UNIVERSITAT JAUME I

Máster Universitario en Matemática Computacional

Trabajo de Final de Máster

Métodos analíticos en la mecánica celeste: desarrollos en el problema de dos cuerpos

Autor:
David López Echevarría

Tutor académico:
José Antonio López Ortí

Curso académico 2021/2022

Resumen

En la mecánica celeste, uno de los principales problemas de estudio es el movimiento de los cuerpos del sistema solar, destacando el estudio del movimiento planetario. Este problema se puede abordar mediante técnicas numéricas o mediante técnicas analíticas, y este trabajo se centra en estas últimas, en el cual se toma para cada planeta como problema inicial el problema de dos cuerpos Sol-planeta. El problema de dos cuerpos es un problema completamente integrable que se resuelve mediante la determinación de los elementos orbitales, y la solución del problema completo con perturbaciones se aborda mediante métodos de variación de constantes, dando lugar a las ecuaciones planetarias de Lagrange. Dado que la fuerza con que los demás planetas atraen a uno dado es pequeña con respecto a la atracción del Sol, una técnica apropiada para la integración de las ecuaciones planetaria de Lagrange es el método de perturbaciones tomando como pequeños parámetros la razón de las masas planetarias a la del Sol. Para aplicar esta técnica es necesario en primer lugar conocer los desarrollos de las principales magnitudes del problema de dos cuerpos como series de Fourier en las anomalías medias de los planetas que intervienen, y para ello hay dos tareas principales: obtener todos los desarrollos de las principales cantidades involucradas, y conseguir algoritmos eficientes para obtener el desarrollo del inverso de la distancia. En este trabajo encontraremos lo referido a la primera de estas tareas, dejando para estudios posteriores el desarrollo del inverso de la distancia entre dos planetas.

En la primera sección del trabajo introduciremos el problema de dos cuerpos, para en la siguiente sección presentar los principales desarrollos en funciones de Bessel. En la tercera sección estudiamos el radio de convergencia de las series. En el cuarto demostraremos un teorema debido a Cauchy y nuevos desarrollos aplicando este teorema y los números de Cauchy. En la quinta y última sección obtendremos algunos desarrollos más de interés y estudiaremos la ecuación de Bessel y Legendre.

Palabras clave

Mecánica celeste. Problema de dos cuerpos. Teoría de la perturbación. Desarrollos en serie.

Keywords

Celestial mechanics. Two-body problem. Theory of Perturbation. Series expansion.

Agradecimientos

Hace cinco años que comencé mis aventuras por esta universidad. No han sido pocos los compañeros, el personal docente e investigador y el personal de administración y servicios que me han acompañado durante este tiempo.

Quiero comenzar pidiendo perdón a todos aquellos que en una comisión u otra me han tenido que aguantar: lo siento. Pero también os agradezco el haberme escuchado para lograr una universidad de calidad.

A todo el departamento de matemáticas: gracias. Han sido horas y horas deambulando por esos pasillos para clases, tutorías, reuniones o simplemente para saludar.

Por último, quiero reconocer el trabajo de un PAS de la universidad. Gracias Víctor Garné Miravete. Gracias por enseñarme tanto de la universidad y de la vida: trabajo, constancia, ganas, compromiso, risas... han sido demasiadas horas trabajando juntos y compartiendo momentos que deberían salir en un libro. No cambies, y por favor... no entremos en bucle.

Índice general

Introducción

El presente trabajo fin de máster es continuación del trabajo fin de grado titulado El Problema de Dos Cuerpos [2], en el que abordaba el estudio del problema de dos cuerpos obteniéndose en primer lugar la integral de las áreas, la ecuación del movimiento relativo y la integral de la energía. En este trabajo también se abordaba el estudio del movimiento elíptico, del movimiento parabólico y del movimiento hiperbólico. En una segunda etapa se estudiaba la órbita en el espacio, introduciéndose los elementos orbitales y finalmente se estudiaba el movimiento perturbado cuyo estudio se abordaba mediante las ecuaciones planetarias de Lagrange. Para más detalles puede consultarse el mismo en `http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/194313`.

Para estudiar el movimiento perturbado en el caso de elíptico con excentricidades pequeñas por métodos analíticos es necesario desarrollar los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de Lagrange en serie de Fourier respecto a las anomalías medias de cuerpo perturbado y del cuerpo perturbados, siendo el movimiento de ambos en orden cero de perturbación movimientos keplerianos elípticos.

Para lograr tal fin es necesario por una parte el desarrollo de las principales magnitudes del problema de dos cuerpos en serie de Fourier de la anomalía media y por otra obtener el desarrollo del inverso de la distancia entre astro perturbado y perturbador como serie de Fourier doble en las anomalías medias de ambos cuerpos.

Este trabajo está enfocado principalmente al estudio de la primera tarea, introduciéndose de modo somero la segunda. Este trabajo aún no es suficiente para lograr el desarrollo de las ecuaciones planetarias de Lagrange en serie doble de Fourier de las anomalías medias de cuerpo perturbado y perturbador.

En el capítulo 1 se exponen los conceptos más básicos del problema de dos cuerpos para proseguir este trabajo. En el capítulo 2 se estudia de modo riguroso el desarrollo de los senos y cosenos de los múltiplos de la anomalía excéntrica E como series de Fourier de la anomalía media M. Nótese que este estudio permite obtener, conocido el desarrollo de $\sin(E)$, el desarrollo de E en función de M. Para ello se introducen las transformadas de Bessel.

En el capítulo 3 se estudia la convergencia de estas series, lo que se realiza tomando como base el teorema de Lagrange de la teoría de funciones holomorfas, el cual permite la inversión de funciones analíticas alrededor de un punto en el que no se anula la primera derivada, obteniéndose el desarrollo de la función inversa en series de potencia. De ello se obtiene el mencionado radio.

A continuación, en el capítulo 4, se estudian los teoremas de Cauchy para el desarrollo de ciertas funciones de E en función de M y los número de Cauchy lo que permite la obtención de importantes desarrollos entre los que se encuentra la llamada ecuación del centro.

En el capítulo 5 se estudian una serie de importantes desarrollos de la anomalía verdadera y el radio en función de la anomalía media, lo cual se realiza mediante la introducción y el estudio de las funciones de Hansen. Al final de este capítulo, también se aborda el estudio de los polinomios de Legendre lo que constituye la base de uno de los métodos para obtener el inverso de la distancia entre cuerpo perturbador y perturbado. También se muestra que los polinomios de Lagrange y las funciones de Bessel son soluciones de sendas ecuaciones diferenciales.

Finalmente se muestran las principales conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Conceptos previos

En este primer capítulo, se recordarán algunos conceptos y definiciones estudiados en el TFG El Problema de los Dos Cuerpos [2]. Este TFM es una continuación de la teoría previamente vista, así que es conveniente ver este capítulo o leer el TFG para tener una mejor lectura de este TFM.

1.1. Definiciones

Definición 1 *Primario. Punto material de masa* m_1 *cuya posición en un sistema de coordenada viene dado por el radio vector* $\vec{r_1}$.

Definición 2 *Secundario. Punto material de masa* m_2 *cuya posición en un sistema de coordenada viene dado por el radio vector* $\vec{r_2}$. *Se considera con una masa menor que el primario.*

Definición 3 *Se denomina periastro al punto de la órbita más próximo al primario.*

Definición 4 *Los semiejes de la órbita elíptica se denotan con las letras* a *y* b*, siendo el primero de ellos el de mayor longitud.*

Definición 5 *Se denota la excentricidad de la órbita por* e.

Definición 6 *Se denomina anomalía verdadera al ángulo* $\vec{V}$ *que forma el radio vector* $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ *con la dirección del periastro.*

Definición 7 *Se denota la anomalía excéntrica con la letra E.*

Definición 8 *Se denota la anomalía media con la letra M. Si se denota $n = \frac{2\pi}{T}$ al movimiento medio, siendo T el periodo orbital, se tiene que*

$$M = n(t - t_0), \tag{1.1}$$

siendo t_0 una época inicial.

1.2. Integral de áreas

Denotando $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, la integral de áreas resulta

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{C},$$

donde $\vec{C}$ es la constante vectorial de las áreas.

La integral de áreas se expresa en coordenadas polares como

$$r^2 \frac{dV}{dt} = C = nab. \tag{1.2}$$

1.3. Parámetro del movimiento elíptico

El parámetro p en el movimiento elíptico verifica que

$$p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}. \tag{1.3}$$

1.4. Ecuación de Kepler

La relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica se produce a través de la llamada ecuación de Kepler

$$M = E - e\sin(E). \tag{1.4}$$

1.5. Relación entre las anomalías verdadera y excéntrica

La ecuación que relaciona la anomalía verdadera con la anomalía excéntrica es

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \tag{1.5}$$

1.6. El movimiento perturbado

El problema de dos cuerpos perturbado es aquel en el que existen diferentes cuerpos con masa en el lugar de estudio, pero que la masa del primario es superior a la del resto. Este problema se trata añadiendo una función de perturbación que depende de la distancia entre el primario y secundario, su derivada y el tiempo.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \tag{1.6}$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$, siendo G la constante gravitacional.

1.7. Ecuaciones planetarias de Lagrange

Sea un problema de dos cuerpos perturbado por un potencial $\mathcal{R}$. Entonces la variación de los elementos osculadores respecto al tiempo viene dada por

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e},
\end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

que son las conocidas como ecuaciones planetarias de Lagrange.

Capítulo 2

Primeros desarrollos

En este capítulo se abordan los primeros desarrollos en serie relativos al problema de dos cuerpos, en particular los desarrollos de los senos y cosenos múltiplos de la anomalía excéntrica E, Las fuentes seguidas para abordar dicha tarea las podemos encontrar en [4] en lo relativo a la base de los desarrollos y en [1] en lo relativo a las funciones de Bessel.

2.1. Funciones trigonométricas de la anomalía excéntrica E

Sea la función $\sin(kE), k \in \mathbb{N}$. Esta función es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$, es $2\pi-$periódica y es impar en E y de la anomalía media M a través de la ecuación de Kepler (1.4). Por tanto, existe una sucesión $\{b_m^k\}_{m=1}^{\infty}$ tal que

$$\sin(kE) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^k \sin(mM),$$

donde los coeficientes de Fourier vienen dados por

$$b_m^k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kE) \sin(mM) \, dM.$$

Al integrar estos coeficientes por partes, se obtiene que

$$\begin{aligned}
b_m^k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kE)\sin(mM)\,dM \\
\Big\downarrow &\quad \left\{\begin{matrix} u = \sin(kE) & \longrightarrow & du = k\sin(kE)dE \\ dv = \sin(mM)\,dM & \longrightarrow & v = \dfrac{-1}{m}\cos(mM) \end{matrix}\right\} \\
&= \left[\frac{-1}{m\pi}\sin(kE)\cos(mM)\right]_{M=0}^{2\pi} + \frac{k}{m\pi}\int_0^{2\pi}\cos(mM)\cos(kE)\,dE \\
&= \frac{k}{m\pi}\int_0^{2\pi}\cos(mM)\cos(kE)\,dE,
\end{aligned}$$

y a partir de la ecuación de Kepler (1.4) se obtiene que

$$b_m^k = \frac{k}{m\pi}\int_0^{2\pi}\cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big)\Big)\cos(kE)\,dE. \tag{2.1}$$

Por otro lado, y a partir de las relaciones del coseno de la suma y la resta de ángulos, se tiene que

$$\begin{aligned}
\cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) - kE\Big) &= \cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big)\Big)\cos(kE) \\
&\quad + \sin\Big(m\big(E - e\sin(E)\big)\Big)\sin(kE),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) + kE\Big) &= \cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big)\Big)\cos(kE) \\
&\quad - \sin\Big(m\big(E - e\sin(E)\big)\Big)\sin(kE).
\end{aligned}$$

Sumando las relaciones y dividiendo entre dos, se tiene

$$\begin{aligned}
\cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big)\Big)\cos(kE) &= \frac{1}{2}\Big[\cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) - kE\Big) \\
&\quad + \cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) + kE\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

restando y dividiendo entre dos se tiene

$$\begin{aligned}
\sin\Big(m\big(E - e\sin(E)\big)\Big)\sin(kE) &= \frac{1}{2}\Big[\cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) - kE\Big) \\
&\quad - \cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) + kE\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{2.3}$$

y al sustituir (2.2) en (2.1) resulta

$$b_m^k = \frac{k}{2m\pi}\int_0^{2\pi}\cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) - kE\Big) + \cos\Big(m\big(E - e\sin(E)\big) + kE\Big)\,dE,$$

o lo que es lo mismo,

$$b_m^k = \frac{k}{2m\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big((m-k)E - m\,e\sin(E)\big) + \cos\big((m+k)E - m\,e\sin(E)\big)\,dE.$$

Sea ahora la función $\cos(kE), k \in \mathbb{N}$. Esta función también es de clase $\mathcal{C}^\infty$, $2\pi-$periódica, pero es par en E (y en M), por lo que

$$\cos(kE) = a_0^k + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^k \cos(mM),$$

donde

$$a_0^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE)\,dM \quad \text{ y } \quad a_m^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE)\cos(mM)\,dM \qquad (m \geq 1).$$

Para calcular a_0^k, diferenciamos la ecuación de Kepler $dM = \big(1 - e\cos(E)\big)\,dE$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} a_0^k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE)\big(1 - e\cos(E)\big)\,dE \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE) - e\cos(kE)\cos(E)\,dE \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE) - \frac{e}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE)\cos(E)\,dE \\ &= \frac{-e}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE)\cos(E)\,dE. \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que

$$\begin{aligned} \cos\big((k-1)E\big) &= \cos(kE)\cos(E) + \sin(kE)\sin(E), \\ \cos\big((k+1)E\big) &= \cos(kE)\cos(E) - \sin(kE)\sin(E), \end{aligned}$$

de donde si se suman estas expresiones y se dividen entre dos se obtiene

$$\cos(kE)\cos(E) = \frac{1}{2}\Big(\cos\big((k-1)E\big) + \cos\big((k+1)E\big)\Big),$$

y por tanto

$$a_0^k = \frac{-e}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big((k-1)E\big) + \cos\big((k+1)E\big)\,dE.$$

Para $k=1$, resulta

$$\begin{aligned} a_0^1 &= \frac{-e}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1+\cos(2E)\,dE \\ &= \frac{-e}{4\pi}\left[E-\frac{\sin(2E)}{2}\right]_{E=0}^{2\pi} \\ &= \frac{-e}{2}, \end{aligned}$$

y para $k>1$,

$$\begin{aligned} a_0^k &= \frac{-e}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big((k-1)E\big)+\cos\big((k+1)E\big)\,dE \\ &= \frac{-e}{4\pi}\left[\frac{\sin\big((k-1)E\big)}{k-1}+\frac{\sin\big((k+1)E\big)}{k+1}\right]_{E=0}^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

El cálculo de a_m^k, $m>0$, se realiza integrando por partes

$$\begin{aligned} a_m^k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kE)\cos(mM)\,dM \\ &\Big\downarrow \quad \left\{\begin{matrix} u=\cos(kE) & \longrightarrow & du=-k\sin(kE)dE \\ dv=\cos(mM)\,dM & \longrightarrow & v=\dfrac{1}{m}\sin(mM) \end{matrix}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{m\pi}\cos(kE)\sin(mM)\right]_{M=0}^{2\pi}+\frac{k}{m\pi}\int_0^{2\pi}\sin(mM)\sin(kE)\,dE \\ &= \frac{k}{m\pi}\int_0^{2\pi}\sin(mM)\sin(kE)\,dE, \end{aligned}$$

y a partir de la ecuación de Kepler y de la ecuación (2.3), se obtiene que

$$\begin{aligned} a_m^k &= \frac{k}{m\pi}\int_0^{2\pi}\sin\Big(m\big(E-e\sin(E)\big)\Big)\sin(kE)\,dE \\ &= \frac{k}{2m\pi}\int_0^{2\pi}\cos\Big(m\big(E-e\sin(E)\big)-kE\Big)-\cos\Big(m\big(E-e\sin(E)\big)+kE\Big)\,dE, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$a_m^k = \frac{k}{2m\pi}\int_0^{2\pi}\cos\big((m-k)E-m\,e\sin(E)\big)-\cos\big((m+k)E-m\,e\sin(E)\big)\,dE.$$

Los coeficientes a_m^k y b_m^k son funciones de la excentricidad e.

2.2. Funciones de Bessel de primera especie

2.2.1. Desarrollo de las funciones de Bessel

Sea la función $Z(x,z) = \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \exp\left(\frac{xz}{2}\right)\exp\left(\frac{-x}{2z}\right)$, la cual puede desarrollarse en una serie de Laurent como

$$Z(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, z^n,$$

donde

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{Z(x,\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi,$$

siendo C un ciclo homólogo a cero que encierra a $z = 0$.

Si se toma C como la circunferencia en el plano complejo definida como $|\xi| = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{x}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)}}{\xi^{n+1}}\, d\xi \\
&\Big\downarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \xi = e^{it} & t \in [0, 2\pi] \\ d\xi = ie^{it}\, dt & \\ \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2} = i\sin(t) = \dfrac{1}{2}\left(\xi - \dfrac{1}{\xi}\right) & \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin(t)} e^{-nit} i\, dt \qquad (2.4) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left(x\sin(t) - nt\right)}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(x\sin(t) - nt\right) - i\sin\left(x\sin(t) - nt\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(x\sin(t) - nt\right) dt - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(x\sin(t) - nt\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(nt - x\sin(t)\right) dt - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x\sin(t) - nt\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(nt - x\sin(t)\right) dt.
\end{aligned}$$

Por lo que para las funciones de Bessel de primera especie, gracias al desarrollo en series de potencias de la exponencial, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, z^n &= \exp\left(\frac{xz}{2}\right)\exp\left(\frac{-x}{2z}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k z^k\right)\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^s z^{-s}\right) \qquad (2.5)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s x^{k+s}}{2^{k+s}k!s!} z^{k-s}.
\end{aligned}$$

Vamos a distinguir tres casos

- Si $k > s$ consideramos $n = k - s$, y el sumatorio parcial sería

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s}s!(n+s)!}\right) z^n.$$

- Si $k = s$, el sumatorio parcial sería

$$\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s}s!s!} z^0.$$

- Si $k < s$ consideramos $n = s - k$, y el sumatorio parcial sería

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s x^{2s-n}}{2^{2s-n}s!(s-n)!}\right) z^{-n},$$

  e invirtiendo los límites del sumatorio,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s}s!(n+s)!}\right) z^n.$$

Si se agrupan estos sumatorios en la ecuación (2.5), se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\right) z^n,$$

y por tanto,

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \qquad (2.6)$$

Para estas funciones se cumplen las relaciones de recurrencia

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{J_n(x)}{x^n} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \\
&\Big\downarrow \quad \{k-1=s\} \\
&= \frac{-1}{2^n}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1} \\
&= \frac{-x}{2^{n+1}}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \\
&= \frac{-1}{x^n}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \\
&= \frac{-1}{x^n}J_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

Por tanto, se cumple la relación

$$
\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{-1}{x^{n+1}}J_{n+1}(x), \tag{2.7}
$$

y de aquí se tiene

$$
\frac{d^m}{(xd)^m}\frac{J_n(x)}{x^n} = (-1)^m\frac{J_{n+m}(x)}{x^{n+m}}.
$$

Por otro lado, se tiene la relación

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(x^nJ_n(x)\big) &= \frac{d}{dx}\left[2^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[2^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k}\right] \\
&= 2^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k-1} \\
&= 2^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&= x^n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\big((n-1)+k\big)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},
\end{aligned}
$$

es decir, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\big(x^n J_n(x)\big) = x^n J_{n-1}(x), \tag{2.8}$$

que al dividir entre x se tiene

$$\frac{d}{xd}\big(x^n J_n(x)\big) = x^{n-1} J_{n-1}(x),$$

y al aplicarlo m veces se llega a que

$$\frac{d^m}{(xd)^m}\big(x^n J_n(x)\big) = x^{n-m} J_{n-m}(x).$$

Las expresiones (2.7) y (2.8) se pueden escribir, derivando con la regla de la cadena, como

$$\begin{aligned} \frac{J_n'(x)}{x^n} - n\frac{J_n(x)}{x^{n+1}} &= -\frac{1}{x^n} J_{n+1}(x) \\ x^n J_n'(x) + n x^{n-1} J_n(x) &= x^n J_{n-1}(x), \end{aligned}$$

y despejando,

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \\ J_n'(x) &= \frac{-n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Al igualar, se obtiene la primera relación de recurrencia

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x),$$

y al sumar se obtiene la segunda relación de recurrencia

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\Big(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\Big)$$

Por otra parte, se puede probar fácilmente con la ayuda del desarrollo (2.6) que

$$\begin{aligned} J_n(-x) &= (-1)^n J_n(x) \\ J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

También se cumple que $J_n(x) = \mathcal{O}(x^n)$.

Las funciones de Bessel son solución de una ecuación diferencial conocida por ecuación de Bessel.

2.2.2. Aplicación a los desarrollos de $\sin(kE)$ y $\cos(kE)$

Una vez establecidas las funciones de Bessel, resulta que

$$
\begin{aligned}
\sin(kE) &= \sum_{m=1}^{+\infty} b_m^k \sin(mM) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \sin(mM) \frac{k}{2m\pi} \int_0^{2\pi} \cos\big((m-k)E - m\,e\sin(E)\big) + \cos\big((m+k)E - m\,e\sin(E)\big)\, dE \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{k}{m} \Big(J_{m-k}(me) + J_{m+k}(me) \Big) \sin(mM),
\end{aligned}
$$

y de forma similar,

$$
\cos(kE) = -\frac{e}{2}\delta_{1,k} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{k}{m} \Big(J_{m-k}(me) - J_{m+k}(me) \Big) \cos(mM),
$$

donde $\delta_{1,k}$ es la delta de Kronecker.

Capítulo 3

Convergencia de los desarrollos

En este capítulo se aborda el estudio de la convergencia de los desarrollos en serie de las funciones de la anomalía excéntrica en serie de potencias de la excentricidad. De las diversas alternativas, se ha escogido la prueba de Rouche la cual se encuentra expuesta en Tisserand [6], dicha prueba parte del teorema de inversión de series de Lagrange, cuya demostración y requisitos pueden encontrarse en [1] y en [3].

3.1. Convergencia de los desarrollos en potencias de e

Las series obtenidas en la sección anterior son convergentes para cada valor de e. Sustituyendo las funciones de Bessel por sus desarrollos, resultan series dobles en e y $\cos(kM), \sin(kM)$.

En la mecánica celeste, resulta interesante poder reordenar las series en función de la excentricidad, que en el movimiento elíptico está comprendida en $[0, 1[$, para así poder despreciar a partir de un cierto término en e.

Para poder reordenar las series, integrar y derivar, es preciso que las series converjan de manera absoluta y uniforme, por lo que estudiaremos los desarrollos en series de Lagrange en varias fases.

3.1.1. Desarrollo en series de Lagrange

Existencia de inversa

Sea $f(z) = f(z_0) + \sum_{m=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una función holomorfa tal que $f'(z_0) \neq 0$ y su desarrollo en serie converge en el interior del disco $|z-z_0| < \rho$, $(\rho > 0)$. Definimos $\omega = f(z)$ y $\omega_0 = f(z_0)$. Sea $0 < \rho_0 < \rho$ tal que la función $g(z) = f(z) - \omega_0 \neq 0$ si $0 < |z - z_0| < \rho_0 < \rho$. Podemos asegurar que existe ρ_0 ya que $g(z)$ es holomorfa y no constante $(g'(z_0) \neq 0)$ por lo que sus ceros son puntos aislados.

Sea $\delta = d(\omega_0, \{f(z_0)/|z-z_0| = \rho_0\})$. Luego, para todo valor $\omega_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|\omega_1 - \omega_0| < \delta$ se tiene que $|f(z) - \omega_0| > |\omega_0 - \omega_1|$ para cualquier $z \in \gamma \equiv |z - z_0| = \rho_0$.

Por el Teorema de Rouche, la ecuación $f(z) - \omega_0$ y $f(z) - \omega_1 = f(z) - \omega_0 + (\omega_0 - \omega_1) = 0$ tienen el mismo número de raíces en el interior de la circunferencia γ.

Sea pues z_1 la raíz de $f(z) - \omega_1 = 0$ en el interior de γ. Podemos definir la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \{\omega \in \mathbb{C}/|\omega - \omega_0| < \delta\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \omega_1 & \longrightarrow & \varphi(\omega_1) = z_1, \end{array}$$

donde $z = \varphi(\omega)$ es la función inversa de $\omega = f(z)$.

Obtención de la serie de Lagrange

Sea $F(z)$ una función analítica en un recinto que contenga al disco $|z - z_0| \leq \rho_0$. Se pretende obtener el desarrollo de $F(\varphi(\omega))$ en series de potenciad de $\omega - \omega_0$ y estudiar su radio de convergencia. Sea pues $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $|w - \omega_0| < \delta$, por lo que la función $f(z) - w = 0$ tiene un cero simple único en $z = \varphi(\omega)$ en el interior de $\gamma \equiv |z - z_0| = \rho_0$, por lo que la función

$$\frac{F(\xi)\, f'(\xi)}{f(\xi) - \omega},$$

tiene un polo simple único en $\varphi(\omega)$ en el interior de γ con residuo igual a $F(\varphi(\omega))$, por lo que

$$F(\varphi(\omega)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(\xi) \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - \omega}\, d\xi. \tag{3.1}$$

Para evaluar la integral anterior, recordamos por un lado que $|\omega - \omega_0| < \delta$ mientras que

$|f(\xi)-\omega_0| \geq \delta$, $\xi \in \gamma$, por lo que $\left|\frac{\omega-\omega_0}{f(\xi)-\omega_0}\right| < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-\omega} &= \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-\omega_0+\omega_0-\omega} \\
&= \frac{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-\omega_0}}{1-\frac{\omega-\omega_0}{f(\xi)-\omega_0}} \\
&= \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-\omega_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega-\omega_0}{f(\xi)-\omega_0}\right)^n .
\end{aligned}$$

Sea $M = \max_{\gamma}|f'(\xi)|$, entonces la serie está acotada absolutamente por $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{\delta}\left(\frac{|\omega-\omega_0|^n}{\delta^n}\right)$ la cual es uniformemente convergente por lo que la serie también lo es.

Por lo que la integral de la ecuación (3.1) puede integrarse término a término tras sustituir la serie.

$$\begin{aligned}
F(\varphi(\omega)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-\omega_0}\left(\frac{\omega-\omega_0}{f(\xi)-\omega_0}\right)^n d\xi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{F(\xi)f'(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^{n+1}}\,d\xi\right](\omega-\omega_0)^n,
\end{aligned}$$

por lo que hemos obtenido $F(\varphi(\omega))$ como desarrollo en serie de potencias de $(\omega-\omega_0)$ convergente si $|\omega-\omega_0| < \delta$. Esta serie constituye la inversión de la serie original si $F(z) = z$. Calculemos los coeficientes

- Si $n = 0$:

  $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\xi)f'(\xi)}{f(\xi)-\omega_0}\,d\xi = F(z_0),$$

  ya que $\xi = z_0$ es un polo simple de residuo $F(z_0)$.

- Si $n \geq 1$:

En primer lugar, integramos por partes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\xi)f'(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^{n+1}}\,d\xi &= \left\{\begin{matrix} u = F(\xi) & \longrightarrow & du = F'(\xi)d\xi \\ dv = \dfrac{f'(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^{n+1}}d\xi & \longrightarrow & v = -\dfrac{1}{n(f(\xi)-\omega_0)^n} \end{matrix}\right\} \\
&= -\frac{1}{2\pi i n}\cancelto{0}{\left[\frac{F(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^n}\right]_\gamma} + \frac{1}{2\pi i n}\int_\gamma \frac{F'(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^n}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i n}\int_\gamma \frac{F'(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^n}\,d\xi.
\end{aligned}$$

La función en la integral tiene un polo de orden n en z_0, por tanto

$$\mathrm{Res}\left[\frac{F'(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^n}, z_0\right] = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[F'(\xi)\frac{(\xi-z_0)^n}{(f(\xi)-\omega_0)^n}\right]_{\xi=z_0},$$

y definiendo $\chi(z) = \frac{z-z_0}{f(z)-\omega_0}$, entonces se tiene

$$\frac{1}{2\pi i n}\int_\gamma \frac{F'(\xi)}{(f(\xi)-\omega_0)^n}\,d\xi = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[F'(\xi)\chi^n(\xi)\right]_{\xi=z_0}.$$

Por tanto, se tiene que

$$F(\varphi(\omega)) = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[F'(\xi)\chi^n(\xi)\right]_{\xi=z_0}(\omega-\omega_0)^n,$$

que es la llamada serie de Lagrange para F. Si tomamos el caso particular de $F(z) = z$, se tiene

$$z = \varphi(\omega) = \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[\chi^n(\xi)\right]_{\xi=z_0}(\omega-\omega_0)^n.$$

Se observa que el radio de convergencia de estas series es independiente de F, solo se exige que el dominio de analiticidad de F sea más grande que el de f.

A partir del desarrollo en serie de Lagrange, se estudiará la convergencia de los desarrollos en potencia de la excentricidad.

Sea la ecuación de Kepler $z - \omega\sin(z) = \tau$ donde z representa la anomalía excéntrica E, ω la excentricidad e y τ la anomalía media M. Si se reescribe la ecuación como $\omega = \frac{z-\tau}{\sin(z)} = f(z)$, es una función holomorfa mientras $\sin(z) \neq 0$, así que sea $z_0 = \tau \neq k\pi$, sea $\omega_0 = 0$. Entonces $\chi(\xi) = \frac{\xi - z_0}{f(\xi)} = \sin(\xi)$. El desarrollo de Lagrange para esta función resulta

$$F(z) = F(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[F'(\xi)\sin^n(\xi)\right]\right]_{\xi=\tau}\omega^n.$$

El radio de convergencia de la serie viene dado por $\delta = \text{mín}_{|z-z_0|=\rho} \left|f(z) - f(z_0)\right| > 0$, siendo ρ el radio de un círculo donde $f(z)$ es analítica y no toma el valor de ω_0 en puntos distintos de z_0.

En el caso de la ecuación de Kepler, la convergencia de la serie está asegurada si $\left|\frac{\omega-\omega_0}{f(\xi)-\omega_0}\right| < 1$, esto es $\left|\frac{\omega}{z-\tau}\sin(z)\right| < 1$, lo que se cumple si $\omega\left|\frac{\sin(z)}{z-\tau}\right| < 1$. Tomando el contorno $z = \tau + \rho e^{i\varphi}$, la condición de convergencia resulta $\frac{\omega}{\rho}|\sin(\tau + \rho e^{i\varphi})| < 1$. Sea $K(\rho)$ el máximo valor del módulo de $\sin(\tau + \rho e^{i\varphi})$ cuando $\varphi \in [0, 2\pi]$, así que la condición se puede transformar en $\frac{\omega}{\rho}K(\rho) < 1$.

$$
\begin{aligned}
|\sin(\tau + \rho e^{i\varphi})| &= \left[\sin(\tau + \rho e^{i\varphi})\sin(\tau + \rho e^{-i\varphi})\right]^{1/2} \\
&= \left[\sin\big(\tau + \rho\cos(\varphi) + i\rho\sin(\varphi)\big)\sin\big(\tau + \rho\cos(\varphi) - i\rho\sin(\varphi)\big)\right]^{1/2} \\
&= \left[\cos^2\big(i\rho\sin(\varphi)\big) - \cos^2\big(\tau + \rho\cos(\varphi)\big)\right]^{1/2},
\end{aligned}
$$

y esto toma su mayor valor cuando $\cos^2\big(i\rho\sin(\varphi)\big)$ sea máximo y $\cos^2\big(\tau + \rho\cos(\varphi)\big)$ sea cero. Así que por un lado se tiene que $\cos^2\big(i\rho\sin(\varphi)\big) = \cosh^2\big(\rho\sin(\varphi)\big)$, que se hace máximo si $\sin(\varphi) = 1$, así que $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Ahora, por otro lado, $\cos^2\big(\tau + \rho\cos(\varphi)\big) = 0$ si $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ y $\tau = \pm\frac{\pi}{2}$. Por lo que $K(\rho) = \cosh(\rho)$.

Las series convergen si la excentricidad $\tau < \text{máx}\,\frac{\rho}{K(\rho)}$, que derivando e igualando a cero se obtiene

$$
\left(\frac{\rho}{\cosh(\rho)}\right)' = \frac{\cosh(\rho) - \rho\sinh(\rho)}{\cosh^2(\rho)} = \frac{\frac{e^\rho + e^{-\rho}}{2} - \rho\frac{e^\rho - e^{-\rho}}{2}}{\cosh^2(\rho)} = \frac{e^\rho + e^{-\rho} - \rho e^\rho + \rho e^{-\rho}}{2\cosh^2(\rho)} = 0,
$$

por lo que se tiene $e^\rho(\rho - 1) - e^{-\rho}(\rho + 1) = 0$. Esta expresión tiene signos distintos en 1 y en 2, además de que su derivada $\rho(e^\rho + e^{-\rho})$ es siempre positiva, así que existe una raíz $\rho_1 > 0$. Esta raíz es $\rho_1 = 1{,}19967...$, de donde se calcula que $\omega < \frac{\rho_1}{K(\rho_1)} = 0{,}6627...$ por lo que las series convergen si la excentricidad es $|\omega| < 0{,}6627...$.

Capítulo 4

Teorema de Cauchy y números de Cauchy

En este capítulo se abordan desarrollos fundamentales en la mecánica celeste, entre los que se encuentra la ecuación del centro. El método seguido consiste en primer lugar en exponer los teoremas de Cauchy del desarrollo del problema de dos cuerpos, así como los denominados números de Cauchy. A partir de dichos resultados es posible, como se verá, obtener los desarrollos deseados. Las fuentes de este estudio pueden encontrarse en Tisserand [6].

4.1. Teorema de Cauchy

En esta sección veremos la demostración del siguiente teorema de Cauchy.

Teorema 1 *Sea el desarrollo $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n z^n$. Entonces:*

1. *P_n es igual al coeficiente de s^n en el desarrollo de la función*

$$U = S \cdot \exp\left(\frac{ne}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right).$$

2. *P_n es igual al coeficiente de s^{n-1} en el desarrollo de la función*

$$V = \frac{1}{n} \cdot \frac{dS}{ds} \cdot \exp\left(\frac{ne}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right).$$

Para ello, sea S una función periódica, finita y bien determinada de la anomalía excéntrica E de periodo 2π. Esta función será asimismo periódica con periodo 2π de M y de V. Por tanto, S admitirá los desarrollos en función de E y de otra variable ξ.

$$S = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(E) + a_2\cos(2E) + ... + b_1\sin(E) + b_2\sin(2E) + ...$$
$$S = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos(\xi) + A_2\cos(2\xi) + ... + B_1\sin(\xi) + B_2\sin(2\xi) + ...$$

Supongamos que es fácil expresar $\sin(jE)$ y $\cos(jE)$ en series trigonométricas de ξ, entonces

$$\begin{aligned}\cos(jE) = & \ \tfrac{1}{2}p_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(j)}\cos(k\xi) \\ \sin(jE) = & \ \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(j)}\sin(k\xi),\end{aligned}$$

haciendo fácil encontrar los valores

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A_0 &= \frac{1}{2}a_0 + a_1p_0^{(1)} \\ A_K &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j p_k^{(j)} \\ B_K &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j q_k^{(j)}.\end{aligned}$$

En el caso de que ξ sea la anomalía media, las expresiones $p_k^{(j)}$ y $q_k^{(j)}$, son conocidas en función de las funciones de Bessel, con lo que se tiene

$$\begin{aligned}A_0 &= a_0 + a_1e \\ A_K &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty} ja_j[J_{k-j}(ke) - J_{k+j}(ke)] \\ B_K &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty} jb_j[J_{k-j}(ke) - J_{k+j}(ke)].\end{aligned}$$

Sea $z = \exp(i\xi)$ donde $i^2 = -1$. Entonces el desarrollo de S en funciones trigonométricas de ξ resulta

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1(z + z^{-1}) + \frac{1}{2}A_2(z^2 + z^{-2}) + ... \\ &\quad + \frac{1}{2i}B_1(z - z^{-1}) + \frac{1}{2i}B_2(z^2 - z^{-2}) + ...,\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n z^n,$$

donde

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} A_0, \\ P_n &= \frac{1}{2} A_n + \frac{1}{2i} B_n, \qquad \text{si } n > 0, \\ P_n &= \frac{1}{2} A_n - \frac{1}{2i} B_n, \qquad \text{si } n < 0. \end{aligned}$$

La integral $\int_0^{2\pi} z^p \, d\xi$ es 0 si $p \neq 0$ (con p entero) y es 2π si $p = 0$.

Si integramos la serie entera de S multiplicada por z^{-n}, se tiene

$$2\pi P_n = \int_0^{2\pi} S z^{-n} \, d\xi. \tag{4.1}$$

Análogamente, sea $s = \exp(iE)$, y si ξ representa la anomalía media M, entonces se tiene que

$$z = \exp(i\xi) = \exp(iE - ie\sin(E)) = \exp(iE) \cdot \exp(-ie\sin(E)) = s\exp(-ie\sin(E)).$$

Ahora bien, también se tiene la igualdad

$$i\sin(E) = \frac{1}{2}\Big(\exp(iE) - \exp(-iE)\Big) = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right),$$

por lo que

$$z = s\exp\left(-\frac{e}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right). \tag{4.2}$$

Otra igualdad que se cumple es

$$\cos(E) = \frac{1}{2}\Big(\exp(iE) + \exp(-iE)\Big) = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right),$$

así que a partir de la ecuación de Kepler se tiene que

$$d\xi = dM = (1 - e\cos(E))\, dE = \left(1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right) dE. \tag{4.3}$$

Por tanto, y de la ecuación (4.1) con la ayuda de las igualdades (4.2) y (4.3), se tiene

$$2\pi P_n = \int_0^{2\pi} S s^{-n} \exp\left(\frac{ne}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right)\left(1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right) dE,$$

o bien

$$2\pi P_n = \int_0^{2\pi} U s^{-n}\, dE,$$

donde

$$U = S \exp\left(\frac{ne}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right)\left(1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right).$$

La función S es desarrollable en serie de Laurent respecto a s, de mismo modo que U.

Sea $U = ... + P'_{-2}s^{-2} + P'_{-1}s^{-1} + P'_0 + P'_1 s + P'_2 s^2 + ...$, por lo que

$$\int_0^{2\pi} U s^{-n}\, dE = 2\pi P'_n,$$

así que se tiene que $P_n = P'_n$.

La función U es producto de tres factores: $\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right)$ que es fácilmente desarrollable en función de las funciones de Bessel, $1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{2}\right)$ que ya está desarrollado, y de la función S.

El cálculo de los P_n permite calcular los A_n y B_n, y puede realizarse como

$$\begin{aligned}
2\pi P_n &= \int_0^{2\pi} S z^{-n}\, d\xi \\
\Big\downarrow \quad & \left\{\begin{array}{lcr} u = S & \longrightarrow & du = \dfrac{dS}{d\xi} d\xi \\ dv = z^{-n}\, d\xi = \exp(-ni\xi)\, d\xi & \longrightarrow & v = \dfrac{-1}{ni}\exp(-ni\xi) \end{array}\right\} \\
&= \cancelto{0}{\left[\frac{iS}{n}\exp(-ni\xi)\right]_0^{2\pi}} - \frac{-1}{ni}\int_0^{2\pi} \frac{dS}{d\xi}\exp(-ni\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{ni}\int_0^{2\pi} \frac{dS}{d\xi} z^{-n}\, d\xi \\
&= \frac{1}{ni}\int_0^{2\pi} \frac{dS}{ds}\frac{ds}{dE} z^{-n}\, dE.
\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de z de la ecuación (4.2), y $\frac{ds}{dE} = \frac{d(\exp(iE))}{dE} = i\exp(iE) = is$, se tiene

$$2\pi P_n = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} s^{1-n}\,\frac{dS}{ds}\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right)\,dE.$$

Sea ahora la función

$$V = \frac{1}{n}\frac{dS}{ds}\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right),$$

y sea su desarrollo en serie de Laurent

$$V = ... + Q_{-2}s^{-2} + Q_{-1}s^{-1} + Q_0 + Q_1 s + Q_2 s^2 + ...,$$

concluimos que multiplicando por s^{1-n} e integrando se llega a

$$2\pi Q_{n-1} = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} s^{1-n}\,\frac{dS}{ds}\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right)\,dE,$$

así que $P_n = Q_{n-1}$.

Quedando así demostradas las dos partes del teorema de Cauchy.

4.2. Números de Cauchy

Antes de realizar desarrollos más complejos, conviene introducir los números de Cauchy.

Sean j y q dos números enteros positivos, y sea p un número entero cualquiera. La expresión $I = x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$ se puede desarrollar en serie de Laurent alrededor de $x = 0$.

Sea $N_{-p,j,q}$ el término independiente del desarrollo de I, o lo que es lo mismo, el coeficiente del término de grado p en $\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$. A estas cantidades $N_{-p,j,q}$ se les llama números de Cauchy y veamos algunas de sus propiedades.

$$N_{-p,j,q} = \begin{cases} 1 & -p+j+q = 0 \\ \\ 0 & -p+j+q \text{ negativo o impar,} \end{cases}$$

ya que el desarrollo de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q = x^{j+q} + c_1 x^{j+q-2} + c_2 x^{j+q-4} + ...$, y por tanto $I = x^{k+q-p} + c_1 x^{j+q-p-2} + ...$, de donde si $j+q-p = 0$, la parte entera de I es 1, y si $j+q-p < 0$ no hay parte entera, y si $j+q-p$ es impar, no hay término de grado cero.

También se tiene la relación $N_{p,j,q} = (-1)^q N_{-p,j,q}$, ya que el término independiente de $x^p \left(x+\frac{1}{x}\right)^j \left(x-\frac{1}{x}\right)^q$ es el mismo que el de $x^{-p}\left(\frac{1}{x}+x\right)^j\left(\frac{1}{x}-x\right)^q = (-1)^q x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$.

Busquemos ahora la expresión analítica para $N_{-p,0,q}$

$$N_{-p,0,q} = x^{-p}\left(x-\frac{1}{x}\right)^q = \sum_{\alpha+\beta=q}(-1)^\beta \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot q}{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot\alpha\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\beta}\, x^{\alpha-\beta-p},$$

y si $\alpha-\beta-p=0$, entonces $\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=p\\ \alpha+\beta=q\end{array}\right\}$, así que $\left.\begin{array}{l}\alpha=\frac{p+q}{2}\\ \beta=\frac{q-p}{2}\end{array}\right\}$, por lo que

$$N_{-p,0,q} = (-1)^{\frac{q-p}{2}}\binom{q}{\frac{p+q}{2}}.$$

Otra relación que se cumple es que

$$N_{-p,j+1,q} = N_{-p+1,j,q} + N_{-p-1,j,q},$$

que deriva de

$$x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j+1}\left(x-\frac{1}{x}\right)^q = x^{-p+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q + x^{-p-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q.$$

Los números de Cauchy se utilizan en numerosos desarrollos como se verá en el siguiente apartado.

4.3. Desarrollos por el teorema de Cauchy

Si aplicamos los teorema de Cauchy (1) al desarrollo de $S=\frac{a}{r}$, se tiene que

$$S = (1-e\cos(E))^{-1} = \left(1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right)^{-1}, \tag{4.4}$$

y por tanto

$$U = \exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right),$$

por lo que el coeficiente de s^n es la función de Bessel $J_n(ne)$, y el de s^{-n} es $J_{-n}(-ne) = J_n(ne)$ y por tanto,

$$\frac{1}{2}A_0 = J_0(0) = 1, \qquad A_n = 2J_n(ne), \qquad B_n = 0,$$

de donde

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos(mM).$$

Ahora vamos a calcular el desarrollo de $\left(\frac{r}{a} - 1\right)^m$ con $m \in \mathbb{N}$ en cosenos múltiplos de la anomalía media

$$\left(\frac{r}{a} - 1\right)^m = \frac{1}{2}c_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(m)} \cos(kM).$$

Sea

$$S = P_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(m)}(z^k + z^{-k}),$$

con $c_k^{(m)} = 2P_k^{(m)}$ y donde

$$S = (-\cos(E))^m = (-1)^m \left(\frac{e}{2}\right)^m \left(s + \frac{1}{s}\right)^m,$$

y por tanto,

$$\frac{dS}{ds} = m(-1)^m \left(\frac{e}{2}\right)^m \left(s + \frac{1}{s}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right),$$

Para encontrar $P_0^{(m)}$, aplicaremos el punto 1 del teorema de Cauchy (1)

$$\begin{aligned} U_0 &= (-1)^m \left(\frac{e}{2}\right)^m \left(s + \frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right) \\ &= (-1)^m \left(\frac{e}{2}\right)^m \left(s + \frac{1}{s}\right)^m - (-1)^m \left(\frac{e}{2}\right)^{m+1} \left(s + \frac{1}{s}\right)^{m+1}. \end{aligned}$$

El término constante procede del primer sumando si m es par y del segundo si m es impar, así que

$$P_0^{(m)} = \begin{cases} \left(\frac{e}{2}\right)^m \binom{m}{m/2} = \left(\frac{e}{2}\right)^{2m'} \binom{2m'}{m'} & m \text{ par}, m = 2m', \\ \left(\frac{e}{2}\right)^m \binom{m+1}{(m+1)/2} = \left(\frac{e}{2}\right)^{2m'+1} \binom{2m'+2}{m'+1} & m \text{ impar}, m = 2m'+1. \end{cases}$$

Para los términos $P_n^{(m)}$ se utiliza la segunda parte del teorema de Cauchy, así que

$$V = \frac{1}{n}\frac{dS}{ds}\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right).$$

El coeficiente $P_n^{(m)}$ vendrá dado por el coeficiente del término s^n en el desarrollo de sV

$$sV = (-1)^m\frac{m}{n}\left(\frac{e}{2}\right)^m\left(s+\frac{1}{s}\right)^{m-1}\left(s-\frac{1}{s}\right)\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right),$$

por lo que desarrollando la función exponencial,

$$\left(s+\frac{1}{s}\right)^{m-1}\left(s-\frac{1}{s}\right)\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{ne}{2}\right)^k\left(s+\frac{1}{s}\right)^{m-1}\left(s-\frac{1}{s}\right)^{k+1},$$

donde el coeficiente de la $n-$ésima potencia de s vendrá dado por

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{ne}{2}\right)^k N_{-n,m-1,k+1},$$

y por tanto,

$$c_m^{(m)} = 2P_n^{(m)} = (-1)^m\frac{2m}{n}\left(\frac{e}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{N_{-n,m-1,k+1}}{k!}\left(\frac{ne}{2}\right)^k.$$

Estudiemos ahora el desarrollo de $\left(\frac{r}{a}\right)^{-m}$ siendo $m\in\mathbb{N}$.

Sea

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-m} = \frac{1}{2}G_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty}G_n^{(m)}\cos(nM) = P_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty}P_n^{(m)}(z^n+z^{-n}),$$

con $G_n^{(m)} = 2P_n^{(m)}$.

La función S se puede expresar como $S = \left(1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right)^{-m}$. Aplicando la primera parte del teorema de Cauchy se tiene que

$$U = \left(1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right)^{-(m-1)}\exp\left(\frac{ne}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right).$$

Para $P_0^{(m)}$ se llega a que

$$\begin{aligned} U_0 &= \left(1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right)^{-(m-1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\binom{-(m-1)}{2n+1}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n+1}\left(s+\frac{1}{s}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-(m-1)}{2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\left(s+\frac{1}{s}\right)^{2n}, \end{aligned}$$

y como en el primer sumatorio no hay término independiente, se tiene que

$$\begin{aligned}
G_0^{(m)} &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-(m-1)}{2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(m-1)m(m+1)...(m+2n-2)}{(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m-1)m(m+1)...(m+2n-2)}{n!n!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Para calcular ahora los términos $G_k^{(m)}$, vamos a definir $m_0 = 1$, $m_1 = \frac{m-1}{1}$, $m_2 = \frac{(m-1)m}{2!}$, $m_j = \frac{(m-1)m(m+1)...(m+j-2)}{j!} = \binom{-(m-1)}{j}$. Por el teorema del binomio, se tiene que

$$\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]^{-(m-1)} = \sum_{j=0}^{\infty} m_j\left(\frac{e}{2}\right)^j\left(s+\frac{1}{s}\right)^j,$$

así que por la primera parte del teorema de Cauchy,

$$\begin{aligned}
U &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} m_j\left(\frac{e}{2}\right)^j\left(s+\frac{1}{s}\right)^j\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\left(\frac{ne}{2}\right)^q\left(s-\frac{1}{s}\right)^q\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} m_j\left(\frac{e}{2}\right)^j\frac{1}{q!}\left(\frac{ne}{2}\right)^q\left(s+\frac{1}{s}\right)^j\left(s-\frac{1}{s}\right)^q \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{n^q}{q!}\left(\frac{e}{2}\right)^{j+q} m_j\left(s+\frac{1}{s}\right)^j\left(s-\frac{1}{s}\right)^q \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{n^q}{q!}\left(\frac{e}{2}\right)^{j+q} m_j N_{-n,j,q} \\
&= \frac{1}{2}G_n^{(m)}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Para que el número de Cauchy $N_{-n,j,q}$ sea no nulo, es necesario que $j+q = n+2k$ para $k = 0, 1, ...$, por tanto el coeficiente $G_n^{(m)}$ será, con respecto a e, de orden n.

Un importante caso particular corresponde cuando $m = 2$

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{2}G_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^{(2)}\cos(nM).$$

Por un lado, y por la ecuación (4.5), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}G_0^{(2)} &= \frac{1}{2}\cdot 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(2+2n-2)}{n!\,n!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2n}{n!\,n!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)][2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n]}{n!\,n!\,2^{2n}}\cdot e^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot \ldots \cdot\frac{2n-1}{2}}{n!\cancel{n!}\cancel{2^n}}\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}\cdot e^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n e^{2n}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que $m_0 = m_1 = m_2 = \ldots = 1$, y por la ecuación (4.6), se tiene que

$$G_n^{(2)} = 2\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{n^q}{q!}\left(\frac{e}{2}\right)^{j+q}N_{-n,j,q},$$

así que resulta que para $m = 2$ se tiene

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}G_n^{(2)}\cos(nM).$$

A partir de este desarrollo se puede obtener fácilmente el desarrollo de la llamada ecuación del centro $V - M$, que es la diferencia entre la anomalía verdadera y la anomalía media, puesto que por la integral de áreas (1.2), la equivalencia del parámetro del movimiento elíptico (1.3), y diferenciando la definición de anomalía media (1.1), se llega a que

$$\begin{aligned}
r^2\frac{dV}{dt} &= na^2\sqrt{1-e^2}\\
\frac{dV}{dM} &= \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\\
\frac{dV}{dM} &= 1+\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty}G_n^{(2)}\cos(nM),
\end{aligned}$$

e integrando entre 0 y M, sabiendo que $V(0) = 0$, se tiene que

$$V = M + \sqrt{1-e^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G_n^{(2)}}{n}\sin(nM),$$

por tanto la ecuación del centro resulta ser

$$V - M = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(nM), \tag{4.7}$$

donde

$$H_n = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{n^q}{q!} \left(\frac{e}{2}\right)^{j+q} N_{-n,j,q}.$$

Para que los números de Cauchy no se anulen se debe cumplir que $j + q = n + 2k, \quad k = 0, 1, ...,$ por lo que

$$H_n = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{n} \left[H_n^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^n + H_n^{(2)} \left(\frac{e}{2}\right)^{2+n} + ... + H_n^{(2l)} \left(\frac{e}{2}\right)^{2l+n} + ... \right],$$

para

$$H_n^{(0)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{n^q}{q!} N_{-n,j,q},$$

donde $j + q = n$,

$$H_n^{(0)} = \sum_{q=0}^{n} \frac{n^q}{q!} = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{2} + ... + \frac{n^n}{n!}.$$

Vamos a ver ahora que, para cualquier valor de m, el coeficiente $G_0^{(m)}$ se puede obtener mediante una fórmula finita. Sea $m > 2$, por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} G_0^{(m)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{-m} dM \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{2-m} dV \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1-e^2}{1+e\cos(V)}\right)^{2-m} dV \\
&= \frac{(1-e^2)^{2-m}}{(1-e^2)^{1/2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1+e\cos(V))^{m-2}\, dV \\
&= (1-e^2)^{3/2-m} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{m} \binom{m-2}{n} e^n \cos^n(V) dV \\
&= (1-e^2)^{3/2-m} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m} \left[\int_0^{\pi} \cos^n(V) dV \right] \binom{m-2}{n} e^n \\
&= (1-e^2)^{3/2-m} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m} C_n \binom{m-2}{n} e^n.
\end{aligned}$$

Si n es impar, se tiene que $C_n = 0$. Si $n = 0$, se tiene que $C_0 = 1$, y en otro caso, $n = 2k+2$, $k \ = 0, 1, ...$, resulta que

$$\begin{aligned}
C_{2k+2} &= \int_0^\pi \cos^{2k+2}(V)dV \\
\Big\downarrow & \left\{\begin{matrix} u = \cos^{2k+1}(V) & \longrightarrow & du = -(2k+1)\sin(V)\cos^{2k}(V)dV \\ dv = \cos(V)\,dV & \longrightarrow & v = \sin(V) \end{matrix}\right\} \\
&= \Big[\sin(V)\cos^{2k+1}(V)\Big]_{V=0}^{\pi} + (2k+1)\int_0^\pi \sin^2(V)\cos^{2k}(V)dV \\
&= (2k+1)\int_0^\pi (1-\cos^2(V))\cos^{2k}(V)dV \\
&= (2k+1)\int_0^\pi \cos^{2k}(V)dV - (2k+1)\int_0^\pi \cos^{2k+2}(V)dV \\
&= (2k+1)\int_0^\pi \cos^{2k}(V)dV - (2k+1)C_{2k+2},
\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}
(2k+2)C_{2k+2} &= (2k+1)\int_0^\pi \cos^{2k}(V)dV \\
C_{2k+2} &= \frac{2k+1}{2k+2}\int_0^\pi \cos^{2k}(V)dV.
\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso se llega a que

$$\int_0^\pi \cos^{2k}(V)dV = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi.$$

Así que se tiene que

$$C_k = \frac{(k-1)(k-3)\cdots 1}{k(k-2)\cdots 2}\cdot\pi = \frac{(k-1)!!}{k!!}\cdot\pi.$$

Definiendo ahora $[m]$ como la parte entera de m, podemos escribir

$$\frac{1}{2}G_0^{(m)} = (1-e^2)^{3/2-m}\sum_{k=0}^{[m]}\binom{m-2}{2k}\frac{(2k-1)!!}{2k!!}e^{2k},$$

donde

$$\begin{aligned}
\binom{m-2}{2k}\frac{(2k-1)!!}{2k!!} &= \frac{(m-2)(m-3)...(m-2-2k+1)}{2k(2k-1)(2k-2)\ldots 1}\,\frac{(2k-1)!!}{2k!!} \\
&= \frac{(m-2)(m-3)...(m-2k-1)}{2^k\cdot k!\cdot(2k-1)!!}\,\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!} \\
&= \frac{\prod_{j=2}^{2k+1}(m-j)}{2^{2k}(k!)^2}
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{1}{2}G_0^{(m)} = (1-e^2)^{3/2-m}\sum_{k=0}^{[m]}\frac{\prod_{j=2}^{2k+1}(m-j)}{(k!)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^{2k}.$$

Capítulo 5

Otros desarrollos

En este capítulo se obtiene el desarrollo de ciertas funciones, esta vez basadas en la anomalía verdadera. Este objetivo se logra introduciendo las llamadas funciones de Hansen. Al igual que en el capítulo anterior, las fuentes pueden encontrarse en Tisserand [6].

5.1. Desarrollos de la anomalía verdadera

En el capítulo anterior se ha obtenido la ecuación del centro (4.7). En este apartado se obtendrá desarrollos de las funciones $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(mV)$ y $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(mV)$ donde n es positivo y m un número entero. Estas funciones son funciones periódicas de la anomalía media M, y por tanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(mV) &= \quad B_1^{n,m} \sin(M) + B_2^{n,m} \sin(2M) + ... + B_k^{n,m} \sin(kM) + ... \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(mV) &= \tfrac{1}{2}C_0^{n,m} + C_1^{n,m} \cos(M) + C_2^{n,m} \cos(2M) + ... + C_k^{n,m} \cos(kM) + ... \end{aligned}$$

Sea $z = \exp(iM)$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(imV) &= \tfrac{1}{2}C_0^{n,m} + \tfrac{1}{2}C_1^{n,m}\left(z + \tfrac{1}{z}\right) + ... + \tfrac{1}{2}C_k^{n,m}\left(z^k + z^{-k}\right) + ... + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}B_1^{n,m}\left(z - \tfrac{1}{z}\right) + ... + \tfrac{1}{2}B_k^{n,m}\left(z^k - z^{-k}\right) + ... \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{cases} X_0^{n,m} = \dfrac{1}{2}C_0^{n,m} \\ X_k^{n,m} = \dfrac{1}{2}\left(C_k^{n,m} + B_k^{n,m}\right), \quad k > 0 \\ X_{-k}^{n,m} = \dfrac{1}{2}\left(C_k^{n,m} - B_k^{n,m}\right), \quad k > 0, \end{cases}$$

y con esta notación tenemos que

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(imV) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,m} z^k,$$

donde las funciones $X_k^{n,m}$ son funciones en e y se llaman funciones de Hansen de la excentricidad.

Antes de proseguir con la determinación de $X_k^{n,m}$, veremos unas cuestiones preliminares.

Sean las exponenciales $x = \exp(iV), y = \exp(iE), z = \exp(iM)$, correspondientes a la anomalía verdadera, excéntrica y media respectivamente. A partir de la ecuación de Kepler (1.4), se tiene que

$$z = y \cdot \exp\left(-\frac{e}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)\right). \tag{5.1}$$

Para establecer una relación entre x e y, partimos de la relación entre las anomalías verdadera y excéntrica (1.5), es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i} \cdot \frac{\exp(i\frac{E}{2}) - \exp(-i\frac{E}{2})}{\exp(i\frac{E}{2}) + \exp(-i\frac{E}{2})} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{\exp(i\frac{V}{2}) - \exp(-i\frac{V}{2})}{\exp(i\frac{V}{2}) + \exp(-i\frac{V}{2})} \\
\frac{\exp(iE) - 1}{\exp(iE) + 1} &= \frac{1-\beta}{1+\beta} \cdot \frac{\exp(iV) - 1}{\exp(iV) + 1},
\end{aligned}$$

donde

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

A través de esta relación se puede despejar la e de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{1-e}{1+e} &= \frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2} \\
(1+\beta)^2(1-e) &= (1-\beta)^2(1+e) \\
2\beta - e - e\beta^2 &= e + 2\beta^2 - 2\beta \\
4\beta &= 2e + 2e\beta \\
2\beta &= e(1+\beta^2) \\
e &= \frac{2\beta}{1+\beta^2},
\end{aligned}$$

y también se puede despejar la β

$$\begin{aligned}
e(1+\beta^2) &= 2\beta \\
b^2 - \frac{2}{e}\beta + 1 &= 0 \\
\beta &= \frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{e},
\end{aligned}$$

que se comprueba que el signo que precede a la raíz es el positivo. De esta igualdad se puede obtener que

$$\begin{aligned}
e\beta &= 1+\sqrt{1-e^2}\\
\sqrt{1-e^2} &= e\beta-1\\
\sqrt{1-e^2} &= \frac{2\beta}{1+\beta^2}\beta-1\\
\sqrt{1-e^2} &= \frac{2\beta^2-\beta^2-1}{1+\beta^2}\\
\sqrt{1-e^2} &= \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2},
\end{aligned}$$

y por último se tiene que

$$\begin{aligned}
(1+\beta^2)\sqrt{1-e^2} &= \beta^2-1\\
\frac{2\beta}{e}\sqrt{1-e^2} &= \beta^2-1\\
\beta\sqrt{1-e^2} &= \frac{e}{2}(\beta^2-1).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Retomando la relación entre x e y, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\frac{y-1}{y+1} &= \frac{1-\beta}{1+\beta}\cdot\frac{x-1}{x+1}\\
(y-1)(1+x)(1+\beta) &= (y+1)(x-1)(1-\beta)\\
(y+xy-1-x)(1+\beta) &= (xy-y+x-1)(1-\beta)\\
y+xy-1-x+y\beta+xy\beta-\beta-x\beta &= xy-y+x-1-xy\beta+y\beta-x\beta+\beta\\
y-x+xy\beta-\beta &= -y+x-xy\beta+\beta\\
2xy\beta+2y &= 2x+2\beta\\
y(1+x\beta) &= x+\beta\\
y &= \frac{x+\beta}{1+x\beta}\\
y &= x\frac{1+\frac{\beta}{x}}{1+x\beta}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Análogamente se llega a que

$$x=\frac{y-\beta}{1-y\beta}=y\frac{1-\frac{\beta}{y}}{1-y\beta}. \tag{5.4}$$

Si se elimina la y entre las ecuaciones (5.1) y (5.3), recordando la relación (5.2) se tiene que

$$z=x\left(1+\frac{\beta}{x}\right)(1+\beta x)^{-1}\exp\left(-\beta\sqrt{1-e^2}\left(\frac{x}{1+\beta x}-\frac{1+\beta x}{x}\right)\right).$$

Ahora hay que remarcar que $\beta < e$, y si e es un valor muy pequeño, $\beta \approx \frac{e}{2}$.

Para expresar $\frac{r}{a}$ en función de y, a partir de la ecuación (4.4), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a} &= 1 - \frac{e}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) \\
&= -\frac{ey^2 - 2y + 2}{2y} \\
&= -\frac{e}{2y}\left(y^2 - \frac{2}{e}y + 1\right) \\
&= -\frac{e}{2y}\left(y - \frac{1+\sqrt{1-e^2}}{e}\right)\left(y - \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right) \\
&= -\frac{e}{2y}(y-\beta)\left(y - \frac{1}{\beta}\right) \\
&= -\frac{e}{2\beta}\left(1 - \frac{\beta}{y}\right)(y\beta - 1) \\
&= \frac{e}{2\beta}\left(1 - \frac{\beta}{y}\right)(1 - y\beta) \\
&= \frac{1}{1+\beta^2}\left(1 - \frac{\beta}{y}\right)(1 - y\beta),
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{1+\beta^2}(1 - y\beta)\left(1 - \frac{\beta}{y}\right).$$

En función de x se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a} &= \frac{1-e^2}{1+e\cos(V)} \\
&= \frac{1-e^2}{1+\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{2(1-e^2)x}{ex^2+2x+e} \\
&= \frac{2(1-e^2)x}{e\left(x+\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{e}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right)} \\
&= \frac{2(1-e^2)x}{e\,(x+\beta)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)} \\
&= 2\beta\cdot\frac{1-e^2}{e}\cdot\frac{1}{(1+\beta x)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)},
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{r}{a} = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} \cdot \frac{1}{(1+\beta x)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}.$$

Volviendo a nuestro objetivo, para calcular

$$X_k^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m z^{-k}\, dM$$

deberemos reemplazar dM por dE o dV,

$$dM = \frac{r}{a}dE = \frac{r^2}{a^2}\frac{dV}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}dV.$$

Sustituyendo en la integral, se tienen las fórmulas de Hansen

$$\begin{aligned} X_k^{n,m}(e) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} x^m z^{-k} dE \\ &= \left(1+\beta^2\right)^{-n-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y^{m-k}(1-\beta y)^{n-m+1}\left(1-\frac{\beta}{y}\right)^{n+m+1}\exp\left(\frac{ke}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)dE. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_k^{n,m}(e) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+2} x^m z^{-k} dV \\ &= \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{m-k}(1+\beta x)^{k-n-2}\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^{-k-n-2}\exp\left(k\beta\sqrt{1-e^2}\left(\frac{x}{1+x\beta}-\frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}\right)\right)dV. \end{aligned}$$

Puesto que $|\beta| < 1$ y que $|x| = |y| = 1$, las expresiones $(1-\beta y)^{n-m+1}$ y $\left(1-\frac{\beta}{y}\right)^{n+m+1}$ son desarrollables en series convergentes según las potencias positivas y negativas de y, las expresiones $(1+\beta x)^{k-n-2}$ y $\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^{-k-n-2}$ lo hacen en potencias de x y $\frac{1}{x}$, la expresión $\exp\left(k\beta\sqrt{1-e^2}\frac{x}{1+x\beta}\right)$ en $\frac{x}{1+x\beta}$ y por tanto en x, y la expresión $\exp\left(k\beta\sqrt{1-e^2}\frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}\right)$ en $\frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}$ y por tanto en x^{-1}.

Sean las funciones

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= (1+\beta x)^{k-n-2}\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^{-k-n-2}\exp\left(k\beta\sqrt{1-e^2}\left(\frac{x}{1+x\beta}-\frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}\right)\right), \\ \phi(y) &= (1-\beta y)^{n-m+1}\left(1-\frac{\beta}{y}\right)^{n+m+1}\exp\left(\frac{ke}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)\right). \end{aligned}$$

Estas funciones son desarrollables en series de Laurent con respecto a x e y respectivamente.

Sea α el coeficiente de y^{k-m} en el desarrollo de ϕ, y sea α' el coeficiente de x^{k-m} en el de ϕ'. Entonces

$$\begin{aligned} X_k^{n,m} &= (1+\beta^2)^{-n-1}\cdot\alpha, \\ X_k^{n,m} &= \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}}\cdot\alpha', \end{aligned}$$

pues el resto de términos en ϕ y ϕ' se anulan al integrar.

Vamos a desarrollar la primera fórmula de Hansen para $k=0$.

$$\phi_0 = (1-\beta y)^{n-m+1}\left(1-\frac{\beta}{y}\right)^{n+m+1}.$$

Si α_0 es el coeficiente de y^{-m} en este desarrollo, entonces se tiene que

$$X_0^{n,m}(e) = (1+\beta^2)^{-n-1}\cdot\alpha_0.$$

Sea $p=n-m+1$ y $q=n+m+1$. Como $m\geq 0$, se tiene que $q\geq p$, así que el término general de ϕ_0 es

$$(-1)^{r+s}\binom{p}{r}\binom{q}{s}\beta^{r+s}y^{r-s},$$

y para α_0 se debe tener que $r-s=-m$, o lo que es lo mismo, $s=r+m$, así que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (-1)^m\beta^m\left[\binom{q}{m}\binom{p}{0}+\binom{q}{m+1}\binom{p}{1}\beta^2+\binom{q}{m+2}\binom{p}{2}\beta^4+...\right] \\ &= (-1)^m\beta^m\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n+m+1}{m+s}\binom{n-m+1}{s}\beta^{2s}, \end{aligned}$$

que es una serie finita si $n+m+1>0$, si $n+m+1=0$ se tiene que $X_0^{n,m}=0$, y si $n+m+1<0$ la serie es infinita.

Desarrollando, se tiene que

$$\begin{aligned} X_0^{n,m}(e) &= \frac{(-1)^m}{m!}\frac{\beta^m}{(1+\beta^2)^{n+1}}\Bigg[(n+2)(n+3)...(n+m+1)+\frac{(n-m+1)}{1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)...(n+m+1)}{(m+1)}\beta^2+ \\ &\qquad +\frac{(n-m+1)(n-m)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n+1)...(n+m+1)}{(m+1)(m+2)}\beta^4+\dots\Bigg] \\ &= (-1)^m\frac{\beta^m}{(1+\beta^2)^{n+1}}\frac{(n+2)(n+3)...(n+m+1)}{m!}\Bigg[1+\frac{(n-m+1)(n+1)}{(m+1)}\beta^2+ \\ &\qquad +\frac{(n-m+1)(n-m)}{2}\frac{n(n+1)}{(m+1)(m+2)}\beta^4+\dots\Bigg]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Por otra parte se tiene la función hipergeométrica

$$\begin{aligned}
F(a,b,c,x) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{k-1}\big[(a+i)(b+i)\big]}{k!\prod_{i=0}^{k-1}(c+i)}x^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{i=0}^{k-1}\frac{(a+i)(b+i)}{(c+i)}\right]\frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{a+k-1}{k}\binom{b+k-1}{k}}{\binom{c+k-1}{k}}x^k,
\end{aligned}$$

que es una función que converge si $|x|<1$ siempre que $c-(a+b)>-1$. La función hipergeométrica es solución de la ecuación hipergeométrica $x(1-x)y''+\big(c-(a+b+1)x\big)y'-aby=0$.

Se tiene entonces que

$$F(m-n+1,-n-1,m+1,\beta^2)=1+\frac{(n-m+1)(n+1)}{(m+1)}\beta^2+\ldots,$$

que es el mismo término que en la ecuación (5.5) que está entre corchetes, y por tanto

$$X_0^{n,m}(e)=(-1)^m\frac{\beta^m}{(1+\beta^2)^{n+1}}\frac{(n+2)(n+3)...(n+m+1)}{m!}F(m-n+1,-n-1,m+1,\beta^2).$$

Para calcular ahora $x_k^{m,n}$, con $k\neq 0$, se define $\nu=\frac{ke}{2\beta}$, o lo que es lo mismo, $\nu=k\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2}$.

Sea $\phi=\Theta\Theta_1$, donde

$$\begin{aligned}
\Theta &= (1-\beta y)^{n-m+1}\cdot\exp(\nu\beta y), \\
\Theta_1 &= \left(1-\frac{\beta}{y}\right)^{n+m+1}\cdot\exp(-\nu\beta y),
\end{aligned}$$

y buscaremos el desarrollo de Θ en potencias de y. Se podrá obtener el desarrollo de Θ_1 cambiando $y\to\frac{1}{y}$, $m\to -m$ y $\nu\to-\nu$.

Sean los siguientes desarrollos que son convergentes ($|\beta y|<1$).

$$\begin{aligned}
(1-\beta y)^{n-m+1} &= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\binom{n-m+1}{s}\beta^s y^s, \\
\exp(\nu\beta y) &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\nu^l\beta^l y^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Con $P_0 = 1$, sea

$$P_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{n-m+1}{s} \frac{\nu^{r-s}}{(r-s)!},$$

entonces

$$\Theta = 1 - P_1 \beta y + P_2 \beta^2 y^2 - P_3 \beta^3 y^3 + \dots .$$

Sea

$$Q_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{n+m+1}{s} \frac{(-\nu)^{r-s}}{(r-s)!} = \sum_{s=0}^{r} \binom{n+m+1}{s} \frac{\nu^{r-s}}{(r-s)!},$$

entonces

$$\Theta_1 = 1 - Q_1 \frac{\beta}{y} + Q_2 \frac{\beta^2}{y^2} - Q_3 \frac{\beta^3}{y^3} + \dots .$$

El coeficiente de α correspondiente a y^{k-m} será

$$\begin{aligned} \alpha &= (-1)^{k-m} \sum_{s=0}^{\infty} P_{k-m+s} Q_s \beta^{k-m+2s}, \quad \text{si } k-m > 0, \\ \alpha &= (-1)^{k-m} \sum_{s=0}^{\infty} P_s Q_{m-k+s} \beta^{m-k+2s}, \quad \text{si } k-m < 0. \end{aligned}$$

Así que se tiene, si $k - m > 0$, que

$$X_k^{n,m}(e) = (-1)^{k-m} (1+\beta^2)^{-n-1} \beta^{k-m} \sum_{s=0}^{\infty} P_{k-m+s} Q_s \beta^{2s},$$

y si $k - m < 0$,

$$X_k^{n,m}(e) = (-1)^{m-k} (1+\beta^2)^{-n-1} \beta^{m-k} \sum_{s=0}^{\infty} P_s Q_{m-k+s} \beta^{2s}.$$

Si $k = m$, se puede utilizar cualquiera de las dos ya que coinciden.

Para obtener los desarrollos que se derivan de la segunda fórmula de Hansen, sea en primer lugar $k = 0$

$$\phi_0' = (1+\beta x)^{-n-2} \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-n-2},$$

y sea α_0' el coeficiente de x^{-m} en este desarrollo, entonces se tendrá

$$X_0^{n,m}(e) = \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \cdot \alpha_0'.$$

Desarrollando ϕ_0' se llega a la fórmula

$$\begin{aligned} X_0^{n,m}(e) &= \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \beta^m \cdot \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \cdot (n+2)(n+3)...(n+m+1) \cdot \\ & \quad \cdot \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\prod_{l=0}^{s} \frac{n+2+l}{l} \cdot \frac{n+m+2+l}{m+1+l} \right) \beta^{2s} \right], \end{aligned}$$

siendo una serie finita cuando $n+m+1$ es negativo. Si $n+2$ es positivo la serie es infinita y puede ser escrita como

$$\begin{aligned} X_0^{n,m}(e) &= (-1)^m \cdot \beta^m \cdot \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+2)(n+3)...(n+m+1)}{m!} \cdot \\ & \quad \cdot \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\prod_{l=0}^{s-1} (n+2+l) \cdot \frac{n+m+2+l}{m+1+l} \right) \beta^{2s} \right] \\ &= (-1)^m \cdot \beta^m \cdot \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \cdot \binom{n+m+1}{m} \cdot F(n+m+2, n+2, m+1, \beta^2). \end{aligned}$$

La función hipergeométrica cumple que

$$F(a,b,c,\beta^2) = (1-\beta^2)^{c-a-b} \cdot F(c-a, c-b, c, \beta^2),$$

y a partir de esta propiedad,

$$F(2a', 2a'+1-c', c', \beta^2) = (1+\beta^2)^{-2a'} \cdot F\left(a', a'+\frac{1}{2}, c', \frac{4\beta^2}{(1+\beta^2)^2}\right)$$

con $2a' = m-n-1$ y $c' = m+1$ se tiene que

$$F(m-n-1, -n-1, m+1, \beta^2) = (1+\beta^2)^{n+1-m} \cdot F\left(\frac{m-n-1}{2}, \frac{m-n}{2}, m+1, e^2\right),$$

haciendo que

$$X_0^{n,m}(e) = (-1)^m \cdot \binom{n+m+1}{m} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^m \cdot F\left(\frac{m-n-1}{2}, \frac{m-n}{2}, m+1, e^2\right),$$

y usando la propiedad de F,

$$X_0^{n,m}(e) = (-1)^m \cdot \binom{n+m+1}{m} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^m \cdot (1-e^2)^{n+\frac{3}{2}} \cdot F\left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{m+n+3}{2}, m+1, e^2\right).$$

Para calcular ahora $X_k^{n,m}$ para k entero distinto de cero, se define $\nu = k\sqrt{1-e^2}$.

Sea $\phi' = \Theta'\Theta_1'$, con

$$\begin{aligned}\Theta' &= (1+\beta x)^{-h} \cdot \exp\left(\nu \frac{\beta x}{1+\beta x}\right), \qquad h = n+2-k,\\ \Theta_1' &= (1-\beta x^{-1})^{-h_1} \cdot \exp\left(-\nu \frac{\beta x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}\right), \qquad h_1 = n+2+k.\end{aligned}$$

Buscaremos ahora el desarrollo de Θ' en potencias de x y a partir de este, se deducirá el de Θ_1' con el cambio $x \to \frac{1}{x}$, $k \to -k$ y $\nu \to -\nu$.

En primer lugar, partimos del desarrollo

$$\exp\left(\nu \frac{\beta x}{1+\beta x}\right) = 1 + \nu(1+\beta x)^{-1}\beta x + \frac{\nu^2}{2!}(1+\beta x)^{-2}\beta^2 x^2 + \cdots + \frac{\nu^k}{k!}(1+\beta x)^{-k}\beta^k x^k + \ldots,$$

así que

$$\begin{aligned}\Theta' &= (1+\beta x)^{-h} + \nu(1+\beta x)^{-(h+1)}\beta x + \frac{\nu^2}{2!}(1+\beta x)^{-(h+2)}\beta^2 x^2 \ldots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\nu^k (1+\beta x)^{-(h+k)}\beta^k x^k.\end{aligned}$$

Si se desarrolla $(1+\beta x)^{-(h+k)}$, y se ordena respecto a βx, se tiene que

$$\begin{aligned}P_1' &= \frac{n+2-k}{1} - \frac{\nu}{1}\\ P_2' &= \binom{n+3-k+1}{2} - \binom{n+3-k+1}{1}\nu + \binom{n+3-k+1}{0}\nu^2\\ &\vdots\\ P_s' &= \sum_{l=0}^{s}\binom{n+s-k+1}{s-l}(-1)^l \nu^l,\end{aligned}$$

por lo que

$$\Theta' = 1 - P_1'\beta x + P_2'(\beta x)^2 - P_3'(\beta x)^3 + \ldots$$

Realizando los respectivos cambios, se tiene que

$$Q_s' = \sum_{l=0}^{s}\binom{n+s+k+1}{s-l}\nu^l,$$

y por tanto,

$$\Theta_1' = 1 - Q_1'\beta x^{-1} + Q_2'\beta^2 x^{-2} - Q_3'\beta^3 x^{-3} + \dots$$

Si se realiza el producto de $\Theta'\Theta_1'$, y se busca el coeficiente de x^{k-m}, se tiene que

$$X_k^{n,m}(e) = (-1)^{k-m}\frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}}\beta^{k-m}\left(P_{k-m}' + P_{k-m+1}'Q_1'\beta^2 + P_{k-m+2}'Q_2'\beta^4 + \dots\right),$$

si $k > m$, pero si $k < m$, entonces

$$X_k^{n,m}(e) = (-1)^{m-k}\frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}}\beta^{m-k}\left(Q_{m-k}' + Q_{m-k+1}'P_1'\beta^2 + Q_{m-k+2}'P_2'\beta^4 + \dots\right),$$

recordando que β y ν son desarrollables en series enteras de e.

5.2. Desarrollo del inverso de la distancia y polinomios de Legendre

En este apartado se completa el trabajo con el estudio de las ecuaciones diferenciales de Lagrange y de Bessel. Los polinomios de Legendre son básicos en el estudio del desarrollo del inverso de la distancia entre el secundario y una masa perturbadora. Dichos polinomios satisfacen la ecuación diferencial de Legendre, la cual corresponde a un problema de Sturm-Liouville. También las funciones de Bessel son la solución de un problema de Sturm-Liouville y es por ello que se introduce la ecuación de Bessel en este estudio. Las fuentes en que se basa este capítulo pueden encontrarse en [5] y en [1].

5.2.1. Obtención de la fórmula de Rodrigues

Sean r, r' dos radio vectores de dos puntos M, M'. Sea θ el ángulo formado por $\vec{r}, \vec{r}'$ y sea Δ la distancia entre M, M'. La figura (5.1) es un esquema con estas especificaciones.

Entonces, por el teorema del coseno, se tiene que

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta),$$

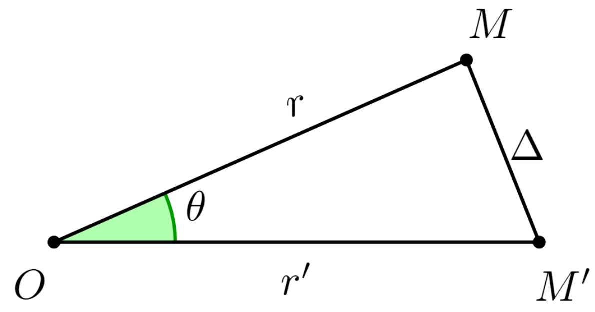

Figura 5.1: Diagrama del triángulo

y despejando el inverso de Δ se llega a que

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta)}}, & r' < r, \\ \frac{1}{r'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta)}}, & r' > r, \end{cases}$$

donde

$$\rho = \begin{cases} \frac{r'}{r}, & r' < r, \\ \frac{r}{r'}, & r' > r. \end{cases}$$

En ambos casos se cumple que $\rho > 1$.

En el desarrollo de $\frac{1}{\Delta}$ aparece, con $x = \cos(\theta)$, la función

$$\psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}}, \qquad 0 < \rho < 1, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Esta función es la llamada función generatriz de los polinomios de Legendre.

Desarrollando $\psi(\rho, x)$ en potencias de ρ, ya que el denominador no de anula y por tanto se puede desarrollar en series de Taylor, se tiene

$$\psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n,$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \left. \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \psi}{\partial p^n} \right|_{\rho=0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(\xi, x)}{\xi^{n+1}} d\xi, \end{aligned}$$

donde C es un ciclo homólogo a cero que encierra a $\xi = 0$.

Si se realiza el cambio de variable

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 2x\xi + \xi^2} = 1 - \xi z \quad &\Longrightarrow \quad \xi = \frac{2(z - x)}{z^2 - 1}, \\ d\xi = \frac{2(1 - \xi z)}{z^2 - 1} dz \quad &\Longrightarrow \quad \psi(\xi, x) d\xi = \frac{2dz}{z^2 - 1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{\pi i} \cdot \int_{C_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz,$$

donde C_1 es un camino que rodea a $z = x$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{n!\, 2^n} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{C_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right], \end{aligned}$$

que es la llamada fórmula de Rodrigues.

5.2.2. Relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre

En esta sección vamos a establecer unas relaciones de recurrencia entre los polinomios de Legendre.

Derivando $\psi(\rho, x)$ respecto a x y ρ, se obtienen las identidades

$$(1 - 2\rho x + \rho^2)\psi_\rho = (x - \rho)\psi 0, \tag{5.6}$$

$$(1 - 2\rho x + \rho^2)\psi_x = \rho\psi. \tag{5.7}$$

Si se calcula el desarrollo en serie de potencias de ψ_ρ, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\psi_\rho &= \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n\rho^n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n\rho^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}\rho^n,
\end{aligned}$$

y si sustituimos este desarrollo y el de ψ en la relación (5.6), se tiene que

$$\begin{aligned}
(1-2\rho x+\rho^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}\rho^n &= (x-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}\rho^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}\rho^{n+1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}\rho^{n+2} &= x\sum_{n=0}^{\infty} P_n\rho^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n\rho^{n+1}.
\end{aligned}$$

Sabiendo el valor de los coeficientes $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, para las potencias ρ^n con $n > 2$, se obtiene la relación

$$(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x), \tag{5.8}$$

que es la fórmula de recursividad de Bonnet, y permite evaluar por recurrencia todos los $P_n(x)$ a partir de los valores iniciales.

Si eliminamos ψ entre las expresiones (5.6) y (5.7), se obtiene la identidad

$$\rho\psi_\rho - (x-\rho)\psi_x = 0,$$

y sustituyendo los desarrollos en serie de ambas derivadas, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^{n+1} &= (x-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\rho^n \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^{n+1} &= x\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\rho^n - \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\rho^{n+1},
\end{aligned}$$

e igualando los coeficientes de ρ^n se tiene la relación

$$\begin{aligned}
nP_n(x) &= xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) \\
P'_{n-1}(x) &= xP'_n(x) - nP_n(x).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Derivando ahora la relación (5.8) respecto x, y sustituyendo en ella la relación (5.9), se obtiene que

$$\begin{aligned}
(n+1)P'_{n+1}(x) &= (2n+1)P_n(x) + x(2n+1)P'_n(x) - nP'_{n-1}(x) \\
(n+1)P'_{n+1}(x) &= (2n+1)P_n(x) + x(2n+1)P'_n(x) - xnP'_n(x) + n^2 P_n(x) \\
(n+1)P'_{n+1}(x) &= (2n+1+n^2)P_n(x) + (2xn+1-xn)P'_n(x) \\
(n+1)P'_{n+1}(x) &= (n+1)^2 P_n(x) + x(n+1)P'_n(x) \\
P'_{n+1}(x) &= (n+1)P_n(x) + xP'_n(x),
\end{aligned}$$

y cambiando $n+1$ por n, se tiene la relación

$$P'_n(x) \quad = \quad nP_{n-1}(x) + xP'_{n-1}(x). \tag{5.10}$$

5.2.3. Ecuaciones diferenciales de Legendre y Bessel

Si ahora se elimina P'_{n-1}y P_{n-1} entre la relación (5.10) y la relación (5.9), se obtiene

$$\begin{aligned}
P'_n(x) &= nP_{n-1}(x) + x\left(xP'_n(x) - nP_n(x)\right) \\
P'_n(x) &= nP_{n-1}(x) + x^2 P'_n(x) - xnP_n(x) \\
(1-x^2)P'_n(x) &= nP_{n-1}(x) - xnP_n(x),
\end{aligned}$$

y derivando respecto x esta expresión se tiene

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)P'_n(x)\Big] \quad = \quad nP'_{n-1}(x) - nP_n(x) - xnP'_n(x),$$

y sustituyendo en ella la relación (5.9)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)P'_n(x)\Big] &= n\left(xP'_n(x) - nP_n(x)\right) - nP_n(x) - xnP'_n(x) \\
&= xnP'_n(x) - n^2P_n(x) - nP_n(x) - xnP'_n(x) \\
&= -n(n+1)P_n(x),
\end{aligned}$$

es decir, se tiene la relación

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)P'_n(x)\Big] + n(n+1)P_n(x) = 0. \tag{5.11}$$

Los polinomios de Legendre son las funciones propias del problema de Sturm-Liouville: «*Hallar las soluciones no triviales de la ecuación*

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0,$$

en $x \in]-1,1[$ *acotadas en* ± 1 *que satisfacen la condición de normalización* $y(1) = 1$»

Este problema solo tiene solución para $\lambda = n(n+1)$.

Al ser soluciones de un problema de Sturm-Liouville, los polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ constituyen un sistema ortogonal completo en el intervalo $[-1,1]$.

Las funciones de Bessel por otra parte, pueden ser obtenidas como solución de la ecuación de Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

o bien

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

donde ν es un número real o complejo arbitrario y 0 es un punto singular regular de la ecuación

$$y(x) = x^{\sigma} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \dots\right).$$

La ecuación que satisfacen los coeficientes de las distintas potencias son

$$\begin{aligned} a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0 &\longrightarrow \sigma^2 - \nu^2 = 0 \qquad \text{(ecuación indicial)} \\ a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] = 0 &\longrightarrow a_1 = 0 \\ a_k[(\sigma+k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0, & \qquad\qquad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación indicial son $\sigma = \pm\nu$.

Para $\sigma = \nu$, se tienen los coeficientes

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -a_{2m-2}\frac{1}{2^2 m(m+\nu)} \\ &= (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} \cdot m! \cdot (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)} \end{aligned}$$

puesto que

$$\Gamma(s+1) = s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n),$$

y haciendo

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu} \cdot \Gamma(\nu+1)},$$

y sabiendo que $\Gamma(s+1) = s!$ si s es natural, entonces

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} \cdot \Gamma(k+1) \cdot \Gamma(k+\nu+1)}.$$

Por tanto,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

funciones de Bessel de primera especie y convexa para todo x complejo.

Si ν no es entero, entonces

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu},$$

que es función de Bessel de segunda especie, independiente de $J_\nu(x)$ y también convexa para todo x complejo. Si ν es entero, entonces son proporcionales y entonces hay que introducir $\log(x)$ con lo que aparecerían las funciones de Newman.

Conclusiones

En el presente trabajo se ha introducido el problema de dos cuerpos, problema base de la mecánica celeste y las ecuaciones planetarias de Lagrange como base del estudio del movimiento perturbado en en el caso del sistema solar. El problema de los dos cuerpos fue estudiado en el TFG, por lo que aquí únicamente se presentan los principales resultados. La integración del movimiento perturbado puede hacerse por métodos analíticos o numéricos. Para integrar el problema por métodos analíticos resulta necesario desarrollar en serie de Fourier de las anomalías medias de los planetas que intervienen en el modelo, para lo cual es necesario por una parte el desarrollo de las principales cantidades que aparecen en el problema de dos cuerpos en serie de Fourier. También es necesario desarrollar el inverso de la distancia entre el secundario y los cuerpos perturbadores.

En este trabajo el esfuerzo principal está centrado en la primera tarea. Para ello en primer lugar se obtienen los desarrollos de $cos(kE)$ y $\sin(kE)$ en función de la anomalía media, para lo cual se requiere el estudio de las funciones de Bessel. De estas relaciones y mediante el uso de la ecuación de Kepler es fácil obtener la anomalía excéntrica E en función de la anomalía media. Al efectuar estos desarrollos surge la duda acerca de en que región se puede asegurar la convergencia de dichas series y en cuales no. Para abordar este problema mediante un método general se recurre a la variable compleja, en particular a la inversión de una función holomorfa en el entorno de un punto en el que no se anula la primera derivada, obteniéndose el teorema de inversión de series Lagrange. A partir de las condiciones necesarias para que se cumpla este teorema, obtenemos el radio de convergencia de las series obtenidas como caso particular de un resultado más general.

A continuación para extender los desarrollos en serie a más cantidades, se procede a demostrar un teorema debido a Cauchy acerca del desarrollo en serie de Laurent de funciones meromorfas, así como a introducir los números de Cauchy, con ello se obtienen los desarrollos de $(r/a-1)^m$ y de $(r/a)^m$. Dentro de estos desarrollos se obtiene la ecuación del centro, diferencia entre la anomalía verdadera y media.

Para completar la sección de desarrollos se aborda el estudio de las funciones de Hansen, las cuales nos proporcionan los desarrollos de $(r/a)^n \cos(mV)$ y $(r/a)^n \sin(mV)$ en serie de Fourier de M.

Finalmente, se introducen los polinomios de Legendre a modo de introducción al desarrollo del inverso de la distancia entre el secundario y una masa perturbadora. En este caso se obtiene a partir de la fórmula integral de Cauchy para derivadas, la fórmula de Rodrigues. También se obtienen diversas recurrencias y la ecuación diferencial de Legendre, la cual dichos polinomios son las funciones propias. Para finalizar se aborda el estudio de la ecuación diferencial de Bessel, la cual al igual que la de Legendre constituye un problema de Sturm-Liouville, y de la cual se obtienen las funciones de Bessel solución de primera especie.

Este trabajo puede tomarse como punto de partida en los desarrollos analíticos del segundo miembro de las ecuaciones planetarias de Lagrange, si bien aún falta el estudio de numerosos desarrollos para llegar a tal fin.

Para concluir, indicar que Cauchy desarrolló toda la teoría de funciones analíticas para resolver el problema de la inversión de la ecuación de Kepler, lo que dio lugar a una de las teorías matemáticas más bellas.

Finalmente, destacar que la mecánica celeste es un ámbito que requiere un fuerte conocimiento de la matemática. En este campo trabajaron durante el siglo XIX y principios del XX muchos de los principales matemáticos, dando lugar a una ciencia con un grado de desarrollo muy alto.

Bibliografía

[1] Lavréntiev M.A. y Shabat, B.V. 1991, *Métodos de la teoría de las funciones de una variable compleja*, Editorial Mir, Moscú

[2] D. López. 2021, *El Problema de Dos Cuerpos*, Trabajo fin de grado. Universitat Jaume I

[3] Markushévich, A.I. 1978, *Teoría de las funciones analíticas*, Editorial Mir, Moscú

[4] M. J. Sevilla. 1989, *Mecánica celeste clásica*, Realigraf, Madrid

[5] A. Tijonov, A. Samarski. 1983, *Ecuaciones de la física matemática*, Editorial Mir, Moscú

[6] F. Tisserand. 1896, *Traité de Mécanique Céleste*, Ed Gauthier-Villars, Paris