



GRADO EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

TRABAJO FINAL DE GRADO

---

## Variación normal de superficies

---

*Autor:*  
Núria MIRALLES GAVARA

*Tutor académico:*  
Vicent GIMENO GARCIA

Fecha de lectura: \_\_ de \_\_\_\_\_ de 2022  
Curso académico 2021/2022



## Resumen

Este documento presenta el proyecto fin de grado de la asignatura MT1054-Trabajo Fin de Grado del grado en Matemática Computacional.

Se estudiará la variación normal del área de superficies de forma teórica y computacional. Empezaremos con conceptos básicos sobre las superficies regulares, vistos durante los estudios de grado, para poder introducir la variación normal de una superficie parametrizada regular. Demostraremos que la variación normal es una familia uni-paramétrica de superficies parametrizadas regulares y calcularemos la primera y segunda derivada del área.

Por otra parte, desarrollaremos un programa en Mathematica que nos permitirá calcular el área y representar como varían las superficies. Finalmente explicaremos el funcionamiento del código y presentaremos dos ejemplos de superficies y de su variación normal.

## Palabras clave

Variación normal del área, problema de Plateau, Mathematica.

## Keywords

Normal area variation, Plateau's problem, Mathematica.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Contexto y motivación del proyecto . . . . .	7
1.2. El problema de Plateau . . . . .	8
1.2.1. Ejemplo . . . . .	9
<b>2. Desarrollo del TFG</b>	<b>15</b>
2.1. Preliminares: Teoría de superficies . . . . .	15
2.2. Variación normal del área . . . . .	23
2.3. Visualización gráfica y numérica de las variaciones normales del área . . . . .	32
2.3.1. Dificultades durante el desarrollo . . . . .	36
<b>3. Resultados</b>	<b>39</b>
3.1. Ejemplo 1 . . . . .	39
3.2. Ejemplo 2 . . . . .	42
<b>4. Conclusiones</b>	<b>47</b>

<b>A. Anexo I</b>	<b>51</b>
A.1. Programa en Mathematica . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contexto y motivación del proyecto

En este proyecto vamos a estudiar la variación normal de superficies parametrizadas regulares. Obtendremos tres resultados: dos resultados de carácter teórico y un resultado computacional y gráfico. En la parte teórica demostraremos dos teoremas. En el primer teorema demostraremos que la variación normal es, bajo ciertas hipótesis, una familia uni-paramétrica de superficies parametrizadas regulares. En el segundo teorema obtendremos la expresión analítica para la primera y segunda derivada del área en una variación normal. En la parte computacional, representaremos gráficamente la variación normal de superficies regulares así como el valor numérico de la variación del área.

Para contextualizar el trabajo empezaremos con un repaso de la asignatura Geometría Diferencial y Topología del grado, dando conceptos básicos sobre las superficies regulares. Una vez terminado, introduciremos la variación normal del área y las demostraciones en detalle de los teoremas que se enunciarán. También mencionaremos el concepto de superficie minimal. Para ello, usaremos los apuntes de la asignatura mencionada anteriormente y, estudiaremos el libro de do Carmo [1] y el de Montiel y Ros [2] para ampliar conocimientos.

Finalmente, aprenderemos el lenguaje de Mathematica que nos servirá para desarrollar un código que nos permita observar la evolución del área de las superficies. Incluiremos el programa junto con su explicación, además de dos ejemplos de representación de superficies. Nos servirá de referencia el libro de Gray [3] y la documentación de Wolfram Alpha [4] y [5].

La motivación de este Trabajo Fin de Grado viene dada por el problema de Plateau, que explicamos a continuación. Fue planteado por primera vez por Joseph-louis Lagrange en 1760

y posteriormente por Joseph-Antoine Ferdinand Plateau, de quién tomó el nombre.

## 1.2. El problema de Plateau

Seguramente la forma más natural de introducir qué entendemos por variación normal y cuál fue la motivación histórica para su uso, es estudiar el problema de Plateau. El problema de Plateau consiste en encontrar, dada una curva cerrada en el espacio, la superficie con menor área que contiene a la curva cerrada como frontera. En otras palabras, debe hallarse, de entre la familia de superficies que tiene la curva como frontera, la superficie con área mínima. Este enunciado forma parte del cálculo de variaciones, que consiste en buscar máximos y mínimos de un funcional dentro de un espacio de funciones.

A continuación se observan dos superficies con la misma frontera:

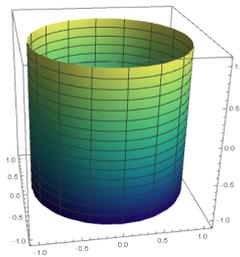


Figura 1.1: Cilindro

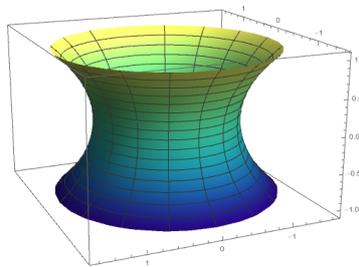


Figura 1.2: Catenoide

Se han presentado distintas soluciones a lo largo de la historia. Usando la variación normal, se puede demostrar que toda solución al problema de Plateau debe ser necesariamente una superficie parametrizada minimal (una superficie con curvatura media nula,  $H = 0$ , en todos sus puntos).

La *variación normal*, que más tarde definiremos rigurosamente, de una superficie parametrizada  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , en un dominio acotado  $D \subset U$  y precompacto, siendo  $\bar{D} = D \cup \partial D$  compacto, y con función soporte  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , es la familia de superficies  $\{X^t\}$ , con  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , dada por

$$X^t : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 ,$$

$$X^t(u, v) = X(u, v) + th(u, v)N^X(u, v) ,$$

siendo  $N^X : D \subset U \rightarrow \mathbb{R}^3$  el vector unitario normal compatible con la parametrización  $X$ . Más tarde demostraremos que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, la familia  $\{X^t\}$  está formada por superficies parametrizadas regulares. Observemos que, con el requisito de que la función  $h$  sea nula en  $\partial D$ , todas las superficies  $X^t$  tienen la misma frontera  $X(\partial D)$ . De esta forma, en la variación normal nunca modificaremos la frontera.

La aproximación al problema de Plateau por variación normal lo que busca es, dada una superficie parametrizada regular, obtener toda una familia uni-paramétrica de superficies parametrizadas regulares, construidas con ayuda del vector unitario normal a la superficie (por eso el nombre de variación normal). Así, dada una curva frontera, una superficie parametrizada regular, únicamente será una buena candidata como solución para el problema de Plateau, si su área es mínima en toda su familia de superficies parametrizadas regulares obtenidas por variación normal.

En este trabajo estudiaremos como varía el área  $A(t) = \text{area}(X^t(D))$  con el parámetro  $t$ , obteniendo, en nuestro segundo teorema, la ecuación (2.20)

$$A'(0) = -2 \iint_D hH \sqrt{(EG - F^2)} du dv ,$$

siendo  $H$  la curvatura media. Por lo que si una superficie parametrizada no tiene curvatura media nula (no es minimal) siempre es posible disminuir el área por variación normal de la superficie. Ya que como  $\sqrt{(EG - F^2)} > 0$ , cuando  $H \neq 0$  en un conjunto de medida no nula  $\Omega \subset D$ , tomando  $h = H$  conseguimos que la derivada del área sea

$$A'(0) = -2 \iint_{\Omega} H^2 \sqrt{(EG - F^2)} du dv < 0$$

negativa. Por lo que las soluciones al problema de Plateau deben ser superficies minimales (donde seguro  $A'(0) = 0$ ).

### 1.2.1. Ejemplo

Vamos a presentar un ejemplo donde aplicamos los resultados teóricos de este trabajo.

Sea  $Y : \mathbb{D}(1) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Y(x, y) = (x, y, 0)$  una superficie parametrizada regular con  $\mathbb{D}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  el disco unitario.

Esta superficie se puede reparametrizar por

$$X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), 0)$$

con  $u \in [0, 1]$  y  $v \in [0, 2\pi]$

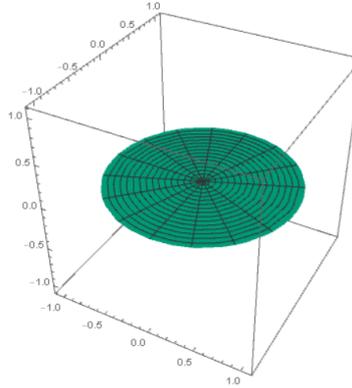


Figura 1.3: Disco unitario

La variación normal de esta superficie es la familia de superficies

$$X^t(u, v) = X(u, v) + th(u, v)N^X(u, v) ,$$

siendo  $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Si usamos, por ejemplo,  $h(u, v) = 1 - u^2$  tenemos que  $h(u, v) = 0$  cuando  $u = 1$  (en la frontera). Ahora veamos el cálculo de la normal  $N^X$  (2.3), para ello necesitamos las derivadas parciales de la parametrización  $X$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) &= X_u(u, v) = (\cos(v), \sin(v), 0) , \\ \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) &= X_v(u, v) = (-u \sin(v), u \cos(v), 0) , \end{aligned}$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u \sin(v) & u \cos(v) & 0 \end{vmatrix} = u \cos^2(v) \vec{k} + u \sin^2(v) \vec{k} = u \vec{k} = (0, 0, u) ,$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{u^2} = u ,$$

$$N^X = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(0, 0, u)}{u} = (0, 0, 1) .$$

Por tanto, la familia de superficies que da la variación normal con esta  $h$  es

$$X^t(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), 0) + t(1 - u^2)(0, 0, 1).$$

A continuación mostramos algunas de las superficies pertenecientes a esta familia de superficies:

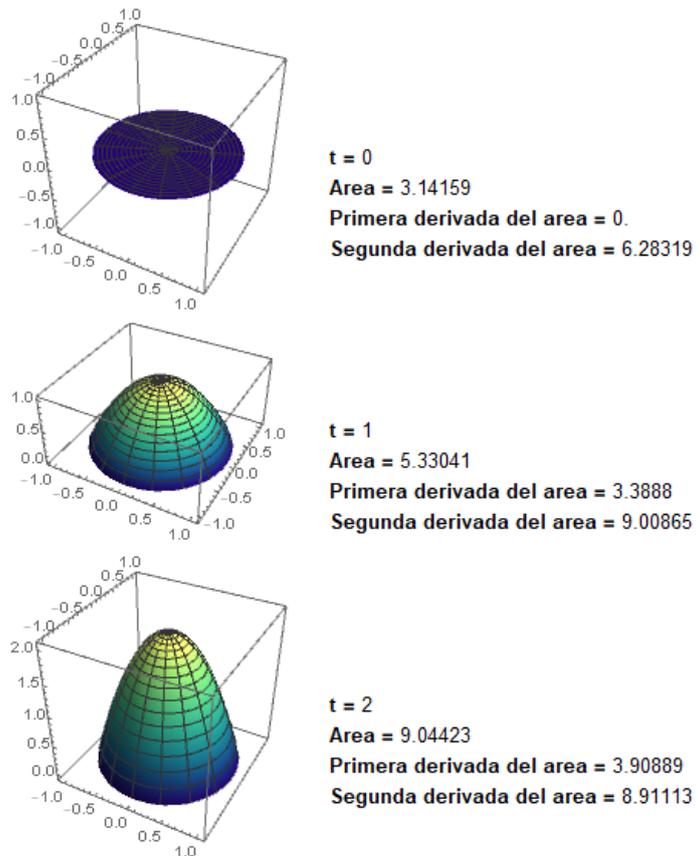
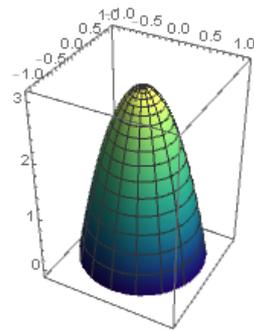
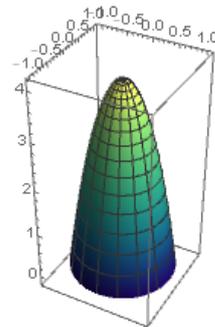


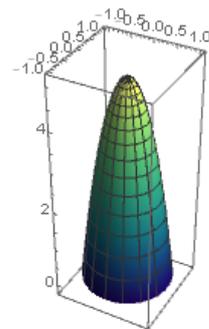
Figura 1.4: Primera parte de la tabla gráfica y numérica del ejemplo



**t = 3**  
**Area = 13.0354**  
**Primera derivada del area = 4.04943**  
**Segunda derivada del area = 8.81496**



**t = 4**  
**Area = 17.1167**  
**Primera derivada del area = 4.10583**  
**Segunda derivada del area = 8.74387**



**t = 5**  
**Area = 21.238**  
**Primera derivada del area = 4.13387**  
**Segunda derivada del area = 8.69136**

Figura 1.5: Segunda parte de la tabla gráfica y numérica del ejemplo

Por el resultado teórico que demostramos en nuestro primer teorema, sabemos que existe un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño para el que  $X^t$  es una superficie parametrizada regular, siempre que  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

El segundo teorema obtenido en este trabajo nos permite calcular la primera y segunda derivada del área como:

$$\begin{aligned}
 A'(0) &= -2 \iint_{\Omega} hH \sqrt{(EG - F^2)} \, du \, dv , \\
 A''(0) &= \iint_{\Omega} \frac{\tilde{R}(0)}{\sqrt{EG - F^2}} \, du \, dv - A'(0) .
 \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{R}(0)$  viene dado por la expresión

$$\begin{aligned}\tilde{R}(0) = & h^2 \left( \frac{e^2 F^2 E^2 - 2efFE^3 + f^2 E^4 - 2egE^2 F^2 + 2fgFE^3 - 2fgFGE^2 + g^2 E^3 G}{(EG - F^2)^2} \right) \\ & + h^2 \left( \frac{-2efFG^2 E + e^2 G^3 E - 2egG^2 F^2 + 2efG^3 F + g^2 F^2 G^2 - 2fgFG^3 + f^2 G^4}{(EG - F^2)^2} \right) \\ & + h^2 \left( \frac{2e^2 GF^2 E - 2efFGE^2 - 2f^2 F^4 + 4fgF^3 E + 4efGF^3 - 2egGEF^2 - 2egF^4}{(EG - F^2)^2} \right) \\ & + h^2 \left( \frac{2g^2 F^2 EG - 2fgFG^2 E}{(EG - F^2)^2} \right) + 4h^2 (eg - f^2)(Eh_v^2 + Gh_u^2 - 2Fh_v h_u),\end{aligned}$$

en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie.

Seguidamente, usando las derivadas parciales de  $X$ , obtenemos los coeficientes de la primera forma fundamental (2.5).

$$\begin{aligned}E = \langle X_u, X_u \rangle &= \cos^2(v) + \sen^2(v) = 1, \\ F = \langle X_u, X_v \rangle &= -u \cos(v) \sen(v) + u \cos(v) \sen(v) = 0, \\ G = \langle X_v, X_v \rangle &= u^2 \sen^2(v) + u^2 \cos^2(v) = u^2.\end{aligned}$$

A continuación calculamos las segundas derivadas parciales de  $X$  para conseguir los coeficientes de la segunda forma fundamental (2.9).

$$\begin{aligned}X_{uu}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (-\sen(v), \cos(v), 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (-u \cos(v), -u \sen(v), 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e = \langle N, X_{uu} \rangle &= 0, \\ f = \langle N, X_{uv} \rangle &= 0, \\ g = \langle N, X_{vv} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Con los resultados anteriores podemos calcular la primera (2.27) y la segunda (2.28) derivada del área  $A(t)$  de la variación normal:

$$\tilde{R}(0) = 0, \quad A'(0) = 0, \quad A''(0) = 0.$$



## Capítulo 2

# Desarrollo del TFG

Este capítulo se divide en tres partes. En la primera parte estableceremos la base teórica necesaria para desarrollar los siguientes puntos, para ello nombraremos los conceptos más importantes sobre superficies regulares vistos en la asignatura Geometría Diferencial y Topología del grado.

En las otras dos partes se tratarán los principales resultados de este proyecto. Definiremos la variación de la normal, demostrando que es una superficie parametrizada regular, además de obtener la primera y segunda derivada del área en 0. También trataremos brevemente las superficies minimales.

Finalmente explicaremos el código desarrollado en el lenguaje de Mathematica, que permite analizar, tanto gráficamente como numéricamente, la evolución del área de las superficies a lo largo de una variación normal.

### 2.1. Preliminares: Teoría de superficies

En esta sección vamos a mostrar los conceptos necesarios sobre superficies regulares.

**Definición 1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Una superficie parametrizada es una aplicación diferenciable

$$X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ,$$

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

siendo  $x, y, z$  funciones de clase  $C^\infty$  (admiten derivadas parciales continuas de cualquier orden).

**Definición 2.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Una superficie parametrizada  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es regular si  $dX_p$  es inyectiva para todo  $p \in \Omega$ .

Sabemos que  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , entonces

$$X_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$

$$X_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

$dX_p$  será inyectiva, si y solo si,  $X_u(p)$  y  $X_v(p)$  son linealmente independientes, es decir,

$$\|X_u(p) \times X_v(p)\| \neq 0.$$

**Definición 3.** Un conjunto de puntos no vacío  $S \subset \mathbb{R}^3$  es superficie regular, si para todo  $p \in S$  existe un entorno  $V \subset \mathbb{R}^3$ , un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y una aplicación  $X : U \longrightarrow V \cap S$  tal que:

1.  $X$  sea diferenciable
2.  $X$  sea homeomorfismo
3.  $dX_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  sea inyectiva  $\forall p \in U$

**Definición 4.** Decimos que una superficie regular  $S$  es orientable, si se puede asignar de forma continua un vector normal unitario para todo  $p \in S$ .

**Definición 5.** Sea  $S$  una superficie regular,  $p \in S$  y  $\alpha(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$  una curva parametrizada diferenciable. Definimos el plano tangente a  $S$  en  $p$  como:

$$T_p S = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \text{ con } \alpha(0) = p, \alpha'(0) = \vec{w} \}.$$

Conjunto de todos los vectores tangentes a las curvas que pasan por el punto  $p$ .

**Proposición 1.** Dada una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , un punto  $p \in S$  y una parametrización de  $S$ ,  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$  con  $p \in X(U)$ . Entonces

$$T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2). \quad (2.1)$$

*Demostración.*  $\square$  Tomamos  $\vec{w} \in T_p S$ .

Sabemos que existe  $\alpha(t) \in S$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \vec{w}$

$$\begin{aligned} \vec{w} = \alpha'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \alpha(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} X(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = dX_{(u(t), v(t))}(u'(t), v'(t)) \Big|_{t=0} = \\ &= dX_q(u'(0), v'(0)) = u'(0)X_u + v'(0)X_v \end{aligned}$$

Entonces  $\vec{w} \in dX_q(\mathbb{R}^2)$ .

□ Sea  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ .

Vamos a comprobar que  $dX_q(\vec{v})$  es un vector tangente a  $S$  en  $p \in S$ . Para ello, debemos construir una curva en  $S$  que pasa por  $p$  y con vector velocidad  $dX_q(\vec{v})$ . Tomamos  $\beta(t) = q + t\vec{w}$  una curva de  $\mathbb{R}^2$  y  $\alpha = X \circ \beta$ .

Como  $q \in U$  abierto, existe un intervalo abierto  $I$  que contiene el 0 tal que  $\alpha(t) \subset U$ .

Entonces, tenemos que  $\alpha(t) \in S$ ,  $\alpha(0) = (X \circ \beta)(0) = p$  y  $\alpha'(t) = dX_q(\vec{w}) \in T_pS$ . □

Tomamos  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  y  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  base de  $\mathbb{R}^2$ , podemos escribir

$$dX_q(\vec{v}) = dX_q(v_1, v_2) = v_1 dX_q(1, 0) + v_2 dX_q(0, 1) ,$$

$$dX_q(\mathbb{R}^2) = \langle \{dX_q(1, 0), dX_q(0, 1)\} \rangle = T_pS .$$

**Definición 6.** Sea  $S$  una superficie parametrizada regular definida por  $X(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ ,  $q = (u_0, v_0) \in U$  y  $p = X(q) \in S$ . Se definen las curvas coordenadas o paramétricas que pasan por el punto  $p$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= X((u_0, v_0) + t(1, 0)) = X(u_0 + t, v_0) , \\ \alpha_2(t) &= X((u_0, v_0) + t(0, 1)) = X(u_0, v_0 + t) . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Estas curvas pertenecen a la superficie  $S$ , si calculamos su vector tangente en  $p$

$$\begin{aligned} \alpha_1'(0) &= (dX)(u_0, v_0)(1, 0) = dX_q(1, 0) = X_u(q) , \\ \alpha_2'(0) &= (dX)(u_0, v_0)(0, 1) = dX_q(0, 1) = X_v(q) . \end{aligned}$$

Podemos observar que estos dos vectores, pertenecientes al plano tangente, son linealmente independientes, es decir, forman una base, por tanto,

$$T_pS = \langle \{X_u(q), X_v(q)\} \rangle .$$

**Definición 7.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$  superficie regular. Tomamos  $p \in S$  y  $q = X^{-1}(p)$ . Llamamos normal unitario al campo vectorial  $N^X : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por:

$$N^X(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(q) . \quad (2.3)$$

Como  $N^X(p) \in \langle \{X_u \times X_v\} \rangle$ , entonces  $N^X(p) \in \langle \{X_u, X_v\} \rangle^\perp = T_pS^\perp$ . Sabemos que el vector normal es perpendicular al plano tangente y a la superficie en el punto  $p$ .

**Definición 8.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$ , un vector  $\vec{w} \in T_p S$  y un punto  $p \in X(U) \subset S$ . Se define la primera forma fundamental en  $p$  como

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R} ,$$

$$I_p(\vec{w}, \vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p .$$

**Nota 1.** Como  $I_p$  es una restricción del producto escalar tenemos que:

1.  $I_p$  es bilineal
2.  $I_p$  es simétrica:  $I_p(x, y) = I_p(y, x)$
3.  $I_p$  es definida positiva:  $I_p(x, x) \geq 0$
4.  $I_p$  es no degenerada:  $I_p(x, x) = 0 \iff x = 0$

Si el vector  $\vec{w}$  es tangente a la superficie  $S$  en el punto  $p$ , puede escribirse como vector tangente a una curva de  $S$ ,  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \vec{w}$ . Aplicando la primera forma fundamental se observa que

$$I_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p$$

$$= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 . \quad (2.4)$$

Se obtienen los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle_p ,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle_p = \langle X_v, X_u \rangle_p , \quad (2.5)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle_p .$$

**Nota 2.** Dados  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$  expresados en función de la base del plano tangente en  $p$ , se puede expresar su producto escalar en forma matricial:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \vec{w} .$$

Al realizar el determinante de la matriz anterior de coeficientes se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2$$

$$= \|X_u(q)\|^2 \|X_v(q)\|^2 - \|X_u(q)\|^2 \|X_v(q)\|^2 \cos^2(\theta)$$

$$= \|X_u(q)\|^2 \|X_v(q)\|^2 (1 - \cos^2(\theta))$$

$$= \|X_u(q)\|^2 \|X_v(q)\|^2 \sin^2(\theta) = \|X_u \times X_v\|^2 > 0 ,$$

deduciendo que

$$EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2 . \quad (2.6)$$

**Definición 9.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización inyectiva de  $S$ . Tomamos  $Q \subset U$  y  $R = X(Q)$ . Se define el área de  $R$  como

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \times X_v\| \, du \, dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv . \quad (2.7)$$

**Definición 10.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientable y  $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  la esfera centrada en  $(0, 0, 0)$  y de radio 1. Se define la aplicación de Gauss como

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow \mathbb{S} , \\ p &\longrightarrow N(p) . \end{aligned}$$

Dicha función toma el vector normal unitario de cada  $p \in S$  y lo traslada a la esfera situándolo sobre el punto  $(0, 0, 0)$ .

**Nota 3.** La aplicación de Gauss es diferenciable. Llamamos  $dN$  a su diferencial:

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_p \mathbb{S} .$$

Como  $T_p S$  y  $T_p \mathbb{S}$  son planos paralelos, la diferencial se puede escribir como

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S .$$

Vamos a calcular la matriz de la diferencial.

Tomamos la curva  $\alpha(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ , definida como  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(t) = X_u u' + X_v v'$ . Escribimos la diferencial de Gauss de  $\alpha'(t)$  como  $dN(\alpha'(t)) = N_u u' + N_v v'$ .

Como  $N_u$  y  $N_v$  son tangentes a la superficie, pueden representarse en función de las coordenadas de la base de  $T_p S$ :

$$\begin{cases} N_u = aX_u + bX_v \\ N_v = cX_u + dX_v \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} ,$$

$$dN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

**Definición 11.** Se define la aplicación de Weingarten como la diferencial de la aplicación de Gauss cambiada de signo, es decir,

$$W_p = -(dN_p) : T_p S \longrightarrow T_p S .$$

**Definición 12.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientable definida por  $X(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  y un vector  $\vec{w} \in T_p S$ . Definimos la segunda forma fundamental como

$$\begin{aligned} \Pi_p : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ \Pi_p(\vec{v}, \vec{w}) &= -\langle dN_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle . \end{aligned}$$

**Nota 4.**  $\Pi_p$  es bilineal, simétrica y autoadjunta.

Si el vector  $\vec{w}$  es tangente a la superficie  $S$  en el punto  $p$ , puede escribirse como  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \vec{w}$ . Aplicando la segunda forma fundamental se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) &= -\langle dN(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle_p = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= -\langle N_u, X_u \rangle_p (u')^2 - \langle N_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle N_v, X_u \rangle_p u' v' + \langle N_v, X_v \rangle_p (v')^2 . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como  $X_u$  y  $X_v$  son perpendiculares a  $N$ , tenemos que  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ . Calculamos la derivada parcial respecto de  $u$  y  $v$ :

$$\begin{aligned} \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle &= \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 , \\ \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0 . \end{aligned}$$

Se deducen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} -\langle N_u, X_u \rangle &= \langle N, X_{uu} \rangle , \\ -\langle N_u, X_v \rangle &= \langle N, X_{vu} \rangle , \\ -\langle N_v, X_u \rangle &= \langle N, X_{uv} \rangle , \\ -\langle N_v, X_v \rangle &= \langle N, X_{vv} \rangle . \end{aligned}$$

Además, sabemos que  $X_{uv} = X_{vu}$ . Por tanto,  $\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = \langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$ .

Seguidamente, sustituimos estos cálculos en la expresión (2.8):

$$\Pi_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = \langle N, X_{uu} \rangle_p (u')^2 - 2\langle N, X_{uv} \rangle_p u' v' + \langle N, X_{vv} \rangle_p (v')^2 .$$

Obtenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle_p , \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle_p = \langle N, X_{vu} \rangle_p , \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle_p . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Una vez definidas la primera y la segunda forma fundamental, se obtendrán los términos de la matriz de  $dN$  estudiando su relación con los coeficientes tanto de la primera forma fundamental como de la segunda.

$$\begin{aligned}
-e &= -\langle N, X_{uu} \rangle = \langle N_u, X_u \rangle = \langle aX_u + bX_v, X_u \rangle = aX_uX_u + bX_vX_u = aE + bF, \\
-f &= -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_u, X_v \rangle = \langle aX_u + bX_v, X_v \rangle = aX_uX_v + bX_vX_v = aF + bG, \\
-f &= -\langle N, X_{vu} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle = \langle cX_u + dX_v, X_u \rangle = cX_uX_u + dX_vX_u = cE + bF, \\
-g &= -\langle N, X_{vv} \rangle = \langle N_v, X_v \rangle = \langle cX_u + dX_v, X_v \rangle = cX_uX_v + dX_vX_v = cF + bG.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} -e = aE + bF \\ -f = aF + bG \\ -f = cE + bF \\ -g = cF + bG \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

Aislamos la  $dN$  y realizamos los cálculos pertinentes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{Ff - eG}{EG - F^2} & b &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\
c &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & d &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

**Nota 5.** Podemos escribir la aplicación de Weingarten en forma matricial de la siguiente forma:

$$W_p = -(dNp) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \\
a_{21} &= \frac{fE - ef}{EG - F^2}, \\
a_{12} &= \frac{fG - gF}{EG - F^2}, \\
a_{22} &= \frac{gE - fF}{EG - F^2}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

**Definición 13.** Llamamos curvatura de Gauss de una superficie regular  $S$  en  $p \in S$  al determinante de la aplicación de Weingarten.

$$K_p = \det(W_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(p) \tag{2.11}$$

**Definición 14.** Definimos curvatura media de una superficie regular  $S$  en  $p \in S$  a la mitad de la traza de la aplicación de Weingarten.

$$H_p = \frac{1}{2} \text{tr}(W_p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}(p) \quad (2.12)$$

**Definición 15.** Sea  $S$  una superficie regular,  $p \in S$  un punto y  $\vec{v} \in T_p S$  un vector no nulo. Tomamos el plano que pasa por  $p$  y tiene como vectores directores a  $\vec{v}$  y  $N^X(p)$  vector normal a  $S$  en  $p$ . Llamamos sección normal de  $S$  en  $p$  y dirección  $\vec{v}$ , a la intersección del plano anterior con la superficie.

**Definición 16.** La curvatura normal de una superficie  $S$  en un punto  $p$  y dirección  $\vec{v}$  es la curvatura de la curva que delimita la sección normal de  $S$  en dicho punto y dirección.

**Definición 17.** Denotamos curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$ , al valor máximo y mínimo de la curvatura normal respectivamente.

Las curvaturas principales se calculan a partir de los valores propios de la matriz  $A - Id\lambda$ , tomando  $A = W_p$ . Para ello se calcula el polinomio característico,

$$\begin{aligned} p(k) &= \det(A - Idk) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{11}k - a_{22}k + k^2 - a_{12}a_{21} \\ &= k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) . \end{aligned}$$

Por las definiciones anteriores de curvatura de Gauss y curvatura media sabemos que

$$p(k) = k^2 - \text{tr}(W_p)k + \det(W_p) = k^2 - 2H_p k + K_p .$$

Se iguala el polinomio a 0 para obtener las raíces, que serán las curvaturas principales:

$$k^2 - 2H_p k + K_p = 0 \longrightarrow \begin{cases} k_1 = H_p + \sqrt{H_p^2 - K_p} \\ k_2 = H_p - \sqrt{H_p^2 - K_p} \end{cases} . \quad (2.13)$$

Una vez calculadas las curvaturas principales, veamos las direcciones principales.

Una dirección  $\vec{w} = c_1 X_u + c_2 X_v \in T_p S$  es principal si es un vector propio de la aplicación de Weingarten, es decir, si  $W_p(\vec{w}) = \lambda \vec{w}$ .

$$\begin{aligned} W_p(\vec{w}) &= W_p(c_1 X_u + c_2 X_v) = c_1 W_p(X_u) + c_2 W_p(X_v) \\ &= c_1(a_{11} X_u + a_{21} X_v) + c_2(a_{12} X_u + a_{22} X_v) \\ &= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2)X_u + (a_{21}c_1 + a_{22}c_2)X_v . \end{aligned}$$

Por tanto, será vector propio si cumple

$$\begin{cases} \frac{eG-fF}{EG-F^2}c_1 + \frac{fG-gF}{EG-F^2} = \lambda c_1 \\ \frac{fE-eF}{EG-F^2}c_1 + \frac{gE-fF}{EG-F^2} = \lambda c_2 \end{cases} .$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$(fE - eF)c_1^2 + (gE - eG)c_1c_2 + (gF - fG)c_2^2 = 0 . \quad (2.14)$$

Aplicando la ecuación anterior se consiguen los valores  $c_1$  y  $c_2$ . Se sustituyen en  $\vec{w} = c_1X_u + c_2X_v$ , de forma que  $\vec{w}$  será las direcciones principales.

## 2.2. Variación normal del área

Una vez introducidos los conceptos matemáticos previos, vamos a tratar el tema principal del proyecto. Empezamos definiendo la variación de la normal:

**Definición 18.** Tomamos  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular. Dados  $D \subset U$  un dominio acotado,  $\bar{D} = D \cup \partial D$  un compacto y  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, definimos una variación de la normal de  $X(\bar{D})$  como la familia de parametrizaciones:

$$\begin{aligned} X^t : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^3 , \\ X^t(u, v) &= X(u, v) + th(u, v)N^X(u, v) \end{aligned} \quad (2.15)$$

siendo  $(u, v) \in \bar{D}$  y  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Veamos el primer resultado teórico de este proyecto, la variación de la normal es una superficie parametrizada regular.

**Teorema 1.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular,  $D \subset U$  un dominio acotado,  $\bar{D} = D \cup \partial D$  un compacto y  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. La variación de la normal de  $X(\bar{D})$

$$\begin{aligned} X^t : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^3 , \\ X^t(u, v) &= X(u, v) + th(u, v)N^X(u, v) \end{aligned}$$

con  $(u, v) \in \bar{D}$  y  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , es una superficie parametrizada regular para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

*Demostración.* Veamos que  $X_u^t$  y  $X_v^t$  son linealmente independientes. Calculamos las derivadas parciales de  $X^t$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^t}{\partial u}(u, v) &= X_u^t(u, v) = X_u(u, v) + th_u(u, v)N(X(u, v)) + th(u, v)dN(X(u, v))X_u(u, v) \\ &= X_u + th_uN + thdNX_u, \\ \frac{\partial X^t}{\partial v}(u, v) &= X_v^t(u, v) = X_v(u, v) + th_v(u, v)N(X(u, v)) + th(u, v)dN(X(u, v))X_v(u, v) \\ &= X_v + th_vN + thdNX_v.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Aplicamos la definición de la aplicación de Weingraten,  $-dN = W$ , en las parciales

$$\begin{aligned}X_u^t &= X_u + th_uN - thWX_u = (Id - thW)X_u + th_uN, \\ X_v^t &= X_v + th_vN - thWX_v = (Id - thW)X_v + th_vN.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Observamos que tanto  $(Id - thW)X_u$  como  $(Id - thW)X_v$  pertenecen a  $\langle\{X_u, X_v\}\rangle$ , por tanto,  $X_u$  y  $X_v$  pueden escribirse como combinación lineal de los elementos de la base  $B = \{X_u, X_v, N\}$ :

$$\begin{aligned}X_u^t &= aX_u + bX_v + th_uN = (a, b, th_u)_B, \\ X_v^t &= cX_u + dX_v + th_vN = (c, d, th_v)_B.\end{aligned}\tag{2.18}$$

$X_u^t$  y  $X_v^t$  serán linealmente independientes si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sabemos que

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}W(X_u) &= W_{12}X_u + W_{22}X_v, \\ W(X_v) &= W_{11}X_u + W_{21}X_v.\end{aligned}\tag{2.19}$$

A continuación igualamos las ecuaciones (2.17) y (2.18),

$$\begin{aligned}X_u + th_uN - thWX_u &= aX_u + bX_v + th_uN, \\ X_v + th_vN - thWX_v &= cX_u + dX_v + th_vN,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_u - thWX_u &= aX_u + bX_v, \\ X_v - thWX_v &= cX_u + dX_v\end{aligned}$$

y aplicamos (2.19)

$$\begin{aligned}X_u - thW_{11}X_u - thW_{21}X_v &= aX_u + bX_v, \\ X_v - thW_{12}X_u - thW_{22}X_v &= cX_u + dX_v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 - thW_{11})X_u - thW_{21}X_v &= aX_u + bX_v , \\ (1 - thW_{22})X_v - thW_{12}X_u &= cX_u + dX_v ,\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}a &= 1 - thW_{11} , & b &= -thW_{21} , \\ c &= -thW_{12} , & d &= 1 - thW_{22} .\end{aligned}$$

Los resultados obtenidos los sustituimos en el determinante

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 - thW_{11} & -thW_{21} \\ -thW_{12} & 1 - thW_{22} \end{vmatrix} = 1 - thW_{22} - thW_{11} + t^2h^2W_{11}W_{22} - t^2h^2W_{12}W_{21} \\ &= 1 - th(W_{22} + W_{11}) + t^2h^2(W_{11}W_{22} - W_{12}W_{21}) = 1 - th(tr(W)) + t^2h^2(det(W)) \\ &= 1 - th(k_1 + k_2) + t^2h^2(k_1k_2) .\end{aligned}$$

Seguidamente comprobamos si este determinante es diferente de 0:

Tomamos

$$\begin{aligned}f(t, u, v) &:= 1 - th(tr(W)) + t^2h^2(det(W)) = 1 - 2thH + t^2h^2K \\ &\geq 1 - 2t \sup_{x \in \bar{D}} (|h(x)H(x)|) - t^2 \sup_{x \in \bar{D}} (h^2(x)|K(x)|),\end{aligned}$$

cumpliendo que  $f(0, u, v) = 1$ . Como suponemos que  $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$  es compacto, entonces  $\exists A, B \in \mathbb{R}$  tales que  $f(t, u, v) \geq F(t) := 1 - 2tA - t^2B$ .

Por lo tanto, tenemos  $F(t) = 1 - 2tA - t^2B$  función continua por ser un polinomio y  $F(0) = 1$ . Tomamos  $(1 - \delta, 1 + \delta)$  un abierto de  $\mathbb{R}$  siendo  $\delta < 1$ . Como  $F$  es continua sabemos que  $F^{-1}((1 - \delta, 1 + \delta))$  es un abierto con  $0 \in F^{-1}((1 - \delta, 1 + \delta))$ . Entonces existe una componente conexa de  $F^{-1}((1 - \delta, 1 + \delta))$  que contiene al 0, es decir,  $\exists \epsilon > 0 : (-\epsilon, \epsilon) \subset F^{-1}((1 - \delta, 1 + \delta))$  y  $F(t) > 0 \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) .$$

$X^t(u, v) = X(u, v) + th(u, v)N^X(u, v)$  es una superficie parametrizada regular  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .  $\square$

**Nota 6.** Observemos que, en la demostración anterior, solo se usa la compacidad para asegurarse que las cantidades  $\sup_{x \in \bar{D}} (|h(x)H(x)|)$  y  $\sup_{x \in \bar{D}} (h^2(x)|K(x)|)$  están acotadas.

A continuación presentamos el segundo resultado, vamos a calcular la primera y la segunda derivada del área en 0.

**Teorema 2.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular,  $D \subset U$  un dominio acotado,  $\bar{D} = D \cup \partial D$  un compacto y  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Tomamos la variación de la normal de  $X(\bar{D})$

$$\begin{aligned}X^t &: \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 , \\ X^t(u, v) &= X(u, v) + th(u, v)N^X(u, v)\end{aligned}$$

con  $(u, v) \in \bar{D}$  y  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Entonces la primera y segunda derivada del área de la variación normal del área son:

$$A'(0) = -2 \iint_{\Omega} hH \sqrt{(EG - F^2)} du dv , \quad (2.20)$$

$$A''(0) = \iint_{\Omega} \frac{\tilde{R}(0)}{\sqrt{EG - F^2}} du dv - A'(0) \quad (2.21)$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{R}(0) = & h^2 \left( \frac{e^2 F^2 E^2 - 2efFE^3 + f^2 E^4 - 2egE^2 F^2 + 2fgFE^3 - 2fgFGE^2 + g^2 E^3 G}{(EG - F^2)^2} \right) \\ & + h^2 \left( \frac{-2efFG^2 E + e^2 G^3 E - 2egG^2 F^2 + 2efG^3 F + g^2 F^2 G^2 - 2fgFG^3 + f^2 G^4}{(EG - F^2)^2} \right) \\ & + h^2 \left( \frac{2e^2 GF^2 E - 2efFGE^2 - 2f^2 F^4 + 4fgF^3 E + 4efGF^3 - 2egGEF^2 - 2egF^4}{(EG - F^2)^2} \right) \\ & + h^2 \left( \frac{2g^2 F^2 EG - 2fgFG^2 E}{(EG - F^2)^2} \right) + 4h^2 (eg - f^2) (Eh_v^2 + Gh_u^2 - 2Fh_v h_u) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

*Demostración.* Necesitamos obtener los coeficientes de la primera forma fundamental de  $X^t$ . Para ello, calculamos las derivadas parciales de  $X^t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^t}{\partial u} &= X_u^t = X_u + thN_u + tNh_u , \\ \frac{\partial X^t}{\partial v} &= X_v^t = X_v + thN_v + tNh_v \end{aligned} \quad (2.23)$$

y teniendo en cuenta algunos resultados vistos en la sección anterior

$$\begin{aligned} e &= -\langle X_u, N_u \rangle , \\ f &= -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle , \\ g &= -\langle X_v, N_v \rangle , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N, N_u \rangle &= 0 , \\ \langle N, N_v \rangle &= 0 , \\ \langle N, X_u \rangle &= 0 , \\ \langle N, X_v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

tenemos los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} E^t &= \langle X_u^t, X_u^t \rangle = \langle X_u, X_u \rangle + th\langle X_u, N_u \rangle + th_u\langle X_u, N \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + th\langle X_u, N_u \rangle \\ &\quad + t^2 h h_u \langle N, N_u \rangle + th_u \langle X_u, N \rangle + t^2 h h_u \langle N, N_u \rangle + t^2 h_u^2 \langle N, N \rangle \\ &= E - 2eth + t^2 (h^2 \langle N_u, N_u \rangle + h_u^2) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^t &= \langle X_u^t, X_v^t \rangle = \langle X_u, X_v \rangle + th \langle X_u, N_v \rangle + th_v \langle X_u, N \rangle + th \langle N_u, X_v \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle \\
&\quad + th h_v \langle N, N_u \rangle + th_v \langle X_v, N \rangle + t^2 h h_u \langle N, N_v \rangle + t^2 h_u h_v \langle N, N \rangle \\
&= F - 2fth + t^2 (h^2 \langle N_u, N_v \rangle + h_u h_v) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^t &= \langle X_v^t, X_v^t \rangle = \langle X_v, X_v \rangle + th \langle X_v, N_v \rangle + th_v \langle X_v, N \rangle + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + th \langle X_v, N_v \rangle \\
&\quad + t^2 h h_v \langle N, N_v \rangle + th_v \langle X_v, N \rangle + t^2 h h_v \langle N, N_v \rangle + t^2 h_v^2 \langle N, N \rangle \\
&= G - 2gth + t^2 (h^2 \langle N_v, N_v \rangle + h_v^2) .
\end{aligned}$$

A continuaci3n, calculamos detalladamente el determinante de los coeficientes,  $E^t G^t - (F^t)^2$ .

$$\begin{aligned}
E^t G^t &= EG - 2Eght + Eh^2 \langle N_v, N_v \rangle t^2 + Eh_v^2 t^2 - 2Geht + 4egh^2 t^2 - 2eh^3 \langle N_v, N_v \rangle t^3 \\
&\quad - 2ehh_v^2 t^3 + Gh^2 \langle N_u, N_u \rangle t^2 - 2gh^3 \langle N_u, N_u \rangle t^3 + h^4 \langle N_u, N_u \rangle \langle N_v, N_v \rangle t^4 + Gh_u^2 t^2 \\
&\quad - 2ghh_u^2 t^3 + h^2 h_u^2 \langle N_v, N_v \rangle t^4 + h_u^2 h_v^2 t^4 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F^t)^2 &= F^2 - 2Ffht + F(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle) t^2 - 2Ffht + 4f^2 h^2 t^2 \\
&\quad - 2fh(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle) t^3 + F(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle) t^2 \\
&\quad - 2fh(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle) t^3 + (h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle)^2 t^4 \\
&= F^2 - 4Ffht + 4f^2 h^2 t^2 + 2F(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle) t^2 \\
&\quad - 4fh(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle) t^3 + (h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle)^2 t^4 .
\end{aligned}$$

Usando que la f3rmula de la curvatura media (2.12) obtenemos el determinante:

$$\begin{aligned}
E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2Geft + 4Ffht - 2Ehgt + R \\
&= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\
&= (EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R) \frac{2(EG - F^2)}{2(EG - F^2)} \\
&= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R
\end{aligned} \tag{2.24}$$

siendo

$$\begin{aligned}
R &:= (Eh^2 \langle N_v, N_v \rangle + Eh_v^2 + 4egh^2 + Gh^2 \langle N_u, N_u \rangle + Gh_u^2 - 4f^2 h^2 - 2F(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle)) t^2 \\
&\quad + (-2eh^3 \langle N_v, N_v \rangle - 2ehh_v^2 - 2gh^3 \langle N_u, N_u \rangle - 2ghh_u^2 + 4fh(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle)) t^3 \\
&\quad + (h^4 \langle N_u, N_u \rangle \langle N_v, N_v \rangle + h^2 h_v^2 \langle N_u, N_u \rangle + h^2 h_u^2 \langle N_u, N_u \rangle + h_u^2 h_v^2 \\
&\quad - (h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle)^2) t^4 .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Sabemos que, tomando  $R = \tilde{R}t^2$ , el área de la variación normal será:

$$A(t) = \iint_{\Omega} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv = \iint_{\Omega} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2} du dv . \quad (2.26)$$

Seguidamente, calculamos la primera y la segunda derivada del área en  $t = 0$ .

$$A'(t) = \iint_{\Omega} \frac{-4hH(EG - F^2) + \tilde{R}'t^2 + 2\tilde{R}t}{2\sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2}} du dv , \quad (2.27)$$

$$A'(0) = \iint_{\Omega} \frac{-4hH(EG - F^2)}{2\sqrt{(EG - F^2)}} du dv = -2 \iint_{\Omega} hH \sqrt{(EG - F^2)} du dv ,$$

$$\begin{aligned} A''(t) &= \iint_{\Omega} \frac{2(\tilde{R}''t^2 + 4t\tilde{R}' + 2\tilde{R})\sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2}}{4((EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2)} du dv \\ &\quad - \iint_{\Omega} \frac{(-4hH(EG - F^2) + \tilde{R}'t^2 + 2\tilde{R}t) \frac{-4hH(EG - F^2) + \tilde{R}'t^2 + 2\tilde{R}t}{2\sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2}}}{4((EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2)} du dv \\ &= \iint_{\Omega} \frac{2(\tilde{R}''t^2 + 4t\tilde{R}' + 2\tilde{R})\sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2}}{4((EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2)} du dv \\ &\quad - \iint_{\Omega} \frac{(-4hH(EG - F^2) + \tilde{R}'t^2 + 2\tilde{R}t)^2}{8((EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2)\sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + \tilde{R}t^2}} du dv , \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} A''(0) &= \iint_{\Omega} \frac{4\tilde{R}''(0)\sqrt{EG - F^2} + 4hH(EG - F^2) \frac{4hH(EG - F^2)}{2\sqrt{EG - F^2}}}{4(EG - F^2)} du dv \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\tilde{R}''(0)}{\sqrt{EG - F^2}} du dv + 2 \iint_{\Omega} hH \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\tilde{R}''(0)}{\sqrt{EG - F^2}} du dv - A'(0) \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{R}''(0) &= Eh^2\|N_v\|^2 + Eh_v^2 + 4egh^2 + Gh^2\|N_u\|^2 + Gh_u^2 - 4f^2h^2 - 2Fh^2\langle N_u, N_v \rangle - 2Fh_uh_v \\ &= h^2(E\|N_v\|^2 + G\|N_u\|^2 - 2F\langle N_u, N_v \rangle) + 4h^2(eg - f^2)(Eh_v^2 + Gh_u^2 - 2Fh_vh_u) . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Queremos expresar  $\tilde{R}(0)$  en términos de la primera y de la segunda forma fundamental.  $N_u$  i  $N_v$  son tangentes a la superficie, por tanto, pueden escribirse como combinación lineal de la base del plano tangente:

$$\begin{cases} N_u = aX_u + bX_v \\ N_v = cX_u + dX_v \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} .$$

Como se ha comentado anteriormente, tenemos la matriz de la diferencial de la aplicación de Gauss y sus coeficientes.

$$dN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{Ff - eG}{EG - F^2} , & b &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} , \\ c &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} , & d &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} . \end{aligned}$$

Reformulamos las expresiones de  $\tilde{R}(0)$  que queremos eliminar usando las ecuaciones anteriores.

$$\begin{aligned} \|N_v\|^2 &= \langle N_v, N_v \rangle = c^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2cd \langle X_u, X_v \rangle + d^2 \langle X_v, X_v \rangle = c^2 E + 2cdF + d^2 G \\ &= \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right)^2 E + 2 \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) F + \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right)^2 G \\ &= \frac{e^2 F^2 E - 2efFE^2 + f^2 E^3 + 2efF^3 - 2egEF^2 - 2f^2 EF^2 + 2fgFE^2 + f^2 F^2 G}{(EG - F^2)^2} \\ &\quad + \frac{-2fgFGE + g^2 E^2 G}{(EG - F^2)^2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|N_u\|^2 &= \langle N_u, N_u \rangle = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle = a^2 E + 2abF + b^2 G \\ &= \left( \frac{Ff - eG}{EG - F^2} \right)^2 E + 2 \left( \frac{Ff - eG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) F + \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right)^2 G \\ &= \frac{F^2 f^2 E - 2efFGE + e^2 G^2 E + 2fgF^3 - 2f^2 GF^2 - 2egGF^2 + 2efG^2 F + g^2 F^2 G}{(EG - F^2)^2} \\ &\quad + \frac{-2fgFG^2 + f^2 G^3}{(EG - F^2)^2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_u, N_v \rangle &= a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle = a^2 E + 2abF + b^2 G \\
&= \left( \frac{Ff - eG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) E \\
&\quad + \left[ \left( \frac{Ff - eG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) + \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \right] F \\
&\quad + \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) G \\
&= \frac{efF^2E - f^2FE^2 - e^2GFE + efGE^2 + f^2F^3 - fgF^2E - efGF^2 + egGEF}{(EG - F^2)^2} \\
&\quad + \frac{geF^3 - gfEF^2 - feF^2G + f^2GFE + gfF^2G - g^2FEG - f^2FG^2 + fgEG^2}{(EG - F^2)^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos los resultados anteriores en  $\tilde{R}(0)$ .

$$\begin{aligned}
E\|N_v\|^2 + G\|N_u\|^2 - 2F\langle N_u, N_v \rangle &= \frac{e^2F^2E^2 - 2efFE^3 + f^2E^4 + 2efF^3E - 2egE^2F^2}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{-2f^2E^2F^2 + 2fgFE^3 + f^2F^2GE - 2fgFGE^2}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{g^2E^3G + f^2F^2EG - 2efFG^2E + e^2G^3E + 2fgF^3G}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{-2f^2G^2F^2 - 2egG^2F^2 + 2efG^3F + g^2F^2G^2 - 2fgFG^3}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{f^2G^4 - 2efF^3E + 2f^2F^2E^2 + 2e^2GF^2E - 2efFGE^2}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{-2f^2F^4 + 2fgF^3E + 2efGF^3 - 2egGEF^2 - 2egF^4}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{2gfEF^3 + 2feF^3G - 2f^2GEF^2 - 2gfF^3G}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{2g^2F^2EG + 2f^2F^2G^2 - 2fgFG^2E}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{e^2F^2E^2 - 2efFE^3 + f^2E^4 - 2egE^2F^2 + 2fgFE^3}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{-2fgFGE^2 + g^2E^3G - 2efFG^2E + e^2G^3E}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{-2egG^2F^2 + 2efG^3F + g^2F^2G^2 - 2fgFG^3 + f^2G^4}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{2e^2GF^2E - 2efFGE^2 - 2f^2F^4 + 4fgF^3E + 4efGF^3}{(EG - F^2)^2} \\
&+ \frac{-2egGEF^2 - 2egF^4 + 2g^2F^2EG - 2fgFG^2E}{(EG - F^2)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(0) &= h^2 \left( \frac{e^2F^2E^2 - 2efFE^3 + f^2E^4 - 2egE^2F^2 + 2fgFE^3 - 2fgFGE^2 + g^2E^3G}{(EG - F^2)^2} \right) \\
&+ h^2 \left( \frac{-2efFG^2E + e^2G^3E - 2egG^2F^2 + 2efG^3F + g^2F^2G^2 - 2fgFG^3 + f^2G^4}{(EG - F^2)^2} \right) \\
&+ h^2 \left( \frac{2e^2GF^2E - 2efFGE^2 - 2f^2F^4 + 4fgF^3E + 4efGF^3 - 2egGEF^2 - 2egF^4}{(EG - F^2)^2} \right) \\
&+ h^2 \left( \frac{2g^2F^2EG - 2fgFG^2E}{(EG - F^2)^2} \right) + 4h^2(eg - f^2)(Eh_v^2 + Gh_u^2 - 2Fh_vh_u).
\end{aligned}$$

□

**Definición 19.** Una superficie regular  $S$  es minimal cuando la curvatura media se anula en todos sus puntos.

**Proposición 2.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  superficie parametrizada regular y  $D \subset U$  dominio acotado.  $X$  es minimal si y solo si  $A'(0) = 0$  para todo  $D$  y para todas las variaciones normales no nulas de  $\partial D$ .

*Demostración.*  $\boxed{\rightarrow}$  Sabemos que  $X$  es minimal, por tanto,  $H(p) = 0 \forall p \in S$ . Entonces, por (2.20),  $A'(0) = 0$ .

$\boxed{\leftarrow}$  Sabemos que  $A'(0) = 0$ . Suponemos que  $X$  no es minimal, es decir, existe  $p = X(q) \in S / H(q) \neq 0$ . Seguidamente seleccionamos un dominio  $D$  tal que  $q \in D$  y  $H(q) \neq 0$  en  $D$ . Tomamos  $h : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $H(q) = h(q)$ , por tanto,  $A'(0)$  es negativa. Se produce una contradicción.  $\square$

### 2.3. Visualización gráfica y numérica de las variaciones normales del área

En esta sección vamos a presentar la parte computacional del proyecto. Hemos aprendido, desde cero, el lenguaje de Mathematica para poder desarrollar un programa que permita analizar la evolución del área de las superficies al variar la constante  $t$ , vista en la parametrización (2.15). Al ejecutar dicho código obtenemos resultados de forma visual y numérica, de esta forma realizamos un estudio completo de la superficie. A continuación, se va a explicar en que consiste el programa.

Antes que nada, solicitamos al usuario que introduzca los parámetros necesarios en una interfaz gráfica para poder realizar todos los cálculos:

1. La parametrización  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  de la superficie que se quiere representar.
2. El dominio de la superficie.
3. La función  $h : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  de la parametrización (2.15).
4. El valor de la constante  $t$ .
5. El rango de valores que tomará  $t$ .
6. El incremento de la  $t$  dentro del rango.

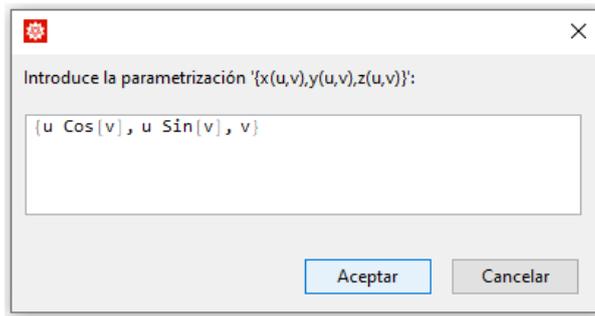


Figura 2.1: Ejemplo input parametrización

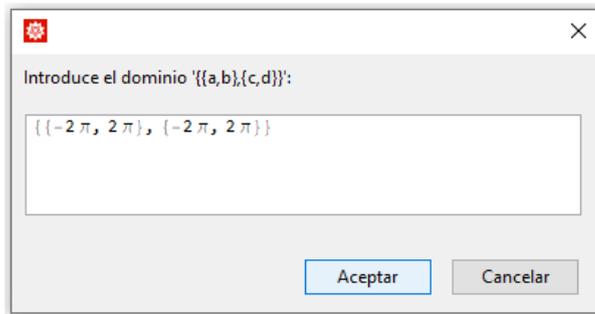


Figura 2.2: Ejemplo input dominio

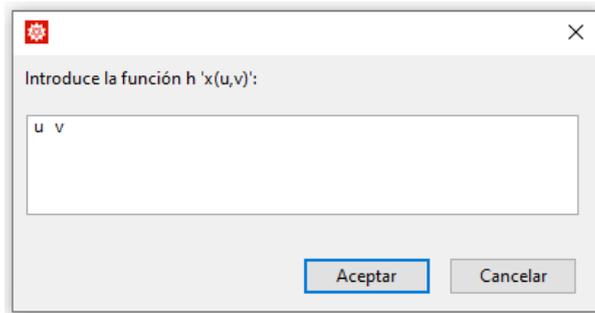


Figura 2.3: Ejemplo input función h

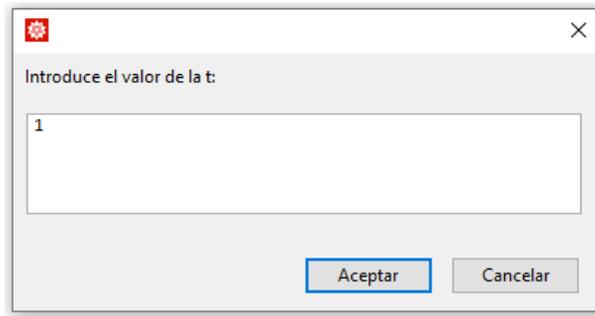


Figura 2.4: Ejemplo input variable t

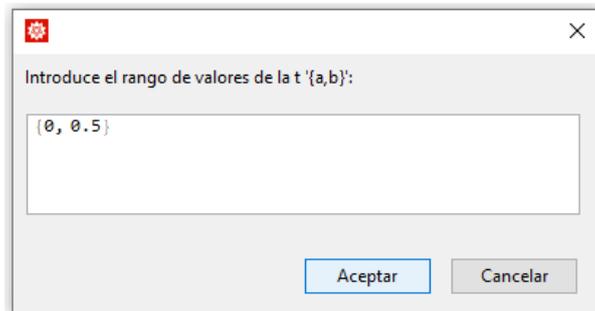


Figura 2.5: Ejemplo input rango de valores de la t

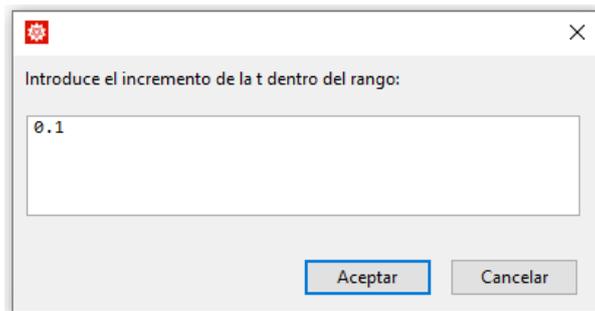


Figura 2.6: Ejemplo input rango incremento de la t dentro del rango

A continuación procedemos con el cálculo. Hemos creado diferentes funciones que nos permitirán obtener: la primera (2.5) y la segunda (2.9) forma fundamental, la curvatura de Gauss (2.11), la curvatura media (2.12), el área de la superficie en una  $t$  determinada (2.26) y su primera (2.27) y segunda (2.28) derivada.

Pero para llamar a dichas funciones, antes, debemos obtener los datos requeridos por las fórmulas.

Primero realizamos las derivadas parciales de la parametrización  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  y de la función  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Con el producto escalar de las derivadas parciales de  $X$  calcularemos los coeficientes de la primera forma fundamental.

Posteriormente calculamos el producto vectorial de las derivadas parciales de  $X$ , que usamos para obtener la normal (2.3). Además, usando las derivadas parciales de la normal y de la parametrización  $X$ , obtenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Después, usamos tanto los coeficientes de la primera forma fundamental como los de la segunda para deducir la curvatura de Gauss y la curvatura media.

Ahora pasamos a calcular la variable  $R$  (2.25), la  $\tilde{R}$  y sus derivadas. Dichos resultados son los últimos que necesitábamos para obtener el área de la variación de la normal (2.26), junto con su primera derivada (2.27) y la segunda (2.28). Estas áreas las desarrollamos para la variable  $t$  introducida como cuarto parámetro en la interfaz gráfica y, para el dominio indicado en el segundo parámetro.

Una vez terminados los cálculos vamos a representar, gráfica y visualmente, los resultados. Para ello, vamos a ejecutar diferentes representaciones para poder analizar los datos desde diferentes perspectivas.

Empezamos definiendo la parametrización de la variación de la normal, ya que es la que usaremos para las representaciones. Esta se compone de la parametrización  $X$ , la variable  $t$ , la función  $h$  y la normal.

Para una primera toma de contacto con la superficie que queremos tratar, realizamos una gráfica 3D para la variable  $t$  introducida como cuarto parámetro. Además, elaboramos un vídeo que muestra su evolución al variar la  $t$  en el rango de valores determinado como quinto parámetro. Esto lo gestionamos con la función del Mathematica *Animate*, que nos permite obtener un gif de la superficie.

Seguidamente, queremos observar la variación numérica del área con más detalle, así que creamos una tabla que contiene las áreas (área, primera derivada del área y segunda derivada del área) para cada  $t$  especificada en el rango. Para ello, calculamos el área tantas veces como

t hay en el rango y las guardamos en una lista. Repetimos este procedimiento para la primera y segunda derivada del área. Después, usando la función *TableForm*, representamos la tabla.

El objetivo final es poder observar los resultados visuales y los numéricos al mismo tiempo. Lo realizaremos tanto en una imagen como en vídeo.

Usando la función del Mathematica *TableFrom@Table*, hemos conseguido crear una tabla que contiene para cada t del rango, la imagen de la superficie, el área y sus derivadas. De esta forma, tenemos en una imagen el resultado, en detalle, de como varia la superficie.

Finalmente, con la función *ListAnimate*, realizamos un vídeo del resultado anterior. Dicho vídeo, cada vez que cambia la variable t, muestra la gráfica de la superficie y el texto con el área y sus derivadas. También creamos otro vídeo con la función comentada anteriormente *Animate*, que presenta el mismo resultado.

### 2.3.1. Dificultades durante el desarrollo

Al iniciar el proyecto se planteó programar en Python, visto durante el grado, o en el lenguaje del Mathematica. Finalmente se escogió el segundo y ha resultado muy enriquecedor. Este lenguaje de programación ofrece posibilidades muy potentes para programar cálculos matemáticos y para realizar representaciones. A continuación trataremos algunas complicaciones que han surgido durante el desarrollo.

Como se ha visto en las fórmulas de las secciones anteriores, muchas de las operaciones que requerimos son largas y complejas, por lo que algunas veces al Mathematica le resultaba costoso de ejecutar. Para solucionarlo hemos usado la función *FullSimplify*, que simplifica al máximo los resultados de las operaciones. Aun así, nos dimos cuenta de que no quitaba el valor absoluto cuando era necesario. Para ello, hemos definido la función *EliminarAbs* que se encarga de eliminarlos. Los términos con valor absoluto los transforma en términos con parte real e imaginaria y calcula el módulo. De esta forma conseguimos reducir al máximo las expresiones.

```
In[1]:= EliminarAbs[u_] := ComplexExpand[Abs[u]]
      |expande funcion... |valor abso
```

Figura 2.7: Definición de EliminarAbs

```
In[53]:= ComplexExpand[Abs[Cos[v]]]
[expande funcion... [val... coseno]

Out[53]=  $\sqrt{\text{Cos}[v]^2}$ 
```

Figura 2.8: Ejemplo del funcionamiento de EliminarAbs

En cuanto al cálculo de las integrales para obtener las áreas, teníamos el mismo problema, son operaciones largas y complejas. Para ayudar al Mathematica hemos ejecutado integrales numéricas con la función *NIntegrate*. Como son integrales dobles, primero calculamos la integral numérica respecto de la variable  $u$  y después sobre  $v$ .

Por último, respecto a las representaciones, este programa incluye muchas posibilidades para visualizar superficies. Pese a ello, a la hora de crear los vídeos, resultó complicada la parte de unir la imagen de la superficie con el texto del área, debido a que el texto era difícil de encuadrar y no se veía. Además, usando la función *Animate* no da tiempo de que la imagen se renderice del todo antes de cambiar la variable  $t$  y pasar a la siguiente imagen, por lo que a veces el vídeo no muestra la superficie de forma clara. Sin embargo, al exportarlo como gif obtenemos el resultado buscado.



## Capítulo 3

# Resultados

Durante la elaboración del Trabajo Fin de Grado hemos conseguido tres resultados importantes sobre la variación normal del área de superficies. De forma teórica se ha visto que la variación normal es una familia uni-paramétrica de superficies parametrizadas regulares, para un  $\epsilon$  suficientemente pequeño, además de calcular numéricamente la primera y segunda derivada del área en  $t = 0$ .

En cuanto al resultado computacional, se ha desarrollado un código en Mathematica que permite analizar, de forma gráfica y numérica, la evolución del área de las superficies al variar la normal. A continuación, vamos a presentar dos ejemplos de superficies introducidas en el programa.

### 3.1. Ejemplo 1

En este primer ejemplo vamos a estudiar el helicoides, una superficie minimal. Para ello, introducimos los parámetros necesarios:

1.  $\{u \cos[v], u \sin[v], v\}$  la parametrización del helicoides  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ .
2.  $\{-2\pi, 2\pi\}, \{-2\pi, 2\pi\}$  el dominio de la superficie.
3.  $u, v$  la función  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .
4. 0 el valor de la constante  $t$ .
5.  $\{0, 0,5\}$  el rango de valores que tomará  $t$ .

6. 0,1 el incremento de la  $t$  dentro del rango.

Una vez ejecutado el programa, lo primero que obtenemos es una gráfica 3D de la parametrización (2.15) del helicoides para la  $t$  introducida como parámetro, es decir,  $t = 0$ . También se presenta un vídeo sobre la evolución de la superficie al variar la  $t$  en el rango de valores indicado ([https://drive.google.com/file/d/1\\_juIH0hYmiUEKxuDeYw5ieQ5Tzdg3FkQ/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1_juIH0hYmiUEKxuDeYw5ieQ5Tzdg3FkQ/view?usp=sharing)).

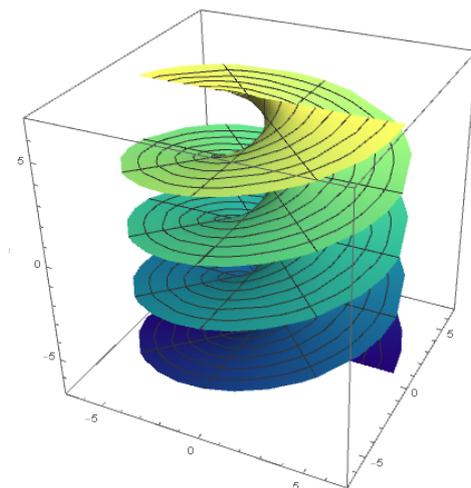


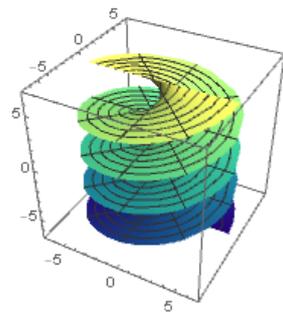
Figura 3.1: Helicoides en  $t=0$

A continuación elaboramos una tabla que indica numéricamente el área para cada  $t$  especificada en el rango.

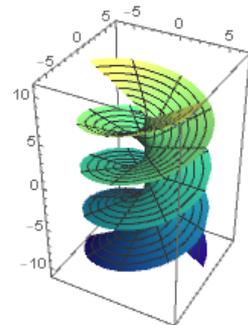
	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Area	534.229	562.349	627.942	709.947	798.134	887.969
Primera Derivada del Area	0.	514.102	762.455	861.686	895.009	898.315
Segunda Derivada del Area	6475.54	6143.51	5340.74	4789.96	4415.67	4138.92

Figura 3.2: Tabla numérica del helicoides

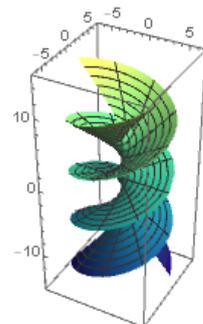
Finalmente, conseguimos una tabla con la gráfica de la superficie y los datos numéricos del área para cada  $t$  del rango. Además, como se ha comentado en el capítulo anterior, realizamos dos vídeos que presentan como varía la superficie al modificar la normal, junto con los datos numéricos. Uno con la función *ListAnimate* ([https://drive.google.com/file/d/1pX3MuUzNuxX\\_13tjJ0ICppKV\\_QgG8\\_9G/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1pX3MuUzNuxX_13tjJ0ICppKV_QgG8_9G/view?usp=sharing)) y el otro con *Animate* (<https://drive.google.com/file/d/1kwuqjvEk8szYEmfgxeksnQmXfqmonhiy/view?usp=sharing>).



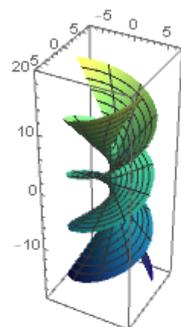
**t = 0.**  
**Area = 534.229**  
**Primera derivada del area = 0.**  
**Segunda derivada del area = 6475.54**



**t = 0.1**  
**Area = 562.349**  
**Primera derivada del area = 514.102**  
**Segunda derivada del area = 6143.51**



**t = 0.2**  
**Area = 627.942**  
**Primera derivada del area = 762.455**  
**Segunda derivada del area = 5340.74**



**t = 0.3**  
**Area = 709.947**  
**Primera derivada del area = 861.686**  
**Segunda derivada del area = 4789.96**

Figura 3.3: Primera parte de la tabla gráfica y numérica del helicoide

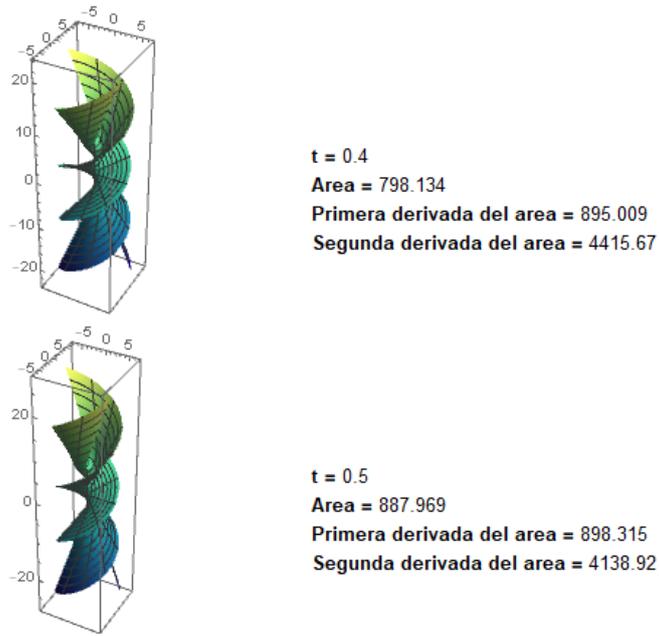


Figura 3.4: Segunda parte de la tabla gráfica y numérica del helicoide

### 3.2. Ejemplo 2

Ahora veamos como varia la esfera al modificar la normal. Primero introducimos los parámetros necesarios:

1.  $\{Cos[u] Cos[v], Sin[u] Cos[v], Sin[v]\}$  la parametrización de la esfera  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ .
2.  $\{0, 2\pi\}, \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$  el dominio de la superficie.
3.  $Cos[v]$  la función  $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .
4. 0 el valor de la constante t.
5.  $\{0, 5\}$  el rango de valores que tomará t.
6. 1 el incremento de la t dentro del rango.

Al ejecutar el programa, obtenemos una gráfica 3D de la parametrización (2.15) de la esfera para la t introducida como parámetro, es decir,  $t = 0$ . También se presenta un vídeo sobre la

evolución de la superficie al variar la  $t$  en el rango de valores indicado (<https://drive.google.com/file/d/1hbwcudIaMi-NVeD4lDdx0foSza9Q8HDR/view?usp=sharing>).

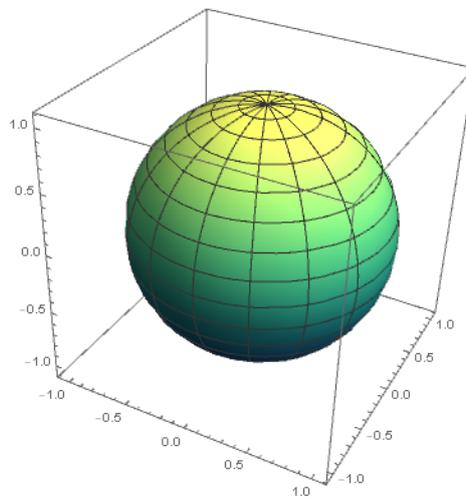


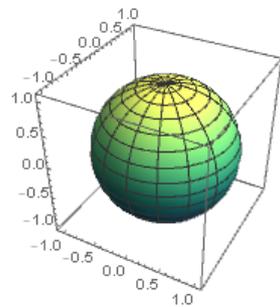
Figura 3.5: Esfera en  $t=0$

Seguidamente creamos una tabla que contiene los datos numéricos del área para cada  $t$  especificada en el rango.

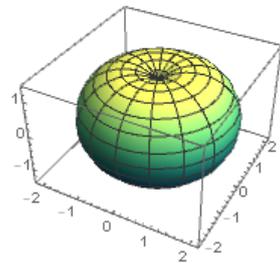
	0	1	2	3	4	5
Area	12.5664	42.6517	92.9403	163.106	253.063	362.786
Primera Derivada del Area	19.7392	40.2821	60.2503	80.0685	99.8429	119.601
Segunda Derivada del Area	37.6991	65.5633	85.5262	104.819	124.104	143.461

Figura 3.6: Tabla numérica de la esfera

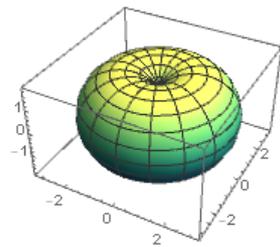
Por último, elaboramos una tabla con la gráfica de la superficie y los datos numéricos del área para cada  $t$  del rango. Además, como se ha comentado en el capítulo anterior, realizamos dos vídeos que presentan como varía la superficie al modificar la normal, junto con los datos numéricos. Uno con la función *ListAnimate* (<https://drive.google.com/file/d/1zyYgT6Tu2gFntInYmgKJKQDayBuvxTdh/view?usp=sharing>) y el otro con *Animate* (<https://drive.google.com/file/d/1h83ZudjFtqdEPDVMCYCIa-Q3nneGzvz/view?usp=sharing>).



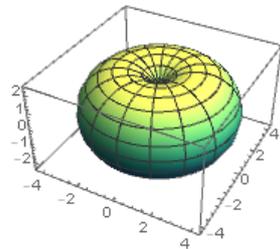
**t = 0**  
**Area = 12.5664**  
**Primera derivada del area = 19.7392**  
**Segunda derivada del area = 37.6991**



**t = 1**  
**Area = 42.6517**  
**Primera derivada del area = 40.2821**  
**Segunda derivada del area = 65.5633**



**t = 2**  
**Area = 92.9403**  
**Primera derivada del area = 60.2503**  
**Segunda derivada del area = 85.5262**



**t = 3**  
**Area = 163.106**  
**Primera derivada del area = 80.0685**  
**Segunda derivada del area = 104.819**

Figura 3.7: Primera parte de la tabla gráfica y numérica de la esfera

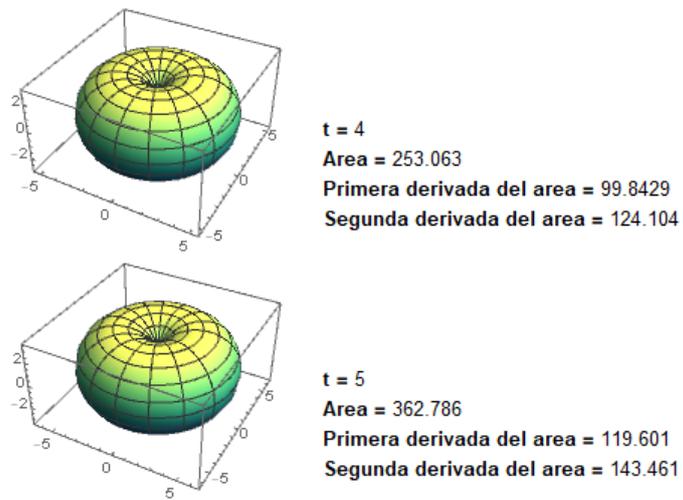


Figura 3.8: Segunda parte de la tabla gráfica y numérica de la esfera



## Capítulo 4

# Conclusiones

En este documento se ha profundizado en el estudio de la variación normal del área de superficies. Hemos partido analizando el problema de Plateau, la principal motivación de este Trabajo Fin de Grado.

Una vez claro el propósito del estudio, hemos empezado introduciendo conceptos respecto las superficies regulares, de forma que conseguíamos la base teórica necesaria para abordar el tema inicial.

A continuación, hemos presentado la variación normal del área y hemos demostrado, realizando los cálculos necesarios al máximo detalle, los teoremas principales del trabajo. Hemos visto que la variación de la normal, es una familia uni-paramétrica de superficies parametrizadas regulares para un valor lo suficientemente pequeño del parámetro y hemos calculado las derivadas del área. Seguidamente hemos tratado de manera concisa las superficies minimales, estudiando las propiedades que las caracterizan.

Para concluir, hemos aprendido el lenguaje de programación del Mathematica para poder observar como varían las superficies al experimentar una variación normal. Esto nos ha permitido analizar su evolución tanto gráfica como numéricamente.



# Bibliografía

- [1] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976. ISBN: 0-13-212589-7.
- [2] Sebastian Montiel and Antonio Ros. *Curves and surfaces*. The American Mathematical Society, 2005. ISBN: 0-8218-3815-6.
- [3] Alfred Gray, Elsa Abbena, and Simon Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Taylor & Francis Group, LLC, 2006. ISBN: 1-58488-448-7.
- [4] Archivo de biblioteca wolfram. <https://library.wolfram.com>.
- [5] Wolfram language & system - documentation center. <https://reference.wolfram.com>.



## Anexo A

# Anexo I

### A.1. Programa en Mathematica

```

In[ ]:= FF1[xu_, xv_] := Module[{},
  FullSimplify[{xu.xu, xu.xv, xv.xv}]
]

In[ ]:= FF2[param_, xu_, xv_, normal_] := Module[{},
  FullSimplify[
    {D[param, {u, 2}].normal, D[param, {u, 1}, {v, 1}].normal, D[param, {v, 2}].normal}
]

In[ ]:= CurvaturaGauss[ff1_, ff2_] := Module[{},
  FullSimplify[

$$\frac{ff2[[1]] \times ff2[[3]] - ff2[[2]]^2}{ff1[[1]] \times ff1[[3]] - ff1[[2]]^2}$$

]

In[ ]:= CurvaturaMedia[ff1_, ff2_] := Module[{},
  FullSimplify[

$$\frac{1}{2} * \frac{ff2[[1]] \times ff1[[3]] - 2 * ff2[[2]] \times ff1[[2]] + ff2[[3]] \times ff1[[1]]}{ff1[[1]] \times ff1[[3]] - ff1[[2]]^2}$$

]

In[ ]:= AreaParam[ff1_, t_, h_, cH_, r2_, du_, dv_] := Module[{},
  NIntegrate[
    NIntegrate[Sqrt[(ff1[[1]] \times ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) * (1 - 4 * t * h * cH) + r2 * t^2],
    {u, du[[1]], du[[2]]}, {v, dv[[1]], dv[[2]]}
]

In[ ]:= AreaDerivada1[ff1_, t_, h_, cH_, r2_, dr2_, du_, dv_] := Module[{},
  NIntegrate[
    NIntegrate[

$$\frac{-4 h cH (ff1[[1]] \times ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) + dr2 t^2 + 2 r2 t}{2 \sqrt{(ff1[[1]] \times ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) (1 - 4 t h cH) + r2 t^2}}$$

    {u, du[[1]], du[[2]]}, {v, dv[[1]], dv[[2]]}
]
]

```

```

In[ ]:= AreaDerivada2[ff1_, t_, h_, cH_, r2_, dr2_, ddr2_, du_, dv_] := Module[{
  _módulo
  NIntegrate[NIntegrate[(2 * (ddr2 t^2 + 4 t r2 + 2 r2)
    _integra numé··__integra numéricamente
    Sqrt[(ff1[[1]] * ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) (1 - 4 t h cH) + r2 t^2)] /
    _raíz cuadrada
    (4 ((ff1[[1]] * ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) (1 - 4 t h cH) + r2 t^2)),
    {u, du[[1]], du[[2]]}], {v, dv[[1]], dv[[2]]}] - NIntegrate[
    _integra numéricamente
    NIntegrate[(-4 h cH (ff1[[1]] * ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) + dr2 t^2 + 2 r2 t)^2 /
    _integra numéricamente
    (8 ((ff1[[1]] * ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) (1 - 4 t h cH) + r2 t^2)
    Sqrt[(ff1[[1]] * ff1[[3]] - ff1[[2]]^2) (1 - 4 t h cH) + r2 t^2)],
    _raíz cuadrada
    {u, du[[1]], du[[2]]}], {v, dv[[1]], dv[[2]]}]
  ]
In[ ]:= EliminarAbs[u_] := ComplexExpand[Abs[u]]
_expande funcione··__valor absol
In[ ]:= param[u_, v_] = Input["Introduce la parametrización '{x(u,v),y(u,v),z(u,v)}': "]
_entra
In[ ]:= {domU, domV} = Input["Introduce el dominio '{{a,b},{c,d}}': "]
_entra
In[ ]:= h[u_, v_] = Input["Introduce la función h 'x(u,v)': "]
_entra
In[ ]:= t0 = Input["Introduce el valor de la t: "]
_entra
In[ ]:= xu[u_, v_] = D[param[u, v], {u, 1}] // FullSimplify
_deriva _simplifica complet
In[ ]:= xv[u_, v_] = D[param[u, v], {v, 1}] // FullSimplify
_deriva _simplifica complet
In[ ]:= hu[u_, v_] = D[h[u, v], {u, 1}] // FullSimplify
_deriva _simplifica complet
In[ ]:= hv[u_, v_] = D[h[u, v], {v, 1}] // FullSimplify
_deriva _simplifica complet
In[ ]:= prod[u_, v_] = xu[u, v] * xv[u, v] // FullSimplify
_simplifica complet
In[ ]:= normal[u_, v_] =  $\frac{\text{prod}[u, v]}{\text{Norm}[\text{prod}[u, v]]}$  /. Abs -> EliminarAbs // FullSimplify
_valor absoluto _simplifica complet
In[ ]:= normalu[u_, v_] = D[normal[u, v], {u, 1}] // FullSimplify
_deriva _simplifica complet
In[ ]:= normalv[u_, v_] = D[normal[u, v], {v, 1}] // FullSimplify
_deriva _simplifica complet
In[ ]:= {e[u_, v_], f[u_, v_], g[u_, v_]} = FF1[xu[u, v], xv[u, v]]
In[ ]:= {ee[u_, v_], ff[u_, v_], gg[u_, v_]} = FF2[param[u, v], xu[u, v], xv[u, v], normal[u, v]]

```

```

In[ ]:= curvaturaK[u_, v_] =
  CurvaturaGauss[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]}, {ee[u, v], ff[u, v], gg[u, v]}]

In[ ]:= curvaturaH[u_, v_] =
  CurvaturaMedia[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]}, {ee[u, v], ff[u, v], gg[u, v]}]

In[ ]:= r1[t_] =
  (e[u, v] × h[u, v]^2 × normalv[u, v].normalv[u, v] + e[u, v] × hv[u, v]^2 + 4 × ee[u, v] ×
    gg[u, v] × h[u, v]^2 + g[u, v] × h[u, v]^2 × normalu[u, v].normalu[u, v] +
    g[u, v] × hu[u, v]^2 - 4 × ff[u, v]^2 × h[u, v]^2 - 2 × f[u, v] ×
    (hu[u, v] × hv[u, v] + h[u, v]^2 × normalu[u, v].normalv[u, v])) × t^2 +
  (-2 × ee[u, v] × h[u, v]^3 × normalv[u, v].normalv[u, v] - 2 × ee[u, v] ×
    h[u, v] × hv[u, v]^2 - 2 × gg[u, v] × h[u, v]^3 × normalu[u, v].normalu[u, v] -
    2 × gg[u, v] × h[u, v] × hu[u, v]^2 + 4 × ff[u, v] × h[u, v] ×
    (hu[u, v] × hv[u, v] + h[u, v]^2 × normalu[u, v].normalv[u, v])) × t^3 +
  (h[u, v]^4 × normalu[u, v].normalu[u, v] × normalv[u, v].normalv[u, v] +
    h[u, v]^2 × hv[u, v]^2 × normalu[u, v].normalu[u, v] +
    h[u, v]^2 × hu[u, v]^2 × normalu[u, v].normalu[u, v] + hu[u, v]^2 × hv[u, v]^2 -
    (hu[u, v] × hv[u, v] + h[u, v]^2 × normalu[u, v].normalv[u, v])^
    2) × t^4 // FullSimplify
  |simplifica completamente

In[ ]:= r2[t_] =  $\frac{r1[t]}{t^2}$  // FullSimplify
  |simplifica complet

In[ ]:= dr2[t_] = D[r2[t], t] // FullSimplify
  |deriva |simplifica complet

In[ ]:= ddr2[t_] = D[dr2[t], t] // FullSimplify
  |deriva |simplifica complet

In[ ]:= a = Quiet[AreaParam[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]},
  |silencioso
  t0, h[u, v], curvaturaH[u, v], r2[t0], domU, domV]]

In[ ]:= a1 = Quiet[AreaDerivada1[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]},
  |silencioso
  t0, h[u, v], curvaturaH[u, v], r2[t0], dr2[t0], domU, domV]]

In[ ]:= a2 = Quiet[AreaDerivada2[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]}, t0,
  |silencioso
  h[u, v], curvaturaH[u, v], r2[t0], dr2[t0], ddr2[t0], domU, domV]]

In[ ]:= param2[u_, v_, t_] := param[u, v] + t normal[u, v] × h[u, v]

In[ ]:= ParametricPlot3D[param2[u, v, t0], {u, domU[[1]], domU[[2]]},
  |gráfico paramétrico 3D
  {v, domV[[1]], domV[[2]]}, ColorFunction → "BlueGreenYellow"]
  |función de color

In[ ]:= {tIni, tFin} = Input["Introduce el rango de valores de la t '{a,b}': "]
  |entra

In[ ]:= num = Input["Introduce el incremento de la t dentro del rango: "]
  |entra

```

```

In[ ]:= gif = Animate[ParametricPlot3D[param2[u, v, t], {u, domU[[1]], domU[[2]]},
  |anima |Gráfico paramétrico 3D
  {v, domV[[1]], domV[[2]]}, ColorFunction -> "BlueGreenYellow",
  |función de color
  {t, tIni, tFin}, DefaultDuration -> 90]
  |duración por defecto

Export["esf.avi", gif]
|exporta

Export["esf.gif", gif]
|exporta

In[ ]:= valoresA = Table[Quiet[AreaParam[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]}, t,
  |tabla |silencioso
  h[u, v], curvaturaH[u, v], r2[t], domU, domV]], {t, tIni, tFin, num}]

In[ ]:= valoresA1 = Table[Quiet[AreaDerivada1[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]}, t, h[u, v],
  |tabla |silencioso
  curvaturaH[u, v], r2[t], dr2[t], domU, domV]], {t, tIni, tFin, num}]

In[ ]:= valoresA2 =
  Table[Quiet[AreaDerivada2[{e[u, v], f[u, v], g[u, v]}, t, h[u, v], curvaturaH[u, v],
  |tabla |silencioso
  r2[t], dr2[t], ddr2[t], domU, domV]], {t, tIni, tFin, num}]

In[ ]:= TableForm[{valoresA, valoresA1, valoresA2},
  |forma de tabla
  TableHeadings -> {"Area", "Primera Derivada del Area", "Segunda Derivada del Area"},
  |cabeceras de tabla |área |área |área
  Range[tIni, tFin, num]]

In[ ]:= TableForm@Table[{ParametricPlot3D[param2[u, v, t], {u, domU[[1]], domU[[2]]},
  |forma de ta... |tabla |Gráfico paramétrico 3D
  {v, domV[[1]], domV[[2]]}, ColorFunction -> "BlueGreenYellow",
  |función de color
  Text["t = " <> ToString[t] <> "\nArea = " <> ToString[valoresA[[ (t/num) + 1]]] <>
  |texto |convierte a cadena de... |área |convierte a cadena de caracteres
  "\nPrimera derivada del area = " <>
  ToString[valoresA1[[ (t/num) + 1]]] <> "\nSegunda derivada del area = " <>
  |convierte a cadena de caracteres
  ToString[valoresA2[[ (t/num) + 1]]]], {t, tIni, tFin, num}]
  |convierte a cadena de caracteres

```

```

In[ ]:= Manipulate[ParametricPlot3D[param2[u, v, t], {u, domU[[1]], domU[[2]]},
  |manipula |gráfico paramétrico 3D
  {v, domV[[1]], domV[[2]]}, ColorFunction -> "BlueGreenYellow",
  |función de color
  Epilog -> Inset[Framed[Text["t = " <> ToString[t] <> "\nArea = " <>
  |epílogo |encarte |enmarc... |texto |convierte a cadena de... |área
  ToString[valoresA[[ (t/num) + 1]]] <> "\nPrimera derivada del area = " <>
  |convierte a cadena de caracteres
  ToString[valoresA1[[ (t/num) + 1]]] <> "\nSegunda derivada del area = " <>
  |convierte a cadena de caracteres
  ToString[valoresA2[[ (t/num) + 1]]], Background -> LightBlue],
  |convierte a cadena de caracteres |fondo de imagen |azul claro
  {Right, Bottom}, {Right, Bottom}], {t, tIni, tFin, num}, FrameMargins -> 90]
  |derecha |abajo |derecha |abajo |márgenes de marco

In[ ]:= gif2 = Animate[ParametricPlot3D[param2[u, v, t], {u, domU[[1]], domU[[2]]},
  |anima |gráfico paramétrico 3D
  {v, domV[[1]], domV[[2]]}, ColorFunction -> "BlueGreenYellow", Epilog -> Inset[Framed[
  |función de color |epílogo |encarte |enmarcado
  Text["t = " <> ToString[t] <> "\nArea = " <> ToString[valoresA[[ (t/num) + 1]]] <>
  |texto |convierte a cadena de... |área |convierte a cadena de caracteres
  "\nPrimera derivada del area = " <> ToString[valoresA1[[ (t/num) + 1]]] <>
  |convierte a cadena de caracteres
  "\nSegunda derivada del area = " <> ToString[valoresA2[[ (t/num) + 1]]],
  |convierte a cadena de caracteres
  Background -> LightBlue], {Right, Bottom}, {Right, Bottom}],
  |fondo de imagen |azul claro |derecha |abajo |derecha |abajo
  {t, tIni, tFin, num}, DefaultDuration -> 10, FrameMargins -> 90]
  |duración por defecto |márgenes de marco

Export["esfanimate.avi", gif2]
|exporta

Export["esfanimate.gif", gif2]
|exporta

In[ ]:= gif3 =
ListAnimate[Table[ParametricPlot3D[param2[u, v, t], {u, domU[[1]], domU[[2]]}, {v,
  |anima lista |tabla |gráfico paramétrico 3D
  domV[[1]], domV[[2]]}, ColorFunction -> "BlueGreenYellow", Epilog -> Inset[Framed[
  |función de color |epílogo |encarte |enmarcado
  Text["t = " <> ToString[t] <> "\nArea = " <> ToString[valoresA[[ (t/num) + 1]]] <>
  |texto |convierte a cadena de... |área |convierte a cadena de caracteres
  "\nPrimera derivada del area = " <> ToString[valoresA1[[ (t/num) + 1]]] <>
  |convierte a cadena de caracteres
  "\nSegunda derivada del area = " <> ToString[valoresA2[[ (t/num) + 1]]],
  |convierte a cadena de caracteres
  Background -> LightBlue], {Right, Bottom}, {Right, Bottom}],
  |fondo de imagen |azul claro |derecha |abajo |derecha |abajo
  {t, tIni, tFin, num}], FrameMargins -> 90, DefaultDuration -> 10]
  |márgenes de marco |duración por defecto

Export["esflist.avi", gif3]
|exporta

```

```
Export["esflist.gif", gif3]  
|exporta
```