Máster en Matemática Computacional

Trabajo Final de Máster

Fundamentos de los Conjuntos Difusos

Tutor académico:
Manuel Sanchis López
Autor:
Samuel Diciembre Sanahuja

Fecha de lectura: 24 de Octubre de 2022
Curso académico 2021/2022

Agradecimientos

A mi mujer, Rut, y a mi hija, Claudia, por quienes hago todas las cosas.

Resumen

Presentamos una introducción a los conjuntos difusos haciendo hincapié en los conceptos básicos. Presentaremos una descripción de los α-cortes y veremos su importancia para trabajar con conjuntos difusos. Damos una aplicación a la teoría de las ecuaciones difusas.

Palabras clave

Conjuntos Difusos, T-normas, S-normas, Ecuaciones Difusas.

Abstract

We present an introduction to fuzzy sets with emphasis the basics concepts. We will present a description of the *alpha*-cuts and see their importance for working with fuzzy sets. We give an application to the theory of fuzzy equations.

Keywords

Fuzzy Sets, T-norms, S-norms, Fuzzy Equations.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La teoría de conjuntos difusos es un enfoque de investigación que puede abordar problemas relacionados con juicios ambiguos, subjetivos e imprecisos, y puede cuantificar la faceta lingüítica de los datos disponibles y las preferencias para la toma de decisiones individuales o grupales. La teoría difusa puede usarse para mejorar teoría ya existentes aportando un punto de vista novedoso.

Los conjuntos difusos fueron introducidos por L. Zadeh en 1965 y son el inicio de la teoría difusa que hoy en día se aplica en un amplio abanico de situaciones: teoría de control, psicología, análisis, sistemas dinámicos, optimización, etc.

La diferencia entre los conjuntos *clásicos* y los conjuntos *difusos* se puede sintetizar de la siguiente manera:

Conjuntos clásicos:

1. Clases de objetos con *frontera* delimitada.
2. Un conjunto clásico está definido *por una frontera delimitada*, es decir, no hay incertidumbre sobre la pertenencia o no de un elemento al conjunto.
3. Se usan ampliamente en sistemas digitales.

Conjuntos difusos:

1. Clases de objetos con *frontera* no delimitada.

2. Un conjunto difuso está definido *por una frontera no delimitada*, es decir, hay incertidumbre sobre la pertenencia o no de un elemento al conjunto.

3. Usados en controladores difusos.

En esta Memoria presentamos los conceptos básicos de los co juntos difusos y una aplicación a la teoría de las ecuaciones (algebraicas) difusas. Esta dividada de la siguiente manera: tras introducir las nociones básicas, hacemos hincapié en los concepts de normas y conormas triangulares, introducimos los números difusos y el principio de extensión junto con la aritmética de in tervalos. Finalizamos con el estudio de algunas ecuaciones (algebraicas) difusas y un comentario sobre la teoría de la posibilidad.

Capítulo 2

Memoria Trabajo Final de Máster

2.1. Conceptos básicos de conjuntos difusos

Para poder entender algunas de las aplicaciones de los números difusos, primero hemos de introducir algunos conceptos sobre la Teoría de Conjuntos Difusos. En la lógica tradicional o lógica binaria únicamente se presentan dos casos: o un elemento pertenece a un conjunto o no pertenece. Sin embargo, como se nos comenta en [1], la pertenencia a un conjunto difuso es *gradual*, según la cual el valor de pertenencia 0 indica que el elemento no está en el conjunto y el valor 1 indica que se encuentra totalmente dentro del conjunto. Por tanto decimos que un elemento forma parte de un conjunto difuso con un determinado *grado de pertenencia*.

Definición 1 *Se define* ***variable lingüística x*** *como la noción o concepto que vamos a calificar de forma difusa. Ejemplos: altura, edad ...*

Definición 2 *Se define* ***universo de discurso*** *como el conjunto X de todos los posibles valores que puede tomar una determinada variable x. Ejemplo: x = Altura, $X = [1.4, 2.3]$*

Un **conjunto clásico** o **crisp set** es un conjunto empleado en la lógica binaria. Son los conjuntos que surgen por la necesidad del ser humano de clasificar objetos y conceptos. Únicamente contemplan la pertenencia o no pertenencia al conjunto.

Definición 3 *Un* ***conjunto difuso*** *o* ***fuzzy set*** *es un conjunto que puede contener elementos de forma parcial, es decir, que la propiedad de que un elemento x pertenezca al conjunto A ($x \in A$) puede ser cierta con un grado parcial de verdad.*

Ejemplo 1. *Si hablamos de temperatura, tendremos que para una persona de Alaska el concepto de caliente puede estar por encima de 10° C, mientras que para un mexicano caliente estaría por encima de 30° C o en un proceso de fundición el concepto de caliente sería para aquellas temperaturas superiores a 300° C. Por esta razón los conjuntos "Caliente", "Tibio" y "Frío" son llamados conjuntos difusos ya que tienen límites borrosos o "no muy bien" definidos.*

Ejemplo 2. *Supongamos que queremos clasificar a las personas de un país o de una zona en "Ricos" y "No Ricos". Lo más sencillo parece asignar un valor numérico y decir que una persona pertenece al conjunto ricos o no dependiendo de si su fortuna sobrepasa esa cantidad. ¿Y si a una persona le faltaran 100€ para llegar a este valor? ¿Y si le faltaran 10€? Aquí vemos un ejemplo de la representación de los conjuntos aplicando la lógica clásica y la lógica difusa.*

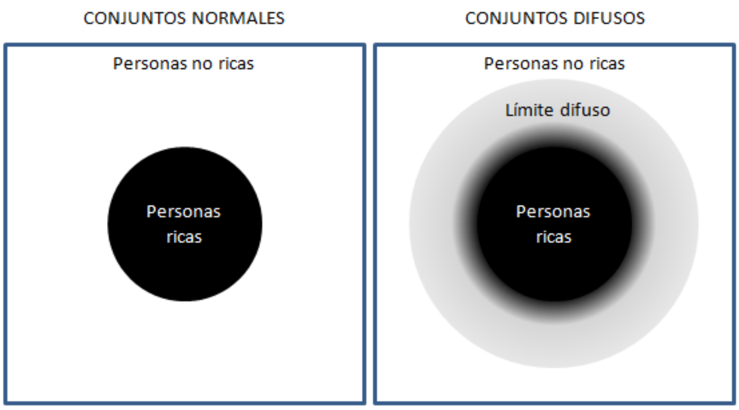


Figura 2.1: Diferencia de límites entre los conjuntos crisp y fuzzy.

Definición 4 *Sea A un conjunto difuso y sea $x \in X$ un valor del conjunto universal. Su* ***función de pertenencia*** *o* ***función de membresia*** *μ_A es una aplicación que indica el grado de pertenencia de un valor a dicho conjunto difuso:*

$$\mu_A(x) : X \longrightarrow [0, 1].$$

Así pues, un conjunto difuso A puede definirse de la siguiente manera

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) : X \longrightarrow [0, 1]\},$$

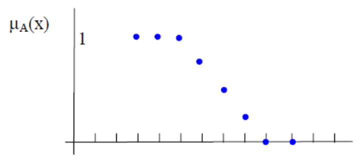


Figura 2.2: Función de membresía en un Universo discreto.

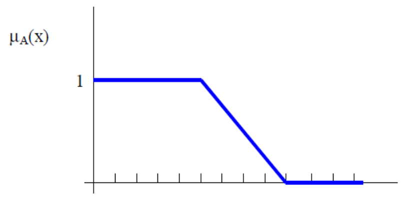


Figura 2.3: Función de membresía en un Universo continuo.

donde $\mu_A(x) = 1$ si x está totalmente en A, $\mu_A(x) = 0$ si x no está en A y $0 < \mu_A(x) < 1$ si x está *parcialmente* en A. Este valor entre 0 y 1 representa el **grado de pertenencia** (también llamado valor de pertenencia) de un elemento x al conjunto A. Cuanto más cerca esté $\mu_A(x)$ del valor 1, mayor será la pertenencia del objeto x al conjunto A. En algunas ocasiones la función de pertenencia a un conjunto difuso A también se representa sencillamente como A(x).

Otra forma de representar conjuntos difusos es la siguiente:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + ... + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i},$$

donde el símbolo “+” representa una enumeración y no una operación de suma. En esta representación no se tienen en cuenta los valores de X tal que $\mu_A(x) = 0$. En el caso de que la variable X tome valores continuos y no discretos tendríamos que

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x_i)}{x_i},$$

donde la integral tampoco debe considerarse como una operación algebraica sino como una forma de representar los pares de valores.

Uno de los aspectos más interesantes del uso de la lógica difusa, es que podemos utilizar palabras ambiguas para la generación de cálculos computacionales. Esta visión fue dada por Zadeh[2] y podemos verla ampliada en [3], donde se plantea la idea del cómputo con palabras.

Definición 5 *Los **valores lingüísticos** son las diferentes clasificaciones que efectuamos sobre la variable lingüística. Ejemplo: La variable x = Altura se puede clasificar en bajo, medio y alto.*

A diferencia de una variable numérica, la variable lingüística es ambigua, y está representada por un conjunto difuso. Por ejemplo la variable numérica puede ser definida como altura=180 cm, mientras que la variable lingüística estaría definida como altura=alto. Por medio de estos valores lingüísticos sirven para modelar un fenómeno tal como se puede ver en la Figura 2.4:

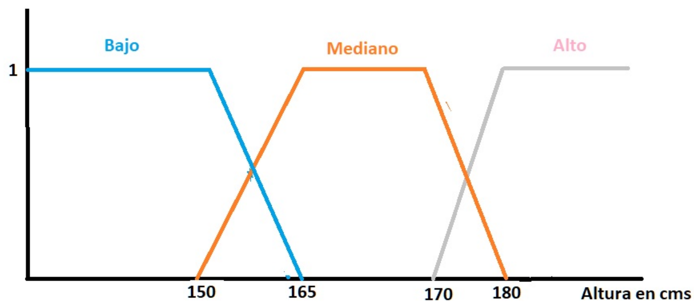


Figura 2.4: Separación de la variable altura en los conjuntos, o valores: bajo, mediano y alto.

En la Figura 2.4 hemos dibujado 3 conjuntos difusos sobre la variable lingüística altura, cuyos valores lingüísticos asociados son bajo, mediano y alto respectivamente.

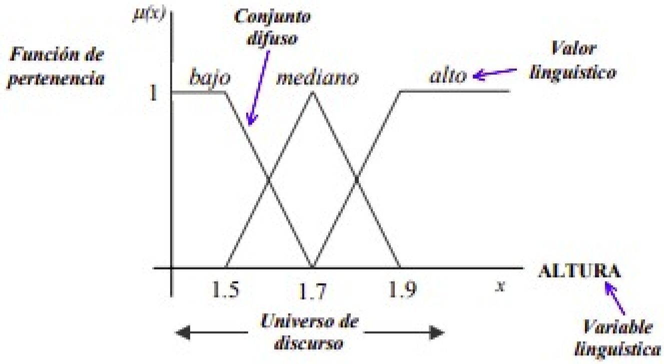


Figura 2.5: Algunas de las propiedades vistas sobre Conjuntos Difusos.

Los **cuantificadores** se usan para medir (o cuantificar) la cantidad o la proporción de elementos que cumplen o satisfacen cierta condición.

De la Lógica Clásica ya conocemos dos muy importantes:

- ∀ (Para todo): Se refiere a todos los elementos u objetos.
- ∃ (Existe): Se refiere al menos a uno de los elementos u objetos.

En la Lógica Difusa se emplean más cuantificadores que se clasifican en dos categorías:

- **Cuantificadores Absolutos**: Se refieren a una única cantidad determinada para medir si esa cantidad son "muchos", "pocos", "muchísimos", "aproximadamente entre 6 y 9", "aprox. más de 43"...
- **Cuantificadores Relativos**: Se refieren a una proporción de elementos respecto del total de los que existen. Por ejemplo: "la mayoría", "la minoría", "casi todos", "casi ninguno"...

Los **modificadores** son un modo de representar estrategias o técnicas apropiadas cuando el conocimiento proviene de la experiencia o de la intuición (careciendo de demostración matemática o física).

Ejemplo. Supongamos que tenemos dos conjuntos difusos A y B. El conjunto A será el conjunto de las personas "Viejas" mientras que el conjunto B será el conjunto formado por las personas "Muy Viejas". Una persona que pertenece parcialmente al conjunto "Viejo", tendrá un menor grado de pertenencia al conjunto “Muy Viejo”. Así pues, vemos que podríamos obtener el conjunto B aplicando una modificación sobre el conjunto A:

$$\mu_B(x) = (\mu_A(x))^2.$$

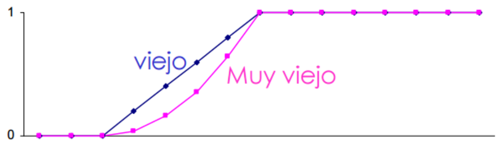


Figura 2.6: Funciones de pertenencia de “Viejo” y “Muy Viejo”.

Existe todo un catálogo de posibles adverbios y modificadores asociados, pero las modificaciones que más usualmente se aplican a un conjunto difuso son las siguientes:

- **Concentración**: El efecto es que la función de pertenencia toma valores más pequeños, centrándose en los valores mayores. Se obtiene al aplicar una función tipo $\mu_B(x) = (\mu_A(x))^p$ con $p > 1$. El efecto de aplicar la concentración puede verse en la siguiente figura (la función de pertenencia base es la azul, y la modificada la rosa):

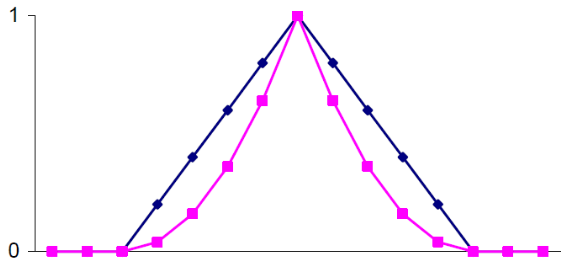


Figura 2.7: Ejemplo de Concentración.

- **Dilatación**: Se obtiene al aplicar una función tipo $\mu_B(x) = (\mu_A(x))^p$ con $0 < p < 1$. Provoca el efecto contrario al de la concentración. La función toma valores mayores. El efecto de aplicar la dilatación puede verse en la siguiente figura (la función de pertenencia base es la azul, y la modificada la rosa):

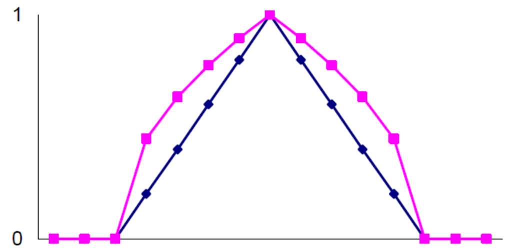


Figura 2.8: Ejemplo de Dilatación.

- **Intensificación**: Se disminuyen los valores menores a 1/2 y se aumentan los mayores. La intensificación viene determinada por una función del tipo

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 2^{p-1}(\mu_A(x))^p & \text{si } \mu_A(x) \leq 0{,}5 \\ 1 - 2^{p-1}(1-\mu_A(x))^p & \text{si } \mu_A(x) > 0{,}5 \end{cases},$$

donde $p > 1$. Normalmente se suele poner $p = 2$ (a mayor p, mayor intensificación). El efecto de aplicar la intensificación puede verse en la siguiente figura (la función de pertenencia base es la azul, y la modificada la rosa):

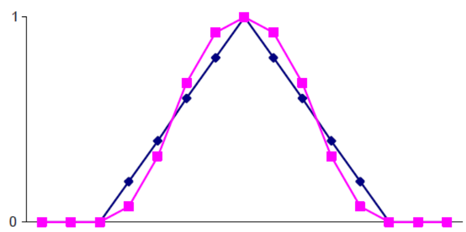


Figura 2.9: Ejemplo de Intensificación.

- **Difuminación**: Provoca el efecto contrario a la intensificación. Viene determinada por una función del tipo

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu_A(x)}{2}} & \text{si } \mu_A(x) \leq 0{,}5 \\ 1 - \sqrt{\frac{1-\mu_A(x)}{2}} & \text{si } \mu_A(x) > 0{,}5 \end{cases}$$

El efecto de aplicar la difuminación puede verse en la siguiente figura (la función de pertenencia base es la azul, y la modificada la rosa):

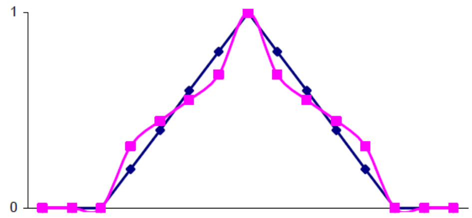


Figura 2.10: Ejemplo de Difuminación.

2.1.1. Características de los Conjuntos Difusos

Un conjunto difuso presenta algunas características que nos pueden resultar útiles a la hora de estudiarlos. Muchas de estas características fueron descritas por el propio Zadeh en [4] y también podemos encontrarlas en [5].

Definición 6 *Sea A un conjunto difuso. La* ***altura*** *de un conjunto difuso es el valor más grande de su función de pertenencia:*

$$h(A) = sup_{x \in X} \mu_{A(x)}.$$

Definición 7 *El* ***soporte*** *de un conjunto difuso A es el conjunto de elementos de X que pertenecen a A con grado de pertenencia mayor que 0:*

$$S(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

Un conjunto difuso se dice que es **singleton** o **simple** si su soporte es un único punto.

Definición 8 *El* ***núcleo*** *de un conjunto difuso A es el conjunto de elementos de X que pertenecen a A con grado de pertenencia 1:*

$$Nucleo(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}.$$

Un conjunto difuso se dice que es ***normal*** *si su núcleo es no vacío.*

Definición 9 *Una* ***normalización*** *es una aplicación que convierte un conjunto difuso no normal en un conjunto difuso normal. Sea A un conjunto difuso no normal (* $\forall x \in X \longrightarrow \mu_A(x) \neq 1$*), un conjunto difuso B normal vendría dado por:*

$$\mu_B(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}.$$

Definición 10 *Los* ***puntos de cruce*** *o* ***puntos de equilibrio*** *de un conjunto difuso son todos los valores que tienen grado de pertenencia 0.5 (*$x \in X | \mu_A(x) = 0{,}5$*).*

Definición 11 *Se define la* ***cardinalidad*** *de un conjunto difuso A de la siguiente manera*

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Definición 12 *Un* α***-corte*** *es un conjunto de los valores de X con grado mayor o igual que* α*:*

$$A^\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

El α-corte es quizás el concepto más importante de los conjuntos difusos, porque mediante el ajuste del valor, se puede determinar el rango o conjunto de valores que satisfacen un determinado grado de pertenencia o compatibilidad

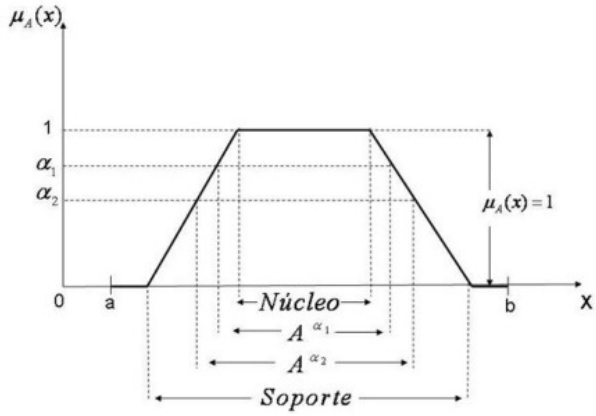


Figura 2.11: Soporte, núcleo y α-cortes en un conjunto difuso A.

Definición 13 *Un α-**corte estricto** es un conjunto de los valores de X con grado estrictamente mayor que α:*

$$A^{\alpha+} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Teorema 1 *Sean A, B conjuntos difusos. Entonces, las siguientes propiedades se cumplen para* $\alpha, \beta \in [0, 1]$

- *(i)* $A^{\alpha+} \subseteq A^{\alpha}$.
- *(ii)* $\alpha \leq \beta$ *implica que* $A^{\alpha} \supseteq A^{\beta}$ *y* $A^{\alpha+} \supseteq A^{\beta+}$.
- *(iii)* $(A \cap B)^{\alpha} = A^{\alpha} \cap B^{\alpha}$ *y* $(A \cup B)^{\alpha} = A^{\alpha} \cup B^{\alpha}$.
- *(iv)* $(A \cap B)^{\alpha+} = A^{\alpha+} \cap B^{\alpha+}$ *y* $(A \cup B)^{\alpha+} = A^{\alpha+} \cup B^{\alpha+}$.
- *(v)* $\overline{A}^{\alpha} = \overline{A}^{(1-\alpha)+}$.

Demostración

(i) Sea $x \in A^{\alpha+} \rightarrow x \in A^{\alpha}\ \forall x \in A^{\alpha+} \rightarrow A^{\alpha+} \subseteq A^{\alpha}$.

(ii) Sea $\alpha \leq \beta$ y sea $x \in A^{\beta} \rightarrow A(x) \geq \beta \geq \alpha \rightarrow A(x) \geq \alpha \rightarrow x \in A^{\alpha} \rightarrow A^{\beta} \subseteq A^{\alpha}$.

Sea $\alpha \leq \beta$ y sea $x \in A^{\beta+} \rightarrow A(x) > \beta > \alpha \rightarrow A(x) > \alpha \rightarrow x \in A^{\alpha+} \rightarrow A^{\beta+} \subseteq A^{\alpha+}$.

(iii) Sea $x \in (A \cap B)^\alpha \to (A \cap B)(x) \geq \alpha \to min[A(x), B(x)] \geq \alpha \to A(x) \geq \alpha$ y $B(x) \geq \alpha$ $\to x \in A^\alpha$ y $x \in B^\alpha \to x \in (A^\alpha \cap B^\alpha) \to (A \cap B)^\alpha \subseteq (A^\alpha \cap B^\alpha)$.

Sea $x \in (A^\alpha \cap B^\alpha) \to x \in A^\alpha$ y $x \in B^\alpha \to A(x) \geq \alpha$ y $B(x) \geq \alpha \to min[A(x), B(x)] \geq \alpha \to$ $(A \cap B)(x) \geq \alpha \to x \in (A \cap B)^\alpha \to (A^\alpha \cap B^\alpha) \subseteq (A \cap B)^\alpha$.

Por tanto $(A^\alpha \cap B^\alpha) = (A \cap B)^\alpha$.

(iv) Sea $x \in (A \cap B)^{\alpha+} \to (A \cap B)(x) > \alpha \to min[A(x), A(x)] > \alpha \to A(x) > \alpha$ y $B(x) > \alpha$ $\to x \in A^{\alpha+}$ y $x \in B^{\alpha+} \to x \in (A^{\alpha+} \cap B^{+}) \to (A \cap B)^{\alpha+} \subseteq (A^{\alpha+} \cap B^{\alpha+})$.

Sea $x \in (A^{\alpha+} \cap B^{\alpha+}) \to x \in A^{\alpha+}$ y $x \in B^{\alpha+} \to A(x) > \alpha$ y $B(x) > \alpha \to min[A(x), B(x)] > \alpha$ $\to (A \cap B)(x) > \alpha \to x \in (A \cap B)^{\alpha+} \to (A^{\alpha+} \cap B^{\alpha+}) \subseteq (A \cap B)^{\alpha+}$.

Por tanto $(A^{\alpha+} \cap B^{\alpha+}) = (A \cap B)^{\alpha+}$.

(v) Sea $x \in (\overline{A})^\alpha \to \overline{A}(x) \geq \alpha \to 1 - A(x) \geq \alpha \to -A(x) \geq \alpha - 1 \to A(x) \leq 1 - \alpha \to$ $A(x) \not> 1 - \alpha \to x \notin A^{(1-\alpha)+} \to x \in \overline{A}^{(1-\alpha)+} \to (\overline{A})^\alpha \subseteq \overline{A}^{(1-\alpha)+}$.

Sea $x \in \overline{A}^{(1-\alpha)+} \to x \notin A^{(1-\alpha)+} \to A(x) \not> 1 - \alpha \to A(x) \leq 1 - \alpha \to A(x) - 1 \leq -\alpha \to$ $1 - A(x) \geq \alpha \to \overline{A}(x) \geq \alpha \to x \in (\overline{A})^\alpha \to \overline{A}^{(1-\alpha)+} \subseteq (\overline{A})^\alpha$.

Por tanto $\overline{A}^\alpha = \overline{A}^{(1-\alpha)+}$. ■

Al igual que en la teoría de conjuntos tradicional, a los conjuntos difusos se les asocian ciertas propiedades. Los conjuntos difusos que generalmente se utilizan en aplicaciones prácticas son convexos.

Definición 14 *Un conjunto difuso A se dice* ***convexo*** *si para todo $\alpha \in (0,1], r, s \in {}^\alpha A$ y $\lambda \in [0,1]$ se tiene*

$$\lambda \cdot r + (1 - \lambda) \cdot s$$

Observación. Si A es no difuso entonces:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

Por lo tanto para cada $\alpha \in (0,1)$, $A^{\alpha} = x \in X|\mu_A(x) \geq \alpha = A$ de donde la definición de conjunto convexo difuso coincide con la definición usual de convexo cuando A es no difuso. Así que otra forma de definir un conjunto difuso convexo es la siguiente:

Definición 15 *Un conjunto difuso A se dice* ***convexo*** *si para todo* $\alpha \in (0,1]$, A^{α} *es convexo.*

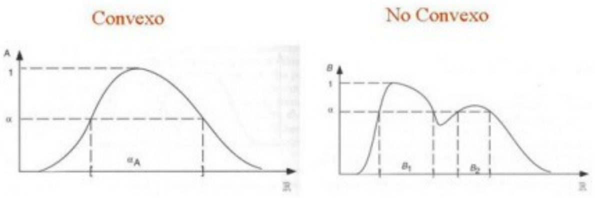


Figura 2.12: Ejemplo Conjunto Difuso Convexo y No Convexo.

Teorema 2 *Sea A un conjunto difuso en R, se dice que es convexo si y solo si se cumple que para todo* $r, s \in R$, *y* $\lambda \in [0,1]$ *se tiene*

$$\mu_A(\lambda \cdot r + (1-\lambda) \cdot s) \geq min[\mu_A(r), \mu_A(s)].$$

Demostración $\Longrightarrow$

Sea A un conjunto difuso en R, A es convexo $\rightarrow$ Los α-cortes de A son convexos $\rightarrow$ A^{α} es convexo $\rightarrow$ si $r, s \in A^{\alpha}$ entonces $\lambda \cdot r + (1-\lambda) \cdot s \in A^{\alpha}$ con $\lambda \in [0,1]$

Ahora, sea $A(r) \leq A(r)$ y sea $\alpha = A(r)$ entonces $A(\lambda \cdot r + (1-\lambda) \cdot s) \geq \alpha = A(r) \rightarrow A(\lambda \cdot r + (1-\lambda) \cdot s) \geq min[\mu_A(r), \mu_A(s)]$ $\forall r, s \in R$

$\Longleftarrow$

Sean $r, s \in A^{\alpha}$. Si $A(r) \geq \alpha$ y $A(s) \geq \alpha$ entonces $A(\lambda \cdot r + (1-\lambda) \cdot s) \geq min(A(r), A(s))$ $\rightarrow$ el mínimo valor que pueden tomar $A(r)$ y $A(s)$ es α, entonces $A(\lambda \cdot r + (1-\lambda) \cdot s) \geq \alpha \rightarrow r, s \in A^{\alpha} \rightarrow \lambda \cdot r + (1-\lambda) \cdot s \in A^{\alpha} \rightarrow A^{\alpha}$ es convexo $\rightarrow A$ es convexo. ■

Teorema 3 *Sean A y B dos conjuntos difusos convexos. Entonces $A + B$ y $A - B$ también son convexos.*

Demostración

Sean $x_1, x_2 \in A$ y $y_1, y_2 \in B$, entonces, sabemos por el Teorema 2 que

$$\mu_A(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \geq min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)],$$
$$\mu_B(\lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2) \geq min[\mu_B(y_1), \mu_B(y_2)],$$

con $\lambda \in [0, 1]$. Entonces, si sumamos ambas funciones de pertenencia

$$\mu_A(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) + \mu_B(\lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2) \geq min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] + min[\mu_B(y_1), \mu_B(y_2)],$$
$$\mu_{A+B}(\lambda \cdot (x_1 + y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2 + y_2)) \geq min[\mu_{A+B}(x_1 + y_1), \mu_{A+B}(x_2 + y_2)].$$

Por tanto, A+B es convexo. La demostración para resta es similar.■

2.1.2. Tipos de funciones de pertenencia

Aunque en principio cualquier función sería válida para definir conjuntos difusos, en la práctica hay ciertas funciones que son más usadas que el resto. Esto se debe tanto a la facilidad de computación que su uso conlleva como a su estructura lógica para definir su valor lingüístico asociado. Así, las funciones de pertenencia más comunes que se nos describen en [5] y en [6] son las siguientes:

- Función Gamma

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } a < x < m \\ 1 & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

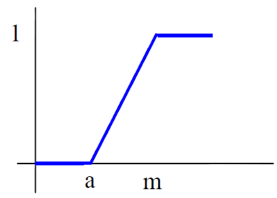


Figura 2.13: Gráfica de la función Gamma.

- Función L
  Puede definirse como la función opuesta a la función Gamma, es decir, 1 menos la función Gamma.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq a \\ \frac{m-x}{m-a} & \text{si } x \in (a, m) \\ 0 & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

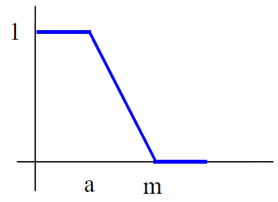


Figura 2.14: Gráfica de la función L.

- Función Lambda (o Función triangular)

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{si } m < x \leq b \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

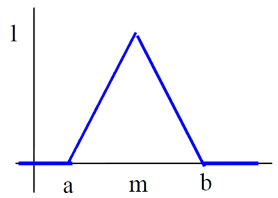


Figura 2.15: Gráfica de la función Lambda.

- Función Pi (o Función trapezoidal)

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{b-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } x > d \end{cases}$$

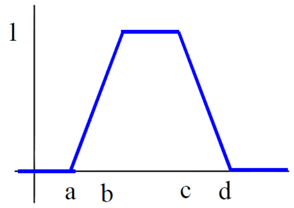


Figura 2.16: Gráfica de la función Pi.

- Función S

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 2(\frac{x-a}{c-a})^2 & \text{si } a < x \leq c \\ 1 - 2(\frac{x-a}{c-a})^2 & \text{si } \frac{a+c}{2} < x < c \\ 0 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

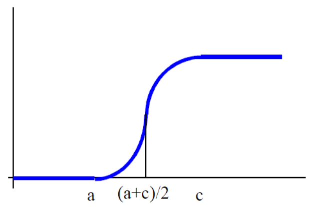


Figura 2.17: Gráfica de la función S.

- Función Z
  Puede definirse como la función opuesta a la función S, es decir, 1-$\mu_S(x)$.

$$\mu_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq a \\ 1 - 2(\frac{x-a}{c-a})^2 & \text{si } a < x \leq c \\ 2(\frac{x-a}{c-a})^2 & \text{si } \frac{a+c}{2} < x < c \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

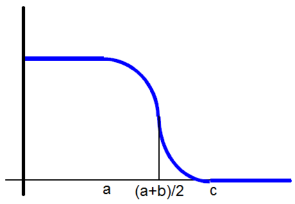


Figura 2.18: Gráfica de la función Z.

- Función Gaussiana

$$\mu_{\Pi}(x) = \begin{cases} \mu_S(x) & \text{si } x \leq b \\ \mu_Z(x) & \text{si } x > b \end{cases}$$

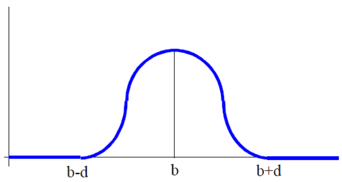


Figura 2.19: Gráfica de la función Gaussiana.

2.1.3. Operaciones con Conjuntos Difusos

Tal y como se describe en [7], al igual que en la lógica clásica, en la lógica difusa se pueden aplicar diferentes funciones básicas para trabajar con los conjuntos definidos. Desde un punto de vista subjetivo, se puede asegurar que el trabajar con estas operaciones sobre estos conjuntos es más fácil que trabajar sobre lógica clásica.

Igualdad

Dos conjuntos difusos A y B, definidos en el mismo Universo X, son iguales si tienen la misma función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \;\; \forall x \in X.$$

Inclusión

Sean A y B conjuntos difusos. Diremos que A es **subconjunto difuso** de B ($A \subseteq B$) si su función de pertenencia toma valores mas pequeños

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \;\; \forall x \in X.$$

Si existe un valor $x \in X$ tal que $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ entonces escribiremos que $A \subset B$.

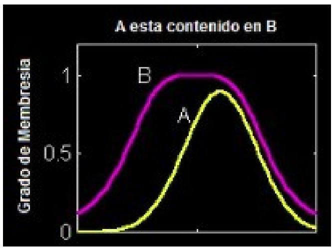


Figura 2.20: Ejemplo de un subconjunto difuso.

Además, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces podemos decir que $A = B$.

Teorema 4 *Sean A y B conjuntos difusos. Entonces, para todo $\alpha \in [0,1]$:*

- *(i) $A \subseteq B$ si y solo si ${}^{\alpha}A \subseteq {}^{\alpha}B$.*
- *(ii) $A \subseteq B$ si y solo si ${}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha+}B$.*
- *(iii) $A = B$ si y solo si ${}^{\alpha}A = {}^{\alpha}B$.*
- *(iv) $A = B$ si y solo si ${}^{\alpha+}A = {}^{\alpha+}B$*

Demostración

(i) $\Longrightarrow$

Sea $A \subseteq B \rightarrow A(x) \leq B(x) \forall x \in X$, entonces, sea $x \in {}^{\alpha}A \rightarrow A(x) \geq \alpha \rightarrow B(x) \geq A(x) \geq \alpha$ $\rightarrow B(x) \geq \alpha \rightarrow x \in {}^{\alpha}B \rightarrow {}^{\alpha}A \subseteq {}^{\alpha}B$.

$\Longleftarrow$

Sea ${}^{\alpha}A \subseteq {}^{\alpha}B \rightarrow x \in {}^{\alpha}A \rightarrow x \in {}^{\alpha}B \rightarrow B(x) \geq \alpha$ y $A(x) \geq \alpha \rightarrow B(x) \geq A(x) \geq \alpha \rightarrow B(x) \geq A(x) \rightarrow A \subseteq B$.

(ii) $\Longrightarrow$

Sea $A \subseteq B \rightarrow A(x) \leq B(x) \forall x \in X$, entonces, sea $x \in {}^{\alpha+}A \rightarrow A(x) > \alpha \rightarrow B(x) \geq A(x) > \alpha$ $\rightarrow B(x) > \alpha \rightarrow x \in {}^{\alpha+}B \rightarrow {}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha+}B$.

$\Longleftarrow$

Sea ${}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha+}B \rightarrow x \in {}^{\alpha+}A \rightarrow x \in {}^{\alpha+}B \rightarrow B(x) > \alpha$ y $A(x) > \alpha \rightarrow B(x) \geq A(x) > \alpha \rightarrow B(x) \geq A(x) \rightarrow A \subseteq B$.

(iii) $\Longrightarrow$

Asumimos que $A = B \rightarrow A(x) = B(x) \forall x \in X$, entonces, sea $x \in {}^{\alpha}A \rightarrow A(x) \geq \alpha \rightarrow B(x) \geq \alpha \rightarrow x \in {}^{\alpha}B \rightarrow {}^{\alpha}A \subseteq {}^{\alpha}B$.

Ahora, sea $x \in {}^{\alpha}B \rightarrow B(x) \geq \alpha \rightarrow A(x) \geq \alpha \rightarrow x \in {}^{\alpha}A \rightarrow {}^{\alpha}B \subseteq {}^{\alpha}A$.

Por tanto ${}^{\alpha}A = {}^{\alpha}B$.

$\Longleftarrow$

Sea ${}^{\alpha}A = {}^{\alpha}B \rightarrow {}^{\alpha}A \subseteq {}^{\alpha}B$ y ${}^{\alpha}B \subseteq {}^{\alpha}A$ entonces $x \in {}^{\alpha}A \rightarrow x \in {}^{\alpha}B$ y $x \in {}^{\alpha}B \rightarrow x \in {}^{\alpha}A$ entonces $A(x) \geq \alpha \rightarrow B(x) \geq \alpha$ y $B(x) \geq \alpha \rightarrow A(x) \geq \alpha$, por tanto $B(x) \geq A(x)$ y $A(x) \geq B(x)$

Por tanto $A(x) = B(x) \forall x \in X \rightarrow A = B$.

(iv) $\Longrightarrow$

Asumimos que $A = B \rightarrow A(x) = B(x) \forall x \in X$, entonces, sea $x \in {}^{\alpha+}A \rightarrow A(x) > \alpha \rightarrow B(x) > \alpha \rightarrow x \in {}^{\alpha+}B \rightarrow {}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha+}B$.

Ahora, sea $x \in {}^{\alpha+}B \rightarrow B(x) > \alpha \rightarrow A(x) > \alpha \rightarrow x \in {}^{\alpha+}A \rightarrow {}^{\alpha+}B \subseteq {}^{\alpha+}A$.

Por tanto ${}^{\alpha+}A = {}^{\alpha+}B$.

$\Longleftarrow$

Sea ${}^{\alpha+}A = {}^{\alpha+}B \rightarrow {}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha+}B$ y ${}^{\alpha+}B \subseteq {}^{\alpha+}A$ entonces $x \in {}^{\alpha+}A \rightarrow x \in {}^{\alpha+}B$ y $x \in {}^{\alpha+}B \rightarrow x \in {}^{\alpha+}A$ entonces $A(x) > \alpha \rightarrow B(x) > \alpha$ y $B(x) > \alpha \rightarrow A(x) > \alpha$, por tanto $B(x) \geq A(x)$ y $A(x) \geq B(x)$

Por tanto $A(x) = B(x) \forall x \in X \rightarrow A = B$. $\blacksquare$

Unión

Sean A y B conjuntos difusos. La forma generalizada de la unión es la T-conorma. Podemos representarla de la siguiente forma:

$$S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

La T-conorma que se corresponde con la unión de conjuntos difusos es el máximo, por tanto tenemos que:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

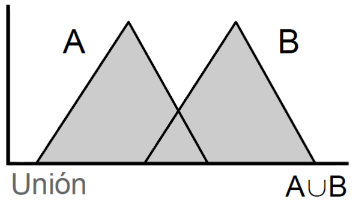


Figura 2.21: Ejemplo de la Unión.

Intersección

Sean A y B conjuntos difusos. La forma generalizada de la intersección se denomina T-norma. Se representa de la siguiente forma:

$$T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

La T-norma que se corresponde con la intersección de conjuntos difusos es el mínimo, por tanto tenemos que:

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

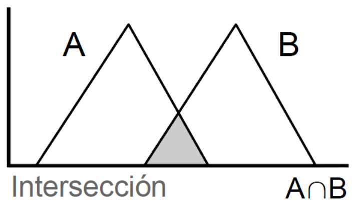


Figura 2.22: Ejemplo de la Intersección.

Una vez vista la unión y la intersección de conjuntos difusos podemos ver el siguiente teorema.

Teorema 5 *Sean A y B dos conjuntos difusos en X, entonces*

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

Demostración
Tenemos que $|A| = \sum_{x \in X} mu_A(x)$ y $|B| = \sum_{x \in X} mu_B(x)$. Entonces

$$|A \cup B| = \sum_{x \in X} mu_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in X} (max[mu_A(x), mu_B(x)]),$$
$$|A \cup B| = max(\sum_{x \in X} mu_A(x), \sum_{x \in X} mu_B(x)),$$
$$|A \cup B| = max(|A|, |B|).$$

De igual modo tenemos que

$$|A \cap B| = \sum_{x \in X} mu_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in X} (min[mu_A(x), mu_B(x)]),$$
$$|A \cap B| = min(\sum_{x \in X} mu_A(x), \sum_{x \in X} mu_B(x)),$$
$$|A \cap B| = min(|A|, |B|).$$

Tenemos ahora dos casos: 1) Si $|A| > |B|$ entonces $|A \cup B| = |B|$ y $|A \cap B| = |A|$. 2) Si $|A| < |B|$ entonces $|A \cup B| = |A|$ y $|A \cap B| = |B|$. En ambos casos, se sumple la fórmula $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$. ■

Complementariedad

El complementario $\bar{A}$ de un conjunto difuso A (también puede denotarse por cA) puede definirse de distintas maneras al igual que la unión y la intersección. El complementario esta definido por una funión $c : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ y tiene que satisfacer los siguientes axiomas para todo $a, b \in [0, 1]$:

- Condiciones frontera: $c(0) = 1; \quad c(1) = 0$.
- c es una función contínua.
- Monotonicidad: Si $a \leq$ b entonces $c(a) \geq c(b)$.
- Involución: $c(c(a)) = a$.

Al igual que sucedía con los operadores de unión y de intersección, también para el complemento existen gran variedad de clases. Nosotros utilizaremos el complemento clásico:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

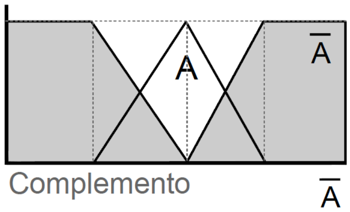


Figura 2.23: Ejemplo del Complementario.

Sin embargo existe una función que es de las más utilizadas conocida como el λ-complemento de Sugeno y que viene definido por la siguiente expresión:

$$\mu_{\bar{A}^{\lambda}}(x) = \frac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)} \text{ con } \lambda \in (-1, \infty).$$

Por último, otra variante que se utiliza en algunos casos para generar el complemento es el complemento de Yager:

$$\mu_{\bar{A}^w}(x) = (1 - \mu_A(x)^w)^{\frac{1}{w}} \text{ con } w \in [0, \infty].$$

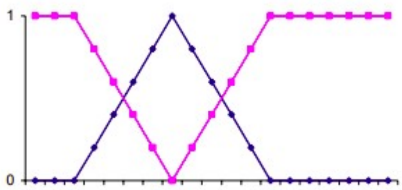


Figura 2.24: Complementario de una función triangular.

Podemos ver en las Figuras 2.25 y 2.26 dos complementos para una misma función. En el caso del complemento de Yager tenemos un ejemplo para $w = 2$ y en el de Sugeno para $\lambda = 1/2$.

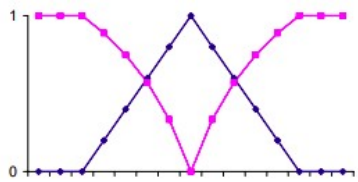


Figura 2.25: Complementario de Sugeno de una función triangular para $\lambda = 1/2$.

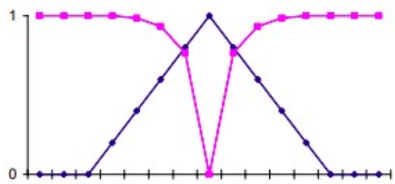


Figura 2.26: Complementario de Yager de una función triangular para $w = 2$.

Distancia

También podemos calcular la distancia entre dos conjuntos difusos A y B en el mismo universo X. Esta función mide la cercanía entre ambos conjuntos difusos. En general se puede usar la **distancia de Minkowski**:

$$d(A,B) = \sqrt[p]{\int_x |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx}, \ \ p \geq 1.$$

Casos particulares:

- **Distancia de Hamming** (p=1): $\quad d(A,B) = \int_x |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx.$
- **Distancia Euclídea** (p=2): $\quad d(A,B) = \sqrt{\int_x |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx}.$
- **Distancia de Tchebyschev** ($p = \infty$): $\quad d(A,B) = \sup_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|.$

En universos de discurso discretos, la integral se sustituye por un sumatorio.

Ejemplo Vamos a calcular la distancia de Hamming entre dos conjuntos difusos $A = \{(a, 0{,}2), (b, 0{,}5), (c, 0{,}8), (d, 0{,}4)\}$ y $B = \{(a, 0{,}1), (b, 0{,}7), (c, 0{,}3), (d, 0{,}9)\}$ del universo del discurso $X = \{a, b, c, d\}$.

$$d(A,B) = \textstyle\sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|,$$
$$d(A,B) = |\mu_A(a) - \mu_B(a)| + |\mu_A(b) - \mu_B(b)| + |\mu_A(c) - \mu_B(c)| + |\mu_A(d) - \mu_B(d)|,$$
$$d(A,B) = |0{,}2 - 0{,}1| + |0{,}5 - 0{,}7| + |0{,}8 - 0{,}3| + |0{,}4 - 0{,}9|,$$
$$d(A,B) = |0{,}1| + |-0{,}2| + |0{,}5| + |-0{,}5| = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}3.$$

2.1.4. Propiedades de los conjuntos difusos

Los conjuntos difusos presentan algunas propiedades que coinciden con las de los conjuntos clásicos. Esto se debe a que, en el fondo los conjuntos clásicos son un caso particular de los conjuntos difusos. Sean A, B y C conjuntos difusos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- **Conmutativa**: $A \cup B = B \cup A$; $\quad A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$; $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- **Idempotencia**: $A \cup A = A$; $\quad A \cap A = A$
- **Distributiva**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Involución**: $c(c(A)) = A$
- **Condiciones Frontera**: $A \cup \emptyset = A$; $\quad A \cup X = X$; $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$; $\quad A \cap X = A$
- **Transitividad**: Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$
- **Leyes de Morgan**: $c(A \cup B) = c(A) \cap c(B)$; $\quad c(A \cap B) = c(A) \cup c(B)$

A partir de estas propiedades se pueden deducir estas otras:

- $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$
- Si $A \subset B$ entonces $A = A \cap B$ y $B = A \cup B$

2.1.5. Descomposición de conjuntos difusos

La representación de un conjunto difuso arbitrario A como ${}_{\alpha}A$ es definido en terminos de α-cortes de A como

$$ {}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x), $$

es normalmente referido como una descomposición del conjunto difuso A.

Ejemplo. Sea el universo del discurso $X = \{a, b, c, d, e\}$. Sea el conjunto difuso $A = \{(a, 0{,}2), (b, 0{,}4), (c, 0{,}6), (d, 0{,}8), (e, 1)\}$

Para $\alpha = 0{,}2$
${}^{0,2}A = \{a, b, c, d, e\}$
${}^{0,2}A(x) = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1), (e, 1)\}$
${}_{0,2}A(x) = (0{,}2) \cdot {}^{0,2}A(x)$
${}_{0,2}A(x) = \{(a, 0{,}2), (b, 0{,}2), (c, 0{,}2), (d, 0{,}2), (e, 0{,}2)\}$

Para $\alpha = 0{,}4$
${}^{0,4}A = \{b, c, d, e\}$
${}^{0,4}A(x) = \{(a, 0), (b, 1), (c, 1), (d, 1), (e, 1)\}$
${}_{0,4}A(x) = (0{,}4) \cdot {}^{0,4}A(x)$
${}_{0,4}A(x) = \{(a, 0), (b, 0{,}4), (c, 0{,}4), (d, 0{,}4), (e, 0{,}4)\}$

Para $\alpha = 0{,}6$
${}^{0,6}A = \{c, d, e\}$
${}^{0,6}A(x) = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (d, 1), (e, 1)\}$
${}_{0,6}A(x) = (0{,}6) \cdot {}^{0,6}A(x)$
${}_{0,6}A(x) = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0{,}6), (d, 0{,}6), (e, 0{,}6)\}$

Para $\alpha = 0{,}8$
${}^{0,8}A = \{d, e\}$
${}^{0,8}A(x) = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 1), (e, 1)\}$
${}_{0,8}A(x) = (0{,}8) \cdot {}^{0,8}A(x)$
${}_{0,8}A(x) = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0{,}8), (e, 0{,}8)\}$

Para $\alpha = 1$
${}^{1}A = \{e\}$
${}^{1}A(x) = \{(a,0),(b,0),(c,0),(d,0),(e,1)\}$
${}_{1}A(x) = 1 \cdot {}^{1}A(x)$
${}_{1}A(x) = \{(a,0),(b,0),(c,0),(d,0),(e,1)\}$

Teorema 6 *(Primer Teorema de la Descomposición) Para todo conjunto difuso A se cumple que*

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A,$$

donde ${}_{\alpha}A$ denota a una descomposición de conjuntos difusos de la forma ${}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x)$ y $\bigcup$ denota la unión difusa.

Demostración $\Longrightarrow$

Para cada caso particular $x \in X$. Sea $A(x) = a$, entonces $[\bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A](x) = Sup_{\alpha\in[0,1]\alpha}A](x) = max\{Sup_{\alpha\in[0,a]\alpha}A](x), Sup_{\alpha\in(a,1]\alpha}A(x)\}$

Para encontrar $Sup_{\alpha\in(a,1]\alpha}A(x)$ lo hacemos de la siguiente manera. Para cada $\alpha \in (a,1]$ tenemos que $\alpha > a \rightarrow A(x) = a < \alpha \rightarrow A(x) < \alpha \rightarrow \alpha \notin {}^{\alpha}A \rightarrow {}^{\alpha}A(x) = 0$. Entonces, tenemos que ${}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \rightarrow {}_{\alpha}A(x) = 0$ para todo $\alpha \in (a,1]$, lo cual nos lleva a la conclusión de que $Sup_{\alpha\in(a,1]\alpha}A(x) = 0$

Para encontrar $Sup_{\alpha\in[0,a]\alpha}A(x)$ lo hacemos de la siguiente manera. Para cada $\alpha \in [0,a]$ tenemos que $\alpha \leq a \rightarrow A(x) = a \geq \alpha \rightarrow A(x) \geq \alpha \rightarrow \alpha \in {}^{\alpha}A \rightarrow {}^{\alpha}A(x) = 1$. Entonces, tenemos que ${}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x) = \alpha \cdot 1 = \alpha \rightarrow {}_{\alpha}A(x) = \alpha$ para todo $\alpha \in (a,1]$, lo cual nos lleva a la conclusión de que $Sup_{\alpha\in(a,1]\alpha}A(x) = a$

Volviendo a la cuestión inicial
$[\bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A](x) = max\{a,0\} = a = A(x) \rightarrow \bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A = A$. ∎

Teorema 7 *(Segundo Teorema de la Descomposición) Para todo conjunto difuso A se cumple que*

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A,$$

donde ${}_{\alpha+}A$ *denota a una descomposición de conjuntos difusos de la forma* ${}_{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A(x)$ *y* $\bigcup$ *denota la unión difusa.*

Demostración $\Longrightarrow$

Para cada caso particular $x \in X$. Sea $A(x) = a$, entonces $[\bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A](x) = Sup_{\alpha \in [0,1] \alpha+}A](x) = max\{Sup_{\alpha \in [0,a) \alpha+}A](x), Sup_{\alpha \in [a,1] \alpha+}A(x)\}$

Para encontrar $Sup_{\alpha \in [a,1] \alpha+}A(x)$ lo hacemos de la siguiente manera. Para cada $\alpha \in [a,1]$ tenemos que $\alpha \geq a \rightarrow A(x) = a \leq \alpha \rightarrow A(x) \leq \alpha \rightarrow \alpha \notin {}^{\alpha+}A \rightarrow {}^{\alpha+}A(x) = 0$. Entonces, tenemos que ${}_{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \rightarrow {}_{\alpha+}A(x) = 0$ para todo $\alpha \in (a,1]$, lo cual nos lleva a la conclusión de que $Sup_{\alpha \in [a,1] \alpha+}A(x) = 0$

Para encontrar $Sup_{\alpha \in [0,a) \alpha}A(x)$ lo hacemos de la siguiente manera. Para cada $\alpha \in [0,a]$ tenemos que $\alpha > a \rightarrow A(x) = a > \alpha \rightarrow A(x) > \alpha \rightarrow \alpha \in {}^{\alpha+}A \rightarrow {}^{\alpha+}A(x) = 1$. Entonces, tenemos que ${}_{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot 1 = \alpha \rightarrow {}_{\alpha+}A(x) = \alpha$ para todo $\alpha \in [a,1]$, lo cual nos lleva a la conclusión de que $Sup_{\alpha \in [a,1] \alpha+}A(x) = a$

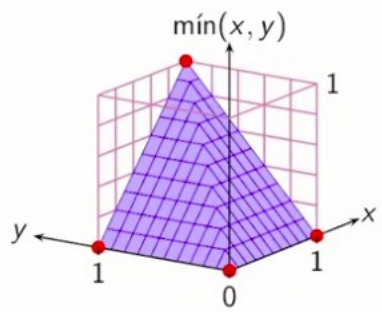
Volviendo a la cuestión inicial
$[\bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A](x) = max\{a, 0\} = a = A(x) \rightarrow \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A = A$. ■

Cualquier problema formulado en el marco de los conjuntos difusos puede resolverse transformando esos conjuntos difusos en su familia de α-cortes anidados, determinando la solución para cada uno usando técnicas no difusas.

2.1.6. Normas y Conormas Triangulares

Como se nos comenta en [8], son un tipo de generalizaciones de las operaciones mínnimo y máximo que se utilizan en la unión e intersección de conjuntos difusos.

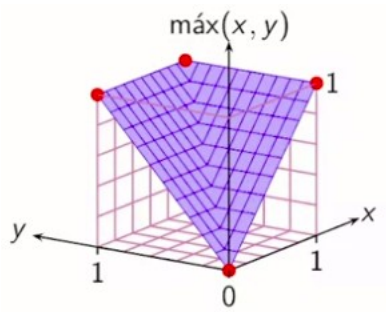
Como estamos trabajando sobre grados de pertenencia y estos estan en el intervalo $[0, 1]$ las funciones del mínimo y el máximo solo se consideran en ese intervalo. Por esta razón, en las Figuras 2.27 y 2.28 dibujamos estas funciones en el cubo unitario. Podemos observar que las funciones son muy parecidas ya que en ambos casos son caras triangulares y dichos triangulos son rectángulos.



x	y	$\min(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 2.27: Representación de la función mínimo en el cubo unitario.

La razón de escoger el mínimo para representar la intersección es que nos permitirá reproducir los cuatro puntos de la tabla que vemos en la Figura 2.27. Estos puntos estan representados en rojo en el cubo unitario.



x	y	$\max(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 2.28: Representación de la función máximo en el cubo unitario.

La razón para de escoger el máximo es la misma que en el caso anterior. Los puntos representados en la tabla que cumplen la operación de la unión se pueden ver en el cubo unitario.

Sin embargo, las funciones mínimo y máximo no son las únicas que pasan por estos cuatro puntos. A las funciones que pasan por los puntos que hemos indicado en la Figura 2.27, es decir, que son parecidas a la función mínimo las llamamos **T-normas**. Las t-normas cumplen la misma función que el mínimo, nos permiten operar en la intersección pero con propiedades matemáticas distintas. Análogamente, a las funciones parecidas al máximo que pasan por los cuatro puntos indicados en la Figura 2.28 las llamamos **S-normas** o **T-conormas** y estas nos permiten operar en la unión.

T-normas

Una T-norma es un operador $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que satisface las siguientes propiedades para todo $a, b, c, d \in [0,1]$:

- (1) Conmutativa: $T(a,b) = T(b,a)$.
- (2) Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $T(a,b) \leq T(c,d)$.
- (3) Asociativa: $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$.
- (4) Elemento unidad: $T(a,1) = a$.

Veamos ahora algunos ejemplos de T-normas.

La **T-Probabilística** o **T-Norma del producto** pasa por los cuatro puntos que nos interesan pero a diferencia del mínimo es una función suave, es decir, no tiene discontinuidades en su forma. El producto de dos valores que estan entre 0 y 1 es otro valor entre 0 y 1.

$$T_{Prob} = xy.$$

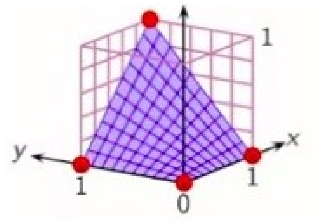


Figura 2.29: T-Probabilística

La **T-Lukasiewicz** también es muy utilizada. Esta formada por un plano horizontal y el plano x+y-1.

$$T_{Luk} = max(x + y - 1, 0).$$

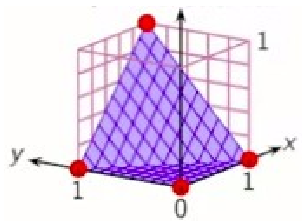


Figura 2.30: T-Lukasiewicz

La **T-Drastica** esta formada por tres planos: el horizontal y los que estan sobre las caras del fondo. Se puede demostrar que todas las T-normas son mayores o iguales que la T-Drastica.

$$T_{Dra} = \begin{cases} x & \text{si} \quad y = 1 \\ y & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & otro \quad caso \end{cases}$$

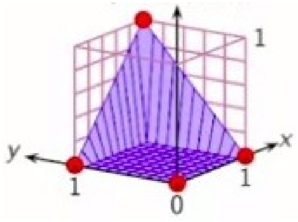


Figura 2.31: T-Drástica

La **T-Sugeno** es una T-norma que depende del parametro λ de manera que conforme cambiemos el valor de este parámetro también cambiará la gráfica. En la Figura 2.32 podemos ver 8 gràficas distintas en función del parámetro λ_T. Podemos observar que conforme aumenta el valor del parámetro la función se va pareciendo más a la función mínimo.

$$T_{Sug} = max(\tfrac{x+y-1+\lambda_T xy}{1+\lambda_T}, 0).$$

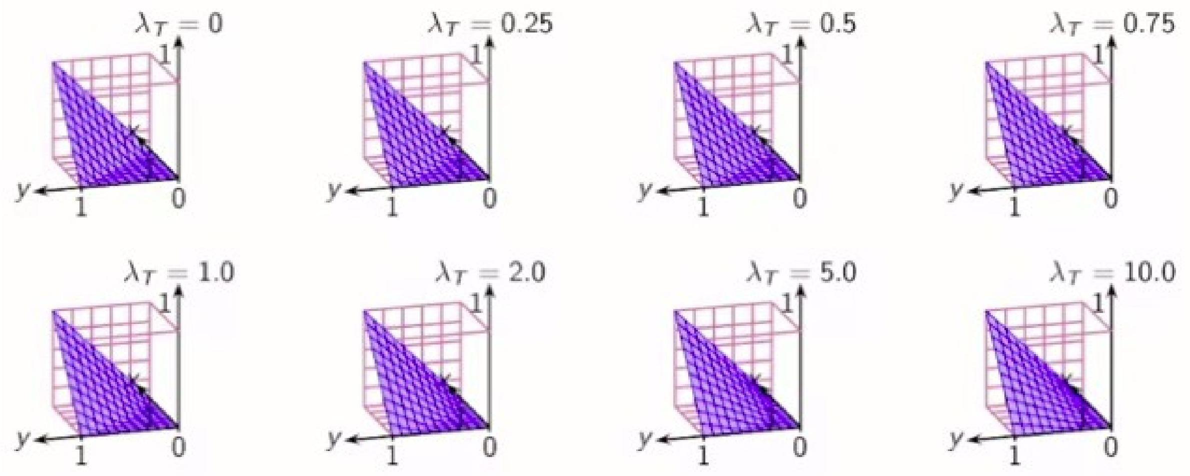


Figura 2.32: T-Sugeno en función de λ_T.

Otro ejemplo de una T-norma que depende de un parámetro es la **T-Hamacher**. Al tratarse de otra función distinta el efecto de modificar el parámetro γ también es diferente. Como podemos observar en la Figura 2.33 al aumentar el valor de γ la función se va acercando a la **T-Drastica**.

$$T_{Ham} = \frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}.$$

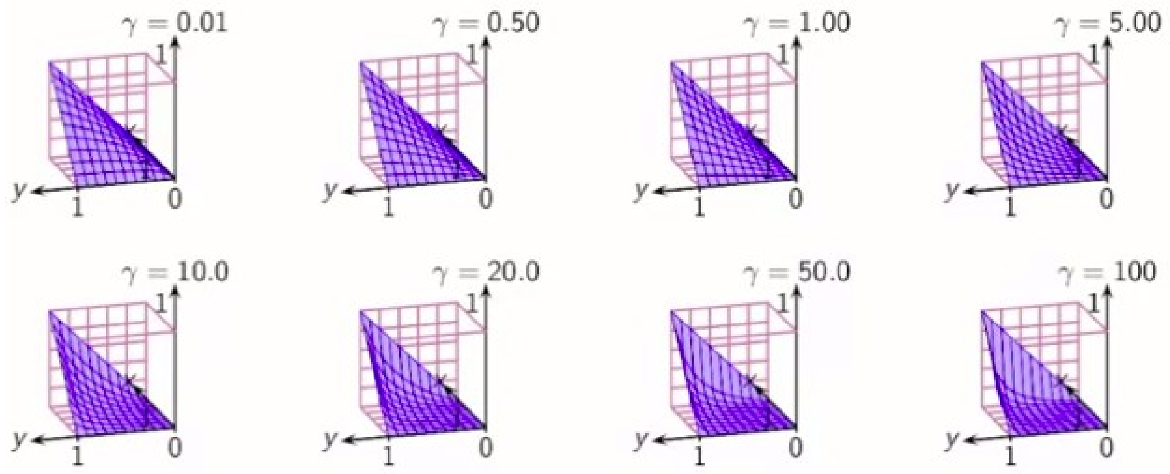


Figura 2.33: T-Hamacher en función de γ.

Como hemos podido observar tenemos muchas funciones que nos permiten generalizar el operador mínimo. La intersección podriamos hacerla de muchas formas distintas utilizando cualquier T-norma.

Teorema 8 *La intersección difusa estándar es la única T-norma idempotente.*

Demostración

Claramente, $min(a, a) = a$ para cada $a \in [0, 1]$. Supongamos que existe una T-norma idempotente, es decir, $T(a, a) = a$ para cada $a \in [0, 1]$. Entonces para cada $a, b \in [0, 1]$, si $a \leq b$, entonces:

$$a = T(a, a) \leq T(a, b) \leq T(a, 1) = a.$$

Así, $T(a, b) = a = min(a, b)$. Similarmente, si $a \geq b$, entonces:

$$b = T(b, b) \leq T(a, b) \leq T(1, b) = b,$$

en consecuencia $T(a,b) = b = min(a,b)$. Por lo tanto, $T(a,b) = min(a,b)$ para cada $a,b \in [0,1]$. ■

Teorema 9 *Para cada* $a,b \in [0,1]$,

$$T_{Dra}(a,b) \leq T(a,b) \leq min(a,b)$$

donde T_{Dra} *denota la interseccióncon con la T-norma Drástica.*

Demostración

Desigualdad superior. Por las propiedades (2) y (4) $\rightarrow T(a,b) \leq T(a,1) \leq a$, por la propiedad (1) $\rightarrow T(a,b) = T(b,a) \leq T(b,1) \leq b \rightarrow T(a,b) \leq a$ y $T(a,b) \leq b \rightarrow T(a,b) \leq min(a,b)$.

Desigualdad inferior. Por la propiedad (4) $\rightarrow T(a,b) = a$ cuando $b = 1$ y $T(a,b) = b$ cuando $a = 1$. Ahora, como $T(a,b) \leq min(a,b) \rightarrow T(a,0) = T(0,b) = 0$, por la propiedad (2) $\rightarrow T(a,b) \geq T(a,0) = T(0,b) = 0$. Por lo tanto, $T_{Dra}(a,b) \leq T(a,b)$. ■

S-normas (o T-conormas)

Una S-norma es un operador $S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que satisface las siguientes propiedades para todo $a,b,c,d \in [0,1]$:

- (1) Conmutativa: $S(a,b) = S(b,a)$.
- (2) Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $S(a,b) \leq S(c,d)$.
- (3) Asociativa: $S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$.
- (4) Elemento unidad: $S(a,0) = a$.

Veamos ahora algunos ejemplos de S-normas que van a ser las duales o equivalentes de las que T-normas que hemos visto anteriormente.

La **S-Probabilística** es una función suave al igual que su T-norma dual.

$$S_{Prob} = x + y - xy.$$

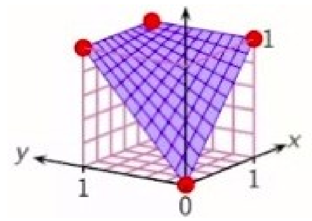


Figura 2.34: S-Probabilística.

La **S-Lukasiewicz** esta formada por un plano horizontal en la parte de arriba del cubo unitario y el plano x+y.

$$S_{Luk} = min(x + y, 1).$$

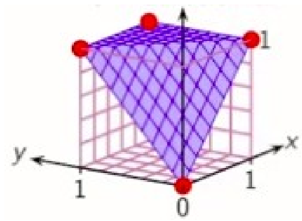


Figura 2.35: S-Lukasiewicz.

La **S-Drástica** esta formada por tres planos: el horizontal de altura 1 y los que estan sobre las caras del fondo. Se puede demostrar que todas las S-normas son menores o iguales que la S-Drástica.

$$S_{Dra} = \begin{cases} x & \text{si} \quad y = 0 \\ y & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & otro \quad caso \end{cases}$$

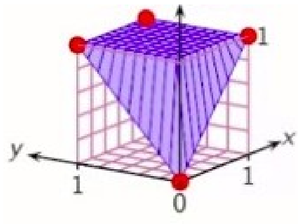


Figura 2.36: S-Drástica.

Al igual que con las T-normas también tenemos unas familias de S-normas parametrizadas. En primer lugar vemos la **S-Sugeno** que esta en función del parámetro λ_S. En la Figura 2.37 vemos que conforme aumenta el valor del parámetro la función se va pareciendo más a la función máximo.

$$S_{Sug} = max(x + y - 1 + \lambda_S xy, 1).$$

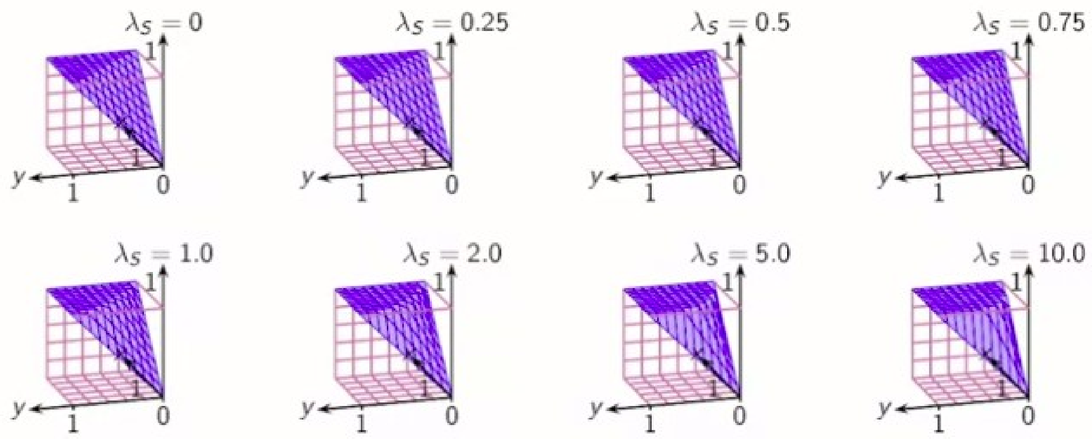


Figura 2.37: S-Sugeno.

El otro ejemplo que veremos de una S-norma que depende de un parámetro es la **S-Hamacher**. En este caso el parámetro utilizado es γ. Como podemos observar en la Figura 2.38 al aumentar el valor de γ la función se va acercando a la **S-Drastica**.

$$S_{Ham} = \frac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}.$$

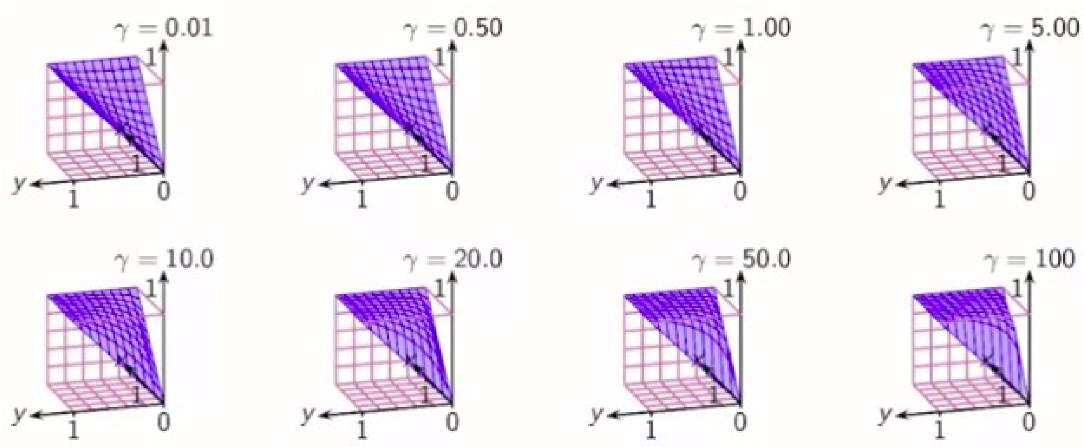


Figura 2.38: S-Hamacher.

Despues de ver todos estos ejemplos podemos concluir que las colecciones de familias parametrizadas son bastantes y cada una tiene ciertas propiedades. Las T-normas y las S-normas nos permiten agregar información de una cierta manera.

Teorema 10 *La unión difusa estándar es la única T-conorma idempotente.*

Demostración

Claramente, $max(a, a) = a$ para cada $a \in [0, 1]$. Supongamos que existe una T-conorma idempotente, es decir, $S(a, a) = a$ para cada $a \in [0, 1]$. Entonces para cada $a, b \in [0, 1]$, si $a \leq b$, entonces:

$$b = S(0, b) \leq S(a, b) \leq S(b, b) = b.$$

Así, $S(a, b) = b = max(a, b)$. Similarmente, si $a \geq b$, entonces:

$$a = S(a, 0) \leq S(a, b) \leq S(a, a) = a,$$

en consecuencia $S(a, b) = a = max(a, b)$. Por lo tanto, $S(a, b) = max(a, b)$ para cada $a, b \in [0, 1]$. ■

Teorema 11 *Para cada $a, b \in [0, 1]$,*

$$S_{Dra}(a, b) \geq S(a, b) \geq max(a, b)$$

donde S_{Dra} denota la unión con la S-norma Drástica.

Demostración

Desigualdad superior. Por las propiedades (2) y (4) $\rightarrow S(a, b) \geq S(a, 0) \geq a$, por la propiedad (1) $\rightarrow S(a, b) = S(b, a) \geq S(b, 0) \geq b \rightarrow S(a, b) \geq a$ y $S(a, b) \geq b \rightarrow S(a, b) \geq max(a, b)$.

Desigualdad inferior. Por la propiedad (4) $\rightarrow S(a, b) = a$ cuando $b = 0$ y $S(a, b) = b$ cuando $a = 0$. Ahora, como $S(a, b) \geq max(a, b) \rightarrow S(a, 1) = S(1, b) = 1$, por la propiedad (2) $\rightarrow S(a, b) \leq S(a, 1) = S(1, b) = 1$. Por lo tanto, $S_{Dra}(a, b) \geq S(a, b)$. ■

Ejemplo. Si consideramos dos funciones de pertenencia de tipo triangular (niño, adolescente), la intersección con la T-norma del mínimo sería:

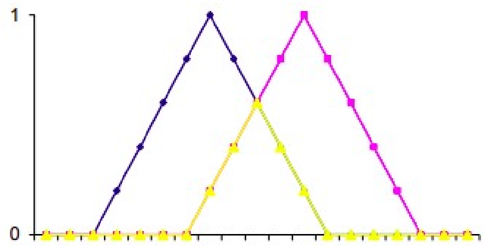


Figura 2.39: Ejemplo niño-adolescente con la T-norma del mínimo

en la cual tomamos en cada instante el valor mínimo de entre las dos funciones. Sin embargo, hemos visto que para la intersección podemos tomar diferentes T-normas. En la Figura 2.40 vemos como seria la intersección aplicando la T-norma del producto que hemos visto anteriormente.

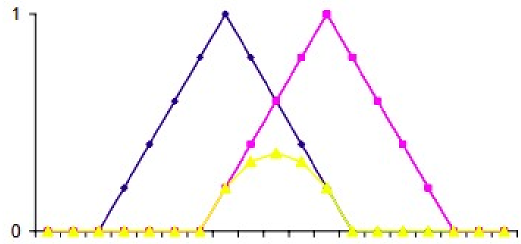


Figura 2.40: Ejemplo niño-adolescente con la T-norma del producto.

Por último, vemos otro ejemplo en la Figura 2.41 en la cual aplicamos la T-norma drástica, que hemos visto que de todas las T-normas es la menor.

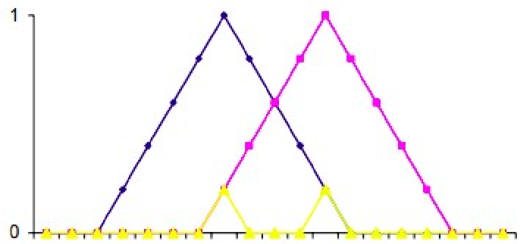


Figura 2.41: Ejemplo niño-adolescente con la T-norma drástica.

Veamos ahora tres ejemplos en los que aplicamos diferentes T-conormas para llevar a cabo la unió. En primer lugar, vemos en la Figura 2.42 el resultado de aplicar el máximo a la unión.

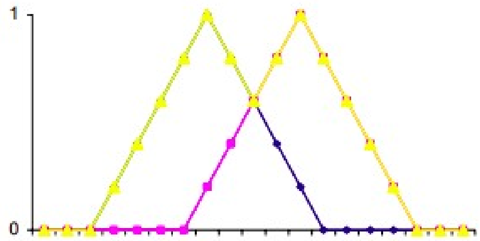


Figura 2.42: Ejemplo niño-adolescente con la T-conorma del máximo.

Como hemos visto en la teoria, el conjunto resultante más grande en la unión viene dado por la T-conorma drástica, esto lo podemos ver en la Figura 2.43.

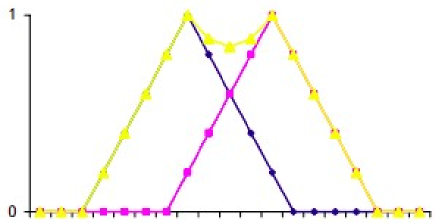


Figura 2.43: Ejemplo niño-adolescente con la T-conorma de la suma.

Por último, vemos otro ejemplo en la Figura 2.44 en la cual aplicamos la T-conorma drástica, que hemos visto que de todas las T-conormas es la mayor.

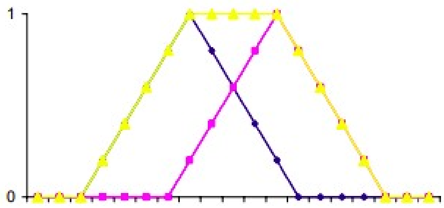


Figura 2.44: Ejemplo niño-adolescente con la T-conorma drástica.

2.2. Números difusos

Según [9], un número difuso es una extensión de un número real, en el sentido que no se refiere a un único valor sino a un conjunto de posibles valores. Estos varían con un peso entre 0 y 1 dado por la función miembro o de nembresia. Un número difuso es así un caso especial de conjunto difuso convexo. Así como la lógica difusa es una extensión de la lógica booleana (que sólo utiliza valores 0 y 1, exclusivamente), los números difusos son una extensión de los números reales.

En un sentido intuitivo, son conjuntos difusos que representan el significado de declaraciones tales, como próximo a 3 o cercano a 5 y medio. En otras palabras,los números difusos toman en cuenta el aproximado,casi y no casi, cualidades de etiquetas numéricas.

Los números difusos se utilizan en estadística, programación de computadoras, ingeniería (especialmente comunicaciones) y ciencia experimental. El concepto tiene en cuenta el hecho de que todos los fenómenos del universo físico tienen un grado de incertidumbre inherente.

En primer lugar vamos a ver la definición formal y algunos conceptos que podemos ver en [10] y [11] para saber como trabajar con ellos.

Definición 16 *Llamamos* ***número difuso*** *a un conjunto difuso sobre R, normal, convexo y semicontínuo superiormente.*

Recordemos que el hecho de que sea un conjunto sobre R determina que el universo del discurso son los números reales. Que sea normal quiere decir que al menos un elemento del universo del discurso pertenece al conjunto, es decir, un conjunto vacio no es un número difuso.

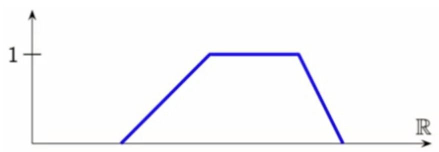


Figura 2.45: Función de pertenencia de un número difuso.

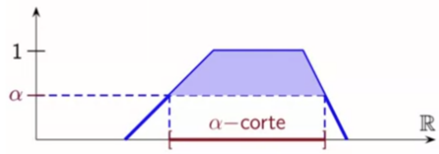


Figura 2.46: Proyección del α-corte sobre R.

Todos los α-cortes de un número difuso son interválos cerrados. No importa cual sea el α-corte que hagamos, siempre obtendremos un intervalo cerrado y acotado.

Veamos un ejemplo que no cumple esta definición. Consideramos la función trapezoidal de la Figura 2.47, en la cual no sube hasta 1 el grado de pertenencia en ningún momento. Entonces, si trazamos un α-corte a la altura que se indica en la figura la intersección es el conjunto vacio, por tanto, no es un intervalo cerrado. El conjunto no es un número difuso, esto se debe a que no cumple la segunda propiedad, es decir, no es un conjunto normal.

Figura 2.47: Ejemplo de conjunto difuso no normal.

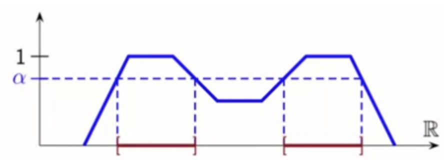


Figura 2.48: Ejemplo de conjunto difuso no convexo.

Ahora que ya hemos visto algunos ejemplos que no cumplen la definición de números difusos vamos a centrarnos en dos tipos de conjuntos que si que cumplen esta definición: los números trapezoidales y los números triangulares. Estos números, como su propio nombre indican, hacen referencia a que su función de pertenencia son de tipo trapezoidal y triangular.

Para referirnos a los números trapezoidales podemos utilizar la siguiente notación:

$$T(a, b, c, d),$$

donde

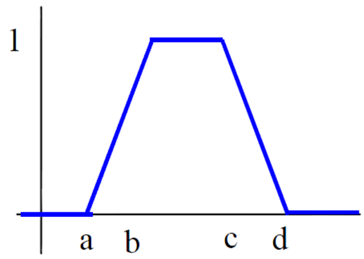


Figura 2.49: Ejemplo de úmero trapezoidal.

y para referirnos a los números triangulares podemos utilizar la siguiente notación:

$$Tr(a, m, b),$$

donde

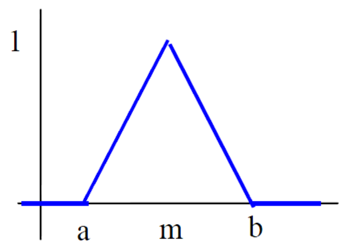


Figura 2.50: Ejemplo de úmero triangular.

Sabemos que estos dos tipos de funciones representan números difusos porque cumplen las propiedades de la definición: estan definidos en R, son normales, convexos y semicontinuos superiormente. Un ejemplo de número difuso podemos verlo en la Figura 2.51 con la notación que acabamos de ver.

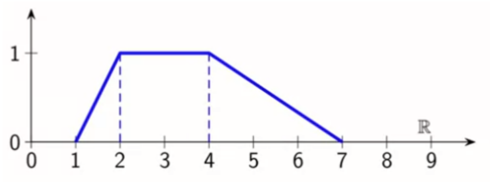


Figura 2.51: Representación del número difuso T(1,2,3,7).

Despues de ver todo esto podemos volver la cuestión principal ¿Para que nos sirven los números difusos? La respuesta es para representar cantidades numéricas sobre las que tenemos algún tipo de incertidumbre y para poder convertir ciertas expresiones lingüísticas.

2.2.1. Operaciones con Números Difusos

Tal y como se nos explica en [12], estas operaciones se basan en el Principio de Extensión, que transforma una operación F definida sobre dos elementos del Universo U, en otra operación F definida sobre dos conjuntos difusos de U.

Principio de extensión

Para poder trabajar con números difusos necesitamos explicar el *principio de extensión*. Este es el principio que nos permite definir funciones sobre conjuntos difusos utilizando funciones que se definen sobre conjuntos *Crisp*.

Usado para transformar conjuntos difusos, que tengan iguales o distintos universos, según una función de transformación en esos universos.

Sea $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función de varias variables en $x_1, x_2, ..., x_n$. Cada una de estas variables esta definida en su universo del discurso $U_1, U_2, ..., U_n$ y el resultado de calcular esta función esta definido sobre el universo del discurso V. Ahora, tenemos unos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ que estan definidos sobre los universos $U_1, U_2, ..., U_n$ y queremos calcular la función de esos conjuntos difusos. El resultado lo llamaremos B:

$$B = f(A_1, A_2, ..., A_n)$$

Ese resultado B va a aser un conjunto difuso

$$\mu_B(y) = sup_{y=f(x_1,x_2,...,x_n)} \ \{min[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n)]\}$$

Cada elemento del universo de llegada del universo V va a tener un grado de pertenencia a ese universo y este grado es $\mu_B(y)$. Para obtener dicho valor primero hemos de hallar todas las combinaciones de $x_1, x_2, ..., x_n$ que dan por resultado y. Y vamos a tener que analizar todos los casos que cumplan esa condición. Para cada caso va abuscar el grado de pertenencia de cada variable, cada conjunto, el grado de pertenencia de x_1 en A_1 y va a tomar el mínimo de esos valores. Ese valor mínimo va a representar el grado de pertenencia de esa condición que satisface el hecho de generar el y. Pero va a haber muchas de esas combinaciones y va a tener que analizarlas todas y va a quedarse con el mayor valorque satisfaga esa condición. Ese es el supremo.

Sea $\overline{y}$ tal que $\overline{y} \in \alpha_B$. Estamos diciendo que $\overline{y}$ forma parte del α-corte del conjunto de salida, por tanto

$$\overline{y} \in \alpha_B \Longleftrightarrow \mu_B(\overline{y}) \geq \alpha \Longleftrightarrow sup_{\overline{y}=f(x)}\{\mu_A(x)\} \geq \alpha.$$

Este grado de pertenencia lo hemos calculado por el principio de extensión. Por tanto, satisface las dos condiciones que vemos arriba. Para que esto suceda, debe existir un valor tal que al aplicarle la función nos da $\overline{y}$, y además, que su función de pertenencia a A sea mayor o igual que α

$$\overline{y} \in \alpha_B \Longleftrightarrow \mu_B(\overline{y}) \geq \alpha \Longleftrightarrow sup_{\overline{y}=f(x)}\{\mu_A(x)\} \geq \alpha \Longleftrightarrow \overline{xy} = f(\overline{x}) Y \mu_A(\overline{x}) \geq \alpha.$$

Para encontrar el α-corte de B debemos calcular la función en todos los α-cortes de A.

$$\overline{y} \in \alpha_B \Longleftrightarrow \overline{y} \in f(\alpha_A)$$

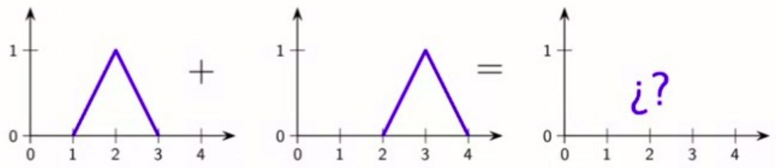


Figura 2.52: Como representar la suma de dos números difusos

Esta forma de ver el principio de extensión nos dice que la respuesta la podemos obtener analizando el problema α-corte por α-corte. Como vemos en la Figura 2.52, si analizamos los α-cortes del número aproximadamente 2 y del aproximadamente 3 eso nos va a ir dando los α-cortes de la respuesta. Ahora bien, sabemos que los α-cortes de los números difusos son intervalos cerrados, entonces, analizar α-corte por α-corte nos implica trabajar con intervalos cerrados.

2.2.2. Artimética de intervalos

Como se nos comenta en [13], el primer paso para llevar a cabo las operaciones con números difusos es tener claro la aritmética de intervalos. Sean $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ dos intervalos cerrados y acotados de números reales. Si * denota alguna operación aritmética, entonces $[a_1, a_2] * [b_1, b_2] = [\alpha, \beta]$ donde

$$[\alpha, \beta] = \{a * b | a_1 \leq a \leq b_1, a_2 \leq b \leq b_2\}.$$

Si * es la división, debemos asumir que 0 no pertenece a $[a_2, b_2]$. La ecuación anterior se puede simplificar de la siguiente manera

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2],$$

$$[\mathrm{a}_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2],$$

$$[\mathrm{a}_1, b_1]/[a_2, b_2] = [a_1, b_1] \cdot [\tfrac{1}{b_2}, \tfrac{1}{a_2}],$$

$$[\mathrm{a}_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [\alpha, \beta],$$

donde

$$\alpha = min\{a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2\},$$
$$\beta = max\{a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2\}.$$

Aquí vemos como se suman y restan intervalos con algunos ejemplos:

$[2, 3] + [1, 4] = [3, 7]$

$[6, 3] - [2, 2] = [4, 1]$

El método para sumar dos números difusos es tomar diferentes α-cortes desde 0 a 1 de ambos números e ir sumando los intervalos para dibujar el número difuso resultante.

Suma y resta de números triangulares

Sean $A = Tr(a_1, b_1, c_1)$ y $B = Tr(a_2, b_2, c_2)$ dos números triangulares entonces:

$$A + B = Tr(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2),$$

del mismo modo, para representar la resta lo escribiremos:

$$A - B = Tr(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2).$$

Con intervalos de confianza:

$$A^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)],$$
$$B^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [b_1 + \alpha(b_2 - b_1), b_3 - \alpha(b_3 - b_2)],$$

Ejemplo. Sean $A = (-3, 2, 4)$, $B = (-1, 0, 5)$:

$$A + B = (-3, 2, 4) + (-1, 0, 5) = (-4, 2, 9).$$

De otra forma

$$A^\alpha = [-3 + \alpha(2+3), 4 - \alpha(4-2)] = [5\alpha - 3, 4 - 2\alpha],$$
$$B^\alpha = [-1 + \alpha(0+1), 5 - \alpha(5-0)] = [\alpha - 1, 5 - 5\alpha],$$
$$A^\alpha + B^\alpha = [(5\alpha - 3) + (\alpha - 1), (4 - 2\alpha) + (5 - 5\alpha)] = [6\alpha - 4, 9 - 7\alpha]$$

Como puede comprobarse, para $\alpha = 0$, tenemos que:

$A^0 + B^0 = [-4, 9]$,

y para $\alpha = 1$, tenemos que:

$A^1 + B^1 = [2, 2] = 2$.

El número es (-4, 2, 9). ■

Suma y resta de números trapezoidales

Sean $A = T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ y $B = T(a_2, b_2, c_2, d_2)$ dos números trapezoidales entonces:

$$A + B = T(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

del mismo modo, para representar la resta lo escribiremos:

$$A - B = T(a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2).$$

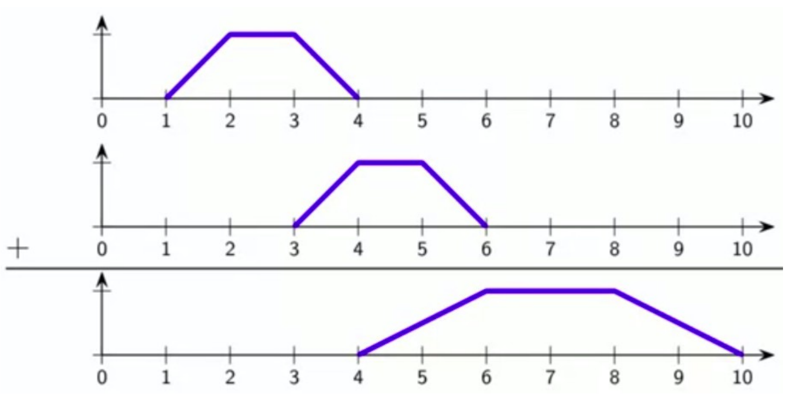


Figura 2.53: Suma de dos números difusos

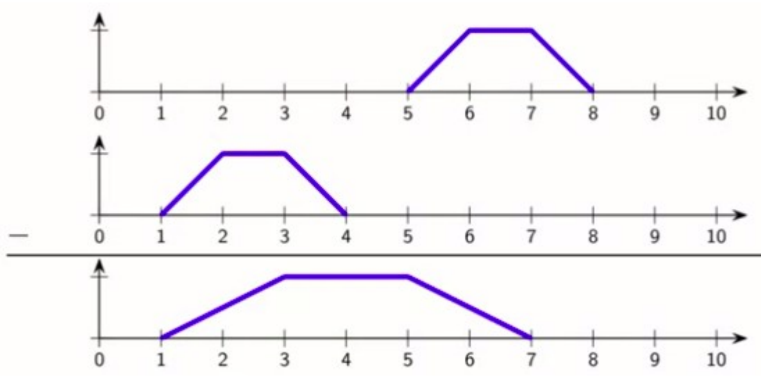


Figura 2.54: Resta de dos números difusos

2.3. Ecuaciones difusas

Este capítulo trata de acercar el concepto de ecuación difusa con numerosos ejemplos. Como se verá a continuación, en general no existe ni hay unicidad de soluciones, ni siquiera de ecuaciones difusas lineales. En [14] se discute la forma de abordar estas ecuaciones difusas. Desde entonces, muchos investigadores han propuesto diferentes métodos para resolverlas. A continuación definimos, de forma natural, el concepto de ecuación difusa.

Definición 17 *Sea $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ una función difusa. Llamaremos **ecuación difusa** a la expresión*

$$F(x) = 0$$

donde 0 representa el elemento nulo de $\mathcal{F}$. Diremos que $x \in \mathcal{F}$ es una solución si

$$[F(x)]^\alpha = [0]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Es decir, si los α-cortes de la imagen de x son los del elemento nulo de $\mathcal{F}$.

Ejemplo. Sea $a = (1, 2, 3)$. Imaginemos que tenemos la ecuación

$$x - a = 0$$

¿Se puede decir que x = a es una solución? Los α-cortes del número difuso a son, para cada $\alpha \in [0, 1]$:

$$[a]^\alpha = [1 - \alpha, 3 - \alpha].$$

Se obtiene

$$[x - a]^\alpha = [0]^\alpha = [0, 0],$$

pero tenemos que

$$[x]^\alpha = [1 + \alpha - (3 - \alpha), 3 - \alpha - (1 + \alpha)] = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha] \neq [0, 0].$$

Por lo tanto, aunque pueda resultar sorprendente, $x = a$ no es una solución de la ecuacion. De hecho, si los α-cortes de una posible solución x son

$$[x - a]_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)].$$

Entonces debe cumplirse que

$$\begin{cases} x_1(\alpha) - (3 - \alpha) = 0 \longrightarrow x_1(\alpha) = 3 - \alpha \\ x_2(\alpha) - (1 + \alpha) = 0 \longrightarrow x_2(\alpha) = -1 - \alpha \end{cases}$$

Esto no representa a un número difuso, ya que $x_1(\alpha) > x_2(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Es decir, la ecuación $x - a = 0$ no tiene soluciones.$\blacksquare$

Solución ecuaciones difusas del tipo Ax+B=C

Existes varios procedimientos para resolver ecuaciones difusas. En [15] se nos proponen algunos de estos métodos. Para resolver este tipo de ecuaciones vamos a ver el método de los α-cortes. Este método determina una solución enfunción de cada α-corte, a este método incorporamos el concepto del intervalo esperado.

Sean A, B y C tres números difusos. Entonces, la ecuación

$$Ax + B = C,$$

se puede despejar como

$$x = \frac{C-B}{A},$$

a continuación, remplazamos los números difusos por sus α-cortes.

$$x(\alpha) = \frac{C^\alpha - B^\alpha}{A^\alpha},$$

A continuación, representaremos cada α-corte como un intervalo para simplificar los cálculos. Escribiremos que $A^\alpha = [a_1, a_2]$, $B^\alpha = [b_1, b_2]$ y $C^\alpha = [c_1, c_2]$, por tanto

$$x(\alpha) = \frac{[c_1,c_2]-[b_1,b_2]}{[a_1,a_2]},$$
$$x(\alpha) = \frac{[c_1-b_2,c_2-b_1]}{[a_1,a_2]}.$$

Realizamos ahora la división de intervalos

$$x_1(\alpha) = min\{\frac{c_1-b_2}{a_1}, \frac{c_1-b_2}{a_2}, \frac{c_2-b_1}{a_1}, \frac{c_2-b_1}{a_2}\},$$
$$x_2(\alpha) = max\{\frac{c_1-b_2}{a_1}, \frac{c_1-b_2}{a_2}, \frac{c_2-b_1}{a_1}, \frac{c_2-b_1}{a_2}\}.$$

La solución de la ecuación lineal difusa con un grado de precisión $\alpha \in [0,1]$ es un intervalo $x = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$. Estos intervalos son los conjuntos alfa corte del conjunto difuso que es la solución de la ecuación lineal difusa.

Según el teorema de la representación el conjunto difuso que es la solución de la ecuación lineal difusa está dada por:

$$A = \cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot [x_1(\alpha), x_2(\alpha)].$$

Los valores más utilizados son $\alpha = \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$, la solución más robusta (mas imprecisa) se obtiene con $\alpha = 0$, y la solución más precisa (exacta) se obtiene con $\alpha = 1$.

Introducimos ahora el concepto del intervalo esperado al método de α-cortes.

Definición 18 *Llamamos **intervalo esperado** de un intervalo $x(\alpha)$ al intervalo*

$$E(x(\alpha)) = [\int_0^1 x_1(\alpha)d\alpha, \int_0^1 x_2(\alpha)d\alpha].$$

El intervalo esperado de un número difuso, es un intervalo que concentra la mejor información de un número difuso, esta definición será de gran utilidad para encontrar la mejor solución de todas las que se obtienen mediante el método de alfa corte. En este intervalo, se encuentra la mayor parte de soluciones de la ecuación lineal difusa. Este intervalo corresponderá a un único $\alpha \in [0,1]$

Ejemplo. Consideramos la siguiente ecuación lineal $Ax + B = C$ donde A, B y C son números difusos triangulares tales que $A = (1,2,3)$, $B = (5,6,7)$ y $C = (7,11,15)$.

En primer lugar, hallamos los α-cortes de los números triangulares

$$A^\alpha = [1 + \alpha \cdot (2-1), 3 - \alpha \cdot (3-2)],$$
$$B^\alpha = [5 + \alpha \cdot (6-5), 7 - \alpha \cdot (7-6)],$$
$$C^\alpha = [7 + \alpha \cdot (11-7), 15 - \alpha \cdot (15-11)],$$
$$A^\alpha = [1+\alpha, 3-\alpha],\ B^\alpha = [5+\alpha, 7-\alpha],\ C^\alpha = [7+4\alpha, 15-4\alpha].$$

Reemplazamos los α-cortes en la solución

$$x(\alpha) = \frac{C^\alpha - B^\alpha}{[A^\alpha},$$
$$x(\alpha) = \frac{[7+4\alpha, 15-4\alpha]-[5+\alpha, 7-\alpha]}{[1+\alpha, 3-\alpha]},$$
$$x(\alpha) = \frac{[5\alpha, 10-5\alpha]}{[1+\alpha, 3-\alpha]}.$$

Realizamos ahora la división de intervalos

$$x_1(\alpha) = min\{\frac{5\alpha}{1+\alpha}, \frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}, \frac{10-5\alpha}{3-\alpha}\},$$
$$x_2(\alpha) = max\{\frac{5\alpha}{1+\alpha}, \frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}, \frac{10-5\alpha}{3-\alpha}\}.$$

Dado que $\alpha \in [0,1]$

$$x(\alpha) = [\frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}].$$

La solución de la ecuación lineal difusa es el conjunto difuso:

$$G = \cup_{\alpha\in[0,1]}\alpha \cdot [\frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}],$$
$$G = \cup_{\alpha\in[0,1]}[\frac{5\alpha^2}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha^2}{1+\alpha}],$$

El punto de intersección de las curvas ocurre en:

$$\frac{5\alpha^2}{3-\alpha} = \frac{10-5\alpha^2}{1+\alpha},$$
$$2\alpha^2 + \alpha - 3 = 0.$$

Dado qu $\alpha \in [0,1]$, la solución de la ecuación es $\alpha = 1$, el cual corresponde a un valor de

$$x = \frac{5(1)^2}{3-1} = 2{,}5.$$

A continuación puede verse el gráfico del conjunto difuso G.

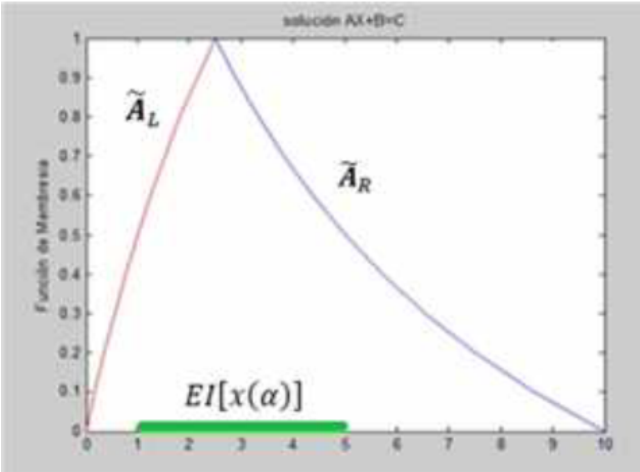


Figura 2.55: Soluciónes de la ecuación difusa.

El conjunto difuso obtenido es normal y convexo, por tanto es un número difuso. La solución de la ecuación lineal difusa ocurrirá con más posibilidad en valor 2.5, pero puede ocurrir entre 0 y 10. La solución de la ecuación lineal difusa con diferentes grados de precisión se muestra en la siguiente tabla.

Grado de precisión de α	Solución dela ecuación lineal difusa α-corte $x(\alpha)$
0.0	[0, 10]
0.1	[0.17, 8.64]
0.2	[0.36, 7.50]
0.3	[0.56, 6.54]
0.4	[0.77, 5.71]
0.5	[1.00, 5.00]
0.6	[1.25, 4.38]
0.7	[1.52, 3.82]
0.8	[1.82, 3.33]
0.9	[2.14, 2.89]
1.0	[2.50,2.50]

La solución más robusta (más imprecisa) es el intervalo [0, 10], se obtiene con $\alpha = 0$. La solución más precisa (exacta) es el intervalo [2.50, 2.50], se obtiene con $\alpha = 1$; este intervalo es el número real $x = 2{,}5$. Para un grado $\alpha = 0{,}5$, la solución es el intervalo $[1, 5]$.Es decir, se tienen diferentes alternativas para elegir el intervalo de solución con la precisión que se desee.

Por último, evaluamos el intervalo esperado.

$$E(x(\alpha)) = [\int_0^1 \frac{5\alpha^2}{3-\alpha} d, \int_0^1 \frac{10-5\alpha^2}{1+\alpha} d],$$
$$E(x(\alpha)) = [1{,}081, 5{,}317]$$

Dado que los intervalos solución con diferentes grados de precisión $\alpha \in [0,1]$ son infinitos, si se desea un intervalo donde posiblemente ocurran la mayoría de soluciones de la ecuación lineal difusa, este es el intervalo esperado [1.081, 5.317]. ■

2.4. Un breve comentario sobre la Teoria de la Posibilidad

La teoría de posibilidades se enmarca dentro de la Teoría de los Conjuntos Difusos. Fue propuesta por Lofti A. Zadeh como un marco donde estudiar las medidas de posibilidad y necesidad como límites superiores e inferiores de una medida de probabilidad. Dichas medidas representan una aproximación desde el concepto de conjunto difuso al de medición de la frecuencia de ocurrencia de eventos difusos. La mayoría de las medidas de borrosidad implican una estimación de la consistencia con que se aplica un término y su opuesto a un objeto dado. Dicha medida de aplicabilidad se puede considerar equivalente al valor de verdad de una expresión que contiene el objeto por sujeto y el término por predicado.

Fue Zadeh quien, en [16], introdujo las primeras ideas de esta teoría, relacionándola estrechamente con la teoría de conjuntos difusos. Su motivación principal fue la constatación de que, en cualquier transmisión de información, si el interés principal de la misma reside. en su significado, más que en su medida, entonces el marco correcto para analizarla no era la teoría de la probabilidad, sinó otro enfoque distinto que denominó teoría de la posibilidad, término acuñado unos años antes por Gaines y Kohout, según él mismo describe. Esta teoría, además, debía poder tratar correctamente aquellas formas de incertidumbre que no eran modelables mediante conjuntos difusos.

Didier Dubois [17] completa la teoría de las posibilidades criticando la teoría de juegos o teoría de la decisión matemática, presentando la teoría de las posibilidades en una teoría alternativa para la toma de decisiones cualitativa. En cualquier experimento aleatorio, como son los juegos de azar, siempre hay incertidumbre sobre si un suceso específico ocurrirá o no. Como medida de la oportunidad o probabilidad con la que se puede esperar que un suceso ocurra es conveniente asignar un número entre cero y uno. Si se está completamente seguro de que el suceso ocurrirá se dice que su probabilidad es del cien por ciento o uno, pero si no se está seguro de que el suceso no ocurrirá se dice que su probabilidad es de cero. La probabilidad permite el acercamiento a los sucesos y su correspondiente estudio, ponderando su ocurrencia, mediante métodos para tales ponderaciones. Algunos de esos métodos conducen a descubrir que algunos sucesos tienen una mayor o menor probabilidad de ocurrir que la ponderación que se asignaría de acuerdo al sentido común.

En este contexto la función de pertenencia μ puede interpretarse como una distribución de *posibilidad* que nos indica la preferencia sobre los valores que una variable de valor desconocido puede tomar. Por ejemplo, si Carlos tiene 45 años y se podría decir que su grado de pertenencia al conjunto de los jóvenes es de 0.3, esto quiere decir que 0.3 es la compatibilidad de Carlos con la definición del conjunto difuso de los jóvenes, y no es la probabilidad de Carlos de ser joven.

La teoría de los conjuntos difusos no ha estado exenta de controversia, la cual tiene varias facetas. Por ejemplo, existen investigadores que descartan los conjuntos difusos, afirmando que las imprecisiones o incertezas pueden ser manejadas en cualquier caso por probabilidades. Por otra parte, la cultura de tradición de respeto por lo riguroso y preciso, genera que se mire con sospecha y desdén una teoría que pretende lograr una acomodación con la imprecisión de que está impregnada en la vida real.

Capítulo 3

Conclusiones

La lógica difusa se está consolidando a través del tiempo cada vez más. Esta disciplina, junto con otras herramientas, han abierto las puertas al tratamiento de una gran variedad de fenómenos y problemas que resultaban, hasta hace algunos años, difíciles de abordar.

El poder expresar conceptos imprecisos de forma matemática, supone una conceptualización más sencilla de la realidad, ya que permite expresar sentencias lógicas empleando términos lingüísticos vagos. Esta posibilidad permite una definición más intuitiva de las reglas lógicas y, en consecuencia, una mayor flexibilidad, simplicidad conceptual y capacidad de comprensión por parte de un mayor número de personas.

A lo largo de la presente memoria hemos trabajado las diferentes características de los conjuntos difusos y más concretamente los números difusos. El punto más importante ha sido trabajar el concepto del α-corte, el cual hemos visto que es fundamental para las operaciones con conjuntos difusos, demostraciones y resolución de ecuaciones difusas.

De cara al futuro, sería interesante estudiar más tipos de ecuaciones difusas, ya que se dispone de herramientas numérica para resolverla y realizar un estudio más exhaustivo.

Bibliografía

[1] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, California in 1965.

[2] L. A. Zadeh, *Fuzzy logic= computing with words*, STUDFUZZ,volume 33, Computing with Words in Information/Intelligent Systems 1, pp. 3-28, 1999.

[3] D. Guzmán, V. M. Castaño, *La lógica difusa en ingeniería: Principios, aplicaciones y futuro* Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada. Universidad Nacional Autónoma de México, Campus Juriquilla, 76000, Querétaro, México. 2006. ISSN: 0378-0524.

[4] L. A. Zadeh, *A fuzzy set theoretic interpretation of linguistic hedges*, College of Engineering University of California, 1972.

[5] J. Galindo Gómez, *Apuntes de Lógica Difusa*, Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación, Universidad de Málaga.

[6] T. del Cerro, P. Novalbos, *Lógica Difusa*, Universidad Carlos III de Madrid, 2014.

[7] C. González, *Lógica Difusa. Una introducción práctica*, Universidad de Castilla-La Mancha.

[8] A. Morillas, *Introducción al análisis de datos difusos*, Departamento de Estadística y Econometría, Universidad de Málaga, 2017.

[9] J.G Dijkman, H.van Haeringen S.J de Lange, *Fuzzy numbers*, Department of Mathematics and Informatics, Dep Unioersity of Technologs, Delfr, The Netherlands , 1983.

[10] H. Zettervall, *Fuzzy set theory applied to make medical prognoses for cancer patients.* Department of Mathematics and Natural Sciences. Blekinge Institute of Technology.

[11] D. Coronado, S. Carrasquel, R. Rodríguez y L. Tineo, *Ordenamiento de Números Difusos*, Dep. de Computación y Tecnología de la Información, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela, 1983.

[12] M. Mizumoto, K. Tanaka, *Some Properties of Fuzzy Sets of Type-2*, Department of Information and Computer Sciences, Faculty of Engineering Science, Osaka University, 1976.

[13] B. Migdalia J. Giménez C., *Aritmética Difusa: Fundamentos y Ejemplos De Aplicaciones*, Decanato de Ciencias y Tecnología, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela, 2012.

[14] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy-set-theoretic differences and inclusions and their use in the analysis of fuzzy equations*, Control and Cybernetics Vol. 13, pp. 129-146 1984.

[15] M. Camarasa, *Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones difusas*, Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universidad Politécnica de Valencia, 2020.

[16] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility*, Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 3-28, 1978.

[17] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems*, Academic Press, New York, 1980.