



SUPERFICIES EDP DE BÉZIER

Trabajo Final de Máster

Máster en Matemática Computacional (a distancia)

Autor: Ignacio García de Mateos Mateos Aparicio

Tutora: Ana María Arnal Pons

Octubre 2022

Índice general

Capítulo 1.	Introducción	1
Capítulo 2.	Superficies EDP de Bézier triangulares: Superficies armónicas, biarmónicas e isotrópicas	5
1.	Matrices Toeplitz y sus determinantes	5
2.	EDPs de segundo orden: La condición armónica y el operador isotrópico	6
3.	EDP de cuarto orden: La condición biarmónica y el operador isotrópico	13
Capítulo 3.	Superficies EDP de Bézier triangulares: Una solución de la ecuación de orden 3	19
1.	La EDP de tercer orden	19
2.	Existencia de soluciones de Bézier para la EDP	22
3.	Solución explícita	22
4.	Soluciones de Bézier para las EDP de tercer orden.	23
Capítulo 4.	Superficies EDP de Bézier rectangulares: La ecuación triarmónica en superficies rectangulares	29
1.	Introducción	29
2.	Condiciones para las superficies de Bézier triarmónicas	33
3.	Construcción de superficies triarmónicas de Bézier con diferentes condiciones de frontera	34
Capítulo 5.	Superficies EDP triangulares: Una ecuación de orden seis.	37
1.	La EDP de orden 6	37
2.	Comparación de métodos	40
Capítulo 6.	Conclusiones	45
	Bibliografía	47

Introducción

El objetivo de este trabajo es analizar las técnicas existentes relacionadas con las superficies que se obtienen como solución de Ecuaciones en Derivadas Parciales (en adelante EDP) de Bézier triangulares, éstas superficies se usan para generar una superficie que satisface un problema matemático de valores en la frontera.

Este trabajo de análisis consistirá inicialmente en una revisión de tres artículos de Arnal, Lluch y Monterde en 2011 [2], Arnal y Monterde también en 2011 [3], y de Yan Wu y Chun-Gang Zhu en 2020 [4], para posteriormente realizar ejemplos, tomar conclusiones sobre los artículos y proponer una nueva técnica en el capítulo seis. Veamos para comenzar la definición de superficie EDP.

Estas superficies son utilizadas en modelización geométrica, diseño asistido por ordenador, animación por ordenador, para realizar gráficos por ordenador creando superficies suaves de acuerdo a una serie de condiciones de frontera dadas.

Antes de empezar a profundizar en las superficies EDP, realizaremos una introducción tanto histórica como matemática que nos permitirá poner en contexto la relevancia de los temas a tratar.

En torno a 1962 se desarrolló un sistema para el trazado curvas que se utilizan en el ámbito del diseño aeronáutico y automovilístico. Estas curvas toman su nombre del ingeniero francés Pierre Bézier, quien estudió un método para describirlas que utilizó frecuentemente en su trabajo en Renault. No se puede dejar de lado en este nacimiento de las curvas de Bézier a Paul de Casteljaou, que paralelamente desarrolló las curvas utilizando el algoritmo de De Casteljaou, que es un método para evaluar las mencionadas curvas y vamos a definir a continuación.

Algoritmo de De Casteljaou. Dados $n+1$ puntos, $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$, definimos una curva de Bézier asociada a los mencionados puntos como $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = P_0^n(t)$, donde $P_0^n(t)$ es el resultado del siguiente algoritmo:

$$P_i^n(t) = P_i$$

$$P_i^r(t) = (1-t)P_i^{r-1}(t) + tP_{i+1}^{r-1}(t) \text{ con } r = 1, \dots, n \text{ y } i = 0, \dots, n-r.$$

El polígono definido por los puntos, es el polígono de control, y sus vértices serán los puntos de control.

Polinomio de Bernstein. Curvas de Bézier mediante polinomios de Bernstein.

Los polinomios en forma de Bernstein fueron utilizados por primera vez por Sergei N. Bernstein, quien da nombre a estos polinomios, en una demostración constructiva del teorema

de aproximación de Weierstrass. A partir de la utilización de ordenadores estos polinomios, restringidos al intervalo $[0, 1]$, cobraron importancia en forma de curvas de Bézier.

Un **polinomio de Bernstein** es una combinación lineal de polinomios de base de Bernstein.

Un polinomio de Bernstein $P(x)$ de grado n se define: $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(x)$ donde los $B_k^n(\cdot)$ son elementos de la base de polinomios de Bernstein, que se definen de la siguiente forma: $B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ si $x \in [0, 1]$.

Los puntos intermedios que se generan mediante el algoritmo de De Casteljaou, $P_i^r(t)$, se pueden calcular de la siguiente forma:

$$P_i^r(t) = \sum_{j=0}^n B_j^r(t) P_{i+j}$$

Propiedades de la curvas de Bézier Veamos las propiedades de las curvas de Bézier, que aparecen como consecuencia de las propiedades de los polinomios de Bernstein.

- Interpolación de extremos: La curva de Bézier pasa por los extremos del polígono de control.
- Simetría: Los polígonos de control P_0, P_1, \dots, P_n y P_n, P_{n-1}, \dots, P_0 definen la misma curva de Bézier, aunque las direcciones de recorrido son opuestas.
- Invarianza afín: Si se aplica una aplicación afín al polígono de control, la curva de Bézier asociada al nuevo polígono de control es la imagen por la aplicación afín de la curva de Bézier inicial.
- Envoltura convexa: La curva de Bézier asociada a un polígono de control está incluida en la envoltura convexa del conjunto formado por los puntos de control.
- Disminución de la variación: Si una recta corta un polígono de control plano en m ocasiones, entonces la recta cortará a la curva de Bézier m veces a lo sumo.
- Precisión lineal: Si los puntos de control están distribuidos uniformemente en el segmento $P_0 P_n$, entonces la curva de Bézier de grado n es la interpolación lineal entre P_0 y P_n .
- Control pseudo-local. Si desplazamos el punto de control P_i a P_i' entonces los puntos de la curva se moverán respecto a la curva original en la dirección del vector $\vec{P_i P_i'}$. Este cambio no afecta a todos los puntos por igual, ya que se acentúa en la zona más cercana a P_i y apenas se percibe en los puntos alejados de éste.

Tras el presente capítulo introductorio, consideramos en el segundo capítulo las EDP definidas por las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con el funcional de Dirichlet y con el funcional biarmónico, que son la ecuación de Laplace y la biarmónica, pero se han tratado éstas EDPs como casos particulares de EDP generales con coeficientes constantes de grados 2 y 4 respectivamente. También se calcula para las EDP generales qué puntos de la red de control tienen una superficie determinada de forma única.

Es posible determinar una superficie de Bézier triangular que satisfaga una EDP si tenemos algunos de sus puntos de control. El conjunto mínimo de puntos de control necesarios depende de la propia EDP, aunque sobre todo influye el orden de la EDP. Existen artículos que estudian la generación de superficies de Bézier rectangulares que satisfacen la ecuación

de Laplace así como la ecuación biarmónica [5], [6], [7]. También hay estudios similares sobre soluciones de Bézier de la ecuación de ondas [9].

Encontramos diferentes métodos para generar superficies EDP de Bézier triangulares con un conjunto dado de puntos de control, para ello se deben dar dos líneas de puntos de control en superficies EDP de segundo orden y cuatro líneas para las de cuarto orden. Además, como caso particular de las EDPs generales, se introducen y estudian operadores isotrópicos de segundo y de cuarto orden, que son aquellos operadores que permanecen invariantes sobre una superficie bajo diferentes parametrizaciones, de manera que se pueda solventar el problema de que ecuaciones armónicas y biarmónicas sobre superficies de Bézier triangulares no sean isotrópicas.

El uso de superficies EDP nos permite generar una superficie simplemente describiendo un conjunto de puntos de control, donde el resto de la superficie está controlado por la ecuación. El modelado de superficies utilizando superficies de Bézier tanto armónicas como biarmónicas es interesante porque el diseñador no necesita preocuparse de la representación exacta de la superficie.

Es interesante hacer notar la importancia de las direcciones de los ejes coordenados en el dominio del parámetro. De estas direcciones depende que las superficies triangulares de Bézier sean armónicas o no solo en función de unos ciertos ejes y de puntos de control. Si se permutan dos de los tres índices de los puntos de control, entonces la propiedad armónica puede desaparecer.

Estudiaremos si existe o no un operador diferencial de segundo orden, isotrópico con respecto a parametrizaciones triangulares de Bézier, es decir, independientes del etiquetado de los puntos de control.

En el tercer capítulo presentamos un método para el diseño de superficies resolviendo EDPs. Para ello creamos una superficie triangular de Bézier como solución de una EDP con algunos puntos de control elegidos. Veremos que es posible determinar una superficie triangular de Bézier que satisfaga una EDP si contamos con algunos de sus puntos de control.

También discutiremos diferentes ejemplos relacionados con la generación de superficies a partir de una configuración de fronteras fijadas y comparamos nuestros resultados para una EDP de segundo y cuarto orden con la solución polinómica de una EDP de tercer orden con comportamiento isotrópico.

A lo largo del capítulo cuarto se trabaja con redes de control para construir superficies, en este caso, rectangulares a través de diferentes condiciones de frontera y la ecuación triarmónica de manera que realicen mejor el diseño interactivo y den a las superficies resultantes las características deseadas para el diseño asistido por ordenador.

Superficies EDP de Bézier triangulares: Superficies armónicas, biharmónicas e isotrópicas

Presentamos el método para el diseño de superficies resolviendo EDPs. Para ello, creamos en [2] una superficie triangular de Bézier como solución de una EDP con algunos puntos de control elegidos. En 1989, Bloor y Wilson [1] aportaron técnicas de modelización de superficies, llamadas "superficies EDP". Dado que la mayor parte de la información que define una superficie viene de sus curvas de frontera, añadir algunas condiciones de contorno a la EDP permite que el método basado en ésta genere y controle la forma de la superficie a través de muy pocos parámetros.

Podemos determinar una superficie triangular de Bézier que satisfaga una EDP si contamos con algunos de sus puntos de control. El conjunto mínimo de puntos de control necesarios depende de la EDP en cuestión, aunque uno de los factores principales a la hora de decidir dichos puntos es el orden de la EDP. Existen artículos que estudian la generación de superficies de Bézier rectangulares que satisfacen la ecuación de Laplace así como la ecuación biharmónica [5], [6], [7]. También hay estudios similares sobre soluciones de Bézier de la ecuación de ondas [9].

En el caso de superficies Bézier rectangulares armónicas, son necesarias dos condiciones de contorno para construir la superficie, mientras que para las superficies de Bézier rectangulares biharmónicas, se necesitaban cuatro curvas de contorno como datos iniciales. En el caso biharmónico es importante resaltar el hecho de que aunque se consideran problemas de valores en la frontera, si se busca una solución polinómica, el problema tiene una solución única simplemente prescribiendo la frontera y sin derivadas normales a lo largo de esta. Podría esperarse que las fronteras no restringidas a ser polinómicas estén definidas no solo por la frontera, sino también por las derivadas transversales de las fronteras; pero el hecho es que, si se requieren superficies polinómicas, las derivadas transversales están determinados por la frontera del caso rectangular.

1. Matrices Toeplitz y sus determinantes

La prueba de la existencia de solución para el problema de determinar una superficie de Bézier cuando algunos de sus puntos de control están fijados consiste en comprobar la resolubilidad de algunos sistemas lineales, todos ellos están asociados a matrices Toeplitz.

Una matriz Toeplitz de orden $n \times n$ es aquella que:

$$(1) \quad T_n(\mathbf{b}) = (b_j)_{j=-n}^{n-1} = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & \cdots & b_{-(n-1)} \\ b_1 & b_0 & \cdots & b_{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

El determinante, D_n^b de una matriz de bandas de Toeplitz, $T_n(\mathbf{b}) = (b_j)_{j=-r}^s$, con ceros para cada $j = -r - 1, \dots, -n + 1$ y $j = s + 1, \dots, n - 1$, puede ser calculado mediante la fórmula de Widom que vemos a continuación en el siguiente Teorema 1.

TEOREMA 2.1. (*Fórmula de Widom*) Si z_1, z_2, \dots, z_{r+s} son las raíces del polinomio $p(z) = b_{-r} + b_{-r+1}z + \cdots + b_s z^{r+s}$ son distintas dos a dos, entonces, para cada $n \geq 1$ el determinante, D_n^b , de una matriz de bandas Toeplitz n -dimensional, $T_n(b) = (b_j)_{j=-r}^s$, es: $D_n^b = \sum_M C_M \omega_M^n$ donde la suma de los $\binom{r+s}{s}$ subconjuntos $M \subset \{1, 2, \dots, r + s\}$ de cardinal $|M| = s$ y con $\bar{M} = \{1, 2, \dots, r + s\} \setminus M$, con

$$\omega_M = (-1)^s b_s \prod_{j \in M} z_j,$$

$$C_M = \prod_{j \in M} z_j^r \prod_{j \in M, k \in \bar{M}} (z_j - z_k)^{-1}$$

2. EDPs de segundo orden: La condición armónica y el operador isotrópico

A continuación vamos a explicar las técnicas existentes para orden dos que aparecen en [2]

Las superficies triangulares de Bézier tienen una ventaja sobre las rectangulares cuando se trata de derivadas. Si consideramos el polinomio $u^n v^n$, este polinomio tiene grado (n, n) , si lo escribimos en función de los polinomios de Bernstein de una variable, en cambio este polinomio si lo escribimos en función de los polinomios bivariados de Bernstein tiene grado $2n$, si derivamos en general o con por ejemplo con el laplaciano $\Delta(u^n v^n) = n(n-1)(u^{n-2} v^n + u^n v^{n-2})$, reescribir este laplaciano en función de los polinomios de Bernstein de una variable, vuelve a resultar que tiene grado (n, n) , es decir, el grado no se ha reducido, pero en el caso de las superficies de Bézier triangulares el grado sí se ha reducido y ahora queda un polinomio de grado $2n - 2$. Entonces al reducirse el grado podemos considerar que están más adaptados para problemas en los que aparecen las EDP.

A continuación consideramos una EDP general de segundo orden, con la ecuación armónica como un caso particular, y veremos algunos métodos para generar las superficies EDP asociadas. Este operador laplaciano se ha utilizado ampliamente en áreas como la física y está asociado con una amplia gama de problemas físicos.

En [5] se probó que la condición de armonicidad para parches rectangulares de Bézier y el conocimiento de dos curvas de frontera opuestas determinan la superficie completa. Aquí se presenta un estudio similar de superficies armónicas de Bézier, pero en lugar de parches rectangulares, se tratará con parches triangulares de Bézier.

Desafortunadamente, como se ha escrito previamente, cuando se trata de superficies triangulares de Bézier el operador armónico no es isotrópico. Las direcciones de los ejes coordenados en el dominio del parámetro toman especial importancia. De esta forma, las superficies triangulares de Bézier son armónicas solo para unos ciertos ejes y de puntos de control. Si se permutan dos de los tres índices de los puntos de control, entonces la propiedad armónica puede desaparecer.

Estudiaremos si existe o no un operador diferencial de segundo orden, isotrópico con respecto a parametrizaciones triangulares de Bézier, es decir, independientes del etiquetado de los puntos de control. Encontramos un operador que permanece invariable sobre una superficie, tras una reparametrización, cuando la aplicamos sobre una superficie con los índices en una red de control bajo permutación.

2.1. El operador isotrópico.

Veamos como obtenemos este operador. Sea S un operador de segundo orden con coeficientes constantes

$$(2) \quad S = \begin{pmatrix} \partial_u & \partial_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $S\vec{x}(u, v) = a\vec{x}_{uu}(u, v) + b\vec{x}_{uv}(u, v) + c\vec{x}_{vv}(u, v)$.

Sea $\vec{x}(u, v) = \vec{x}(u, v, 1 - u - v) = \sum_{|I|=n} P_I B_I^n(u, v)$ una superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$, donde $B_I^n(u, v) = \binom{n}{I} u^i v^j (1 - u - v)^k$, con $I = \{i, j, k\}$ y con $|I| = n$. Sea σ una permutación de los índices de la red de control. Denotaremos ahora \vec{x}_σ la superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_{\sigma(I)}\}_{|I|=n}$.

Estamos buscando un operador S para que exista una aplicación h_σ que satisfaga que $S\vec{x}_\sigma(u, v) = S\vec{x}(h_\sigma(u, v))$ para cualquier permutación de índices.

Este operador isotrópico será múltiplo de $\phi\vec{x}(u, v) = \vec{x}_{uu}(u, v) - \vec{x}_{uv}(u, v) + \vec{x}_{vv}(u, v)$.

2.2. La EDP general de segundo orden.

Consideremos el operador general $S = a\frac{\partial^2}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2}{\partial uv} + c\frac{\partial^2}{\partial v^2}$ y evaluamos sobre el parche de Bézier \vec{x} en términos de los puntos de control:

$$S\vec{x}(u, v) = \left(a\frac{\partial^2}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2}{\partial uv} + c\frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \left(\sum_{|I|=n} P_I B_I^n(u, v) \right)$$

Teniendo en cuenta la derivada de una superficie Bézier tenemos que:

$$S\vec{x}(u, v) = \sum_{|I|=n-2} n(n-1)(a\Delta^{2,0} + b\Delta^{1,1} + c\Delta^{0,2}) P_I B_I^{n-2}(u, v) = \sum_{|I|=n-2} Q_I B_I^{n-2}(u, v),$$

donde $\Delta^{l,m}$ son las diferencias:

$$\begin{aligned}\Delta^{l,m} P_{i,j,k} &= \Delta^{l-1,m} \Delta^{1,0} P_{i,j,k} = \Delta^{l-1,m} (P_{i+1,j,k} - P_{i,i,k+1}) \\ \Delta^{l,m} P_{i,j,k} &= \Delta^{l,m-1} \Delta^{0,1} P_{i,j,k} = \Delta^{l,m-1} (P_{i,j+1,k} - P_{i,i,k+1})\end{aligned}$$

Debido a que $\{B_i^{n-2}\}_{|I|=n-2}$ es una base, tenemos que la red de control de una superficie triangular de Bézier debe satisfacer que $Q_I = 0$ para cada $|I| = n - 2$ para ser una solución de la EDP de segundo orden, $S\vec{x} = 0$.

2.3. Construcción de la superficie de Bézier desde una curva frontera y la derivada normal a lo largo de ella.

A continuación estudiaremos el siguiente problema de contorno:

$$S\vec{x} = \begin{cases} \vec{x}(0, v) = \alpha(v) \\ \vec{x}_u(0, v) = \beta(v) \end{cases}$$

Consideramos ahora la EDP lineal con condiciones de frontera de Cauchy. El valor de la solución a lo largo de la curva frontera, $\vec{x}(0, v)$, y su derivada parcial transversal, $\vec{x}_u(0, v)$, que determina el plano tangente a la superficie a lo largo de esta curva frontera, son las condiciones que se especifican. Se sabe que, en general, este problema tiene solución polinómica y única. En términos de superficies triangulares Bézier, el problema es el siguiente:

Dadas las dos primeras filas de puntos de control, determinar la superficie EDP asociada (ver Fig1).

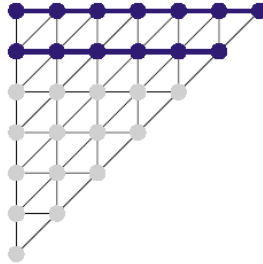


FIGURA 1. Una cuadrícula esquemática de puntos de control. Los puntos azules son conocidos y los grises pueden obtenerse en una solución de Bézier del EDP.

En el siguiente Teorema 2 enunciado y demostrado en [2] se muestra que una solución triangular de Bézier de $S\vec{x} = 0$ se puede determinar a partir de sus dos primeras filas de puntos de control en la red de control.

TEOREMA 2.2. *Sea \vec{x} una solución triangular de Bézier de $S\vec{x} = 0$, donde $S = a \frac{\partial^2}{\partial u^2} + b \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + c \frac{\partial^2}{\partial v^2}$, $a \neq 0$, con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$; entonces los puntos de control $P_{i,j,k}$ con $i \neq 0, 1$ están totalmente determinados por las primeras dos filas de la red de puntos de control $\{P_{0,j,n-j}\}_{j=0}^n$ y $\{P_{1,j,n-j}\}_{j=0}^{n-1}$*

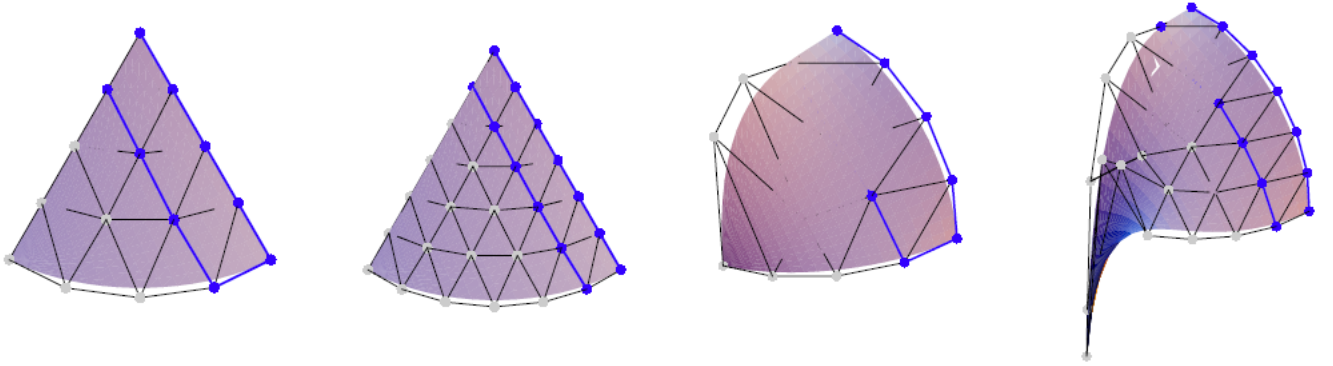


FIGURA 2. Cuatro superficies armónicas obtenidas con el teorema 2. Se muestran los mismos ejemplos para los grados $n = 4$ y $n = 6$. Al comparar las figuras, se puede ver que para algunos ejemplos de mayor grado, la primera y la segunda línea de puntos de control no dan mucho control sobre la forma de la superficie armónica que se determina.

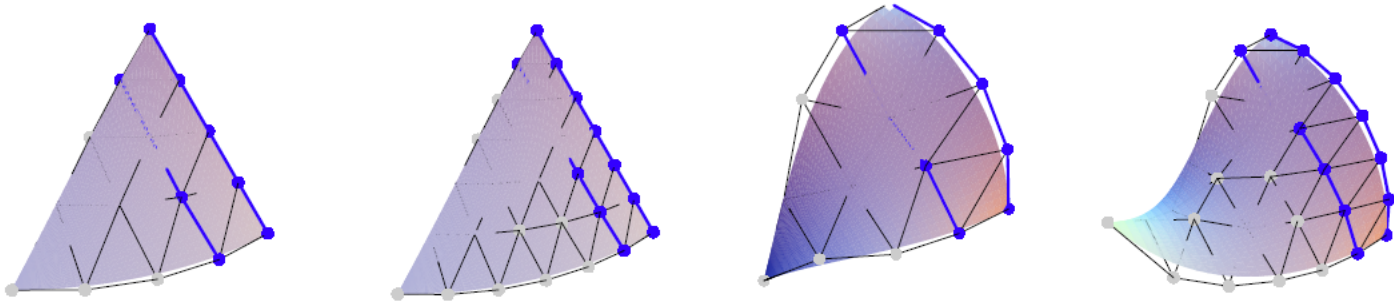


FIGURA 3. Cuatro superficies EDP isotrópicas obtenidas con el teorema anterior.

2.4. Construcción de la superficie de Bézier a través de dos curvas de frontera: elección de los puntos de control.

Como hemos dicho antes, una EDP determina algunos puntos de control de una superficie de Bézier en términos de algunos otros puntos de control prescritos simplemente resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. La elección del conjunto de puntos de control se realiza intentando encontrar el conjunto de puntos de control que, asociados a un sistema compatible, describen en la medida de lo posible el diseño deseado de una superficie.

A continuación, mostramos el estudio de diferentes elecciones del subconjunto de puntos de control para construir la superficie EDP asociada. El conjunto de puntos de control fijados, a partir de los cuales se determina la superficie de Bézier triangular describe la forma de la superficie que se desea obtener. Por lo tanto, una opción adecuada sería dos filas de puntos de control de frontera que describan dos de las curvas de frontera de la superficie. Veámoslo en el siguiente teorema demostrado en [2].

TEOREMA 2.3. *Sea \vec{x} una superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$. Dados los puntos control de la primera fila $\{P_{0,n-i,i}\}_{i=0}^n$ y de la fila del borde diagonal*

$\{P_{i,n-i,0}\}_{i=0}^n$ una superficie EDP que satisface que $S\vec{x} = 0$, donde $S = a\frac{\partial^2}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + c\frac{\partial^2}{\partial v^2}$, puede ser determinada si $D_m^{(a+b+c, -(2a+b), a)} \neq 0$ para $m = 1, \dots, n - 1$, con

$$D_m^b = \frac{(-2a-b+\sqrt{b^2-4ac})^{m+1} - (-2a-b-\sqrt{b^2-4ac})^{m+1}}{2^{m+1}\sqrt{b^2-4ac}}$$

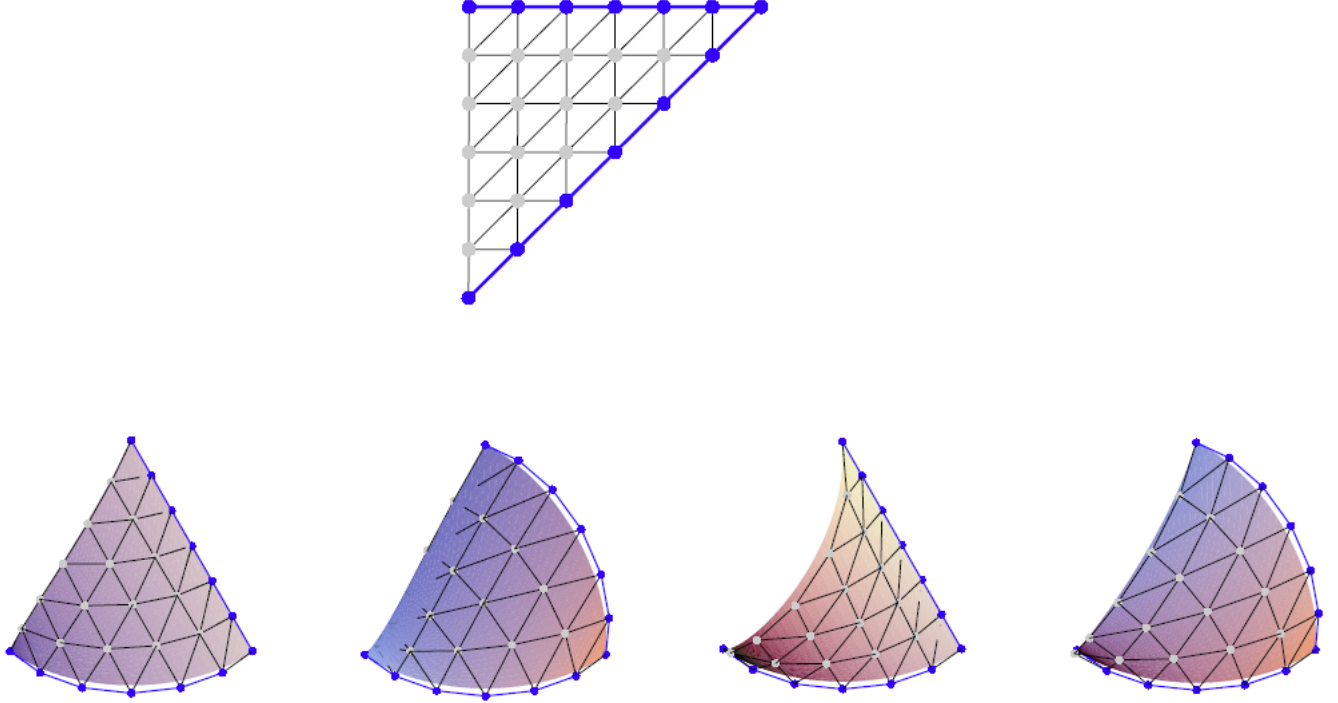


FIGURA 4. Cuatro superficies utilizando el teorema anterior. El primer par cumple la EDP general de segundo orden con $a=c=1$, $b=4$, y los últimos dos con los valores $a=c=1$, $b=-4$

Desafortunadamente, cuando consideramos el operador laplaciano y el isotrópico Φ , nos encontramos con que su determinante asociado, D_m^b , es nulo para algunos valores de m . Se obtiene un sistema incompatible si consideramos estas dos líneas de puntos de control en la frontera como información preestablecida y el resto de puntos de control como variables, por lo que ni el operador armónico ni el isotrópico determinan una superficie triangular Bézier en ese caso. Este hecho nos impide escribir dos curvas de contorno para construir una superficie EDP para este par de operadores, que son los más interesantes (ver Fig. 4).

Por eso consideramos para estos casos un conjunto similar de puntos de control como puntos conocidos, intentando que proporcionen información sobre la forma de las curvas de frontera de la superficie deseada. Consideramos dos líneas frontera de puntos de control con la excepción de algunos de ellos que serán reemplazados por sus puntos de control vecinos con el fin de hacer compatible el sistema asociado.

La elección de puntos cercanos en sustitución de los puntos frontera excluidos se debe al hecho de que están más cerca de la frontera, de esta forma proporcionan mejor información sobre la frontera de la superficie deseada.

Si estudiamos el operador laplaciano y calculamos el determinante de su correspondiente matriz de bandas de Toeplitz, $T_m(b) = (b_j)_{j=-1}^1$, con $b_{-1}, b_0 = -2$ y $b_1 = 2$, obtenemos que:

$$D_m^{(2,-2,1)} = 2^{\frac{m+1}{2}} e^{im\pi} \sin \frac{(m+1)\pi}{4}$$

Por lo tanto, $D_m(b) \neq 0$ excepto para $m = 3 + 4k$. Entonces encontraremos algunos determinantes nulos; para cada valor $m = 3 + 4k$ encontramos un sistema incompatible.

Lo convertiremos en un sistema compatible determinado considerando un conjunto diferente de puntos desconocidos en las columnas correspondientes. Es decir, si estuviéramos tratando con la columna $n - i$ y tuviera $m = 3 + 4k$ variables entonces consideraríamos el punto de borde, $P_{i,n-i,0}$, como una variable y en su lugar supondríamos su punto vecino, $P_{i-1,n-i,1}$ como información fijada.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea \vec{x} una superficie de Bézier triangular armónica con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$. Entonces, dados como puntos de control los de la primera fila $\{P_{0,n-i}\}_{i=0}^n$ los puntos del borde diagonal $\{P_{i,n-i,0}\}_{i=0}^n$ con $i \neq 4k$ e incluyendo los correspondientes puntos vecinos $\{P_{i-1,n-i,1}\}_{i=0}^n$ cuando $i = 4k$ la red de control triangular armónica queda totalmente determinada.*

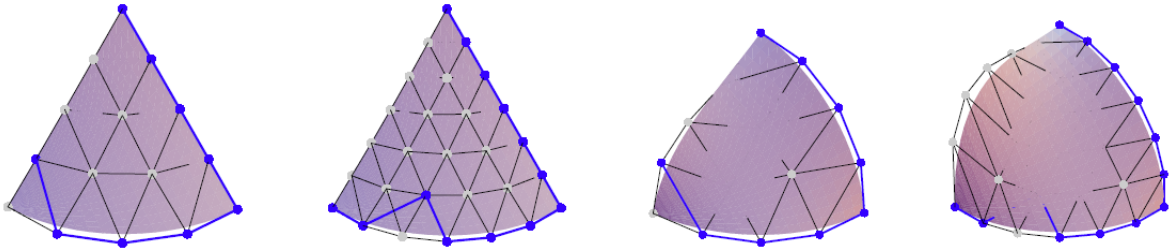


FIGURA 5. Cuatro superficies armónicas obtenidas con la Proposición anterior para $n = 4$ y $n = 6$. Se puede ver que el control sobre la forma de la superficie mejora si comparamos con el ejemplo correspondiente al Teorema anterior, en la Fig. 2.

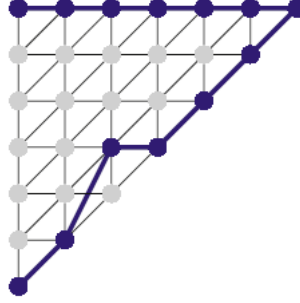
La figura 5, muestra para $n = 4$ y $n = 6$, algunas superficies armónicas obtenidas mediante la anterior proposición con los puntos azules dados. Estos ejemplos muestran como la proposición nos proporciona un mejor control de la forma de la superficie armónica que con el anterior Teorema. Esta mejora se obtiene porque los datos dados son los puntos de control de frontera los cuáles dan más información sobre la forma de la superficie.

Consideremos ahora el operador isotrópico, Φ , el determinante de la matriz de coeficientes:

$$D_m^{(1,-1,1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{im\pi} \sin \frac{(m+1)\pi}{3}$$

que es distinto de cero para $m \neq 2 + 3k$. Como antes, encontraremos algunos determinantes nulos; en cada valor $m = 2 + 3k$ encontraremos un sistema incompatible que se convertirá en un sistema compatible determinado al considerar la punto frontera, $P_{i,n-i,0}$ como variable y en su lugar su vecino $P_{i-1,n-i,1}$ como el punto prescrito, si en la columna $n - i$ hay $m = 2 + 3k$ variables.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea \vec{x} una superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$ satisfaciendo la EDP isotrópica $\Phi \vec{x} = 0$. Dados los puntos de frontera de la primera fila $\{P_{0,n-i,i}\}_{i=0}^n$, los puntos en la fila diagonal $\{P_{i,n-i,0}\}_{i=0}^n$ con $i \neq 3k$ e incluyendo el correspondiente punto cercano $\{P_{i-1,n-i,1}\}$ cuando $i = 3k$, la superficie EDP está completamente determinada.*



Se observa que describiendo dos filas de puntos de control en la frontera, la primera fila y la fila de borde diagonal, es posible construir una superficie EDP isotrópica cuadrática y una superficie armónica cúbica; para mayores grados se pueden obtener superficies isotrópicas o armónicas sustituyendo algunos de los puntos de control fronterizos por sus vecinos como se puede ver en las figuras 4 y 5.

Además, cabe remarcar que si fijamos la primera fila y columna de puntos de control, la superficie armónica asociada a estos puntos de control no existe. Sin embargo, por isotropía, sí podríamos obtener una superficie isotrópica cuadrática para esta frontera fijada.

PROPOSICIÓN 2.6. *Sea \vec{x} una superficie de Bézier triangular con superficie de control $\{P_I\}_{|I|=m}$ satisfaciendo la EDP isotrópica $\phi \vec{x} = 0$. Dados los puntos de frontera de la primera fila $\{P_{0,n-i,i}\}_{i=0}^n$ los puntos del borde diagonal $\{P_{i,n-i,0}\}_{i=0}^n$ con $i \neq 3k$ e incluyendo los puntos cercanos correspondientes $\{P_{i-1,n-i,1}\}$ cuando $i = 3k$ la red de control al completo queda determinada.*

Aunque las superficies armónicas no se pueden obtener solamente describiendo la primera fila y la primera columna de una red de control, el siguiente teorema (7) [2] nos permite generar otros tipos de superficies EDP (ver figura 2.4).

TEOREMA 2.7. *Sea \vec{x} una solución triangular de Bézier de $S\vec{x} = 0$, donde $S = a\frac{\partial^2}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + c\frac{\partial^2}{\partial v^2}$ con la red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$, entonces la red de control completa está determinada por la primera fila y la primera columna de la red de control $\{P_{0,j,n-j}\}_{j=0}^n$ y $\{P_{i,0,n-i}\}_{i=0}^n$ si $D_m^{(a,b,c)} \neq 0$ para $m = 1, \dots, n-1$ con*

$$D_m^b = \frac{(b+\sqrt{b^2-4ac})^{m+1} - (b-\sqrt{b^2-4ac})^{m+1}}{2^{m+1}\sqrt{b^2-4ac}}$$

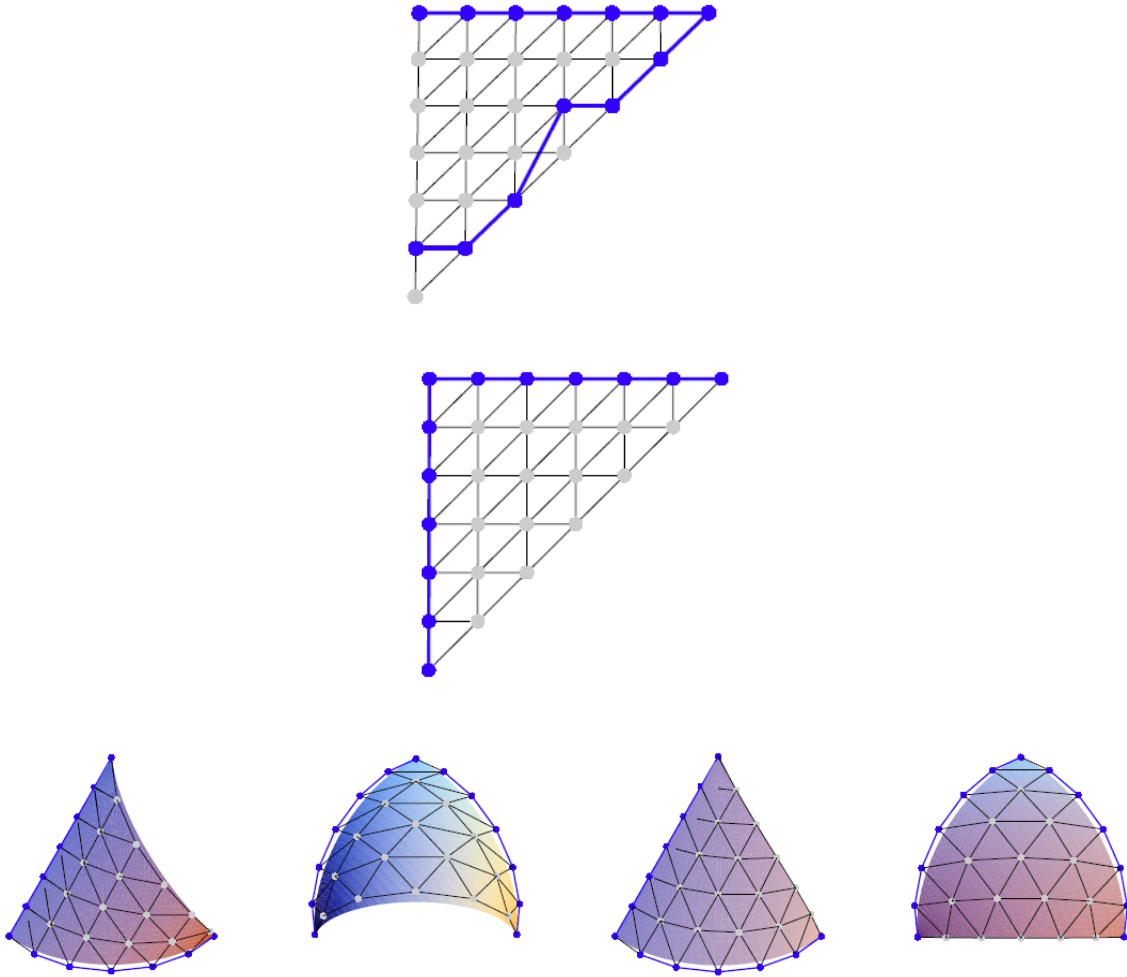


FIGURA 6. Cuatro superficies EDP obtenidas usando el anterior teorema. Las dos primeras cumplen la EDP general de segundo orden con coeficientes $a=c=1$, $b=4$, y las últimas 2 con los valores $a=c=1$, $b=-4$

3. EDP de cuarto orden: La condición biharmónica y el operador isotrópico

A continuación consideramos una EDP de cuarto orden que generaliza la ecuación biharmónica y un operador isotrópico. Vamos a ver dos métodos para generar superficies EDP, que nos permiten construir superficies Bézier triangulares biharmónicas, es decir, aquellos triángulos Bézier que verifican $\Delta^2 \vec{x} = 0$, donde Δ^2 es el operador biharmónico también conocido como bilaplaciano.

La ecuación biharmónica está asociada a una gran variedad de problemas físicos como el de la tensión en membranas elásticas y el estudio de esfuerzos y deformaciones en estructuras físicas. Hay muchos problemas mecánicos relacionados con la flexión de una placa rectangular con abrazadera elástica delgada, y todos pueden formularse en términos de una ecuación biharmónica bidimensional con valores prescritos de la función y su derivada normal en el límite. Por lo tanto, el problema de los límites biharmónicos también se conoce como el problema del plato llano.

Desde el punto de vista del diseño geométrico este operador se ha abierto camino en diversas áreas de aplicación, como el diseño de superficies, mallas geométricas o alisados.

Un resultado fundamental de la teoría de superficies mínimas establece que, bajo ciertas condiciones, dado el límite, existe una superficie mínima única prescrita por ese límite. Es de destacar que se puede encontrar un resultado similar para las superficies rectangulares de Bézier.

Por tanto, nuestra primera idea es estudiar si la condición biarmónica implica que los puntos de control interiores de una superficie triangular de Bézier pueden expresarse como una combinación lineal de puntos de control de contorno, como ocurre en el caso rectangular [7],[8]. Veremos cómo cambian las cosas para los parches triangulares de Bézier.

Además, discutimos el caso isotrópico; Los dos métodos de generación de superficies PDE que damos en esta sección nos permiten construir superficies EDP biarmónicas o isotrópicas a partir de la misma información prescrita.

3.1. Operador isotrópico.

Siguiendo una deducción análoga a la de los operadores de segundo orden, y siendo R un operador general de cuarto orden con coeficientes constantes; encontramos que los operadores isotrópicos son múltiplos del cuadrado de Φ

$$\begin{aligned} R\vec{x} &= a\vec{x}_{uuuu} + b\vec{x}_{uuuv} + c\vec{x}_{uuvv} + d\vec{x}_{uvvv} + e\vec{x}_{vvvv}, \\ \Phi^2\vec{x} &= \vec{x}_{uuuu} - 2\vec{x}_{uuuv} + 3\vec{x}_{uuvv} - 2\vec{x}_{uvvv} + \vec{x}_{vvvv} \end{aligned}$$

3.2. La EDP general de cuarto orden.

Consideremos el operador general

$$R = a\frac{\partial^4}{\partial u^4} + b\frac{\partial^4}{\partial u^3\partial v} + c\frac{\partial^4}{\partial u^2\partial v^2} + d\frac{\partial^4}{\partial u\partial v^3} + e\frac{\partial^4}{\partial v^4}$$

y ahora evaluamos sobre el parche de Bézier \vec{x} en términos de los puntos de control. Teniendo en cuenta la derivada de una superficie Bézier tenemos que:

$$R\vec{x}(u, v) = \sum_{|I|=n-4} Q_I B_I^{n-4}(u, v), \text{ donde}$$

$Q_I = n(n-1)(n-2)(n-3)(a\Delta^{4,0} + b\Delta^{3,1} + c\Delta^{2,2} + d\Delta^{1,3} + e\Delta^{0,4})P_I$ con $\Delta^{l,m}$ dado en la **Eq.3**

Debido al hecho de que $\{B_I^{n-4}(u, v)\}_{|I|=n-4}$ es una base, tenemos que $R\vec{x} = 0$ si y solo si $Q_I = 0$ para todo $|I| = n - 4$.

3.3. Construcción de la superficie triangular de Bézier a partir de cuatro líneas de puntos de control.

El siguiente resultado [2] indica que una superficie triangular de Bézier que cumple $R\vec{x}$ está completamente determinada por las primeras cuatro filas de puntos de control que comienzan desde un lado.

TEOREMA 2.8. *Sea \vec{x} una solución triangular de Bézier de grado $n \geq 4$ de $R\vec{x} = 0$, donde $R = a\frac{\partial^4}{\partial u^4} + b\frac{\partial^4}{\partial u^3\partial v} + c\frac{\partial^4}{\partial u^2\partial v^2} + d\frac{\partial^4}{\partial u\partial v^3} + e\frac{\partial^4}{\partial v^4}$, $a \neq 0$ con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$; entonces*

el conjunto de puntos de la red de control está determinado por cuatro filas de puntos de control $\{P_{i,j,n-i-j}\}_{j=0}^{n-i}$ donde $i = 0, 1, 2, 3$.

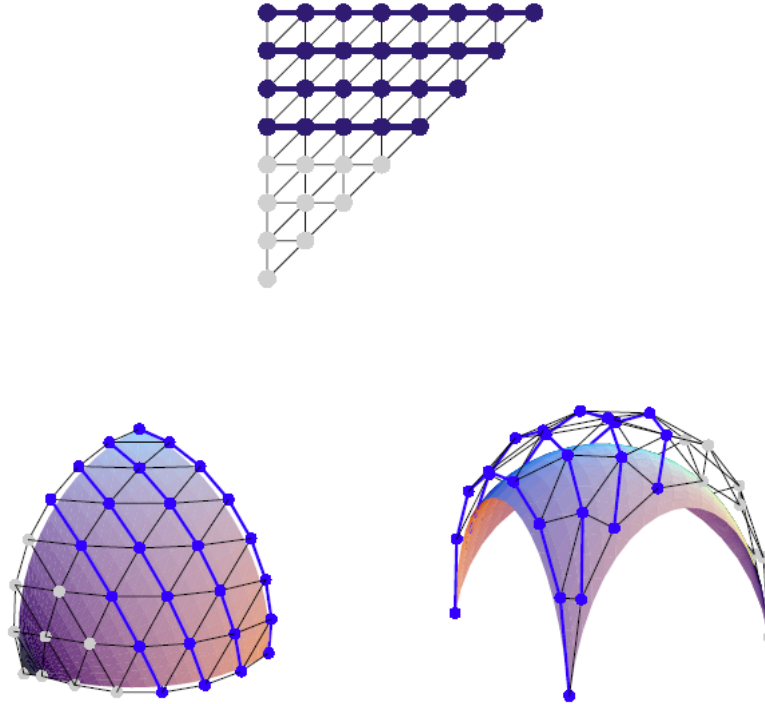


FIGURA 7. Un par de triángulos biharmónicos de Bézier a partir del teorema anterior⁸

Las figuras anteriores muestran algunas superficies biharmónicas mediante el teorema 8. Es importante remarcar la bondad de los resultados obtenidos en la Figura 9. Las formas parecen ser deseables desde el punto de vista del diseñador.

Algunas condiciones iniciales como las cuatro líneas de puntos de control elegidas como puntos conocidos, no dan buenas formas. Aquí, una de las tres esquinas de la superficie no está bajo control; en la siguiente subsección daremos una solución a este problema.

3.4. Construcción de superficies de Bézier triangulares a través de dos curvas de frontera y las derivadas normales a lo largo de ellas.

Como en el caso de segundo orden, consideramos el problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned}
 R\vec{x} &= 0 \\
 \begin{cases} \vec{x}(0, v) = \alpha(v) \\ \vec{x}_u(0, v) = \beta(v) \end{cases} \\
 \begin{cases} \vec{x}(u, 0) = \gamma(u) \\ \vec{x}_v(u, 0) = \delta(u) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Entonces, consideraremos la EDP dada por el operador R con condiciones de frontera de Cauchy. Describimos el valor de la solución a lo largo de dos curvas de borde, $\vec{x}(u, 0)$ y $\vec{x}(0, v)$, y sus derivadas parciales, $\vec{x}_u(u, 0)$ y $\vec{x}_v(0, v)$, que fijan los planos tangentes a la superficie a

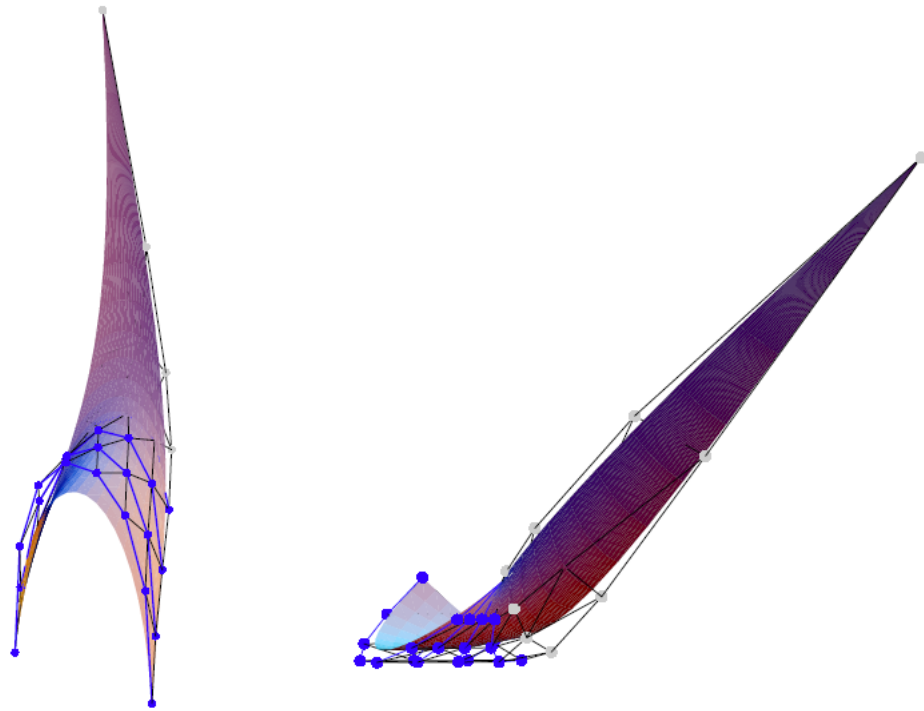


FIGURA 8. Otras dos superficies biharmónicas de Bézier obtenidos mediante el anterior teorema 8.

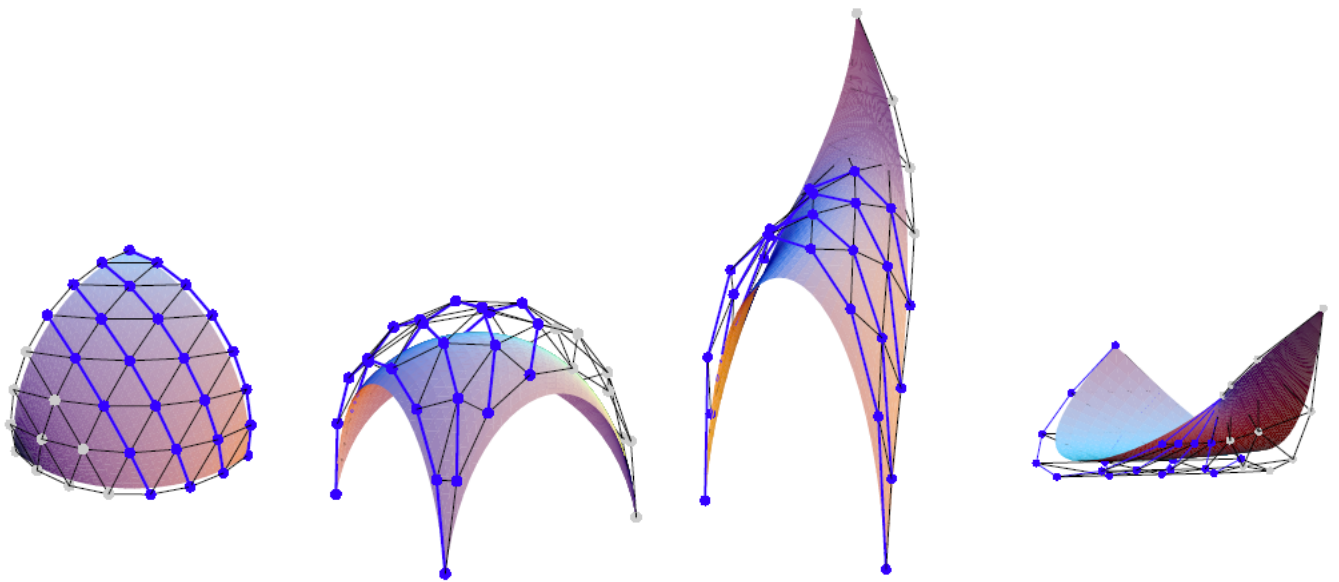


FIGURA 9. Cuatro superficies isotrópicas EDP obtenidas con el teorema 8. Se puede ver que los resultados son similares al caso biharmónico

lo largo de las curvas frontera dadas. Este problema se puede escribir, en términos de puntos de control de una superficie Bézier, y sería el siguiente:

Encuentrar la superficie EDP que queda completamente determinada por un par de líneas fronterizas de puntos de control y sus correspondientes líneas vecinas en la cuadrícula triangular. Veámoslo en el siguiente teorema demostrado en [2].

TEOREMA 2.9. *Sea \vec{x} una superficie de Bézier triangular de grado $n \geq 4$ de $R\vec{x} = 0$, donde $R = a\frac{\partial^4}{\partial u^4} + b\frac{\partial^4}{\partial u^3\partial v} + c\frac{\partial^4}{\partial u^2\partial v^2} + d\frac{\partial^4}{\partial u\partial v^3} + e\frac{\partial^4}{\partial v^4}$ con red de control $\{P_I\}_{i=0}^n$; entonces dados los puntos de la primera y segunda fila y primera y segunda columna $\{P_{0,n-i,0}\}_{i=0}^n$, $\{P_{0,n-i,0}\}_{i=0}^{n-1}$, $\{P_{i,0,n-i}\}_{i=0}^n$ y $\{P_{i,1,n-i-1}\}_{i=0}^{n-1}$. El conjunto de puntos de la red de control está totalmente determinado si $D_m^{(a,b,c,d,e)} \neq 0$ para $m = 1, \dots, n-3$ donde $D_m^{(a,b,c,d,e)}$ es el determinante de una matriz Toeplitz que puede ser calculada utilizando la fórmula de Widom, o a través de la fórmula de Trench, dependiendo de la multiplicidad de los ceros del polinomio $p(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$*

COROLARIO 2.10. *Sea \vec{x} una superficie de Bézier triangular biharmónica de grado $n \geq 4$ de $\Delta^2\vec{x} = 0$ con red de control $\{P_I\}_{i=0}^n$; entonces dados los puntos de la primera y segunda fila y los puntos de la primera y segunda columna, la red de control triangular queda totalmente determinada.*

COROLARIO 2.11. *Sea \vec{x} una solución triangular isotrópica de grado $n \geq 4$ de $\Phi^2\vec{x} = 0$ con red de control $\{P_I\}_{i=0}^n$; entonces dados los puntos de la primera y segunda fila y de la primera y segunda columna, la red de control completa está totalmente determinada.*

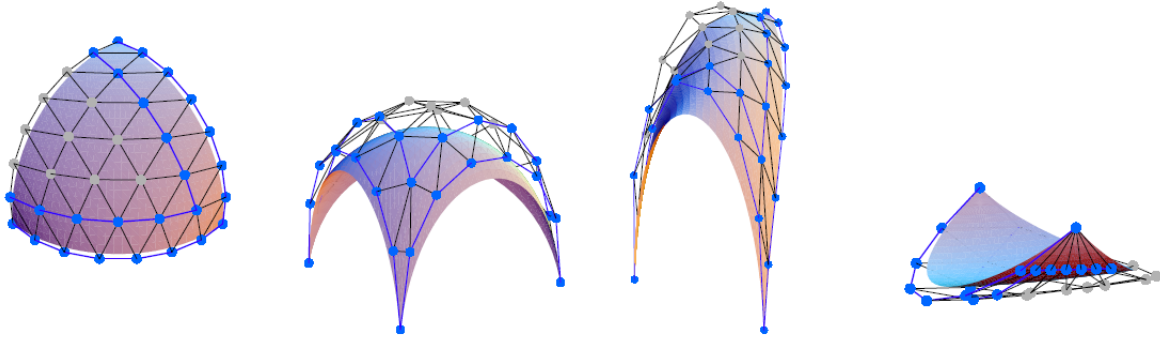


FIGURA 10. Cuatro triángulos biharmónicos de Bézier obtenidos a partir del primero de los últimos dos corolarios. Puede verse que el primer par de ejemplos se obtienen buenas formas como en el penúltimo Teorema. En los dos últimos podemos observar la mejora en comparación con la figura 8

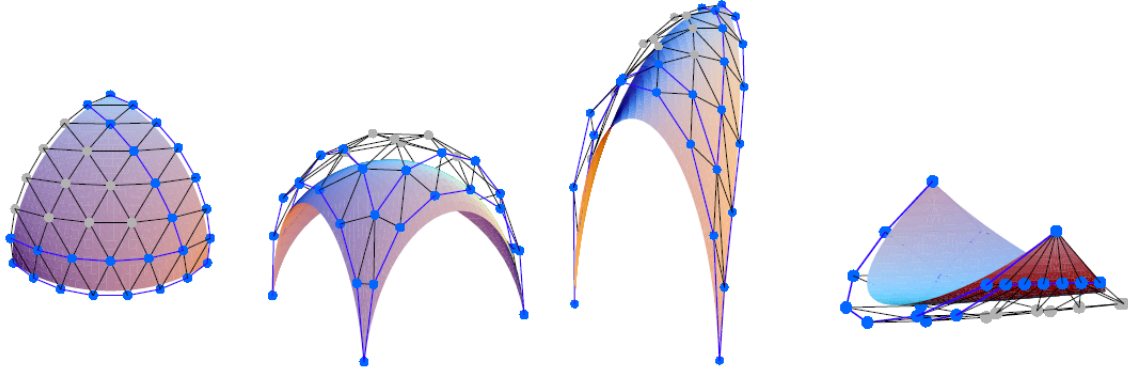


FIGURA 11. Cuatro superficies isotrópicas obtenidas a partir del segundo de los últimos dos corolarios

Superficies EDP de Bézier triangulares:

Una solución de la ecuación de orden 3

En 1989, Bloor y Wilson [1] dieron a este tipo de técnicas de modelado de superficies el nombre de "superficies EDP". Dado que la mayor parte de la información que define una superficie proviene de sus curvas de frontera, agregar algunas condiciones sobre estas fronteras a la EDP permite que el método basado en EDP genere y controle la forma de la superficie a través de muy pocos parámetros.

A continuación estudiaremos [3] una técnica de diseño de superficies para superficies de Bézier triangulares basada en la información de la fronteras que consiste en que a partir de una frontera dada, creamos una superficie como solución explícita a una EDP elegida apropiadamente.

Como hemos visto en el capítulo anterior [2] una superficie de Bézier triangular que satisface una EDP lineal se puede determinar dados algunos de sus puntos de control.

Para superficies de Bézier triangulares [2], nos acercamos al diseño de superficies resolviendo las EDP de segundo y cuarto orden. Aparecen varios métodos para el diseño de superficies EDP triangulares dados por varios conjuntos de puntos de control, el conjunto mínimo de éstos depende de la propia EDP, principalmente de su orden. En los casos particulares de las superficies armónicas y biarmónicas serán necesarias dos filas de puntos de control, puesto que una superficie triangular de Bézier queda determinada por la condición armónica que es una EDP de segundo orden, en el caso biarmónico, será necesaria una EDP de cuarto orden donde se podrá determinar el parche de Bézier mediante cuatro filas de puntos de control.

En general, en [8] se proporciona un método para generar superficies rectangulares de Bézier como solución a la EDP de cuarto orden elíptica a lo largo de la frontera, la ecuación de Euler-Lagrange junto con la función cuadrática general. Finalmente en [11] aparece una solución polinómica explícita de la EDP elíptica de cuarto orden.

1. La EDP de tercer orden

Los modelos matemáticos de ciencia e ingeniería habitualmente toman la forma de ecuaciones diferenciales, en muchos casos, estas ecuaciones diferenciales bajo estudio (armónicas, biarmónicas, ondas) nacen naturalmente desde un principio físico general. Sin embargo, como hasta donde sabemos, no existe un EDP de tercer orden proveniente de un problema modelado. Para obtenerla comencemos con un operador lineal [3] general de tercer orden con coeficientes constantes:

$$R\vec{x} = \alpha\vec{x}_{uuu} + \beta\vec{x}_{uuv} + \gamma\vec{x}_{uvv} + \delta\vec{x}_{vvv}$$

y la correspondiente EDP de tercer orden $R\vec{x} = 0$.

Sea $\vec{x}(u, v) = \vec{x}(u, v, 1 - u - v) = \sum_{|I|=n} P_I B_I^n(u, v)$ una superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$, donde $B_I^n(u, v)$ es un polinomio de Bernstein en dos variables $B_I^n(u, v) = \binom{n}{I} u^i v^j (1 - u - v)^k$ con $I = \{i, j, k\}$ y $|I| = n$.

La EDP lineal de tercer orden $\alpha\vec{x}_{uuu} + \beta\vec{x}_{uuv} + \gamma\vec{x}_{uvv} + \delta\vec{x}_{vvv} = 0$, en término de los puntos de control tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\alpha \frac{\partial^3}{\partial u^3} + \beta \frac{\partial^3}{\partial u^2 \partial v} + \gamma \frac{\partial^3}{\partial v^2 \partial u} + \delta \frac{\partial^3}{\partial v^3} \right) \vec{x}(u, v) = \\ &= n(n-1)(n-2) \sum_{|I|=n-3} (\alpha \Delta^{3,0} P_I + \beta \Delta^{2,1} P_I + \gamma \Delta^{1,2} P_I + \delta \Delta^{0,3} P_I) B_I^{n-3}(u, v) = \sum Q_I B_I^{n-3}(u, v) \end{aligned}$$

donde $\Delta^{l,m}$ hace referencia a las diferencias

$$\Delta^{l,m} P_{i,j,k} = \Delta^{l-1,m} \Delta^{1,0} P_{i,j,k} = \Delta^{l-1,m} (P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k+1})$$

$$\Delta^{l,m} P_{i,j,k} = \Delta^{l,m-1} \Delta^{0,1} P_{i,j,k} = \Delta^{l,m-1} (P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k+1})$$

Por eso $R\vec{x} = 0$ si y solo si $Q_I = 0$ para todo $|I| = n - 3$ si y solamente si

$$\begin{aligned} 0 &= (-\alpha - \beta - \gamma - \delta) P_{i-1,j-1,k+2} + (\beta + 2\gamma + 3\delta) P_{i-1,j,k+1} + (-\gamma - 3\delta) P_{i-1,j+1,k} + \delta P_{i-1,j+2,k-1} + \\ &+ (3\alpha + 2\beta + \gamma) P_{i,j-1,k+1} - 2(\beta + \gamma) P_{i,j,k} + \gamma P_{i,j+1,k-1} + (-3\alpha - \beta) P_{i+1,j-1,k} + \beta P_{i+1,j,k-1} + \\ &+ \alpha P_{i+2,j-1,k-1}. \end{aligned}$$

1.1. Formulación de la máscara. Consideremos los puntos de control de acuerdo al siguiente esquema, donde tenemos que obtener el valor de $P_{i,j,k}$ a partir de los puntos de la frontera que son conocidos y de los coeficientes que hemos considerado anteriormente. Este esquema, llamado máscara nos permite tener una representación visual de los puntos están involucrados a la hora de obtener $P_{i,j,k}$.

$$P_{i-1,j-1,k+2} P_{i-1,j,k+1} P_{i-1,j+1,k} P_{i-1,j+2,k-1}$$

$$P_{i,j-1,k+1} P_{i,j,k} P_{i,j+1,k-1}$$

$$P_{i+1,j-1,k} P_{i+1,j,k-1}$$

$$P_{i+2,j-1,k-1}$$

Si la frontera de la anterior red fuera conocida, entonces el punto interior $P_{i,j,k}$ podría ser determinado por:

$$\begin{aligned} P_{i,j,k} &= \frac{1}{2(\beta+\gamma)} ((-\alpha - \beta - \gamma - \delta) P_{i-1,j-1,k+2} + (\beta + 2\gamma + 3\delta) P_{i-1,j,k+1} + (-\gamma - 3\delta) P_{i-1,j+1,k} + \\ &+ \delta P_{i-1,j+2,k-1} + (3\alpha + 2\beta + \gamma) P_{i,j-1,k+1} + \gamma P_{i,j+1,k-1} + (-3\alpha - \beta) P_{i+1,j-1,k} + \beta P_{i+1,j,k-1} + \\ &+ \alpha P_{i+2,j-1,k-1}), \text{ para todo } |I| = n - 3. \end{aligned}$$

La forma de representar esta información es mediante una máscara:

$$P_{i,j,k} = \frac{1}{2(\beta+\gamma)} \times \begin{array}{cccc} & & -\alpha - \beta - \gamma - \delta & \beta + 2\gamma + 3\delta & -\gamma - 3\delta & \delta \\ & & & 3\alpha + 2\beta + \gamma & \star & \gamma \\ & & & & -3\alpha - \beta & \beta \\ & & & & & \alpha \end{array}$$

Esta máscara plantea la posibilidad de tener diferentes elecciones para los parámetros α, β, γ y δ , que, podría reducirse a solo tres parámetros, ya que la EDP lineal general de tercer orden podría dividirse por cualquiera de ellos. Posteriormente discutiremos la elección de los valores de α, β, γ y δ .

1.2. Máscara simétrica. De todas las posibles elecciones de parámetros α, β, γ y δ , analizaremos los casos simétricos de la máscara. Distinguimos dos niveles, simetría fuerte y débil.

Simetría débil. Estas son las condiciones que deben cumplir α, β, γ y δ para que la máscara sea simétrica.

$$\begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma - \delta = \delta = \alpha \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = \beta = -\gamma - 3\delta \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = \gamma = -3\alpha - \beta \end{cases}$$

Esto implica que $\alpha = \delta = -\frac{\beta+\gamma}{3}$, por tanto, el caso simétrico:

$$P_{i,j,k} = \begin{array}{cccc} -\frac{1}{6} & & & -\frac{1}{6} \\ & \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)} & & \\ & & \star & \\ & & & \frac{\gamma}{2(\beta+\gamma)} \\ & & & & -\frac{1}{6} \end{array}.$$

El correspondiente operador es: $S_{\beta,\gamma}\vec{x} = -\frac{1}{6}\vec{x}_{uuu} + \frac{1}{2}(\beta + \gamma)(\beta\vec{x}_{uuv} + \gamma\vec{x}_{uvv}) - \frac{1}{6}\vec{x}_{vvv}$.

Simetría fuerte. Si solo hay dos coeficientes diferentes, uno para los vértices y otro para el resto de posiciones de la máscara, entonces podemos hablar de simetría fuerte. Un caso particular de la máscara simétrica en la ecuación anterior se obtiene cuando $\beta = \gamma$. En ese caso el operador de tercer orden es:

$$S\vec{x} = -\frac{1}{6}\vec{x}_{uuu} + \frac{1}{4}(\vec{x}_{uuv} + \vec{x}_{uvv}) - \frac{1}{6}\vec{x}_{vvv}.$$

Por lo tanto, la EDP asociada, $S\vec{x} = 0$ no depende de β y su máscara asociada es:

$$P_{i,j,k} = \begin{array}{cccc} -\frac{1}{6} & & & -\frac{1}{6} \\ & \frac{1}{4} & & \\ & & \star & \\ & & & \frac{1}{4} \\ & & & & -\frac{1}{6} \end{array}$$

1.3. Operador isotrópico. Ahora, gracias al siguiente teorema [3] podemos tener un operador diferencial isotrópico de tercer orden que determinará una superficie EDP a partir de su frontera. La aplicación de criterios de simetría en la máscara asociada a la EDP lineal general de tercer orden conduce también a la isotropía.

TEOREMA 3.12. *Salvo un factor constante, el único operador isotrópico de tercer orden es S .*

2. Existencia de soluciones de Bézier para la EDP

Es importante trabajar con bases de Bernstein, ya que facilita la expresión de los resultados. Sea \vec{x} una función polinómica de grado $n \geq 3$ en términos de la base:

$$\vec{x}(u, v) = \sum_{k,l=0}^n \frac{a_{k,l}}{k!l!} u^k v^l$$

El grado total del polinomio ha de ser n , entonces $k + l \leq n$ y nos encontramos con algunos coeficientes, $a_{k,j} = 0$ si $k + l > n$. Además, si \vec{x} satisface la EDP de tercer orden $S\vec{x} = 0$, esta condición puede ser traducida en un sistema de ecuaciones lineales en términos de los coeficientes $\{a_{k,l}\}_{k,l=0}^n$.

$$(3) \quad -\frac{1}{6}a_{k+3,l} + \frac{1}{4}(a_{k+2,l+1} + a_{k+1,l+2}) - \frac{1}{6}a_{k,l+3} = 0,$$

$k, l = 0, \dots, n$ con $a_{k,l} = 0$, si $k + l > n$.

Para asegurar la solubilidad del sistema dato anteriormente 3, lo dividimos en $n - 2$ sistemas. Cada uno de ellos relaciona los coeficientes en una diagonal con $k + l = r$ para $r = 3, \dots, n$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}a_{r,0} + \frac{1}{4}(a_{r-1,1} + a_{r-2,2}) - \frac{1}{6}a_{r-3,3} = 0 \\ -\frac{1}{6}a_{r-1,1} + \frac{1}{4}(a_{r-2,2} + a_{r-3,3}) - \frac{1}{6}a_{r-3,3} = 0 \\ -\frac{1}{6}a_{r-2,2} + \frac{1}{4}(a_{r-3,3} + a_{r-4,4}) - \frac{1}{6}a_{r-5,5} = 0 \\ \dots \\ -\frac{1}{6}a_{3,r+l} + \frac{1}{4}(a_{2,r+2} + a_{1,r-1}) - \frac{1}{6}a_{0,4} = 0 \end{cases}$$

3. Solución explícita

Ahora, veamos como se deduce en [3] la solución explícita polinómica de la EDP de tercer orden $S\vec{x} = 0$ estos métodos son similares a los que se muestran en [11]

LEMA 3.13. *La solución del sistema lineal anterior en términos de las tres primeras filas de los coeficientes está dado por*

$$(4) \quad a_{k,l} = A_k a_{0,k+l} + B_k a_{1,k+l-1} + C_k a_{2,k+l-2}, \quad k > 2, k, l \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & a_{0,4} & \dots & a_{0,r} & \dots & a_{0,n} \\
 a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,r-1} & \dots & a_{1,n-1} & \\
 a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,r-2} & \dots & a_{2,n-2} & & \\
 a_{3,0} & a_{3,1} & \dots & a_{3,r-3} & & & & & \\
 \vdots & \vdots & & & & & & & \\
 a_{r-1,0} & a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,n-r+1} & & & & & \\
 a_{r,0} & \dots & & & & & & & \\
 \dots & & & & & & & & \\
 a_{n,0} & & & & & & & &
 \end{array}
 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{9}(2(-1)^n + 2^{3-n} - 2^n) \\
 \text{donde } B_n &= \frac{1}{9}(-5(-1)^n + 2^{2-n} + 2^n) \\
 C_n &= \frac{1}{9}(2(-1)^n - 2^{2-n} + 2^{n+1})
 \end{aligned}$$

Ahora, se intercambia la tercera fila de la columna de coeficientes. Viendo (4) que viene de la ecuación 4 podemos calcular así $a_{k+l,0}$,

$$a_{k+l,0} = A_{k+l}a_{0,k+l} + B_{k+l}a_{1,k+l-1} + C_{k+l}a_{2,k+l-2}$$

y entonces podemos encontrar el valor $a_{2,k+l-2} = \frac{a_{k+l} - A_{k+l}a_{0,k+l} - B_{k+l}a_{1,k+l-1}}{C_{k+l}}$ y lo sustituimos.

PROPOSICIÓN 3.14. *La solución del sistema lineal (3) para todo $k, l \in \mathbb{N}$ en términos de las dos primeras filas y la primera columna de coeficientes está dada por, $a_{k,l} = \frac{A_k C_{k+l} - A_{k+l} C_k}{C_{k+l}} a_{0,k+l} + \frac{B_k C_{k+l} - B_{k+l} C_k}{C_{k+l}} a_{1,k+l-1} + \frac{C_k}{C_{k+l}} a_{k+l,0}$ para todo $k, l > 1$*

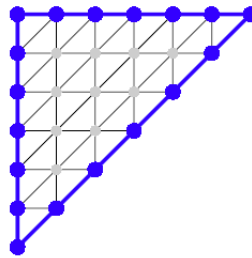


FIGURA 1. Dada la frontera de puntos de control, la red de control completa está determinado por la EDP de tercer orden asociada a la máscara simétrica.

4. Soluciones de Bézier para las EDP de tercer orden.

El siguiente teorema [3] muestra que la superficie EDP satisfaciendo

$$-\frac{1}{6}\vec{x}_{uuu} + \frac{1}{4}(\vec{x}_{uuv} + \vec{x}_{uvv}) - \frac{1}{6}\vec{x}_{vvv} = 0$$

puede ser determinada por los puntos de control de la figura 1.

TEOREMA 3.15. Sea $\vec{x}(u, v) = \sum_{|I|=n} P_I B_I^n(u, v)$ una superficie de Bézier triangular satisfaciendo la EDP de tercer orden $S\vec{x} = 0$. Entonces todos los puntos interiores están determinados por los puntos de control $P_{i,n-i,0}$, $P_{i,0,n-i}$ y $P_{0,i,n-i}$.

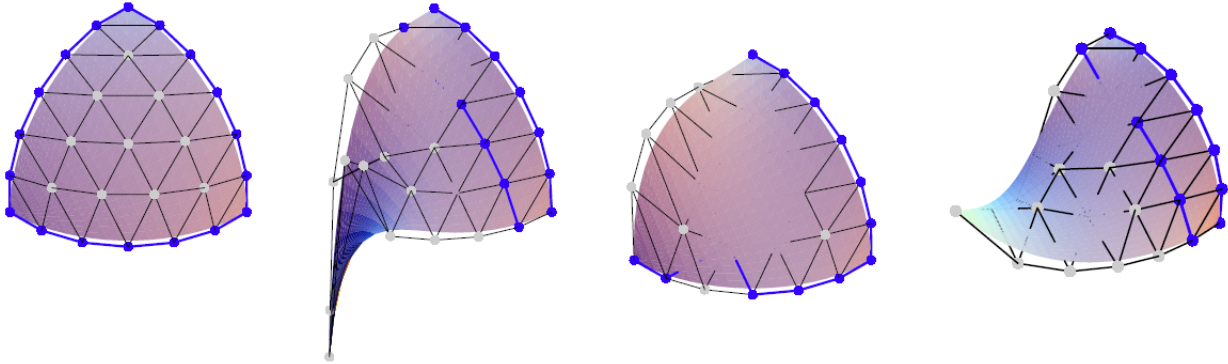


FIGURA 2. La figura de la izquierda satisface la EDP de tercer orden asociada a la máscara simétrica y al operador isotrópico y se obtiene para un borde prescrito. Las dos centrales son superficies de Bézier armónicas obtenidas después de fijar dos conjuntos diferentes de puntos de control. La figura de la derecha cumple con la EDP de segundo orden asociada al operador isotrópico.

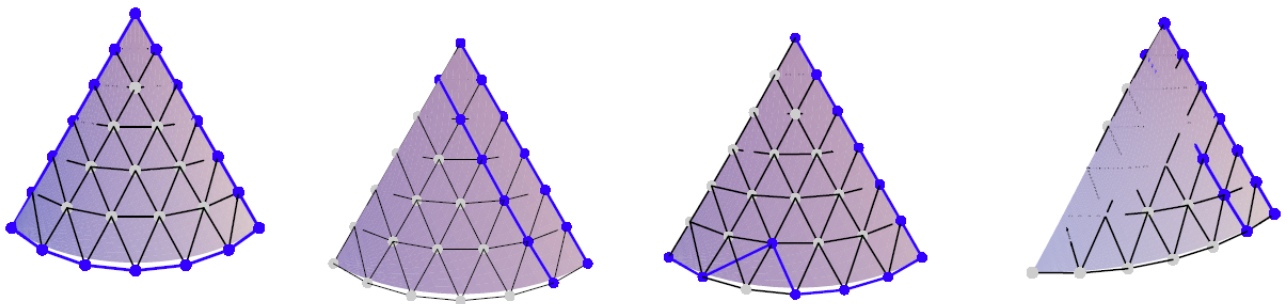


FIGURA 3. Como antes, la figura de la izquierda es una superficie EDP isotrópica, el par de superficies centrales son superficies armónicas obtenidas mediante métodos derivados en el capítulo anterior [2], y la figura de la derecha es una superficie EDP isotrópica, pero satisface el EDP de segundo orden.

Las figuras 2 y 3 nos permiten comparar los resultados obtenidos como solución a la EDP lineal de tercer orden con los resultados obtenidos para superficies armónicas y biarmónicas. En el capítulo anterior [2], donde nos explicaban cómo determinar superficies EDP con diferentes conjuntos de puntos de control y verificando una ecuación diferencial de segundo o cuarto orden siendo las condiciones armónicas y biarmónicas, casos particulares.

Vimos que, dadas dos líneas de puntos de control, una superficie triangular de Bézier queda totalmente determinada por la condición armónica o por otra EDP lineal de segundo

orden. Los puntos de control puede ser las primeras dos filas para cualquier EDP de segundo orden, pero no con dos líneas de puntos frontera.

La elección de dos curvas frontera es posible únicamente para algunas EDP lineales de segundo orden, para conseguir superficies armónicas pueden sustituirse algunos de los puntos de control de frontera por puntos cercanos. Podemos mejorar el control de la forma de la superficie EDP describiendo todas las curvas frontera. Las EDP lineales de cuarto orden determinan la superficie EDP triangular de Bézier dada por cuatro filas de puntos de control. Éstas pueden ser las primeras cuatro filas de los puntos de control, comenzando por uno de los lados, o las primeras dos filas y columnas si arreglamos los planos tangentes para la superficie a lo largo de dos fronteras dadas.

Las figuras que aparecen a continuación muestran superficies de grado $n = 7$ las cuales nos permiten comparar los resultados obtenidos por superficies biharmónicas con las superficies EDP obtenidas mediante el método EDP de tercer orden.

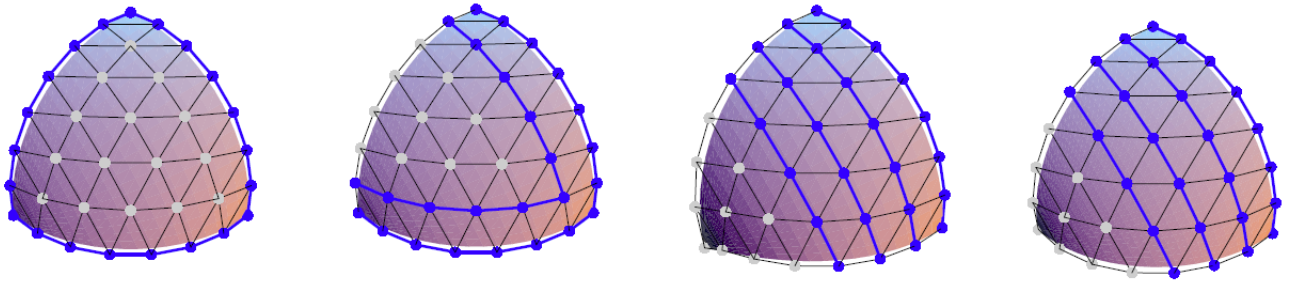


FIGURA 4. La figura de la izquierda satisface la PDE isotrópica de tercer orden. Las superficies en el medio son superficies de Bézier biharmónicas con las primeras cuatro líneas de puntos de control en la primera fijadas y dos curvas frontera y las derivadas normales a lo largo de ellas en la segunda superficie biharmónica. La última es una superficie EDP isotrópica que cumple la EDP isotrópica de cuarto orden.

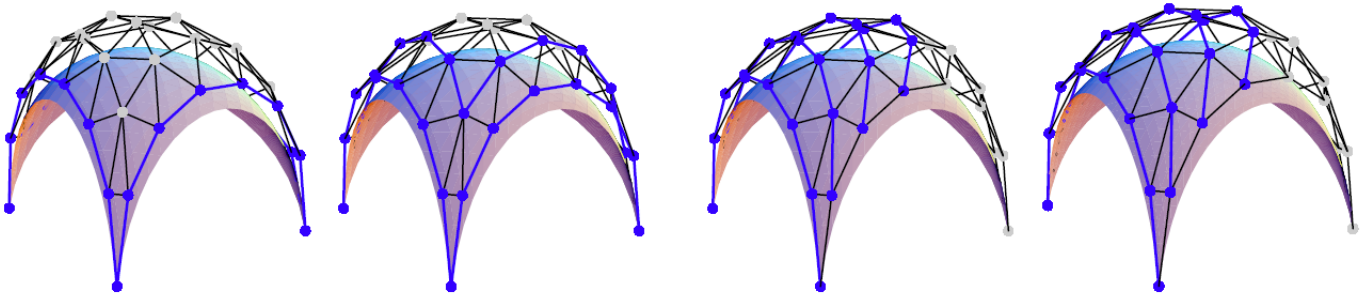


FIGURA 5. La figura de la izquierda es una superficie isotrópica que satisface la EDP de tercer orden. Las superficies del medio son superficies Bézier biharmónicas con dos conjuntos diferentes de puntos de control fijados. La última superficie es también una superficie EDP isotrópica, pero satisface la EDP isotrópica de cuarto orden. Todos los métodos de generación dan buenas formas para este ejemplo.

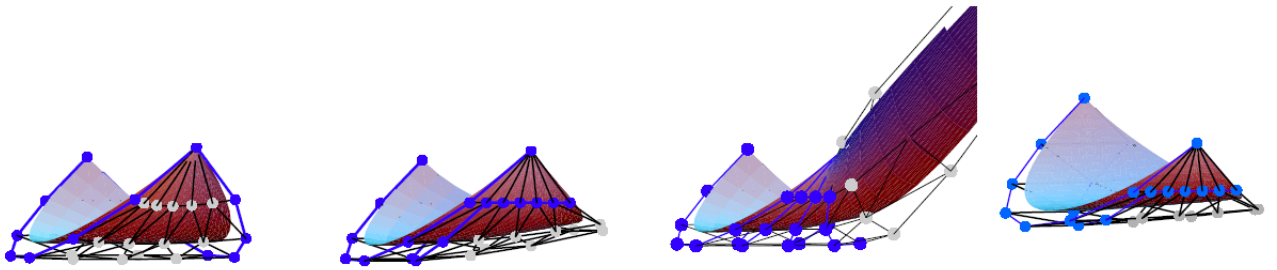


FIGURA 6. La figura de la izquierda satisface la EDP isotrópica de tercer orden. En el medio, un par de superficies Bézier biharmónicas. La superficie de la derecha satisface la PDE isotrópica de cuarto orden. El control de las curvas de contorno evita la pérdida de control que exhibe la tercera figura

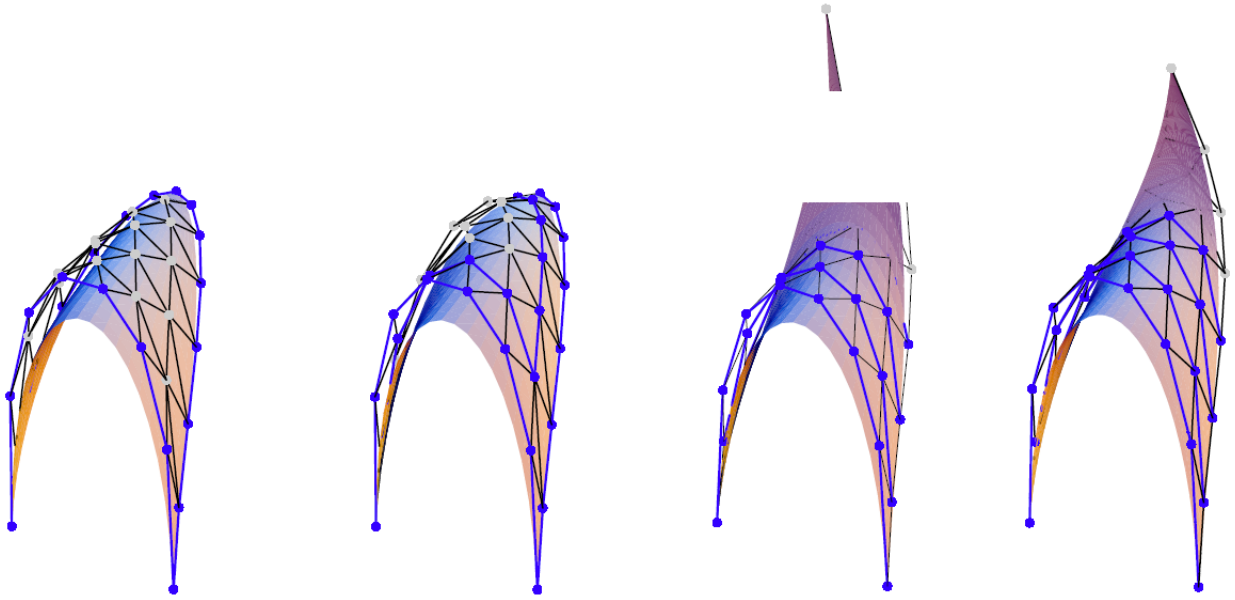


FIGURA 7. La figura de la izquierda satisface la EDP de tercer orden. El par en el medio son superficies Bézier biharmónicas. El último es un ejemplo isotrópico, satisface la PDE isotrópica de cuarto orden. Como antes, la prescripción de las curvas de contorno evita la pérdida de control cuando se prescribieron las primeras cuatro líneas de puntos de control.

Superficies EDP de Bézier rectangulares: La ecuación triarmónica en superficies rectangulares

1. Introducción

En el diseño geométrico asistido por ordenador (en adelante CAGD) y en el modelado geométrico, los polinomios paramétricos se han utilizado durante mucho tiempo para representar curvas y superficies de Bézier, éstas son populares debido a sus excelentes propiedades y algoritmos [14]. El uso de redes de control para construir superficies puede realizar mejor el diseño interactivo y dar a las superficies resultantes las características deseadas. Además, de acuerdo con los diferentes requisitos de diseño, construir superficies lisas a partir de diferentes condiciones de frontera se convierte en un tema interesante en CAGD.

La solución y el análisis de la EDP desempeñan un papel fundamental en la computación científica, el análisis numérico y la ingeniería. En los últimos años, se han utilizado EDPs geométricas para construir modelos geométricos [19]. Generalmente, este tipo de superficies tiene algunas propiedades óptimas globales, como el flujo de curvatura media, el flujo de Willmore, el flujo de variación de curvatura media mínima [19].

El uso de EDP para diseñar superficies (llamadas superficies EDP) se remonta al trabajo de Bloor y Wilson [1] y [20]. La idea principal es utilizar una ecuación biarmónica para resolver el problema de la combinación de superficies y el llenado de huecos. Sin embargo, la solución de EDP depende de la forma paramétrica específica. Hoy en día, los campos de aplicación de las superficies EDP incluyen el diseño asistido por ordenador, el diseño interactivo, el diseño paramétrico, la animación por ordenador, el análisis físico asistido por ordenador y la optimización del diseño. En los últimos años, muchas investigaciones se dedican a estudiar cómo construir las superficies EDP (especialmente superficies EDP de Bézier) a partir de las condiciones de frontera.

La ecuación armónica es útil para describir una serie de fenómenos físicos, particularmente aquellos que pueden estar relacionados con campos potenciales. Una aplicación importante de la ecuación armónica es generar superficies de área mínima. Cosin y Monterde [6, 10, 15] obtuvieron aproximaciones polinómicas a superficies mínimas de Bézier. Xu y Wang [21, 22] presentaron problemas relacionados con superficies mínimas polinómicas paramétricas de orden cinco y seis. En 2013 se presentó la aproximación de superficies mínimas con geodésicas

[23]. En 2015, Xu [24] junto con otros utilizaron las superficies de Bézier cuasi-armónicas para aproximarse a las superficies mínimas.

Las ecuaciones de sexto orden (especialmente las ecuaciones triharmónicas) están recibiendo mucha atención en los últimos años, aunque hay pocos problemas físicos que involucren tales ecuaciones en contraste con las ecuaciones armónicas y biharmónicas. En mecánica de fluidos, la ecuación triharmónica se utiliza para describir el flujo bidimensional de fluido altamente viscoso de rotación lenta en cavidades pequeñas [29].

En este artículo, vamos a revisar [4] la construcción de superficies de Bézier rectangulares $\vec{x}(u, v)$ que satisfagan la ecuación triharmónica:

$$(6) \quad \Delta^3(u, v) = \left(\frac{\partial^6}{\partial u^6} + 3 \frac{\partial^6}{\partial u^4 \partial v^2} + 3 \frac{\partial^6}{\partial u^2 \partial v^4} + 3 \frac{\partial^6}{\partial v^6} \right) \vec{x}(u, v) = 0$$

con condiciones de frontera, que se denomina superficie de Bézier triharmónica. La función cuadrática que se corresponde con la energía del gradiente laplaciano de $\vec{x}(u, v)$ es

$$T(\vec{x}(u, v)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\vec{x}_{uuu}|^2 + 3|\vec{x}_{uuv}|^2 + 3|\vec{x}_{uvv}|^2 + |\vec{x}_{vvv}|^2) dudv$$

donde $\Omega = [0, 1]^2$ es el dominio paramétrico de $\vec{x}(u, v)$. La ecuación de Euler-Lagrange para minimizar el funcional $T(\vec{x}(u, v))$ es exactamente la ecuación triarmónica $\Delta^3(u, v)$. Esto significa que la superficie de Bézier triharmónica con las condiciones de frontera conserva una mínima energía de gradiente laplaciano. A partir de las condiciones de frontera dada, y a través de la representación en bases de potencias, la superficie de Bézier triharmónica se puede determinar de forma única.

En la aplicación práctica, una EDP de sexto orden proporciona suficientes grados de libertad para acomodar condiciones de tangencia y de curvatura en la frontera, y ofrece más parámetros de control para servir como controles de usuario para la manipulación de formas de superficie [30]. Además, el control principal de la superficie se obtiene mediante la manipulación de las condiciones de frontera, lo que hace que tenga una buena aplicación en el diseño interactivo.

A continuación, presentamos la relación entre la representación de la base de potencias y la representación de la base de Bernstein de la superficie de Bézier. Después revisamos los resultados de la construcción de superficies armónicas, biharmónicas y tetraharmónicas. Posteriormente, presentamos las condiciones de los coeficientes de base de potencias cuando la superficie de Bézier satisface la ecuación triharmónica. Además, obtenemos la dimensión del espacio vectorial de soluciones polinómicas de grado n de la ecuación triharmónica. Tras esto, se proponen tres condiciones de frontera diferentes para construir superficies de Bézier triharmónicas, y también se presentan los algoritmos. Finalmente, proporcionamos algunos ejemplos representativos para la construcción de superficies Bézier triharmónicas para verificar nuestros resultados mediante diferentes condiciones de frontera.

1.1. Preliminares.

En esta sección, comenzamos con la relación entre la base de Bernstein y la base de potencias, y luego recordaremos algunas conclusiones relacionadas con las superficies Bézier armónicas, biarmónicas y tetraarmónicas.

Dada una superficie de Bézier producto tensorial \vec{x} de grado (n, n) .

$$(7) \quad \vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n B_I^n(u) B_J^n(v) P_{ij}, (u, v) \in \Omega = [0, 1]^2$$

donde $\{B_I^n(\cdot)\}_{i=0}^n$ es una base de polinomios de Bernstein de grado n , $\{P_{ij}^n\}_{i,j=0}^n$ son puntos de control. Para generar la superficie de Bézier anterior satisfaciendo la ecuación triarmónica $\Delta^3(u, v)$, la transformación entre la representación de la base de potencias y la representación de la base de Bernstein de $\vec{x}(u, v)$ es necesaria. Asumimos que la superficie de Bézier (5) representada en la base de potencias

$$(8) \quad \vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j$$

La relación entre las $\{P_{ij}\}_{i,j=0}^n$ de (7) y (8) es la siguiente:

$$(9) \quad a_{ij} = i!j! \binom{n}{i} \binom{n}{j} \Delta^{ij} P_{00}, \forall i, j$$

$$(10) \quad P_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \frac{\binom{i}{k} \binom{j}{l}}{\binom{n}{k} \binom{n}{l}} \frac{a_{kl}}{k!l!}, \forall i, j$$

Desde las superficies de fronteras $\vec{x}(u, v)$ en (7), $\vec{x}(0, v)$, $\vec{x}(u, 0)$, $\vec{x}(1, v)$ y $\vec{x}(u, 1)$ tendremos que:

$$(11) \quad a_{0j} = j! \left[\sum_{l=0}^j A_{l,j}^n P_{0l} \right], j = 0, \dots, n$$

$$(12) \quad a_{i0} = i! \left[\sum_{k=0}^i B_{k,i}^n P_{ko} \right], i = 0, \dots, n$$

$$(13) \quad \frac{a_{0j}}{0!} + \frac{a_{1j}}{1!} + \dots + \frac{a_{nj}}{n!} = j! \left[\sum_{l=0}^j A_{l,j}^n P_{nl} \right], j = 0, \dots, n$$

$$(14) \quad \frac{a_{i0}}{0!} + \frac{a_{i1}}{1!} + \dots + \frac{a_{in}}{n!} = i! \left[\sum_{k=0}^i B_{k,i}^n P_{kn} \right], i = 0, \dots, n$$

De acuerdo a las siguientes condiciones

$$\frac{\partial}{\partial u} \vec{x}(0, v), \frac{\partial^2}{\partial^2 u} \vec{x}(0, v), \frac{\partial^3}{\partial^3 u} \vec{x}(0, v), \frac{\partial}{\partial u} \vec{x}(1, v), \frac{\partial}{\partial v} \vec{x}(u, 0)$$

También logramos que

$$a_{1j} = nj! \left[\sum_{l=0}^j A_{i,j}^n \Delta^{10} P_{0l} \right], j = 0, \dots, n$$

$$a_{2j} = n(n-1)j! \left[\sum_{l=0}^j A_{i,j}^n \Delta^{20} P_{0l} \right], j = 0, \dots, n$$

$$a_{3j} = n(n-1)(n-2)j! \left[\sum_{l=0}^j A_{i,j}^n \Delta^{30} P_{0l} \right], j = 0, \dots, n$$

$$\frac{a_{ij}}{0!} + \dots + \frac{a_{nj}}{(n-1)!} = nj! \left[\sum_{l=0}^j A_{i,j}^n \nabla^{10} P_{nl} \right], i = 0, \dots, n$$

$$a_{i1} = ni! \left[\sum_{k=0}^i B_{i,k}^n \Delta^{01} P_{k0} \right], i = 0, \dots, n.$$

Donde $A_{i,j}^n = (-1)^{j-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{j-l}$, $B_{k,i}^n = (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k}$ ($i, j = 0 \dots, n$).

Las relaciones anteriores son métodos para la construcción de las superficies de Bézier armónicas, biharmónicas y tetraharmónicas han sido propuestos en los siguientes teoremas, veámoslo.

TEOREMA 4.16. *Sea $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{ij}$ una superficie armónica de Bézier de grado (n, n) con red de control $\{P_{ij}\}_{i,j=0}^n$.*

1. Si n es impar, los puntos de control de $\vec{x}(u, v)$ en las filas interiores $\{P_{ij}\}_{i=1,j=0}^{n-1,n}$ están determinadas por los puntos de control de la primera y última fila, $\{P_{0j}\}_{j=0}^n$ y $\{P_{nj}\}_{j=0}^n$
2. Si n es par, los puntos de control de $\vec{x}(u, v)$ en las filas interiores $\{P_{ij}\}_{i=1,j=0}^{n-1,n}$ y también los puntos P_{nn} están determinadas por los puntos de control de la primera y última fila, $\{P_{0j}\}_{j=0}^n$ y $\{P_{nj}\}_{j=0}^{n-1}$

TEOREMA 4.17. *Sea $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^{n,m} B_i^n(u) B_j^m(v) P_{ij}$ una superficie armónica de Bezier de grado (n, m) con red de control $\{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$. Entonces todos los puntos interiores de control $\{P_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n-1,m-1}$ están determinados por los puntos de control de la frontera, $\{P_{0j}\}_{j=0}^m$, $\{P_{nj}\}_{j=0}^m$, $\{P_{i0}\}_{i=0}^n$ y $\{P_{in}\}_{i=0}^n$.*

TEOREMA 4.18. Sea $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n B_i^n(u)B_j^m(v)P_{ij}$. Dados los puntos de control en la frontera y aquellos adyacentes a éstos, $\{P_{0j}\}_{j=0}^n, \{P_{1j}\}_{j=1}^{n-1}, \{P_{n-1j}\}_{j=1}^{n-1}, \{P_{nj}\}_{j=0}^n, \{P_{i0}\}_{i=0}^n, \{P_{i1}\}_{i=1}^{n-1}, \{P_{i,n-1}\}_{i=1}^{n-1}$ y $\{P_{i1}\}_{i=0}^n$, existe una única superficie de Bézier tetraharmónica $\vec{x}(u, v)$ que comple las condiciones de frontera dadas.

2. Condiciones para las superficies de Bézier triharmónicas

Veamos las las condiciones que se proponen en [4] para la representación en bases de potencias de un producto tensor de una superficie de Bézier $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j$ satisfaciendo la ecuación triharmónica.

LEMA 4.19. La superficie de Bézier $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j$ con grado (n, n) satisface la condición triharmónica $\Delta^3 \vec{x} = 0$, si y solo si $a_{i+1,j} + 3a_{i+4,j+2} + 3a_{i+2,j+4} + a_{i,j+6} = 0$, $0 \leq i, j \leq n$, donde $a_{ij} = 0$ para $i > n$ o $j > n$.

A continuación, para estudiar la dimensión del espacio vectorial de soluciones de las superficies de Bézier triharmónicas de un cierto grado, se transforma el problema de espacios vectoriales en un problema complejo.

LEMA 4.20. La dimensión del vector de soluciones del espacio vectorial de grado (n, n) ($n \geq 6$) de la ecuación triharmónica es:

1. $6n - 3$ si n es par,
2. $6n - 2$ si n es impar.

A continuación, veamos las condiciones de la superficie de Bézier triharmónicas para $a_{ij} = 0$

LEMA 4.21. Dada una superficie triharmónica de Bézier de grado (n, n) ($n \geq 6$), $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n u^i v^j$ tenemos los siguientes resultados:

1. Cuando $n = 2k$ ($k \geq 3$), $a_{ij} = 0$ si $i + j \geq 2k + 3$
2. Cuando $n = 2k + 1$ ($k \geq 3$), $a_{ij} = 0$ si $i + j \geq 2k + 5$ y $a_{i,2k+4-i} = 0$ si $i = 4, 6, 8, \dots, 2k$:

LEMA 4.22. Sea $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j$ una superficie triharmónica de grado (n, n) con $n \geq 6$, si los coeficientes $\{a_{0j}, a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{i0}, a_{1i}\}_{i,j=0}^n$ conocidos, entonces todos los $\{a_{ij}\}_{i=4,j=2}^n$

TEOREMA 4.23. Dada una superficie triharmónica polinómica $\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j$ de grado (n, n) con $n \geq 6$, si los coeficientes $\{a_{0j}, a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}, a_{5j}\}_{i,j=0}^n$ son conocidos, entonces el resto de coeficientes $\{a_{ij}\}_{i=6,j=0}^n$ pueden ser obtenidos de forma única.

1. Cuando $i = 6$, $a_{ij} = -3a_{4,j+2} - 3a_{2,j+4} - a_{0,j+6}$.

2. Si $i > 6$,

$$a_{2t,j} = \frac{(-1)^t}{2} [t(t-1)a_{4,2t+j-4} + 2t(t-2)a_{2,2t+j-2} + (t-1)(t-2)a_{0,2t+j}] \text{ con } i = 2t \ (t > 3, t \in \mathbb{Z}_+).$$

$$a_{2t+1,j} = \frac{(-1)^t}{2} [t(t-1)a_{5,2t+j-4} + 2t(t-2)a_{3,2t+j-2} + (t-1)(t-2)a_{1,2t+j}] \text{ con } i = 2t+1 \ (t > 3, t \in \mathbb{Z}_+).$$

3. Construcción de superficies triharmónicas de Bézier con diferentes condiciones de frontera

Las condiciones de frontera para la construcción de las superficies de Bézier triharmónicas

$\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n B_i^n(u)B_j^n(v)P_{ij}$, $(u, v) \in \Omega = [0, 1]^2$ que aparecen en [4] son las siguientes:

1. Condición de frontera Tipo 1: Cuatro fronteras de $\vec{x}(u, v)$ son conocidas junto con la condición C^1 a lo largo de dos fronteras de $\vec{x}(u, v)$ opuestas.
2. Condición de frontera Tipo 2: Cuatro fronteras de $\vec{x}(u, v)$ son conocidas junto con la condición C^2 aplicada sobre una de ellas.
3. Condición de frontera Tipo 3: las primeras cuatro filas y las primeras dos columnas de puntos de control relacionadas con dos fronteras adyacentes de $\vec{x}(u, v)$ son conocidas.

A continuación, se proponen métodos para generar superficies de Bézier triharmónicas satisfaciendo los tres tipos de condiciones de frontera basados en los resultados de la sección anterior. Inicialmente, consideraremos generar superficies triharmónicas mediante condiciones de frontera cerrada.

TEOREMA 4.24. *(Condición Tipo 1) Si el producto tensor de la superficie de Bézier de grado (n, n) ($n \geq 6$)*

$$\vec{x}(u, v) = \sum_{i,j=0}^n B_i^n(u)B_j^n(v)P_{ij}$$

es la ecuación de una superficie de Bézier triharmónica que satisface la ecuación:

$\Delta^3(u, v) = \left(\frac{\partial^6}{\partial u^6} + 3 \frac{\partial^6}{\partial u^4 \partial v^2} + 3 \frac{\partial^6}{\partial u^2 \partial v^4} + 3 \frac{\partial^6}{\partial v^6} \right) \vec{x}(u, v) = 0$ y las condiciones de frontera tipo 1 en (4.1), (4.4) o (4.6) entonces los restantes puntos de control de $\vec{x}(u, v)$ pueden ser obtenidos de la siguiente forma:

1. Si n es impar, entonces los puntos interiores de control $\{P_{ij}\}_{i=2, j=2}^{n-2, n-1}$ quedan determinados únicamente por $\{P_{0j}\}_{j=0}^n$, $\{P_{1j}\}_{j=0}^n$, $\{P_{n-1, j}\}_{j=0}^n$, $\{P_{nj}\}_{j=0}^n$, $\{P_{i0}\}_{i=2}^{n-2}$, $\{P_{in}\}_{i=2}^{n-2}$ en

$$\begin{array}{ccccc}
 P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,n-1} & P_{0,n} \\
 P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & P_{1,n-1} & P_{1,n} \\
 P_{2,0} & * & \dots & * & P_{2,n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 P_{n-2,0} & * & \dots & * & P_{n-2,n} \\
 P_{n-1,0} & P_{n-1,1} & \dots & P_{n-1,n-1} & P_{n-1,n} \\
 P_{n,0} & P_{n,1} & \dots & P_{n,n-1} & P_{n,n}
 \end{array}$$

2. Si n es par, entonces los puntos interiores de control $\{P_{ij}\}_{i=2,j=2}^{n-2,n-1}$ y P_{1n} están determinados de manera única por $\{P_{0j}\}_{j=0}^n, \{P_{1j}\}_{j=0}^{n-1}, \{P_{n-1,j}\}_{j=0}^n, \{P_{nj}\}_{j=0}^n, \{P_{i0}\}_{i=2}^{n-2}, \{P_{in}\}_{i=2}^{n-2}$ en

$$\begin{array}{ccccc}
 P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,n-1} & P_{0,n} \\
 P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & P_{1,n-1} & * \\
 P_{2,0} & * & \dots & * & P_{2,n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 P_{n-2,0} & * & \dots & * & P_{n-2,n} \\
 P_{n-1,0} & P_{n-1,1} & \dots & P_{n-1,n-1} & P_{n-1,n} \\
 P_{n,0} & P_{n,1} & \dots & P_{n,n-1} & P_{n,n}
 \end{array}$$

3. Si n es impar, entonces los puntos interiores de control $\{P_{ij}\}_{i=2,j=2}^{n-2,n-1}$ y $P_{1,n-1}$ están determinados de manera única por $\{P_{0j}\}_{j=0}^n, \{P_{1j}\}_{j=0,j \neq n-1}^{n-1}, \{P_{n-1,j}\}_{j=0}^n, \{P_{nj}\}_{j=0}^n, \{P_{i0}\}_{i=2}^{n-2}, \{P_{in}\}_{i=2}^{n-2}$ en

$$\begin{array}{ccccc}
 P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,n-1} & P_{0,n} \\
 P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & * & P_{1,n} \\
 P_{2,0} & * & \dots & * & P_{2,n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 P_{n-2,0} & * & \dots & * & P_{n-2,n} \\
 P_{n-1,0} & P_{n-1,1} & \dots & P_{n-1,n-1} & P_{n-1,n} \\
 P_{n,0} & P_{n,1} & \dots & P_{n,n-1} & P_{n,n}
 \end{array}$$

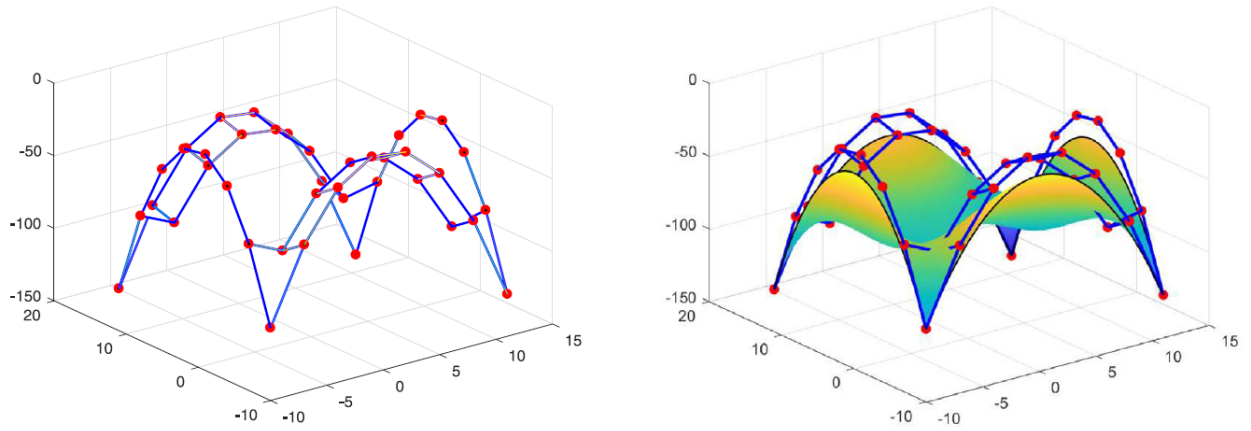


FIGURA 1. A la izquierda vemos la frontera dada, y a la derecha la superficie de Bézier triarmónica resultante con las condiciones Tipo 1 de frontera para $n = 7$

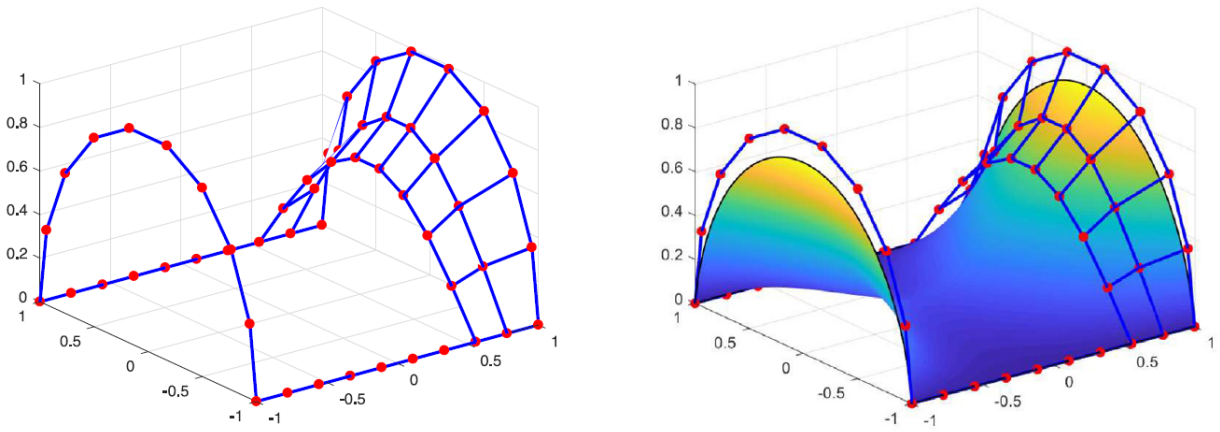


FIGURA 2. A la izquierda vemos la frontera dada, y a la derecha la superficie de Bézier triarmónica resultante con las condiciones Tipo 2 de frontera para $n = 9$

Superficies EDP triangulares:

Una ecuación de orden seis.

1. La EDP de orden 6

El uso de la EDP de orden seis es beneficiosa en el desarrollo de superficies porque nos permite fijar tanto las tres fronteras de la superficie como los tres planos tangentes a las fronteras. Ésto nos otorga una superficie con condiciones C^1 sobre la frontera que nos permiten controlar la forma de la superficie cerca de ella, lo cual puede ser muy útil en diferentes situaciones como la ingeniería o en problemas de diseño asistido por ordenador.

Los modelos matemáticos aplicados en ciencia e ingeniería son tomados habitualmente de ecuaciones diferenciales, en muchos casos éstas ecuaciones bajo estudio surgen naturalmente de principios físicos. Sin embargo, la EDP de orden seis no proviene de ningún problema físico ni modelizado, por lo que vamos a comenzar con el operador lineal de orden seis con coeficientes constantes:

$$(15) \quad R\vec{x} = a\vec{x}_{uuuuuu} + b\vec{x}_{uuuuuv} + c\vec{x}_{uuuuuv} + d\vec{x}_{uuuvvv} + e\vec{x}_{uuuvvv} + f\vec{x}_{uvvvvv} + g\vec{x}_{vvvvvv}$$

y la correspondiente EDP de orden 6, $R\vec{x} = 0$

Sea $\vec{x}(u, v) = \vec{x}(u, v, 1 - u - v) = \sum_{|I|=n} P_I B_I^n(u, v)$ una superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$, donde $B_I^n(u, v)$ es un polinomio de Bernstein en dos variables

$$B_I^n(u, v) = \binom{n}{I} u^i v^j (1 - u - v)^k \text{ con } I = \{i, j, k\} \text{ y } |I| = n.$$

La EDP lineal de orden seis

$$a\vec{x}_{uuuuuu} + b\vec{x}_{uuuuuv} + c\vec{x}_{uuuuuv} + d\vec{x}_{uuuvvv} + e\vec{x}_{uuuvvv} + f\vec{x}_{uvvvvv} + g\vec{x}_{vvvvvv} = 0,$$

en términos de los puntos de control tenemos:

$$0 = \left(a \frac{\partial^6}{\partial u^6} + b \frac{\partial^6}{\partial u^5 \partial v} + c \frac{\partial^6}{\partial u^4 \partial v^2} + d \frac{\partial^6}{\partial u^3 \partial v^3} + e \frac{\partial^6}{\partial u^2 \partial v^4} + f \frac{\partial^6}{\partial u \partial v^5} + g \frac{\partial^6}{\partial v^6} \right) \vec{x}(u, v) =$$

$$= \frac{n!}{n-4!} \sum_{|I|=n-6} (a\Delta^{6,0} P_I) + b\Delta^{5,1} P_I + c\Delta^{4,2} P_I + d\Delta^{3,3} P_I + e\Delta^{2,4} P_I + f\Delta^{1,5} P_I + g\Delta^{0,6} P_I) B_I^{n-6}(u, v) =$$

$$\sum Q_I B_I^{n-6}(u, v)$$

donde $\Delta^{l,m}$ hace referencia a las diferencias

$$\Delta^{l,m} P_{i,j,k} = \Delta^{l-1,m} \Delta^{1,0} P_{i,j,k} = \Delta^{l-1,m} (P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k+1})$$

$$\Delta^{l,m} P_{i,j,k} = \Delta^{l,m-1} \Delta^{0,1} P_{i,j,k} = \Delta^{l,m-1} (P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k+1})$$

De las múltiples elecciones de parámetros a, b, c, d, e, f, g a continuación vamos a estudiar los casos que cumplen en primera instancia que son simétricos y posteriormente los casos que también son isotrópicos.

1.1. El operador triharmónico. A continuación, vamos a estudiar el operador triharmónico para superficies triangulares, esta configuración es beneficiosa con respecto a la estudiada en el capítulo anterior [4] donde se trabajaban con superficies rectangulares. En este capítulo, trabajando con superficies EDP triangulares vamos a poder fijar tanto las tres fronteras como los tres planos tangentes a lo largo de las fronteras obteniendo así una configuración simétrica, mientras que en el caso rectangular [4] se plantean soluciones asimétricas, como por ejemplo fijar las cuatro fronteras y únicamente dos tangentes a lo largo de estas o fijar dos filas de puntos en un lado de la superficie y cuatro en otro lado contigua a esta. Salvo casos muy particulares, es preferible fijar tanto las fronteras como las tangentes a estas, ya que de esta forma tenemos la ventaja de la simetría.

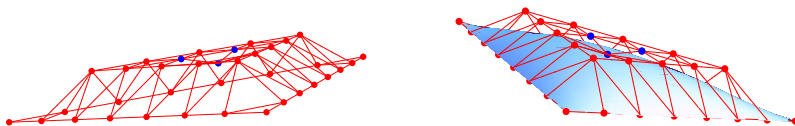


FIGURA 1. A la izquierda, aparecen los puntos rojos hacen referencia a las condiciones de frontera dadas. Los azules, los obtenidos a partir de la frontera. A la derecha vemos la superficie que obtenemos a partir del operador triharmónico para $n=7$.

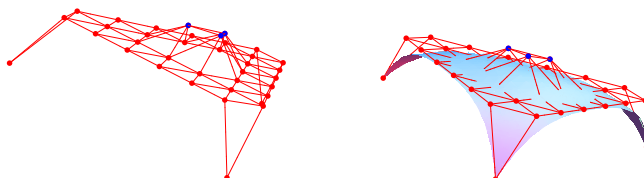


FIGURA 2. A la izquierda vemos que una de las fronteras se ha elevado con respecto al caso anterior. A la derecha vemos la superficie que obtenemos a partir del operador triharmónico para $n=7$.



FIGURA 3. A la izquierda vemos que elevamos los puntos, tanto en la frontera como en la fila siguiente. A la derecha vemos la superficie que obtenemos a partir del operador triharmónico para $n=8$.

Pero lamentablemente, nuestro operador triarmónico no es isotrópico. Debido a la falta de isotropía, vamos a ver cómo aparecen los operadores isotrópicos de orden seis.

1.2. Operador isotrópico de orden 6. Ahora, vamos a explicar la obtención del operador isotrópico de orden seis que determinará una superficie EDP triangular de Bézier a partir de las condiciones de frontera. Hemos aplicado criterios de simetría para generar para la EDP lineal general de tercer orden de la misma forma que se realizó en el capítulo anterior.

TEOREMA 5.25. *El operador isotrópico de orden seis es S y depende de dos parámetros.*

(16)

$$S_{g,d}\vec{x} = \left(g\vec{x}_{uuuuuu} - 3g\vec{x}_{uuuuuv} - d\frac{1}{2}\vec{x}_{uuuuuv} + g\frac{5}{2}\vec{x}_{uuuuuv} - d\frac{1}{2}\vec{x}_{uuuvvv} - 3g\vec{x}_{uuuvvv} + g\vec{x}_{vvvvvv} \right) (u, v)$$

Demostración. Consideremos el operador lineal de orden seis con coeficientes constantes, definido como R .

$R\vec{x} = a\vec{x}_{uuuuuu} + b\vec{x}_{uuuuuv} + c\vec{x}_{uuuuuv} + d\vec{x}_{uuuvvv} + e\vec{x}_{uuuvvv} + f\vec{x}_{uuuvvv} + g\vec{x}_{vvvvvv}$
y sea $\vec{x} = \sum_{|I|=n} P_I B_I^n(u, v)$ una superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_I\}_{|I|=n}$.

Consideramos ahora una permutación σ para los índices de la red de control y denotamos ahora por \vec{x}_σ la superficie triangular de Bézier con red de control $\{P_{\sigma(I)}\}_{|I|=n}$.

Dada la permutación σ existe una aplicación h_σ que cumple que $\vec{x}_\sigma(u, v) = \vec{x}(h_\sigma(u, v))$.

Estamos buscando un operador R que verifique que: $(R\vec{x}_\sigma)(u, v) = (R\vec{x})(h_\sigma(u, v))$ para cualquier permutación σ de índices.

Para comenzar vamos a tomar la permutación $\sigma(i, j, k) = (j, k, i)$, por lo que la aplicación asociada es $h_\sigma(u, v) = (v, 1 - u - v)$, por tanto $B_{i,j,k}^n(u, v) = B_{j,k,i}^n(v, 1 - u - v)$.

Veamos como queda bajo la permutación σ , el operador R ;

$$(17) \quad (R\vec{x})(u, v) = (a\vec{x}^{(6,0)} + b\vec{x}^{(5,1)} + c\vec{x}^{(4,2)} + d\vec{x}^{(3,3)} + e\vec{x}^{(2,4)} + f\vec{x}^{(1,5)} + g\vec{x}^{(0,6)}) (u, v)$$

se transforma en

$$(R\vec{x}_\sigma)(u, v) = g\vec{x}^{(6,0)}h_\sigma(u, v) + (-f - 6g)\vec{x}^{(5,1)}h_\sigma(u, v) + (e + 5f + 15g)\vec{x}^{(4,2)}h_\sigma(u, v) + (-d - 4e - 10f - 20g)\vec{x}^{(3,3)}h_\sigma(u, v) + (c + 3d + 6e + 10f + 15g)\vec{x}^{(2,4)}h_\sigma(u, v) + (-b - 2c - 3d - 4e - 5f - 6g)\vec{x}^{(1,5)}h_\sigma(u, v) + (a + b + c + d + e + f + g)\vec{x}^{(0,6)}h_\sigma(u, v).$$

Análogamente, si tomamos la permutación $\tau(i, j, k) = (j, i, k)$ y la aplicación asociada $h_\tau(u, v) = (v, u)$ obtenemos

$$(R\vec{x}_\tau)h_\tau(u, v) = g\vec{x}^{(6,0)}h_\tau(u, v) + f\vec{x}^{(5,1)}h_\tau(u, v) + e\vec{x}^{(4,2)}h_\tau(u, v) + d\vec{x}^{(3,3)}h_\tau(u, v) + c\vec{x}^{(2,4)}h_\tau(u, v) + b\vec{x}^{(1,5)}h_\tau(u, v) + a\vec{x}^{(0,6)}h_\tau(u, v).$$

Por tanto, nuestro operador isotrópico debe cumplir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = g = g \\ b = -f - 6g = f \\ c = e + 5f + 15g = e \\ d = -d - 4e - 10f - 20g = d \\ e = c + 3d + 6e + 10f + 15g = c \\ f = -b - 2c - 3d - 4e - 5f - 6g = b \\ g = a + b + c + d + e + f + g = a \end{array} \right.$$

Resolviendo, nos queda

$$R\vec{x}_{d,g}(u, v) = \left(g\vec{x}^{(6,0)} - 3g\vec{x}^{(5,1)} - \frac{1}{2}d\vec{x}^{(4,2)} + \frac{5}{2}g\vec{x}^{(3,3)} - \frac{1}{2}d\vec{x}^{(2,4)} - 3g\vec{x}^{(1,5)} + g\vec{x}^{(0,6)} \right) (u, v)$$

Dado que este par de permutaciones genera todo el grupo de permutaciones obtenemos que $(R_{d,g}\vec{x}_\tau)(u, v) = (R_{d,g}\vec{x})(h_\sigma(u, v))$, para cualquier permutación $\sigma \in S_6$. \square

Lamentablemente no existe un único operador isotrópico de orden seis, sino que aparecen dos parámetros en él. Además, desgraciadamente el operador triarmónico 6 no es isotrópico.

Si tomamos el valor $g = d = 1$ obtenemos:

$$S\vec{x} = \left(\vec{x}_{uuuuuu} - 3\vec{x}_{uuuuuv} - \frac{1}{2}\vec{x}_{uuuuuv} + \frac{5}{2}\vec{x}_{uuuvvv} - \frac{1}{2}\vec{x}_{uuuvvv} - 3\vec{x}_{uvvvvv} + \vec{x}_{vvvvvv} \right) (u, v).$$

Vamos a construir una superficie a partir de las fronteras y de las filas de puntos vecinas, es decir, fijaremos tanto la frontera como el plano tangente a lo largo de la misma. Veamos algunas construcciones de superficies de Bézier triarmónicas con $n=7$. Veamos los ejemplos con las fronteras en las figuras 1, 2, 3.

A continuación, vamos a repetir el proceso con el operador isotrópico de orden seis que hemos obtenido anteriormente, utilizando las mismas las fronteras que aparecen en las figuras 1, 2, 3 para el caso $n=7$ y $n=8$.

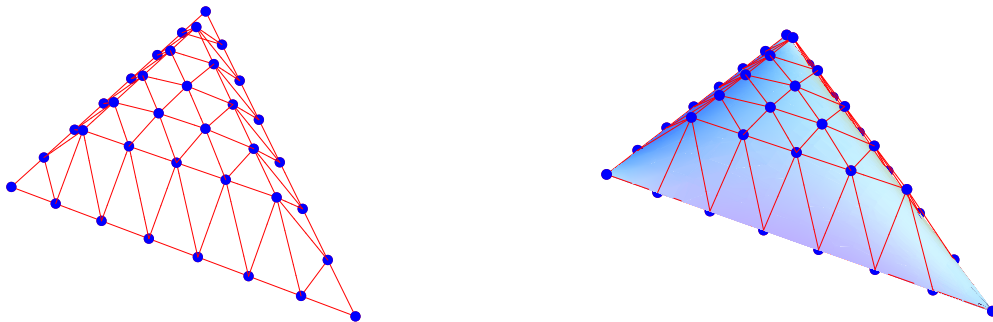


FIGURA 4. Vemos la superficie obtenida con el operador isotrópico con la misma disposición de puntos que la figura 1 para $n=7$.

2. Comparación de métodos

Tras obtener superficies con tanto con el operador triarmónico como con el operador isotrópico de orden seis, a continuación, vamos a construir algunos ejemplos de superficies tanto armónicas como biarmónicas fijando diferentes fronteras, siguiendo el camino que marca el teorema 9 [3].

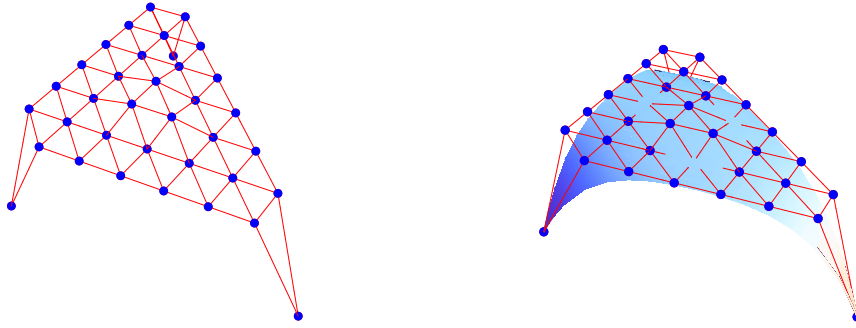


FIGURA 5. Vemos la superficie obtenida con el operador isotrópico con la misma disposición de puntos que la figura 2 para $n=7$.

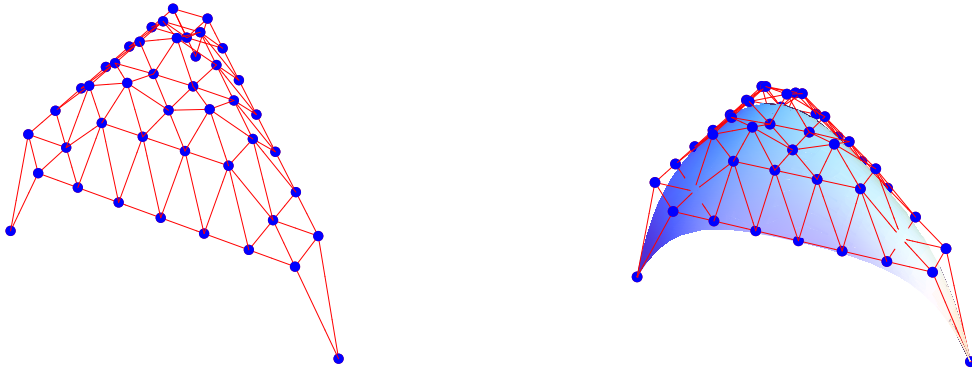


FIGURA 6. Vemos la superficie obtenida con el operador isotrópico con la misma disposición de puntos que en la figura 3 para $n=8$.

Comenzamos en la figura 7 obteniendo una superficie triangular utilizando el operador armónico de orden dos fijando dos fronteras. Podemos ver que se hace imposible controlar a la superficie

Posteriormente, en las figuras 8 y 9 mostramos dos casos biarmónicos donde fijamos dos de sus fronteras y las dos filas vecinas a éstas. Para comenzar vamos a ver el ejemplo donde partimos de dos fronteras y sus filas vecinas, en este caso, y aunque las superficies obtenidas se encuentran un poco más acotadas que en caso del la superficies obtenidas a través del operador armónico tampoco obtenemos unos resultados óptimos ya que el lado de la superficie triangular sobre la que no hemos puesto ninguna condición no está bajo control.

En el último ejemplo que vemos (figura 10), obtenemos una superficie utilizando el operador isotrópico S_3 fijando cada una de las tres fronteras En este caso podemos observar que la superficie obtenida está más controlada que las anteriores

También mostramos una superficie triangular fijando únicamente las fronteras de la misma utilizando el operador S_3 .

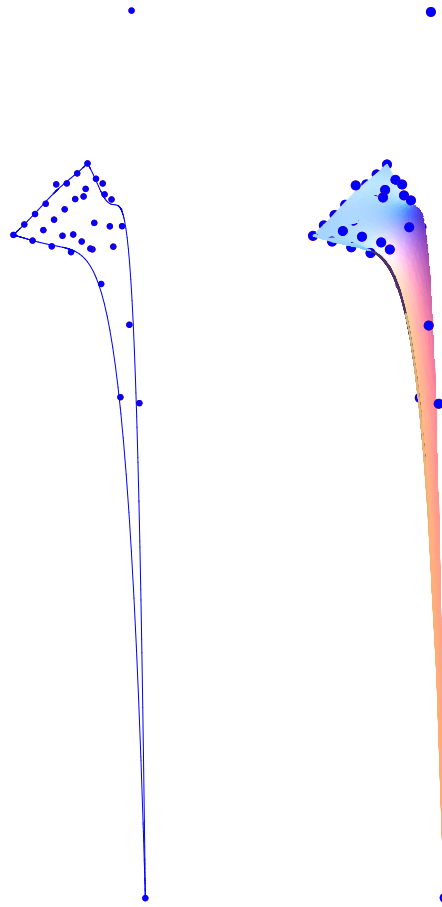


FIGURA 7. Vemos la superficie formada para el caso del operador armónico S_2 en el que fijamos únicamente dos filas de puntos con $n=7$.

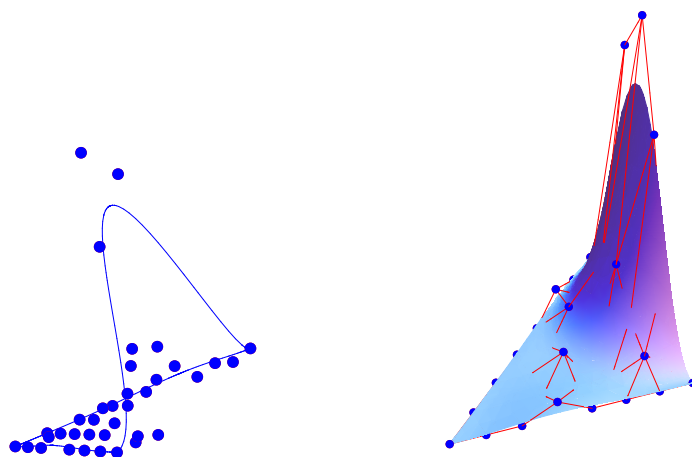


FIGURA 8. Vemos la superficie formada utilizando el biarmónico S_4 en el que fijamos dos fronteras y las dos filas vecinas a éstas con $n=7$.

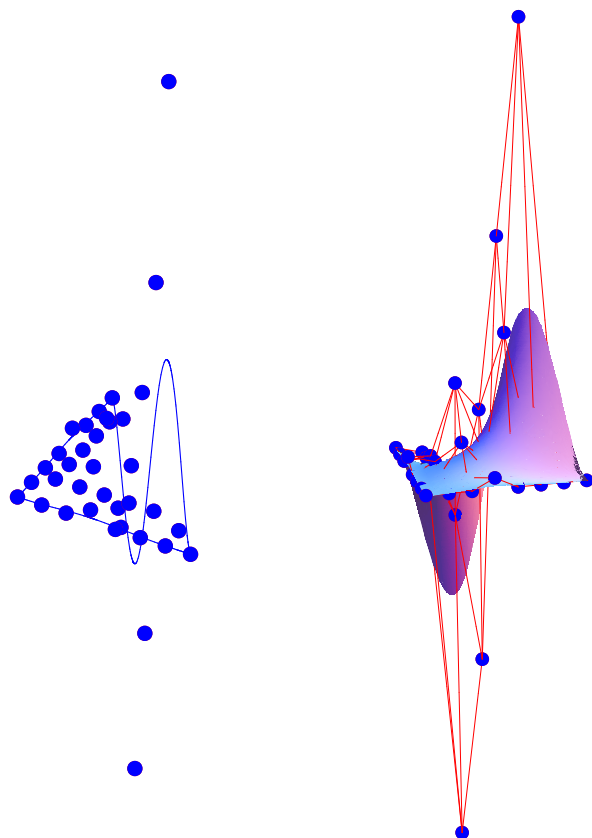


FIGURA 9. Vemos la superficie formada utilizando el biarmónico S_4 en el que fijamos dos fronteras y las dos filas vecinas a éstas con $n=7$.

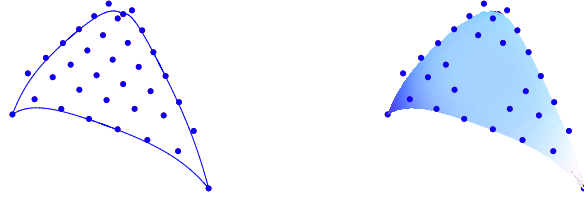


FIGURA 10. Vemos la superficie formada utilizando el operador isotrópico S_3 en el que fijamos las tres fronteras para el caso $n=7$.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos dedicado nuestros esfuerzos al estudio de las superficies EDP. En el capítulo 2, donde estudiamos el artículo de Arnal, Lluch y Monterde [2], hemos considerado las EDPs definidas por ecuación de Euler-Lagrange con el funcional de Dirichlet y con el funcional biarmónico, las cuales son las ecuaciones de Laplace y biarmónicas. También se ha abordado el diseño de superficies resolviendo EDP de segundo y cuarto orden, analizando diferentes métodos para diseñar superficies EDP triangulares de Bézier dados diferentes conjuntos de puntos de control fijados e incluyendo los casos especiales de superficies armónicas y biarmónicas. Además, introducimos un operador simétrico de segundo y cuarto orden para superar el inconveniente de anisotropía de los operadores armónicos y biarmónicos sobre superficies de Bézier triangulares.

En el capítulo 3, donde abordamos el artículo de Arnal y Monterde [3] hemos estudiado un método de solución polinomial explícito para la generación de superficies que se caracteriza por alguna configuración de fronteras en la que la superficie resultante se ajusta a una EDP lineal de tercer orden. En particular, se ha tratado la generación de superficies como soluciones polinómicas triangulares de Bézier explícitas.

Hemos discutido también una variedad de ejemplos relacionados con la generación de superficies a partir de una configuración de fronteras dadas y comparamos nuestros resultados para una EDP de segundo y cuarto orden con la solución polinomial explícita de una EDP lineal simétrica de tercer orden con comportamiento isotrópico.

Podemos afirmar que el control de toda frontera es posible con el método EDP de tercer orden ya que proporciona un mejor control sobre la forma de una superficie. Las superficies que hemos obtenido con este método se adaptan perfectamente a la forma trazada por la frontera y la fijación de la frontera aumenta el control sobre las formas que se pueden diseñar. El método de solución que hemos analizado tiene relevancia directa para la generación de superficies a partir de datos de contorno para diseño geométrico asistido por ordenador.

En el capítulo 4, vimos la construcción de las superficies EDP de Bézier rectangulares a través de diferentes condiciones de frontera y la ecuación triarmónica. Al compararlas con el caso armónico y biarmónico, el artículo de Wu y Zhu [4] asegura tener suficientes grados de libertad para satisfacer las condiciones de frontera proponiendo configuraciones como, por ejemplo, fijar las cuatro fronteras y únicamente dos tangentes a lo largo de éstas o fijar dos filas de puntos en un lado de la superficie y cuatro en otro lado contigua a ésta. En el capítulo 5, salvo casos particulares, ofrece mejores resultados fijar tanto las fronteras como las tangentes a éstas, ya que de esta forma tenemos la ventaja de la simetría y obtenemos superficies con condiciones de frontera C^1 . Para poder obtener una superficie simétrica no

nos ha bastado con trabajar únicamente con la EDP de orden seis, sino que ha sido necesario buscar el operador isotrópico de ese orden (16), el cual depende de dos parámetros (d y g), por tanto, no es único.

Una vez que hemos obtenido el operador isotrópico de orden seis, hemos fijado los parámetros a $d = 1$ y $g = 1$ y con esto nos hemos dispuesto a construir varios ejemplos de superficies isotrópicas viendo la bondad de las mismas y la mejoría que produce en comparación con las superficies obtenidas en el capítulo 4.

Hemos visto que el problema que hemos trabajado aquí tiene solución para superficies de cualquier grado, por lo que una de las posibles líneas futuras de investigación que surgen a raíz de este trabajo consistiría en realizar la demostración del problema.

Otra de las líneas de trabajo que surge consiste en proponer otras configuraciones, por ejemplo, imponiendo condiciones de frontera C^2 , es decir, fijando la primera y la segunda derivada a lo largo de dos fronteras, lo que equivaldría a fijar tres filas de puntos de control a lo largo de dos de las fronteras.

Bibliografía

- [1] M. I. G. Bloor, M. J. Wilson, *Generating blend surfaces using partial differential equations*, Computer Aided Design **21**, 165 - 171, (1989).
- [2] A. Arnal, A. Lluch, J. Monterde, *Triangular. PDE triangular Bézier surfaces: Harmonic, biharmonic and isotropic surfaces*, in: Journal of Computational and Applied Mathematics. **234**, 1098-1112. Elsevier, 2011.
- [3] A. Arnal, J. Monterde, *A third order partial differential equation for isotropic boundary bases triangular Bézier surface generation*, in: Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 236,184-195. Elsevier, (2011).
- [4] Yan Wu, Chun-Gang Zhu, *Construction of triharmonic Bézier surfaces from boundary conditions*, in: Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 337. Elsevier, (2020).
- [5] J. Monterde, *The Plateau-Bézier problem*, in: IMA Conference on Mathematics of surfaces, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 2768. Springer, (2003).
- [6] C. Cosín, J. Monterde, *Bézier surfaces of minimal area*, Proceedings of the International Conference of Computational Science, ICCS'2002, Amsterdam, Sloot, Kenneth Tan, Dongarra and Hoekstra, (Eds.), Lecture Notes in Computer Science **2330**, 72-81, Springer-Verlag, (2002).
- [7] B. Jüttler, M. Oberneder, A. Sinwel, *On the existence of biharmonic tensor-product Bézier surface patches*, Computer Aided Geometric Design **23**, 612-615, (2006).
- [8] J. Monterde, H. Ugail, *On harmonic and biharmonic Bézier surfaces*, Computer Aided Geometric Design **21**, 697-715, (2004).
- [9] J. V. Beltran, J. Monterde, *Bézier solutions of the wave equation*, Proceedings of the Second Technical Session on Computer Graphics and Geometric Modeling, TSCG'2004, Assisi, Lecture Notes in Computer Science **3044**, 631-640, Springer-Verlag, (2004).
- [10] J. Monterde, *The Plateau-Bézier problem*, In: Mathematics of Surfaces X. Lecture Notes in Computer Science **2768**, M. J. Wilson, R. R. Martin, (Eds.), Springer, Berlin, 262-273, (2003).
- [11] J.M. A. Arnal, H. Ugail, *Explicit polynomial solutions of fourth order linear elliptic partial differential equations for boundary based smooth surface generation*, preprint.

- [12] A. Arnal, A. Lluch, J. Monterde, *Triangular Bézier surfaces of minimal area*, Proceedings of the International Workshop on Computer Graphics and Geometric Modeling 2003, Montreal, Lecture Notes in Computer Science **2669**, 366-375, Springer-Verlag, (2003).
- [13] A. Arnal, A. Lluch, J. Monterde, *Triangular. PDE triangular Bézier surfaces: Harmonic, biharmonic and isotropic surfaces*, in: Journal of Computational and Applied Mathematics. **235**(5), 2011.
- [14] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, Morgan Kaufmann, San Francisco, (2011).
- [15] J. Monterde, *Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach*, Computer Aided Geometric Design **21**, 117-136, (2004).
- [16] U. Abel, Z. Li, *A new proof of an identity of Jetter and Stöckler for multivariate Bernstein polynomials*, Computer Aided Geometric Design **23**, 297-301, (2006).
- [17] M. Abramowitz, I. A. Stegun, (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, (1972).
- [18] A. Arnal, A. Lluch, J. Monterde, *Triangular Bézier surfaces of minimal area*, Proceedings of the International Workshop on Computer Graphics and Geometric Modeling 2003, Montreal, Lecture Notes in Computer Science **2669**, 366-375, Springer-Verlag, (2003).
- [19] H. Ugail *Partial Differential Equation for Geometric Design*, Springer, Berlin, (2011).
- [20] M. I. G. Bloor, M. J. Wilson, *Using partial differential equations to generate freeform surfaces*, Computer Aided Design **22**, 202-212, (1990).
- [21] G. Xu, G.Z.Wang, *Parametric polynomial minimal surfaces of degree six with isothermal parameter*, in : Proceedings of Geom. Model. Processing, in: LNCS, vol.4975, Springer, 2008, pp.329-343.
- [22] G. Xu, G.Z.Wang, *Quintic parametric polynomial minimal surfaces and their properties*. Differential Geom. Appl. 28 (6)(2010) 597-704.
- [23] C.Y. L, R.H.Wang, C.G.Zhu, *Designing approximation minimal surfaces with geodesics*, Appl. Math. Model. 37 (9) (2013) 6415-6424.
- [24] G. Xu, T. Rabzuck, E. Güler, Q. Wu, K.C. Hui, G.Z. Wang, *Quasi-harmonic Bézier approximation of minimal surfaces for finding forms of structural membranes*, Comput. Struct. 161 (2015) 55-63.
- [25] J. Monterde, H Ugail, *General 4th-order PDE Method to generate Bézier surfaces from the boundary*, Comput. Aided Geom. Design 23 (2) (2006) 208-255.
- [26] F. Hou, H. Qin, A. Hao, *Trivariate biharmonic B-splines*, Comput. Graph. Forum 34 (6) (2015) 36-47.
- [27] X. Han, J. Han. *Representation of piecewise biharmonic surfaces using biquadratic B-splines*, J. Comput. Appl. Math. 290 (2015) 403-411.

- [28] X. Han, J. Han. Bicubic B-splines surfaces constrained by the Biharmonic PDE. *Appl. Math. Comput.* 361 ("019) 766-776.
- [29] D. Lesnic, On the boundary integral equations for a two-dimensional slowly rotating viscous fluid flow. *Adv. Appl. Math. Mech.* 1 (1) (2009) 140-150.
- [30] J.J. Zhang, L.H. You, Fast surface modelling using a 6th order PDE, *Comput. Graph. Forum* 23 (3) (2004) 311–320.