

Máster Universitario en Matemática Computacional
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UJI

**Teorema de Stone-Weierstrass para la topología de
convergencia de nivel.**

Trabajo de Fin de Máster presentado por Rafael Borràs Pernas.

Directores:
Dr. Juan J. Font y Dr. Sergio Macario

Juan José Font Ferrandis, Catedrático de Universidad de Análisis Matemático, y Sergio Macario Vives, Profesor Titular de Universidad de Análisis Matemático, del Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón

CERTIFICAMOS: que la presente memoria *Teorema de Stone-Weierstrass para la topología de convergencia de nivel* ha sido realizada bajo nuestra dirección por Rafael Borràs Pernas, en el Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón, y constituye su trabajo de fin de máster en el Máster Universitario en Matemática Computacional. Y para que así conste, presentamos la mencionada memoria, firmando el certificado presente.

Sergio Macario Vives Juan José Font Ferrandis
Castellón, 20 de octubre de 2022

Índice general

1. Introducción	7
2. Números difusos	9
2.1. Conjuntos difusos	9
2.2. Definiciones básicas	11
2.3. Aritmética difusa y propiedades	12
2.4. Teorema de representación de Goetschel y Voxman	14
2.5. La métrica supremo en \mathbb{E}^1	15
2.6. Topología de convergencia de nivel	17
3. Teorema de Stone-Weierstrass	19
3.1. Definiciones previas	19
3.2. Teorema de Stone-Weierstrass	19
3.3. Ejemplo	22
4. Conclusión	27

Capítulo 1

Introducción

A finales del siglo XIX, Georg Cantor, en su artículo "Sobre una propiedad de la colección de todos los números algebraicos reales", dio inicio a lo que sería la prolífica teoría de conjuntos. En teoría de conjuntos cada uno de los elementos de un universo pueden pertenecer o no a un conjunto. Esto fue muy en conjunción con el desarrollo de modelos algebraicos para la lógica de proposiciones que se estaban desarrollando en paralelo por gente como Boole, Frege o De Morgan, ya que esta lógica era esencialmente bivalente, con enunciados que podían ser ciertos o falsos.

Ya en 1902 Charles Peirce apuntó que la lógica bivalente podía ser solamente una simplificación, y que incluso para algunas situaciones cotidianas se debían considerar más valores que solamente verdadero o falso. En esa línea empezaron a aparecer diferentes lógicas que respondieron a esto, como la lógica trivalente o n-valente de Lukasiewicz o las lógicas polivalentes de Post o Gödel.

Con todo esto, en el año 1965 el profesor de la Universidad de California, Lofti Zadeh, introdujo en su artículo "Fuzzy Sets" los conjuntos difusos como una extensión de los conjuntos clásicos donde ahora los elementos de un universo ya no solamente poseían dos estados respecto a un conjunto. En lugar de eso disponían de estados intermedios en los que situarse. Esto, que puede parecer extraño en primera aproximación, no debe serlo tanto, ya que conjuntos como "persona alta", "edad adulta", "visibilidad buena", "temperatura baja", etc. tienen valores intermedios entre la pertenencia y la exclusión del grupo.

Así pues, la introducción de la teoría de conjuntos difusos permite introducir cierta imprecisión en los conjuntos, asociando a cada elemento un grado de pertenencia al conjunto mediante una función de pertenencia, que tomará valores en $[0, 1]$, donde 0 implicará total exclusión del grupo, 1 total pertenencia y los valores intermedios una gradación entre ambos estados. Cabe decir que la teoría de conjuntos difusa ha tenido ya ciertas aplicaciones prácticas. Por ejemplo en Japón, donde se utilizó lógica difusa para el sistema de control del suburbano de la ciudad de Sendai permitiendo hacerlo un 10% más eficiente que los conductores humanos.

Dentro de los conjuntos difusos, D. Dubois y H. Prade introdujeron en [4] un tipo particular de conjuntos difusos que generalizaba el concepto de número real, los llamados números difusos, imponiendo una serie de restricciones a ciertos conjuntos difusos, con los cuales se empezó a desarrollar el Análisis difuso de forma análoga al Análisis Real. En este aspecto, uno de los hitos de importancia capital fue el realizado por R. Goetschel y W. Voxman en 1985 ([12]), donde caracterizan los números difusos basándose en los llamados λ -cortes, impulsando enormemente

el desarrollo de esta rama y permitiendo dotarlo de ciertas métricas, como la muy utilizada métrica del supremo, y ciertas topologías, como la de convergencia de nivel que trataremos en este trabajo.

En la presente memoria se tratarán los siguientes aspectos: primero una introducción teórica a los números difusos, donde se verá cómo se formalizan a partir de los conjuntos difusos, se estudiará su aritmética, su representación a partir de los λ -cortes y se introducirá la métrica del supremo y la topología de convergencia de nivel. En la segunda parte del trabajo se detallará el desarrollo del artículo [9] sobre una versión del teorema de Stone-Weierstrass para funciones difusas con la topología de convergencia de nivel, demostrando el mismo para posteriormente dar un ejemplo.

Capítulo 2

Números difusos

2.1. Conjuntos difusos

En teoría de conjuntos clásica los elementos del universo pueden estar en dos estados respecto a un conjunto: o bien pertenecen a dicho conjunto o no. La principal novedad que se aporta en teoría de conjuntos difusos es el hecho de poder graduar la pertenencia de un elemento a dicho conjunto.

DEFINICIÓN 2.1.1 *Un conjunto difuso A está caracterizado por una función de pertenencia μ_A que enlaza o empareja los elementos de un dominio o universo de discurso U con elementos del intervalo $[0, 1]$:*

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1],$$

quedando perfectamente definido como sigue:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U, \mu_A(x) \in [0, 1]\}.$$

Así, cualquier elemento x en U tiene grado de pertenencia $\mu_A(x) \in [0, 1]$.

Por tanto, la función de pertenencia nos indica en qué grado dicho elemento pertenece al conjunto. Como se puede deducir, esto no es más que una generalización de los conjuntos tradicionales, donde la función de pertenencia solamente tomaba los valores 0 (elemento fuera del conjunto) y 1 (elemento perteneciente al conjunto).

EJEMPLO 2.1.2 Si $U = \{a, e, i, o, u\}$ es el conjunto de las vocales del alfabeto y $A = \{a, i, u\}$ un subconjunto del mismo, podríamos representarlos en la siguiente forma:

$$U = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 1), (u, 1)\}$$

$$A = \{(a, 1), (e, 0), (i, 1), (o, 0), (u, 1)\}$$

Con lo que tendríamos dos conjuntos clásicos expresados como conjunto difusos

EJEMPLO 2.1.3 Supóngase que alguien quiere describir la clase de *animales terrestres veloces*. Algunos animales pertenecen definitivamente a esta clase, como el guepardo o la gacela, mientras otros, como la tortuga o la araña, no pertenecen. Pero existe otro grupo de animales para los que es difícil determinar si son veloces o no. Utilizando notación difusa, el conjunto difuso para los animales *veloces* sería

$$\{(Guepardo, 1), (Avestruz, 0.9), (Liebre, 0.8), (Gacela, 0.7), (Gato, 0.4), \dots\},$$

es decir, la liebre pertenece con grado de 0.8 a la clase de animales *veloces*, la gacela con grado de 0.7 y el gato con grado de 0.4.

EJEMPLO 2.1.4 La figura 2.1 muestra algunos conjuntos difusos definidos en el universo de discurso Edad. Concretamente, se representan las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos “joven”, “maduro” y “viejo”.

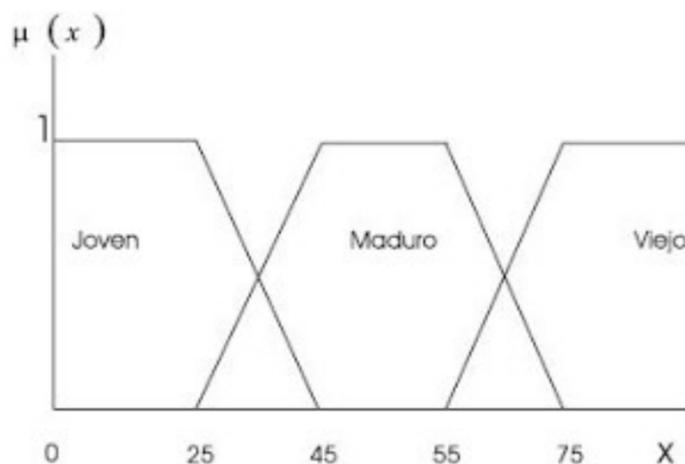


Figura 2.1: Ejemplo de conjuntos difusos

Se puede ver que los conjuntos difusos se superponen, de manera que un individuo podría tener un grado de pertenencia a dos conjuntos: “joven” y “maduro”, indicando que posee cualidades asociadas a ambos conjuntos. Por ejemplo, una persona con 35 años tiene un grado de pertenencia 0.5 para el conjunto “joven” y 0.5 para el conjunto “maduro”.

Algunas definiciones relacionadas con los conjuntos difusos son:

DEFINICIÓN 2.1.5 El soporte de un conjunto difuso A es el conjunto clásico que contiene todos los elementos de A cuyos grados de pertenencia no son cero. Esto se define por $S(A)$. Es decir:

$$S(A) = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}.$$

DEFINICIÓN 2.1.6 Un conjunto difuso A es convexo si

$$\mu_A(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

para todo $x, y \in U$ y para todo $\alpha \in [0, 1]$. En la teoría de control difuso, es usual tratar sólo con conjuntos difusos convexos.

DEFINICIÓN 2.1.7 Se define la altura de un conjunto difuso A sobre X , que se denota por $Alt(A)$, como:

$$Alt(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x).$$

DEFINICIÓN 2.1.8 Dado un número $\lambda \in [0, 1]$ y un conjunto difuso A , definimos el λ -corte de A como el conjunto clásico A_λ que tiene la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{A_\lambda}(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } \mu_A(x) \geq \lambda, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En definitiva, el λ -corte se compone de aquellos elementos cuyo grado de pertenencia supera o iguala el umbral λ .

Introduciremos a continuación un caso particular de conjunto difuso llamado número difuso, que es una extensión del concepto de número real. Recordemos que \mathbb{R} denota el conjunto de los números reales y \mathbb{N} el conjunto de los números naturales.

2.2. Definiciones básicas

A partir de ahora, nuestro universo U es el conjunto de los números reales y consideramos conjuntos difusos reales, es decir, aquellos cuya función de pertenencia es de la forma:

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1].$$

Denotamos por $F(\mathbb{R})$ la familia de todos los conjuntos difusos de \mathbb{R} .

Los **conjuntos λ -cortes**, ya definidos anteriormente, los representaremos en este contexto por $[u]^\lambda$, es decir,

$$[u]^\lambda := \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda\},$$

donde $u(x)$ es el grado de pertenencia.

El **soporte** de un conjunto difuso lo representaremos en este contexto por $[u]^0$, el cual definiremos como:

$$[u]^0 := \overline{\bigcup_{\lambda \in]0,1[} [u]^\lambda} = \text{cl}_{\mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}.$$

Es decir, el soporte es la clausura de los puntos donde la función no toma el valor 0. Hay que tener en cuenta que no tomamos $[u]^0$ como $\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq 0\}$ porque este último conjunto equivale a todo \mathbb{R} , es decir, $\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$.

Definimos el **conjunto de los números difusos**, \mathbb{E}^1 , como el conjunto de elementos de $F(\mathbb{R})$ que satisfacen las siguientes propiedades ([4]):

1. u es *normal*, es decir, existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ donde $u(x_0) = 1$.
2. u es *convexa* (en el sentido difuso), es decir,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\}$$

para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$.

3. u es *semicontinua superiormente*, es decir, $[u]^\lambda$ es un conjunto cerrado para todo λ .
4. $[u]^0$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R} .

Por la condición de que la función de pertenencia sea semicontinua superiormente, podemos considerar los números reales \mathbb{R} como un caso particular de los números difusos definiendo \tilde{r} como:

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 1 & t = r \\ 0 & t \neq r \end{cases}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

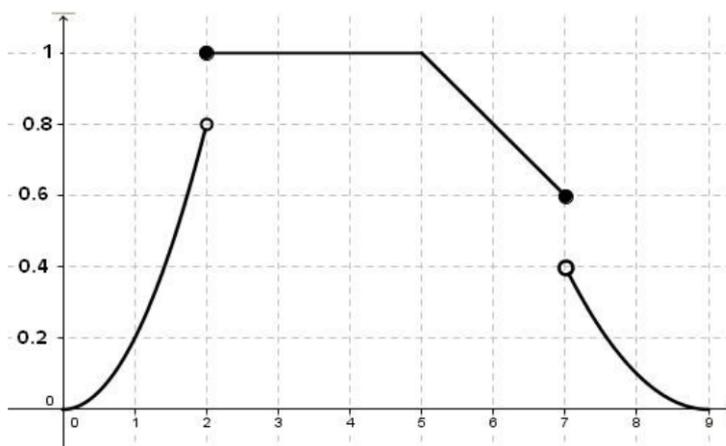


Figura 2.2: Ejemplo de número difuso

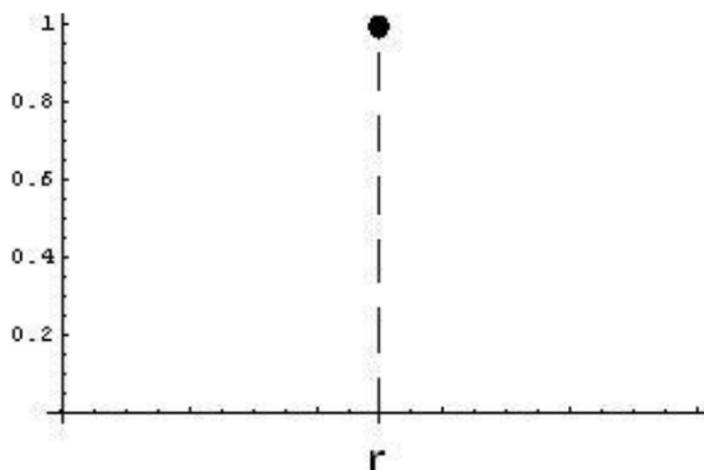


Figura 2.3: Ejemplo de número real, expresado de forma difusa

2.3. Aritmética difusa y propiedades

Es importante para las aplicaciones de los números difusos tener la posibilidad de realizar cálculos aritméticos. A continuación explicaremos la forma más habitual de hacerlo.

Es conocido que $[u]^\lambda$ es un subconjunto compacto y conexo de \mathbb{R} , por lo tanto, es un intervalo cerrado y acotado para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ y podemos escribir $[u]^\lambda$ como:

$$[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)].$$

Podemos pues operar con números difusos utilizando la aritmética de intervalos. Si tenemos $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$ dos intervalos cerrados y acotados de números reales, entonces:

- $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$

- $[a, b] - [c, d] = [a - c, b - d]$
- $[a, b] \cdot [c, d] = [\text{mín}(ac, ad, bc, bd), \text{máx}(ac, ad, bc, bd)]$
- $[a, b]/[c, d] = [a, b] \cdot [1/d, 1/c]$, donde $d, c \neq 0$

Sean u y v son dos números difusos. Entonces podemos definir la aritmética de los números difusos en términos de sus λ -cortes:

- Si $p = u + v$, entonces

$$[p]^\lambda = [u^-(\lambda) + v^-(\lambda), u^+(\lambda) + v^+(\lambda)],$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$.

- Si $q = u - v$, entonces

$$[q]^\lambda = [u^-(\lambda) - v^-(\lambda), u^+(\lambda) - v^+(\lambda)],$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$.

- Si $r = u \cdot v$, entonces

$$[r]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] \cdot [v^-(\lambda), v^+(\lambda)],$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$.

- Si $s = u/v$, entonces

$$[s]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] \cdot [1/v^+(\lambda), 1/v^-(\lambda)],$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$, asumiendo que el cero no pertenece a $[v]^0$.

Las propiedades de la aritmética de intervalos nos permiten concluir el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.3.1 *La suma de los números difusos y el producto de un número difuso por un número real positivo satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Conmutativa: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in \mathbb{E}^1$;
2. Asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in \mathbb{E}^1$;
3. Elemento neutro: $u + \tilde{0} = u$ para todo $u \in \mathbb{E}^1$;
4. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ para todo $u \in \mathbb{E}^1$ y para todo $\lambda, \mu > 0$;
5. $0 \cdot u = 0$ para todo $u \in \mathbb{E}^1$;
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todo $u, v \in \mathbb{E}^1$ y para todo $\lambda > 0$;
7. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ para todo $u \in \mathbb{E}^1$ y para todo $\lambda, \mu > 0$.

DEFINICIÓN 2.3.2 Recordemos que un cono convexo es un conjunto no vacío \mathcal{C} tal que a cada par de elementos K y L de \mathcal{C} le corresponde un elemento $K + L$, llamado suma de K y L , de forma que la adición es conmutativa y asociativa, y existe en \mathcal{C} un único elemento 0 , llamado vértice de \mathcal{C} , tal que $K + 0 = K$, para cada $K \in \mathcal{C}$. Además, para cada par λ y K , donde $\lambda \geq 0$ es un número real no negativo y $K \in \mathcal{C}$, corresponde un elemento λK , llamado el producto de λ y K , de tal forma que la multiplicación es asociativa: $\lambda(\mu K) = (\lambda\mu)K$; $1 \cdot K = K$ y $0 \cdot K = 0$ para cada $K \in \mathcal{C}$; y verifica la propiedad distributiva: $\lambda(K + L) = \lambda K + \lambda L$, $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$, para cada $K, L \in \mathcal{C}$ y $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

Como consecuencia de la *Proposición 3.2.1*, podemos concluir el siguiente resultado.

COROLARIO 2.3.3 $(\mathbb{E}^1, +, \cdot)$ tiene estructura de cono convexo.

2.4. Teorema de representación de Goetschel y Voxman

A continuación enunciamos el teorema de representación de Goetschel y Voxman, una herramienta muy importante dentro de la teoría de números difusos, pues nos permite hacer demostraciones en este campo utilizando solo propiedades intrínsecas, es decir, sin necesidad de utilizar estructuras externas como, por ejemplo, espacios de Banach, hiperespacios, etc.

TEOREMA 2.4.1 (Teorema de representación de Goetschel y Voxman [12].) Si $u \in \mathbb{E}^1$ y $[u]^\lambda := [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0, 1]$, entonces el par de funciones $u^-(\lambda)$ y $u^+(\lambda)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $u^-(\lambda)$ es una función acotada, no decreciente y continua por la izquierda en el intervalo $]0, 1]$;
2. $u^+(\lambda)$ es una función acotada, no creciente y continua por la izquierda definida en el intervalo $]0, 1]$;
3. $u^-(\lambda)$ y $u^+(\lambda)$ son funciones continuas por la derecha en $\lambda = 0$;
4. $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Recíprocamente, si un par de funciones $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ satisfacen las condiciones anteriores (1) – (4), entonces existe un único $u \in \mathbb{E}^1$ tal que $[u]^\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ para cada $\lambda \in [0, 1]$.

EJEMPLO 2.4.2 Sea $u(x)$ un número difuso definido de la siguiente forma:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0, 1], \\ 1 & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

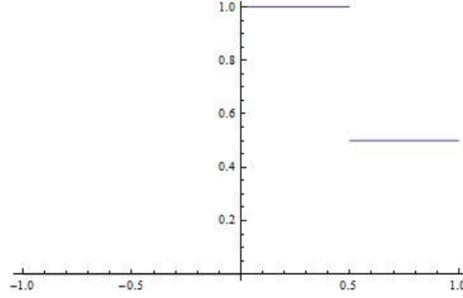
cuya gráfica es:

A continuación consideremos algunos de sus λ – cortes para algunos valores de λ :

$$\begin{aligned} [u]^{\frac{1}{4}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \frac{1}{4}\} = [0, 1], \\ [u]^{\frac{1}{5}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \frac{1}{5}\} = [0, 1], \\ [u]^{\frac{1}{6}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \frac{1}{6}\} = [0, 1], \\ [u]^{\frac{3}{4}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \frac{3}{4}\} = [0, \frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

En general las funciones $u^-(\lambda)$ y $u^+(\lambda)$ resultan ser de la siguiente forma:

$$u^-(\lambda) = 0, \quad u^+(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & \lambda \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Figura 2.4: Función $u(x)$

2.5. La métrica supremo en \mathbb{E}^1

Vamos a considerar en \mathbb{E}^1 la siguiente métrica:

DEFINICIÓN 2.5.1 Para $u, v \in \mathbb{E}^1$, definimos

$$d_\infty(u, v) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\} = \sup_{\lambda \in [0,1]} d_H([u]^\lambda, [v]^\lambda),$$

donde d_H es la llamada distancia de Hausdorff.

Es rutinario comprobar que d_∞ es una métrica en \mathbb{E}^1 y se denomina *métrica supremo*. (\mathbb{E}^1, d_∞) es un espacio métrico completo y es fácil ver que \mathbb{R} , con la métrica euclídea usual, es un subespacio cerrado de \mathbb{E}^1 ([5]).

TEOREMA 2.5.2 La métrica d_∞ satisface las siguientes propiedades:

1. $d_\infty(\sum_{i=1}^m u_i, \sum_{i=1}^m v_i) \leq \sum_{i=1}^m d_\infty(u_i, v_i)$ donde u_i, v_i son números difusos y $i = 1, \dots, m$.
2. $d_\infty(ku, kv) = kd_\infty(u, v)$ donde u y v son números difusos cualesquiera y $k > 0$.

Demostración. Vamos a ver que se cumple la primera propiedad. Dados $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{E}^1$, resulta que

$$d_\infty(u_1+u_2, v_1+v_2) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u_1^-(\lambda)+u_2^-(\lambda)-v_1^-(\lambda)-v_2^-(\lambda)|, |u_1^+(\lambda)+u_2^+(\lambda)-v_1^+(\lambda)-v_2^+(\lambda)|\}.$$

Como

$$|u_1^-(\lambda) + u_2^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)| \leq |u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)| + |u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)|$$

y

$$|u_1^+(\lambda) + u_2^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)| \leq |u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda)| + |u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)|,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u_1^-(\lambda) + u_2^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)|, |u_1^+(\lambda) + u_2^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)|\} \\ & \leq \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)| + |u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)|, |u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda)| + |u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)|\}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} d_\infty(u_1, v_1) + d_\infty(u_2, v_2) &= \sup_{\lambda \in [0,1]} \text{máx}\{|u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)|, |u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda)|\} \\ &\quad + \sup_{\lambda \in [0,1]} \text{máx}\{|u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)|, |u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)|\}. \end{aligned}$$

Por comodidad vamos a renombrar algunas cosas:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= |u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)| + |u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)|, \\ \alpha_2 &:= |u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda)| + |u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)|, \\ \alpha_3 &:= \text{máx}\{|u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)|, |u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda)|\}, \\ \alpha_4 &:= \text{máx}\{|u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)|, |u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)|\}. \end{aligned}$$

Entonces si α_1 es el más grande de los α_i para todo $i = 1, \dots, 4$, y éste se alcanza cuando $|u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)|$ y $|u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)|$ alcanzan sus valores máximos, entonces $\alpha_1 \leq \alpha_3 + \alpha_4$. El mismo razonamiento es válido si α_2 es el más grande de los α_i para todo $i = 1, \dots, 4$.

Así podemos concluir que

$$d_\infty(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \leq d_\infty(u_1, v_1) + d_\infty(u_2, v_2).$$

Por lo tanto, el resultado es cierto para $m = 2$. El resultado para un m arbitrario se deduce del resultado anterior y del hecho de que la suma de dos números difusos es un número difuso.

Ahora vamos a demostrar la segunda propiedad. Por la definición, tenemos que

$$\begin{aligned} d_\infty(ku, kv) &= \sup_{\lambda \in [0,1]} \text{máx}\{|ku^-(\lambda) - kv^-(\lambda)|, |ku^+(\lambda) - kv^+(\lambda)|\} = \\ &= \sup_{\lambda \in [0,1]} \text{máx}\{|k| |u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |k| |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\}. \end{aligned}$$

Como k es un número positivo, podemos omitir el valor absoluto y obtenemos

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} \text{máx}\{k |u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, k |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\} = kd_\infty(u, v).$$

□

PROPOSICIÓN 2.5.3 *Sea (\mathbb{E}^1, d_∞) el espacio métrico de los números difusos. Entonces:*

1. $d_\infty(ku, \mu u) = |k - \mu| d_\infty(u, 0)$,
2. $d_\infty(ku, \mu v) \leq |k - \mu| d_\infty(u, 0) + \mu d_\infty(u, v)$,

para todo $u, v \in \mathbb{E}^1$ y para todo $k \geq 0$ y $\mu \geq 0$.

Demostración. Para demostrar la primera propiedad, supondremos que $\mu < k$.

Primero reescribimos ku y μu como $ku = \mu u + (k - \mu)u$ y $\mu u = \mu u + (k - \mu)0$. Esto es posible por las propiedades que definen una métrica.

Por el *Teorema 3.4.2* de la métrica supremo, d_∞ , en \mathbb{E}^1 tenemos que

$$d_\infty(ku, \mu u) \leq d_\infty(\mu u, \mu u) + d_\infty((k - \mu)u, (k - \mu)0) = |k - \mu| d_\infty(u, 0).$$

Para demostrar la segunda propiedad, utilizaremos la desigualdad triangular:

$$d_\infty(ku, \mu v) \leq d_\infty(ku, \mu u) + d_\infty(\mu u, \mu v).$$

Por (1), sabemos que

$$d_\infty(ku, \mu u) \leq |k - \mu| d_\infty(u, 0).$$

Además, del apartado (2) del *Teorema 3.4.2*, podemos escribir

$$d_\infty(\mu u, \mu v) = \mu d_\infty(u, v).$$

A partir de las desigualdades anteriores obtenemos la segunda propiedad:

$$d_\infty(ku, \mu v) \leq |k - \mu| d_\infty(u, 0) + \mu d_\infty(u, v).$$

□

Denotaremos por $C(K, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ el espacio de las funciones continuas definidas entre un espacio compacto K y el espacio métrico de los números difusos, dotado de la métrica

$$D(f, g) = \sup_{t \in K} d_\infty(f(t), g(t)).$$

PROPOSICIÓN 2.5.4 *Sea $\phi \in C(K, \mathbb{R}^+)$, es decir, una función continua que toma valores en los números reales positivos, y $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$. Entonces la función $k \mapsto \phi(k)f(k)$, $k \in K$, pertenece a $C(K, \mathbb{E}^1)$.*

Demostración. Veamos primero que la función producto, $\phi(k)f(k)$, está bien definida; en efecto, como \mathbb{E}^1 es un cono, $\phi(k) \cdot F(k) \in \mathbb{E}^1$ porque $\phi(k) > 0$ y $F(k) \in \mathbb{E}^1$ para todo $k \in K$.

Ahora vamos a ver que la función producto es continua. Sea $s, t \in K$. Por la *Proposición 3.4.3 (2)* tenemos que

$$d_\infty(\phi(t) \cdot F(t), \phi(s) \cdot F(s)) \leq |\phi(t) - \phi(s)| d_\infty(F(t), 0) + \phi(s) d_\infty(F(t), F(s)).$$

Puesto que ϕ es continua, es suficiente ver que la expresión $d_\infty(F(t), 0) + \phi(s) d_\infty(F(t), F(s))$ está acotada; pero esta propiedad se deduce del resultado clásico que dice que todas las funciones definidas entre un espacio compacto y un espacio métrico son funciones acotadas. Por lo tanto, queda demostrada la proposición. □

2.6. Topología de convergencia de nivel

En este apartado vamos a introducir una topología basada en la siguiente convergencia:

DEFINICIÓN 2.6.1 *Diremos que la sucesión $\{u_k\}_{k \in D} \subset \mathbb{E}^1$ es convergente de nivel a $u \in \mathbb{E}^1$ si $\lim_k d_H([u_k]^\lambda, [u]^\lambda) = 0$ para cualquier $\lambda \in [0, 1]$, es decir, si $\lim_k u_k^+(\lambda) = u^+(\lambda)$ y $\lim_k u_k^-(\lambda) = u^-(\lambda)$ para cualquier $\lambda \in [0, 1]$.*

Parece claro que $\{u_k\}_{k \in D} \subset \mathbb{E}^1$ d_∞ -converge a $u \in \mathbb{E}^1$ si y solamente si $\lim_k u_k^+$ converge uniformemente a u^+ y $\lim_k u_k^-$ converge uniformemente a u^- . Luego la d_∞ -convergencia implica convergencia de nivel.

Algunos autores ([6], [7] [8]) han estudiado la topología τ_ℓ asociada con la convergencia de nivel en \mathbb{E}^1 .

Se puede tomar una base de entornos para $u \in \mathbb{E}^1$ en τ_ℓ de la forma

$$U(u, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \epsilon) := \{v \in \mathbb{E}^1 : \max_{1 \leq j \leq n} \{d_H([v]^{\lambda_j}, [u]^{\lambda_j})\} < \epsilon\},$$

para $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset [0, 1]$ y $\epsilon > 0$.

Sea X un espacio localmente compacto. Entonces, el espacio de funciones continuas $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ contiene a $C(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$. Para el siguiente capítulo se dotará a $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ de la topología compacto-abierto cuya base local en $f_0 \in C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ está formada por

$$V(f_0, K, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \epsilon) := \{f : d_H([f_0(x)]^{\lambda_j}, [f(x)]^{\lambda_j}) < \epsilon, \text{ para todo } x \in K, j = 1, \dots, n\}$$

para K subespacio compacto de X , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset [0, 1]$ y $\epsilon > 0$.

Capítulo 3

Teorema de Stone-Weierstrass para la topología de convergencia de nivel.

3.1. Definiciones previas

Antes de empezar vamos a definir algunos conceptos que vamos a necesitar posteriormente

DEFINICIÓN 3.1.1 Diremos que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es denso en X si

$$\forall x \in X \wedge \epsilon > 0 \exists x_a \in A : d(x, x_a) < \epsilon$$

.

EJEMPLO 3.1.2 El conjunto \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} con la métrica usual, ya que, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$ podemos encontrar un valor $x_a \in \mathbb{Q}$ tan cerca de x como queramos.

DEFINICIÓN 3.1.3 Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos se llama cubrimiento de un conjunto A cuando $A \subset \cup_{i \in I} A_i$

DEFINICIÓN 3.1.4 Un subconjunto M de un espacio métrico X es compacto si todo cubrimiento por abiertos de M posee algún subcubrimiento finito.

DEFINICIÓN 3.1.5 Dada un $u \in \mathbb{E}^1$, llamaremos función constante a

$$\begin{aligned} \hat{u} : X &\longrightarrow \mathbb{E}^1 \\ x &\longmapsto \hat{u}(x) := u \end{aligned}$$

3.2. Teorema de Stone-Weierstrass

LEMA 3.2.1 (Lema de Uryshon) Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sean $K, F \subset X$ dos subconjuntos disjuntos, siendo K compacto y F cerrado. Entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ de manera que $f \equiv 1$ en K y se anula en todo F .

Con esto ya podemos presentar el teorema que nos ocupa:

TEOREMA 3.2.2 Sea \mathcal{H} un subconjunto de $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau))$ que contiene las combinaciones finitas de la forma $\psi_1 \hat{u}_1 + \dots + \psi_n \hat{u}_n$, donde $\psi_i \in C(X, [0, 1])$ y $u_i \in \mathbb{E}^1$, $i = 1, \dots, m$. Entonces \mathcal{H} es denso en $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau))$

Demostración.

Vamos a fijar $\varepsilon > 0$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset [0, 1]$, un subespacio compacto $K \subset X$ y $f_0 \in C(X, (\mathbb{E}^1, \tau))$. Para cada $x \in X$ y $0 < \varepsilon(x) < \varepsilon$, definimos

$$N(x) = \{t \in X : d_H([f_0(t)]^{\lambda_j}, [f_0(x)]^{\lambda_j}) < \varepsilon(x) < \varepsilon, j = 1, \dots, n\},$$

un entorno abierto de x . Como X es localmente compacto podemos encontrar un entorno relativamente compacto de x , $V(x)$, tal que $clV(x) \subset N(x)$. El Lema de Uryshon nos asegura entonces que existe una función continua $f_x : X \rightarrow [0, 1]$ de modo que $f_x \equiv 1$ en $clV(x)$ y f_x se anula en $X \setminus N(x)$.

Elijamos ahora un $x_1 \in K$. Como $X \setminus N(x_1) \cap K$ es un conjunto compacto y admite un cubrimiento abierto por $V(x)$, $x \in X \setminus N(x_1) \cap K$, entonces existe un conjunto finito $\{x_2, \dots, x_m\} \subset X \setminus N(x_1) \cap K$ tales que $X \setminus N(x_1) \cap K \subset V(x_2) \cup \dots \cup V(x_m)$. Esto permite tomar $\varepsilon' = \max\{\varepsilon(x_i) : 1 \leq i \leq m\}$.

Definimos ahora las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \psi_2 &:= f_{x_2}, \\ \psi_3 &:= (1 - f_{x_2})f_{x_3}, \\ &\vdots \\ \psi_m &:= (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_{m-1}})f_{x_m}. \end{aligned}$$

Y vamos a deducir el siguiente resultado mediante inducción:

$$\psi_2 + \dots + \psi_j = 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j}), \quad j = 2, \dots, m.$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \psi_2 + \psi_3 &= f_{x_2} + (1 - f_{x_2}) \cdot f_{x_3} = f_2 + f_3 - f_2 \cdot f_3 \\ &= 1 - 1 + f_3 + f_2 - f_2 \cdot f_3 = 1 - (1 - f_3 - f_2 + f_2 f_3) \\ &= 1 - (1 - f_{x_2}) \cdot (1 - f_{x_3}) \end{aligned}$$

Asumimos pues que ese resultado es cierto para un valor de $j \in \{4, \dots, m-1\}$. Entonces queda:

$$\psi_2 + \dots + \psi_j + \psi_{j+1} = 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j})(1 - f_{x_{j+1}}).$$

Con lo que debemos comprobar si se cumple para $j+1$.

$$\begin{aligned} \psi_2 + \dots + \psi_j + \psi_{j+1} &= 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j}) + (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j})f_{x_{j+1}} \\ &= 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j})(1 - f_{x_{j+1}}), \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar.

Con esto podemos definir $\psi_1 := (1 - f_{x_2}) \cdots (1 - f_{x_m})$. De modo que tenemos:

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m \equiv 1.$$

Por otra parte también se cumple que

$$\psi_i(t) = 0 \quad \text{para todo } t \notin N(x_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Para $i \geq 2$, es claro por construcción, ya que recordemos que las funciones f_{x_i} estaban construidas de modo que se anulasen en todo $X \setminus N(x_i)$; para $t \notin N(x_1)$, tenemos que $t \in V(x_j)$ para algún $j = 2, \dots, m$. Por tanto $f_{x_j}(t) = 1$ y, entonces, tenemos que

$$\psi_1(t) = (1 - f_{x_j}(t)) \prod_{i \neq j} (1 - f_{x_i}(t)) = 0.$$

Con lo que la propiedad se cumple también para $j=1$

Definimos ahora

$$g := \psi_1 \widehat{f_0(x_1)} + \psi_2 \widehat{f_0(x_2)} + \dots + \psi_m \widehat{f_0(x_m)} \in \mathcal{H}. \quad (3.2)$$

Dado un $x_0 \in K$ y por las propiedades de la métrica de Hausdorff (ver, [3]), se infiere

$$\begin{aligned} & d_H \left([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, \left[(\psi_1 \widehat{f_0(x_1)} + \dots + \psi_m \widehat{f_0(x_m)}) (x_0) \right]^{\lambda_j} \right) \\ &= d_H \left(\left[\sum_{i=1}^m \psi_i(x_0) f_0(x_0) \right]^{\lambda_j}, \left[(\psi_1 \widehat{f_0(x_1)} + \dots + \psi_m \widehat{f_0(x_m)}) (x_0) \right]^{\lambda_j} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \psi_i(x_0) d_H \left([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [f_0(x_i)]^{\lambda_j} \right) \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Sean ahora $I = \{1 \leq i \leq m : x_0 \in N(x_i)\}$ y $J = \{1 \leq i \leq m : x_0 \notin N(x_i)\}$.

Tenemos que para todo $i \in I$ se cumplirá

$$\psi_i(x_0) d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [f_0(x_i)]^{\lambda_j}) \leq \psi_i(x_0) \varepsilon'$$

para $j = 1, \dots, n$

Y para todo $i \in J$, por la propiedad (3.1) se tiene

$$\psi_i(x_0) d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [f_0(x_i)]^{\lambda_j}) = 0$$

para $j = 1, \dots, n$.

De lo que podemos deducir

$$\sum_{i=1}^m \psi_i(x_0) d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [f_0(x_i)]^{\lambda_j}) \leq \sum_{i \in I} \psi_i(x_0) \varepsilon' < \varepsilon$$

para $j = 1, \dots, n$.

Y como x_0 es arbitrario en K , tenemos finalmente que $g \in V(f_0, K, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \varepsilon)$. \square

3.3. Ejemplo

Para acabar vamos a presentar un ejemplo de cómo se construirían las funciones que aparecen en el teorema anterior en un caso concreto.

PLANTEAMIENTO

Sea $X = [0, 1[$. Definimos una función continua $f_0 : [0, 1[\rightarrow \mathbb{E}^1$ como sigue:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

y $f_0(t)(x) = x^{\frac{1}{t}}$ para $0 \leq x \leq 1$. Entonces podemos ver que:

$$[f_0(0)]^\lambda = \begin{cases} \{1\} & 0 < \lambda \leq 1 \\ [0, 1] & \lambda = 0 \end{cases}$$

y para $t \in]0, 1[$,

$$[f_0(t)]^\lambda = \begin{cases} [\lambda^t, 1] & 0 < \lambda \leq 1 \\ [0, 1] & \lambda = 0. \end{cases}$$

Fijemos ahora $\varepsilon = 0.1$ y $\lambda_1 = 0.5$. Si tomamos $t \in]0, 1[$, entonces

$$N(t) = \{s \in X : |0.5^t - 0.5^s| < 0.1\}.$$

CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES

Denotamos $t_i = 0.1i - 0.05$ para $i = 1, 2, \dots, 10$, Entonces tenemos que $[0, 1[\subset \cup_{i=1}^{10} N(t_i)$.

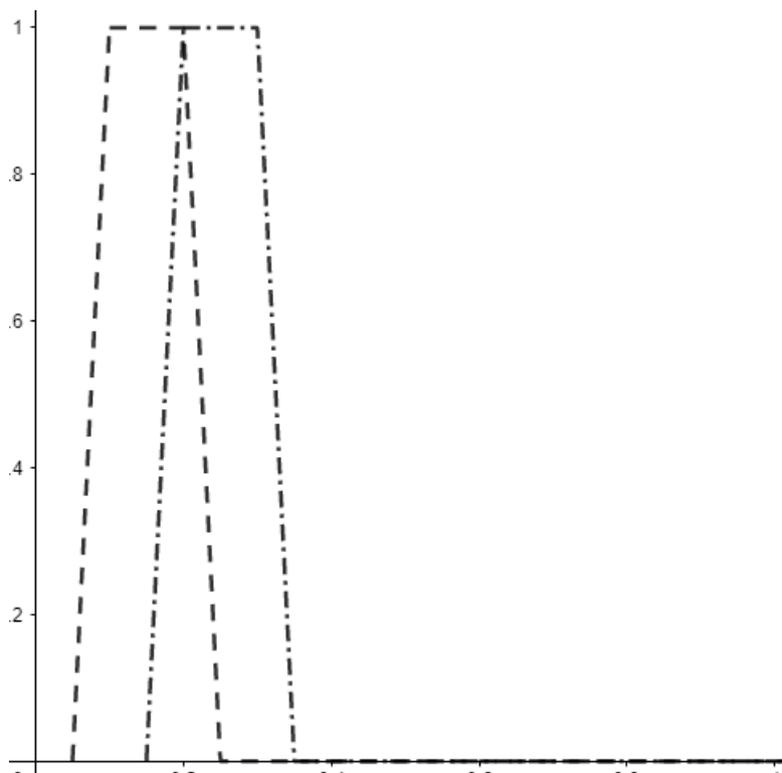
Definimos las siguientes funciones trapezoidales $i = 2, \dots, 10$:

$$f_i(t) = \begin{cases} 20t - (2i - 3) & 0.1i - 0.15 < t < 0.1i - 0.1 \\ 1 & 0.1i - 0.1 \leq t \leq 0.1i \\ -20t + (2i + 1) & 0.1i < t < 0.1i + 0.05 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A partir de las cuales construiremos las siguientes:

$$\psi_2 := f_{x_2},$$

$$\psi_3 := (1 - f_{x_2})f_{x_3},$$

Figura 3.1: Primeras dos funciones $f_2(t)$ y $f_3(t)$

⋮

$$\psi_{10} := (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_9})f_{x_{10}}.$$

Obteniendo por ejemplo,

$$\psi_3(t) = \begin{cases} 20t - 4 & 0.2 < t < 0.25 \\ 1 & 0.25 \leq t \leq 0.3 \\ -20t + 7 & 0.3 < t < 0.35 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y combinando las dos tenemos que:

$$\psi_2(t) + \psi_3(t) = \begin{cases} 20t - 1 & 0.05 < t < 0.1 \\ 1 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \\ -20t + 7 & 0.3 < t < 0.35 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De la misma manera podemos obtener:

$$\psi_2(t) + \dots + \psi_{10}(t) = \begin{cases} 20t - 1 & 0.05 < t < 0.1 \\ 1 & 0.1 \leq t < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

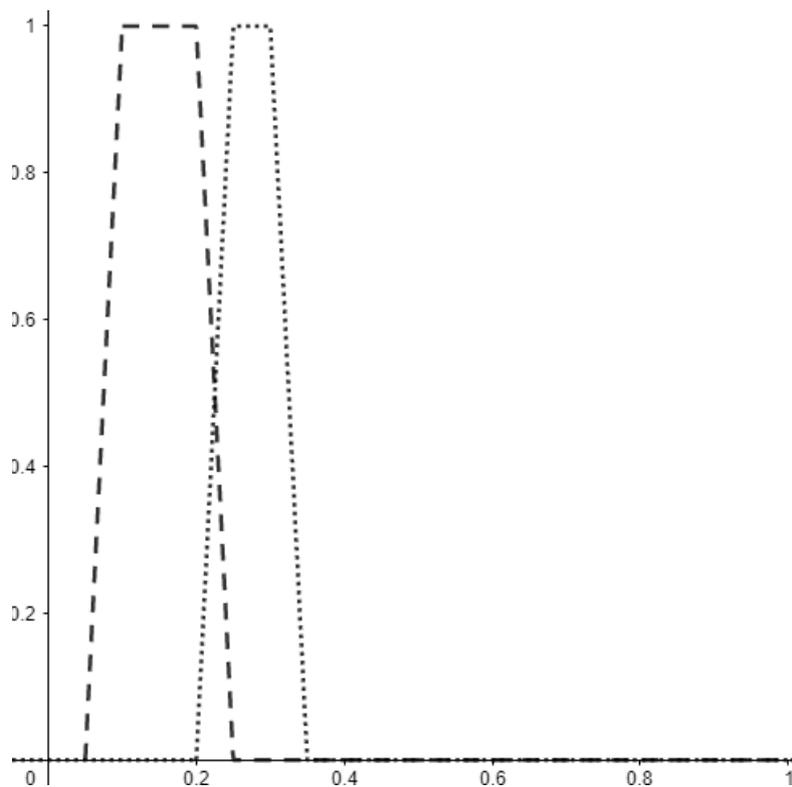


Figura 3.2: Primeras dos funciones $\psi_2(t)$ y $\psi_3(t)$

Finalmente definimos $\psi_1(t) := 1 - (\psi_2(t) + \dots + \psi_{10}(t))$, quedando:

$$\psi_1 = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 0.05 \\ -20t + 2 & 0.05 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos observar como el soporte de ψ_i está contenido en $N(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, 10$. Finalmente definimos

$$g := \psi_1 \widehat{f_0(0.05)} + \psi_2 \widehat{f_0(0.15)} + \dots + \psi_{10} \widehat{f_0(0.95)}. \quad (3.3)$$

COMPROBACIÓN

Sea $t_0 \in [0, 1[$. Entonces, como $\sum_{i=1}^{10} \psi_i(t_0) = 1$, se infiere:

$$\begin{aligned} & d_H \left(([f_0(t_0)]^{0.5}, [(\psi_1 \widehat{f_0(0.05)} + \dots + \psi_{10} \widehat{f_0(0.95)})(t_0)]^{0.5}) \right) = \\ & d_H \left(\left[\sum_{i=1}^{10} \psi_i(t_0) f_0(t_0) \right]^{0.5}, [(\psi_1 \widehat{f_0(0.05)} + \dots + \psi_{10} \widehat{f_0(0.95)})(t_0)]^{0.5} \right) \leq \\ & \psi_1(t_0) d_H([f_0(t_0)]^{0.5}, [f_0(0.05)]^{0.5}) + \dots + \psi_{10}(t_0) d_H([f_0(t_0)]^{0.5}, [f_0(0.95)]^{0.5}) = \\ & \psi_1(t_0) |0.5^{t_0} - 0.5^{0.05}| + \dots + \psi_{10}(t_0) |0.5^{t_0} - 0.5^{0.95}|. \end{aligned}$$

Como t_0 pertenece al soporte de, como mucho, dos funciones ψ_i y sabemos que ese soporte está contenido en sus entornos $N(t_i)$, tenemos:

$$d_H([f_0(t_0)]^{0.5}, [(\psi_1 \widehat{f_0(0.05)} + \dots + \psi_{10} \widehat{f_0(0.95)})(t_0)]^{0.5}) \leq 0.1.$$

Y como consecuencia, al ser t_0 arbitrario, deducimos que $g \in V(f_0, \lambda_1, \epsilon)$ con $\epsilon = 0.1$ y $\lambda_1 = 0.5$.

Capítulo 4

Conclusión

Con esto damos por concluido el trabajo final de máster, habiendo demostrado y dado un ejemplo del teorema propuesto por Weierstrass y generalizado por Stone para números reales en funciones difusas, ampliando con ello la base teórica del análisis en números difusos.

Personalmente la realización de este TFM ha ampliado mis conocimientos en muchas dimensiones. Como aspectos generales me ha permitido descubrir toda la teoría de conjuntos difusos, ya que mi primer contacto con ello fue después de leer el título en el listado de TFM disponibles y mientras lo estaba realizando he aprendido tanto sobre los números difusos en sí como sobre la manera de expandir horizontes de estudio en las matemáticas modernas y como, una vez más, aunque las matemáticas no se desarrollan por una aplicación práctica necesariamente, estas acaban apareciendo, con lo que, tal y como ocurre con otras ciencias teóricas, nunca se puede estar seguro de si algo va a tener aplicación práctica.

En cuanto a aspectos más concretos, he podido estudiar cómo se desarrollan demostraciones complejas en análisis avanzado y cómo se encajan conceptos teóricos con otros de aritmética básica para avanzar en ciertas partes de la demostración, así como introducirme en el mundo de la investigación matemática.

Bibliografía

- [1] J. BUCKLEY y Y. HAYASI, *Can fuzzy neural nets approximate continuous fuzzy functions?* Fuzzy Sets and Systems 61 (1994), no. 1, 43–51.
- [2] P. DIAMOND y P. KLOEDEN, *Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis*. Fundamentals of fuzzy sets, 583641, Handb. Fuzzy Sets Ser., 7, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2000.
- [3] P. Diamond and P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, (1994).
- [4] D. DUBOIS y H. PRADE, *Operations on fuzzy numbers*, International Journal of Systems Science, 9 (1978), 613–626.
- [5] JIN-XUAN FANG y QIONG-YU XUE, *Some properties of the space of fuzzy-valued continuous functions on a compact set*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 1620–1631.
- [6] J-X. Fang and H. Huang, *Some properties of the level convergence topology on fuzzy number space \mathbb{E}^n* , Fuzzy Sets and Systems **140** (2003), 509–517.
- [7] J-X. Fang and H. Huang, *On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **147** (2004), 417–435.
- [8] J.J. Font, A. Miralles and M. Sanchis, *On the Fuzzy Number Space with the Level Convergence Topology*, J. Funct. Spaces Appl., Volume 2012, Article ID 326417, 11 pages.
- [9] JUAN J. FONT, DELIA SANCHIS y MANUEL SANCHIS, *Constructive approximation in the space of level continuous fuzzy-number-valued functions* Journal of intelligent & fuzzy systems 5899-5907. (2019). ISSN: 1064-1246
- [10] T. FEURING y W. LIPPE, *The fuzzy neural network approximation lemma*, Fuzzy Sets and Systems 102 (1999), no.2, 227–236.
- [11] S.G. GAL, *Fuzzy variant of the Stone-Weierstrass approximation theorem*, Mathematica 37(60) (1995), no.1-2, 103–108.
- [12] R. GOETSCHEL y W. VOXMAN, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986), 31–42.
- [13] H. HUANG y C. WU, *Approximation of fuzzy functions by regular fuzzy neural networks*, Fuzzy Sets and Systems 177 (2011), 60–79.
- [14] O. KALEVA, *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 301–317.

- [15] P. LIU, *Universal approximations of continuous fuzzy-valued functions by multi-layer regular fuzzy neural networks*, Fuzzy Sets and Systems 119 (2001), 313–320.
- [16] JOÃO B. PROLLA, *On the Weierstrass-Stone Theorem*, Journal of approximation theory, 78 (1994), 299–313.
- [17] H. ROMÁN-FLORES y Y. CHALCO-CANO, *Some chaotic properties of Zadeh's extensions*, Chaos, Solitons and Fractals, 35 (2008), 452–459.
- [18] E. POPA, *Morphisms of H -cones*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat 29 (1983), no 2, 53–62.
- [19] E. POPA, *Morphisms of H -cones II*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat 29 (1983), no 1, 3–12.
- [20] HAO YING, *Fuzzy Control and modeling: Analytical foundations and applications*, IEEE Press Series on Biological Engineering, 2000.

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de conjuntos difusos	10
2.2. Ejemplo de número difuso	12
2.3. Ejemplo de número real, expresado de forma difusa	12
2.4. Función $u(x)$	15
3.1. Primeras dos funciones $f_2(t)$ y $f_3(t)$	23
3.2. Primeras dos funciones $\psi_2(t)$ y $\psi_3(t)$	24

