Máster de Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Máster - Curso 2021/2022

De lo finito a lo infinito. Aprendiendo con fractales

Autor: **Jorge Ramos Canós**

Tutor: **Gil Lorenzo Valentín**

Resumen

Las asignatura de matemáticas es una de las que acompañan al estudiantado a lo largo de toda su trayectoria educativa, sin embargo, en muchas ocasiones es vista como una asignatura abstracta y compleja que puede generar cierto rechazo. Este trabajo presenta una actividad cuyo objetivo principal será mejorar la actitud de los alumnos hacia las matemáticas a partir de los fractales. En este documento podemos encontrar una introducción teórica a los fractales, un análisis de las dificultades de los estudiantes con la asignatura, una revisión de estudios o trabajos que avalen el uso de fractales para la enseñanza de matemáticas en la educación secundaria. A continuación se encuentra una actividad basada en el trabajo colaborativo que tiene como tema central los fractales. Por último podremos encontrar algunas conclusiones junto a mi propia valoración personal del trabajo.

Índice

1. Introducción

Las matemáticas son una disciplina que se encuentran presentes hayá donde miremos en el mundo que nos rodea, y que han acompañado al ser humano a lo largo de toda su historia. Es por esto por lo que es lógico pensar que siempre han formado una parte fundamental de la educación. De hecho, si nos fijamos en la eduación básica, son una asignatura que se presenta como obligatoria en el currículum [2] (Decreto 87/2015, 2015) hasta finalizar las etapas de educación obligatoria, sigue presente en algunas ramas de Bachillerato, e incluso también aparecen asignaturas de matemáticas en muchos grados universitarios. Sin embargo, a pesar de ser una ciencia básica presente allá donde miremos, no siempre resulta tan intuitiva como podríamos pensar y se puede convertir en algo abstracto alejado de la realidad de los y las estudiantes.

Este trabajo pretende ofrecer un material didáctico para trabajar en el aula de matemáticas en 3º o 4º de ESO o en 1º de bachillerato con el objetivo de mejorar la precepción de los estudiantes de la asignatura de matemáticas. Para poder alcanzar el objetivo, primero se ha realizado una revisión bibliográfica sobre dificultades en el aprendizaje de matemáticas. Tras la lectura de [1] (Carrillo, 2009) y [21] (Socas, 2010). se ha concluido que algunas de las dificultades que encontramos a la hora de aprender matemáticas son:

- El aprendizaje jerárquico de la asignatura.
- Que el alumnado no esté preparado para el nivel de abstracción que exige la asignatura.
- Ideas preconcebidas que puede tener el alumnado sobre la asignatura o sus capacidades para superarla.
- Falta de destreza para la resulución de problemas.
- Que el o la docente no siga una metodología decuada para el alumnado o que no la ejecute correctamente.

Esta serie de dificultades que son las que me llevaron a elegir como temática los fractales, por que se encuentran muy presentes en el mundo que nos rodea, lo que puede hacer que se conviertan en un concepto atractivo para los alumnos y alumnas. Además, pueden entenderse desde un enfoque intuitivo y poco formal, y de ahí pasar poco a poco a su formalización, haciendo que el alumnado obtenga un mejor aprendizaje de este concepto matemático formal.

En el marco teórico de este trabajo (sección 2) encontramos una introducción teórica a los fractales, partiendo del factor de autosimilitud que estableció Richardson [18] (Richardson, 1961) en las curvas y llegando a la definición formal de fractal que dio Mandelbrot [11] (Mandelbrot, 1975). Esta sección enseña los conceptos básicos que deberíamos conocer sobre los fractales (dimensión, propiedades...) y ofrece una caracterización de los fractales (definición 2.2) que es la que luego se propone utilizar para trabajar en el aula de secundaria.

Dentro de este mismo marco teórico también podemos encontrar múltiples ejemplos de fractales en la naturaleza, ejemplos de fractales matemáticos e incluso algunas de sus aplicaciones más destacables.

Antes de empezar con la confección de la actividad, se buscaron antecedentes que justificaran que el tema de los fractales podía ser beneficioso para el alumnado de secundaria. En [17] (Reda,

2014) encontramos un estudio que nos explica que beneficios puede tener trabajar los fractales en secundaria y en [22] (Zapata-Ros, 2015) podemos ver una propuesta de actividad con fractales para trabajar con alumnado de secundaria. También se encontraron algunos ejemplos de centros que habían puesto en práctica actividades relacionadas con los fractales, como es el caso de [20] (Salesianos Burriana, 2018) y [8] (IES Broch i Llop, 2019).
Los objetivos que se buscan para esta actividad son: mejorar la actitud de los alumnos y alumnas hacia las matemáticas, fomentar el trabajo en equipo y potenciar su capacidad para realizar razonamientos matemáticos. Para cubir estos objetivos se ha confeccionado una actividad que tiene partes de trabajo individual y partes de trabajo cooperativo.
La actividad constará de un total de 7 sesiones. Las primeras irán destinadas a que los alumnos y las alumnas sean capaces de buscar información sobre los fractales y construir su propia concepción de lo que son, mientras que el docente se encargará de que finalmente estas ideas que vayan construyendo sean correctas. Después dispondremos de sesiones en las que podrán trabajar con un fractal concreto, es decir, estudiarlo y obtener algunas de sus propiedades. A continuación deberán de crear un fractal con material y buscar información sobre el mismo para exponerla en clase al resto de compañeros y compañeras del aula. Para finalizar, realizarán una evaluación de los concocimientos, que junto al resto de partes de la actividad confeccionará la calificación que cada alumno o alumna obtendrá en esta actividad. Por otra parte, el alumnado realizará una evaluación de la actividad para que se puedan obtener pautas de mejora para el futuro.

2. Marco teórico

Los fractales son un objeto matemático que se ha utilizado mucho para hacer divulgación matemática, e incluso a pesar de no aparecer en el currículum [2] (Decreto, 2015) de la asignatura de matemáticas, podría ser interesante trabajarlo en el aula para mejorar el interés del alumnado por las matemáticas. Esto se debe principalmente a que, a pesar de que matemáticamente se pueden convertir en algo delicado, abstracto y difícil de trabajar, se puede dar una definición intuitiva de lo que son, por lo que los alumnos y las alumnas pueden entender este concepto sin demasiados problemas. Además, se encuentran muy presentes en la naturaleza, lo cual ayuda a contextualizarlos y a entender donde reside el interés de algunos científicos por estudiarlos. Por último, también podríamos hablar de lo bellas que suelen resultar sus representaciones en la mayoría de los casos, que hace que su estudio sea más atractivo. Pero, ¿Cómo se origina este concepto?
La geometría fractal fue un campo de las matemáticas desarrollado por Benoît Mandelbrot en 1975 [11] (Mandelbrot, 1975), aunque ya se conocían algunos ejemplos de fractales unos 100 años antes, aunque hasta ese momento se conocían como monstruos matemáticos.
Este nuevo concepto de geometría, nace con la finalidad de poder estudiar ciertas curvas o superficies presentes en la naturaleza de carácter demasiado irregular como para ser medidas utilizando geometría clásica, ya que esta se centra mucho en figuras regulares o suaves. En el artículo "How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension" [12] (Mandelbrot, 1967) Mandelbrot explica que la línea costera de alguna zona (por ejemplo, Gran Bretaña) puede ser entendida a partir de una pequeña porción de si misma. Esto es porque la costa de Gran Bretaña posee una propiedad de autosimilitud, es decir, una pequeña parte a escala es (es-

tadísitcamente hablando) equivalente a toda la línea costera. Por tanto, el procedimiento que siguió Mandelbrot se podría entender de manera intuitiva como muestra la figura 1

Figura 1: Aproximación de la longitud de la costa británica

De este modo llegamos a la primera condición que vamos a exigir a una curva o superficie para poder decir que tiene estructura fractal, esto es, que sea autosimilar. Entendemos por autosimilar que si cogemos una pequeña porción del fractal, y la observamos, no encontraremos diferencia a escala con el objeto completo. Esta similitud será infinita en los fractales matemáticos y teóricos, pero obviamente no lo será en los fractales que encontramos en la naturaleza, es por eso por lo que hablaremos de autosimilitud estadística.
Además, si intentáramos medir con precisión la costa británica nos daríamos cuenta de que cada vez nos encontraríamos con más salientes y más accidentes geográficos que hacen que sea esta curva carezca de suavidad, es decir, a pesar de tratarse de una curva continua, no es suave, esto es, no tiene propiedades de derivabilidad, por lo que la geometría clásica no la podemos usar para medir su longitud. Por otro lado, el método que utilizó Mandelbrot se basa en la aproximación de la longitud a partir de figuras poligonales, pero si nos fijamos bien, cuantos más lados introducimos a nuestra curva poligonal, mayor es su longitud, es decir, en el caso teórico de los fractales, en el que la autosimilitud a escala será infinita, nos encontraríamos con un perímetro infinito, pero se trata de un recinto cerrado, por lo tanto su área deberá de ser finita.
L. F. Richardson en [18] (Richardson, 1961) se dio cuenta de que en cualquier línea costera existe un factor de autosimilitud D relacionado con la longitud de los lados de la curva poligonal que se debería utilizar para aproximar la longitud de la curva. Mandelbrot aportó que este factor de autosimilitud tiene propiedades similares a las de una dimensión. Por ejemplo, la costa británica tiene un factor de autosimilitud $D = 1,25$. Pero para dar consistencia a la existencia de posibles dimensiones entre 1 y 2, Mandelbrot partió de la definición de dimensión y la generalizó para los casos en los que se llegaba a dimensión fraccionaria.
Para empezar, una línea recta tiene dimensión 1. Supongamos que tenemos un segmento $[0 \leq x \leq X]$, donde X es un número real positivo. Este segmento puede ser descompuesto en N intervalos disjuntos de la forma $\left[\frac{(n-1)X}{N} \leq x \leq \frac{nX}{N}\right]$, donde n varía de 1 a N y N es un entero positivo. Cada

una de estas partes tiene un ratio de similitud con el todo de $r(N) = \frac{1}{N}$.
De igual manera, si tomamos un rectángulo $[0 \leq x \leq X;\ 0 \leq y \leq Y]$, siendo ahora X e Y números reales positivos, lo podemos descomponer en N rectángulos disjuntos de la forma $\left[\frac{(k-1)X}{\sqrt{N}} \leq x \leq \frac{kX}{\sqrt{N}};\ \frac{(j-1)Y}{\sqrt{N}} \leq y \leq \frac{jY}{\sqrt{N}}\right]$, donde k y j son enteros positivos que varían desde 1 hasta $\sqrt{N}$ y N es un cuadrado perfecto. En este caso, el ratio de similitud de cada rectángulo con el todo será $r(N) = \frac{1}{\sqrt{N}}$.
De una forma más general, podríamos decir que si $N^{\frac{1}{D}}$ es un entero positivo, tendríamos que un paralelepípedo $D-$dimensional puede ser descompuesto en N paralelepípedos que tengan una ratio de similitud con el total de $r(N) = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}}$. Por tanto, podemos caracterizar la dimensión D a través de la relación

$$D = -\frac{\log N}{\log r(N)}$$

Esta es la dimensión conocida como dimensión de Hausdorff. Cuando hablamos de la dimensión de Hausdorff de una curva, diremos que tiene dimensión 1, mientras que una superficie tiene dimensión 2. Esto no supone ninguna novedad respecto a la dimensión topológica, que es a la que estamos acostumbrados. Pero el problema que encontramos al usar dimensión topológica es que solo acepta valores enteros y esto no siempre sirve en los contextos donde se aplica la teoría fractal. Cuando hablamos de curvas fractales, tras infinitas iteraciones podemos encontrarnos con curvas tan irregulares que casi llenan la superficie en la que se encuentran, y de este modo obtenemos curvas con dimensión mayor que 1, pero que no llegan a tener la dimensión 2 de una superficie.
Es por eso que para medir ciertas curvas o superficie se utiliza la dimensión de Hausdorff. Así pues Mandelbroot definió en 1975 en [11] (Mandelbrot, 1975) el concepto de fractal, pero en este trabajo nos hemos basado en su obra posterior de [13] (Mandelbrot, 1982) donde amplía los contenidos y corrige algunos errores. La definición que da Mandelbrot es:

Definición 2.1. Un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica.

Pero esta definición, aunque bien formalizada, parece poco intuitiva para identificarlos. En [16] (Montesdeoca, 2005) encontramos la siguiente caracterización:

Definición 2.2. Un fractal es un conjunto que cumple las siguientes propiedades:

- Tienen una estructura compleja a cualquier resolución.
- Tienen una dimensión no entera.
- Tienen un perímetro o longitud infinita pero el área que encierran es finita.
- Son auto-similares e independientes de la escala.

Veamos un par de ejemplos extraídos de [16] (Montesdeoca, 2005)

Ejemplo 2.1. *Empecemos por un fractal bien conocido, el triángulo de Sierpinski. Partimos de un triángulo equilatero, y lo dividimos en cuatro triángulos equiláteros utilizando los puntos medios de cada lado como vértices para los nuevos triángulos. Ahora eliminamos el triángulo en el que ninguno de los vértices coincide con un vértice original. En la siguiente iteración repetimos el* *proceso con cada uno de los triángulos restantes, y así sucesivamente. El esquema de como se forma el triángulo de Sierpinski sería el que aparece en la figura 2:*

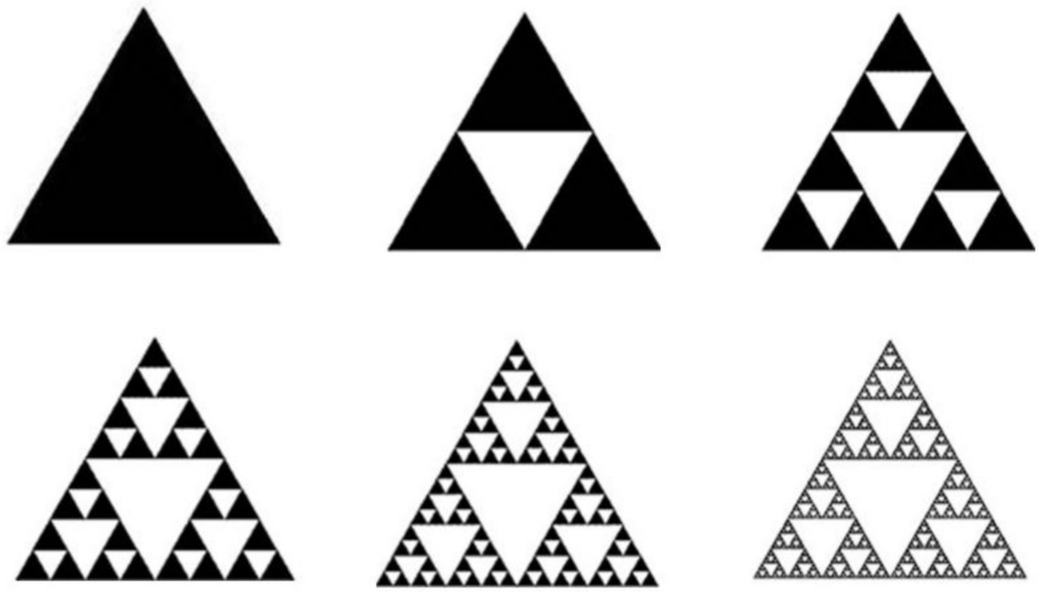


Figura 2: Construcción del triángulo de Sierpinski

Veamos el cálculo del área de este triángulo. Supongamos que el lado del triángulo inicial mide l, de esta forma, teniendo en cuenta que el triángulo es equilatero, si trazamos la altura del tríangulo quedará dividido en dos triángulos rectángulos. De esta forma, aplicando el teorema de Pitágoras, podemos obtener la altura del triángulo:

$$h_0 = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

De esta forma, al calcular el área del triángulo obtenemos

$$A_0 = \frac{l\frac{l}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

En la segunda iteración, tendremos que calcular el área de 3 triángulos equilateros, en este caso de lado $\frac{l}{2}$. De nuevo, teniendo en cuenta que son equiláteros y aplicando el teorema de Pitágoras a la mitad de cada uno obtendremos sus alturas

$$h_1 = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16}} = \frac{l}{4}\sqrt{3}$$

y por tanto, el área de cada uno de ellos será

$$A_{1,i} = \frac{\frac{l}{2}\frac{l}{4}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4}A_0$$

para $i = 1,\ 2,\ 3$. *Como el área total es la suma del área de los tres triángulos, que es la misma, obtenemos que*

$$A_1 = \frac{3}{4}A_0$$

De este modo, ahora se repetiría el proceso con 9 triángulos rectángulos de lado $\frac{l}{4}$, y ahora, aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras a cada mitad su altura sería

$$h_2 = \sqrt{\frac{l^2}{16} - \frac{l^2}{64}} = \frac{l}{8}\sqrt{3}$$

Y el área de cada uno de los triángulos quedaría

$$A_{2,i} = \frac{\frac{l}{4}\frac{l}{8}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{16}\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{16}A_0$$

para $i = 1,\, 2, \dots,\, 9$. *Como tenemos el área de 9 triángulos iguales tendremos*

$$A_2 = \frac{9}{16}A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$$

A priori, parece que la fórmula para el cálculo del área en la iteración n-ésima viene dada por

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$$

Veámoslo utilizando el método de inducción. Supongamos para cierto $n \in \mathbb{N}$ *que*

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$$

y demostrémoslo para $n+1$. *Tenemos que en la iteración* $n+1$ *hemos quitado* 3^n *triángulos, cada uno de área* $\frac{A_0}{4n+1}$, *por tanto, aplicando la hipótesis de inducción tenemos que*

$$A_{n+1} = A_n - 3^n\frac{A_0}{4^{n+1}} = \frac{3^n}{4^n}A_0 - \frac{3^n}{4^{n+1}}A_0 = \frac{4\cdot 3^n - 3^n}{4^{n+1}}A_0 = \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} A_0$$

como queríamos demostrar. De este modo, después de infinitas iteraciones, podemos calcular el área como el límite cuando n tiende a ∞ *de la fórmula que acabamos de calcular. De este modo tenemos que:*

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n A_0 = 0$$

Pero, ¿qué pasa si calculamos el perímetro de la parte cortada del triángulo?. Fijémonos que en el triángulo original el perímetro vale $P_0 = 3l$. *Tras realizar la primera iteración lo que tenemos son 3 triángulos de lado* $\frac{l}{2}$, *es decir,* $P_1 = 3\frac{3l}{2} = 3^2\frac{l}{2}$. *En la siguiente iteración tendremos por cada triángulo tres triángulos más, es decir,* 3^2 *triángulos más de longitud* $\frac{\frac{l}{2}}{2} = \frac{l}{2^2}$, *de manera que tendremos en este caso que* $P_2 = 3^2\frac{3l}{2^2} = 3^{n+1}\frac{l}{2^n}$.

Fijémonos que el procedimiento es constante, multiplicando por 3 el número de triángulos que desaparecen en cada iteración y dividiendo entre 2 el lado de cada uno de esos triángulos, de este modo podemos obtener que

$$P_n = 3^{n+1}\frac{1}{2^n}l = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n l \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Es decir, el triángulo de Sierpinski encierra un área nula a pesar de tener un perímetro infinito.

Calculemos su dimensión fractal. Tenemos que en la n-ésima iteración el número de triángulos que tenemos es $N = 3^n$, *cada triángulo reducido en un factor* $r = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, *de manera que*

$$D = -\frac{\log N}{\log logr} = -\frac{\log 3}{\log 2^{-n}} = -\frac{n\log 3}{-n\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58496$$

Veamos otro ejemplo

Ejemplo 2.2. *La curva de Koch se genera a partir de un segmento de lado l, de modo que en la primera iteración se divide el segmento en 3 partes iguales y se sustituye la del medio por los lados que junto a él formarían un triángulo rectángulo de lado $\frac{l}{3}$ si lo mantuviésemos. En la siguiente iteración realizaríamos los mismo en cada uno de los segmentos restantes y así sucesivamente como se muestra en la figura 3.*

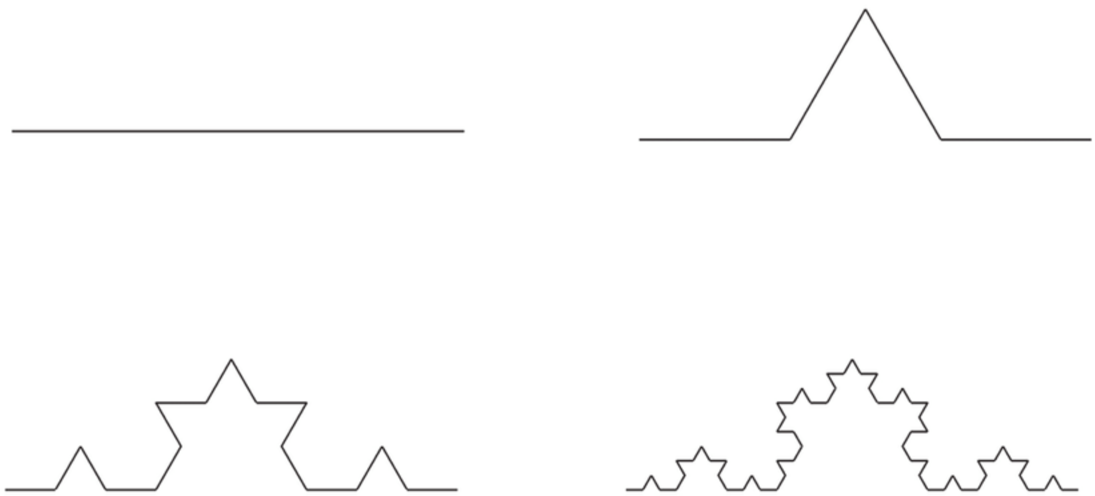


Figura 3: Construcción de la curva de Koch

Calculemos ahora su longitud y el área bajo la curva. Está claro que la longitud del segmento original es $L_0 = l$. Una vez realizada la primera iteración tendremos 4 segmentos de longitud $\frac{l}{3}$, es decir, la nueva longitud de la curva de Koch será $L_1 = 4\frac{l}{3}$. En la siguiente iteración tendremos cada uno de esos segmentos divididos en 4 partes de $\frac{1}{3}$ de su longitud, es decir, $L_2 = 4\frac{1}{3} \cdot 4\frac{l}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 l$. De aquí podemos deducir que para un $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n l$$

Tenemos que la sucesión de longitudes en cada iteración forman una progresión geométrica de razón $\frac{4}{3} > 1$, por lo que tendremos que es estrictamente creciente, es decir,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n l = \infty$$

Calculemos ahora el área que queda bajo la curva, para ello notemos que el área en cada iteración será la misma que en la iteración anterior añadiendo el área de los nuevos triángulos que han aparecido. Para calcular la fórmula para calcular el área de triángulos $A = \sin\alpha\frac{l^2}{2}$, donde α es el ángulo que forma el lado de longitud l con otro de los lados del triángulo. De este modo, como en cada iteración estamos formando triángulos rectángulos sabemos que $\alpha = 60°$. Además, sabemos que en cada iteración el lado de los nuevos triángulos es $\frac{1}{3}$ del de la iteración anterior. Del mismo modo, en cada iteración aparecen 4 veces el número de triángulos que han aparecido en la iteración *anterior. De este modo tendremos que en la primera iteración* $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{3}\right)^2$*. Ahora, para la segunda iteración habrá que añadir las nuevas áreas que han aparecido*

$$A_2 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{3}\right)^2}_{A_1} + \overbrace{4\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{l}{3^2}\right)^2}^{\text{Área de los nuevos triángulos}}$$

y en la siguiente

$$A_3 = \overbrace{\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{3}\right)^2}_{A_1} + 4\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{l}{3^2}\right)^2}^{A_2} + \underbrace{4^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{3^3}\right)^2}_{\text{Nuevos triángulos}}$$

De este modo, obtenemos que el área tras n iteraciones será

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} 4^{j-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{3^j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} 4^{j}\frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{l}{3^j}\right)^2 = 4^{j-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{3^j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{4}{3^2}\right)^j$$

Para calcular el área bajo la curva de Koch, tendremos que calcular el área cuando n tiende a infinito, de manera que lo que obtenemos es una serie geométrica de razón $\frac{4}{3^2} < 1$*, por lo que sabemos que converge y que además*

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^2}\right)^j = \frac{4}{3^2}\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3^2}\right)^j = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\frac{1}{1-\frac{4}{3^2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

Es decir, de nuevo tenemos una figura de perímetro infinito, pero de manera que el área que encierra (si la consideramos que está cerrada por bajo por el segmento inicial) es finita.
Veamos cual es la dimensión de la curva de Koch. En este caso el número de segmentos en la iteración n-ésima es 4^n*, y se reducen cada vez en un factor de* $\frac{1}{3}$*, es decir, nuestro ratio ahora es* $r = \left(\frac{1}{3}\right)^n$*. Por tanto, tendremos que*

$$D = -\frac{\log N}{\log r} = -\frac{\log 4^n}{\log 3^{-n}} = -\frac{n\log 4}{-n\log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26186.$$

Hemos visto dos ejemplos de fractales en los que hemos podido calcular su perímetro, su área y su dimensión de Hausdorff y comprobado de primera mano que cumplen las propiedades que habíamos comentado anteriormente, pero hemos trabajado con ejemplos de fractales matemáticos, construidos a partir de formas geométricas bien conocidas como son los triángulos, pero ¿dónde se encuentran ejemplos fuera de un contexto puramente matemático?.
Al inicio de esta sección hemos podido ver un ejemplo de fractal en la naturaleza, en concreto el de la costa de Gran Bretaña. Mandelbrot escogió esta como ejemplo por su irregularidad, que le da una dimensión fractal $D = 1,25$, pero esta propiedad de autosimilitud la tienen el resto de costas, por ejemplo, en el mismo artículo [12] (Mandelbrot, 1967) afirma que la costa de de Australia tiene dimensión fractal $D = 1,13$, e incluso habla de otras curvas como de la frontera entre España y Portugal, cuya dimensión es $D = 1,14$.
Pero los fractales no se encuentran solo presentes en las costas o en las forenteras entre países, sino que están por todas partes en el mundo que nos rodea. Para empezar, los podemos encontrar en

otros ámbitos. Si nos fijamos en la naturaleza, por ejemplo en la flora o la fauna como vemos en las figuras 4 y 5 .

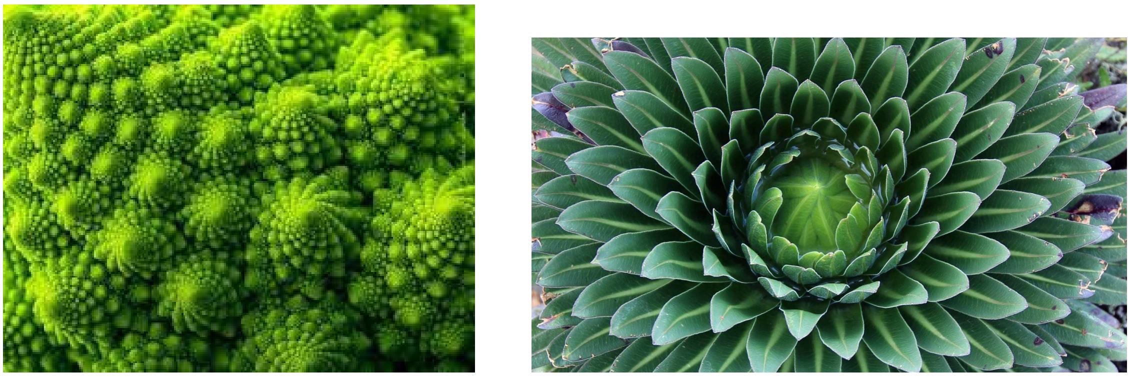


Figura 4: Fractales en plantas

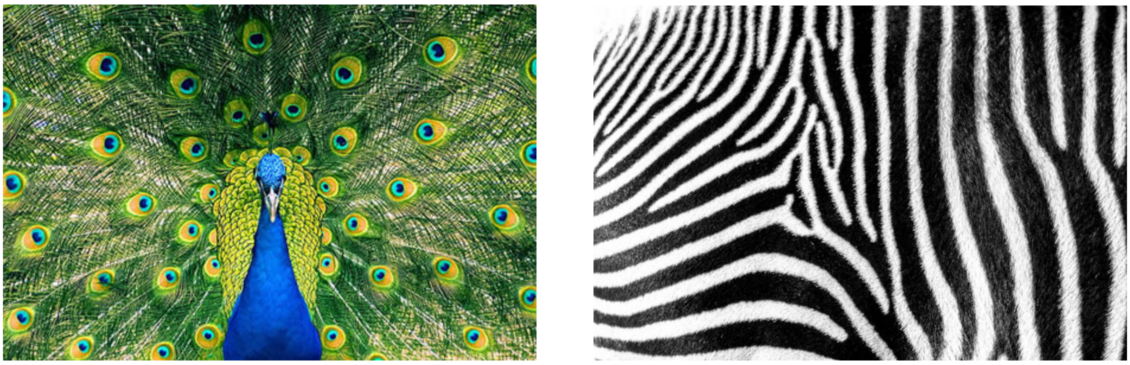


Figura 5: Fractales en animales

En los ejemplos anteriores el interés del estudio de los fractales reside en que al identificar los patrones, podemos estudiar la estructura de las plantas o los animales incluso cuando queremos mirar detalles pequeños a los que cuesta acceder con el ojo humano, pero también podemos usar los fractales para estudiar estructuras grandes a partir de una pequeña parte de ellas mismas. Por ejemplo, se puede realizar el estudio de un bosque a partir de una zona concreta. Si tomamos el árbol más alto de una zona y vemos como se distribuyen los árboles más pequeños a su alrededor, veremos que es un patrón que se repite a lo largo de toda la zona forestal.
Además de identificar patrones y autosimilitudes en un mismo cuerpo, también se pueden aprovechar los fractales para estudiar algunas estructuras a partir de otras que tienen una estructura fractal similar, la figura 6 nos muestra un árbol, un río y sus afluentes, un pulmón y unos rayos.

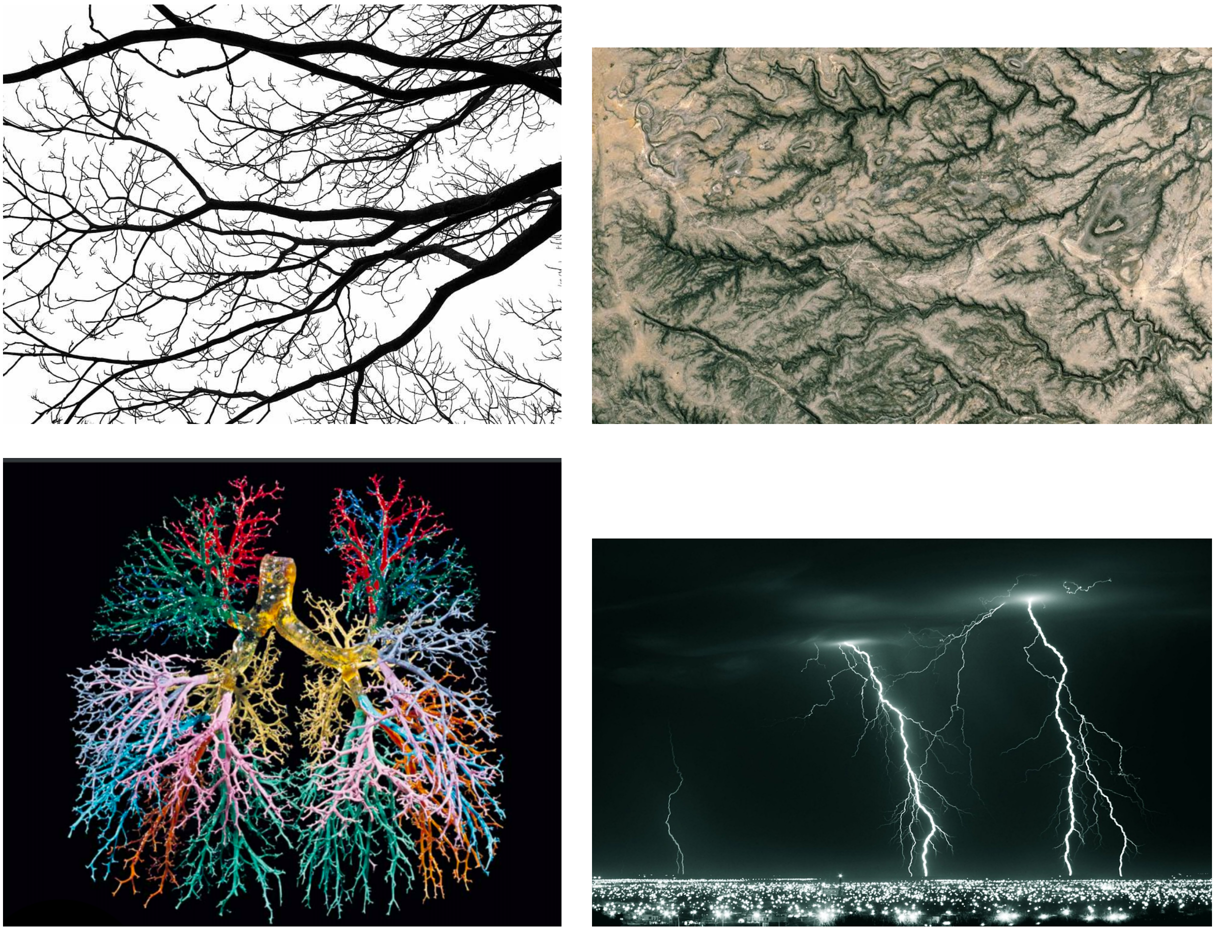


Figura 6: Fratales similares en diferentes contextos

Las imágenes anteriores nos muestran distintos elementos que podemos encontrar en la naturaleza, en concreto vemos la imagen de un árbol, la de un río y sus afluentes, la ramificación interna de unos pulmones y un par de rayos. A priori son cosas muy distintas que poco tienen que ver, pero ahora que vemos las cuatro imágenes juntas, podemos observar que tienen una estructura muy similar, por lo que a partir del estudio de algunos de ellos podemos obtener información sobre el resto. Además, no son los únicos casos que encontramos con una estructura de este estilo, ya que si nos fijamos en las venas y arterias del cuerpo humano veremos que también siguen un patrón parecido, al igual que las coexiones entre las neuronas.
Los fractales tienen muchísimas aplicaciones, cada vez se están implementando en más campos científicos, por ejemplo en medicina. Acabamos de ver como los pulmones, las venas..., tienen una estructura fractal, por tanto, podemos utilizar los fractales para poder estudiarlos, pero no solo con estas partes del cuerpo. Si analizamos algunas enfermedades, también nos daremos cuenta de que actúan siguiendo ciertos patrones de repetición a distintas escalas, es por ejemplo el caso de la osteoporosis como nos muestra la figura 7.

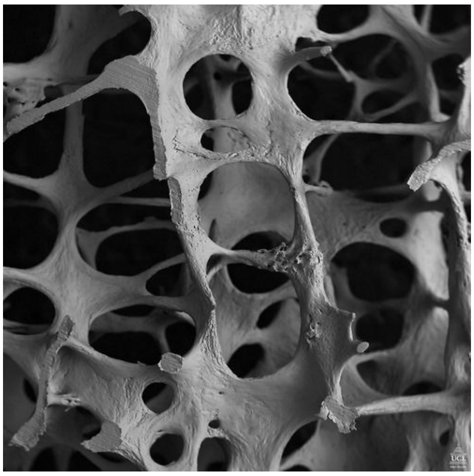


Figura 7: Huesos con osteoporosis

Y podemos encontrar más ejemplos de aplicaciones, por ejemplo, en [16] algunas de las aplicaciones que se mencionan son:

- Evolución de los mercados bursátiles.
- Análisis del nacimiento de los planetas.
- Análisis y predicción de condiciones meteorológicas, terremotos y volcanes.
- Análisis estructural y morfológico en polímeros.
- Diseño por ordenador.
- Estudio de sistemas dinámicos.

En el caso de diseño por ordenador se utilizan mucho los fractales para generar paisajes, por ejemplo montañas. La idea es coger un plano inclinado o un cono. A partir de este generar un pliegues en su superficie, a continuación cogemos cada uno de los pliegues resultantes y repetimos la operación, tras algunas iteraciones obtenemos una estructura como la que vemos en la figura 8.

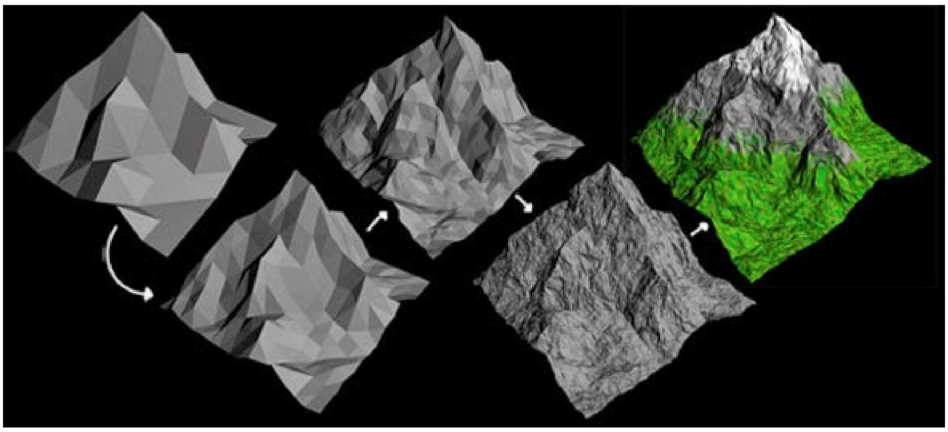


Figura 8: Generación de montañas por ordenador

En el caso de los sistemas dinámicos, encontramos que es curioso como aparecen los fractales a la hora de estudiar las órbitas de los distintos puntos. Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 2.3. *Consideremos la función $g_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de modo que $g_c(z) = z^2 + c$, siendo c un número complejo. Para cada $z \in \mathbb{C}$ definimos su órbita como*

$$\mathcal{O}(z) = \{z, g(z), g^2(z), g^3(z), \dots\},$$

donde $g^2(z) = g(g(z))$, $g^3(z) = g(g^2(z)) = g(g(g(z)))$, ...
A partir de esta definición, Mandelbrot y Gaston Julia, decidieron estudiar las órbitas de los puntos para determinados valores de z y de c, de este modo obtuvieron:

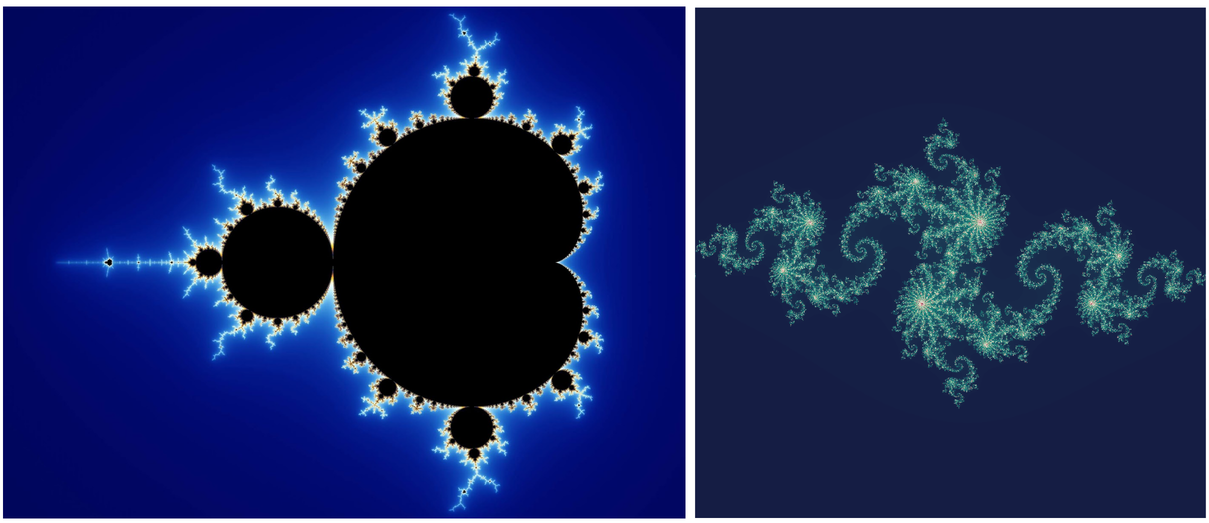
- ***Conjunto de Mandelbrot:*** *Mandelbrot decidió realizar el estudio de las orbitas de cada punto $z_0 \in \mathbb{C}$ cuando variaba c, de este modo, para cada z_0, Mandelbrot definió:*

$$M_{z_0} := \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{O}(z_0) \text{ por } g_c \text{ está acotada}\}$$

- ***Conjunto de Julia:*** *Julia realizó un estudio parecido al de Mandelbrot, pero en este caso realizó el estudio haciendo variar z para cada c. Por una parte, se selecciona el conjunto de puntos z para cada c tal que su órbita está acotada. La frontera de dicho conjunto es un conjunto de Julia, es decir, para cada $c \in \mathbb{C}$ tendremos:*

$$J_c := Fr\left(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{O}(z_0) \text{ por } g_c \text{ está acotada}\}\right)$$

Si representamos gráficamente ambos conjuntos, para algunos z o algunos c complejos respectivamente, lo que obtenemos son fractales, de manera que si haces zoom a la imagen siempre ves lo mismo pero en una escala distinta. Obviamente llega un momento en el que se acaba, ya que los ordenadores no pueden realizar infinitas operaciones, pero si pudiesen, el proceso se reptería hasta el infinito. La figura 9 nos muestra un ejemplo de representación de conjunto de Mandelbrot y de conjunto de Julia.



(a) Mandelbrot (b) Julia

Figura 9: Fractales obtenidos a partir de las órbitas de $g_c(z)$

3. Actividad

3.1. Descripción de la problemática

Las matemáticas son una asignatura que acompaña al alumnado a lo largo de toda su trayectoria educativa. Está presente en todos los cursos de la educación primaria y lo mismo sucede en la educació secundaria. Sin embargo, no se caracteriza por ser una de las asignaturas preferidas de la mayoría. De hecho, en muchas ocasiones nos encontramos con alumnos y alumnas que rechazan la materia o que tienen muchas dificultades para superarla con éxito. Pero, ¿a qué se debe que existan tantos problemas con esta asignatura?

Son muchas las dificultades que podemos encontrar en el alumnado a la hora de afrontar la asignatura de matemáticas, pero no todos los alumnos las presentan todas.

Beatriz Carrillo en En [1] (Carrillo, 2009) menciona algunas de las dificultades que encontramos en el aula. La autora nos por una parte del aprendizaje jerárquico de la asignatura. En su trabajo comenta como la materia de matemáticas necesita de un aprendizaje progresivo, en el que los conceptos nuevos que van adquiriendo los y las estudiantes se construyen sobre los conceptos aprendidos previamente. Esto genera que en muchas ocasiones nos encontremos con alumnos o alumnas que no han adquirido bien los conocimientos previos que necesitan para realizar un nuevo aprendizaje de manera que se encuentran con contenidos inconexos, fraccionados y poco estrucuturados.

A medida que se va avanzando en los contenidos de la materia, cada vez los conceptos se vuelven más abstractos. Por su parte, la autora comenta que muchos y muchas de los estudiantes que llegan a cierto nivel de enseñanza de matemáticas sin estar preparados y preparadas para adquirir el nivel de abstracción que exige la asignatura, generando que no tengan un buen aprendizaje de los conceptos que se intentan enseñar.

Además de estas dificultades, la autora también expone que no solo nos encontraremos con alumnado que tenga problemas con el aprendizaje por el aprendizaje o el punto de su desarrollo cognitivo en el que se encuentran en ese momento, sino que en muchas ocasiones uno los problemas más grandes con los que nos podemos encontrar como docentes son las ideas preconcebidas que tienen sobre la asignatura y sobre sus capacidades para afrontarlas. Muchos y muchas estudiantes ven las matemáticas como una asignatura abstracta, compleja y que no tiene demasiada relación con la realidad, lo que las convierte en algo inservible en su día a día, lo que genera en ellos y ellas una falta de motivación. A esto se le añade que en algunas ocasiones piensan que no son capaces de entender la asignatura ni de resolver los problemas. Esto puede generar que no se esfuercen por conseguir un buen aprendizaje.

Más allá de estas dificultades, Carrillo también nos habla de casos en los que miembros del alumnado son capaces de realizar con destreza los ejercicios en el contexto matemático abstracto pero son incapaces de trasladarlos a otros contextos a la hora de resolver problemas, e incluso en ocasiones el problema reside en no entender o no saber analizar el enunciado, o en ocasiones habiendo entendido el enunciado y habiendo hecho un buen análisis del problema, a veces la dificultad aparece a la hora de traducir este problema al lenguaje matemático.

Por último, su trabajo habla de la metodología utilizada por los y las docentes, ya que el papel que juegan en el proceso de aprendizaje del alumnado es fundamental. Tradicionalmente las clases de matemáticas (al igual que las de las demás asignaturas) se han caracterizado por ser clases magistrales en las que se imparte un temario, se realizan algunos ejemplos, se trabajan ejercicios como tarea para realizar en casa y finalmente se realiza un examen con ejercicios que el alumnado ha de resolver correctamente. ¿Qué problemas podemos encontrar cuando un profesor o una profesora explica en una clase magistral?

- Que no explique de manera clara y estructurada, siguiendo un orden.
- Que los ejemplos que propone en clase no se adapten bien al alumnado, haciendo que no entiendan bien los conceptos.
- Que solo enseñe a resolver los ejercicios sin intentar que los alumnos y las alumnas comprendan lo que están haciendo.
- Que los ejercicios propuestos para casa no sean de un nivel adecuado.
- Que no supervise y evalúe de manera continua a los y las miembros del aula.
- Que las lecciones resulten repetitivas, aburridas y poco atractivas.

Como vemos, pueden ser muchos los factores que hagan que un profesor o una profesora no consiga que sus alumnos aprendan. Con esto no se pretenede decir que la clase magistral sea una metodología que no se deba utilizar y que este mal. La clase magistral podría ser muy beneficiosa si se sabe combinar con otras metodologías, y está claro que a lo largo de su etapa de aprendizaje, el alumnado se va encontrar con conceptos abstractos o complejos que el docente habrá de introducir para que sean capaces de entenderlo.

Otros autores como es el caso de Socas en [21] (Socas, 2010) también han realizado su propio análisis sobre las dificultades que encontramos en el aula de secundaria al enseñar matemáticas, pero las conclusiones a las que llega son muy similares a las de Carrillo.

Por supuesto, además de estos problemas, podemos encontrar problemas específicos de algunos contenidos como pueden ser dificultades con el concepto de número o la numeración, dificultades con la jerarquía de operaciones,... e incluso trastornos que afectan directamente al aprendizaje de las matemáticas como podría ser la discalculia[1].

En cualquier caso, está claro que las matemáticas son una materia frente a la cual son muchos y muchas los estudiantes que tienen problemas para completar su aprendizaje. Es por ello por lo que personalmente creo que es una asignatura en la que merece la pena invertir tiempo constantemente en buscar nuevas metodologías y nuevos ejemplos que puedan hacer que nuestros y nuestras estudiantes puedan obtener mejores conocimientos, además de tener una mejor experiencia en el sistema educativo.

3.2. Motivación y justificación de la actividad

Después de haber visto algunas de las dificultades que encontramos en el aprendizaje de las matemáticas, cabría preguntarse, ¿cómo podemos conseguir que el alumnado supere estas dificultades?

[1] La discalculia es una condición que dificulta resolver operaciones matemáticas, así como realizar tareas que requieran usar las matemáticas. No es tan conocida o entendida como la dislexia , pero algunos expertos creen que es igual de común.

¿existen metodologías que pueden ayudar a entender mejor las matemáticas? Sería muy ambicioso intentar crear una actividad que de alguna manera pudiese solucionar todas las dificultades, por eso en este trabajo nos vamos a centrar en una propuesta de actividad que creo que podría ayudar a solucionar algunas de ellas.

A la hora de idear una actividad que permitiese solucionar algunas de las dificultades del aprendizaje que podían tener los alumnos y las alumnas, me iba dando cuenta de que aunque me centrase mucho en alguna dificultad en concreto, no podía dejar de lado al alumnado que no presentaba ese problema. Es por eso por lo que tras mucho pensarlo intenté idear una actividad que pudiese llegar de alguna forma a todo el alumnado. Por eso decidí apostar por una actividad que tuviera como objetivo principal mejorar la percepción que los alumnos y las alumnas tienen de la asignatura. Esto me llevó a apostar por una metodología distinta a la que están acostumbrados y acostumbradas a trabajar en clase, en la que puedan conocer contextos de su entorno donde se encuentren presentes las matemáticas.

Opté por el tema de los fractales, ya que me parecía algo que podría ser atractivo para el alumnado. Además, a pesar de ser un objeto matemático complejo, puede ser entendido también de manera intuitiva y sin necesidad de entrar en demasiados formalismos. Esto podría permitirnos adapatar el nível al de un grupo de estudiantes concreto. Entonces, ¿qué beneficios se pueden obtener de trabajar los fractales en el aula de secundaria?

Antes de empezar a desarrollar la actividad, busqué documentación que avalase los fractales como herramienta para mejorar el aprendizaje de matemáticas en la etapa de secundaria. Por un lado, encontré estudios que hablaban de los beneficios que generaba en el aprendizaje de matemáticas del estudiantado el estudio de la geometría fractal. Por otra parte, algunos autores hacían propuestas de actividades para poner en práctica en el aula, e incluso algunos ejemplos de institutos que ya lo han puesto en práctica como veremos más adelante.

Reda Abu-Elwan en [17] (Reda, 2014) realiza un estudio sobre los beneficios que puede tener en los y las estudiantes enseñar geometría fractal. En concreto se centró en ver como mejoraba la capacidad y la forma de razonar en el campo de la geometría tras haber estudiado geometría fractal. Para ello, realizó el estudio con un grupo de alumnas, algunas con formación previa sobre fractales y otras sin dicha formación. Lo que Abu-Elwan concluyó fue que aquellas alumnas que habían estudiado fractales previamente, obtuvieron mejores resultados en una prueba basada en su capacidad de razonamiento geométrico, es decir, que el estudio de la geometría fractal puede beneficiar el aprendizaje de la geometría euclídea.

En [22] (Zapata-Ros, 2015) encontramos una propuesta de material didáctico para trabajar la geometría fractal en el aula de secundaria, esta propuesta se realiza como una actividad dentro el bloque de geometría, en concreto, en el apartado de *organización y representación del espacio*. Esta actividad se presenta para poder dar a los y las estudiantes una visión de las matemáticas dentro de un contexto más actual y más real, ya que, como el propio autor nos indica, la geometría que se estudia en secundaria no incluye tan apenas ningún contenido posterior a Euler (1707-1783), por lo que estudiando los fractales como parte del contenido de la asignatura estarían trabajando conceptos matemáticos mucho más recientes (1975). Además, también resalta los fractales como herramientas para que el alumnado consiga una mejor comprensión de los contenidos abstractos de la asignatura a partir de la construcción de algunos fractales como el triángulo de Sierpinski

(figura 2) o de la curva de Koch (figura 3). Zapata comenta que al trabajar la construcción de estas figuras, estaríamos partiendo de objetos que los alumnos y alumnas conocen de la geometría euclídea, como son el triángulo o el segmento, y llegamos a objetos fractales, de manera que a partir de lo que pasa cuando realizamos 1, 2 o 3 iteraciones, podrían entender que es lo que pasa cuando llevamos muchas más, e incluso se puede intuir lo que pasará cuando sean infinitas las iteraciones.
Además de buscar algunos artículos de estudios que se han podido realizar sobre las ventajas y desventajas del aprendizaje de fractales en secundaria, e incluso buscar alguna propuesta de material para trabajarlos en el aula, se han buscado también algunos antecedentes de institutos que hayan trabajado este tema con sus alumnos y sus alumnas. Es el caso del colegio salesiano San Juan Bautista de Burriana, que realizaron el que denominaron como proyecto F [20] (Salesianos Burriana, 2018), en el cual trabajaban el número áureo y el concepto de fractal con alumnos y alumnas de 3º de ESO.
Otro ejemplo lo podemos encontrar en el instituto Broch i Llop de Vila-real, en el cual, no solo trabajan los fractales, sino que lo hacen utilizando materiales reciclados como podemos ver en [8] (IES Broch i Llop, 2019).
Además de las razones y antecedentes mostrados, también pude comprobar en el periodo de prácticas que los alumnos y las alumnas trabajan mejor cuando son capaces de construir los conceptos y trabajarlos en contextos reales. Los fractales no solo ofrecen la oportunidad de trabajar de esta forma, si no que además nos permiten alcanzar a partir del mundo que nos rodea un concepto matemático complejo, en el cual se pueden trabajar contenidos a priori complejos para el alumnado como pueden ser el *infinito* o el *cálculo simbólico*.

3.3. Objetivos

Todas las dificultades planteadas anteriormente, junto con aquellas razones que justifican la creación de la actividad nos llevan a plantear los objetivos de las mismas. Antes de confeccionar la actividad, tuve que plantearme cuáles eran las cosas que yo quería conseguir con esta actividad, es decir, que objetivos quiero proponerme para trabajar en un aula. Estos son:

- **Objetivo 1:** Mejorar la actitud del alumnado ante la asignatura de matemáticas.
- **Objetivo 2:** Fomentar el trabajo en equipo.
- **Objetivo 3:** Potenciar la capacidad de los alumnos y las alumnas para realizar razonamientos matemáticos.

Para poder abordar los objetivos propuestos me he marcado unas pautas metodológicas concretas. Es evidente que para poder trabajar el *Objetivo 2*, la actividad propuesta deberá de realizarse a partir de grupos cooperativos. Esto también puede beneficiar que se pueda alcanzar el *objetivo 3*, ya que en la asignatura de matemáticas no solo es importante aprender y entender los conceptos que se plantean, sino que también es fundamental aprender a razonar a partir de esos conceptos y a trabajar con ellos. En el periodo de prácticas, pude comprobar que poder expresar sus razonamientos en voz alta y contrástarlos con los de sus compañeros y compañeras les ayudaba a entender

mejor el contenido que estaban trabajando, por ello creo que el trabajo en equipo también ayudará a abordar el *objetivo 3*.
Por otra parte, con el tema escogido lo que se pretende es trabajar conceptos matemáticos que trasciendan el aula, es decir, que sean capaces de ver reflejados a su alrededor en el día, o lo que es lo mismo, darles contenidos matemáticos aplicados en contextos concretos. Además, como ya hemos comentado en apartados anteriores, los fractales tienen una construcción que puede ser bastante intuitiva, lo que permitirá a los alumnos y las alumnas partir de conceptos conocidos y ”sencillosçomo un triángulo o un segmento y llegar a construir objetos matemáticos complejos como el triángulo de Sierpinski (figura 2) o la curva de Koch (figura 3). De esta forma se busca que sean capaces de dar sentido a aquellos conceptos que aprenden, viendo así que las matemáticas tienen aplicación real y que los conceptos se pueden construir y comprender bien y así poder cumplir el *objetivo 1*. Además, también se pretende que el hecho de hacer una actividad con una metodlogía distinta, haga que resulte atractivo para ellos y que puedan disfrutar de esta parte de la materia, haciendo que esto se vea reflejado también en otros contenidos de la misma asignatura.

3.4. Destinatarios y contenidos

Una vez planteadas las necesidades, la motivación de la actividad y los objetivos es el momento de ver como podemos adaptar el contenido del marco teórico (sección 2) al aula de secundaria. El contenido de la actividad podría variar en función del curso al que vaya orientado. Como se ha comentado previamente, los fractales son un objeto matemático cuya definición se puede dar de forma intuitiva y sin necesidad de entrar en demasiados formalismos, sin embargo pueden ser una buena oportunidad para intentar llegar a conocimientos abstractos. Se pretende trabajar el concepto de fractal a partir del área y el perímetro de algunos de ellos, por lo que será necesario que el alumnado al que va orientada esta actividad hayan cursado previamente el contenido del currículum de *Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.* Esto límita esta actividad a alumnos y alumnas de 3º y 4º de ESO tanto, de matemáticas orientadas a enseñanzas académicas como de matemáticas orientadas a enseñanzas aplicadas. Estos son los grupos para los que se propone esta actividad, aunque podría ser interesante trabajarla en 1º de Bachillerato, una vez ya conocen el concepto de límite y puedan comprender mejor que pasa cuando hacemos infinitas iteraciones para generar un fractal.
El marco teórico presentado previamente en este trabajo parte del contexto en el que se desarrolla el concepto de fractal y realiza una construcción teórica del concepto que podría exceder el nível de estudiantes de secundaria, además de poder resultar tediosa para el alumnado, por ello, a continuación se presenta una propuesta de adaptación de los contenidos que se ven en la sección 2 para que se puedan trabajar en el aula.
Los contenidos seleccionados para la actividad serían:

- Definición de fractal a partir de la caracterización de 2.2.
- Definición de dimensión fractal.
- Ejemplos de fractales matemáticos y su dimensión.
- Fractales en la naturaleza.

- Aplicaciones de los fractales.
- Cálculo de perímetros y áreas de algunos fractales.
- Representación de algunos fractales.

La definición de dimensión fractal está prevista para verse solo a un nivel superficial y solo en caso de que la actividad se trabaje en 4º de ESO 1º de Bachillerato, ya que es el curso en el que se aprende a trabajar los logaritmos, los cuales son necesarios para esta definición.
El nivel de profundidad con el que se puede tratar cada uno de los contenidos dependerá del grupo, la predisposición de los alumnos..., pero sí que es importante que los traten todos para poder cubrir los objetivos que nos hemos marcado.

3.5. Metodología

En este apartado del trabajo se va a presentar la actividad. Vamos a dividir la sección en dos partes, primero una explicación de la metodología, es decir, un resumen paso a paso de qué es lo que se va a hacer en la actividad sin entrar a tratar los contenidos y a continuación pasaremos al desarrollo de la actividad, donde quedará todo redactado. En esta segunda parte se pretende ofrecer recursos para poder trabajar los contenidos, así como las pautas a seguir para realizar la actividad.
A continuación presentaremos la metodología que se va a seguir en esta actividad, es decir, se presentará un resumen explicado paso a paso de en que va a consistir la actividad pero sin entrar en demasiados detalles.
La actividad consistirá en un trabajo en grupos colaborativos de 4 personas. Estará dividida en 7 sesiones de 50 minutos distribuidas de la siguiente forma:

- **Sesión 1:** Se formarán los grupos de trabajo y comenzarán una búsqueda de información.
- **Sesión 2:** Acabarán de buscar la información y se comentará en voz alta que es lo que han entendido y aprendido.
- **Sesión 3:** El o la docente realizará una explicación más detallada de los conceptos para sintetitzar lo que se ha visto en la sesión anterior. A continuación realizarán en grupos una ficha de actividades para trabajar algunos fractales calculando su área, su perímetro..., tras un número finito de iteraciones.
- **Sesión 4:** Seguirán trabajando la ficha que se les ha dado en la sesión anterior.
- **Sesión 5:** Trabajo en grupos de investigación sobre un fractal y representación visual de este fractal.
- **Sesión 6:** Exposición del trabajo realizado al resto de los y las componentes del aula.
- **Sesión 7:** Evaluación de los conocimientos.

Además para el trabajo en grupo, los componentes de cada grupo deberán de repartirse los siguientes roles:

- Secretaria o secretario.
- Gestor o gestora de recursos materiales.
- Cohesionador o cohesionadora.
- Coordinador o coordinadora.

3.6. Desarrollo de la actividad

A continuación se presenta de manera detallada el material didáctico que ofrece este trabajo. En este caso se entiende como material la atividad detallada por sesiones, así como una propuesta de materiales y herramientas que se podrían usar como complemento para mejorar el aprendizaje. La explicación de la actividad quedará dividida por sesiones, para que quede claro lo que se pretende conseguir en cada una de ellas.

Sesiones 1 y 2

La primera parte de la primera sesión se destinará a explicar a los alumnos y las alumnas la metodología que vamos a seguir y como se va a evaluar la actividad. En este trabajo encontraremos la evaluación de la actividad al final de esta sección. Una vez explicada la metodología y la evaluación, se pasará a la formación de los distintos grupos de cuatro personas. Estos grupos los puede formar el docente o permitir que lo formen los y las estudiantes según se considere oportuno para el grupo concreto con el que se va a desarrollar la actividad.

Una vez tengamos claros los grupos se le explicará al alumnado los distintos roles que pueden adoptar dentro de cada grupo, estos serán:

- **Secretaria o secretario:** Será la o el responsable de que las distintas tareas que se vayan pidiendo en las sesiones se recopilen y se entreguen con una buena presentación.
- **Gestor o gestora de recursos materiales:** Será el encargado o la encargada de gestionar el uso de los materiales necesarios para la actividad, es decir, encargarse de que el día de la actividad tendrán el material necesario, administrarlo, y responsabilizarse de que se haga un buen uso del mismo.
- **Cohesionador o cohesionadora:** Se encargará de que exista un buen ambiente de trabajo en el grupo gestionando los turnos de palabra, solucionando posibles conflictos que puedan aparecer entre componentes del grupo...
- **Coordinador o coordinadora:** Se encargará de distribuir las tareas que vayan apareciendo a la hora de trabajar en equipo, es decir, preocuparse de que todos los miembros del grupo trabajen y de que todo esté hecho dentro de los tiempos establecidos por el o la docente.

Tras explicarlos, será el primer momento en para que se reunan por grupos para distribuirse los roles.

Se aprovechará el tiempo restante de sesión y la sesión siguiente para empezar con el contenido de la actividad. Lo primero será introducir la definición de fractal, como ya se ha comentado a partir de la caracterización 2.2. También se mostrarán algunos ejemplos de fractales matemáticos, ejemplos fractales en la naturaleza...

Es importante abordar con cuidado la introducción a los fractales. A la hora de dar las definiciones hay que intentar que el alumnado sea capaz de entender bien el concepto además de quedarse con la concepción visual de lo que es un fractal. En [5] (Faith, 2015) el autor realiza un estudio sobre los conocimientos que tiene un grupo de alumnos y alumnas acerca de los fractales. Evidentemente este grupo había trabajado previamente los fractales en el aula. Les pidieron que dibujasen un fractal y que que diesen su definición. Los resultados de los dibujos fueron buenos en general, los y las estudiantes eran capaces de dibujar fractales sin demasiados problemas, sin embargo, la cosa cambiaba cuando se les pedía que definiesen el concepto. En general tenían una idea vaga de la definición o olvidaban alguna de las características principales. Por eso es importante detenerse en que entiendan bien el concepto.

Para explicar lo que son los fractales podríamos partir del marco teórico de este trabajo, hacer una adaptación de los contenidos y darles una clase magistral a los y las estudiantes. Sin embargo, como se ha comentado previamente en este trabajo, se valorará positivamente que sean capaces de compartir sus opiniones y razonamientos, por lo que podemos partir de una metodología un tanto diferente.

Se resevará una sesión en el aula de informática si es posible, en caso contrario siempre se les puede dar una autorización para que lleven el móvil al instituto. La idea principal es que puedan investigar sobre los fractales en internet y apuntar aquella información que han encontrado y son capaces de comprender, así como posibles dudas que les surjan sobre el tema en cuestión. Incluso el docente o la docente puede darles ciertos materiales para que empiecen por ahí.

En [4] (En 1 minuto, 2021) o [14] (Marcel, 2021) se explica de forma bastante sencilla lo qué es un fractal con bastante contenido visual que puede ayudar a comprender bien los fractales.

Por otra parte, si queremos que una vez visto el concepto puedan ver en que contexto histórico se convierten en un objeto matemático relevante para el estudio de la naturaleza. En [9] (Lemnismath, 2020) se explica como Richardson [18] (Richardson, 1961) se da cuenta de que existen errores en la medición entre fronteras de países y nos cuenta por que la geometría euclídea tiene limitaciones para medir algunas curvas.

En [3] (Derivando, 2015) encontramos algunos ejemplos de fractales, su definición y una definición bastante intuitiva de lo que es la dimensión fractal, que es básicamente una adaptación visual y en el lenguaje cotidiano de la que se da en el marco teórico de este trabajo.

Una vez concluido el trabajo de investigación se regresará al aula, donde cada grupo deberá de explicar al resto de sus compañeros y compañeras qué es lo que han aprendido sobre los fractales y estos a su vez podrán decir si ellos han entendido los mismo. La función del o la docente en este momento es fundamental, ya que debe de guiar el posible debate que se genere en clase y hacer que las conclusiones se dirijan hacia los concocimientos que queremos transmitir y no se queden con posibles conceptos erróneos que pueda mencionar algún grupo por no haber comprendido algo bien.

Además de partir de las definiciones básicas, sería adecuado que el alumnado pudiese ver ejemplos claros de fractales y aplicaciones que se les dan. Para ello se pueden seleccionar algunos fragmentos del documental *Fractals - Hunting the hidden dimension*, donde se ven muchos ejemplos de fractales en la naturaleza.

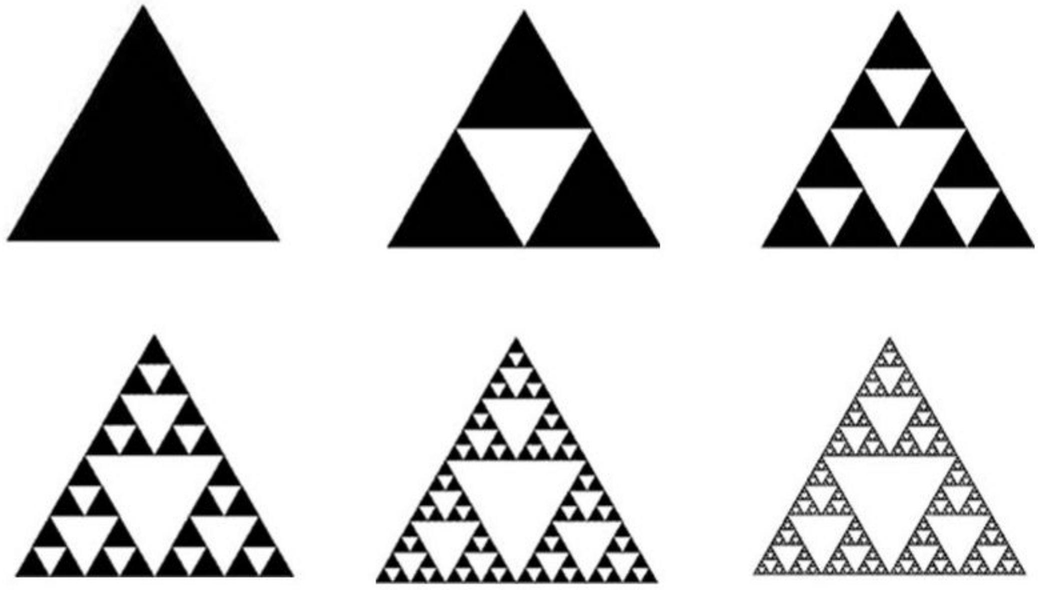
También podría ser una buena opción si se utiliza el aula de informática que el alumnado pueda ver algunos ejemplos de fractales de una forma mucho más dinámica. En [19] (Sada, 2017) encontramos algunos ejemplos de fractales en los que se puede ir variando el número de iteraciones con GeoGebra.

Sesiones 3 y 4

La sesión empezará con una síntesis de las ideas que se comentaron en la sesión anterior por parte del docente. Es importante que queden todos los conceptos bien claros para evitar confusiones a la hora de empezar a trabajar los fractales. A continuación, esta sesión y en la siguiente el alumnado trabajará en grupos. El objetivo es que trabajen algún ejemplo práctico de fractal para asentar bien los contenidos vistos en la sesión anterior. Para ello, se le repartirá a cada grupo una ficha en la que aparecerá un ejemplo de fractal, con la explicación de como se construye. Después aparecerán una serie de preguntas que habrán de contestar y entregar al final de la sesión. A continuación encontramos las diferentes fichas que se utilizarán en el aula.

Después de cada una de las fichas podemos ver un análisis de las dificultades que pueden encontrar los alumnos y las alumnas a la hora de trabajar con ellas.

Ficha 1. El triángulo de Sierpinski



Partimos de un triángulo equilátero, y lo dividimos en cuatro triángulos equiláteros utilizando los puntos medios de cada lado como vértices para los nuevos triángulos. Ahora eliminamos el triángulo en el que ninguno de los vértices coincide con un vértice original. En la siguiente iteración repetimos el proceso con cada uno de los triángulos restantes, y así sucesivamente. El esquema de cómo se forma el triángulo de Sierpinski sería el que aparece en la figura **??**.
Supongamos que partimos de un triángulo equilátero de lado $l = 1$ y queremos construir su triángulo de Sierpinski. Entendemos por perímetro de la figura a los bordes que quedan al suprimir los triángulos. Responded a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es su perímetro inicial?
- ¿Cuál es su perímetro tras la primera iteración?
- ¿Y tras la segunda y la tercera?
- ¿Qué crees que le sucedería al perímetro si siguiésemos realizando iteraciones? ¿Crecería cada vez más, decrecería o se acercaría a algún valor?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Cuál es el área tras una iteración?
- ¿Y tras dos o tres iteraciones?
- ¿Qué crees que le pasará al área si realizásemos más iteraciones?

Supongamos ahora que tenemos un triángulo de lado desconocido l.

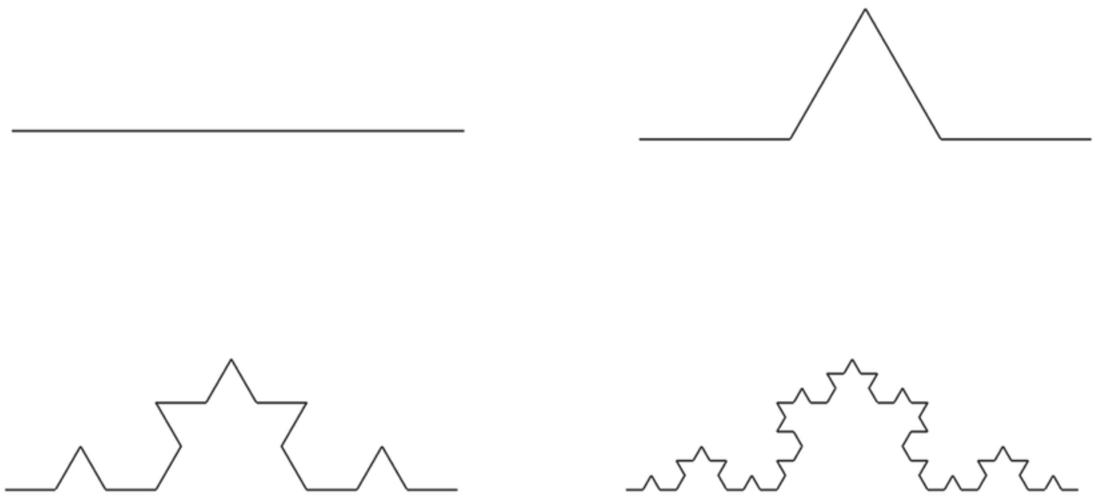
- ¿Cuál es su permímetro inicial?
- ¿Cuál es el perímetro tras realizar una, dos o tres iteraciones?

- ¿Qué le sucede al perímetro cuando seguimos realizando iteraciones? ¿Se comporta como el de lado $l = 1$ o depende de la medida del lado?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Y su área tras una, dos o tres iteraciones?
- ¿Crees que el área se comportorá igual que en el caso en el que el lado medía una unidad?

¿Qué dificultades pueden encontrar?
A la hora de trabajar el triángulo de Sierpinski, se puede observar como el área va descendiendo con cada una de las iteraciones, sin embargo, puede que para el alumnado resulte complicado visualizar que tras un número infinito de iteraciones este área será 0.
Además, también podría ser que encontrasen dificultades a la hora de realizar el cálculo simbólico, ya que las operaciones para poder calcular las áreas de los triángulos que vamos eliminando pueden ser algo confusas.

Ficha 2. La curva de Koch

La curva de Koch se genera a partir de un segmento de lado l, de modo que en la primera iteración se divide el segmento en 3 partes iguales y se sustituye la del medio por los lados que junto a él formarían un triángulo rectángulo de lado $\frac{l}{3}$ si lo mantuviésemos. En la siguiente iteración realizaríamos los mismo en cada uno de los segmentos restantes y así sucesivamente como se muestra en la figura **??**.



Supongamos que partimos de un segmento de lado $l = 1$ y que queremos construir su curva de Koch. Imagina que la curva está cerrada por bajo por el segmento inicial. Responded a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es su perímetro inicial?
- ¿Cuál es su perímetro tras la primera iteración?
- ¿Y tras la segunda y la tercera?
- ¿Qué crees que le sucedería al perímetro si siguiésemos realizando iteraciones? ¿Crecería cada vez más, decrecería o se acercaría a algún valor?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Cuál es el área tras una iteración=?
- ¿Y tras dos o tres iteraciones?
- ¿Qué crees que le pasará al área si realizásemos más iteraciones?

Supongamos ahora que tenemos un segmento de medida desconocida l.

- ¿Cuál es su permímetro inicial?
- ¿Cuál es el perímetro tras realizar una, dos o tres iteraciones?

- ¿Qué le sucede al perímetro cuando seguimos realizando iteraciones? ¿Se comporta como el de longitud $l = 1$ o depende de la medida del segmento?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Y su área tras una, dos o tres iteraciones?
- ¿Crees que el área se comportará igual que en el caso en el que el segmento medía una unidad?

¿Qué dificultades pueden encontrar?
Ahora nos encontramos en un caso contrario al de antes. Al trabajar la curva de Koch podemos observar que el área es cada vez mayor, aunque cada vez se añade un área más pequeña, esto puede resultar confuso para el alumnado, ya que puede que tengan problemas para identificar que ese área será finita.

Ficha 3: Alfombra de Sierpinski

Para formar la alfombra de Sierpinski partimos de un cuadrado. En la primera iteración dividimos el cuadrado en 9 cuadrados iguales y eliminamos el que ocupa el puesto central. En la segunda iteración realizamos el mismo proceso con cada uno de los cuadrados restantes. Si siguiésemos hasta el infinito construiríamos el fractal conocido como alfombra de Sierpinski como vemos en la figura 10

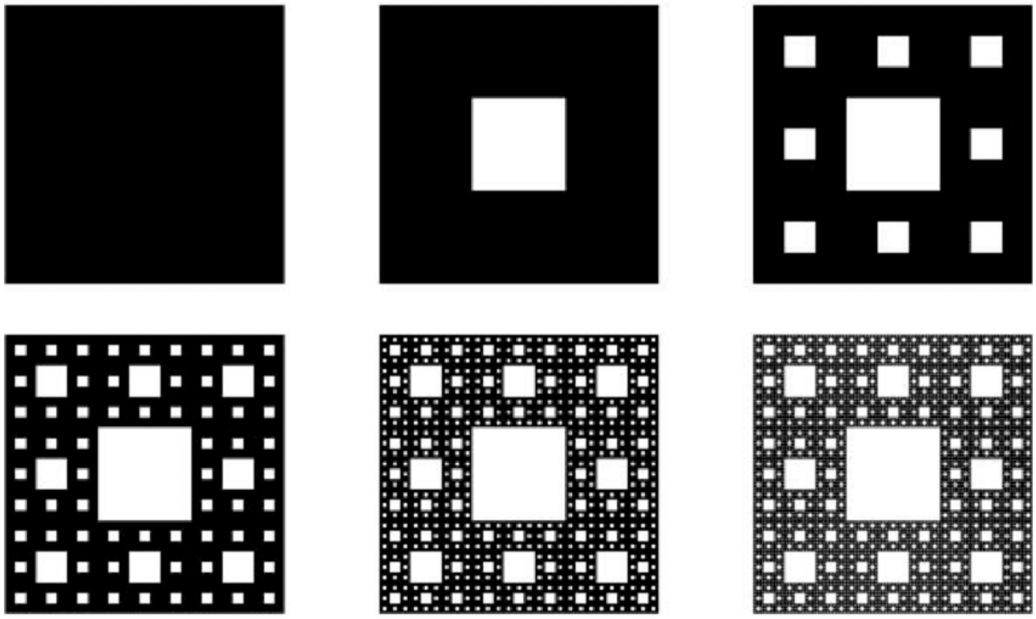


Figura 10: Alfombra de Sierpinski

Supongamos que partimos de un cuadrado de lado $l = 1$ y queremos construir su alfombra de Sierpinski. Entendemos por perímetro de la figura a los bordes que quedan al suprimir los cuadrados. Contestad a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es su perímetro inicial?
- ¿Cuál es su perímetro tras la primera iteración?
- ¿Y tras la segunda y la tercera?
- ¿Qué crees que le sucedería al perímetro si siguiésemos realizando iteraciones? ¿Crecería cada vez más, decrecería o se acercaría a algún valor?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Cuál es el área tras una iteración?
- ¿Y tras dos o tres iteraciones?
- ¿Qué crees que le pasará al área si realizásemos más iteraciones?

Supongamos ahora que tenemos un cuadrado de lado desconocido l.

- ¿Cuál es su permímetro inicial?
- ¿Cuál es el perímetro tras realizar una, dos o tres iteraciones?
- ¿Qué le sucede al perímetro cuando seguimos realizando iteraciones? ¿Se comporta como el de longitud $l = 1$ o depende de la medida del segmento?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Y su área tras una, dos o tres iteraciones?
- ¿Crees que el área se comportará igual que en el caso en el que el segmento medía una unidad?

¿Qué dificultades pueden encontrar?
El caso de la alfombra de Sierpinski es muy similar al del triángulo de Sierpinski, solo que en este caso se trabaja con cuadrados y no con triángulos, por lo que en este caso el cálculo simbólico se simplifica bastante.

Ficha 4: Copo de nieve de Koch

Para construir el copo de nieve de Koch utilizamos un algoritmo similar al que se usa para construir la curva de Koch, pero esta vez partiremos de un triángulo equilatero y haremos la curva de Koch tomando como segmento cada lado, es decir, dividimos cada lado en tres partes iguales, eliminamos la parte central y la sustituimos por un triángulo equilatero. En la siguiente iteración realizamos el mismo proceso con cada uno de los segmentos que tenemos en la nueva figura. Si seguimos de manera indefinida obtendríamos el copo de nieve de Koch, nombrado así por su similitud con un copo de nieve. La figura 11 muestra las primeras iteraciones de la construcción del copo de nieve.

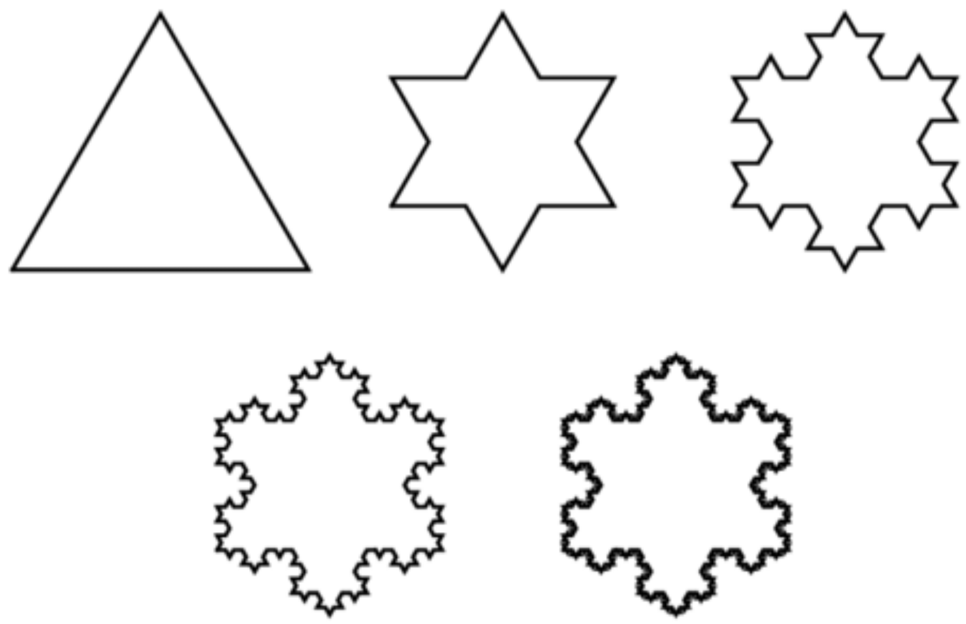


Figura 11: Copo de nieve de Koch

Supongamos que partimos de un triángulo equilatero de lado $l = 1$ y queremos construir su copo de nieve de Koch. Responded a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es su perímetro inicial?
- ¿Cuál es su perímetro tras la primera iteración?
- ¿Y tras la segunda y la tercera?
- ¿Qué crees que le sucedería al perímetro si siguiésemos realizando iteraciones? ¿Crecería cada vez más, decrecería o se acercaría a algún valor?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Cuál es el área tras una iteración?
- ¿Y tras dos o tres iteraciones?
- ¿Qué crees que le pasará al área si realizásemos más iteraciones?

Supongamos ahora que tenemos un triángulo equilatero de lado desconocido l.

- ¿Cuál es su permímetro inicial?
- ¿Cuál es el perímetro tras realizar una, dos o tres iteraciones?
- ¿Qué le sucede al perímetro cuando seguimos realizando iteraciones? ¿Se comporta como el de longitud $l = 1$ o depende de la medida del segmento?
- ¿Cuál es su área inicial?
- ¿Y su área tras una, dos o tres iteraciones?
- ¿Crees que el área se comportará igual que en el caso en el que el segmento medía una unidad?

¿Qué dificultades pueden encontrar?
El copo de nieve de Koch se podría tratar como una curva de Koch en cada uno de los lados del triángulo, por lo que las dificultades que pueden encontrar serían similares a las de la curva de Koch. En este caso también pueden tener problemas para identificar cuantos nuevos triángulos aparecen en cada iteración.

Sesión 5

En esta sesión el alumnado trabajará en grupos para confeccionar material para realizar una exposición. Lo que se pretende es que todo este material quede expuesto en algún lugar del instituto para que lo puedan ver el resto de estudiantado del centro.
A cada grupo se le asignará un fractal matemático y deberán de buscar información sobre el fractal asignado y deberán de hacer una representación en dos o tres dimensiones en función del material que les toque.
La información requerida en cada uno de los fractales será:

- Perímetro. Solo en el caso en el que el fractal sea una curva plana como el triángulo de Sierpinski.
- Área. Tanto si el fractal es una curva en el plano como una superficie en el espacio.
- Volumen. Solo si es una superficie en el espacio.
- Algoritmo para la construcción del fractal.
- Dimensión fractal.

Las construcciones que podemos encontrar son

Fractal 1: El triángulo de Sierpinski

En [6] (Fractales en papel, 2016) encontramos el algoritmo paso a paso de como confeccionar un triángulo de Sierpinski con papel. El resultado a obtener es el siguiente:

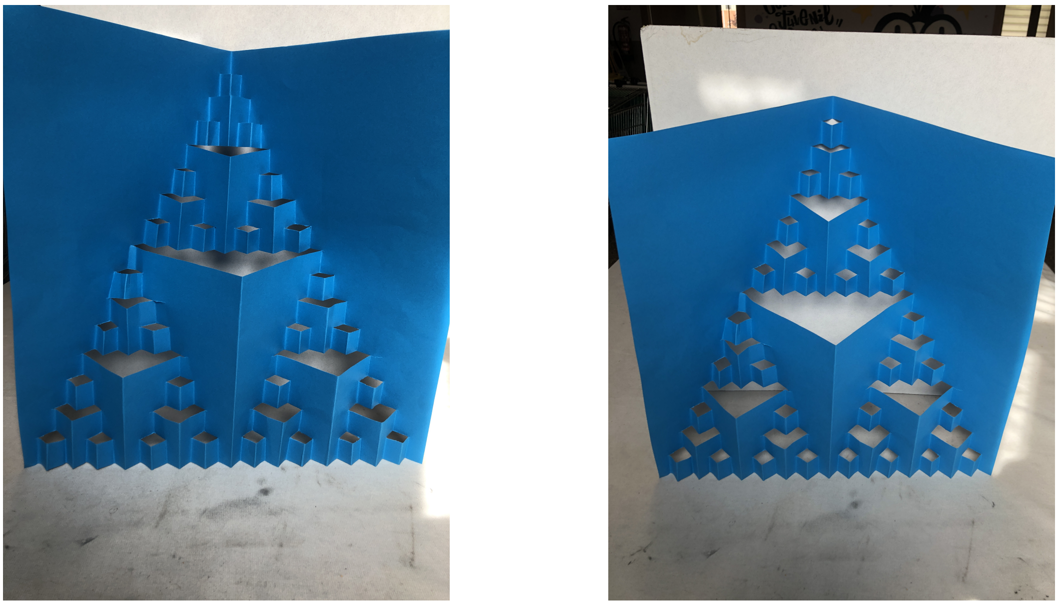


Figura 12: Triángulo de Sierpinski en una cartulina

Fractal 2: La esponja de menger

En [15] se muestra como confeccionar una esponja de Menger a partir de papel. El resultado que buscamos obtener es el que vemos en la figura 13.

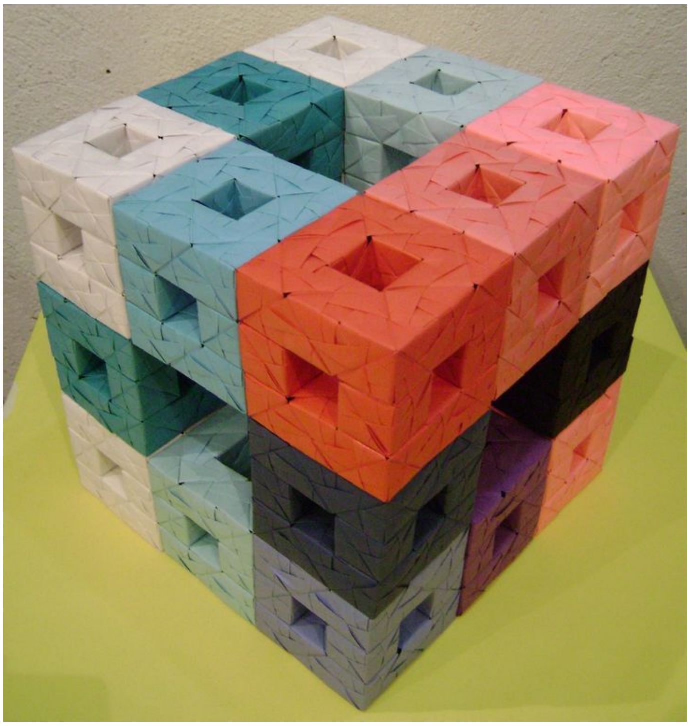


Figura 13: Esponja de Menger con papel

Fractal 3: Tetraedro de Sierpinski

En [10] encontramos el procedimiento para construir una pirámide de Sierpinski, el resultado buscado es el que se ve en la figura 14.

Figura 14: Tetraedro de Sierpinski

Fractal 4: Escalera fractal.

Podremos encontrar el procedimiento para construir la escalera fractal con papel en [7] (García, 2009). La figura resultante es la que aparece en la figura 15.

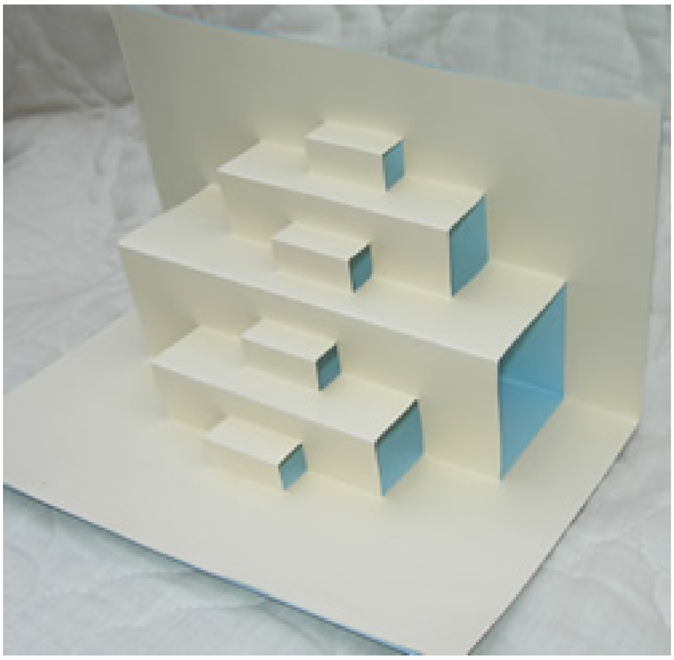


Figura 15: Escalera fractal

Sesión 6 A continuación cada grupo deberá de exponer al resto de componentes de la clase el trabajo realizado, es importante que expliquen:

- Cómo se construye el fractal que se les ha asignado.
- Sus propiedades (área, volumen, dimensión...).
- Cómo lo han construido ellos con papel y boli.

Saldrán por turnos a exponer frente al resto de alumnos y alumnas. En cada grupo deberán de hablar todos y todas. Tras realizar su exposición el resto de la clase dispondrá de 5 minutos para hacer preguntas si lo consideran oportuno.

Sesión 7 En esta última sesión se realizará una evaluación de la actividad. Esta evaluación la realizará cada estudiante de manera individual y constará de dos partes.
La primerá parte consitirá en una ficha con una serie de preguntas que servirán a el o la docente para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes. Las preguntas a realizar serán:

- ¿Cómo definirías un fractal?
- ¿Dónde podemos encontrar fractales en la naturaleza?

- Nombra algunos fractales que conozcas.
- Dibuja alguno de los fractales que has aprendido mediante esta actividad

La segunda parte es la que se usará para ver que sensaciones han tenido los alumnos y las alumnas al realizar la actividad y que se debería mejorar o adaptar de cara a realizar la actividad en futuras ocasiones. Se realizará mediante una serie de preguntas.

- ¿Cómo te has sentido al trabajar junto a otros u otras estudiantes? ¿Crees que os habéis repartido bien el trabajo o que algunos han trabajado más? ¿Qué cambiarías de vuestra forma de trabajar?
- ¿Qué te ha parecido interesante de los fractales? ¿Los conocías antes de realizar esta actividad?
- ¿Crees que construir un fractal con papel te ha servido para entenderlos mejor?
- ¿Hay algo del contenido visto en clase qué no te ha quedado claro o qué crees que se podría explicar mejor?
- ¿Te ha gustado la metodología que se ha seguido? ¿Qué cambiarías?
- Por último, si te ha quedado algo por comentar es el momento de que lo hagas libremente.

3.7. Materiales y espacios

Para poder desarrollar esta actividad, es importante tener en cuenta el material que va a necesitar el estudiantado y el profesorado para poder trabajar.
Espacios necesarios:

- Aula en la que se suele desarrollar la clase.
- Aula de informática.

Material necesario:

- Cartulinas.
- Pegamento.
- Tijeras.
- Proyector.
- Móvil (solo en el caso en el que no se pueda acceder al aula de informática).

3.8. Evaluación de la actividad

Por último dentro de lo que es la propia actividad faltaría establecer un criterio de evaluación, es decir, como vamos a evaluar como docentes esta actividad. La propuesta que se realiza en este trabajo es la siguiente:

- Un 20 % de la nota de la actividad saldrá de las fichas de ejercicios entregadas. La nota será la misma para todo el grupo.. Se valorará:
    - 20 % la presentación.
    - 50 % que expresen sus razonamientos y cálculos con claridad.
    - 30 % que los cálculos realizados sean correctos.
- Un 60 % el material realizado. Se valorará:
    - 30 % el fractal realizado, teniendo en cuenta sobre todo el estado en el que se encuentre (bien construido y no hecho de cualquier manera). La nota será la misma para todo el grupo.
    - 30 % La información que acompaña al fractal, valorando que esté toda la información que se pedía, que esté organizada, bien explicada... La nota será la misma para todo el grupo.
    - 40 % La exposición realizada al resto de la clase. Aquí se valorará que se use el lenguaje adecuado, que participe todo el grupo, que sean claros... La nota será individual.
- 20 % restante será de las preguntas de evaluación que responderán en la última sesión. La nota será individual.

4. Conclusiones

Creo que esta actividad puede ser muy beneficiosa para alumnado de secundaria. Por una parte por la importancia que se le da al trabajo cooperativo, que como ya he comentado antes, creo que es fundamental para aprender matemáticas. Por otro lado, el hecho de que los alumnos y alumnas tengan un margen de trabajo autónomo en el que construir su propia visión de los conceptos puede potenciar su independencia para estudiar nuevos conceptos en el futuro.

Me gustaría destacar los fractales como la herramienta principal de este trabajo para cubrir los objetivos propuestos. Creo que el hecho de poder encontrarlos frecuentemente en la naturaleza hace que sean un objeto matemático atractivo para el estudiantado, ya que pueden ver su relación directa con el mundo que les rodea. También creo que es muy positivo que sean objetos matemáticos que se construyen paso a paso hasta el infinito, es decir, permite al alumnado entender el procedimiento constructivo de los fractales y ayudarles a intuir que es lo que pasará tras infinitas iteraciones. En otras palabras, permitirá a los alumnos y alumnas llegar al concepto infinito abstracto a partir de objetos finitos que conocen.

Por otra parte, creo que también puede ser muy positivo que conozcan ramas de las matemáticas relativamente recientes, por que esto les puede conectar más con la disciplina y hacerles ver que sigue siendo un campo de estudio activo y que se sigue renovando.

5. Valoración personal

En general mi valoración del trabajo realizado es bastante positiva. Cuando empecé a confeccionar este material, lo hice pensando en algo que me resultase interesante como matemático, pero que pudiese llegar también al alumnado. Eso me llevó a escoger el tema de los fractales, que es algo que desde que conozco me ha llamado bastante la atención.

Por una parte me quedo muy satisfecho con los conocimientos matmemáticos que he tenido que adquirir para poder desarrollar el marco teórico. Siempre me han gustado mucho las matemáticas teóricas y está bien seguir trabajándolas de vez en cuando.

Además, conforme he ido confeccionando los materiales, las sesiones, buscando información..., he pensado que es un tipo de actividad que me hubiese gustado mucho poder realizar cuando era estudiante, y confío en que si alguna vez se realiza con estudiantes de secundaria, ellos podrán disfrutar y aprender realizándola.

Me hubiese gustado mucho haber podido poner en práctica esta actividad en las prácticas (o al menos una versión reducida) pero por falta de tiempo no pude llegar a realizarla. Pero espero poder ponerla en práctica en un futuro próximo trabajando como docente.

Referencias

[1] Carrillo Siles, B. (2009) Dificultades en el aprendizaje matemático. https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_16/BEATRIZ_CARRILLO_2.pdf

[2] Decreto 87/2015, de 5 de junio, por el que se estable el currículo y se desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Valenciana. Diari Oficial de la Generelatit Valenciana, núm. 7544, pp. 17437 a 18582 (11 de junio de 2015)

[3] Derivando. (2015, 11 noviembre). ¿Qué son los fractales? [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Wea_1L-C9Xo&t=3s

[4] En 1 minuto. (2021, 25 marzo). ¿QUÉ SON LOS FRACTALES? — Introducción a los FRACTALES [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=tv3Wj7ou_v8&t=4s

[5] Faith Karakus. (2015) Investigation into how 8th grade students define fractals. Theory practice, 15(3) pp 825-836.

[6] FRACTALES EN PAPEL. (2016, 3 noviembre). Matemática y algo más. Recuperado 21 de junio de 2022, de https://profmate.wordpress.com/fractales-en-papel/

[7] García Mollá, J. (2009, 19 enero). Escalera Fractal con tijeras [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=nCOk2zjhxLk

[8] IES Professor Broch i Llop (Vila-real). (2019, 12 abril). Integrados Ies Broch i Llop. Recuperado 23 de junio de 2022, de http://estamosintegrados.blogspot.com/p/ies.html

[9] Lemnismath. (2020, 27 enero). La paradoja de la costa ROMPE la REALIDAD — Fractales [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=uK1unoVNtMs

[10] Lopez, J. (2011, 7 noviembre). PROCESO PARA CONSTRUCCION DE PIRAMIDE DE SIERPINSKI.wmv [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=f2eAmfGnqo8

[11] Mandelbroit, B. (1975) Les objects fractals: forme, hasard et dimension. Flammarion.

[12] Mandelbrot, B (1967) How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. Science vol. 156, pp. 636-638.

[13] Mandelbrot, B (1982) The fractal geometry of nature. W. H. Freeman and Company.

[14] Marcel Francia, J. (2021, 5 abril). Fractales - ¿Qué son? [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=_W6HUHhXBWU

[15] Montero, L. S. (2022, 21 junio). Construcción de la esponja de Menger con papel. Construye la geometría. Recuperado 21 de junio de 2022, de http://construyelageometria.blogspot.com/2013/06/construccion-de-la-esponja-de-menger.html

[16] Montesdeoca Pérez, P. (2005, enero) Cómo Resolver Problemas. Longitud y Área de Curvas Fractales. Dimensión Fractal. `https://personales.ulpgc.es/angelplaza.dma/ficheros/resolver/ficheros/fractales.pdf`

[17] Reda Abu Elwan. (2014) The effect of teaching Chaos Theory and fractal Geometry on geometric reasoning skills of secondary students. International journal of research in education methodology. vol. 6, pp. 804-814.

[18] Richardson, L.F. (1961) en General Systems Yearbook 6, 139.

[19] Sada, M. S. (2017, 8 enero). Fractales. GeoGebra. Recuperado 23 de junio de 2022, de `https://www.geogebra.org/m/tUD6vpFr`

[20] Salesianos Burriana. (2018, 14 marzo). PROYECTO F. Recuperado 23 de junio de 2022, de `https://sites.google.com/salesianos.edu/blogmates1/proyecto-f?authuser=0`

[21] Socas robayna, Martín M. (2010). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Universidad de la Laguna. `https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificutades-errores-y-obstc3a1culos-en-el-azaje-de-la-matemc3a1tica.pdf`

[22] Zapata-Ros, M. (2015, 22 octubre) Integración de la GEOMETRÍA FRACTAL en las Matemáticas y en la Informática, de Secundaria. Academia. `https://www.academia.edu/17172269/Integracion-de-la-GEOMETRIA-FRACTAL-en-las-Matematicas-y-en-la-Informatica-de-Secundaria?auto=downloademail-work-card=download-paper`