



GRAU EN MATEMÀTICA COMPUTACIONAL

TREBALL FINAL DE GRAU

La desigualtat isoperimètrica

Autor:
Roderic CHORTÓ FERRÉ

Tutor acadèmic:
Ximo GUAL-ARNAU

Data de lectura: ___ de Octubre de 2022
Curs acadèmic 2021/2022

La desigualtat isoperimètrica

RODERIC CHORTÓ FERRÉ

5 d'octubre de 2022

Agraïments

En aquest primer apartat voldria agrair l'esforç, el suport i la persistència de les persones que han estat al meu costat, tant per la realització d'aquest treball com en els quatre anys del grau universitari.

Primerament, vull donar les gràcies al meu tutor Ximo Gual pel seu interès, esforç i dedicació des del primer minut quan vam tenir la primera entrevista. En tot moment m'ha recolzat i animat per aconseguir el millor treball, resolent els dubtes i ajudant-me en tots els àmbits acadèmics de la millor forma possible. Tampoc voldria oblidar el tracte i afecte que has tingut en mi. Moltes gràcies, Ximo, seràs un dels millors records del meu pas per la universitat.

També voldria agrair a tots els professors del Departament de Matemàtiques que he conegut durant aquests quatre anys anteriors, per posar el seu gra d'arena per formar-me com un Matemàtic novell.

Tampoc puc oblidar a tots els professors del Departament d'Informàtica que he tractat per aportar-me els coneixements informàtics bàsics per conèixer millor el funcionament dels ordinadors i introduir-me les bases de programació.

A més, voldria reconèixer el recolzament dels companys de classe, i en especial a Ariadna, Juan, Andrea i Sofia per fer més amenes les hores que hem estat a la Universitat i els treballs que hem fet conjuntament.

Finalment, i no per això menys important, m'agradaria agrair a tota la meua família la voluntat i dedicació que han mostrat per poder aconseguir aquest repte, i no tinc cap dubte que, sense ells res del que he aconseguit ho hagués fet.

Índex

1	Resum	5
2	Introducció	7
2.1	Història al voltant de la desigualtat isoperimètrica	7
2.2	Explicació del contingut del treball	8
3	Preliminars	9
3.1	Integral doble	9
3.1.1	Integral de funcions definides sobre rectangles	9
3.1.2	Propietats	10
3.1.3	Funcions definides sobre conjunts generals	14
3.1.4	Interpretació de la integral doble com un volum	15
3.1.5	Invariància de l'àrea front a moviments en el pla	16
3.1.6	Partició de \mathbb{R}^2 per rectangles	18
3.2	Integral de línia	19
3.2.1	Corbes	19
3.2.2	Integral de línia d'un camp vectorial	21

3.2.3	Teorema de Green	21
4	Desigualtat Isoperimètrica	23
4.1	Formulació	23
4.2	Demostració de la Desigualtat Isoperimètrica	23
4.3	Demostració intuïtiva de la Desigualtat Isoperimètrica	27

1

Resum

Resum

Aquest document recull el fruit del treball de fi de grau, el qual té com a objectiu entendre i poder demostrar la desigualtat isoperimètrica. Per això, es fa una breu introducció per conèixer les arrels del problema. A continuació s'exposa una base teòrica sobre les integrals, amb les seves propietats i els coneixements per al càlcul d'àrees. Per acabar la secció dels preliminars, s'enuncia el teorema de Green amb un corol·lari clau per a la demostració de la desigualtat isoperimètrica.

Finalment, s'exposa la desigualtat isoperimètrica i es presenten dues demostracions, una rigorosa proposada per E. Schmidt i l'altra amb idees geomètriques més intuïtives formulada per J. Steiner.

Paraules clau

Desigualtat isoperimètrica, Integració, Teorema de Green, Schmidt, Steiner.

Summary

This document collects the result of the end-of-degree thesis, which aims to understand and be able to demonstrate the isoperimetric inequality. For this reason, a brief introduction is made to know the roots of the problem. Below, the theoretical basis on integrals, with their properties and knowledge for the calculation of areas is exposed. To finish the preliminaries section, Green's theorem is stated with a key corollary for the proof of the isoperimetric inequality.

Finally, the isoperimetric inequality is exposed and two proofs are presented, a rigorous one proposed by E. Schmidt and the other one, with more intuitive geometric ideas, which was formulated by J. Steiner.

Keywords

Isoperimetric inequality, Integration, Green's Theorem, Schmidt, Steiner.

2

Introducció

2.1 Història al voltant de la desigualtat isoperimètrica

Es diu que el problema de la desigualtat isoperimètrica té els seus inicis a la mitologia. Les fonts associen el problema amb la fundació de la ciutat de Cartago i la reina Dido.

Conta la llegenda que Dido va fugir del seu germà Pigmalíó per la costa del nord d'Àfrica fins a arribar a Cartago, l'actual Túnez. La reina va demanar a Jarbas, el rei dels gètuls, refugi i una porció de terra per poder-se establir. El rei va consentir la petició i li va proposar a Dido quedar-se amb el tros de terra que poguera rodejar amb la pell d'un bou.

Dido, qui coneixia el problema isoperimètric, va tallar la pell del bou en tires molt fines i les va unir pels extrems. Amb la longitud fixada, havia de ser capaç de recollir la major part de superfície possible. La llegenda conta que la reina va resoldre el problema amb una circumferència.

Deixant de banda la llegenda, la història de les demostracions geomètriques va ser entre els matemàtics grecs on va sorgir la curiositat per trobar la figura que amb perímetre fix, maximitzara l'àrea o, la qual cosa és equivalent, que amb àrea fixa minimitzara el perímetre [3]. De fet els primers resultats isoperimètrics s'atribueixen a Zenodor, que va viure durant el segle II abans de Crist i originalment no havia tractat amb cercles sinó amb figures rectilínies. Tanmateix, segons els estàndards moderns, les seues proves eren incompletes ja que aparentment no van estudiar els casos irregulars.

En els temps moderns, el matemàtic més vinculat a la desigualtat isoperimètrica pot ser siga Jakob Steiner (1796-1863). Steiner es va adonar que els arguments grecs eren incomplets i va establir una millor manera de demostrar la desigualtat mostrant com qualsevol figura que no tingue un límit circular es pot transformar en una de nova amb el mateix perímetre però àrea més gran (veurem la seua idea més endavant). Tanmateix, Weierstrass, mitjançant un nou sistema matemàtic formalitzat, va demostrar que la demostració encara no es podia considerar una prova rigorosa. De fet, va ser el mateix Weierstrass qui va fer la primera prova rigorosa com a corol·lari de la seua Teoria del càlcul de diverses variables el 1870.

2.2 Explicació del contingut del treball

En aquest treball, es presenta la resolució del problema isoperimètric, responnent a la pregunta, entre les figures planes amb el mateix perímetre, quina és la que inclou una major àrea?

El treball comença amb uns preliminars del càlcul integral (Secció 3). En aquesta secció es detallen conceptes del càlcul integral com són la integral doble i la integral de línia. Per a cada un d'aquests conceptes enunciem les definicions i propietats i presentem les demostracions de les mateixes. Tanquem la secció amb el Teorema de Green que més endavant s'utilitzarà en la demostració de la desigualtat isoperimètrica. També aprofitem la definició d'integral doble per al càlcul d'àrees per a introduir un estimador esbiaixat de l'àrea d'un domini pla.

En la Secció 4 enunciem el Teorema de la Desigualtat Isoperimètrica i proposem dues demostracions. Una demostració formal proposada per Erhard Schmidt l'any 1939, que inclou també les demostracions de tots els lemes necessaris en la mateixa, i una més intuïtiva des del punt de vista geomètric però que no és rigorosa al suposar l'existència de solució per a la desigualtat proposada. Aquesta demostració, com hem comentat, va ser suggerida per Jakob Steiner.

3

Preliminars

En aquest primer capítol, s'introdueixen els conceptes matemàtics necessaris per a poder donar una demostració rigorosa de la desigualtat isoperimètrica. Es definirà la integral doble mitjançant les sumes de Riemann fent l'extensió de la integral sobre una variable. També s'estudiaran les propietats bàsiques com són la linealitat, monotonia, entre d'altres. A continuació introduïrem la integral de línia d'un camp vectorial i enunciem el Teorema de Green [1].

3.1 Integral doble

3.1.1 Integral de funcions definides sobre rectangles

La idea geomètrica de la integral doble quan la funció $f(x, y) \geq 0$ sobre el rectangle R és el càlcul del volum d'una determinada superfície per la part superior, delimitada inferiorment pel pla XY . La definició formal és la que segueix:

Definició 3.1: Siga $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funció definida, continua y acotada en una regió $R := [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ del pla XY .

Siga també P una partició regular considerant:

- m subintervalls de $[a, b]$, $\{x_i\}_{i=0}^m$ tal que $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_m = b$ amb igual longitud $\Delta_x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{m}$.

- n subintervalls de $[c, d]$, $\{y_i\}_{i=0}^n$ tal que $c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_i \leq y_{i+1} \leq \dots \leq y_m = d$ amb igual longitud $\Delta_y = y_i - y_{i-1} = \frac{d-c}{n}$.

Considerem ara R_{ij} el subinterval $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ i el punt c_{ij} un punt intermedi del subinterval R_{ij} .

Llavors, construïm la suma de Riemann de f relativa a la partició P

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y$$

En cas que existeixi el límit $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sigma(f, P) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y)$ es diu que la funció f és integrable sobre el rectangle R i es defineix la integral doble de f sobre el R com:

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y)$$

3.1.2 Propietats

En aquesta secció s'estudiaran les propietats fonamentals de les integrals dobles que són una adaptació de les integrals en una variable. Per a demostrar les propietats introduïrem la definició d'integral de Darboux i veurem que és equivalent a la de Riemann.

Definició 3.2: Sigui $R = [a, b] \times [c, d]$ i $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada definida sobre el rectangle R . Considerem també els subintervalls R_{ij} de la secció anterior.

Com f està acotada, existeixen el suprem i l'ínfim en cada subinterval R_{ij} , i es defineix:

$$M_{ij} = \sup \{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\},$$

$$m_{ij} = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\}$$

Definició 3.3: Es defineixen respectivament les sumes inferior i superior de Darboux de la funció f i la partició P com,

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta_x \Delta_y,$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta_x \Delta_y$$

On $\Delta_x = x_i - x_{i-1}$ i $\Delta_y = y_i - y_{i-1}$

Definició 3.4: Es defineixen respectivament la integral inferior de Darboux de f i la integral superior de Darboux de f com,

$$L(f) = \sup \{L(f, P) : P\},$$

$$U(f) = \inf \{U(f, P) : P\}$$

Es diu que una funció f es integrable Darboux quan $L(f) = U(f)$ i el valor de la integral de f és aquest mateix valor comú.

Proposició 3.5: Les definicions d'integral de Riemann i de Darboux són equivalents. En altres paraules, una funció és integrable Riemann si i només si és integrable Darboux, i en cas que ho siga els valors de totes dues integrals coincideixen.

Demostració:

De les dues definicions d'integrals tenim que donada una partició qualsevol P de R es verifica que per a qualsevol $(x_i, y_i) \in R_{ij}$:

$$L(f, P) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i, y_j) \Delta_x \Delta_y \leq U(f, P).$$

Si f és integrable Darboux de la Definició 1.2.3 tenim que per a tot $\epsilon > 0$ podem trobar una partició P de manera que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Per tant,

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i, y_j) \Delta_x \Delta_y - I \right| \leq U(f, P) - L(f, P) < \epsilon,$$

per tant f també és integrable Riemann i la integral és I .

Recíprocament, si f és integrable Riemann, donat $\epsilon > 0$ podem trobar una partició de manera que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i, y_j) \Delta_x \Delta_y - I \right| < \epsilon/4$. Si elegim (x_i, y_i) lo suficientment prop a M_{ij} i a m_{ij} , tenim que

$$U(f, P) - I < \epsilon/2 \quad \text{i} \quad I_L(f, P) < \epsilon/2,$$

per tant $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ i així tenim que f és Darboux integrable i la seua integral és I .

Siguen f i g funcions integrables en el rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$, llavors es verifiquen les propietats següents:

- **Linealitat respecte de la suma:** $f \pm g$ és integrable en R i a més,

$$\int \int_R (f \pm g) \, dx dy = \int \int_R f \, dx dy \pm \int \int_R g \, dx dy$$

Demostració:

$$\begin{aligned} \int \int_R (f \pm g) \, dx dy &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}) \pm g(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y \right) = \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y \right) \pm \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y \right) = \\ &= \int \int_R f \, dx dy \pm \int \int_R g \, dx dy \end{aligned}$$

- **Linealitat respecte del producte per constant:** $c \cdot f$ és integrable en R , $\forall c \in \mathbb{R}$ i a més,

$$\int \int_R (c \cdot f) \, dx dy = c \cdot \int \int_R f \, dx dy$$

Demostració:

$$\begin{aligned} \int \int_R c \cdot f \, dx dy &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c \cdot f(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y \right) = \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} c \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y \right) = \\ &= c \cdot \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}) \Delta_x \Delta_y \right) = \\ &= c \cdot \int \int_R f \, dx dy \end{aligned}$$

- **Monotonia:** Si $f(x, y) \geq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in R$, llavors

$$\int \int_R f(x, y) \, dx dy \geq \int \int_R g(x, y) \, dx dy$$

Demostració:

Siga $h(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$.

Com $h(x, y) \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int \int_R h(x, y) \, dx dy &= \int \int_R f(x, y) \, dx dy - \int \int_R g(x, y) \, dx dy \rightarrow \\ &\rightarrow \int \int_R f(x, y) \, dx dy \geq \int \int_R g(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

- **Additivitat:** Si $R_i, i = 1, \dots, m$ són rectangles disjunts de manera que $R = R_1 \cup \dots \cup R_m$ i f és integrable en cada R_i , llavors f és integrable en R i a més,

$$\int \int_R f(x, y) \, dx dy = \sum_{i=1}^m \int \int_{R_i} f(x, y) \, dx dy$$

Demostració:

Utilitzarem la *Proposició 3.5*. Donat $\epsilon > 0$, hem de trobar una partició P del rectangle R tal que $U(P) - L(P) \leq \epsilon$.

Com f és integrable en cada R_i , partim del fet que la propietat es compleix en cada un dels rectangles R_i . Per tant, en cada R_i prenem una partició P_i de manera que,

$$U(P_i) - L(P_i) \leq \frac{\epsilon}{m}.$$

Perllongant totes les línies divisòries de cada partició P_i sobre el rectangle R , obtenim la partició P_0 . Restringint la nova partició P_0 a sobre els rectangles inicials R_i obtenim una nova partició P_0^i , en la que hi haurà, possiblement més línies divisòries, llavors,

$$U(P_0) - L(P_0) \leq \sum_{i=1}^m U(P_0^i) - L(P_0^i) \leq m \cdot \frac{\epsilon}{m} = \epsilon$$

- **Integral del mòdul:** La funció $|f|$ és integrable i a més,

$$\left| \int \int_R f(x, y) \, dx dy \right| \leq \int \int_R |f(x, y)| \, dx dy$$

Demostració:

Demostrem, en primer lloc, que $|f|$ és integrable.

Per a cada subrectangle R_{ij} d'una partició, la diferència entre el suprem i l'ímfim és un suprem.

$$M_{ij}(|f|) - m_{ij}(|f|) = \sup\{|f(x, y)| - |f(x', y')| : (x, y), (x', y') \in R_{ij}\}$$

$$M_{ij}(f) - m_{ij}(f) = \sup\{f(x, y) - f(x', y') : (x, y), (x', y') \in R_{ij}\}$$

Per la propietat triangular, $\left| |f(x, y)| - |f(x', y')| \right| \leq |f(x, y) - f(x', y')|$, llavors totes les restes que formen el primer conjunt estan acotades per alguna de les restes que conformen el segon conjunt, llavors,

$$U(|f|, P) - L(|f|, P) = \sum_{i,j=1}^n [M_{ij}(|f|) - m_{ij}(|f|)] \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i,j=1}^n [M_{ij}(f) - m_{ij}(f)] = \\ &= U(f, P) - L(f, P). \end{aligned}$$

Com f és integrable, per a tot nombre real positiu ϵ es pot trobar una partició P tal que l'últim membre sigui menor que ϵ , el qual implica que $|f|$ és integrable.

Ara, aplicant la propietat de monotonía a les desigualtats $-|f| \leq f \leq |f|$, obtenim

$$\begin{aligned} - \int \int_R |f(x, y)| \, dx dy &\leq \int \int_R f(x, y) \, dx dy \leq \int \int_R |f(x, y)| \, dx dy \iff \\ \iff \left| \int \int_R f(x, y) \, dx dy \right| &\leq \int \int_R |f(x, y)| \, dx dy \end{aligned}$$

3.1.3 Funcions definides sobre conjunts generals

A continuació es farà una extensió de la definició de la integral doble en dominis rectangles a integrals dobles de funcions acotades sobre conjunts que no siguin necessàriament rectangles, ja que d'aquesta manera no ens limitem solament a integrals que estiguin definides sobre regions rectangulars.

Definició 3.6: Siga $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada i definida sobre un conjunt acotat $D \subset \mathbb{R}^2$. Considerem un rectangle R tal que $D \subset R$, i prolonguem f a la funció f^* sobre tot R de manera que assignem el valor 0 a tots els punts que no pertanyen al conjunt D . Llavors la funció $f^* : R \rightarrow \mathbb{R}$ és:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Es diu que f és integrable sobre D quan ho sigui f^* , i anomenarem integral de f sobre D a la integral de f^* , $\int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int \int_R f^*(x, y) \, dx dy$.

A continuació, enunciarem el teorema del canvi de variable que ens serà útil en pròximes seccions.

Teorema 3.7: Siguen D i E dues regions simples en \mathbb{R}^2 , sigui $T : E \rightarrow D$

una aplicació \mathbb{C}^1 suprajectiva per a la que existeix un cert conjunt $N \in E$ tal que:

1. T és injectiva en $E \setminus N$
2. $\forall (u, v) \in E \setminus N, \det JT(u, v) \neq 0$
3. N és una funció finita de gràfiques de funcions contínues d'una variable.

Llavors, si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua sobre $T(E \setminus N)$, la funció $f \circ T |\det JT|$ també és integrable sobre E i es verifica que:

$$\int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int \int_E (f \circ T)(u, v) |\det JT(u, v)| \, du dv$$

3.1.4 Interpretació de la integral doble com un volum

Cal remarcar que la definició 1.3.1 de la secció anterior és vàlida per a qualsevol funció, independentment del seu signe.

Ara bé, quan la funció $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$, la integral doble definida sobre el conjunt D , $\int \int_D f(x, y) dx dy$, representa el volum V que es troba entre el domini D i la superfície $z = f(x, y)$, que es pot escriure de la següent forma:

$$V = \int \int_D f \, dx dy$$

Definició 3.8: Considerem la funció constant 1,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Es defineix l'àrea del domini d'integració D com el volum de la funció f sobre el domini D , és a dir:

$$A(D) = V = \int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int \int_D 1 \, dx dy$$

3.1.5 Invariància de l'àrea front a moviments en el pla

En aquesta secció, es demostrarà que l'àrea d'un domini en \mathbb{R}^2 és invariant front a moviments rígids utilitzant el Teorema del canvi de variable (Teorema 1.3.2) de la secció 3.

Recordem que un moviment en \mathbb{R}^2 és definit per la següent expressió:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

És a dir,

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha) + a \\ y = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) + b \end{cases}$$

On α és l'angle de rotació i (a, b) es correspon a les unitats de translació.

A continuació mostrem un exemple.

Considerem el punt $A = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Realitzem una rotació de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i una translació de $(a, b) = (1, 1)$.

En primer lloc, calculem i representem la rotació:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) - 1 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \\ y = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + 1 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \longrightarrow B = (-1, 2)$$

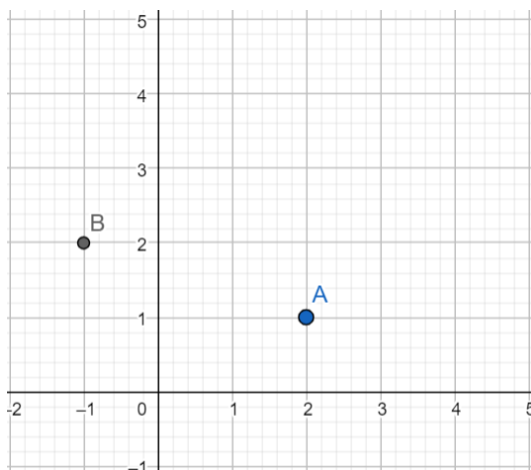


Figura 3.1: Resultat de la rotació.

Calculem ara la translació respecte al resultat de la rotació, obtenint així el punt C, resultat de transformar el punt inicial amb una rotació d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ i una translació de $(1, 1)$.

$$\begin{cases} x = -1 + 1 \\ y = 2 + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow C = (0, 3)$$

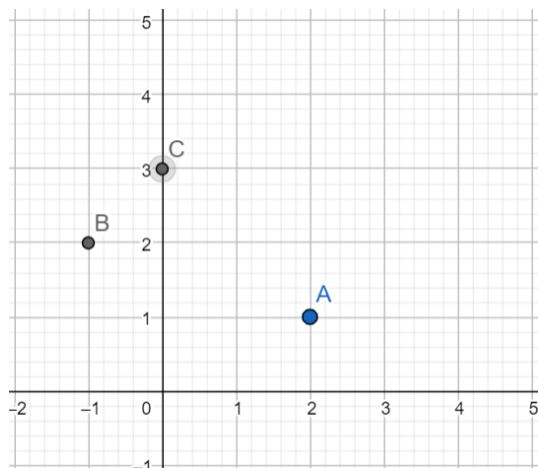


Figura 3.2: Resultat de la rotació i la translació.

L'objectiu ara és, donat un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ i un moviment en \mathbb{R}^2 , m tal que $D' = m(D)$ amb $D' \subset \mathbb{R}^2$, demostrar que

$$\int \int_{D'} dx' dy' = \int \int_D dx dy$$

Demostració:

Pel Teorema del canvi de variables, podem afirmar que:

$$\int \int_D dx dy = \int \int_{D'} |J(m)| dx' dy'$$

A més, com hem vist en aquesta secció, un moviment en \mathbb{R}^2 és definit per la següent expressió:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$|J(m)| = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Per tant, podem concloure que:

$$\int \int_D dx dy = \int \int_{D'} |J(m)| dx' dy' = \int \int_{D'} 1 dx' dy'$$

3.1.6 Partició de \mathbb{R}^2 per rectangles

A continuació definirem un estimador d'àrees, comprovarem que aquest és no esbiaixat.

Definim en primer lloc,

$$J_{k_1, k_2} = [k_1 \cdot a, (k_1 + 1) \cdot a] \times [k_2 \cdot b, (k_2 + 1) \cdot b]$$

De manera que,

$$J_{0,0} = [0, a] \times [0, b]$$

En la següent gràfica podem observar d'una manera il·lustrativa la definició de J_{k_1, k_2} .

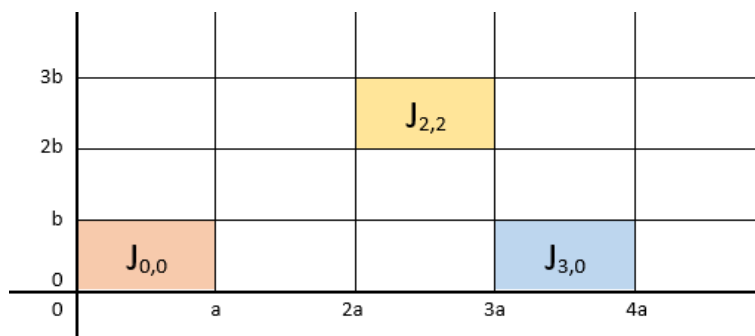


Figura 3.3: Representació de J_{k_1, k_2}

Siga el punt (x_0, y_0) aleatori amb distribució uniforme en $J_{0,0}$. La funció de densitat de probabilitat és definida per:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a \cdot b} & \text{si } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Considerem l'estimador de l'àrea següent:

$$\hat{A}(D) = A(J_{0,0}) \cdot \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} I(x_0 + k_1 \cdot a, y_0 + k_2 \cdot b)$$

On $I(x, y)$ representa la següent funció: $I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}$

Proposició 3.9: $\hat{A}(D)$ és un estimador no esbiaixat de $A(D)$.

Demostració:

Calculem l'esperança de l'àrea:

$$\begin{aligned}
 E(\hat{A}(D)) &= \int \int_{J_{0,0}} \hat{A}(D) \cdot f(x, y) \, dx dy = \\
 &= \int_0^a \int_0^b A(J_{0,0}) \cdot \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} I(x_0 + k_1 \cdot a, y_0 + k_2 \cdot b) \cdot \frac{1}{a \cdot b} \, dx dy = \\
 &= \int_0^a \int_0^b a \cdot b \cdot \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} I(x_0 + k_1 \cdot a, y_0 + k_2 \cdot b) \cdot \frac{1}{a \cdot b} \, dx dy = \\
 &= \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^a \int_0^b I(x_0 + k_1 \cdot a, y_0 + k_2 \cdot b) =
 \end{aligned}$$

Anomenem $x_1 = x_0 + k_1 \cdot a$ i $y_1 = y_0 + k_2 \cdot b$

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \int_{k_1}^{k_1+a} \int_{k_2}^{k_2+b} I(x_1, y_1) dx_1 dy_1 = A(D)$$

3.2 Integral de línia

En aquesta secció, s'exposaran algunes definicions necessàries per a comprendre les hipòtesis del teorema final de la secció, el teorema de Green. Aquestes definicions també ens valdran per les hipòtesis del teorema objectiu del treball, el teorema de la desigualtat isoperimètrica.

3.2.1 Corbes

Definició 3.10: Anomenem corba parametritzada a una aplicació

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

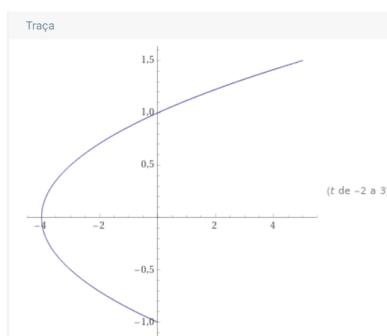
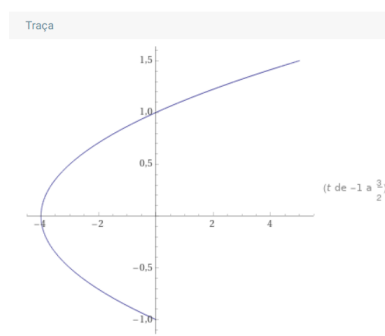
suau (de classe C^∞), on I és un interval de \mathbb{R} .

S'anomena traça de la corba ó corba α al conjunt imatge, és a dir,

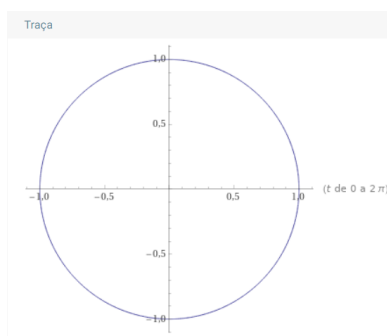
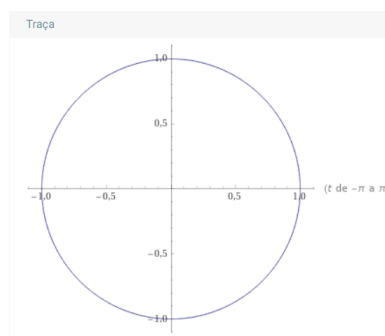
$$\{\alpha(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

Podem observar que diferents corbes parametritzades poden originar la mateixa traça. En són exemples els següents:

- $\alpha_1(t) = (t^2 - 4, \frac{t}{2})$ amb $t \in [-2, 3]$ i
 $\alpha_2(t) = (4t^2 - 4, t)$ amb $t \in [-1, \frac{3}{2}]$

Figura 3.4: Traça de α_1 Figura 3.5: Traça de α_2

- $\alpha_3(t) = (\cos(t), \sin(t))$ amb $t \in [0, 2\pi]$ i
 $\alpha_4(t) = (\cos(t), \sin(t))$ amb $t \in (-\pi, \pi)$

Figura 3.6: Traça de α_3 Figura 3.7: Traça de α_4

Com es pot observar, en els exemples anteriors, es tracten de diferents corbes parametritzades, però donen la mateixa traça.

Definició 3.11: $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'anomena corba parametritzada tancada si $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Es diu que α és simple si és injectiva en (a, b) , és a dir, si $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ quan $a < t_1 < t_2 < b$.

Dels exemples anteriors, α_3 i α_4 són corbes parametritzades tancades, en canvi, α_1 i α_2 no ho són.

Definició 3.12: Siga $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada suau i siga $[a, b] \subset I$ un tancat de I . Aleshores, es defineix la longitud de la corba entre a i b com:

$$L(\alpha([a, b])) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definició 3.13: Siga $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada suau, es diu que α és regular si $\|\alpha'(t)\| \neq 0 \forall t \in I$.

Es diu que una corba és regular a trossos si l'interval $I \subset \mathbb{R}$ pot ser descompost amb un nombre finit de subintervalls en cada un dels quals α és regular.

3.2.2 Integral de línia d'un camp vectorial

Definició 3.14: Siga $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada regular a trossos i siga $C = \{\alpha(t) : t \in [a, b]\}$ la traça d' α . Siga F un camp vectorial continu definit almenys sobre la traça d' α , $F : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Es defineix la integral del camp F al llarg de la trajectòria C com:

$$\int_C F ds = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

És important destacar que com la corba C està orientada positivament, la integral de línia del camp escalar F no depèn de la parametrització de la corba. És a dir, si $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ és una bijecció diferenciable i $\beta = \alpha \circ h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tenim

$$\int_C F ds = \int_c^d F(\beta(u)) \cdot \beta'(u) du = \int_c^d F(\alpha(h(u))) \cdot \alpha'(h(u))h'(u) du.$$

Fent el canvi $h(u) = t$ i tenint en compte que la orientació de les dues corbes és la mateixa, és a dir $h(c) = a$ i $h(d) = b$, tenim

$$\int_C F ds = \int_c^d F(\alpha(h(u))) \cdot \alpha'(h(u))h'(u) du = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Per tant la integral $\int_C F ds$ no depèn de la parametrització de la corba si aquesta té orientació positiva.

3.2.3 Teorema de Green

En física i matemàtiques, el teorema de Green dona la relació entre una integral de línia al voltant d'una corba tancada simple C i una integral

doble sobre la regió plana D limitada per C . El teorema de Green es diu així pel científic britànic George Green.

Teorema 3.15: Siga C una corba tancada, simple i regular a trossos, orientada positivament, en \mathbb{R}^2 . Siga D la regió del pla tancada per la corba C i $F = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial de classe C^1 , llavors,

$$\int_C F ds = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Corol·lari 3.16: Siga $\alpha(t) = \{x(t), y(t)\}$, aleshores, el àrea de D es pot obtenir de les següents formes:

$$\begin{aligned} A(D) &= - \int_a^b y(t)x'(t) dt \\ &= \int_a^b x(t)y'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \end{aligned}$$

Demostració:

Si en el Teorema de Green considerem $P(x, y) = y$ i $Q(x, y) = 0$ tenim que

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \int \int_D dx dy = -A(D).$$

Per altra banda,

$$\int_C F ds = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (y(t), 0) \cdot (x'(t), y'(t)) dt.$$

Obtenim així la primera fórmula per a $A(D)$.

Si en el Teorema de Green considerem $P(x, y) = 0$ i $Q(x, y) = x$ i procedim com en el cas anterior, obtenim la segona fórmula per a $A(D)$.

La tercera fórmula per a $A(D)$ s'obté com a mitjana de la primera i la segona.

4

Desigualtat Isoperimètrica

4.1 Formulació

Teorema 4.1 (La Desigualtat Isoperimètrica): Siga $\alpha(t) = \{x(t), y(t)\}$ una corba regular, tancada, simple i orientada positivament on $t \in [a, b]$. Siga A el àrea del domini D tancat per la corba i l la longitud de la corba C definida per α . Aleshores,

$$l^2 - 4\pi A \geq 0$$

o equivalentment

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}.$$

La igualtat es dona si i solament si C és una circumferència.

4.2 Demostració de la Desigualtat Isoperimètrica

La demostració que presentem en aquesta secció va ser donada pel matemàtic alemany Erhard Schmidt (1876-1959) en 1939 i en aquest treball hem seguit el llibre [2].

Abans de la demoatració probarem uns resultats que s'utilitzaran en la mateixa.

Lema 4.2: Siguin x, y, \bar{y} funcions de classe \mathbb{C}^1 . Aleshores,

$$(xy' - \bar{y}x')^2 \leq (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)$$

Demostració:

Anem a demostrar que, $(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2) - (xy' - \bar{y}x')^2 \geq 0$, per tant,

$$\begin{aligned} (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2) - (xy' - \bar{y}x')^2 &= \\ &= (xx')^2 + (xy')^2 + (\bar{y}x')^2 + (\bar{y}y')^2 - (xy')^2 + 2xy'\bar{y}x' - (\bar{y}x')^2 = \\ &= (xx')^2 + (\bar{y}y')^2 + 2xx'\bar{y}y' = (xx' + \bar{y}y')^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lema 4.3: Siguin $x, y \in \mathbb{R}^+$, llavors, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Demostració:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

Com qualsevol número elevat al quadrat és positiu, queda demostrada la desigualtat.

Comencem ara la **demostració de la desigualtat** (*Teorema 4.1.*)

Siguin E, E' dues línies paral·leles les quals no toquen la corba C . Movent aquestes dues paral·leles fins al primer contacte obtenim dues rectes paral·leles tangents a la corba C . Anomenem aquestes últimes com L i L' .

Considerem ara la circumferència \mathbb{S}^1 la qual és tangent a les dues rectes L i L' i no interseca amb la corba C . Anomenem O el centre de la circumferència i el prenem com a origen de coordenades, sent l'eix x perpendicular a les rectes L i L' .

Parametritzem C per longitud d'arc, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, tal que estigui positivament orientada i els punts tangencials amb les rectes L i L' siguin $s = 0$ i $s = s_1$ respectivament.

Podem assumir que l'equació de la circumferència \mathbb{S}^1 és

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), \quad s \in [0, l].$$

Açò s'aconsegueix fent $\bar{y}(s) = +\sqrt{r^2 - x(t)^2}$ per a $0 < s < s_1$ i $\bar{y}(s) = -\sqrt{r^2 - x(t)^2}$ per a $s_1 < s < l$, on $2r$ és el diàmetre de la circumferència \mathbb{S}^1 , és a dir, la distància entre les rectes L i L' .

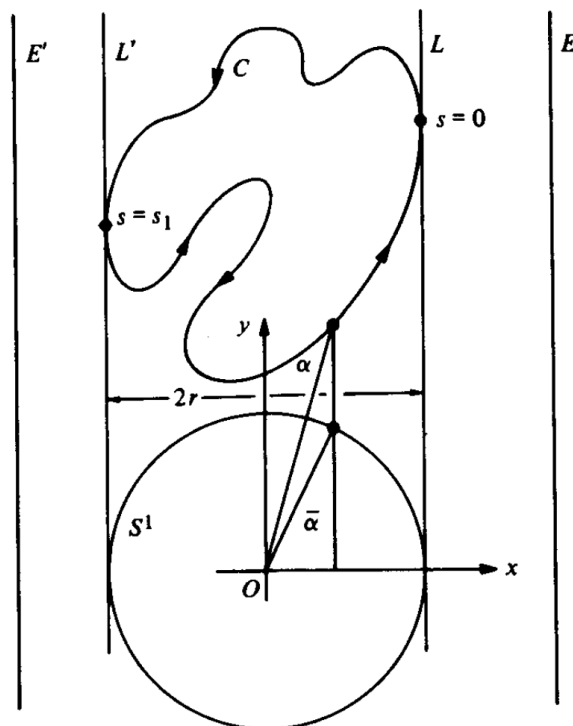


Figura 4.1: Representació gràfica. ([2]).

Denotant per \bar{A} l'àrea limitada per S^1 i utilitzant les igualtats del *Corol·lari 3.16*, tenim que:

$$A = \int_0^l xy' ds, \quad \bar{A} = - \int_0^l \bar{y}x' ds = \pi r^2$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} A + \bar{A} &= A + \pi r^2 = \int_0^l (xy' - \bar{y}x') ds \leq \int_0^l \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2} ds \leq \\ &\stackrel{\text{Lema 4.2}}{\leq} \int_0^l \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)} ds \stackrel{\text{a.p.p.a}}{=} \int_0^l \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} ds = \int_0^l r ds = lr. \end{aligned}$$

Per tant, tenim que

$$A + \pi r^2 = lr. \quad (4.1)$$

Pel *Lema 4.3* deduïm que,

$$A + \pi r^2 \geq 2\sqrt{A\pi r^2}. \quad (4.2)$$

Finalment, juntant 4.1 i 4.2 obtenim:

$$2\sqrt{A\pi r^2} \leq lr \iff 4\pi Ar^2 \leq l^2 r^2 \iff 4\pi A \leq l^2 \iff 0 \leq l^2 - 4\pi A. \quad (4.3)$$

Ara, assumim que es compleix la igualtat veurem que C és una circumferència. Aleshores, la igualtat s'ha de mantenir en la resta de desigualtats.

De l'equació 4.2 deduïm que:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 = 2\sqrt{A\pi r^2} &\iff A - 2\sqrt{A\pi r^2} + \pi r^2 = 0 \iff \\ &\iff (\sqrt{A} - \sqrt{\pi r^2})^2 = 0 \iff A = \pi r^2 \end{aligned}$$

Així doncs, de l'equació 4.1 tenim que $l = 2\pi r$, on r no depèn de la direcció de la recta L . A més a més, l'equació del *Lema* 4.2 implica,

$$(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)$$

o el que és equivalent (per la demostració del *Lema*),

$$(xx' + \bar{y}y')^2 = 0 \iff \bar{y}y' = -xx' \quad (4.4)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} (xy' - \bar{y}x')^2 &= (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2) \longrightarrow \\ &\longrightarrow (xy')^2 - 2\bar{y}x'xy' + (\bar{y}x')^2 = r^2 \longrightarrow \\ &\xrightarrow{Eq.4.4} (xy')^2 + 2(x'x)^2 + (\bar{y}x')^2 = r^2 \longrightarrow \\ &\longrightarrow x^2((x')^2 + (y')^2) + (x')^2(x^2 + \bar{y}^2) = r^2 \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\alpha p.p.a} x^2 + (x')^2(x^2 + r^2 - x^2) = r^2 \longrightarrow \\ &\longrightarrow x^2 + (x')^2 r^2 = r^2 \longrightarrow x^2 = r^2(1 - (x')^2) \longrightarrow x = \pm ry' \end{aligned}$$

Com r no depèn de la direcció escollida de les rectes paral·leles podem canviar les x per y resultant $y = \pm rx'$.

Finalment,

$$x^2 + y^2 = (ry')^2 + (rx')^2 = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2,$$

que és l'equació d'una circumferència.

4.3 Demostració intuïtiva de la Desigualtat Iso-perimètrica

Aquesta demostració es basa en provar que donada una longitud l , l'àrea més gran tancada per una corba $\alpha(t)$ de longitud l correspon a un cercle. La demostració va ser donada pel geòmetra suís Jakob Steiner (1796-1863). En aquest treball hem seguit el llibre [4].

Jakob Steiner va establir el procediment següent segons el qual per a cada corba tancada simple del pla que no un cercle, construeix una altra corba, de la mateixa longitud que la donada, però que tanca una àrea més gran.

Per tant, suposem que C és la traça d'una corba α tancada i simple de longitud l .

1.- Suposem que C no és una corba convexa.

Recordem que una corba convexa es defineix com una corba simple en el pla euclidià que es troba completament a un costat de totes i cadascuna de les seues rectes tangents. Si la corba C no és convexa aleshores serà còncava i, per tant, existiran $p_1, p_2 \in C$ tals que estan connectats per la mateixa recta tangent t i a un costat de la recta tangent hi haurà punts tancats per C i altres que no ho estan.

Reflectint la part de la corba continguda entre p_1 i p_2 , que no conté punts de l'interior de C , mitjançant la recta tangent t obtenim una nova corba amb el mateix perímetre però major àrea (veure Figura 4.2).

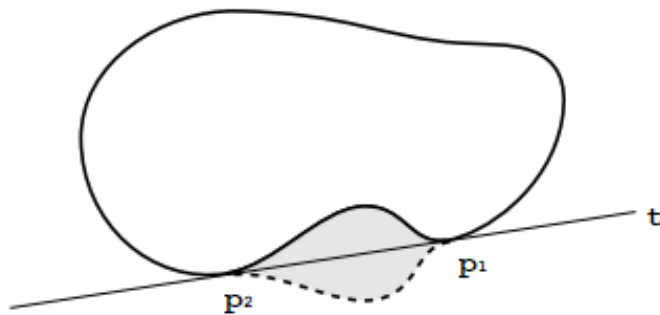


Figura 4.2: Representació gràfica. ([4]).

2.- Per tant, suposem que C tanca una àrea que és convexa; doncs si no ho

és, per l'apartat anterior, sempre podem trobar una corba convexa de major àrea i on la corba frontera té la mateixa longitud l .

Per a provar aquest apartat necessitem dos resultats geomètrics.

Lema 4.4: Siga un triangle com el de la figura 4.3. Aplicant la fórmula de l'àrea del triangle com base per altura dividit per 2 i la definició de sinus d'un angle, tenim que l'àrea del triangle a partir dels costats de longitud a i b i de l'angle C ve donada per

$$A(T) = \frac{ab \sin C}{2}.$$

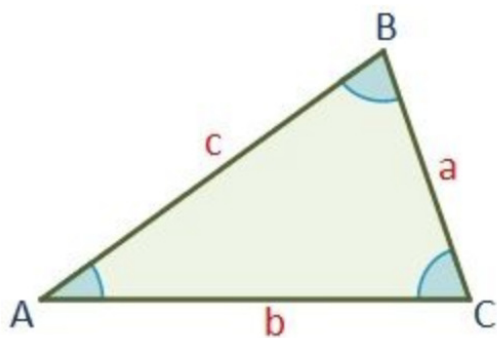


Figura 4.3: Àrea de un triangle.

Teorema 4.5. (Teorema de Thales): Siga B un punt del cercle de diàmetre AC , diferent de A i de C . Aleshores l'angle ABC és recte. A més, fixats dos punts A i C , el conjunt de punts $J = \{B : \angle ABC = \pi/2\}$ és una circumferència de diàmetre AC .

Demostració: Demostrarem a continuació la primera part del Teorema. Per definició de triangle isòsceles, el segment BO divideix el triangle ABC en dos triangles isòsceles ABO i OBC (veure Figura 4.4). Per ser triangles isòsceles, cada un d'ells té dos angles iguals: α i β . Per tant,

$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = \pi.$$

Aleshores, $\alpha + \beta = \pi/2$ i, per tant, l'angle ABC és recte.

4.3. DEMOSTRACIÓ INTUÏTIVA DE LA DESIGUALTAT ISOPERIMÈTRICA 29

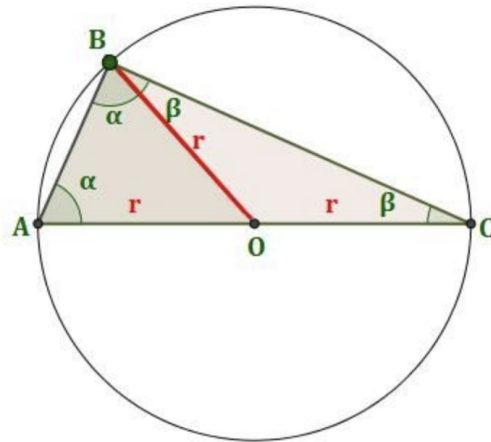


Figura 4.4: Teorema de Thales.

Demostració:

Siga C convexa i $a, b \in C$ tals que divideixen el perímetre per la meitat, llavors, el segment ab divideix la corba en dues parts de la mateixa longitud i l'àrea en dos parts, anomenades F_1, F_2 . Si suposem, per exemple que F_1 és major que F_2 , veurem que podem trobar una corba de la mateixa longitud però que tanca un àrea major.

Efectivament, com F_1 és major que F_2 si s'intercanvia F_2 per la imatge simètrica de F_1 a través del segment ab trobem una corba de la mateixa longitud però que tanca una àrea de major àrea (veure Figura 4.5).

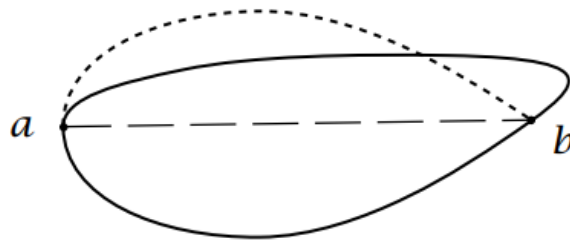


Figura 4.5: Representació gràfica. ([4]).

Amb aquest raonament, les àrees de les dues parts coincidiran. Anomenem C_1, C_2 als arcs respectivament. Si aquests foren semicercles, C seria un cercle.

Suposem doncs que C_1 no és un semicercle, aleshores, per la segona part del *Teorema 4.5* existeix algun punt c tal que l'angle $\gamma = acb$ no és recte.

Fixant a , c i la longitud bc , i fent girar el segment bc al voltant de c per obtenir un angle $\gamma = \frac{\pi}{2}$. El resultat d'aquesta operació ens dona una figura amb més àrea que l'original F_1 , donat que les àrees ombrejades en la *Figura 4.6* no canvien i, pel *Lema 4.4*, l'àrea del triangle original és menor que la del triangle final ja que $\sin \gamma \leq \sin \pi/2 = 1$.

Refent la part F_2 amb la imatge simètrica a través de ab obtenim una nova silueta amb la mateixa longitud que C però una àrea major.

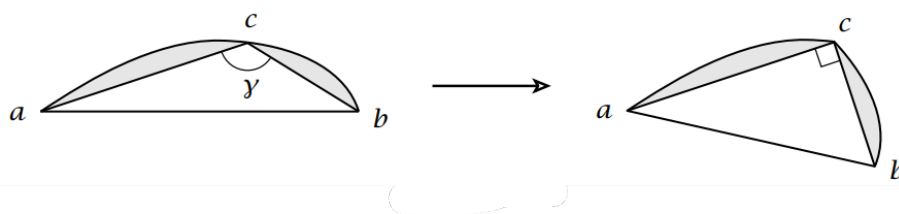


Figura 4.6: Representació gràfica. ([4]).

L'argument de Steiner estableix les noves afirmacions següents:

Si la corba $\alpha(t)$ tanca una àrea còncava, aleshores hi ha una altra corba de la mateixa longitud però que tanca una àrea més gran.

Si la corba $\alpha(t)$ tanca una àrea convexa però no és un cercle, llavors hi ha una altra corba de la mateixa longitud però que tanca una àrea més gran.

Aleshores, la demostració de Steiner mostra que si existeix una corba que maximitza l'àrea, ha de ser un cercle. Però, de fet, caldria un argument a part per demostrar l'existència de la corba que maximitza l'àrea.

Bibliografia

- [1] Campos, B. Chiralt, C., Cálculo integral (2011). Col·lecció Sapientia, Universitat Jaume I.
- [2] Do Carmo, M.P., Geometría Diferencial de Curvas y Superficies (1995). Alianza Universidad.
- [3] Herrero-Piñeyro, P. J. La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental (2012). La Gaceta de la RSME, Vol. 15, Núm. 2, pp. 335–354.
- [4] Hopf, H. Selected Chapters of Geometry (2013). Trans. H. Samelson ETH Zuerich, 1940.
<<https://tuit.cat/Nz2ve>>