UNIVERSITAT JAUME I

Grado en Matemática Computacional

Trabajo Final de Grado

# El espacio de Minkowski como marco de la relatividad especial

*Autor:*
Jordi Antonino Vallejo

*Tutor académico:*
José Antonio López Ortí

Fecha de lectura: 10 de Septiembre de 2022
Curso académico 2021/2022

## Resumen

La relatividad especial es una nueva teoría ideada a raíz de las contradicciones halladas en la física clásica, vistas a partir del experimento de Michelson-Morley a finales del siglo XIX. Gracias a los trabajos de Poincaré y Lorentz, Einstein dio una interpretación diferente a estos resultados, formulando la teoría de la relatividad especial.

A raíz de los postulados construye esta nueva teoría, que da un nuevo sentido al espacio-tiempo, reescribe las relaciones de momento y energía cinética, y establece la equivalencia entre masa y energía.

En este documento se hace un repaso de esta teoría, analizando su surgimiento desde el experimento de Michelson-Morley y como se desarrolló, viendo sus consecuencias, y analizando sus nuevas relaciones y equivalencias.

Finalmente se analiza como parte central del trabajo el espacio de Minkoswki, un espacio cuatridimensional sobre una geometría no euclidiana, ideado por el propio Minkowski para entender el espacio y el tiempo como variables ligadas.

## Palabras clave

Teoría de la relatividad especial. Transformaciones de Lorentz. Espacio de Minkowski.

## Keywords

Special relativity. Lorentz transformations. Minkowski space.

# Índice general

# Capítulo 1

# Bases experimentales

## 1.1. Introducción

En primer lugar y a modo de introducción al presente trabajo es necesario realizar algunas consideraciones para contextualizar de un modo adecuado el presente escrito.

La primera de ellas es la construcción axiomática de la mecánica clásica la cual se hará siguiendo el procedimiento expuesto por Teodoro Vives en su libro Astronomía de Posición [8].

1. *El espacio es euclídeo tridimensional. Este espacio es absoluto pues contiene al universo completo.*

Este principio no fue enunciado como tal por Newton pues en su época no se concebía la existencia de otro espacio y por tanto al ser el espacio "natural" no era necesario postular su existencia.

2. *Existe un tiempo absoluto, esto es común a todos los sistemas, independiente del espacio.*

Newton tampoco expuso de modo explícito este principio, pues era admitido como verdad absoluta. La independencia del espacio respecto al tiempo hay que entenderla como que las transformaciones entre coordenadas espaciales no afectaban al valor del tiempo

A continuación, hay que introducir las tres leyes de Newton.

3. (1ª ley de Newton) *Todo cuerpo libre en el espacio absoluto, esto es no sujeto a la acción de fuerzas, esta respecto al espacio absoluto en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.*

Este principio es conocido como principio de inercia.

4. ($2^{\underline{a}}$ ley de Newton) *La fuerza que actúa sobre un partícula libre es igual a la derivada de su momento lineal con respecto al tiempo (el momento lineal es* $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$*, donde* $m$ *es una constante llamada masa inercial y* $\vec{v}$ *es la velocidad de la partícula).*

Esta ley se escribe pues $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ y constituye la definición matemática de fuerza.

5. ($3^{\underline{a}}$ ley de Newton) *Toda fuerza ejercida sobre una partícula induce otra fuerza igual y de sentido contrario ejercida por la partícula sobre el medio igual y de sentido contrario a la primera.*

Esta ley es conocida como principio de acción y reacción.

Además, se cumple el principio de relatividad de Galileo el cual podemos enunciar como:

6. *Las leyes fundamentales de la mecánica son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, entendiendo por sistemas inerciales a aquellos cuyo movimiento de uno con respecto a otro es de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme.*

Finalmente, y se añade la ley de gravitación universal de Newton, con la cual se puede determinar el movimiento de los cuerpos celestes.

7. (Ley de gravitación universal). *Dados dos cuerpos de masas* $m_1$ *y* $m_2$ *cuya posición viene dada por los vectores* $\vec{r_1}$ *y* $\vec{r_2}$*,* $m_2$ *es atraída por* $m_1$ *con una fuerza dada por:*

$$\vec{F} \quad = \quad -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{\vec{r}^{\,3}}\,\vec{r}$$

*donde* $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ .

Este sistema de axiomas es suficiente para poder definir las magnitudes de la mecánica clásica y establecer las relaciones entre ellas.

La mecánica newtoniana es relativista, pues sus leyes son las mismas en dos sistemas que se mueven uno con respecto a otro en movimiento rectilíneo y uniforme. Esto implica que desde un sistema no es posible detectar si esta en movimiento o en movimiento rectilíneo uniforme.

La mecánica clásica evolucionó con el paso del tiempo y se paso de la formulación newtoniana a la formulación de D' Alembert, a la formulación lagrangiana y finalmente a la formulación Hamiltoniana. Para ello se introdujeron estructuras geométricas como las variedades diferenciables, los fibrados tangentes y cotangentes, las estructuras simplécticas, etc. Si bien el estudio de estas estructuras no es el objeto de este trabajo.

Una amplia visión de las distintas formulaciones de la mecánica clásica puede verse en Arnold [2], Abraham [1], entre otros.

Por otra parte, ya fuera de la mecánica clásica, Newton también efectuó un primer estudio de las propiedades de la luz, la cual puede transmitirse a través del espacio en cualquier dirección. Newton propuso un modelo de partículas para el estudio de la luz.

Un hecho importante fue la determinación de la velocidad por Ole Romer en 1676 de la luz en el vacío mediante el estudio del estudio de las ocultaciones de satélites de Júpiter, obteniendo que la velocidad era finita y aproximadamente 2200000 $km/s$, valor erróneo, pero que estima bien el orden de magnitud de esta, y sobre todo que prueba su finititud. Experimentos mucho más precisos establecieron posteriormente que el valor de la velocidad en el vacío es $c = 299792{,}458\, km/s$ (determinación en 1983).

La observación de las propiedades de la luz, reflexión, refracción difracción y una serie de experimentos realizados entre otros por Fresnel y Young probaron la incompatibilidad de la teoría corpuscular con los dichos experimentos, lo cual movió a buscar otra teoría de la luz la cual se encontró en los movimientos de naturaleza ondulatoria. Ahora bien, para que se produzca un movimiento ondulatorio debe haber (al menos bajo el punto de vista de la mecánica clásica) un medio material donde se propaguen las ondas, lo cual choca con un universo fundamentalmente vacío.

Para solventar tal problema se creó la teoría del éter, según la cual el espacio no estaba vacío sino que estaba ocupado por un material llamado éter.

Para explicar como debía ser este material se estudiaba la velocidad de transmisión de la luz en el espacio, así como las órbitas de los planetas alrededor del sol a través del éter. Se dedujo entonces que debía ser un fluido sin viscosidad, transparente, que llenara el espacio y de alta rigidez para así permitir a la luz viajar a alta velocidad a través de él y que los planetas pudieran seguir sus órbitas entorno al sol sin caer a él.

Para probar su existencia, en el año 1887, los físicos Albert Abraham Michelson y Edward Morley prepararon un experimento, utilizando el interferómetro que diseñó el propio Michelson. Sin embargo, como se verá, los resultados no fueron los esperados, negando la exisencia del éter, lo cual hizo replantearse la física clásica.

Una vez probado de modo experimental la no existencia del éter y una vez constatado que la velocidad de la luz es constante en todos los sistemas inerciales y dado que también los fenómenos electromagnéticos gobernados por las leyes de Maxwell [4] no son invariantes frente a transformaciones de Galileo ni satisfacen el principio de acción y reacción se trato de encontrar un modelo mecánico nuevo en la que los fenómenos aparecidos a partir de los experimentos realizados a finales del siglo XIX y principios del XX tuvieran una interpretación coherente.

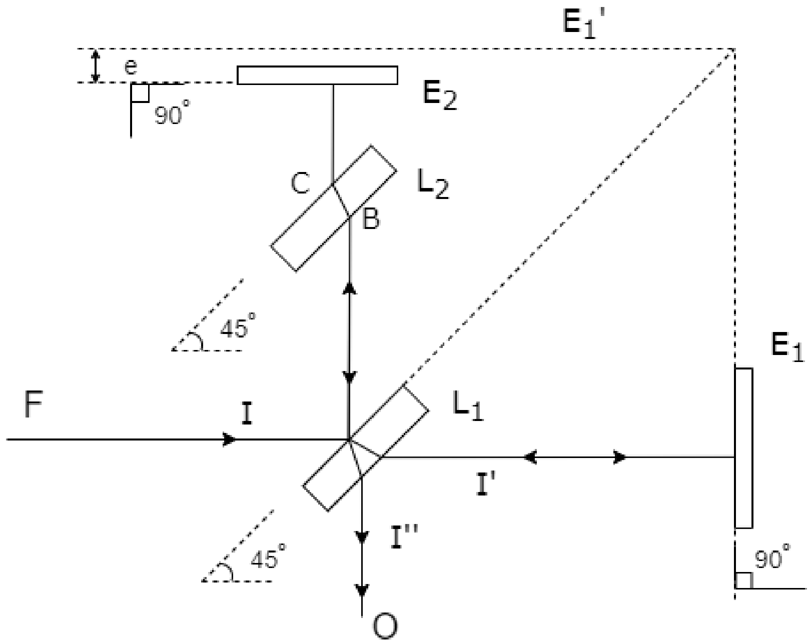


Figura 1.1: Representación del Interferómetro de Michelson

Einstein encontró dicha explicación con la construcción de la teoría de la relatividad especial (o restringida), encontrando los principios de dicho modelo. El matemático Minkowski interpretó de un modo correcto los resultados introduciendo una geométrica tetradimensional no euclidiana [5] en la que las transformaciones surgidas de la teoría de Einstein eran isometrías. No se pretende estudiar en este trabajo el conjunto de isometrías completo del espacio de Minkowski que constituyen el grupo de Poincaré ni tampoco dotar de estructura de variedad diferenciable a la geometría afín que genera el espacio de Minkowski, pues excede los objetivos de este trabajo.

Una visión general de la relatividad restringida puede verse entre otros en [6] [7] [3]. En este trabajo se persigue por una parte exponer de un modo coherente dicha teoría partiendo de los principios de Einstein que la axiomatizan, en segundo lugar estudiar los efectos que aparecen al observar un fenómeno desde destientos sistemas inerciales, para finalmente estudiar las transformaciones asociadas a tales hechos así como la geometría, espacio vectorial y transformaciones que soporte matemático firme a dicha teoría reduciéndola a geometría.

## 1.2. Interferómetro de Michelson

Un rayo de luz procedente del foco F encuentra la lámina plano-paralela $L_1$ que tiene 45° de inclinación y cuya cara anterior se encuentra semi-plateada, actuando de semi-espejo, de modo que la intensidad del rayo reflejado sea la misma intensidad que el rayo refractado.

El rayo refractado sale paralelo al incidente y encuentra perpendicularmente al espejo E, se refleja y al reflejarse en la lamina semi-plateada $L_1$ sale en dirección I"$\mapsto$O.

El rayo F$\mapsto$I, al reflejar en la lamina semi-plateada sale en la dirección I$\mapsto$B y atraviesa la lámina transparente $L_2$, paralela a $L_1$ y del mismo espesor. Seguidamente, se refleja en $E_2$, vuelve a refractar en $L_2$ y, al atravesar $L_1$, va en dirección I"$\mapsto$O, dando lugar junto con el primer rayo a fenómenos de interferencias por tratarse de rayos coherentes (que tienen la misma fase inicial).

Por tanto, el rayo refractado en $L_1$ recorrerá una distancia de $2\,\overline{I'E_1}$, mientras que el reflejado en $L_1$ recorrerá una distancia de $2(\overline{IB} + \overline{CE_2})$.

La diferencia de recorrido entre los dos rayos que coinciden en O es:

$$\Delta = 2\,\overline{I'E_1} - 2(\overline{IB} + \overline{CE_2}) = 2e \tag{1.1}$$

En este apartado se observan anillos de interferencia en O que van variando al variar la longitud de e, repitiéndose cada $\frac{\lambda}{2}$.

Con el interferómetro de Michelson se definió el metro patrón como 1m = 1.533.164,1 veces la longitud de onda de la línea del cadmio, correspondiente a $\lambda = 6.438{,}472\ \mathring{A}$.

## 1.3. Experimento de Michelson-Morley

Supongamos orientado el interferómetro de modo que la velocidad $\vec{v}$ de la Tierra coincida con $FE_1$. Entonces, como la luz que parte del foco, se mueve con velocidad $c$ al ser un medio en reposo. Cuando la luz marcha de $L_1$ a $E_1$ lo realiza, respecto al interferómetro, con velocidad $c - v$ ; y, cuando va en sentido contrario, $c + v$.

Por tanto, el tiempo invertido por la onda refractada en ir de la lámina $L_1$ al espejo $E_1$ y

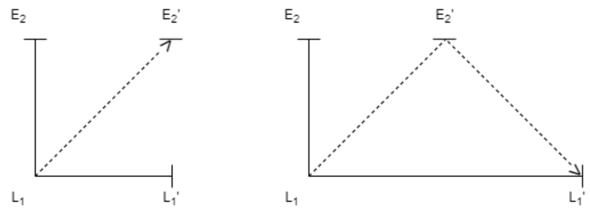


Figura 1.2: Representación del experimento: rayo reflejado desde la lamina $L_1$ hasta el espejo $E_2$ (figura de la izquierda), y volver a $L_1$ tras ser reflejado en $E_2$ (figura de la derecha) (todo en movimiento solidario con la Tierra)

volver será, siendo l la longitud del brazo $L_1E_1$ :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \quad = \\ &= \frac{l((c+v)+(c-v))}{(c+v)(c-v)} = \frac{l \cdot 2c}{(c+\frac{v \cdot c}{c})(c-\frac{v \cdot c}{c})} = \frac{2l}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx \\ &\approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \quad , \end{aligned}$$

es decir:

$$t_1 \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{1.2}$$

En cambio, la onda que se refleja y se propaga hacia $E_2$, lo hace según la diagonal $L_1E_2$', debido a que el aparato se desplaza solidario con la Tierra.

Consideremos $t_2$ el tiempo invertido por la onda reflejada en ir y volver de $L_1$ a $E_2$. Este trayecto visto desde un sistema absoluto será el doble de la distancia $L_1E_2$', mientras que visto desde el sistema Tierra será:

$$2\,\overline{L_1\,E_2} = \overline{L_1'\,E_2'} \tag{1.3}$$

Si los brazos del interferómetro son iguales, esta distancia es 2l. Como la luz se propaga en el éter con velocidad c, la distancia:

$$L_1E_2{}' = c \cdot \frac{t_2}{2} \qquad y \qquad L_1L_1{}' = v \cdot \frac{t_2}{2} \quad ,$$

$$
\begin{aligned}
t_2 &= \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\
&\approx \frac{2l}{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}\right)
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
t_2 \approx \frac{2l}{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{1.4}
$$

Combinando $t_1$ (*1.2*) y $t_2$ (*1.4*) para calcular la diferencia de llegada de ambos rayos:

$$
t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} \tag{1.5}
$$

Y, si se hace girar 90° el interferómetro:

$$
\bar{t_1} - \bar{t_2} = -\frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} \tag{1.6}
$$

Es decir, la diferencia entre ambas posiciones es:

$$
\Delta t = \frac{2l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad , \tag{1.7}
$$

lo que debe dar lugar a variación de los fenómenos de interferencias.

Sin embargo, esta variación no se produjo en el experimento de Michelson-Morley, lo que se tradujo en un resultado negativo del experimento.

Este hecho hizo tambalearse la mecánica clásica, al no explicar el resultado experimental.

## 1.4. Contracción de Fitzgerald-Lorentz

Los físicos Fitzgerald y Lorentz trataron de interpretar el experimento de Michelson-Morley conservando las ideas fundamentales de la mecánica clásica.

En el interferómetro, si admitimos que el brazo horizontal sufre una contracción de modo que:

$$l' \;=\; l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad , \tag{1.8}$$

los tiempos que tarda la luz en recorrer los dos brazos es el mismo, por lo que se explicaría el resultado del experimento.

La hipótesis de Fitzgerald-Lorentz es:

"Las dimensiones de los cuerpos, en la dirección del movimiento, sufren una contracción relativa en la proporción $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ".

Pero esta contracción real implicaba una doble refracción en cuerpos isótropos en movimiento, diferencia de conductividad metálica, etc., experimentos que resultaron todos negativos.

## 1.5. Postulados de la mecánica relativista

Ante la negativa de las explicaciones del experimento de Michelson-Morley, Einstein pensó que las leyes de la física clásica tenían contradicciones, y que las leyes de inercia y la mecánica tenían que ser compatibles con las leyes de la óptica y el electromagnetismo (ecuaciones que no son invariantes por transformaciones de Galileo), aunque esto supusiera abandonar el significado de espacio y de tiempo clásico. Motivado por estas contradicciones, en 1905 introdujo la llamada teoría de la relatividad especial, por la cuál a partir de asumir dos principios se iba a desarrollar toda la nueva física.

Esta teoría implicaba la reformulación de la teoría de la relatividad de Galileo y sus transformaciones, gracias a una nueva interpretación de los trabajos de Poincaré. Además se restringía la velocidad máxima a la de la luz, y que esta era la misma para todos los observadores, independientemente de su sistema de referencia.

Para introducir la teoría de la relatividad especial, Einstein formuló los siguientes dos postulados:

**Postulado 1** *Un sistema inercial en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme es aquel que verifica la ley de inercia. El objetivo de la relatividad restringida es el estudio de los sistemas inerciales.*


Figura 1.3: Representación figura para poder sincronizar de los puntos del espacio

**Postulado 2** *Se llama ley universal de una teoría relativista a aquella que es valida para todos los sistemas inerciales de que se compone dicha teoría (Primer Principio de la Relatividad).*

**Postulado 3** *La velocidad de la luz en el vacío es constante y en módulo igual a* c *(Segundo Principio de la Relatividad).*

Gracias a estos nuevos postulados, los conceptos de espacio y de tiempo se habían enlazado, formando el espacio-tiempo, pudiéndose observar como el diagrama espacio-tiempo, donde el tiempo representaría una dimensión y el espacio otras dos, haciendo el diagrama como un hecho de sucesos que variará dependiendo la posición del observador en él. Además, se eliminaba la posibilidad de tener un espacio-tiempo absolutos, dependiendo este de la misma posición del observador.

De estos postulados, Eintein llegaría a deducir las mismas ecuaciones de Lorentz, pero desde un punto de vista teórico diferente, además de reescribir las relaciones de momento y energía cinética, y establecer la equivalencia entre masa y energía.

### 1.5.1. Sincronización

El primer problema es determinar cuando dos puntos del espacio son simultáneo. Para ello necesitamos conocer la velocidad de la señal reguladora (la luz).

Para poder sincronizar los puntos del espacio establecemos la siguiente ley:

$$t_n \;=\; t_0 + \frac{\overline{O\,P_n}}{c} \tag{1.9}$$

Además se ha de cumplir:

- Una señal que parte de $B$, $z$ segundos más tarde que la señal reguladora, debe llegar a $P$ $z$ segundos más tarde.

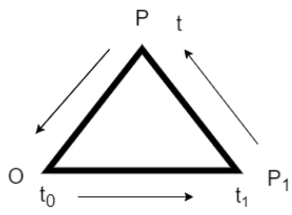


Figura 1.4: Representación figura de la demostración del Teorema 1

- Una señal que parte de un punto, y llega al mismo punto recorriendo un camino $l$ de ida y vuelta, llega al punto después de un tiempo igual a $\frac{l}{c}$ .

**Teorema 1** *La sincronización es independiente del punto que se tome como centro de regulación.*

*Demostración.* Consideremos $O$ el centro de regulación y $P$, $P_1$ dos puntos sincronizados respecto a O. Hemos de ver que:

$$t \ = \ t_1 + \frac{\overline{P_1 P}}{c} \tag{1.10}$$

Consideremos una señal que parte de O, pasa por $P_1$, P y vuelve a O.

El tiempo medido en O será:

$$T_0 \ = \ t_0 + \frac{\overline{O P_1} + \overline{P_1 P} + \overline{P O}}{c} \tag{1.11}$$

Sea t el tiempo de llegada de la señal a P procedente de $P_1$ Entonces:

$$\tau \ = \ t - \left( t_0 \ + \ \frac{\overline{O P}}{c} \right) \tag{1.12}$$

Una señal que parte $\tau$ segundos más tarde de $t_0$ en P, llegará $\tau$ segundos más tarde:

$$t \ = \ \tau + \left( t_0 \ + \ \frac{\overline{O P}}{c} \right) \tag{1.13}$$

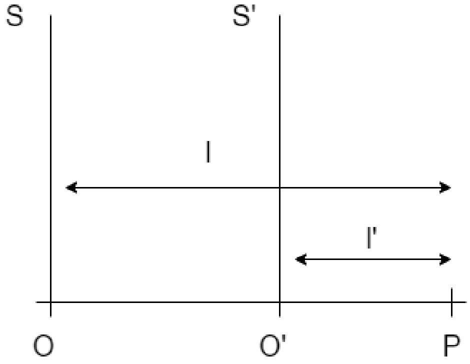


Figura 1.5: Representación figura de la demostración del Teorema 2

Si retorna al punto de partida, por el primer y segundo axioma, junto con *1.11*, se tiene:

$$T_0 \;=\; t_0 + \frac{2\,\dot{\overline{O\,P}}}{c} + \tau \;=\; t_0 \,+\, \frac{\overline{O\,P_1}\,+\,\overline{P_1\,P}\,+\,\overline{O\,P}}{c} \tag{1.14}$$

Sustituyendo $\tau$ (*1.12*) en *1.14*:

$$t_0 + \frac{2\,\dot{\overline{O\,P}}}{c} + t - t_0 - \frac{\overline{O\,P}}{c} \;=\; t_0 \,+\, \frac{\overline{O\,P_1}\,+\,\overline{P_1\,P}+\overline{O\,P}}{c} \tag{1.15}$$

Entonces:

$$t \;=\; t_0 + \frac{\overline{O\,P_1}}{c} + \frac{\overline{P_1\,P}}{c} \;=\; t_1 + \frac{\overline{P_1\,P}}{c} \tag{1.16}$$

**Teorema 2** *La medida del tiempo depende del sistema inercial.*

*Demostración.* Sean *S*, *S'* dos sistemas inerciales, de modo que uno se mueve respecto del otro. Consideramos que *O*, *O'* coinciden en un instante.

Sincronizando en el sistema S el punto P se tiene: $t_1 \,=\, t_0 + \frac{\overline{O\,P}}{c}$ , y en S': $t'_1 \,=\, t_0 + \frac{\overline{O'\,P}}{c}$ .

Como $\overline{O\,P} \,\neq\, \overline{O\,P'} \;\Longrightarrow\; t_1 \,\neq\, t'_1$ .

# Capítulo 2

# Transformaciones de Lorentz

## 2.1. Carácter relativo de la simultaneidad

**Definición 1** *Se dice que el espacio es homogéneo si sus propiedades no dependen del punto considerado. En toda geometría y en toda mecánica hay un grupo de transformaiones que deja invariantes ciertas propiedades.*

Debido a que el tiempo varia al cambiar el sistema, dejan de ser validas las transformaciones de Galileo. En consecuencia, hay que buscar un grupo de transformaciones adecuado.

Sea F una fuente luminosa de coordenadas $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ en S y $(x_0',\, y_0',\, z_0')$ en S'.

F emite una señal en $t_0$ en S y $t_0$' en S', y se reciben en P en $(x,\, y,\, z,\, t)$ y $(x',\, y',\, z',\, t')$.

$$\begin{aligned}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 &= c^2\,(t-t_0)^2 \quad (2.1)\\ (x'-x_0{}')^2+(y'-y_0{}')^2+(z'-z_0{}')^2 &= c^2\,(t'-t_0{}')^2 \quad (2.2)\end{aligned}$$

Si $x = x^1\,;\ y = x^2\,;\ z = x^3\,;\ t\,c = x^4$ , para transformaciones infinitesimales se tiene:

$$\sum_{i=1}^{4} dx^i \cdot dx^i \;=\; \sum_{i=1}^{4} dx'^i \cdot dx'^i \quad , \tag{2.3}$$

obteniendo así las ecuaciones de transformación:

$$x'^r \;=\; y'^r\,(x^1, x^2, x^3, x^4)\,. \tag{2.4}$$

**Teorema 3** *Las ecuaciones de transformación son lineales.*

*Demostración.* Tenemos:

$$\begin{aligned} dx'^r &= \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\, dx^j \\ dx^r \cdot dx'^r &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\, dx'^i\, dx^j \ , \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} = \delta_{ij}$ .

Sea $A^r_s = \frac{\partial x'^r}{\partial x^s}$ y $A^z_{sr} = \frac{\partial^2 x'^z}{\partial x^s\, \partial x^r}$ .

Tenemos $A^z_s\, A^z_r = \delta_{sr} \implies det(A^r_s) = \pm 1$ .

Derivando $A^r_s\, A^z_r = \delta_{sr} \implies A^r_{sp}\, A^z_r + A^r_s\, A^z_{rp} = 0$ .

Intercambiando $(p \to s \to r \to p)$ : $A^z_{rs}\, A^z_p + A^z_r\, A^z_{ps} = 0$ .

Restando con la expresión anterior: $A^z_{sr}\, A^z_p - A^z_{pr}\, A^z_s = 0$ .

Intercambiando $r$ y $p$ : $A^z_{sp}\, A^z_r - A^z_{rp}\, A^z_s = 0$ .

Y restando de $A^z_{sp}\, A^z_r + A^z_s\, A^z_{pr} = 0 \implies 2A^z_{rp}\, A^z_r = 0$ .

Y como $det(A^z_r) \neq 0 \implies A^z_{rp} = 0 \quad \forall r, p$ .

Por tanto, las ecuaciones de transformación son lineales.

**Teorema 4** *Sean S, S' dos sistemas inerciales tales que S' se desplaza a una velocidad constante* $\vec{w} = (w, 0, 0)$ *con respecto a S.*

*Si elegimos como origen de tiempo el instante en que* $0 = 0'$ *, entonces las transformaciones son:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& \frac{x - wt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &=& y \\ z' &=& z \\ t' &=& \frac{t - \frac{w}{c^2} x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right. \quad , \ \textit{donde} \quad \beta = \frac{w}{c} \tag{2.5}$$

*Demostración.* Tenemos:

$$\begin{cases} x' &=& a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15} \\ y' &=& a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + a_{25} \\ z' &=& a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + a_{35} \\ t' &=& a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + a_{45} \end{cases}$$

Puesto que en $t = t' = 0$ coinciden $O$ y $O$' $\Longrightarrow$ $a_{i5} = 0 \quad \forall i = 1, \_, 4$

Para $y$, $z$ arbitrarios:

- Si $x' = x = 0$, $t = 0$:

$$\begin{aligned} a_{12}y + a_{13}z = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a_{12} = a_{13} = 0 \\ a_{42}y + a_{43}z = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a_{42} = a_{43} = 0 \end{aligned}$$

- Si $y = 0 \to y' = 0$:

$$a_{21}x + a_{23}z + a_{24}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x, z, t \quad a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0$$

- Si $z = 0 \to z' = 0$:

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{34}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x, y, t \quad a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$$

Por tanto, las ecuaciones de transformación quedan reducidas a:

$$\begin{cases} x' &=& a_{11}\,x + a_{14}\,t \\ y' &=& a_{22}\,y \\ z' &=& a_{33}\,z \\ t' &=& \lambda_1\,x + \lambda_2\,t \end{cases} \tag{2.6}$$

Calculemos el valor de los coeficientes:

- Por simetría: $a_{22} = a_{33}$
- Si $x' = 0 \to x = wt \quad \Longrightarrow \quad 0 = a_{11}wt + a_{14}t \Longrightarrow a_{11}w = -a_{14}$

Volviendo al segundo principio:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\,t^2 \;=\; x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\,t'^2\,, \tag{2.7}$$

y sustituyendo $y$' $z$' en función de $y$, $z$ en $x = x' = 0$, $t = t' = 0$:

$$y^2 + z^2 \;=\; a_{22}^2\,(y^2 + z^2) \quad \Longrightarrow \quad a_{22} \;=\; \pm 1\,,$$

obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} x' & = & a_{11}\,(x - wt) \\ y' & = & \pm\, y \\ z' & = & \pm\, z \\ t' & = & \lambda_1\, x + \lambda_2\, t \end{array} \right.$$

y sustituyendo en *2.7*:

$$a_{11}^2 (x - wt)^2 - c^2(\lambda_1 x + \lambda_2 t)^2 \quad = \quad x^2 - c^2\, t^2\ ,$$

identificando términos:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} {a_{11}}^2 - c^2\, {\lambda_1}^2 & = & 1 & \quad (\textit{términos de } x^2\,) \\ -2\, {a_{11}}^2\, w - 2\, c^2\, \lambda_1\, \lambda_2 & = & 0 & \quad (\textit{términos de } xt\,) \\ {a_{11}}^2\, w^2 - c^2\, {\lambda_2}^2 & = & -c^2 & \quad (\textit{términos de } t^2\,) \end{array} \right.$$

y resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{lcl} a_{11} & = & \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ \lambda_1 & = & \pm\dfrac{\frac{w}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ \lambda_2 & = & \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \end{array}$$

definiendo $\beta = \frac{w}{c}$, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} x' & = & \pm\,\frac{x - wt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' & = & \pm\, y \\ z' & = & \pm\, z \\ t' & = & \pm\,\frac{t - \frac{w}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right. \tag{2.8}$$

(para mantener la orientación se toman los signos +)

Y pasando a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-w}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{w}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

que son las transformaciones de Lorentz, donde:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-w}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{w}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix}$$

y $det(M) = 1$ .

En lo que sigue, $S$, $S'$ serán dos sistemas inerciales moviéndose $S'$ con respecto a $S$ con velocidad $(w, 0, 0)$.

**Corolario 1** *Si dos sucesos son simultáneos en S, entonces no son simultáneos en S' (a no ser que sean coincidentes).*

*Demostración.* Sean $P_1 = (x_1, 0, 0)$ , $P_2 = (x_2, 0, 0)$ dos sucesos simultáneos en *S*, y no coincidentes, que se realizan en el instante *t*.

En *S'* tenemos:

$$t_1' = \frac{t - \frac{w}{c^2}\, x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.10}$$

$$t_2' = \frac{t - \frac{w}{c^2}\, x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.11}$$

y restando *2.11* a *2.10*:

$$t_1' - t_2' = \frac{\frac{w}{c^2}\,(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \neq 0$$

Por tanto $t_1' \neq t_2' \implies$ dejan de ser simultáneos.

**Corolario 2** *Es imposible superar la velocidad de la luz.*

*Demostración.*

Supongamos que $w > c$ .

Entonces $\frac{w}{c} > 1 \implies \beta > 1 \implies x' = \frac{x-wt}{\sqrt{1-\beta^2}} \notin \mathbb{R}$

Por tanto $w \leq c$

## 2.2. Contracción de longitud según la teoría de la relatividad

En primer lugar, hagamos una reflexión sobre el hecho de medir una longitud.

Para poder medir la distancia entre dos puntos desde un sistema de referencia, debemos imponer la condición de que ambos puntos sean simultáneos en dicho sistema.

Sean $x_1$ , $x_2$ coordenadas de dichos puntos en *S*, y sean $x'_1$ , $x'_2$ en *S'*.

Para poder medir en *S'* se ha de imponer que $t'_1 = t'_2$ en *S'*.

Se tiene, por tanto:

$$x'_1 = \frac{x_1 - wt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.12}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - wt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.13}$$

Y para medir en S se ha de imponer que $t_1 = t_2$ .

Si $x_2 - x_1 = l$ y $x'_2 - x'_1 = l'$ , restando *2.12* a *2.13*:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \implies l = l'\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.14}$$

Por tanto, desde S se observa una contracción de longitud, debido a que si eran simultáneos en S', en S dejaran de ser simultáneos.

## 2.3. Ley de composición de velocidad

**Teorema 5** *Consideramos un móvil que se mueve en el sistema S' con velocidad* $\vec{v'} = (v'_x,\, v'_y,\, v'_z)$ .

*Entonces en S se cumple:*

$$v_x = \frac{v'_x + w}{1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x} \tag{2.15}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x} \tag{2.16}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x} \tag{2.17}$$

*Demostración.* A partir de las transformaciones de Lorentz:

$$dx = \frac{dx' + w\, dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.18}$$

$$dy = dy' \tag{2.19}$$

$$dz = dz' \tag{2.20}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{w}{c^2}\, dx'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.21}$$

Tenemos por tanto:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + w\, dt'}{dt' + \frac{w}{c^2}\, dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + w\, \frac{dt'}{dt'}}{\frac{dt'}{dt'} + \frac{w}{c^2}\, \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + w}{1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x} \tag{2.22}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{w}{c^2}\, dx'} = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x} \tag{2.23}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x} \tag{2.24}$$

**Corolario 3** *Las transformaciones de Lorentz implican que la velocidad de la luz (c) es constante en todos los sistemas inerciales.*

*Demostración.* Sea $v'_x = c$

Entonces:

$$v_x = \frac{c + w}{1 + \frac{w\,c}{c^2}} = \frac{c + w}{1 + \frac{w}{c}} = \frac{c\,(1 + \frac{w}{c})}{1 + \frac{w}{c}} = c \tag{2.25}$$

**Teorema 6** *Sean* S, S' *dos sistemas inerciales.*

*Si* P *se mueve con velocidad constante en* S', *entonces se mueve con velocidad constante en S.*

*Demostración.* Tenemos $v_x = \frac{v'_x + w}{1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x}$ y $a_x = \frac{d\, v_x}{dt}$

Entonces:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\frac{d\, v'_x}{1+\frac{w}{c^2}\, v'_x} - \frac{w}{c^2}\, \frac{d\, v'_x\, (v'_x + w)}{(1+\frac{w}{c^2}\, v'_x)^2}}{\frac{dt' + \frac{w}{c^2}\, dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}\, d\, v'_x}{(dt' + \frac{w}{c^2}\, dx')\, (1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x)^2} = \\ &= \frac{d\, v'_x\, (1-\beta^2)^{3/2}}{dt'\, (1 + \frac{w}{c^2}\, \frac{dx'}{dt'})\, (1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x)^2} = a'_x\, \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x)^3} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$a_x = a'_x\, \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x)^3} \tag{2.26}$$

Si $a'_x = 0$, entonces $a_x = 0$.

Análogamente:

$$a_y = \frac{d\, v_y}{dt} = \frac{1-\beta^2}{(1 + \frac{w}{c^2}\, v'_x)^3} \left( \left(1 + v'_x\, \frac{w}{c^2}\right) a'_y - v'_y\, \frac{w}{c^2}\, a'_x \right) \tag{2.27}$$

$$\Longrightarrow \quad a_y = 0\,,\ a_z = 0\,. \tag{2.28}$$

**Corolario 4** *La condición necesaria y suficiente para que se cumplan los postulados de la relatividad restringida es que se cumplan las transformaciones de Lorentz.*

*Demostración.* Consecuencia inmediata de los teoremas anteriores.

# Capítulo 3

# Dinámica relativista

## 3.1. Introducción

En física clásica hay dos tipos de fuerzas:

a) Por contacto

b) Por "acción a distancia"

El caso b) es inaceptable en relatividad, puesto que para ello el cuerpo ha de actuar instantáneamente sobre otro, sin la existencia de un medio transmisor. Esto implica una velocidad de propagación infinita y la simultaneidad de los sucesos estímulo-respuesta.

El caso a) se acepta debido a que los sucesos estímulo-respuesta, además de ser simultáneos, son coincidentes, y por tanto invariantes relativistas.

**Definición 2** *Se llama momento relativista de un punto material a* $\vec{p} = N\,\vec{u}$ *donde:*

- $\vec{u}$ *es la velocidad del punto.*
- N *es la función escalar llamada "masa relativista" (concepto que se esclarecerá más adelante).*

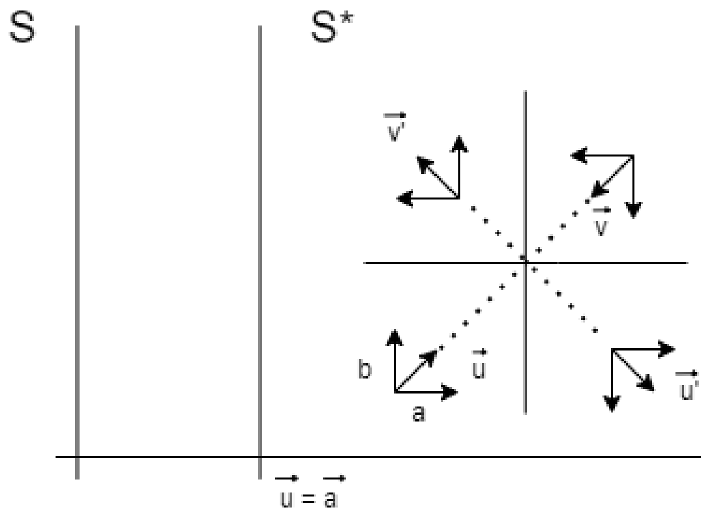


Figura 3.1: Representación de dos partículas colisionando en dos sistemas inerciales

**Definición 3** *Se llama fuerza $\vec{F}$ a la derivada del momento con respecto del tiempo: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .*

*Si $\vec{F} = 0 \implies \vec{p} = cte$ . La ley de conservación del momento es pues una ley universal.*

## 3.2. Masa relativista y masa propia

Puesto que se verifica la ley de inercia: si $\vec{F} = 0$ , entonces $\vec{u} = cte$ .

Y como $\vec{p} = N\,\vec{u} = cte$ , resulta que la masa relativista $N$ dependerá a lo sumo del módulo de la velocidad $N = N(m^\circ, u)$ , donde $m^\circ$ es una constante (de momento sin ningún significado) que caracteriza la partícula.

Consideramos dos sistemas inerciales como indica la figura 3.1.

Sean dos partículas idénticas con velocidades opuestas $\vec{u}, \vec{v}$ que colisionan adquiriendo velocidades $\vec{u'}$ y $\vec{v'}$ respectivamente en el sistema $S$. Tenemos:

$$\begin{array}{llll} u_x = a & v_x = -a & u'_x = a & v'_x = -a \\ u_y = b & v_y = -b & u'_y = -b & v'_y = b \end{array}$$

En el sistema *S'* sus componentes serán:

$$\begin{array}{lll|lll} u_x^* = 0 & v_x^* = -\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} & & u_x'^* = 0 & v_x'^* = -\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} \\ u_y^* = \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} & v_y^* = \frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} & & u_y'^* = -\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} & v_y'^* = \frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} \end{array} \tag{3.1}$$

Exigiendo ahora la conservación del momento se tiene:

$$\begin{aligned} p_x^* &= N(m^\circ, u^*)\, u_x^* + N(m^\circ, v^*)\, v_x^* = -N(m^\circ, v^*)\, \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} \\ p_y^* &= N(m^\circ, u^*)\, u_y^* + N(m^\circ, v^*)\, v_y^* = \frac{b \cdot N(m^\circ, u^*)}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} - N(m^\circ, v^*)\, \frac{b \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} \\ p_x'^* &= N(m^\circ, u'^*)\, u_x'^* + N(m^\circ, v'^*)\, v_x'^* = -N(m^\circ, v'^*)\, \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} \\ p_y'^* &= N(m^\circ, u'^*)\, u_y'^* + N(m^\circ, v'^*)\, v_y'^* = -\frac{b \cdot N(m^\circ, u'^*)}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} + N(m^\circ, v'^*)\, \frac{b \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Igualando $p_x^* = p_x'^*$ se obtiene:

$$N(m^\circ, v^*)\, \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} = N(m^\circ, v'^*)\, \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} \tag{3.2}$$

Es decir: $N(m^\circ, v^*) = N(m^\circ, v'^*)$

E igualando $p_y^* = p_y'^*$ y sabiendo *3.2*:

$$\frac{2\,b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\, N(m^\circ, u^*) = \frac{2\,b\,\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\, N(m^\circ, v^*) \tag{3.3}$$

$$N(m^\circ, u^*) = \frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\, N(m^\circ, v^*) \tag{3.4}$$

Si hacemos $b \to 0 \implies u^* = 0$ . Entonces, sustituyendo en *3.4*:

$$N(m^\circ, 0) \;=\; \frac{1 - \frac{a^2}{c^2}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \cdot N\!\left(m^\circ,\, \frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}}\right) \tag{3.5}$$

$V^*$ es la velocidad relativa de $N(m^\circ, v^*)$ respecto a $N(m^\circ, 0)$ , que llamaremos v.

$$v = \frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \implies v \cdot \frac{a^2}{c^2} - 2a + v = 0 \implies a = \frac{c^2}{v}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Sea $\lambda = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \frac{a^2}{c^2}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} &= \frac{1 - \frac{c^2}{v^2}\,(1 \pm 2\lambda + \lambda^2)}{1 + \frac{c^2}{v^2}\,(1 \pm 2\lambda + \lambda^2)} = \frac{1 - \frac{c^2}{v^2} \mp 2\,\frac{c^2}{v^2}\,\lambda - \frac{c^2}{v^2}\,\lambda^2}{1 + \frac{c^2}{v^2} \pm 2\,\frac{c^2}{v^2}\,\lambda - \frac{c^2}{v^2}\,(1 - \frac{v^2}{c^2})} = \\
&= \frac{-\frac{c^2}{v^2}\,\lambda^2 \mp \frac{c^2}{v^2}\,\lambda - \frac{c^2}{v^2}\,\lambda^2}{\frac{2\,c^2}{v^2}\,(1 \pm \lambda)} = \frac{\frac{2\,c^2}{v^2}\,\lambda\,(-\lambda \mp 1)}{\frac{2\,c^2}{v^2}\,(1 \pm \lambda)} = \mp\lambda = \mp\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$N(m^\circ, v) \;=\; \pm\frac{N(m^\circ, 0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.6}$$

El momento está definido como:

$$p_i \;=\; N(m^\circ, v) \cdot v_i \;=\; \pm\frac{N(m^\circ, 0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v_i \tag{3.7}$$

Desarrollando *3.7* en serie:

$$p_i \;=\; \pm N(m^\circ, 0) \cdot v_i \cdot (1 - \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} + ...) \tag{3.8}$$

Y por consideraciones clásicas (si $v \lll c$ ) se tiene:

$$p_{clasica} \;=\; p_{relativista} \;\implies\; m^\circ \cdot \vec{v} \;=\; N(m^\circ, 0) \cdot \vec{v}$$

por tanto:

$$m^\circ = N(m^\circ, 0) \tag{3.9}$$

y se debe tomar el signo positivo.

**Definición 4** *Se llama masa propia de una partícula a* $m^\circ = N(m^\circ, 0)$ *. Si representamos la masa relativista por* m *se tiene:* $m = N(m^\circ, v)$ *. Por tanto:*

$$m = \frac{m^\circ}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.10}$$

*El momento será:*

$$\vec{p} = \frac{m^\circ}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} \tag{3.11}$$

## 3.3. Energía cinética, propia y relativista

**Definición 5** *La energía cinética es la energía que adquiere una partícula por el hecho de estar en movimiento.*

*De esta definición se deduce que la energía cinética de un punto en reposo es cero.*

**Teorema 7** *La variación de energía cinética es igual al trabajo realizado.*

*Demostración.* Tenemos:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = d\vec{p} \cdot \vec{v} = \\ &= d\left(\frac{m^\circ \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \cdot \vec{v} = d\left(\frac{m^\circ \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) - \frac{m^\circ \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = d\left(\frac{m^\circ \cdot v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) - \frac{m^\circ \cdot v \cdot dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= d\left(\frac{m^\circ \cdot v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + d\left(m^\circ \cdot c^2 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = d\left(\frac{m^\circ \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \end{aligned}$$

Y por tanto, integrando:

$$W = \left[\frac{m^\circ \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]_{v_1}^{v_2}$$

Si representamos por $Ec\,(v)$ la energía cinética a velocidad $v$, se tiene:

$$Ec\,(v_2) - Ec\,(v_1) \quad = \quad W \tag{3.12}$$

Si $v_1 = 0 \implies Ec\,(v_1) = Ec\,(0) = 0$, entonces:

$$Ec\,(v) \quad = \quad \frac{m^\circ \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m^\circ \cdot c^2 \tag{3.13}$$

Para velocidades pequeñas:

$$\begin{aligned} Ec &= m^\circ \cdot c^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m^\circ \cdot c^2 \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2}\frac{v^4}{c^4} + ... \right) \right) = \\ &= m^\circ \cdot c^2 - m^\circ \cdot c^2 + m^\circ \cdot c^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + m^\circ \cdot c^2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{2}\frac{v^4}{c^4} + ... \approx \\ &\approx m^\circ \cdot c^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \;=\; \frac{1}{2} m^\circ \, v^2 \,, \end{aligned}$$

coincidiendo con la expresión clásica.

**Definición 6** *Se llama energía relativista a:*

$$E \quad = \quad \frac{m^\circ \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.14}$$

*Se llama energía propia $E^\circ$ a:*

$$E^\circ \quad = \quad m^\circ \cdot c^2 \tag{3.15}$$

*La energía cinética es la diferencia entre la energía relativista y la energía propia:*

$$Ec \quad = \quad E - E^\circ \tag{3.16}$$

# Capítulo 4

# El Espacio de Minkowski

## 4.1. Grupos ortogonales en espacios vectoriales

Se trata de definir, dado lo estudiado en los anteriores capítulos, una estructura geométrica que se desarrolle de manera natural y sea fácilmente interpretable.

**Definición 7** *Se llama tensor métrico a la forma cuadrática de matriz:*

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ | & | & | & | \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

*O, también:*

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

**Definición 8** *Se llama signatura de una forma cuadrática $Q$ al par $(p,\, q)$ tal que $p$ es el número de valores propios positivos de $Q$ y $q$ el número de valores propios negativos de $Q$.*

Sea $(E,\, f)$ (donde f es una forma cuadrática no degenerada con $p$ valores propios mayores que 0 y $q$ valores propios menores que 0) un espacio vectorial dotado de un tensor métrico de signatura $(p,\, q)$. Sea $u$ un endomorfismo de $E$.

**Definición 9** *Se llama operador adjunto de* u *a una aplicación* $u^*$ *tal que:*

$$f(u(x),\, y) \;=\; f(x,\, u^*(y)) \tag{4.1}$$

**Teorema 8** *Dado un endomorfismo* u *y un adjunto* $u^*$*.*

*Entonces:*

*1)* $u^*$ *es único.*

*2)* $u^*$ *es endomorfismo.*

*3)* $(u^*)^* = u$ *.*

*Demostración.*

1) Sean $u_1^*$, $u_1^*$ adjuntos de $u$. Tenemos:

$$f(u(x),\, y) \;=\; f(x,\, u_1^*(y)) = f(x,\, u_2^*)) \implies f(x,\, u_1^*(y) - u_2^*(y)) = 0$$

y por ser $f$ no degenerado $\implies u_1^* = u_2^*$

2) Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x,\, u^*(\alpha\, y + \beta\, \overline{y})) \;&=\; f(u(x),\, \alpha\, y + \beta\, \overline{y})) \;=\; \alpha\, f(u(x),\, y) + \beta\, f(u(v),\, \overline{y}) = \\ &=\; \alpha\, f(x,\, u^*(y)) + \beta\, f(x,\, u^*(\overline{y})) \;=\; f(x,\, \alpha\, u^*(y) + \beta\, u^*(\overline{y})) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$u^*(\alpha\, y + \beta\, \overline{y}) \;=\; \alpha\, u^*(y) + \beta\, u^*(\overline{y})$$

3) Tenemos:

$$f(u(x),\, y) \;=\; f(x,\, u^*(y)) \;=\; f(u^*(y),\, x) \;=\; f(y,\, (u^*)^*(x)) \;=\; f(u^{**}(x),\, y)$$

Por tanto:

$$u \;=\; u^{**}$$

**Definición 10** *Se dice que un endomorfismo* u *de* E *es una semejanza de multiplicador* $\alpha$ *si* $\forall\, x, y \in E \quad f(u(x), u(y)) \;=\; \alpha\, f(x, y)$

**Teorema 9** *Toda semejanza de multiplicador* $\alpha \neq 0$ *es biyectiva.*

*Demostración.* Tenemos:

$$f(u(x),\, u(y)) \;\;=\;\; f(x,\, u^*\, u(y)) \;=\; \alpha\, f(x,\, y) \;=\; f(x,\, \alpha\, y)$$

Por tanto:

$$u^*\, u(y) = \alpha\, y \implies u^* \circ u = \alpha\, I \implies u^{-1} = \frac{1}{\alpha}\, u^* \implies u \text{ es biyectiva} \Longrightarrow u \text{ es isomorfismo}$$

**Nota:** En lo que sigue, se utilizará la notación de Einsten (o convenio de Einstein):

$$a_{ij}\, b_{jk} \;\;=\;\; \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, b_{jk}$$

(se omiten los símbolos sumatorio, $\sum$, para índices repetidos).

**Definición 11** *Se dice que una transformación es ortogonal si es una semejanza de multiplicador* $\alpha = 1$ *.*

Estudiemos ahora como se relacionan las componentes de una transformación ortogonal.

$$\begin{aligned} f(u(x),\, y) \;&=\; f(x,\, u^*(y)) \;=\; f(x,\, u^{-1}(y)) \\ g_{ij}\, [u(x)]^i\, y^j \;&=\; g_{ij}\, x^i\, \left[u^{-1}(y)\right]^j \\ [u(x)] \;=\; u^i_s\, x^s \quad &; \quad \left(u^{-1}(y)\right)^j \;=\; \left[u^{-1}\right]^j_s\, x^s \end{aligned}$$

$$g_{ij}\, u^i_s\, x^s\, y^j \;=\; g_{ij}\, x^i\, (u^{-1})^j_s\, y^s \;=\; (\text{cambiando } \; i \to s \to j \to i) \;=\; g_{si}\, x^s\, (u^{-1})^i_j\, y^j$$

Entonces:

$$g_{ij}\, u^i_s \;\;=\;\; g_{si}\, (u^{-1})^i_j \tag{4.2}$$

Contrayendo índices:

$$g^{ks}\, g_{ij}\, u^i_s \;=\; g^{ks}\, g_{si}\, (u^{-1})^i_j \;=\; \delta^k_i\, (u^{-1})^i_j \;=\; (u^{-1})^k_j$$

Por tanto:

$$(u^{-1})^k_j \;=\; g^{ks}\, g_{ij}\, u^i_s \tag{4.3}$$

Que en forma matricial se expresa como:

$$u^{-1} \;=\; \left(f \circ u \circ f^{-1}\right) \tag{4.4}$$

De donde deducimos:

$$\begin{aligned} det\left(u^{-1}\right) \;&=\; det\left(f \circ u \circ f^{-1}\right) \;=\; det(u) \;\Longrightarrow \\ \Longrightarrow det\left(u^{-1}\right) \;&=\; \frac{1}{det(u)} \;\Longrightarrow\; (det(u))^2 \;=\; 1 \end{aligned}$$

Y, por tanto:

$$det(u) \;=\; \pm 1 \tag{4.5}$$

Por otra parte, contrayendo en *4.3* con $u^j_m$ se tiene:

$$(u^{-1})^k_j\, u^j_m \;=\; g^{ks}\, g_{ij}\, u^i_s\, u^j_m \;=\; \delta^k_m \tag{4.6}$$

Veamos cuantos parámetros se necesitan para determinar una transformación ortogonal. Tenemos una base en que $g_{ij} = \pm\, \delta_{ij}$ .

Sea $k, m = 1$ . Entonces $g_{ji}\, u^i_1\, u^j_1 = \pm 1$ (el signo depende del de $g_{11}$ ).

$$u^1_1\, u^1_1 + \;...\; + u^p_1\, u^p_1 - u^{p+1}_1\, u^{p+1}_1 - \;...\; - u^n_1\, u^n_1 \;=\; \pm 1$$

Por tanto, necesitamos $n{-}1$ parámetros para determinar la transformación ortogonal.

Veamos otro caso:

Sean $k,\, m = 1,\, 2$ . Entonces $g_{ji}\, u^i_1\, u^j_2 = 0$ ; $g_{ji}\, u^i_2\, u^j_2 = \pm 1$ . En este caso salen dos ecuaciones, por tanto se necesitan $n{-}2$ parámetros para determinar la transformación ortogonal.

Y si hacemos $k, m = 1, ..., n$, necesitaremos $n{-}n$ parámetros. Por tanto, el número de parámetros es:

$$N = (n-1) + (n-2) + \ ...\ + (n-n) = \frac{n\,(n-1)}{2} \tag{4.7}$$

## 4.2. El tiempo coordenado

**Definición 12** *Llamaremos espacio de Minkowski a un espacio vectorial real de dimensión 4 donde se ha definido un tensor métrico hiperbólico (es decir, de signatura (3,1)) que representaremos por* $\eta$ *.*

Estudiemos en primer lugar la estructura de una transformación ortogonal $u$. Consideraremos la base en que $\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \eta \circ u \circ \eta^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 & u_4^3 \\ u_1^4 & u_2^4 & u_3^4 & u_4^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & -u_4^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & -u_4^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 & -u_4^3 \\ -u_1^4 & -u_2^4 & -u_3^4 & u_4^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$u^{-1} = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & -u_4^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & -u_4^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 & -u_4^3 \\ -u_1^4 & -u_2^4 & -u_3^4 & u_4^4 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

**Proposición 1** *Las transformaciones de Lorentz son ortogonales en el espacio de Minkowski.*

*Demostración.* Si representamos las transformaciones de Lorentz por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ c\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{w/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{w/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ c\,t' \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

se tiene que son ortogonales en el espacio de Minkowski de determinante 1.

**Corolario 5** *Para obtener la transformación inversa de 4.9, basta con cambiar* $w$ *por* $-w$

*Demostración.* Trivial

La cuarta coordenada del espacio de Minkowski es $c\,t$, por lo que define a $t$ como tiempo coordenado.

Se puede probar que las transformaciones de Lorentz forman un grupo.

El número de parámetros que se necesitan para determinar una transformación de Lorentz son $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$, que son los tres ángulos de Euler y las tres componentes de la velocidad.

**Definición 13** *Una transformación de Lorentz* $u$ *se dice que es propia si* $det(u) = 1$, *y se dice que es impropia si* $det(u) = -1$.

**Teorema 10** *La condición necesaria y suficiente para que* $u$ *sea una transformación impropia de Lorentz es que* $u = \delta\, u_p$, *donde* $\delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *y* $u_p$ *una transformación propia.*

*Demostración.*

- Condición suficiente: Como $\delta$, $u_p$ son ortogonales $\Longrightarrow$ $u$ es ortogonal. Y, por tanto, $det(u) = det(\delta) \cdot det(u_p) = -1$.
- Condición necesaria: Si tenemos $u_i$ impropia, entonces $u = \delta\, u_i$ es propia. Y, por tanto, $u_i = \delta^{-1} \circ u = \delta \circ u$.

## 4.3. Métrica y tiempo propio. Dilatación del tiempo

**Definición 14** *Sean* $x^1,\, x^2,\, x^3,\, x^4 = c\,t$ *las coordenadas de un suceso en el espacio de Minkowski.*

*Se llama métrica a:*

$$d\,s^2 \;=\; \eta_{ij}\cdot d\,x^i\cdot d\,x^j \qquad \textit{con} \qquad \eta_{ij} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

*Se llama métrica espacial a:*

$$d\,\sigma^2 \;=\; \eta_{\alpha\beta}\cdot d\,x^\alpha\cdot d\,x^\beta \tag{4.11}$$

*<u>Nota:</u> Los subíndices latinos irán de 1 a 4, y los griegos de 1 a 3.*

**Definición 15** *Se llama tiempo propio al tiempo del observador medido por si mismo.*

Sean $x_0^1,\, x_0^2,\, x_0^3,\, x_0^4$ las coordenadas de un suceso en su sistema propio.

Entonces:

$$d\,x_0^1 \;=\; d\,x_0^2 \;=\; d\,x_0^3 \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad d\,s^2 \;=\; -c^2\cdot d\,t_0^2$$

Y, representando el tiempo propio por $\tau$:

$$-c^2\cdot d\,\tau^2 \;=\; d\,s^2 \tag{4.12}$$

Por otra parte, $d\,s^2 \;=\; d\,\sigma^2 - c^2\cdot d\,t_0^2$ en otro sistema.

Entonces tenemos:

$$-c^2\cdot d\,\tau^2 \;=\; \left(\frac{d\,\sigma^2}{d\,t^2} - c^2\right) d\,t^2 \;=\; (v^2 - c^2)\,d\,t^2 \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\; d\,\tau^2 \;=\; \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) d\,t^2 \;\Longrightarrow\; d\,\tau \;=\; \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; d\,t \;\Longrightarrow\; d\,t \;=\; \frac{d\,\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

El tiempo de un fenómeno observado en movimiento es más dilatado que si se observa en su sistema.

## 4.4. Clasificación de vectores y propiedades

**Definición 16** *Sea $x \in E$. Diremos que:*

- *$x$ es espacial si su métrica es $> 0$* $\quad \rightarrow \quad \eta_{ij}\, x^i\, x^j \,>\, 0\,.$
- *$x$ es isótropo si su métrica es $= 0$* $\quad \rightarrow \quad \eta_{ij}\, x^i\, x^j \,=\, 0\,.$
- *$x$ es temporal si su métrica es $< 0$* $\quad \rightarrow \quad \eta_{ij}\, x^i\, x^j \,<\, 0\,.$

*Nota: Es importante observar que esta clasificación, al depender de la métrica, es independiente del sistema coordenado elegido.*

**Teorema 11** *Es imposible la inversión causa-efecto.*

*Demostración.* Sea $(x_0,\, y_0,\, z_0,\, c\, t_0)$ un suceso causa de $(x,\, y,\, z,\, t)$. Sea $v$ la velocidad de propagación de la causa ($v \leq c$). Entonces:

$$\begin{aligned} s^2 &= v^2\,(t-t_0)^2 - c^2\,(t-t_0)^2 \,\leq\, 0 \\ \text{con} \quad s^2 &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - c^2\,(t-t_0)^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$t' - t'_0 \;=\; \frac{(t-t_0) - \frac{v}{c^2}\,(x-x_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Si $t - t_0 > 0$ entonces, como $x - x_0 = v\,(t-t_0)$ y como $v < c$, se tiene que $t' - t'_0 > 0$.

**Teorema 12** *Dado un vector temporal, existe un sistema coordenado donde dicho vector solo posee componente temporal.*

*Demostración.* Eligiendo convenientemente los ángulos de Euler, el vector se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda^4 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \left(\lambda^1\right)^2 - \left(\lambda^4\right)^2 \; < \; 0$$

Por otra parte:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{v/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda^4 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\lambda^1 + \frac{v}{c}\lambda^4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda^4 + \frac{v}{c}\lambda^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Entonces:

$$\lambda^1 + \frac{v}{c}\,\lambda^4 \;=\; 0 \;\;\Longrightarrow\;\; v \;=\; -c\,\frac{\lambda^1}{\lambda^4} \qquad \text{con} \quad |v| < c$$

por tanto es posible.

**Definición 17** *Se llama cono de luz al lugar geométrico de los vectores isótropos.*

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2 \;\;=\;\; 0 \tag{4.14}$$

*En este cono se distinguen dos hojas:*

- *Hoja orientada a futuro* $\quad x^4 > 0 \quad (c^+)\,.$
- *Hoja orientada a pasado* $\quad x^4 < 0 \quad (c^-)\,.$

*Los vectores temporales se encuentran en el interior del cono y los espaciales, en el exterior, constituyendo lo que se denomina zona de presente.*

**Teorema 13** *Un vector temporal no puede ser ortogonal a ningún vector temporal o isótropo, si todos los vectores están dirigidos a pasado o futuro.*

*Demostración.* Sea $\{u^i\}$ temporal, $\{v^i\}$ temporal o nulo. Tenemos:

$$\eta_{ij}\, u^i\, u^j \;<\; 0 \qquad = \qquad \eta_{ij}\, v^i\, v^j \;\leq\; 0 \tag{4.15}$$

Entonces:

$$\sum_{p=1}^{3} (u^p)^2 \;<\; \left(u^4\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum_{p=1}^{3} (u^p)^2\right)^{\frac{1}{2}} \;<\; \pm\, u^4 \tag{4.16}$$

$$\sum_{p=1}^{3} (v^p)^2 \;<\; \left(v^4\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum_{p=1}^{3} (v^p)^2\right)^{\frac{1}{2}} \;<\; \pm\, v^4 \tag{4.17}$$

con el signo $+$ para futuro y el $-$ para pasado.

Las componentes espaciales cumplen la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y sabiendo *4.16* y *4.17* tenemos:

$$\sum_{p=1}^{3} u^p\, v^p \;\leq\; \left(\sum_{p=1}^{3} (u^p)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p=1}^{3} (v^p)^2\right)^{\frac{1}{2}} \;<\; u^4\, v^4 \tag{4.18}$$

Y, por tanto:

$$\eta_{ij}\, u^i\, v^j \quad = \quad 0 \tag{4.19}$$

**Teorema 14** *Sean $u$ vector temporal y $v$ vector temporal o nulo. Si ambos están dirigidos al futuro (o pasado), entonces $u + v$ es temporal dirigido a futuro (o pasado).*

*Demostración.* Tenemos:

$$\eta_{ij}\,(u^i + v^i)\,(u^j + v^j) \;=\; \eta_{ij}\, u^i\, u^j + 2\,\eta_{ij}\, u^i v^j + \eta_{ij}\, v^i\, v^j \;<\; 0$$

Por tanto es temporal (la orientación es trivial).

**Teorema 15** *La suma de dos vectores isótropos de la misma orientación es un vector temporal o isótropo de la misma orientación.*

*Demostración.* La orientación es trivial.

Tenemos:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} u^\alpha\, u^\alpha \;<\; \left(u^4\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum_{\alpha=1}^{3} u^\alpha\, u^\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \pm\, u^4$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} v^\alpha\, v^\alpha \;<\; \left(v^4\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum_{\alpha=1}^{3} v^\alpha\, v^\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \pm\, v^4$$

Por tanto:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} u^\alpha\, v^\alpha \;\leq\; \left(\sum_{\alpha=1}^{3} u^\alpha\, u^\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} v^\alpha\, v^\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \sum_{\alpha=1}^{3} u^\alpha\, v^\alpha \;\leq\; u^4\, v^4 \quad\Longrightarrow\quad \eta_{ij}\, u^i\, v^j \;\leq\; 0$$

**Definición 18** *Se llama longitud minkowskiana de un vector a la raíz cuadrada positiva del valor absoluto de su métrica.*

*Un vector temporal o espacial se dice que es unitario si su longitud minkowskiana es igual a uno.*

**Teorema 16** *Sean* $\lambda$, $\mu$ *vectores unitarios temporales de la misma orientación.*

*Entonces* $\quad \lambda_i\, \mu^i \;\leq\; -1 \qquad (\lambda_i \;=\; \eta_{ij}\, \lambda^j)\,.$

*Demostración.* Tenemos que $\lambda_i\, \lambda^i = -1$ ; $\mu_i\, \mu^i = -1\,.$

Por tanto, existe la base tal que $\lambda^i = (0, 0, 0, \pm 1)\,.$

Entonces $\quad \lambda^i\, u_i \;=\; \pm\, \mu_4 \;=\; \mp\, \mu^4\,.$

Y como $\quad \eta_{ij}\, \mu^i\, \mu^j \;=\; \mu^p \mu^p - \left(\mu^4\right)^2 \;=\; -1$ , tenemos:

$$\mu^4 \;=\; \pm\sqrt{1 + \mu^p\, \mu^p} \quad\Longrightarrow\quad \lambda^i\, u^i \;\leq\; -1$$

**Teorema 17** *Sean* $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ *vectores temporales de la misma orientación, con* $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$ *.*

*Sean* $A$, $B$, $C$ *las longitudes minkowskianas de* $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ *respectivamente.*

*Entonces* $A \geq B + C$ *.*

*Y además, si* $\vec{C}$ *es isótropo, entonces* $A > B$ *.*

*Demostración.* Tenemos:

$$B^i \;=\; B\,\lambda^i \quad ; \quad C^i \;=\; C\,\mu^i \qquad ; \text{ con } \quad \lambda^i,\, \mu^i \quad \text{unitarios}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -A^2 \;&=\; A_i\,A^i \;=\; (B\,\lambda_i + C\,\mu_i)\,(B\,\lambda^i + C\,\mu^i) \;=\; -B^2 + 2\,B\,C\,\lambda_i\,\mu^i - C^2 \;\leq \\ &\leq\; -B^2 + 2\,B\,C - C^2 \;=\; -(B + C)^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$-A^2 \;\leq\; -(B + C)^2 \quad \Longrightarrow \quad A^2 \;\geq\; (B + C)^2 \quad \Longrightarrow \quad A \;\geq\; B + C$$

Y, si $C = 0$ entonces:

$$-A^2 \;=\; -B^2 + 2\,B_i\,C^i \;<\; -B^2 \quad \Longrightarrow \quad A > B$$

## 4.5. Cuadrivector velocidad, cuadrivector momento y propiedades

**Definición 19** *Se llama cuadrivector velocidad a un vector u de componentes contravariantes:*

$$u^i \;=\; \frac{d\,x^i}{d\,z}$$

*Su métrica es:*

$$\eta_{ij}\,\frac{dx^i\,dx^j}{dz^2} \;=\; \frac{ds^2}{dz^2} \;=\; -c^2$$

*Por tanto es temporal y dirigido a futuro.*

$$\vec{u} \;=\; \left( \frac{v^p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \,,\, \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{4.20}$$

**Definición 20** *Se llama cuadrivector momento a* $\vec{p} = m^\circ \cdot \vec{u}$ *.*

**Propiedades:**

**1)** $\vec{p}$ es temporal y de longitud minkowskiana $m^\circ c$ .

**2)** Sus componentes son $p = \left(p^\alpha,\, \frac{E}{c}\right)$ .

**3)** La conservación del momento relativista y de la energía relativista implican la conservación de del cuadrimomento (y viceversa).

**4)** Fisión nuclear, equivalencia entre masa y energía:

Consideremos una partícula $A$ en reposo que se escinde en dos: $B$, $C$ . Entonces:

$$p_A \;=\; p_B + p_C \quad\Longrightarrow\quad E_{(B+C)} \;=\; E_A^\circ \;=\; m_A^\circ\, c^2$$

Por tanto, la energía propia de $B$ y $C$ es:

$$E_{(B+C)}^\circ \;=\; (m_B^\circ + m_C^\circ)\; c^2$$

Por la desigualdad triangular:

$$m_A^\circ \cdot c \;\geq\; m_B^\circ \cdot c + m_C^\circ \cdot c$$

Las partículas $B$, $C$ están animadas de energía cinética (energía liberada):

$$E_{\textit{cinética}} \;=\; E_{B+C} - E_{B+C}^\circ \;=\; (m_A^\circ - m_B^\circ - m_C^\circ)\; c^2 \quad\geq\quad 0$$

Obteniendo:

$$E_l \;=\; c^2 \cdot \Delta\, m^\circ \tag{4.21}$$

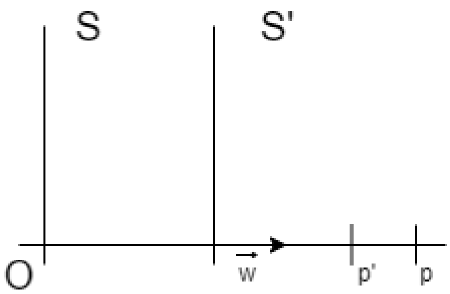


Figura 4.1: Figura propuesta para el estudio del vector de frecuencia y el cuadrimomento del fotón

## 4.6. Vector de frecuencias, cuadrimomento del fotón y propiedades

La ecuación de una onda plana es $e = a \cdot sen(\varphi)$ donde $\varphi$ es la fase $\varphi = 2\pi \left(t - \frac{d}{u}\right) \nu$, donde $\nu$ es la frecuencia, $d$ la distancia al foco y $u$ la velocidad.

Sean $p$ un punto solidario con $S$ y $p'$ con $S'$. Sea $O$ un foco emisor de ondas. El número de ondas que han pasado por $p$ al cabo de un tiempo $t$ será:

$$N = \frac{t - \frac{d}{u}}{T} = \left(t - \frac{d}{u}\right) \nu \tag{4.22}$$

siendo $T$ el periodo de oscilación.

Y, en $p'$:

$$N' = \left(t' - \frac{d'}{u'}\right) \nu' \tag{4.23}$$

En el instante $t$ en que $p$ y $p'$ coinciden:

$$\left(t - \frac{d}{u}\right) \nu = \left(t' - \frac{d'}{u'}\right) \nu' \tag{4.24}$$

"La fase de una onda es, salvo una constante, el número de ondas que ha pasado por un punto desde un instante inicial. En consecuencia, la fase es un invariante al cambiar de sistema inercial".

Sean $l_p$ los cosenos directores del vector $\vec{d}$ que une el foco $O$ con $p$:

$$\vec{d} \;=\; x_1\,\vec{i} + x_2\,\vec{j} + x_3\,\vec{k} \qquad \Longrightarrow \qquad d \;=\; x_p\,l_p \tag{4.25}$$

Multiplicando en *4.24* por $c$ y sustituyendo $d$ por *4.25* se obtiene:

$$\frac{\nu \cdot c \cdot l_p \cdot x_p}{u} - c \cdot t \cdot \nu \;=\; \frac{\nu\,' \cdot c \cdot l'_p \cdot x'_p}{u'} - c \cdot t' \cdot \nu\,' \tag{4.26}$$

Sea $\vec{f} = \left(\frac{c}{u} \cdot \nu \cdot l_p\,,\; \nu\right)$. A este vector $\vec{f}$ lo llamaremos vector de frecuencias.

**Definición 21** *Se define vector de frecuencias de una onda luminosa a:*

$$f^i \;=\; (\nu \cdot l_p\,,\; \nu) \tag{4.27}$$

*1) Sus componentes covariantes son:* $\quad f_i \;=\; \eta_{ij}\,f^j \;=\; (\nu \cdot l_p\,,\; -\nu)$

*2)* $\; f_i \cdot f^j \;=\; 0$

**Definición 22** *Llamamos fotón a una partícula de cuadrimomento* $p = \frac{h}{c}\,f$ *donde* $h$ *es la constante de Planck.*

**Propiedades:**

**1)** La masa propia del fotón es nula:

$$p_i \cdot p^i \;=\; \frac{h^2}{c^2} \cdot f_i \cdot f^i \;=\; 0 \;=\; m^\circ\,c$$

Por tanto $\quad m^\circ = 0\,.$

**2)** El momento relativista y la energía relativista son:

$$p_p \;=\; \frac{h\,\nu}{c}\,l_p \qquad ; \qquad E \;=\; h\,\nu \qquad \left(p^i = \left(p^l\,,\; \frac{E}{c}\right)\right)$$

**3)** La masa relativista del fotón es:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\,\nu}{c^2}$$

**4)** Aniquilación de la materia:

Sabemos que la suma de dos vectores isótropos puede dar uno temporal, esto es lo mismo que decir que un vector temporal puede descomponerse en dos vectores isótropos.

Sea una partícula de cuadrimomento $M^i$, que por ser temporal admitirá descomposición en dos vectores isótropos (anaquilación de materia) $p^i$, $p'^{\,i}$. Tenemos entonces:

$$p^i + p'^{\,i} = M^i \tag{4.28}$$

$p^i$, $p'^{\,i}$ serán los cuadrimomentos de dos fotones.

Consideremos la partícula en reposo: $M^p = 0 \quad ; \quad M^4 = m^\circ \cdot c$. Tenemos:

$$p^p + p'^{\,p} = 0 \tag{4.29}$$
$$p^4 + p'^{\,4} = m^\circ \cdot c \tag{4.30}$$

De *4.29* se tiene:

$$\frac{h\,\nu}{c}\,l_p + \frac{h\,\nu'}{c}\,l'_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu\,l_p + \nu'\,l'_p = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\nu}{\nu'} = -\frac{l'_p}{l_p} = -\frac{l'_1}{l_1} = -\frac{l'_2}{l_2} = -\frac{l'_3}{l_3}$$

Y, entonces:

$$\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 = \frac{l'^{\,2}_1}{l_1^2} = \frac{l'^{\,2}_2}{l_2^2} = \frac{l'^{\,2}_3}{l_3^2} = \frac{l'^{\,2}_1 + l'^{\,2}_2 + l_3^2}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \nu = \nu'$$

De *4.30* se tiene:

$$\frac{h\,\nu}{c} + \frac{h\,\nu'}{c} = m^\circ \cdot c \quad \Longrightarrow \quad 2\,h\,\nu = m^\circ\,c^2 \quad \Longrightarrow \quad \nu = \frac{m^\circ\,c^2}{2\,h}$$

Además: $l_p = -\,l'_p$.

Por tanto: “Una partícula en reposo se puede desintegrar en dos fotones iguales de sentido contrario”.

## 4.7. Fuerza de Minkowski y propiedades

**Definición 23** *Sea $P$ el cuadrimomento de una partícula.*

*Se llama fuerza de Minkowski a:*

$$\vec{\phi} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} \tag{4.31}$$

Estudiemos sus componentes (recordemos que los índices griegos van de 1 a 3, y los latinos, de 1 a 4):

$$\phi^\alpha = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = \frac{dP^\alpha}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = F^\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\phi_i\cdot u^i = \frac{d}{d\tau}\left(m^\circ\cdot u_i\right)u^i = m^\circ\cdot u_i\cdot\frac{du^i}{d\tau} = 0$$

$$\phi_i\cdot u^i = \frac{F_\alpha v^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \phi_4\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

Por tanto:

$$\phi_4 = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\sum_{\alpha=1}^{3}F^\alpha\cdot v^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\phi_4 = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Obteniendo entonces:

$$\phi^i = \left(\frac{F^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\ \frac{1}{c}\cdot\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{4.32}$$

**Propiedades:**

**1)** $\phi^i$ es espacial (por ser ortogonal al cuadrivector velocidad).

**2)** En el sistema propio $(\vec{v}=0)$, la fuerza de Minkowski se reduce a:

$$\vec{\phi} = (F^\alpha, 0) \quad ,$$

la parte espacial es la fuerza clásica y cumple $d\,\phi$.

# Capítulo 5

# Conclusiones

La relatividad especial nace como una teoría para dar consistencia a las evidencias experimentales tras una serie de experimentos fallidos que buscaban detectar la existencia del éter, medio material que se creía que llenaba el espacio para que las ondas luminosas pudieran propagarse.

Gracias al experimento de Michelson-Morley, se evidenció que no era posible sostener la existencia del éter como medio por el cual se propagaban las ondas luminosas, resultando de este experimento que la velocidad de la luz era constante en todos los sistemas inerciales, hecho incompatible con la mecánica clásica.

A raíz de estos resultados, Einstein, utilizando la invarianza de la velocidad, estableció unos principios para definir el concepto de simultaneidad y de equivalencia entre los sistemas inerciales, lo que constituyen los postulados de una nueva teoría llamada relatividad especial.

Para pasar de un sistema inercial a otro, se tienen las transformaciones de Lorentz. Dichas transformaciones tienen efectos sobre la medida de intervalos temporales y espaciales en distintos sistemas inerciales, resultando dichos resultados acordes con las transformaciones de Lorentz.

Además se introducen los conceptos de momento y masa relativista, así como la relación entre la masa y la energía.

Por último, como parte principal, se estudia la geometría del espacio de Minkowski, clasificándose los vectores espaciales, temporales e isótropos, construyendo estos el llamado cono de luz, lugar geométrico donde se encuentran las partículas luminosas o fotones.

Finalmente se define la fuerza de Minkowski como ejemplo de vector espacial. En este contexto y en esta geometría se satisface que la fuerza de Minkowski es la derivada del cuadrimomento con respecto al tiempo, hecho que no ocurre en la geometría euclídea ordinaria.

Aunque se ha expuesto un extenso análisis, el estudio aquí presentado no es completo, pues no se estudia de modo completo el grupo de isometrías en el espacio de Minkowski.

Cabe destacar como principal conclusión la existencia de geometrías no euclideanas que permiten la reducción a geometría de teorías, como en este caso la de la relatividad especial. Este hecho tiene una gran importancia puesto que hay más casos que no se modelan de modo correcto en la geometría usual, pero si en otras geometrías.

Como continuación de este trabajo, cabe el estudio de la variedad de Minkowski y el grupo de isometrías en un espacio de Minkowski, esto es el grupo de Poincaré, grupo de Lie cuyo estudio queda fuera de nuestro alcance.

# Bibliografía


[1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics.* Addison-Wesley Publishing Company, lnc., Second edition 1985.

[2] V. I. Arnold. *Mecanica Clasica y Métodos Matemáticos.* Pananinfo Editorial, 1984.

[3] H. Goldstein. *Mecanica Clasica segunda edicion.* Editorial Reverté, 1987.

[4] L. Landáu. *Curso de Física Teórica.* Editorial Reverté, Volumen 2, 1981.

[5] H. Minkoski and V. Petkov. *Space and Time: Minkowski's papers on relativity.* Minkowski Institute Press, 2012.

[6] R. Resnick. *Introduccion a la teoria de la relativodad especial.* Ed Limusa, 1977.

[7] H. Stephani. *Relativity: A introduction to especial an general relativity.* Cambridge University Press, Third edition 2004.

[8] T. Vives Sotera. *Astronomía de posición: espacio y tiempo.* Alhambra, 1971.