Grado en Matemática Computacional

Trabajo Final de Grado

# Operadores Hipercíclicos

*Autor:*
Sofía Castellano Catalán

*Tutor académico:*
Alejandro Miralles Montolío

Fecha de lectura: Octubre de 2022
Curso académico 2021/2022

## Resumen

Este documento corresponde al proyecto realizado en la asignatura MT1054 *Treball Final de Grau* del Grado en Matemática Computacional de la Universitat Jaume I.

El proyecto se dividirá en tres partes principales. En la primera se describirán varios conceptos básicos que serán necesarios para comprender el resto del documento. A continuación tendremos un primer apartado donde se describen los sistemas dinámicos lineales, los espacios de Banach, Hilbert y Fréchet y los operadores. Por último, encontraremos el apartado donde se presentarán los conceptos básicos sobre los operadores hipercíclicos y tres de los ejemplos más importantes.

## Palabras clave

Espacio de Banach, espacio de Hilbert, espacio de Fréchet, operadores hipercíclicos.

## Keywords

Banach space, Hilbert space, Fréchet space, hypercyclic operators.

# Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis padres, las personas más importantes de mi vida. Gracias a ellos por estar siempre ahí tanto en las buena como en las malas, por valorar mi potencial incluso más que yo. Son y siempre serán mi mayor fuente de apoyo. Creo que supieron ver mi pasión por las matemáticas mucho antes que yo. Siempre tendré el recuerdo de mi madre ayudándome y explicándome aquellas primeras divisiones que tanto se me resistían.

Aunque él no se lo crea, mi abuelo es el mejor matemático de todos. Su agilidad mental a la hora de realizar cálculos y su visión espacial no se pueden enseñar. Muchas gracias por estar siempre apoyándome y animándome. Es lo mejor que tengo ahora mismo y espero con entusiasmo la próxima vez que te vea para que me sigas contando esa gran cantidad de conocimientos que tienes.

Mi camino hacia las matemáticas se hizo realidad principalmente gracias a una profesora increíble que tuve durante la ESO. Muchas gracias Irene, sin ti no se si estaría donde estoy.

Por último quería agradecer a la universidad. Gracias por presentarme a esos compañeros que se han convertido en mucho más. La gran cantidad de horas juntos tanto dentro como fuera, las risas y los llantos. Convertimos a la UJI en nuestro segundo hogar, demasiadas horas entre sus paredes. Gracias a todos esos profesores que ha estado en mi camino tanto en la universidad como en todas mis etapas anteriores y gracias a Álex por ayudarme a dar fin a esta gran etapa.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Contexto y motivación del proyecto

En este documento se va a recoger el Trabajo de Final de Grado, cuyo objetivo principal es el estudio de los operadores hipercíclicos.

El trabajo se centra en diversos aspectos de la topología y de los operadores lineales en el ámbito de las funciones derivables de variable compleja.

Se introduce el concepto de operador hipercíclico que aparece por primera vez a partir del trabajo de Birkhoff de 1929. En él prueba que existe una función entera $f$ de manera que cualquier función $g$ entera puede aproximarse en compactos por traslaciones de $f$. Después, MacLane probó en 1952 un resultado similar con derivadas de forma que existe una función entera $f$ de manera que cualquier función $g$ entera se puede aproximar en compactos por derivadas de $f$.

Para poder realizar este trabajo, me he ayudado de diversas fuentes de información: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

# Capítulo 2

# Nociones básicas

En este capítulo daremos diversos conceptos básicos para el desarrollo del trabajo.

**Definición 1** *Definimos un* ***espacio métrico*** *como un par* $(X, d)$ *donde* $X$ *es un conjunto no vacío y* $d$ *es una función real definida en* $X \times X$*, llamada distancia o métrica, y que satisface los siguientes axiomas:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in X$*, y* $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todo* $x, y, z \in X$

En ocasiones denotaremos por $X$ simplemente al espacio métrico $(X, d)$ cuando esté clara la distancia subyacente.

**Definición 2** *Un* ***sistema dinámico discreto*** *es un par (X, T) donde* $T : X \longrightarrow X$ *es una aplicación continua y* $(X, d)$ *es un espacio métrico.*

También escribiremos simplemente $T$ para denotar al sistema dinámico $(X, T)$ cuando quede claro el espacio $X$.

Definimos las iteraciones $T^n : X \longrightarrow X$ con $n \geq 0$ que vienen dadas por $T^n = T \circ ... \circ T$ (iteración n-ésima) donde $T^0 = I$ es la identidad en $X$.

**Definición 3** *Consideramos el sistema dinámico* $T : X \longrightarrow X$*. Para* $x \in X$*, llamaremos* ***órbita*** *de* $x$ *sobre* $T$ *a* $orb(x, T) = \{x, T(x), T^2(x), ...\}$.

**Definición 4** *Dado un sistema dinámico* $(X, T)$*, diremos que* $X$ *tiene una* ***órbita densa*** *si existe un* $x \in X$ *de manera que dado cualquier* $y \in X$*, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ *tal que* $d(T^n(x), y) < \epsilon$.

**Definición 5** *Sea* $X$ *un espacio topológico. Decimos que* $X$ *es un* ***espacio separable*** *si existe un conjunto* $D \subseteq X$ *tal que* $D$ *es numerable y denso en* $X$.

**Proposición 1** *Si* $(X, T)$ *es un sistema dinámico y existe una órbita densa, entonces el espacio* $X$ *es separable.*

**Ejemplo 1**

1. *El espacio métrico* $\mathbb{R}$ *es separable porque el subconjunto* $\mathbb{Q}$ *es numerable y denso. Es denso debido a que dados* $x \in \mathbb{R}$ *y* $r > 0$ *encontramos que existe* $q \in (x - r, x + r) \cap \mathbb{Q}$*. Entonces* $q \in \mathbb{Q}$ *y* $d(x, q) < r$.

2. *Sea* $n \in \mathbb{N}$*. El espacio métrico* $\mathbb{R}^n$ *es separable porque* $\mathbb{Q}^n$ *es un subconjunto numerable y denso. Es denso porque dados* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $r > 0$*. Pongamos* $\delta = r/\sqrt{n}$*. Para cada* $j \in \{1, ..., n\}$ *encontramos* $y_j \in (x_j - \delta, x_j + \delta)$*. Entonces* $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{Q}^n$ *y*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} < \sqrt{n\frac{r^2}{n}} = r.$$

3. *El espacio métrico* $\mathbb{C}$ *es separable porque el subconjunto* $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ *es numerable y denso. En este caso no hace ver que es denso ya que se puede identificar* $\mathbb{C}$ *con* $\mathbb{R}^2$.

**Definición 6** *Denominamos a un sistema dinámico* $T : X \longrightarrow X$ ***topológicamente transitivo*** *si, para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos* $U, V$ *de* $X$*, existe algún* $n \geq 0$ *de forma que* $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

**Definición 7** *Dado un abierto* $U$ *de* $\mathbb{C}$ *y una función compleja* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$*, diremos que* $f$ *tiene una* ***singularidad aislada*** *en* $z = a$ *si* $f$ *no es diferenciable en* $a$ *y para todo entorno* $V$ *de* $a$*, la función es diferenciable en* $V - \{a\}$.

**Definición 8** *Sea $f(z)$ una función con una singularidad aislada en $z = a$. Decimos que $z = a$ es un* ***polo de orden n*** *si $lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$ y si existe $lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) \neq 0$.*

**Definición 9** *Llamamos* ***función racional*** *a aquella función compleja $f$ formada por un cociente de polinomios de la forma $f(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_n z^n}$*

Se define al plano complejo extendido como el conjunto dotado con el punto $z_\infty = \infty$ como: $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

**Teorema 1** *(Teorema de Runge)*
*Sea $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto y $A$ un conjunto que contiene al menos un punto de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$. Sea $f$ una función diferenciable en algún entorno de $K$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una función racional $h$ con polos solo en los puntos de $A$ tales que $sup_{z \in K} |f(z) - h(z)| < \epsilon$.*

# Capítulo 3

# Sistemas dinámicos lineales

En los sistemas dinámicos debe haber una estructura lineal en el espacio subyacente como es el caso de los espacios de Banach y los espacios de Hilbert. Existen ejemplos de sistemas dinámicos lineales interesantes definidos en espacios de tipo más general denominados espacios de Fréchet. Todos estos espacios los iremos definiendo a lo largo de este capítulo.

## 3.1. Espacios de Banach y de Fréchet

**Definición 10** *Decimos que la función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ en un espacio vectorial $X$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es una **seminorma** si para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

Una **norma** es una seminorma $p$ que cumple que si $p(x) = 0$ entonces tenemos que $x = 0$.

**Definición 11** *Un espacio **completo** es aquel en el que las sucesiones de Cauchy son convergentes en un punto de este espacio.*

Como ejemplos tenemos que el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica euclídea es completo mientras que el espacio $\mathbb{Q}$ no lo es.

**Definición 12** *Un* ***espacio de Banach*** *es un espacio vectorial* $X$ *dotado con una norma, denotada por* $\|\cdot\|$*, cuya topología está definida por la métrica* $d(x,y) := \|x-y\|$ *con* $x, y \in X$ *y el cual es completo en esa métrica.*

*Si concretamente tenemos que la norma de un espacio de Banach deriva de un producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *mediante* $\|x\| := \sqrt{\langle x, y\rangle}$*, nos encontramos con un caso de espacio de Banach denominado* ***espacio de Hilbert****.*

**Ejemplo 2** *Ejemplos de espacios de Banach y de Hilbert.*
*(a) Sea* $1 \leq p < \infty$*. Entonces el espacio* $\ell^P$ *viene dado por el conjunto:*

$$\ell^p := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

*dotado con la norma* $\|x\| := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$*, es un espacio de Banach. En particular,* $\ell^2$ *es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por* $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$*.*

*(b) El espacio* $\ell^{\infty} := \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \; ; \; sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\}$ *de sucesiones acotadas, dotado con la norma* $\|x\| := sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$*, es un espacio de Banach. Concretamente,* $\ell^{\infty}$ *es un ejemplo de espacio no separable. Por lo tanto, no pueden existir operadores hipercíclicos en* $\ell^{\infty}$*.*

**Proposición 2** $\ell^p$ *es separable.*
*En el espacio* $\ell^p$ *visto en el primer apartado del ejemplo anterior tenemos que la sucesión finita* $(x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$*,* $n \geq 1$*, constituye un subconjunto denso. Considerando solo la sucesiones finitas con entradas de* $\mathbb{Q}$ *o* $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$*, vemos que que cualquier* $\ell^p$*,* $1 \leq p < \infty$ *es separable.*

**Definición 13** *Un* ***espacio de Fréchet*** *es un espacio vectorial* $X$ *dotado con una sucesión separante* $p_n$ *de seminormas, es decir, que para todo* $x \in X \setminus \{0\}$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $p_n(x) > 0$*. Además, es completo con la métrica (i) dada posteriormente.*

El concepto de **espacio de Fréchet** se trata de una generalización del concepto de espacio de Banach al definir la topología a través de una sucesión $(p_n)_n$ de seminormas. Un espacio de Banach siempre es un espacio de Fréchet pero esto no ocurre en le caso contrario. Estas seminormas las podemos considerar siempre crecientes, si es necesario, considerando $max_{k\leq n}p_k$. Además, se supone que la sucesión es separante, es decir, si $p_n(x) = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $x = 0$. Se puede ver que,

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} min(1, p_n(x-y)) \qquad (i)$$

define una métrica en $X$. Entre otras características, una de las más importantes es la traslación invariante, esto quiere decir que no varía aunque se produzca un desplazamiento.

$$d(x,y) = d(x+z, y+z) \qquad \text{para todo } x,y,z \in X$$

**Lema 1** *Sea $X$ un espacio de Fréchet y consideramos la sucesión $p_n$ de sus seminormas asociadas en $X$. Sea $x_k, x \in X, k \geq 1$ y $U \in X$. Entonces:*

1. *$x_k \to x$ si y solo si $p_n(x_k - x) \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$ para todo $n \geq 1$.*
2. *$(x_k)_k$ es una sucesión de Cauchy si y solo si $p_n(x_k - x_l) \longrightarrow 0$ cuando $k,l \longrightarrow \infty$ para todo $n \geq 1$.*
3. *$U$ es un entorno de $x$ si y solo si existen $n \geq 1$ y $\epsilon > 0$ tales que $\{y \in X : p_n(y-x) < \epsilon\} \subset U$.*

**Ejemplo 3** *El espacio de funciones enteras*

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/f \text{ } \textit{diferenciable} \text{ } \}$$

*es un espacio de Fréchet.*

La topología $\tau_c$ del espacio $H(\mathbb{C})$ viene dada por la topología de la convergencia uniforme en compactos. Para describirla basta tomar para todo $n \in \mathbb{N}$ los compactos dados por $K_n = \overline{D(0,n)}$ y las seminormas asociadas vendrían dadas por $p_n(f) = sup_{|z| \leq n}|f(z)|$. Es decir $f_k \xrightarrow{\tau_c} f$ si para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n(f_k - f) \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty \iff sup_{|z|\leq n}|f_k(z) - f(z)| \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$. Por tanto, $(H(\mathbb{C}), \tau_c)$ es un espacio de Fréchet.

Partiendo de cómo hemos definido la métrica en un espacio de Banach, vamos a definir también una función similar a la norma estableciendo

$$\|x\| := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, min(1, p_n(x)), \qquad x \in X \qquad (ii)$$

de forma que $d(x,y) = \|x - y\|$

La función $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por (ii) satisface que, para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

2. $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ si $\|\lambda\| \leq 1$;

3. $lim_{\lambda \to 0} \|\lambda x\| = 0$;

4. $\|x\| = 0$ implica que $x = 0$.

La función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ en el espacio vectorial $X$ que satisface las condiciones anteriores se llama **F-norma**.

La notación de una F-norma tiene la ventaja de que podemos argumentar en gran medida como si estuviéramos trabajando en un espacio de Banach. Tan solo debemos tener cuidado con la homogeneidad positiva de una norma que no es aplicable en este caso. En la mayoría de casos, no necesitaremos esta propiedad por lo que podemos reemplazarla por una más débil que se deduce directamente de las dos primeras propiedades anteriores:

Para todo $x, \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\qquad \|\lambda x\| \leq (|\lambda| + 1) \, \|x\|$

## 3.2. Operadores

En este apartado describiremos los operadores entre espacios de Fréchet que utilizaremos en el trabajo.

**Definición 14** *Dados dos espacios de Fréchet $X$ e $Y$, una aplicación lineal continua $T : X \longrightarrow Y$ suele llamarse* ***operador u operador lineal****. El espacio de todos los operadores se denota por $L(X,Y)$. Si $Y = X$, entonces denotamos simplemente $L(X) = L(X,X)$*

**Definición 15** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios de Fréchet. Decimos que el operador $T$ es* ***acotado entre espacios de Fréchet*** *si para toda seminorma $p_n$ se tiene que $p_n(T(x)) \leq M_n p_n(x)$ con $n \geq 1$ y $M_n > 0$.*

**Proposición 3** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios de Fréchet. El operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ es continuo si y solo si es acotado.*

**Ejemplo 4**

*(a) La aplicación $T : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ dada por $T(f) = f'$ es un operador lineal.*

*(b) Dado $a \in \mathbb{C}$, la aplicación de traslación $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ definida como $T_a(f) = f(z + a)$, es un operador lineal en $H(\mathbb{C})$.*

**Definición 16** *Definimos como **sistema dinámico lineal** al par $(X, T)$ que consta de un espacio de Fréchet $X$ separable y un operador $T : X \longrightarrow X$.*

A partir de este punto, todos los operadores que consideremos estarán definidos en un espacio de Fréchet separable a no ser que se indique lo contrario.

# Capítulo 4

# Operadores hipercíclicos y Teorema de Birkhoff

## 4.1. Definición y teoremas

**Definición 17** *Sea $X$ un espacio de Fréchet. Diremos que un operador lineal $T : X \longrightarrow X$ es* ***hipercíclico*** *si existe algún $x_0 \in X$ tal que su órbita $\{x_0, T(x_0), T^2(x_0), T^3(x_0), ...\}$ es densa en $X$. En este caso diremos que $x_0$ es un* ***vector hipercíclico*** *para $T$ y el conjunto de vectores hipercíclicos para $T$ lo denotaremos por $HC(T)$.*

**Nota**

Si $T$ es hipercíclico, entonces claramente $X$ debe ser separable ya que debe existir una órbita (y por tanto un conjunto numerable) densa en $X$.

La órbita de un vector hipercíclico $x_0 \in X$ será densa cuando para todo $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ de forma que $d(T^n(x_0), x) < \epsilon$.

El siguiente resultado nos permitirá dar una condición sencilla en términos de la hiperciclicidad del concepto de transitividad topológica.

**Teorema 2** *Teorema de transitividad de Birkhoff (1920)*
*Sea $X$ un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal. $T$ es hipercíclico si y solo si es topológicamente transitivo.*

Este teorema de transitividad será nuestra principal herramienta para demostrar la hiperciclicidad de un operador.

## 4.2. Resultados principales

Los primeros ejemplos de operadores hipercíclicos fueron estudiados por G. D. Birkhoff en 1929, G. R. MacLane en 1959 y S. Rolewicz en 1969.

### 4.2.1. Operador traslación (Birkhoff)

Este operador fue estudiado por G. D. Birkhoff en 1929. Su resultado resulta sorprendente dado que nos asegura la existencia de una función universal que, en todo conjunto compacto, su traslación se aproxima a cualquier función entera tanto como se desee.

**Teorema 3**
*Existe una función entera $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que, para cualquier función entera $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, existe una sucesión $(p_n)_n$ en $\mathbb{C}$ tal que $lim_n f(p + p_n) = g(p)$ uniformemente en conjuntos compactos de $\mathbb{C}$.*

*Demostración.* Para realizar esta demostración, utilizaremos el teorema de Birkhoff visto anteriormente. Por lo tanto, será suficiente probar que el operador es topológicamente transitivo.

Cogemos aleatoriamente dos conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset H(\mathbb{C})$ y fijamos $f \in U$, $g \in V$. Por cómo está definida la topología en $H(\mathbb{C})$ existe un disco cerrado $K$ centrado en 0 y un $\epsilon > 0$ de forma que la función entera $h$ pertenece a $U$ o a $V$ cuando sea que $sup_{z\in K}|f(z)-h(z)| < \epsilon$ o $sup_{z\in K}|g(z) - h(z)| < \epsilon$ respectivamente.

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquier natural de forma que $K$ y $K + na$ sean discos disjuntos. Considerando la función definida como $f$ en el entorno de $K$ y por $z \longrightarrow g(z - na)$ en un entorno de $K + na$, por el teorema de Runge, sabemos que existe un polinomio $p$ tal que $sup_{z\in K}|f(z) - p(z)| < \epsilon$ y $sup_{z\in K+na}|g(z-na)-p(z)| < \epsilon$ y por lo tanto también $sup_{z\in K}|g(z)-(T_a^n p)(z)| = sup_{z\in K}|g(z)-p(z + na)| < \epsilon$.

Esto prueba que $p \in U$ y $T_a^n p \in V$, por lo tanto $T_a$ es topológicamente transitivo. Dado que $H(\mathbb{C})$ es un espacio de Fréchet separable, $T_a$ es hipercíclico. □

### 4.2.2. Operador diferencial (MacLane)

Este operador fue estudiado por G. R. MacLane en 1952.

**Teorema 4**
*El operador derivada $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ es hipercíclico.*

*Demostración.* Consideramos el operador diferencial $D : f \longrightarrow f'$ en $H(\mathbb{C})$. Como los polinomios son densos en $H(\mathbb{C})$, dados dos conjuntos aleatorios no vacíos $U, V \subset H(\mathbb{C})$, existen polinomios $p \in U$ y $q \in V$, $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ y $q(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k$.

Sea $n \geq N+1$ aleatorio, entonces el polinomio $r(z) = p(z) + \sum_{k=0}^{N} \dfrac{k!\ b_k}{(k+n)!} z^{k+n}$ tiene la propiedad que $D^n r = q$. Además, para cualquier $R > 0$ tenemos que

$$sup_{|z| \leq R} |r(z) - p(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{k!\ |b_k|}{(k+n)!} R^{k+n} \longrightarrow 0$$

a medida que $n \longrightarrow \infty$. Así, si $n$ es suficientemente grande, entonces $r \in U$ y $D^n r \in V$. Esto implica que D es hipercíclico. $\square$

### 4.2.3. Operador "backward shift"(Rolewicz)

Se trata de un operador que fue estudiado por S. Rolewicz en el año 1969. Es el primer operador hipercíclico conocido en espacios de Hilbert.

**Teorema 5**
*Si $T = \lambda B$ es el operador backward shift en $\ell^p$ definido como $T(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$ entonces $T$ es hipercíclico para todo número complejo $\lambda$ de módulo mayor que la unidad.*

*Demostración.* En los espacios $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$ o $X = c_0$ consideramos el múltiplo $T = \lambda B : X \longrightarrow X, \quad (x_1, x_2, x_3, ...) \longrightarrow \lambda(x_2, x_3, x_4, ...)$, del *backward shift*, donde $\lambda \in \mathbb{K}$. Primero, si $|\lambda| \leq 1$ entonces $\|T^n x\| = |\lambda|^n \ \|B^n x\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ y $n \geq 0$. Por lo tanto, $T$ no puede ser hipercíclico en este caso.

Por otro lado, $T$ es hipercíclico siempre que $|\lambda| > 1$. De hecho, si $U, V \subset X$ son conjuntos abiertos no vacíos, podemos encontrar un $x \in U$ y un $y \in V$ de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_N, 0, 0, ...)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_N, 0, 0, ...)$, para algún $N \in \mathbb{N}$.

Sea $n \geq N$ aleatorio. Definiendo $z \in X$ por $z_k = x_k$ si $1 \leq k \leq N$, $z_k = \lambda^{-n}\ y_{k-n}$ si $n+1 \leq k \leq n+N$ y $z_k = 0$ de lo contrario, obtenemos una sucesión con $T^n z = y$. Además, $\|x - z\| = |\lambda|^{-n}\|y\| \longrightarrow 0$ a medida que $n \longrightarrow \infty$. Así, si $n$ es lo suficientemente grande, entonces $z \in U$ y $T^n z \in V$. Esto muestra que $T$ es topológicamente transitiva; dado que los espacios subyacentes son espacios de Banach separables, $T$ es hipercíclico. $\square$

# Capítulo 5

# Conclusiones

Primero de todo, cabe destacar todo lo aprendido a lo largo de este trabajo. Comenzamos con unos conceptos básicos que ya conocíamos que nos ayudaron a entender cuál era el objeto de estudio. Una vez que lo comprendimos, llegó el momento de la explicación de cómo se llegaban a esos resultados. Todos los nuevos conceptos aprendidos que hemos ido necesitando a lo largo del proyecto han sido una ampliación de los adquiridos por el grado que han resultado de lo más interesantes y curiosos.

Como bien hemos ido ya introduciendo al principio del todo, íbamos a llegar a la explicación de los resultados tan curiosos y sorprendentes que se pueden obtener a partir de los operadores hipercíclicos. Entre los resultados ya destacados, recalcaríamos el operador traslación y el diferencial.

Con respecto al operador traslación tenemos que partiendo del espacio $H(\mathbb{C})$ y considerando el operador de traslación dado por $T_a(f) = f(z+a)$, $a \neq 0$. Decimos que existe $f_0 \in H(\mathbb{C})$ entonces para todo $\epsilon > 0$, $\mathbb{K}$ compacto de $\mathbb{C}$ (un espacio de Fréchet) y para todo $g \in H(\mathbb{C})$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $|f_0(z+n_0) - g(z)| < \epsilon$ para todo $z \in \mathbb{K}$. De este modo estamos encontrando una aproximación para cualquier función derivable.

Por otro lado, el operador diferencial nos ofrece un resultado similar. Partiendo del operador diferencial $D : f \longrightarrow f'$ en $H(\mathbb{C})$. Al igual que antes, partimos de que existe un $f_0 \in H(\mathbb{C})$ entonces para todo $\epsilon > 0$ $\mathbb{K}$ compacto de $\mathbb{C}$ (un espacio de Fréchet) y para todo $g \in H(\mathbb{C})$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $|f_0^{n_0)}(z) - g(z)| < \epsilon$ para todo $z \in \mathbb{K}$ o equivalentemente $\|f_0^{n_0)} - g\|_z < \epsilon$. Por lo que tenemos también una aproximación para cualquier función derivable compleja.

Aquí tan solo estamos plasmando como se originó todo el estudio alrededor de los operadores hipercíclicos. Actualmente, a partir del nuevo siglo, estos estudios se han retomado y modernizado.

# Bibliografía


[1] Tomás Domínguez Benavides y Luis Bernal González. Espacios de hilbert. https://grupo.us.es/gfqm127/dir_php/docencia/archivos/1224067932-AF-Tema%201-Teoria.pdf. Consulta: 3 de Octubre de 2022.

[2] Alberto Conejero, Félix Martínez, Alfredo Peris y Macarena Trujillo. Hiperciclicidad y caos de operadores. https://www.uv.es/functanalys/encuentros/2008/hiperciclicidad_y_caos_operadores.pdf. Consulta: 20 de Septiembre de 2022.

[3] FJ González. Análisis funcional en espacios de banach. *Granada: Universidad de Granada*, 2010.

[4] Karl-G Grosse-Erdmann and Alfred Peris Manguillot. *Linear chaos*. Springer Science & Business Media, 2011.

[5] Jana Rodrigez Hertz. Introducción a los sistemas dinámicos. https://www.fing.edu.uy/~jana/www/UBA_files/2012UBA_2.pdf. Consulta: 26 de Septiembre de 2022.

[6] M. Molero, A. Salvador, T. Menarguez y L. Garmendia. Singularidades y residuos. http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/fdistancia/pie/Analisis%20matematico/Temas/C05_Residuos.pdf. Consulta: 10 de Octubre de 2022.

[7] Félix Martínez-Giménez. Operadores hipercíclicos en espacios de fréchet. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 33(1):51–76, 1999.

[8] Rafael Payá Albert. Apuntes de análisis funcional. https://www.ugr.es/~dpto_am/OLD/docencia/Apuntes/Analisis_Funcional_Paya.pdf. Consulta: 29 de Septiembre de 2022.

[9] Universidad Nacional de Rosario. Matemática aplicada ii. https://www.fceia.unr.edu.ar/~fismat2/apuntes/apun3-fismat2.pdf. Consulta: 3 de Octubre de 2022.