho(x)$.

<u>Demostración:</u>

Como $y_n(x)$ *e* $y_m(x)$ son funciones propias de (4.1), tenemos que

$$\frac{d}{dx}(p(x) \cdot y_n'(x)) \ + \ (\lambda_n \cdot \rho(x) - q(x)) \cdot y_n(x) \ = \ 0$$

$$\frac{d}{dx}(p(x) \cdot y_m'(x)) \ + \ (\lambda_m \cdot \rho(x) - q(x)) \cdot y_m(x) \ = \ 0$$

que desarrollando las derivadas tenemos

$$p(x) \cdot y_n'' \ + \ p'(x) \cdot y_n' \ + \ (\lambda_n \cdot \rho(x) - q(x)) \, y_n \ = \ 0$$

$$p(x) \cdot y_m'' \ + \ p'(x) \cdot y_m' \ + \ (\lambda_m \cdot \rho(x) - q(x)) \, y_m \ = \ 0$$

Multiplicando la primera ecuación por $y_m(x)$ y la segunda por $y_n(x)$ obtenemos

$$p(x) \cdot y_n'' \cdot y_m \ + \ p'(x) \cdot y_n' \cdot y_m \ + \ (\lambda_n \cdot \rho(x) - q(x)) \, y_n \cdot y_m \ = \ 0$$

$$p(x) \cdot y_m'' \cdot y_n \ + \ p'(x) \cdot y_m' \cdot y_n \ + \ (\lambda_m \cdot \rho(x) - q(x)) \, y_m \cdot y_n \ = \ 0$$

Y ahora restando la segunda a la primera

$$p(x) \cdot (y_n'' y_m - y_m'' y_n) \ + \ p'(x)(y_n' y_m - y_m' y_n) \ + \ (\lambda_n \rho(x) - q(x) - \lambda_m \rho(x) + q(x)) \, y_n \, y_m \ = 0$$

$$p(x) \cdot (y_n'' \cdot y_m - y_m'' \cdot y_n) \ + \ p'(x) \cdot (y_n' \cdot y_m - y_m' \cdot y_n) \ + \ (\lambda_n - \lambda_m) \cdot \rho(x) \cdot y_n \cdot y_m \ = \ 0$$

Tomando los dos primeros sumandos,

$$p(x)\cdot(y_n''\cdot y_m - y_m''\cdot y_n) \;\;+\;\; p'(x)\cdot(y_n'\cdot y_m - y_m'\cdot y_n)$$

añadimos $\;p(x)\cdot(y_n'\cdot y_m' - y_n'\cdot y_m')\;$ (lo cual equivale a 0)

$$p(x)\cdot(y_n''\cdot y_m - y_m''\cdot y_n) \;\;+\;\; p'(x)\cdot(y_n'\cdot y_m - y_m'\cdot y_n) \;\;+\;\; p(x)\cdot(y_n'\cdot y_m' - y_n'\cdot y_m') \;\;=$$

$$=\;\; p(x)\cdot(y_n''\cdot y_m + y_n'\cdot y_m' - y_n'\cdot y_m' - y_m''\cdot y_n) \;\;+\;\; p'(x)\cdot(y_n'\cdot y_m - y_m'\cdot y_n)$$

y reorganizando esto

$$p(x)\cdot(y_n''\cdot y_m + y_n'\cdot y_m') \;\;+\;\; p'(x)\cdot(y_n'\cdot y_m) \;\;-\;\; p(x)\cdot(y_n'\cdot y_m' + y_m''\cdot y_n) \;\;-\;\; p'(x)\cdot(y_m'\cdot y_n) \;\;=$$

$$=\;\; \frac{d}{dx}(p(x)\cdot y_n'(x)\cdot y_m(x)) \;\;-\;\; \frac{d}{dx}(p(x)\cdot y_n(x)\cdot y_m'(x)) \;\;=$$

$$=\;\; \frac{d}{dx}[p(x)\cdot(y_n'(x)\cdot y_m(x) - y_n(x)\cdot y_m'(x))]$$

Entonces, recapitulando

$$p(x)\cdot(y_n''\cdot y_m - y_m''\cdot y_n) \;\;+\;\; p'(x)\cdot(y_n'\cdot y_m - y_m'\cdot y_n) \;\;=$$

$$=\;\; \frac{d}{dx}[p(x)\cdot(y_n'(x)\cdot y_m(x) - y_n(x)\cdot y_m'(x))]$$

Por lo que tomando de nuevo la ecuación

$$p(x)\cdot(y_n''\cdot y_m - y_m''\cdot y_n) \;\;+\;\; p'(x)\cdot(y_n'\cdot y_m - y_m'\cdot y_n) \;\;+\;\; (\lambda_n - \lambda_m)\cdot\rho(x)\cdot y_n\cdot y_m \;\;=\;\; 0$$

es lo mismo que

$$\frac{d}{dx}[p(x)\cdot(y_n'(x)\cdot y_m(x) - y_n(x)\cdot y_m'(x))] \;\;+\;\; (\lambda_n - \lambda_m)\cdot\rho(x)\cdot y_n\cdot y_m \;\;=\;\; 0$$

Y pasando el segundo sumando al otro lado

$$\frac{d}{dx}[p(x)\cdot(y_n'(x)\cdot y_m(x) - y_n(x)\cdot y_m'(x))] \;\;=\;\; (\lambda_m - \lambda_n)\cdot\rho(x)\cdot y_n\cdot y_m$$

Ahora integrando ambos lados entre a y b

$$\int_a^b \left(\frac{d}{dx}[p(x)\cdot(y_n'(x)\cdot y_m(x) - y_n(x)\cdot y_m'(x))]\right)dx \;\;=\;\; \int_a^b (\lambda_m - \lambda_n)\cdot\rho(x)\cdot y_n(x)\cdot y_m(x)\,dx$$

$$p(x)\cdot(y_n{}'(x)\cdot y_m(x)-y_n(x)\cdot y_m{}'(x))\Bigg|_{a}^{b} = (\lambda_m-\lambda_n)\cdot\int_a^b \rho(x)\cdot y_n(x)\cdot y_m(x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} &p(b)\cdot(y_n{}'(b)\cdot y_m(b)-y_n(b)\cdot y_m{}'(b)) \;-\; p(a)\cdot(y_n{}'(a)\cdot y_m(a)-y_n(a)\cdot y_m{}'(a)) = \\ &= (\lambda_m-\lambda_n)\cdot\int_a^b \rho(x)\cdot y_n(x)\cdot y_m(x)\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Dejando esto a parte, de (4.1b) sabemos que

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot y_n(a)+a_2\cdot y_n{}'(a) &= 0 \\ a_1\cdot y_m(a)+a_2\cdot y_m{}'(a) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

En el caso en que $a_2\neq 0$, multiplicando la primera de estas igualdades por $y_m(a)$ y la segunda por $y_n(a)$ obtenemos

$$a_1\cdot y_n(a)\cdot y_m(a)+a_2\cdot y_n{}'(a)\cdot y_m(a) = 0$$

$$a_1\cdot y_m(a)\cdot y_n(a)+a_2\cdot y_m{}'(a)\cdot y_n(a) = 0$$

y ahora restando la segunda a la primera

$$a_1\cdot y_n(a)\cdot y_m(a)+a_2\cdot y_n{}'(a)\cdot y_m(a)-a_1\cdot y_m(a)\cdot y_n(a)-a_2\cdot y_m{}'(a)\cdot y_n(a) = 0$$

$$a_2\cdot y_n{}'(a)\cdot y_m(a)-a_2\cdot y_m{}'(a)\cdot y_n(a) = 0$$

$$a_2\cdot[y_n{}'(a)\cdot y_m(a)-y_m{}'(a)\cdot y_n(a)] = 0$$

$$y_n{}'(a)\cdot y_m(a)-y_m{}'(a)\cdot y_n(a) = 0$$

En el caso en que $a_2=0$, por (4.1b) sabemos que $|a_1|+|a_2|\neq 0$ y por tanto necesariamente $a_1\neq 0$

Entonces ahora las ecuaciones en (4.3) pasan a ser

$$a_1\cdot y_n(a) = 0$$

$$a_1\cdot y_m(a) = 0$$

Multiplicando ahora la primera por $y_m{}'(a)$ y la segunda por $y_n{}'(a)$ obtenemos

$$a_1\cdot y_n(a)\cdot y_m{}'(a) = 0$$

$$a_1\cdot y_m(a)\cdot y_n{}'(a) = 0$$

y restando la segunda a la primera

$$a_1 \cdot y_n(a) \cdot y_m{}'(a) - a_1 \cdot y_m(a) \cdot y_n{}'(a) \ = \ 0$$

$$a_1 \cdot [\, y_n(a) \cdot y_m{}'(a) - y_m(a) \cdot y_n{}'(a)] \ = \ 0$$

$$y_n(a) \cdot y_m{}'(a) - y_m(a) \cdot y_n{}'(a) \ = \ 0$$

o lo que es lo mismo

$$y_n{}'(a) \cdot y_m(a) - y_n(a) \cdot y_m{}'(a) \ = \ 0$$

De forma análoga, de las ecuaciones

$$b_1 \cdot y_n(b) + b_2 \cdot y_n{}'(b) \ = \ 0$$

$$b_1 \cdot y_m(b) + b_2 \cdot y_m{}'(b) \ = \ 0$$

deducimos que

$$y_n(b) \cdot y_m{}'(b) - y_m(b) \cdot y_n{}'(b) \ = \ 0$$

o lo que es lo mismo

$$y_n{}'(b) \cdot y_m(b) - y_n(b) \cdot y_m{}'(b) \ = \ 0$$

Sustituyendo ahora estos resultados en (4.2) tenemos que

$$p(b) \cdot 0 - p(a) \cdot 0 \ = \ (\lambda_m - \lambda_n) \cdot \int_a^b \rho(x) \cdot y_n(x) \cdot y_m(x)$$

$$(\lambda_m - \lambda_n) \cdot \int_a^b \rho(x) \cdot y_n(x) \cdot y_m(x) \ = \ 0$$

y como $\lambda_n \neq \lambda_m$, concluimos que

$$\int_a^b \rho(x) \cdot y_n(x) \cdot y_m(x) \ = \ 0$$

por lo que queda demostrado que $y_n(x)$ e $y_m(x)$ son ortogonales en el intervalo [a, b] con respecto a la función peso $\rho(x)$.

5. Reducción del sistema de Sturm-Liouville a forma normal

Sea la E.D. lineal homogénea de segundo orden

$$y''(x)+A(x)\cdot y'(x)+B(x)\cdot y(x) \;=\; 0$$

donde $x\in[a,b]$ y las funciones *A(x)* y *B(x)* son continuas.

Como vimos con anterioridad, haciendo el cambio de variable independiente

$$t \;=\; t(x) \;=\; \int_a^x [e^{-\int_a^v (A(u)du)}]dv$$

la ecuación diferencial queda en la forma

$$z''(t)+c(t)\cdot z(t) \;=\; 0$$

siendo

$$c(t) \;=\; B(x(t))\cdot[e^{(\int_a^x A(u)du)}]^2$$

y donde $t\in[0,H]$, ya que

$$t(a) \;=\; \int_a^a [e^{-(\int_a^v A(u)du)}]dv \;=\; 0 \quad \text{y} \quad t(b) \;=\; \int_a^b [e^{-(\int_a^v A(u)du)}]dv \;=\; H$$

Ahora, desarrollando y derivando (4.1a) obtenemos

$$p(x)\cdot y'' \;+\; p'(x)\cdot y' \;+\; (\lambda\cdot\rho(x)-q(x))y \;=\; 0$$

que dividiendo ambos lados entre $p(x)$ nos da

$$y'' \;+\; \frac{(p'(x))}{(p(x))}\cdot y' \;+\; \frac{1}{(p(x))}(\lambda\cdot\rho(x)-q(x))y \;=\; 0$$

y esta ecuación es de la forma de una ecuación diferencial lineal homogénea, donde tendríamos que

$$A(x) \;=\; \frac{(p'(x))}{(p(x))} \qquad \text{y} \qquad B(x) \;=\; \frac{1}{(p(x))}(\lambda\cdot\rho(x)-q(x))$$

Por lo tanto

$$t \;=\; t(x) \;=\; \int_a^x [e^{-\int_a^v (A(u)du)}]dv \;=\; \int_a^x [e^{-\int_a^v (\frac{(p'(u))}{(p(u))}du)}]dv \;=\; \int_a^x [e^{-[\ln(p(v))-\ln(p(a))]}]dv \;=$$

$$=\; \int_a^x [e^{[\ln(p(a))-\ln(p(v))]}]dv \;=\; \int_a^x [e^{[\ln\frac{(p(a))}{(p(v))}]}]dv \;=\; \int_a^x [\frac{(p(a))}{(p(v))}]dv \;=\; p(a)\cdot\int_a^x (\frac{dv}{(p(v))})$$

y también

$$c(t) \;=\; B(x(t))\cdot[e^{(\int_a^x A(u)du)}]^2 \;=\; \frac{1}{(p(x))}(\lambda\cdot\rho(x)-q(x))\cdot[e^{(\int_a^x [\frac{(p'(u))}{(p(u))}]du)}]^2 \;=$$

$$=\; \frac{1}{(p(x))}(\lambda\cdot\rho(x)-q(x))\cdot[e^{([\ln(p(x))-\ln(p(a))])}]^2 \;=\; \frac{1}{(p(x))}(\lambda\cdot\rho(x)-q(x))\cdot[e^{[\ln(\frac{(p(x))}{(p(a))})]}]^2 \;=$$

$$=\; \frac{1}{(p(x))}\cdot(\lambda\rho(x)-q(x))\cdot[\frac{(p(x))}{(p(a))}]^2 \;=\; \frac{(p(x))}{(p(a))^2}(\lambda\cdot\rho(x)-q(x))$$

Además, $t(a)=0$ y

$$t(b) \;=\; H \;=\; \int_a^b [e^{-(\int_a^v A(u)du)}]dv \;=\; \int_a^b [e^{-\int_a^v (\frac{(p'(u))}{(p(u))}du)}]dv \;=\; \int_a^b [e^{-[\ln(p(v))-\ln(p(a))]}]dv \;=$$

$$=\; \int_a^b [e^{[\ln(p(a))-\ln(p(v))]}]dv \;=\; \int_a^b [e^{[\ln\frac{(p(a))}{(p(v))}]}]dv \;=\; \int_a^b [\frac{(p(a))}{(p(v))}]dv \;=\; p(a)\cdot\int_a^b (\frac{1}{(p(v))})dv$$

Para las ecuaciones de contorno, teniendo en cuenta que para $x=a$ se tiene $t(a)=0$
y como $y(x) = z(t(x))$, entonces $y(a) = z(t(a)) = z(0)$.
De la misma manera, también tenemos que como

$$y'(x)=z'(t(x))\cdot t'(x)=z'(t(x))\cdot[\frac{(p(a))}{(p(x))}]$$

entonces, en $x=a$

$$y'(a)=z'(t(a))\cdot t'(a)=z'(0)\cdot[\frac{(p(a))}{(p(a))}]=z'(0)$$

De manera análoga, teniendo en cuenta que para $x=b$ se tiene $t(b)=H$, entonces $y(b) = z(t(b)) = z(H)$. Y por la parte de las derivadas, tenemos que en $x=b$

$$y'(b)=z'(t(b))\cdot t'(b)=z'(H)\cdot[\frac{(p(a))}{(p(b))}]$$

Por lo tanto, de la ecuación de contorno (4.1b) pasamos a tener

$$a_1\cdot y(a)+a_2\cdot y'(a)=0 \;\;;\;\; |a_1|+|a_2|\neq 0 \qquad \rightarrow \qquad a_1\cdot z(0)+a_2\cdot z'(0)=0 \;\;;\;\; |a_1|+|a_2|\neq 0$$

y de la ecuación de contorno (4.1c) pasamos a tener

$$b_1 \cdot y(b) + b_2 \cdot y'(b) = 0 \quad ; \quad |b_1| + |b_2| \neq 0 \quad \rightarrow \quad b_1 \cdot z(H) + b_2 \cdot z'(H) \cdot [\frac{(p(a))}{(p(b))}] = 0 \quad ; \quad |b_1| + |b_2| \neq 0$$

donde renombrando

$$d_1 = b_1 \qquad \text{y} \qquad d_2 = b_2 \cdot [\frac{(p(a))}{(p(b))}]$$

tendremos que la ecuación de contorno (4.1c) se convierte en

$$b_1 \cdot y(b) + b_2 \cdot y'(b) = 0 \quad ; \quad |b_1| + |b_2| \neq 0 \quad \rightarrow \quad d_1 \cdot z(H) + d_2 \cdot z'(H) = 0 \quad |d_1| + |d_2| \neq 0$$

por lo que, con todo esto, nos queda el siguiente Sistema de Sturm-Liouville

$$z''(t) + c(t) \cdot z(t) = 0 \quad ; \quad t \in [0, H]$$

$$a_1 \cdot z(0) + a_2 \cdot z'(0) = 0 \quad ; \quad |a_1| + |a_2| \neq 0$$

$$d_1 \cdot z(H) + d_2 \cdot z'(H) = 0 \quad ; \quad |d_1| + |d_2| \neq 0$$

6. Proposiciones previas al teorema de oscilación

Partiendo del sistema de Sturm-Liouville

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d}{dx}(p(x)y') + (\lambda\rho(x)-q(x))y = 0 & ; & x\in[a,b] \\ a_1\cdot y(a)+a_2\cdot y'(a) = 0 & ; & |a_1|+|a_2|\neq 0 \\ b_1\cdot y(b)+b_2\cdot y'(b) = 0 & ; & |b_1|+|b_2|\neq 0 \end{array}\right\} \quad (6.1)$$

sabemos que su forma normal equivalente es

$$\left.\begin{array}{llll} z''(t)+c(t)\cdot z(t) = 0 & ; & t\in[0,H] & (6.2a) \\ a_1\cdot z(0)+a_2\cdot z'(0) = 0 & ; & |a_1|+|a_2|\neq 0 & (6.2b) \\ d_1\cdot z(H)+d_2\cdot z'(H) = 0 & ; & |d_1|+|d_2|\neq 0 & (6.2c) \end{array}\right\} \quad (6.2)$$

Consideramos ahora el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{llll} z''(t)+c(t)\cdot z(t) = 0 & ; & t\in[0,H] & (6.3a) \\ z(0)=a_2 & ; & z'(0)=-a_1 & (6.3b) \\ d_1\cdot z(H)+d_2\cdot z'(H) = 0 & & & (6.3c) \end{array}\right\} \quad (6.3)$$

Proposición 6.1.

Toda solución de (6.3) es solución de (6.2). Dada una solución no idénticamente nula $z_1(t)$ *de (6.2), existe una constante real no nula* α *y una solución* $z_2(t)$ *de (6.3), de forma que* $z_1(t)=\alpha\cdot z_2(t)$.

<u>Demostración:</u>

Para la primera parte de la demostración, es obvio que las ecuaciones en (6.3b) satisfacen la ecuación en (6.2b). Para verlo, sustituimos

$$z(0)=a_2 \quad ; \quad z'(0)=-a_1$$

en

$$a_1\cdot z(0)+a_2\cdot z'(0) = 0$$

y obtenemos

$$a_1 \cdot z(0) + a_2 \cdot z'(0) \;=\; a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot (-a_1) \;= 0$$

por lo que queda demostrado que toda solución de (6.3) es solución de (6.2).

Para la segunda parte de la demostración, comencemos suponiendo primero que $a_2 \neq 0$.

Entonces, como $a_1 \cdot z_1(0) + a_2 \cdot z_1'(0) = 0$ por (6.2b),

si $z_1(0) = 0$ entonces $a_2 \cdot z_1'(0) = 0$, y como $a_2 \neq 0$, necesariamente $z_1'(0) = 0$,

que integrando resulta que $z_1(t) = 0$ para todo $t \in [0, H]$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $z_1(0) \neq 0$.

Sea ahora $\alpha = \frac{a_2}{(z_1(0))}$, entonces se verifica que $z_2(t) = \alpha \cdot z_1(t)$ en $t = 0$ da

$$z_2(0) \;=\; \alpha \cdot z_1(0) \;=\; \frac{a_2}{(z_1(0))} \cdot z_1(0) \;=\; a_2$$

Reorganizando (6.2b) tenemos que

$$z_1'(0) = -\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot z_1(0)$$

y derivando $z_2(t) = \alpha \cdot z_1(t)$ y sustituyendo este valor obtenemos

$$z_2'(0) \;=\; \alpha \cdot z_1'(0) \;=\; \frac{a_2}{(z_1(0))} \cdot z_1'(0) \;=\; \frac{a_2}{(z_1(0))} \cdot \left(-\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot z_1(0)\right) \;=\; -a_1$$

por lo que hemos obtenido que $z_2(0) = a_2$ y que $z_2'(0) = -a_1$.

Ahora supongamos que $a_2 = 0$,

entonces de la ecuación en (6.2b) $a_1 \cdot z(0) + a_2 \cdot z'(0) = 0$
obtenemos que

$$a_1 \cdot z_1(0) + a_2 \cdot z_1'(0) \;=\; a_1 \cdot z_1(0) + 0 \cdot z_1'(0) \;=\; a_1 \cdot z_1(0) \;=\; 0$$

y como de (6.2b) sabemos que $|a_1| + |a_2| \neq 0$, necesariamente $a_1 \neq 0$.

Si $z_1'(0) = 0$ entonces por (6.2b) $z_1(0) = 0$ y por tanto la función $z_1(t)$ sería idénticamente nula en todo [0, H], lo cual es una contradicción y por consiguiente tendremos que $z_1'(0) \neq 0$.

Ponemos ahora $\alpha = -\left(\frac{a_1}{(z_1'(0))}\right)$, entonces se verifica que $z_2(t)=\alpha\cdot z_1(t)$ en $t=0$ da

$$z_2(0) \;=\; \alpha\cdot z_1(0) \;=\; -(\frac{a_1}{(z_1'(0))})\cdot z_1(0) \;=\; -(\frac{a_1}{(z_1'(0))})\cdot(-(\frac{a_2}{a_1})\cdot z_1'(0)) \;=\; a_2$$

habiendo reorganizado (6.2b) para aislar $z_1(0)$ como

$$z_1(0)=-(\frac{a_2}{a_1})\cdot z_1'(0)$$

y la derivada, $z_2'(t)=\alpha\cdot z_1'(t)$, en $t=0$ da

$$z_2'(0) \;=\; \alpha\cdot z_1'(0) \;=\; -(\frac{a_1}{(z_1'(0))})\cdot z_1'(0) \;=\; -a_1 \quad .$$

$z_2(t)$ satisface (6.3a) y (6.3c) en los dos casos anteriores.

Proposición 6.2.

Existe un número real α tal que z(t, λ) no tiene ningún cero en el intervalo]0, *H*], *para λ ≤ α.*

<u>Demostración:</u>

Sea la E.D. lineal

$$u''(t)-h^2u(t)=0 \qquad t\in[0,H]$$

con las condiciones iniciales

$$u(0)=a_2 \quad ; \quad u'(0)=-a_1$$

donde *h* es una constante real positiva.

Integrando ahora esta ecuación, obtenemos que la ecuación característica es $r^2-h^2=0$, la cual claramente tiene las raíces $r_1=-h$ y $r_2=h$

por lo que la solución que buscamos, *u*(*t*, *h*), es de la forma

$$u(t,h) \;=\; A\cdot e^{-ht}+B\cdot e^{ht}$$

Derivando tenemos que

$$u'(t,h) \;=\; -Ah\cdot e^{-ht}+Bh\cdot e^{ht}$$

y por (6.2b) sabemos que en *t*=0

$$a_1 \cdot u(0,h) + a_2 \cdot u'(0,h) \ = \ 0$$

Obtengamos ahora los valores de $u(0,h)$ y $u'(0,h)$ en términos de *A*, *B* y *h*:

$$u(0,h) \ = \ A+B \qquad ; \qquad u'(0,h) \ = \ -A \cdot h + B \cdot h$$

Además, por (6.3b) sabemos que

$$u(0,h) \ = \ a_2 \qquad \text{y} \qquad u'(0,h) \ = \ -a_1$$

Por lo que

$$a_2 \ = \ A+B \qquad ; \qquad -a_1 \ = \ -A \cdot h + B \cdot h \ = \ h(B-A)$$

y combinando y reorganizando estas dos ecuaciones aislando *A* y *B* obtenemos

$$A \ = \ \frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(2h)} \qquad ; \qquad B \ = \ \frac{(a_2 \cdot h - a_1)}{(2h)}$$

por lo que después de todo esto la solución *u*(*t*, *h*) que buscamos será de la forma

$$u(t,h) \ = \ \frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(2h)} \cdot e^{-ht} + \frac{(a_2 \cdot h - a_1)}{(2h)} \cdot e^{ht}$$

En el caso en que $a_2 = 0$, necesariamente $a_1 \neq 0$ dado que $|a_1| + |a_2| \neq 0$ y

$$u(t,h) \ = \ \frac{(0 \cdot h + a_1)}{(2h)} \cdot e^{-ht} + \frac{(0 \cdot h - a_1)}{(2h)} \cdot e^{ht} \ = \ \frac{(0 + a_1)}{(2h)} \cdot e^{-ht} + \frac{(0 - a_1)}{(2h)} \cdot e^{ht} \ = \ \frac{a_1}{(2h)} \cdot e^{-ht} - \frac{a_1}{(2h)} \cdot e^{ht}$$

la igualdad resultante es

$$u(t,h) \ = \ \frac{a_1}{(2h)} \cdot e^{-ht} - \frac{a_1}{(2h)} \cdot e^{ht}$$

que igualándola a cero tenemos que

$$\frac{a_1}{(2h)} \cdot e^{-ht} - \frac{a_1}{(2h)} \cdot e^{ht} \ = \ 0 \quad ; \quad \frac{a_1}{(2h)} \cdot (e^{-ht} - e^{ht}) \ = \ 0 \quad ; \quad e^{-ht} = e^{ht}$$

Ahora multiplicando ambos lados por e^{ht} resulta en

$$1 = e^{2ht}$$

Y aplicando *ln* a ambos lados

$$\ln(1) = \ln(e^{2ht}) \quad ; \quad 0 = 2ht \quad ; \quad t = 0$$

Por lo tanto, $u(t, h)$ únicamente se anula para t=0, por lo que $u(t, h)$ no tienen ningún cero en el intervalo]0, H].

En el caso en que $a_2 \neq 0$,

igualando a cero la solución $u(t,h) = \frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(2h)} \cdot e^{-ht} + \frac{(a_2 \cdot h - a_1)}{(2h)} \cdot e^{ht}$

tenemos que

$$u(t,h) = 0 \quad ; \quad \frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(2h)} \cdot e^{-ht} + \frac{(a_2 \cdot h - a_1)}{(2h)} \cdot e^{ht} = 0 \quad ; \quad (a_2 \cdot h + a_1) \cdot e^{-ht} + (a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{ht} = 0$$

$$(a_2 \cdot h + a_1) + (a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{2ht} = 0 \quad ; \quad (a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{2ht} = -(a_2 \cdot h + a_1) \quad ; \quad e^{2ht} = -\left(\frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(a_2 \cdot h - a_1)}\right)$$

Hallamos un $h_1 > 0$ tal que $a_2 \cdot h - a_1 \neq 0$ para $h \geqslant h_1$.

Dado que

$$\lim_{h \to \infty} \left(\frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(a_2 \cdot h - a_1)}\right) = 1$$

podemos encontrar un $h_0 > h_1$ tal que

$$\frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(a_2 \cdot h - a_1)} > 0 \,, \quad \text{para} \quad h \geqslant h_0$$

Ahora, sustituyendo h por h_0 en $u(t,h) = \frac{(a_2 \cdot h + a_1)}{(2h)} \cdot e^{-ht} + \frac{(a_2 \cdot h - a_1)}{(2h)} \cdot e^{ht}$

tenemos

$$u(t,h_0) = \frac{(a_2 \cdot h_0 + a_1)}{(2h_0)} \cdot e^{-h_0 t} + \frac{(a_2 \cdot h_0 - a_1)}{(2h_0)} \cdot e^{h_0 t}$$

e igualando $u(t,h_0)$ a cero acabamos con

$$e^{2h_0 t} = -\left(\frac{(a_2 \cdot h_0 + a_1)}{(a_2 \cdot h_0 - a_1)}\right)$$

como hemos obtenido antes.

Entonces tenemos que

$$e^{2h_0 t} = -\left(\frac{(a_2 \cdot h_0 + a_1)}{(a_2 \cdot h_0 - a_1)}\right) < 0$$

lo cual es una gran contradicción, dado que $\frac{(a_2 \cdot h_0 + a_1)}{(a_2 \cdot h_0 - a_1)}$ es positivo y por tanto $-(\frac{(a_2 \cdot h_0 + a_1)}{(a_2 \cdot h_0 - a_1)})$ obviamente es negativo. Pero esto último es igual a una exponencial, la cual nunca puede ser menor que cero. Por ende, esto es una contradicción y tenemos que $u(t, h_0)$ no se anula para ningún valor de t en el intervalo]0, *H*].

Por consiguiente, no importa si $a_2 = 0$ o si $a_2 \neq 0$, de ambas formas se puede encontrar un $h_0 > 0$ de manera que $u(t, h_0)$ no tiene ningún cero en]0, *H*].

Sabemos por el punto 5 que *c*(*t*) es de la forma

$$c(t) = \frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2} \cdot [\lambda \cdot \rho(x(t)) - q(x(t))]$$

tal que

$$p(x(t)) > 0 \quad ; \quad \rho(x(t)) > 0 \quad ; \quad t \in [0, H]$$

Sean ahora m_1 , m_2 y m_3 los mínimos de $p(x(t))$, $\rho(x(t))$ y $q(x(t))$ en [0, *H*] respectivamente.

Dado que $m_1 > 0$ y $m_2 > 0$ por definición de $p(x(t))$ y $\rho(x(t))$, se tiene que

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \left(\frac{(m_1)}{(p(a))^2} \cdot [\lambda m_2 - m_3]\right) \quad = \quad -\infty$$

por tanto existe un número real $\alpha < 0$ tal que

$$\frac{(m_1)}{(p(a))^2} \cdot [\lambda m_2 - m_3] \quad < \quad -h_0^2 \qquad \text{para todo } \lambda \leq \alpha.$$

Por tanto, si $\lambda \leq \alpha$, tenemos que para $t \in [0, H]$,

$$c(t) \quad \leq \quad \frac{(m_1)}{(p(a))^2} \cdot [\lambda m_2 - m_3] \quad < \quad -h_0^2$$

por lo que aplicando el Teorema 3.3 deducimos que para $\lambda \leq \alpha$, en el intervalo]0, *H*] el número de ceros de $z(t, \lambda)$ es menor o igual que el número de ceros de $u(t, h_0)$ en el mismo intervalo.

Proposición 6.3.

Dado un número entero positivo n, existe un número real, β, tal que z(t, λ) tiene más de n ceros en el intervalo]0, H], para λ ≥ β.

<u>Demostración:</u>

Sea la siguiente E.D. lineal

$$u''(t)+h^2u(t) \;=\; 0 \quad , \quad t\in[0,H]$$

donde *h* es una constante real positiva, con las condiciones iniciales

$$u(0)=a_2 \quad ; \quad u'(0)=-a_1 \quad .$$

Integrando ahora esta ecuación, obtenemos que la ecuación característica es $r^2+h^2=0$

la cual tiene las raíces $r_1=-i\cdot h$ y $r_2=i\cdot h$

por lo que la solución que buscamos, *u*(*t*, *h*), es de la forma

$$u(t,h) \;=\; E\cdot e^{-ih\cdot t}+F\cdot e^{ih\cdot t}$$

donde E y F son constantes.

Ahora, para ponerla en forma real, hacemos

$$E=C+Di \quad , \quad F=C-Di$$

y usando la fórmula de Euler

$$e^{-ih\cdot t}=\cos(ht)-i\cdot\sin(ht)$$
$$e^{ih\cdot t}=\cos(ht)+i\cdot\sin(ht)$$

tenemos que

$$u(t,h) \;=\; E\cdot e^{-ih}+F\cdot e^{ih} \;=\; (C+Di)\cdot(\cos(ht)-i\cdot\sin(ht)) \;+\; (C-Di)\cdot(\cos(ht)+i\cdot\sin(ht)) \;=$$

$$= \; C\cos(ht)-i\cdot C\sin(ht)+i\cdot D\cos(ht)+D\sin(ht)+C\cos(ht)+i\cdot C\sin(ht)-i\cdot D\cos(ht)+D\sin(ht)$$

$$= \; 2C\cdot\cos(ht)+2D\cdot\sin(ht)$$

Ahora hacemos

$$A=2C \quad , \quad B=2D$$

y tenemos la solución *u*(*t*, *h*) en la forma

$$u(t,h) \;=\; A\cdot\cos(ht)+B\cdot\sin(ht)$$

Derivando obtenemos

$$u'(t,h) \;=\; -A\cdot h\cdot\sin(ht)+B\cdot h\cdot\cos(ht)$$

Por otro lado, de las condiciones iniciales en (6.3b) tenemos que

$$a_1 \ = \ -u'(0,h) \ = \ -[-A\cdot h\cdot\sin(0)+B\cdot h\cdot\cos(0)] \ = \ A\cdot h\cdot 0-B\cdot h\cdot 1 \ = \ -Bh$$

$$a_2 \ = \ u(0,h) \ = \ A\cdot\cos(0) \ = \ B\cdot h\cdot\sin(0) \ = \ A\cdot 1+B\cdot 0 \ = \ A$$

Entonces, tenemos los valores $a_1=-Bh$ y $a_2=A$.

Por lo que $u(t,h) \ = \ A\cdot\cos(ht)+B\cdot\sin(ht) \ = \ a_2\cdot\cos(ht)-\frac{a_1}{h}\cdot\sin(ht)$

Ahora, si ponemos

$$a_1 \ = \ h\cdot(a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})\sin\gamma \qquad ; \qquad a_2 \ = \ (a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})\cos\gamma \qquad \text{con} \ \ \gamma\in[0,2\pi]$$

tendremos que

$$u(t,h) \ = \ a_2\cdot\cos(ht)-\frac{a_1}{h}\cdot\sin(ht) \ = \ (a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})\cos\gamma\cdot\cos(ht)-\frac{(h\cdot(a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})\sin\gamma)}{h}\cdot\sin(ht) \ =$$

$$= \ (a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})\cos\gamma\cdot\cos(ht)-(a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})\sin\gamma\cdot\sin(ht) \ = \ (a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})[\cos\gamma\cdot\cos(ht)-\sin\gamma\cdot\sin(ht)]$$

y como $\cos(x+y)=\cos x\cdot cosy-\sin x\cdot siny$ nos queda que

$$u(t,h) \ = \ (a_2^2+\frac{a_1^2}{h^2})\cdot\cos(\gamma+ht)$$

Sea ahora h_0 un número real positivo y n un número entero positivo tal que

$$\gamma+h_0\cdot H \ > \ (n+\frac{3}{2})\pi$$

donde aislando *H* nos queda

$$H \ > \ \frac{1}{h_0}\cdot[(n+\frac{3}{2})\pi-\gamma]$$

La función $u(t,h_0)$ se anula cuando $\cos(\gamma+h_0 t)=0,$ es decir, siendo m un número entero

$$\gamma+h_0\cdot t \ = \ (m+\frac{3}{2})\pi$$

o sea

$$t = \frac{1}{h_0}\cdot[(m+\frac{3}{2})\pi-\gamma]$$

Por lo que con $m=1,2,...,n$ tenemos que

$$\frac{1}{h_0}\cdot[(1+\frac{3}{2})\pi-\gamma] < \frac{1}{h_0}\cdot[(2+\frac{3}{2})\pi-\gamma] < \ldots < \frac{1}{h_0}\cdot[(n+\frac{3}{2})\pi-\gamma]$$

son *n* ceros de $u(t,h_0)$ en el intervalo]0, *H*[.

Sean ahora m_1 y m_2 los mínimos de $p(x(t))$ y $\rho(x(t))$ en el intervalo [0, *H*], respectivamente, y sea m_3 el máximo de $q(x(t))$ en dicho intervalo.

Dado que $m_1>0$ y $m_2>0$ se tiene que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{m_1}{(p(a))^2}\cdot[\lambda\cdot m_2-m_3]\right) = \infty$$

por lo que existe un número real positivo β tal que

$$\frac{m_1}{(p(a))^2}\cdot[\lambda\cdot m_2-m_3] > h_0^2 \qquad \text{para } \lambda \geq \beta .$$

Por tanto, si $\lambda \geq \beta$, tenemos que para $t\in[0,H]$,

$$c(t) \geq \frac{m_1}{(p(a))^2}\cdot[\lambda\cdot m_2-m_3] > h_0^2$$

donde aplicando el Teorema 3.3 se deduce que para λ ≥ β , el número de ceros de *z*(*t*, *λ*) en el intervalo]0, *H*] es mayor o igual que el número de ceros de $u(t,h_0)$ en dicho intervalo.

Definición 4

$N(\lambda)$ *es una función que indica el número de ceros de* $z(t,\lambda)$ *en el intervalo*]0, *H*].

De la Proposición 6.3 y del Teorema 3.3 se deduce que $N(\lambda)$ (con $-\infty < \lambda < +\infty$) *es una función creciente la cual tiende a* $+\infty$ *cuando* λ *tiende a* $+\infty$ *.*
Dado que la cantidad de valores que toma la función $N(\lambda)$ *en un intervalo acotado por la derecha es finito, se puede deducir que en ese intervalo el conjunto de puntos de discontinuidad es finito. Por tanto, los puntos de discontinuidad* μ_n *de la función* $N(\lambda)$ *en todo* $(-\infty,+\infty)$ *se pueden ordenar de la siguiente manera*

$$\mu_1<\mu_2<...<\mu_n<... \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\mu_n=+\infty$$

Proposición 6.4.

Si $z(H,\lambda_0)\neq 0$, *existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que* $N(\lambda)=N(\lambda_0)$ $\quad\forall\lambda\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$.

<u>Demostración:</u>

Dado que $c(t)$ es una función continua de λ en el intervalo $(-\infty,+\infty)$, se tiene que $z(t,\lambda)$ y $z'(t,\lambda)$ son funciones continuas de t y λ en $[0,H]\times(-\infty,+\infty)$.

En el caso en que $a_2=0$,

como $|a_1|+|a_2|\neq 0$, tenemos que $a_1\neq 0$, y entonces como podemos ver en (6.3b), $z'(t,\lambda)$ es continua en el punto $(0,\lambda_0)$. Por lo tanto existe un $\eta>0$ y un $\gamma>0$, con $\eta<H$, tal que $z'(t,\lambda)\neq 0$ para $t\in[0,\eta]$ donde $|\lambda-\lambda_0|<\gamma$.

En el caso en que $a_2\neq 0$,
Por (6.3b) tenemos que $z(t,\lambda)$ es continua en el punto $(0,\lambda_0)$. Por lo tanto determinamos $\eta>0$, $\gamma>0$, con $\eta<H$, de forma que $z(t,\lambda)\neq 0$ para $t\in[0,\eta]$ donde $|\lambda-\lambda_0|<\gamma$.

Por consiguiente, tanto en el caso en que $a_2=0$ como en el que $a_2\neq 0$, tenemos que por el Teorema de Rolle $N(\lambda)$ coincide con el número de ceros de $z(t,\lambda)$ en el intervalo $[\eta, H]$ si $|\lambda-\lambda_0|<\gamma$.

Sean ahora $t_1<t_2<t_3<...t_p$ los ceros de $z(t,\lambda_0)$ en el intervalo $[\eta, H]$.
Estos puntos obviamente se encuentran en el intervalo $]\eta, H[$ ya que hemos determinado que $z(t,\lambda)\neq 0$ para $t\in[0,\eta]$ y por lo tanto $z(\eta,\lambda_0)\neq 0$, y como premisa inicial de la proposición sabemos que $z(H,\lambda_0)\neq 0$.
Dado que $z(t,\lambda_0)$ no es idénticamente nula, se tiene que $z'(t_q,\lambda_0)\neq 0$ para todo $q=1, 2, \ldots, p$.
Puesto que $z(t,\lambda_0)$ y $z'(t,\lambda_0)$ son funciones continuas en el intervalo $[\eta, H]$, podemos encontrar p números, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,...,\varepsilon_p$ mayores que cero de manera que

$$\eta < t_1-\varepsilon_1 < t_1+\varepsilon_1 < t_2-\varepsilon_2 < t_2+\varepsilon_2 < \ldots < t_p-\varepsilon_p < t_p+\varepsilon_p < H$$

y

$$\left.\begin{array}{r} z(t_q-\varepsilon_q,\lambda_0)\cdot z(t_q+\varepsilon_q,\lambda_0) < 0 \\ z'(t,\lambda_0)\neq 0 \quad \text{donde} \quad t\in[t_q-\varepsilon_q,t_q+\varepsilon_q] \end{array}\right\} \quad q=1, 2, 3, \ldots, p$$

Sea B el conjunto abierto formado por la siguiente unión de intervalos abiertos

$$B = (t_1-\varepsilon_1,t_1+\varepsilon_1)\cup(t_2-\varepsilon_2,t_2+\varepsilon_2)\cup...\cup(t_p-\varepsilon_p,t_p+\varepsilon_p)$$

Sea ahora A el conjunto complementario del conjunto B en $[\eta, H]$.
Dado que A es un conjunto compacto en el cual no se anula $z(t,\lambda_0)$, existe un $\alpha>0$ de manera que

$$z(t,\lambda)\neq 0 \quad , \quad t\in A \quad , \quad |\lambda-\lambda_0|<\alpha$$

Ahora encontramos un $\alpha_q>0$ de forma que $z(t_q-\varepsilon_q,\lambda_0)$ y $z(t_q-\varepsilon_q,\lambda)$ tengan el mismo signo para $|\lambda-\lambda_0|<\alpha_q$.

Además, calculamos un $\beta_q>0$ de forma que $z(t_q+\varepsilon_q,\lambda_0)$ y $z(t_q+\varepsilon_q,\lambda)$ tengan el mismo signo para $|\lambda-\lambda_0|<\beta_q$.

Sea C el conjunto cerrado formado por la siguiente unión de intervalos cerrados

$$C = [t_1-\varepsilon_1,t_1+\varepsilon_1]\cup[t_2-\varepsilon_2,t_2+\varepsilon_2]\cup\ldots\cup[t_p-\varepsilon_p,t_p+\varepsilon_p]$$

Dado que C es un conjunto compacto en el cual no se anula $z'(t,\lambda_0)$, existe un $\beta>0$ tal que

$$z'(t,\lambda)\neq 0 \quad , \quad t\in C \quad , \quad |\lambda-\lambda_0|<\beta$$

Si ε es el mínimo de $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_q,\beta_q$ para $q=1, 2, \ldots, p$ y tomamos $\lambda\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$, entonces $z(t,\lambda)\neq 0$ en A.

Por otro lado,

$$z(t_q-\varepsilon_q,\lambda)\cdot z(t_q+\varepsilon_q,\lambda) < 0 \qquad \text{con } q=1, 2, \ldots, p$$

$$z'(t,\lambda)\neq 0 \qquad \text{con } t\in C$$

por tanto existe un solo cero de $z(t,\lambda)$ en el intervalo abierto $(t_q-\varepsilon_q,t_q+\varepsilon_q)$, de aquí que $z(t,\lambda)$ tenga p ceros en el intervalo $]0, H]$. Por ende, como $z(t,\lambda)$ y $z(t,\lambda_0)$ tienen el mismo número de ceros en $]0, H]$, $N(\lambda)=N(\lambda_0)$ cumpliéndose la premisa inicial.

Proposición 6.5.

Si $z(H,\lambda_0)=0$, *existe un* $\varepsilon > 0$ *de manera que* $N(\lambda)-N(\lambda')=1$

donde

$$\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon] \qquad y \qquad \lambda'\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0)$$

Demostración:

Al igual que en la demostración de la proposición anterior, encontramos un $\eta>0$ y un $\gamma>0$, con $\eta<H$, tal que $N(\lambda)$ coincide con la cantidad de ceros de $z(t,\lambda)$ para $t\in[\eta,H]$ si $|\lambda-\lambda_0|<\gamma$.

Sean ahora $t_1<t_2<t_3<\ldots<t_p$ $(con\, t_p=H)$ los ceros de $z(t,\lambda_0)$ en $[\eta, H]$.
Como $t_1,t_2,t_3,\ldots,t_p$ se encuentran en el intervalo $]\eta, H]$ y $z(t,\lambda_0)$ no es idénticamente nula, tenemos que $z'(t_q,\lambda_0)\neq 0$ para $q=1, 2, 3, \ldots, p$.
Puesto que $z(t,\lambda_0)$ y $z'(t,\lambda_0)$ son continuas en el intervalo $[\eta, H]$, podemos encontrar p números, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_p$ mayores que cero tales que

$$\eta < t_1-\varepsilon_1 < t_1+\varepsilon_1 < t_2-\varepsilon_2 < t_2+\varepsilon_2 < \ldots < t_p-\varepsilon_p < t_p = H$$

con

$$\left.\begin{array}{c} z(t_q-\varepsilon_q,\lambda_0)\cdot z(t_q+\varepsilon_q,\lambda_0) < 0 \\ z'(t,\lambda_0)\neq 0 \quad \text{donde} \quad t\in[t_q-\varepsilon_q, t_q+\varepsilon_q] \end{array}\right\} \quad q=1, 2, 3, \ldots, p-1$$

$$\text{y también} \quad z'(t,\lambda_0)\neq 0 \quad \text{para} \quad t\in[t_p-\varepsilon_p, t_p]$$

Sea B el conjunto formado por la siguiente unión de intervalos

$$B = (t_1-\varepsilon_1,t_1+\varepsilon_1) \;\mathrm{U}\; (t_2-\varepsilon_2,t_2+\varepsilon_2) \;\mathrm{U} \ldots \mathrm{U}\; (t_{p-1}-\varepsilon_{p-1},t_{p-1}+\varepsilon_{p-1}) \;\mathrm{U}(\; t_p-\varepsilon_p,t_p \;]$$

Sea ahora A el conjunto complementario del conjunto B en $[\eta, H]$.
Dado que A es un conjunto compacto en el cual no se anula $z(t,\lambda_0)$, existe un $\alpha>0$ de manera que

$$z(t,\lambda)\neq 0 \quad , \quad t\in A \quad , \quad |\lambda-\lambda_0|<\alpha$$

Encontramos un $\alpha_q>0$ de forma que $z(t_q-\varepsilon_q,\lambda_0)$ y $z(t_q-\varepsilon_q,\lambda)$ tengan el mismo signo para $|\lambda-\lambda_0|<\alpha_q$.

Además, calculamos un $\beta_q>0$ de forma que $z(t_q+\varepsilon_q,\lambda_0)$ y $z(t_q+\varepsilon_q,\lambda)$ tengan el mismo signo para $|\lambda-\lambda_0|<\beta_q$.

Sea ahora el conjunto cerrado C formado por la siguiente unión de intervalos cerrados

$$C = [t_1-\varepsilon_1,t_1+\varepsilon_1]\cup[t_2-\varepsilon_2,t_2+\varepsilon_2]\cup\ldots\cup[t_{p-1}-\varepsilon_{p-1},t_{p-1}+\varepsilon_{p-1}]\cup[t_p-\varepsilon_p,t_p]$$

Dado que C es un conjunto compacto en el cual no se anula $z'(t,\lambda_0)$, existe un $\beta>0$ tal que

$$z'(t,\lambda)\neq 0 \quad , \quad t\in C \quad , \quad |\lambda-\lambda_0|<\beta$$

Si ε es el mínimo de $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_q,\beta_q$ para $q=1, 2, \ldots, p-1$ y tomamos $\lambda\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$, entonces $z(t,\lambda)\neq 0$ en A.

Por otro lado,

$$z(t_q-\varepsilon_q,\lambda)\cdot z(t_q+\varepsilon_q,\lambda) < 0 \qquad \text{con } q=1, 2, \ldots, p\text{-}1$$

$$z'(t,\lambda)\neq 0 \qquad \text{con } t\in C$$

por tanto existe un único cero de $z(t,\lambda)$ en el intervalo abierto $(t_q-\varepsilon_q,t_q+\varepsilon_q)$ donde q=1, 2, …, p-1. Además, como mucho existirá un solo cero de $z(t,\lambda)$ en el intervalo $]\ H-\varepsilon_p\ ,\ H\ ]$.

Sabemos por el Teorema 3.3 que existen p ceros de la función $z(t,\lambda)$ en el intervalo]0, H], para λ perteneciente a $[\ \lambda_0\ ,\ \lambda_0+\varepsilon\ [$.

Sea ahora $\lambda'\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0)$, supongamos que $z(t,\lambda')$ tiene p ceros en]0, H] tales que $t_1'<t_2'<t_3'<\ldots<t_p'$.

Por el Teorema 3.1 y por el Teorema 3.3 tenemos que

$$0<t_1<t_1'<t_2<t_2'<t_3<t_3'<\ldots<t_{p-1}<t_{p-1}'<t_p<t_p'$$

por lo que tendríamos que $t_p\neq H$, lo cual es una contradicción.
Entonces t_p' no es un cero de la función $z(t,\lambda')$ en el intervalo en]0, H].

Por lo tanto, tenemos que la función $z(t,\lambda')$ tiene p-1 ceros en el intervalo]0, H].

Finalmente, tenemos que $N(\lambda)-N(\lambda')=p-(p-1)=1$ donde

$$\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon] \qquad \text{y} \qquad \lambda'\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0)$$

Proposición 6.6.

Si $\lambda<\mu_1$, *entonces* $N(\lambda)=0$.
Si $\mu_n\leqslant\lambda<\mu_{n+1}$, *se tiene que* $N(\lambda)=n$, *donde* μ_n *son los puntos de discontinuidad de* $N(\lambda)$ *en el intervalo abierto* $(-\infty,+\infty)$.

Demostración:

Gracias a la Proposición 6.2 sabemos que existe un número real α tal que $N(\lambda)=0 \quad \forall\lambda\leqslant\alpha$, por lo que tomando un α muy próximo a μ_1 pero menor que él, efectivamente tenemos que $N(\lambda)=0 \quad \forall\lambda<\mu_1$.

Luego, dado que $N(\lambda)$ tiene un punto de discontinuidad en μ_n, tenemos que $N(\lambda')<N(\lambda)$ con $\lambda'<\mu_n<\lambda$ y de la Proposición 6.4 sabemos que no existiría un ε > 0 tal que

$N(\mu_n - \varepsilon) = N(\mu_n + \varepsilon)$, por lo que (como no *b* implica no *a*) por la Proposición 6.4 tendremos que $z(H, \mu_n) = 0$.

Ahora, aplicando la Proposición 6.4 para λ perteneciente al intervalo $[\ \mu_1\ ,\ \mu_2\ [$, se tiene que $N(\lambda) - N(\lambda') = 1 - 0 = 1$, siendo $\lambda' < \mu_1 < \lambda$.

Por lo tanto, por inducción tenemos que $N(\lambda) = n$ para λ perteneciente a $[\ \mu_n\ ,\ \mu_{n+1}\ [$.

Proposición 6.7.

La función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ *es estrictamente decreciente en el intervalo abierto* $(-\infty, \mu_1)$ *y toma todos los valores reales.*

Demostración:

Gracias a la Proposición 6.2 sabemos que $z(H,\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \leqslant \mu_1$, por tanto la función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ está bien definida en el intervalo $(-\infty, \mu_1)$.

Reorganizando (6.3a) tenemos que

$$z''(t,\lambda) \ = \ -c(t) \cdot z(t,\lambda)$$

y como

$$c(t) \ = \ \frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2} \cdot [\lambda \cdot \rho(x(t)) - q(x(t))]$$

entonces tenemos que

$$z''(t,\lambda) \ = \ -[\frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2}] \cdot [\lambda \cdot \rho(x(t)) - q(x(t))] \cdot z(t,\lambda) \qquad (6.4)$$

Por otro lado, tomando $\lambda' < \lambda'' < \mu_1$ y desarrollando $\frac{d}{dt}[z(t,\lambda') \cdot z'(t,\lambda'') - z'(t,\lambda') \cdot z(t,\lambda'')]$ tenemos que

$$\frac{d}{dt}[z(t,\lambda') \cdot z'(t,\lambda'') - z'(t,\lambda') \cdot z(t,\lambda'')] \ =$$

$$= \ z'(t,\lambda') \cdot z'(t,\lambda'') + z(t,\lambda') \cdot z''(t,\lambda'') - z''(t,\lambda') \cdot z(t,\lambda'') - z'(t,\lambda') \cdot z'(t,\lambda'') \ =$$

$$= \ z(t,\lambda') \cdot z''(t,\lambda'') - z''(t,\lambda') \cdot z(t,\lambda'') \qquad (6.5)$$

Ahora, por (6.4) sabemos que $z''(t,\lambda')$ y $z''(t,\lambda'')$ son de la forma

$$z''(t,\lambda') \;=\; -[\frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda'\cdot\rho(x(t))-q(x(t))]\cdot z(t,\lambda')$$

y

$$z''(t,\lambda'') \;=\; -[\frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda''\cdot\rho(x(t))-q(x(t))]\cdot z(t,\lambda'')$$

sustituyendo en (6.5) nos queda que

$$z(t,\lambda')\cdot z''(t,\lambda'')-z''(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'') \;=$$

$$= \; z(t,\lambda')\cdot[\frac{-(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda''\cdot\rho(x(t))-q(x(t))]\cdot z(t,\lambda'') \;+$$
$$- \; z(t,\lambda'')\cdot[\frac{-(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda'\cdot\rho(x(t))-q(x(t))]\cdot z(t,\lambda') \;=$$

$$= \; z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot[\frac{-(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda''\cdot\rho(x(t))-q(x(t))-\lambda'\cdot\rho(x(t))+q(x(t))] \;=$$

$$= \; z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot[\frac{-(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda''\cdot\rho(x(t))-\lambda'\cdot\rho(x(t))] \;=$$

$$= \; z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot[\frac{-(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda''-\lambda']\cdot\rho(x(t)) \;=$$

$$= \; z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot[\frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda'-\lambda'']\cdot\rho(x(t))$$

Por lo que, si integramos ambos extremos de la igualdad resultante

$$z(t,\lambda')\cdot z''(t,\lambda'')-z''(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'') \;=\; z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot[\frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2}]\cdot[\lambda'-\lambda'']\cdot\rho(x(t)) \qquad (6.6)$$

entre 0 y *H*, tenemos en el lado izquierdo de la igualdad que

$$\int_0^H z(t,\lambda')\cdot z''(t,\lambda'')-z''(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')dt \;=\; z(t,\lambda')\cdot z'(t,\lambda'')-z'(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\Big|_0^H .$$

por (6.5). Por tanto,

$$\int_0^H z(t,\lambda')\cdot z''(t,\lambda'')-z''(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')dt \;=\; z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'')-z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'')$$

ya que por (6.3b) se tiene que

$$z(0,\lambda')\cdot z'(0,\lambda'')-z'(0,\lambda')\cdot z(0,\lambda'') \;=\; a_2\cdot(-a_1)-(-a_1)\cdot a_2 \;=\; -a_1\cdot a_2+a_1\cdot a_2 \;=\; 0$$

Ahora, a la hora de integrar la parte derecha de la igualdad (6.6) tenemos que

$$\int_0^H z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot\left[\frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2}\right]\cdot[\lambda'-\lambda'']\cdot\rho(x(t))dt \;=$$

$$=\; \frac{(\lambda'-\lambda'')}{(p(a))^2}\cdot\int_0^H z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot p(x(t))\cdot\rho(x(t))dt$$

Dado que por la Proposición 6.6 las funciones $z(t,\lambda')$ y $z(t,\lambda'')$ no tienen ningún cero en el intervalo]0, *H*] (ya que habíamos tomado $\lambda'<\lambda''<\mu_1$), tenemos que

$$z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'') \;>\; 0 \qquad \forall t \text{ perteneciente a }]0, H]$$

Por otro lado, tenemos que por definición

$$p(x(t))\cdot\rho(x(t)) \;>\; 0 \qquad \forall t \text{ perteneciente a }]0, H]$$

Entonces, de haber integrado (6.6) y haber obtenido la igualdad

$$z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'')-z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'') \;=\; \frac{(\lambda'-\lambda'')}{(p(a))^2}\cdot\int_0^H z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot p(x(t))\cdot\rho(x(t))dt$$

deducimos que como por definición $\lambda'-\lambda''<0$, y al ser $(p(a))^2$ positivo y la integral positiva, entonces tenemos que todo el lado derecho de la igualdad anterior es negativo y por tanto, al ser igual al lado izquierdo, tenemos que

$$z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'')-z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'') \;<\; 0$$

y reorganizado esto tenemos que

$$z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'') \;<\; z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'')$$

$$\frac{(z'(H,\lambda''))}{(z(H,\lambda''))} \;<\; \frac{(z'(H,\lambda'))}{(z(H,\lambda'))}$$

lo que implica que conforme aumenta el valor de λ, disminuye el valor de $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$. Esto significa que $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ es una función estrictamente decreciente en $(-\infty,\mu_1)$.

Por tanto, al tratarse de una función estrictamente decreciente y verificarse que $z(H,\mu_1)=0$ y que $z'(H,\mu_1)\neq 0$, tenemos que

$$\liminf_{\lambda\to\mu_1}\left(\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}\right) \ = \ -\infty$$

Por otro lado, considerando ahora la ecuación diferencial

$$u''(t)-h^2\cdot u(t) \ = \ 0$$

donde h es una constante, con las condiciones iniciales

$$u(0)=a_2 \qquad \text{y} \qquad u'(0)=-a_1$$

Como se vio en la demostración de la Proposición 6.2, la solución $u(t,h)$ de este sistema es de la forma

$$u(t,h) \ = \ \frac{(a_2\cdot h+a_1)}{(2h)}\cdot e^{-ht}+\frac{(a_2\cdot h-a_1)}{(2h)}\cdot e^{ht}$$

y también, por la demostración de esta misma proposición sabemos que existe un número real positivo h_0 tal que $u(t,h)$ no tiene ningún cero en el intervalo $]0, H]$ $\forall h\geqslant h_0$.

Por lo tanto, la función $\frac{(u'(H,h))}{(u(H,h))}$ está bien definida $\forall h\geqslant h_0$ y como

$$u(H,h) \ = \ \frac{(a_2\cdot h+a_1)}{(2h)}\cdot e^{-hH}+\frac{(a_2\cdot h-a_1)}{(2h)}\cdot e^{hH}$$

y

$$u'(H,h) \ = \ -h\frac{(a_2\cdot h+a_1)}{(2h)}\cdot e^{-hH}+h\frac{(a_2\cdot h-a_1)}{(2h)}\cdot e^{hH} \ = \ \frac{-(a_2\cdot h+a_1)}{2}\cdot e^{-hH}+\frac{(a_2\cdot h-a_1)}{2}\cdot e^{hH}$$

se da que

$$\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{(u'(H,h))}{(u(H,h))}\right) \ = \ \lim_{h\to+\infty}\left(\frac{\left[\frac{-(a_2\cdot h+a_1)}{2}\cdot e^{-hH}+\frac{(a_2\cdot h-a_1)}{2}\cdot e^{hH}\right]}{\left[\frac{(a_2\cdot h+a_1)}{(2h)}\cdot e^{-hH}+\frac{(a_2\cdot h-a_1)}{(2h)}\cdot e^{hH}\right]}\right) \ =$$

$$= \lim_{h \to +\infty} \left(\frac{[-h(a_2 \cdot h + a_1) \cdot e^{-hH} + h(a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH}]}{[(a_2 \cdot h + a_1) \cdot e^{-hH} + (a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH}]} \right) = \lim_{h \to +\infty} \left(\frac{[h(a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH}]}{[(a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH}]} \right) =$$

$$= \lim_{h \to +\infty} \left(\frac{[h(a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH}]}{[(a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH}]} \right) = (\lim_{h \to +\infty} h) \cdot (\lim_{h \to +\infty} [\frac{(a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH}}{((a_2 \cdot h - a_1) \cdot e^{hH})}]) = (\lim_{h \to +\infty} h) \cdot 1 = +\infty$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dt}[z(t,\lambda) \cdot u'(t,h) - z'(t,\lambda) \cdot u(t,h)] =$$

$$= z'(t,\lambda) \cdot u'(t,h) + z(t,\lambda) \cdot u''(t,h) - z''(t,\lambda) \cdot u(t,h) - z'(t,\lambda) \cdot u'(t,h) =$$

$$= z(t,\lambda) \cdot u''(t,h) - z''(t,\lambda) \cdot u(t,h)$$

Y como reorganizado $u''(t,h) - h^2 \cdot u(t,h) = 0$ y $z''(t,\lambda) + c(t) \cdot z(t,\lambda) = 0$ obtenemos respectivamente

$$u''(t,h) = h^2 \cdot u(t,h) \qquad \text{y} \qquad z''(t,\lambda) = -c(t) \cdot z(t,\lambda)$$

por lo que ahora sustituyendo estos valores en la igualdad anterior tenemos que

$$\frac{d}{dt}[z(t,\lambda) \cdot u'(t,h) - z'(t,\lambda) \cdot u(t,h)] = z(t,\lambda) \cdot u''(t,h) - z''(t,\lambda) \cdot u(t,h) =$$

$$= z(t,\lambda) \cdot h^2 \cdot u(t,h) - (-c(t) \cdot z(t,\lambda)) \cdot u(t,h) = z(t,\lambda) \cdot h^2 \cdot u(t,h) + c(t) \cdot z(t,\lambda) \cdot u(t,h) =$$

$$= [h^2 + c(t)] \cdot z(t,\lambda) \cdot u(t,h)$$

Entonces ahora integrando ambos lados de la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}[z(t,\lambda) \cdot u'(t,h) - z'(t,\lambda) \cdot u(t,h)] = [h^2 + c(t)] \cdot z(t,\lambda) \cdot u(t,h)$$

entre 0 y *H* tenemos que

$$z(t,\lambda) \cdot u'(t,h) - z'(t,\lambda) \cdot u(t,h) = \int_0^H [h^2 + c(t)] \cdot z(t,\lambda) \cdot u(t,h) dt$$

Entonces suponiendo que $h \geqslant h_0$, como

$$u(0,h) = z(0,\lambda) = a_2 \qquad \text{y} \qquad u'(0,h) = z'(0,\lambda) = -a_1$$

y como $u(t,h)$ y $z(t,\lambda)$ no tienen ningún cero en el intervalo]0, *H*], si $\lambda < \mu_1$ se deduce que

$$z(t,\lambda) \cdot u(t,h) > 0 \quad \text{para } t \text{ perteneciente a }]0, H]$$

Deducimos de la demostración de la Proposición 6.2 que *c(t)* tiende uniformemente a $-\infty$ cuando λ tiende a $-\infty$, de aquí que exista un número real λ_0 de forma que para $\lambda \leqslant \lambda_0$ tenemos que $h^2 + c(t) < 0$, siendo

$$h^2 + c(t) \; = \; h^2 + \frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2} \cdot [\lambda \cdot \rho(x(t)) - q(x(t))] \; < \; 0$$

Por lo que para estos valores de λ_0 y λ tendremos

$$z(H,\lambda) \cdot u'(H,h) - z'(H,\lambda) \cdot u(H,h) \; < \; 0$$

y reorganizado esto tenemos que

$$z(H,\lambda) \cdot u'(H,h) \; < \; z'(H,\lambda) \cdot u(H,h)$$

$$\frac{(u'(H,h))}{(u(H,h))} \; < \; \frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$$

de aquí que

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \left[\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))} \right] \; = \; +\infty$$

Además, antes hemos obtenido que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{(u'(H,h))}{(u(H,h))} \right] \; = \; \infty$$

Por consiguiente, concluimos que la función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ es estrictamente decreciente a lo largo de todo $(-\infty, +\infty)$ cuando λ varía en el intervalo $(-\infty, \mu_1)$ y por tanto toma todos los valores reales.

Proposición 6.8.

La función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ *es estrictamente decreciente en el intervalo abierto* (μ_n, μ_{n+1}) *y toma todos los valores reales.*

<u>Demostración:</u>

Gracias a la Proposición 6.5 tenemos que $z(H,\lambda)\neq 0$ para todo λ tal que $\mu_n<\lambda<\mu_{n+1}$, (si tuviese un cero, $N(\lambda)$ representaría un punto de discontinuidad entre μ_n y μ_{n+1}). Por tanto, la función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ está bien definida en el intervalo (μ_n,μ_{n+1}).

Ahora sean $\mu_n<\lambda'<\lambda''<\mu_{n+1}$.
Sea t_1 el último cero de $z(t,\lambda')$ en el intervalo]0, *H*].

Integrando la igualdad (6.6) entre t_1 y *H*,

del lado izquierdo tenemos que por (6.5)

$$\int_{t_1}^{H} z(t,\lambda')\cdot z''(t,\lambda'')-z''(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\,dt \;=\; z(t,\lambda')\cdot z'(t,\lambda'')-z'(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\Big|_{t_1}^{H} \;=$$

$$= \; z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'')-z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'')-z(t_1,\lambda')\cdot z'(t_1,\lambda'')+z'(t_1,\lambda')\cdot z(t_1,\lambda'') \;=$$

$$= \; z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'')-z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'')+z'(t_1,\lambda')\cdot z(t_1,\lambda'')$$

ya que $z(t_1,\lambda')=0$ por ser t_1 un cero de $z(t,\lambda')$.

Y en el lado derecho de la igualdad (6.6) tenemos que

$$\int_{t_1}^{H} z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot\left[\frac{(p(x(t)))}{(p(a))^2}\right]\cdot[\lambda'-\lambda'']\cdot\rho(x(t))\,dt \;=$$

$$= \; \frac{(\lambda'-\lambda'')}{(p(a))^2}\cdot\int_{t_1}^{H} z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot p(x(t))\cdot\rho(x(t))\,dt$$

Reagrupando ambos lados tenemos que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(\lambda'-\lambda'')}{(p(a))^2}\cdot\int_{t_1}^{H} z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'')\cdot p(x(t))\cdot\rho(x(t))\,dt \;= \\ &= \; z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'')-z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'')+z'(t_1,\lambda')\cdot z(t_1,\lambda'') \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

Como ambas funciones $z(t,\lambda')$ y $z(t,\lambda'')$ tienen la misma cantidad de ceros en el intervalo]0, *H*] y como por (6.3b) tenemos

$$z(0,\lambda')=z(0,\lambda'')=a_2 \qquad \text{y} \qquad z'(0,\lambda')=z'(0,\lambda'')=-a_1$$

deducimos que

$$z(t,\lambda')\cdot z(t,\lambda'') \ > \ 0 \qquad \text{para todo } t \text{ perteneciente a } \ ]\ t_1 \ , \ H\,]$$

y también que en t_1

$$z'(t_1,\lambda')\cdot z(t_1,\lambda'') \ > \ 0$$

También, por otro lado, como por definición $p(x(t))>0$ y $\rho(x(t))>0$ $\forall t\in[0,H]$ tenemos que

$$p(x(t))\cdot\rho(x(t))>0 \qquad \forall t\in[t_1,H]$$

y como por definición $\lambda'<\lambda''$, claramente tenemos que $\lambda'-\lambda''<0$, por lo que deducimos de acuerdo con (6.7), que

$$z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'')-z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'') \ < \ 0$$

y reorganizado esto tenemos que

$$z(H,\lambda')\cdot z'(H,\lambda'') \ < \ z'(H,\lambda')\cdot z(H,\lambda'')$$

$$\frac{(z'(H,\lambda''))}{(z(H,\lambda''))} \ < \ \frac{(z'(H,\lambda'))}{(z(H,\lambda'))}$$

lo que significa a medida que aumenta el valor de λ, disminuye el valor de $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$, o lo que es lo mismo, que la función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ es estrictamente decreciente en el intervalo abierto (μ_n,μ_{n+1}).

Por lo tanto, deducimos de

$$z(H,\mu_n) \ = \ z(H,\mu_{n+1}) \ = \ 0$$

$$z'(H,\mu_n)\neq 0 \qquad \text{y} \qquad z'(H,\mu_{n+1})\neq 0$$

que

$$\lim_{\lambda\to\mu_n}\left[\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}\right] \ = \ +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda\to\mu_{n+1}}\left[\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}\right] \ = \ -\infty$$

Por consiguiente, concluimos que la función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ es estrictamente decreciente a lo largo de $(-\infty,+\infty)$ cuando λ varía en el intervalo (μ_n,μ_{n+1}) y por lo tanto toma todos los valores reales.

7. Teorema de oscilación

Los valores propios del sistema de Sturm-Liouville (6.1)

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') \quad + \quad (\lambda\rho(x)-q(x))y \quad = \quad 0 \quad ; \quad x\in[a,b]$$

$$a_1\cdot y(a)+a_2\cdot y'(a)=0 \quad ; \quad |a_1|+|a_2|\neq 0$$

$$b_1\cdot y(b)+b_2\cdot y'(b)=0 \quad ; \quad |b_1|+|b_2|\neq 0$$

forman una sucesión creciente

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<...$$

que tiende a infinito, de manera que la función propia $y(x,\lambda_n)$ *correspondiente a* λ_n *tiene* n *ceros en el intervalo abierto* $]a, b[$.

<u>Demostración:</u>

De acuerdo con la Proposición 6.1, basta estudiar las propiedades enunciadas en el teorema para el sistema (6.3).

Sea $z(t,\lambda)$ la solución de (6.3a) y (6.3b) en función del parámetro λ.

Consideramos los siguientes dos casos, dependiendo del valor de d_2.

Primer caso.

Si $d_2=0$, por (6.2c) $|d_1|+|d_2|\neq 0$ por lo que necesariamente $d_1\neq 0$.

Entonces la función $z(t,\lambda)$ es solución de (6.3c) $d_1\cdot z(H)+d_2\cdot z'(H)=0$ si y sólo si $z(H,\lambda)=0$.

En el caso en que $\lambda'\neq\mu_n$, existe un intervalo abierto *U* donde $\lambda'\in U$ y por tanto donde μ_n no pertenece a U para ningún n=1,2,3,… .

Por la Proposición 6.6, $N(\lambda')$ es constante en U y por consiguiente no se aplica la Proposición 6.5, de donde se deduce que $z(H,\lambda')\neq 0$.

En el caso en que $\lambda'=\mu_n$, siendo *V* un intervalo abierto cualquiera donde $\lambda'\in V$, entonces $N(\lambda')$ no es constante en *V*, por lo que no se aplica la Proposición 6.4 y por tanto tenemos que $z(H,\mu_n)=0$.

Por tanto tenemos que $\lambda_n=\mu_{n+1} \quad \forall n=0,1,2,3,...$

De la segunda parte de la Proposición 6.6, vemos que $z(t,\lambda_n)=z(t,\mu_{n+1})$ tiene $n+1$ ceros en]0, H], pero como $z(H,\lambda_n)=0$, concluimos que la función $z(t,\lambda_n)$ tiene n ceros en]0, H[.

Segundo caso.

Si $d_2\neq 0$, la función $z(t,\lambda)$ es solución de (6.3c) $d_1\cdot z(H,\lambda)+d_2\cdot z'(H,\lambda)=0$ si y sólo si

$$d_2\cdot z'(H,\lambda)=0 \;=\; -d_1\cdot z(H,\lambda)$$

$$\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))} \;=\; -[\frac{d_1}{d_2}]$$

Acorde a la Proposición 6.7, la función $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ es estrictamente decreciente de $+\infty$ a $-\infty$ cuando λ varía en el intervalo abierto $(-\infty,\mu_1)$.

Por consiguiente, por ser $\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ continua en el intervalo $(-\infty,\mu_1)$, existe un único valor $\lambda_0<\mu_1$ de manera que

$$\frac{(z'(H,\lambda_0))}{(z(H,\lambda_0))} \;=\; -[\frac{d_1}{d_2}]$$

Ahora, de la primera parte de la Proposición 6.6, tenemos que $z(t,\lambda_0)$ no posee ningún cero en el intervalo]0, H[, dado que $\lambda_0<\mu_1$.

Acorde a la Proposición 6.8, si λ varía en el intervalo abierto (μ_n,μ_{n+1}), la función

$\frac{(z'(H,\lambda))}{(z(H,\lambda))}$ es estrictamente decreciente de $+\infty$ a $-\infty$, por lo que existe un único valor

$\lambda_n\in(\mu_n,\mu_{n+1})$ de tal forma que

$$\frac{(z'(H,\lambda_n))}{(z(H,\lambda_n))} \;=\; -[\frac{d_1}{d_2}]$$

De acuerdo con la Proposición 6.6, la función $z(t,\lambda_n)$ tiene n ceros en el intervalo]0, H], y dado que $z(H,\lambda_n)\neq 0$, concluimos que la función $z(t,\lambda_n)$ tiene n ceros en el intervalo]0, H[.

De este teorema se deduce que el operador $\frac{d}{dx}[p(x)\cdot(\frac{d}{dx})] \;:\; C^2[a,b] \Longrightarrow C[a,b]$ es no acotado.

8. Polinomios de Legendre

Podemos motivar el estudio de los polinomios de Legendre por medio de una función que los genera a partir de un fenómeno geométrico.

Consideremos p siendo la distancia entre el punto M y el punto fijo M_0.

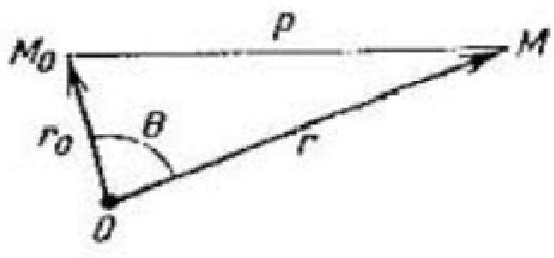

Figura 1

r y r_0 son los radios vectores de M y M_0 respectivamente, y θ es el ángulo entre estos vectores.

Por la ley de los cosenos, de la Figura 1 vemos que

$$p^2 = r^2 + r_0^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot cos\theta$$

y por tanto

$$p = \sqrt{(r^2 + r_0^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot cos\theta)}$$

Tenemos que la inversa de la distancia entre los puntos M y M_0, $\frac{1}{p}$, es por tanto

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot cos\theta)}}$$

Tomamos que $r > r_0$.

Ahora, factorizando r^2 en la raíz cuadrada obtenemos

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot cos\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{(r^2[1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2 \cdot r_0}{r} cos\theta])}} = \frac{1}{r} \cdot (\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2 \cdot r_0}{r} cos\theta)}})$$

De ahora en adelante nos centraremos únicamente en $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2 \cdot r_0}{r} cos\theta)}}$

Entonces, renombrando

$$x = cos\theta \quad \text{donde} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad \rho = \frac{r_0}{r} < 1 \quad \text{dado que} \quad r > r_0$$

la fracción nos queda de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2 \cdot r_0}{r} cos\theta\right)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\rho^2 - 2\rho x)}}$$

Definición 5

La función

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = (1+\rho^2-2\rho x)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$donde \quad 0 < \rho < 1 \quad y \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

se llama función generatriz de los polinomios de Legendre.

8.1. Fórmula diferencial de los polinomios de Legendre.

Desarrollando la función $\Psi(\rho, x)$ en serie de potencias de ρ se obtiene que

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot \rho^n \tag{8.1}$$

Definición 6

Los coeficientes $P_n(x)$ *del desarrollo (8.1) son polinomios de n-ésima potencia y se denominan Polinomios de Legendre.*

Desarrollando (8.1) vemos claramente que

$$\Psi(\rho, x) = P_0(x) + P_1(x) \cdot \rho + P_2(x) \cdot \rho^2 + P_3(x) \cdot \rho^3 + \ldots + P_k(x) \cdot \rho^k + \ldots$$

que evaluando para $\rho = 0$, claramente nos da que $\Psi(0, x) = P_0(x)$.

Ahora, derivemos $\Psi(\rho, x)$ con respecto a ρ.

$$\frac{d\Psi}{d\rho}(\rho, x) = 0 + P_1(x) + 2 \cdot P_2(x) \cdot \rho + 3 \cdot P_3(x) \cdot \rho^2 + \ldots + k \cdot P_k(x) \cdot \rho^{(k-1)} + \ldots$$

por lo que evaluando para $\rho = 0$, nos da como resultado $\frac{d\Psi}{d\rho}(0, x) = P_1(x)$.

Derivando $\frac{d\Psi}{d\rho}(\rho, x)$ con respecto a ρ tenemos

$$\frac{(d^2\Psi)}{d\rho^2}(\rho, x) \;=\; 0+2\cdot P_2(x)+3\cdot 2\cdot P_3(x)\cdot\rho+\ldots+k\cdot(k-1)\cdot P_k(x)\cdot\rho^{(k-2)}+\ldots$$

y para $\rho=0$, tenemos que $\frac{(d^2\Psi)}{d\rho^2}(0, x)=2\cdot P_2(x)$.

Luego, derivando de nuevo, tendremos que $\frac{(d^3\Psi)}{d\rho^3}(0, x)=3\cdot 2\cdot P_3(x)$.

Por lo que claramente vemos la tendencia $\frac{(d^n\Psi)}{d\rho^n}(0, x)=n!\cdot P_n(x)$.

y dividiendo ambos lados entre $n!$ tenemos

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{(n!)}\cdot\left[\frac{(d^n\Psi)}{d\rho^n}(p, x)\right]\Bigg|_{\rho=0} \qquad (8.2)$$

Por otro lado, sabemos que la derivada de la Fórmula Integral de Cauchy es

$$f^{(n)}(z_0) \;=\; \frac{(n!)}{(2\pi i)}\int_{\gamma}\frac{(f(z))}{(z-z_0)^{(n+1)}}\,dz$$

donde γ es una curva que rodea a z_0.

por lo que en nuestro caso tenemos

$$\frac{(d^n\Psi)}{d\rho^n}(\rho, x) \;=\; \frac{(n!)}{(2\pi i)}\int_{C}\frac{(\Psi(\mathfrak{z}, x))}{(\mathfrak{z}-\rho)^{(n+1)}}\,d\mathfrak{z}$$

siendo *C* un contorno arbitrario cerrado, en el plano de la variable compleja $\mathfrak{z}=\xi+i\cdot\eta$, que contiene al punto $\mathfrak{z}=0$.

Por lo tanto, volviendo a (8.2) tenemos que y sustituyendo la igualdad anterior tenemos

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{(n!)}\cdot\left[\frac{(d^n\Psi)}{d\rho^n}(p, x)\right]\Bigg|_{\rho=0} \;=\; \frac{1}{(n!)}\cdot\left[\frac{(n!)}{(2\pi i)}\right]\int_{C}\frac{(\Psi(\mathfrak{z}, x))}{(\mathfrak{z}-0)^{(n+1)}}\,d\mathfrak{z} \;=\; \frac{1}{(2\pi i)}\cdot\int_{C}\left[\frac{(\Psi(\mathfrak{z}, x))}{\mathfrak{z}^{(n+1)}}\right]d\mathfrak{z} \quad ;$$

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi i)}\cdot\int_{C}\left[\frac{(\Psi(\mathfrak{z}, x))}{\mathfrak{z}^{(n+1)}}\right]d\mathfrak{z} \qquad (8.3)$$

Hagamos el cambio $\sqrt{1+\zeta^2-2\zeta x} \;=\; 1-z\cdot\zeta$.

Ahora tratemos de aislar ζ :

$$1+\zeta^2-2\zeta x \;=\; (1-z\cdot\zeta)^2 \;\;;\;\; 1+\zeta^2-2\zeta x \;=\; 1-z^2\zeta^2-2z\zeta \;\;;\;\; \zeta^2-2\zeta x \;=\; z^2\zeta^2-2z\zeta \;\;;$$

$$\zeta^2-z^2\zeta^2 \;=\; 2\zeta x-2z\zeta \;\;;\;\; \zeta^2(1-z^2) \;=\; 2\zeta(x-z) \;\;;\;\; \zeta(1-z^2) \;=\; 2(x-z) \;\;;$$

$$\zeta \;=\; 2\frac{(z-x)}{(z^2-1)}$$

Ahora, derivando ambos lados de la igualdad resultante obtenemos

$$d\zeta \;=\; 2\Big[\frac{1}{(z^2-1)}-2z\frac{(z-x)}{(z^2-1)^2}\Big]dz$$

y como $2\frac{(z-x)}{(z^2-1)} \;=\; \zeta$, se tiene

$$d\zeta \;=\; 2\Big[\frac{1}{(z^2-1)}-\frac{z\zeta}{(z^2-1)}\Big]dz \qquad ; \qquad d\zeta \;=\; 2\frac{(1-\zeta z)}{(z^2-1)}dz$$

y reorganizando esto obtenemos

$$\frac{1}{(1-\zeta z)}d\zeta \;=\; \frac{2}{(z^2-1)}dz$$

y como

$$\frac{1}{(1-\zeta z)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2-2\zeta x}} \;=\; \Psi(\zeta, x)$$

tenemos que

$$\Psi(\zeta, x)d\zeta \;=\; \frac{2}{(z^2-1)}dz$$

Por tanto, reescribamos ahora la fórmula (8.3)

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi i)}\cdot\int_C \Big[\frac{(\Psi(\zeta, x))}{\zeta^{(n+1)}}\Big]d\zeta \;=\; \frac{1}{(2\pi i)}\cdot\int_C \Big[\frac{2}{(z^2-1)}\cdot\Big(\frac{1}{\zeta^{(n+1)}}\Big)\Big]dz$$

y como $\zeta \;=\; 2\frac{(z-x)}{(z^2-1)}$, entonces

$$\frac{1}{(\pi i)}\cdot\int_C \Big[\frac{1}{(z^2-1)}\cdot\Big(\frac{1}{\zeta^{(n+1)}}\Big)\Big]dz \;=\; \frac{1}{(\pi i)}\cdot\int_{C_1} \Big[\frac{1}{(z^2-1)}\cdot\Big(\frac{(z^2-1)}{(z-x)}\Big)^{(n+1)}\cdot\Big(\frac{1}{2^{(n+1)}}\Big)\Big]dz \;=$$

$$=\; \frac{1}{(2^{(n+1)}\pi i)}\cdot\int_{C_1} \Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}\Big]dz \;=\; P_n(x) \tag{8.4}$$

siendo C_1 un contorno arbitrario cerrado que rodea al punto $z=x$.

Como la Fórmula Integral de Cauchy y la fórmula de su derivada son respectivamente

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi i)}\int_{\gamma}\frac{(f(z))}{(z-x)}dz \qquad \text{y} \qquad \frac{d^n}{dx^n}f(x) \;=\; \frac{(n!)}{(2\pi i)}\int_{\gamma}\frac{(f(z))}{(z-x)^{(n+1)}}dz \quad ,$$

sustituyendo $f(z)=(z^2-1)^n$ en ambas igualdades nos queda

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi i)}\int_{\gamma}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)}dz \qquad \text{y} \qquad \frac{d^n}{dx^n}f(x) \;=\; \frac{(n!)}{(2\pi i)}\int_{\gamma}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}dz$$

y aplicando $\frac{d^n}{dx^n}$ a la ecuación de la izquierda, nos queda la siguiente igualdad entre ambas

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{1}{(2\pi i)}\int_{\gamma}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)}dz\Big) \;=\; \frac{(n!)}{(2\pi i)}\int_{\gamma}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}dz \qquad ;$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_{\gamma}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)}\Big]dz \;=\; n!\cdot\int_{\gamma}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}\Big]dz$$

Haciendo uso de esta igualdad, reescribimos (8.4)

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{(2^{(n+1)}\pi i)}\cdot\int_{C_1}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}\Big]dz \;=\; \frac{1}{(2^n\cdot 2\cdot\pi i)}\cdot\Big(\frac{1}{(n!)}\Big)\cdot n!\cdot\int_{C_1}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{(n+1)}}\Big]dz \;=$$

$$\left.\;=\; \frac{1}{2^n}\cdot\Big(\frac{1}{(n!)}\Big)\cdot\Big[\frac{1}{(2\pi i)}\Big]\cdot\Big[\frac{d^n}{dx^n}\int_{C_1}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)}\Big]dz\Big] \;=\; P_n(x)\quad\right\} \qquad (8.5)$$

y ahora, teniendo en cuenta que $\frac{1}{(2\pi i)}\cdot\int_{C_1}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)}\Big]dz \;=\; f(x)$ es la Fórmula Integral de Cauchy con $f(z)=(z^2-1)^n$, entonces tenemos que $f(x)=(x^2-1)^n$ y por tanto

$$\frac{1}{(2\pi i)}\cdot\int_{C_1}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)}\Big]dz \;=\; (x^2-1)^n$$

Entonces, sustituyendo esta igualdad en (8.5) obtenemos la fórmula diferencial de los polinomios de Legendre:

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n}\cdot\Big(\frac{1}{(n!)}\Big)\cdot\Big[\frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{1}{(2\pi i)}\Big)\cdot\int_{C_1}\Big[\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)}\Big]dz\Big] \;=\; \frac{1}{(2^n n!)}\cdot\Big[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big] \qquad ;$$

$$P_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)} \cdot \left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right] \qquad (8.6)$$

también llamada Fórmula de Rodrigues.

De (8.6) se aprecia directamente que:

1) - $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.
Dado que si elevamos (x^2-1) a n tendremos un polinomio de grado $2n$, y si después derivamos n veces, provocaremos que el grado de ese polinomio descienda en n unidades, por lo que $2n - n = n$.

2) - $P_n(x)$ contiene únicamente potencias de x de la misma paridad que el número n, de manera que

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x)$$

Por otro lado, probemos que para $x=1$ se tiene que $P_n(1)=1 \quad \forall n \geqslant 0$.

De la función generatriz de los polinomios de Legendre y de (8.1) tenemos respectivamente que

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} \qquad y \qquad \Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot \rho^n$$

por lo que igualando estas dos obtenemos

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot \rho^n$$

y evaluando en $x=1$ tenemos que $\Psi(\rho,1)$ es igual a

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) \cdot \rho^n \qquad (8.7)$$

por un lado tenemos que factorizando la fracción obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho)^2}} = \frac{1}{(1-\rho)}$$

entonces (8.7) se convierte en

$$\frac{1}{(1-\rho)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot P_n(1)$$

por otro lado tenemos que como ρ es menor que 1 por definición, ya que $\rho=\frac{r_0}{r} < 1$ dado que $r > r_0$, entonces tenemos que la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\ldots \text{ es igual a } \frac{1}{(1-\rho)}$$

por lo tanto, sustituyendo esto en el lado derecho de (8.7) tenemos que

$$\frac{1}{(1-\rho)} = \frac{1}{(1-\rho)} \cdot P_n(1)$$

y por tanto concluimos que $P_n(1)=1 \quad \forall n \geqslant 0$.

8.2. Fórmulas de recurrencia y primeros polinomios de Legendre

Derivando $\Psi(\rho, x)=(1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}$ con respecto a ρ nos da que

$$\Psi_\rho(\rho, x) = -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x+2\rho) \cdot (1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} = (x-\rho) \cdot (1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Entonces, si multiplicamos $\Psi_\rho(\rho, x)$ por $(1-2\rho x+\rho^2)$, obtenemos

$$\Psi_\rho(\rho, x) \cdot (1-2\rho x+\rho^2) = (x-\rho) \cdot (1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot (1-2\rho x+\rho^2) =$$
$$= (x-\rho) \cdot (1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} = (x-\rho) \cdot \Psi(\rho, x)$$

Por tanto, hemos obtenido la identidad

$$(1-2\rho x+\rho^2) \cdot \Psi_\rho(\rho, x) = (x-\rho) \cdot \Psi(\rho, x) \qquad (8.8)$$

Ahora, como también tenemos que $\Psi(\rho, x)$ es $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot \rho^n$ en serie de potencias de ρ, derivando esto con respecto a ρ, tenemos

$$\Psi_\rho(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot P_{n+1}(x) \cdot \rho^n$$

Por lo tanto, sustituyendo esta forma de $\Psi_\rho(\rho, x)$ en el lado izquierdo de la identidad (8.8) tenemos que

$$(1-2\rho x+\rho^2) \cdot \Psi_\rho(\rho, x) = (1-2\rho x+\rho^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot P_{n+1}(x) \cdot \rho^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \; - \; 2\rho x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \; + \; \rho^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \; =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \; - \; 2x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n \; + \; \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot P_{n-1}(x)\cdot\rho^n$$

Como la primera serie comienza en *n*=0, la segunda en *n*=1 y la tercera en *n*=2, separemos los primeros dos términos de la primera serie y el primer término de la segunda serie, y pongamos las tres series de manera que comiencen por *n*=2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \; - \; 2x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n)\cdot P_n(x)\cdot\rho^n \; + \; \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot P_{n-1}(x)\cdot\rho^n \; =$$

$$= [(0+1)\cdot P_{0+1}(x)\cdot\rho^0]+[(1+1)\cdot P_{1+1}(x)\cdot\rho^1]+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \; +$$
$$-2x\cdot 1\cdot P_1(x)\cdot\rho^1-2x\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n \; + \; \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot P_{n-1}(x)\cdot\rho^n \; =$$

$$= P_1(x)+2\cdot P_2(x)\cdot\rho+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \quad -2x\cdot 1\cdot P_1(x)\cdot\rho-2x\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n \; +$$
$$+ \; \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot P_{n-1}(x)\cdot\rho^n \; =$$

$$= P_1(x)+2P_2(x)\cdot\rho-2xP_1(x)\cdot\rho+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)\cdot P_{n+1}(x)-2xnP_n(x)+(n-1)\cdot P_{n-1}(x)]\cdot\rho^n$$

Ahora, sustituyendo $\Psi(\rho,x)$ en forma de series de potencias de ρ en el lado derecho de la identidad (8.8) tenemos que

$$(x-\rho)\cdot\Psi(\rho,x) \; = \; (x-\rho)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\cdot\rho^n \; = \; x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\cdot\rho^n-\rho\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\cdot\rho^n \; =$$

$$= \; x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\cdot\rho^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(x)\cdot\rho^n$$

Como la primera serie comienza en *n*=0 y la segunda en *n*=1, separemos los primeros dos términos de la primera serie y el primer término de la segunda serie, y pongamos ambas series de manera que comiencen por *n*=2, para que comiencen por el mismo n que las series del lado izquierdo de (8.8).

$$x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\cdot\rho^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(x)\cdot\rho^n \; = \; xP_0(x)+xP_1(x)\cdot\rho+x\sum_{n=2}^{\infty}P_n(x)\rho^n-P_0(x)\cdot\rho-\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}(x)\rho^n \; =$$

$$= \; xP_0(x)+xP_1(x)\cdot\rho-P_0(x)\cdot\rho+\sum_{n=2}^{\infty}[x\cdot P_n(x)-P_{n-1}(x)]\cdot\rho^n$$

Volviendo a la identidad (8.8), si nos centramos únicamente en sus términos desde *n=2* en adelante tenemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)\cdot P_{n+1}(x)-2xnP_n(x)+(n-1)\cdot P_{n-1}(x)]\cdot\rho^n \;=\; \sum_{n=2}^{\infty}[x\cdot P_n(x)-P_{n-1}(x)]\cdot\rho^n$$

que pasando todo el lado derecho al lado izquierdo se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)\cdot P_{n+1}(x)-(2xn+x)\cdot P_n(x)+(n-1+1)\cdot P_{n-1}(x)]\cdot\rho^n \;=\; 0 \qquad ;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)\cdot P_{n+1}(x)-x(2n+1)\cdot P_n(x)+n\cdot P_{n-1}(x)]\cdot\rho^n \;=\; 0$$

Como el coeficiente de ρ^n de la serie obtenida es igual a cero para todo x, tenemos

$$(n+1)\cdot P_{n+1}(x)-x(2n+1)\cdot P_n(x)+n\cdot P_{n-1}(x) \;=\; 0 \qquad \text{(8.9)}$$

Esta identidad es una fórmula de recurrencia que relaciona tres polinomios de Legendre sucesivos

$$P_{n+1}(x) \;=\; \frac{1}{(n+1)}\cdot[x(2n+1)\cdot P_n(x)-n\cdot P_{n-1}(x)]$$

y permite hallar sucesivamente todos los polinomios de Legendre de grado $n\geqslant 2$.

Sabiendo esto y obteniendo por (8.6) que $P_0(x)=1$ y $P_1(x)=x$, podemos obtener todos los siguientes para cualquier valor de $n\geqslant 1$.

Con *n*=1:

$$P_2(x) \;=\; \frac{1}{2}\cdot[3x\cdot P_1(x)-P_0(x)] \;=\; \frac{1}{2}\cdot[3x\cdot x-1] \;=\; \frac{1}{2}\cdot(3x^2-1)$$

Con *n*=2:

$$P_3(x) \;=\; \frac{1}{3}\cdot[5x\cdot P_2(x)-2\cdot P_1(x)] \;=\; \frac{1}{3}\cdot[5\frac{x}{2}\cdot(3x^2-1)-2x] \;=\; \frac{1}{2}\cdot(5x^3-3x)$$

Con *n*=3:

$$P_4(x) \;=\; \frac{1}{4}\cdot[7x\cdot P_3(x)-3\cdot P_2(x)] \;=\; \frac{1}{8}\cdot(35x^4-30x^2+3)$$

Con *n*=4:

$$P_5(x) \;=\; \frac{1}{5}\cdot[9x\cdot P_4(x)-4\cdot P_3(x)] \;=\; \frac{1}{8}\cdot(63x^5-70x^3+15x)$$

etc.

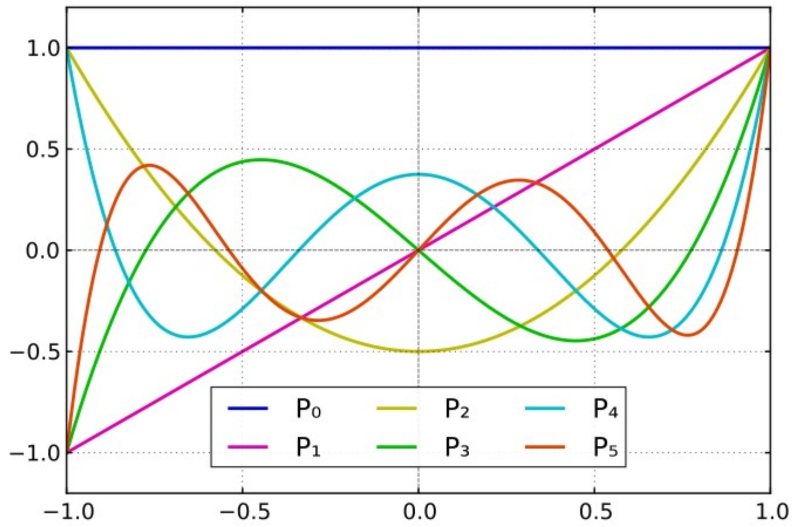

Figura 2: Primeros seis polinomios de Legendre

8.3. Ecuación de Legendre

Derivando $\Psi(\rho,x)=(1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}$ con respecto a x nos da que

$$\Psi_x(\rho,x) \;=\; -\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-2\rho)\cdot(1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} \qquad \rho\cdot(1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} \;=$$

Entonces, si multiplicamos $\Psi_x(\rho,x)$ por $(1-2\rho x+\rho^2)$, obtenemos

$$\Psi_x(\rho,x)\cdot(1-2\rho x+\rho^2) \;=\; \rho\cdot(1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot(1-2\rho x+\rho^2) \;=$$
$$=\; \rho\cdot(1-2\rho x+\rho^2)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \;=\; \rho\cdot\Psi(\rho,x)$$

Por consiguiente, hemos obtenido la identidad

$$(1-2\rho x+\rho^2)\cdot\Psi_x(\rho,x) \;=\; \rho\cdot\Psi(\rho,x) \tag{8.10}$$

Ahora, aislando $\Psi(\rho,x)$ en (8.8) y en (8.10) obtenemos respectivamente

$$\Psi(\rho,x) \;=\; \frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\cdot\Psi_\rho(\rho,x)]}{(x-\rho)} \qquad \text{y} \qquad \Psi(\rho,x) \;=\; \frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\cdot\Psi_x(\rho,x)]}{\rho}$$

por lo que, uniendo estas dos igualdades por $\Psi(\rho,x)$ tenemos que

$$\frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\cdot\Psi_\rho(\rho,x)]}{(x-\rho)} \;=\; \frac{[(1-2\rho x+\rho^2)\cdot\Psi_x(\rho,x)]}{\rho} \quad ;$$

$$\frac{[\Psi_\rho(\rho,x)]}{(x-\rho)} = \frac{[\Psi_x(\rho,x)]}{\rho}$$

y obtenemos la igualdad

$$\rho\cdot\Psi_\rho(\rho,x) = (x-\rho)\cdot\Psi_x(\rho,x) \qquad (8.11)$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\Psi_\rho(\rho,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n \qquad \text{y} \qquad \Psi_x(\rho,x) = \sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\cdot\rho^n$$

y sustituyendo estos sumatorios en (8.11) obtenemos

$$\rho\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot P_{n+1}(x)\cdot\rho^n = (x-\rho)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\cdot\rho^n \quad ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\cdot\rho^n-\rho\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\cdot\rho^n \quad ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n = \sum_{n=0}^{\infty}x\cdot P_n'(x)\cdot\rho^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}'(x)\cdot\rho^n$$

Como la primera serie del lado derecho de la igualdad comienza en n=0 y el resto en n=1, separemos el primer término de esa serie y pongamos todas las series de manera que comiencen por n=1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n = x\cdot P_0'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}x\cdot P_n'(x)\cdot\rho^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}'(x)\cdot\rho^n$$

Aquí por ejemplo vemos que $P_0'(x)=0$, lo cual es cierto ya que $P_0(x)=1$.

Por otro lado, si nos centramos únicamente en los términos desde $n=1$ en adelante, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n = \sum_{n=1}^{\infty}x\cdot P_n'(x)\cdot\rho^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}'(x)\cdot\rho^n$$

que pasando todo el lado derecho al lado izquierdo nos da que

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P_n(x)\cdot\rho^n-\sum_{n=1}^{\infty}x\cdot P_n'(x)\cdot\rho^n+\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}'(x)\cdot\rho^n = 0 \quad ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n\cdot P_n(x)-x\cdot P_n'(x)+P_{n-1}'(x)]\cdot\rho^n = 0$$

Como el coeficiente de ρ^n de la serie obtenida es igual a cero para todo x, obtenemos

$$n\cdot P_n(x)-x\cdot P_n'(x)+P_{n-1}'(x) = 0$$

y aislando $P_{n-1}'(x)$:

$$P_{n-1}'(x) = x \cdot P_n'(x) - n \cdot P_n(x) \qquad (8.12)$$

Por otro lado, derivemos (8.9) con respecto a x :

$$\frac{d}{dx}[(n+1) \cdot P_{n+1}(x) - x(2n+1) \cdot P_n(x) + n \cdot P_{n-1}(x)] = 0 \quad ;$$

$$(n+1) \cdot P_{n+1}'(x) - (2n+1) \cdot P_n(x) - x(2n+1) \cdot P_n'(x) + n \cdot P_{n-1}'(x) = 0$$

Ahora sustituimos (8.12) en el último término para obtener

$$(n+1) \cdot P_{n+1}'(x) - (2n+1) \cdot P_n(x) - x(2n+1) \cdot P_n'(x) + n \cdot x \cdot P_n'(x) - n^2 \cdot P_n(x) = 0 \ ;$$

$$(n+1) \cdot P_{n+1}'(x) - (n^2+2n+1) \cdot P_n(x) + (-2xn - x + xn) \cdot P_n'(x) = 0 \quad ;$$

$$(n+1) \cdot P_{n+1}'(x) - (n+1)^2 \cdot P_n(x) - x(n+1) \cdot P_n'(x) = 0 \quad ;$$

$$P_{n+1}'(x) - (n+1) \cdot P_n(x) - x \cdot P_n'(x) = 0$$

Si cambiamos $n+1$ por n tenemos

$$P_n'(x) - n \cdot P_{n-1}(x) - x \cdot P_{n-1}'(x) = 0 \qquad (8.13)$$

Es hora de hallar la ecuación diferencial cuya solución es $P_n(x)$.
Para ello, deshagámonos de los términos $P_{n-1}(x)$ y $P_{n-1}'(x)$ en las ecuaciones (8.12) y (8.13) .
Para hacer esto, sustituyamos $P_{n-1}'(x)$ de (8.12) en (8.13). De esta manera, obtenemos:

$$P_n'(x) - n \cdot P_{n-1}(x) - x \cdot [x \cdot P_n'(x) - n \cdot P_n(x)] = 0 \quad ;$$

$$P_n'(x) - n \cdot P_{n-1}(x) - x^2 \cdot P_n'(x) + nx \cdot P_n(x) = 0 \quad ;$$

$$(1-x^2) \cdot P_n'(x) - n P_{n-1}(x) + nxP_n(x) = 0$$

Ahora, derivando respecto a x :

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2) \cdot P_n'(x) - n P_{n-1}(x) + nxP_n(x)] = 0 \quad ;$$

$$-2x \cdot P_n'(x) + (1-x^2) \cdot P_n''(x) - n P_{n-1}'(x) + nP_n(x) + nxP_n'(x) = 0 \quad ;$$

$$(1-x^2) \cdot P_n''(x) - n P_{n-1}'(x) + nP_n(x) + (nx - 2x) P_n'(x) = 0$$

y sustituyendo de nuevo $P_{n-1}'(x)$ de (8.12) tenemos

$$(1-x^2)\cdot P_n''(x)-n\cdot[x\cdot P_n'(x)-n\cdot P_n(x)]+nP_n(x)+(nx-2x)P_n'(x) = 0 \quad ;$$

$$(1-x^2)\cdot P_n''(x)-nxP_n'(x)+n^2\cdot P_n(x)+nP_n(x)+(nx-2x)P_n'(x) = 0 \quad ;$$

$$(1-x^2)\cdot P_n''(x)-2xP_n'(x)+(n^2+n)P_n(x) = 0 \quad ;$$

$$(1-x^2)\cdot P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

la cual se denomina Ecuación Diferencial de Legendre.

Esta ecuación también puede ser escrita en la forma

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\cdot P_n'(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

y si ponemos $\lambda_n=n(n+1)$, podemos poner la ecuación en la forma

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\cdot P_n'(x)] + \lambda_n\cdot P_n(x) = 0$$

Con lo cual, queda demostrado que la ecuación de Legendre es un caso particular de la ecuación del sistema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}(p(x)\cdot y'(x)) + (\lambda\rho(x)-q(x))\cdot y(x) = 0$$

en donde $p(x)=(1-x^2)$, $\rho(x)=1$, $q(x)=0$ y $\lambda_n=n(n+1)$,

y junto a las condiciones de contorno

$$a_1\cdot y(-1)+a_2\cdot y'(-1) = 0 \quad ; \quad |a_1|+|a_2|\neq 0$$

$$b_1\cdot y(1)+b_2\cdot y'(1) = 0 \quad ; \quad |b_1|+|b_2|\neq 0$$

compone un sistema de Sturm-Liouville.

Por lo que queda demostrado que los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son funciones propias, que corresponden a los valores propios $\lambda_n=n(n+1)$, del problema:

“ Hallar los valores de λ para los cuales existen en el intervalo $-1\leqslant x\leqslant 1$, soluciones no triviales de la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\cdot y'(x)] + \lambda\cdot y(x) = 0\,, \qquad -1<x<1$$

acotadas para $x=\pm 1$ y que satisfagan la condición de normalización $y(1)=1$. ”

9. Conclusiones

Se ha estudiado el problema de Sturm-Liouville desde un punto de vista analítico de una manera muy exhaustiva, obteniéndose las propiedades de ortogonalidad, completitud, etcétera. Todo esto habiéndonos apoyado en los teoremas de Sturm, que incluyen el de comparación y el de separación, tras haber iniciado el estudio por la reducción de la ecuación lineal y homogénea de segundo orden a forma normal.

Como caso particular, se ha abordado el estudio de los polinomios de Legendre a partir del problema geométrico que los genera. Se ha estudiado su fórmula diferencial, sus propiedades, sus relaciones de recurrencia y se han obtenido los primeros polinomios de Legendre a través de su fórmula de recurrencia, entre otros.

Finalmente, se ha obtenido la ecuación diferencial de Legendre, la cual aparece en numerosos problemas de naturaleza física y matemáica, lo que nos lleva a un caso particular del problema de Sturm-Liouville.

Por último, cabe añadir que este estudio puede extenderse a más funciones especiales, como por ejemplo lo son las funciones de Bessel, los polinomios de Chebishov-Hermite, los polinomios de Chebishov-Lagerre, etc.

Bibliografía

[1] Manuel Valdivia Ureña. *Análisis Matemático III, tomo I*.

[2] Manuel Valdivia Ureña. *Análisis Matemático III, tomo II*.

[3] A. Tijonov, A. Samarsky. 1980. *Ecuaciones de la física matemática*. Moscú.

[4] Y. Ayant, M. Borg. *Funciones especiales*.