COLECCIÓN CONOCIMIENTO CONTEMPORÁNEO

Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: perspectivas metodológicas

Coordinadoras
Alba Vico Bosch
Luisa Vega Caro
Olga Buzón García

Dykinson, S.L.

Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: Perspectivas metodológicas

ENTORNOS VIRTUALES PARA LA EDUCACIÓN EN TIEMPOS DE PANDEMIA: PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

Coordinadoras

ALBA VICO BOSCH
LUISA VEGA CARO
OLGA BUZÓN GARCÍA

Dykinson, S.L.

2021

ENTORNOS VIRTUALES PARA LA EDUCACIÓN EN TIEMPOS DE PANDEMIA: PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

Diseño de cubierta y maquetación: Francisco Anaya Benítez

Madrid - 2021
N.º 33 de la colección Conocimiento Contemporáneo
1ª edición, 2021

ISBN 978-84-1377-640-8

UTILIZACIÓN DE LA MODELIZACIÓN Y SIMULACIÓN PARA LA DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

AITOR ALFONSO CASTELLÓ
Universitat Oberta De Catalunya

ISMAEL CABERO FAYOS
Universitat Jaume I

BALTASAR ORTEGA BORT
Universidad Internacional de la Rioja

1. INTRODUCCIÓN

En cualquiera de los niveles educativos se estudian los diferentes significados de la probabilidad, empezando por el intuitivo, pasando por el Laplaciano, por el frecuencial, para finalmente establecer su definición axiomática (Batanero, 2005). En muchas ocasiones se suelen explicar precipitadamente las técnicas matemáticas del cálculo de probabilidades. El alumnado presenta, en ocasiones, dificultades para comprender conceptos matemáticos que fundamentan, en este caso, la teoría de la probabilidad, esto provoca una barrera para el posterior aprendizaje y consolidación de nuevos razonamientos, "entre los principales obstáculos identificados para el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes, se encuentra el excesivo énfasis que algunos profesores hacen en el enfoque clásico de la probabilidad, con frecuencia centrado en el uso de procedimientos rutinarios y técnicas combinatorias para el cálculo de probabilidades" (Godino, Batanero y Cañizares, 1996).

Tal como indica Batanero (2005), es importante renovar la enseñanza de la probabilidad volviéndola más experimental, de forma que pueda proporcionar al alumnado una experiencia estocástica desde su infancia. De hecho, según Barragués y Guisasola (2009), la competencia, por parte del alumnado, de los conceptos relacionados con la concepción frecuencial de la probabilidad conlleva serias dificultades incluso en niveles universitarios. Es por ello, que proponemos una modelización empírica de un problema clásico de probabilidad como procedimiento para una mejor comprensión de sus definiciones clásica y frecuencial por parte del alumnado, esta modelización será llevada a cabo conjuntamente por el alumnado y por el profesor, teniendo en cuenta en la etapa educativa que se encuentren.

Dentro del estudio de la probabilidad y sus fenómenos nos encontramos la definición de probabilidad frecuencial. Su método de estudio con respecto a los eventos y atributos se basa en grandes cantidades de iteraciones, observando así la tendencia de cada uno a largo plazo o incluso con infinitas repeticiones. En la modelización del problema elegido se pretende exponer los conceptos de iteración, repetición, frecuencia e infinito que aparecen en la definición de probabilidad frecuencial de manera que, el futuro profesorado de secundaria pueda así utilizar otra técnica para la facilitar la comprensión por parte del alumnado del concepto de probabilidad.

Es por ello que nos centraremos en el enfoque frecuencial de la definición de probabilidad y, mediante la modelización y simulación de los problemas, abordaremos su comprensión por parte del alumnado utilizando, como ya se ha indicado, los conceptos de iteración, repetición, frecuencia e infinito. La modelización como estrategia didáctica, surge como un medio que permite la creación o uso de modelos matemáticos a través del planteamiento de problemas en contexto (Niss, Blum y Galbraith, 2007). Tal como indican Lesh y Yoon, (2007), la estrategia del uso de la modelización de situaciones/problemas, permite relacionar la vida real de los estudiantes con las matemáticas en el aula.

Además, podemos destacar que el uso de las TIC, en este caso concreto el software de modelización, va a suponer un revulsivo para el aprendizaje del alumnado y tal como nos indica Valencia (2019):

- La competencia digital juega un papel muy relevante en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, no debe ser abordado como una materia en particular, sino integrada en todo el conjunto de materias.

Es por ello que, mediante la modelización y junto con las herramientas informáticas, se abordarán conceptos matemáticos y de esta manera se pretende que sea un elemento inspirador para el alumnado.

2. MODELIZACIÓN

Son muchas las definiciones que existen sobre modelización matemática, pero la mayoría de autores coinciden en que la modelización matemática es el proceso que relaciona el mundo real y las matemáticas, todo esto a través de un modelo matemático. El modelo matemático unirá el problema-situación real mediante objetos y relaciones matemáticas.

Según Pollak (1969), los pasos o etapas básicas que conforman la modelización son:

- Identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender.
- Seleccionar objetos particulares importantes para la pregunta hecha e identificar relaciones entre ellos.
- Decidir cuáles son útiles e ignorar los que no lo son.
- Trasladar esta versión en términos matemáticos, obtener fórmulas matemáticas para esta pregunta determinada y resolver el problema.

Enseñar la probabilidad como una actividad de modelización y no como un conjunto de teoremas matemáticos que se deducen de una serie de axiomas no es una tarea sencilla (Batanero, 2002). La Comisión Inter-IREM para la enseñanza de la estadística y probabilidad nos sugiere modelizar los problemas de la siguiente manera (Dantal, 1997):

1. Observación de la realidad.
2. Descripción simplificada de la realidad.

3. Construcción de un modelo.
4. Trabajo matemático con el modelo.
5. Interpretación de resultados en la realidad.

Podemos adecuar estos pasos para la modelización de un problema probabilístico, de la siguiente manera:

1. Observación del problema probabilístico a resolver.
2. Descripción simplificada del problema a resolver.
3. Construcción del modelo.
4. Trabajo matemático con el modelo y simulación experimental del modelo mediante herramientas informáticas.
5. Comparación de los resultados de la simulación con el resultado teórico.

En el primer paso tendremos que elegir cuidadosamente una experiencia aleatoria, ya que esto nos va a permitir reproducirla mediante un modelo y así poder reproducir la situación en las mismas condiciones para analizar los diferentes resultados que se producen. Una vez aceptada la aleatoriedad de la situación, en el paso 2 debemos realizar una descripción simplificada de la misma que nos permita pasar de la realidad observada (paso 1) a la construcción del modelo (paso 3). Para ello tomamos unos aspectos de ésta y prescindimos de otros (Coutinho, 2001). Una vez construido el modelo pasaremos al punto 4 donde lo trabajaremos matemáticamente, sin resolverlo teóricamente debido a su complejidad en las etapas educativas que nos encontramos, se indicará al menos, cuáles son los resultados teóricos que deben darse. Es en este punto donde, también, lanzaremos la simulación y obtendremos los resultados frecuenciales. Por último, en el punto 5, compararemos estos resultados con el comportamiento real de la situación analizada y decidiremos si el modelo matemático nos proporciona una buena descripción de la realidad.

En muchos de estos problemas, la resolución formal matemática, no pertenece al nivel educativo donde se presentan, pero, al utilizar este enfoque experimental, nos permite introducir problemas de cálculo de probabilidades más avanzados a edades más tempranas, prescindiendo de su resolución teórica y obteniendo su solución de manera práctica. Muchos problemas complejos se resuelven hoy día mediante simulación y mostrar al alumnado ejemplos sencillos de esta técnica puede servir para ilustrar su aplicabilidad a campos y problemas reales. En la enseñanza de la estocástica en secundaria, la simulación cobra papel importante, ya que ayuda al alumnado a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica (Batanero, 2005).

Es lógico comparar los resultados obtenidos en la simulación con los teóricos, ya que no debemos olvidar que esta solución no ha de darse como válida, la solución correcta es aquella que se obtiene mediante las técnicas formales del cálculo de probabilidades.

2.1. Roles del alumnado y del profesor

Es lógico pensar que, para simular un problema, el docente y el alumnado desarrollarán una serie de roles específicos cada uno. Para ello, la metodología a utilizar en el aula será completamente diferente a la utilizada tradicionalmente (Doerr, 2006).

El docente será el encargado de elegir el problema probabilístico a modelizar, además, se encargará de explicar los razonamientos matemáticos que permiten obtener la solución del problema teórico y ayudar al alumnado para la implementación del modelo matemático en el software que se va a utilizar para la simulación (Doerr 2007). Según Burkhardt (2006), el rol que asume el profesor en el momento de modelizar en el aula un problema es el de asesor, observador y gestor de los recursos, esto está en clara contraposición con la resolución tradicional de problemas donde el profesor dirige, explica y propone las tareas. Será necesario que el profesor asesore y guíe adecuadamente al alumnado en la mejor dirección para que puedan modelizar y resolver el problema con éxito.

El alumnado deberá en su caso, realizar las predicciones en la simulación del problema, obtener resultados y compararlos con los resultados teóricos, de esta manera, ya como se ha comentado, se sugieren situaciones reales y se relaciona matemáticamente mediante un modelo. Según Pollak (2007), el alumnado adquiere habilidades matemáticas y les permite aproximar resultados y compararlos, llegando a conclusiones de su veracidad o no. La contextualización de fenómenos observables, de la vida real, más próximos al alumnado, se hace necesario para movilizar ideas menos académicas y más próximas a sus explicaciones sobre el mundo que les rodea (Lupión-Cobos, 2017).

2.2. Definiciones clásica y frecuencial de la probabilidad.

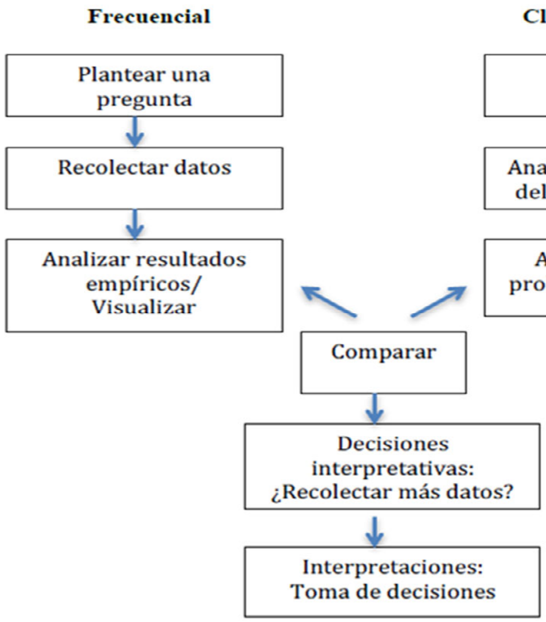
La definición clásica de probabilidad ha sido la más utilizada en la enseñanza, debido sobre todo a su relación con los juegos de azar. Es por estos juegos de azar que matemáticos como, Cardano, Huygens y Fermat muestran interés y fundamentan las bases del futuro cálculo de probabilidades. Una primera definición de probabilidad es dada por De-Moivre y es refinada posteriormente por Laplace (1995), dando lugar a la conocida Ley con su nombre, la probabilidad es la proporción entre casos favorables entre todos los casos posibles del espacio muestral. Pero según nos indica Gea (2017),

> …esta definición es circular pues el término "equiprobable" se incluye en la definición y solo se puede aplicar a experimentos con un número finito de posibilidades. Sin embargo, se usa mucho en la escuela a propósito de los juegos, motivadores y fáciles de aplicar, pero el rango de aplicaciones que se puede mostrar con este enfoque es muy limitado.

Es Bernoulli et al. (1987), mediante la Ley de los grandes números, quien nos introduce a la definición frecuencial de la probabilidad, no indica que la probabilidad de un evento viene dada a partir de las frecuencias relativas de los resultados favorables en un experimento aleatorio que es repetido, bajo las mismas condiciones un número suficientemente grande de veces. La teoría frecuencial fue desarrollada principalmente por Richard Von Mises y Hans, ligados al Círculo de Viena. La versión de Reichenbach aparece en su libro *The Theory of Probability* de 1949. Y la de Von Mises fue publicada en un *paper* de 1919 de nombre *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, en un libro de 1928 titulado *Probability, Statistics and Truth*, y en uno póstumo de 1964, *Mathematical Theory of Probability and Statistics*.

En la didáctica de la probabilidad debe tenerse en cuenta los enfoques clásico y frecuencial de esta, además deben de mostrarse cuales son las relaciones entre estas dos definiciones (Inzunza, 2017). Según el mismo autor vemos en el siguiente esquema cuáles son esas conexiones:

FIGURA 1. *Esquema con las conexiones entre las definiciones de la Probabilidad.*



Fuente: Inzunza (2017)

Teniendo en cuenta estas dos definiciones se implementará en el aula un modelo matemático probabilístico para así conseguir que el alumnado le sea más comprensible la teoría de la Probabilidad, con el fin de conseguir este objetivo nos apoyaremos en la tecnología, en este caso el software *Arena Simulation*. Se utilizará esta tecnología para la simulación del modelo, la extracción de resultados y su posterior análisis y comparación con los reales. Aparte de las definiciones de la probabilidad se abordarán otros conceptos matemáticos como; eventos aleatorios, porcentajes, iteraciones, el concepto de infinito, entre otros. Metodológicamente se realizará previamente el cálculo de uno de los problemas clásicos de la probabilidad, que suele presentarse en niveles más avanzados de la enseñanza pero que, aprovechando este enfoque experimental, permite mostrar la solución en edades más tempranas. Se representa la solución analítica, utilizando la teoría de grafos, para después mostrar el mismo problema utilizando un software de modelización y resolverlo experimentalmente y así aplicar el concepto de probabilidad frecuencial.

3. DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN MODELO, EL PROBLEMA 2 DE HUYGENS

A continuación, diseñaremos una situación problema basada en modelación matemática para trabajar con el alumnado. Para diseñar el problema seguiremos las etapas referentes a la modelización mencionadas anteriormente para, a continuación, construir el modelo en el software de simulación *Arena Simulation*. A modo de ejemplo utilizaremos el problema clásico número 2 de Huygens y lo resolveremos de forma teórica, seguidamente, se implementará y se simulará en diversos números de iteraciones para así comparar los resultados obtenidos con los valores teóricos.

Las etapas para el diseño y simulación del modelo serán semejantes a las descritas en los anteriores apartados:

1. Presentación del problema.
2. Resolución teórica.
3. Modelización e implementación en un software.
4. Simulación y comparación de los resultados con los teóricos.

Veamos a continuación con más detalle estas etapas.

3.1. Presentación del Problema

Es recomendable introducir al alumnado el marco histórico del este problema con el fin de poder reflejar esa relación entre las matemáticas y situaciones de la vida real.

El holandés Christian Huygens (1629-1695), conoció la correspondencia que se cruzaron, durante el verano de 1654, entre Blaise Pascal y Pierre Fermat suscitada por el caballero De Méré, donde se plantea el debate de determinar la probabilidad de ganar una partida interrumpida para repartirse el dinero apostado de la manera más justa posible. Es por esto que Huygens decide publicar el primer libro sobre probabilidad: *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Huygens, 1980). Este libro, considerado el primer tratado de probabilidad, aparece el concepto de esperanza y consolida las bases del futuro cálculo de probabilidades.

Al final del tratado de Huygens, encontramos cinco ejercicios propuestos por el autor y no resueltos, aunque en tres de ellos se da la solución. Estos, se constituyeron en un verdadero reto durante los siguientes 60 años. Matemáticos como Hudde, Spinoza, Montmort, de Moivre, Jacques Bernoulli y Struyck resolvieron algunos de ellos o los resolvieron todos (Basulto, 2007).

Huygens, en los años posteriores a la publicación de su tratado, fue abordando la resolución de estos problemas, pero sus resoluciones no vieron la luz hasta que no fueron recogidas en las Obras Completas del autor y publicadas por la Sociedad Holandesa de las Ciencias entre finales del siglo XIX y principios del XX (Basulto, 2007).

El problema que queremos modelizar en clase y simularlo es el segundo y su enunciado es el siguiente:

> Tres jugadores A, B y C toman 12 bolas de las que 4 son blancas y 8 negras; ganará el que primero haya sacado una blanca. A elegirá el primero, B a continuación, después C, después de nuevo A, y así sucesivamente, por turnos. Encontrar la probabilidad de ganar de cada jugador.

Una de las peculiaridades de este problema es que aparece por primera vez el concepto de reemplazamiento. Huygens y su amigo Hudde, resolviendo este problema, discuten en los términos del muestreo, si debe de realizarse con reemplazamiento o sin reemplazamiento de las bolas.

3.2. Resolución teórica

Una vez presentado al alumnado el problema, con el fin de poder comparar los resultados de la simulación con los reales será necesario resolverlo. En este paso será decisión del docente resolverlo matemáticamente o proporcionar al alumnado los resultados reales de las probabilidades.

Está claro que la resolución de este problema no pertenece a la etapa educativa de la secundaria, pero, tal como ya hemos comentado, nos será necesario conocer las probabilidades a las que queremos llegar para poder comparar con las estimaciones que realice el software de apoyo. Existen varias maneras de resolver este problema, aquí se explicará la resolución mediante cadenas de Markov (Engel, 1976).

Vamos a considerar este problema como un proceso estocástico o aleatorio. Un proceso estocástico recorre en el tiempo una serie de estados, al conjunto de todos los estados lo llamaremos Espacio de estados y en nuestro problema se considera discreto y finito.

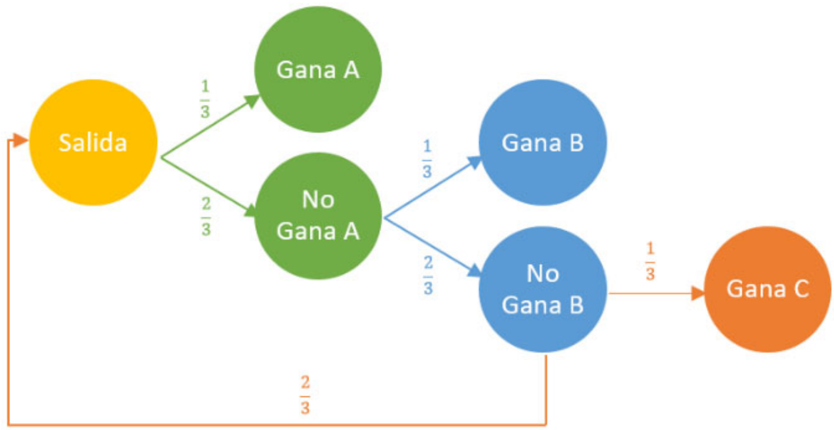
Ahora transformaremos también el parámetro del tiempo de continuo a discreto, observaremos el experimento de sacar una bola a los 0, 1, 2, 3, … segundos, minutos, horas…

El proceso estocástico se representará mediante un grafo, donde los estados se representarán con la ayuda de círculos con su nombre en el interior. Si es posible una transición desde el estado i hasta el estado j se trazará una flecha desde i a j. Se indicarán encima de ellas la probabilidad de transición desde el estado i al estado j, (p_{ij}). Además, un proceso estocástico está completamente determinado si se conoce el estado desde donde se inicia el recorrido. Por último, llamaremos estados absorbentes, aquellos donde finaliza el proceso, las probabilidades de estos estados son 0 o 1 dependiendo de cuál es la probabilidad que se desee calcular.

Este proceso fue estudiado por Andréi Markov (1856-1922), que lo introdujo en 1906, es por ello que este proceso estocástico descrito hasta ahora, se denomina cadena de Markov. Una cadena es un proceso en tiempo discreto en el que una variable aleatoria va cambiando con el paso del tiempo. Las cadenas de Markov tienen la propiedad de que la probabilidad de cada estado de la variable aleatoria sólo depende del estado inmediatamente anterior del sistema.

Seguimos con el problema de Huygens, el grafo que representa la cadena de Markov será el siguiente:

FIGURA 2. *Grafo con la cadena de Markov del problema.*



Fuente: elaboración propia

Como se observa, el grafo tiene tres estados absorbentes: Gana A, Gana B y Gana C. Lo que nos interesa es calcular la probabilidad hasta llegar a cada uno de esos tres estados. Para ello podemos formular, gracias al teorema de la probabilidad total, la siguiente regla llamada "primera regla del valor medio":

> La probabilidad de un estado interior es igual a la media ponderada de las probabilidades de sus estados vecinos.

Para calcular la probabilidad que desde la salida llegue a ganar A, los estados absorbentes Gana B y Gana C tendrán probabilidad cero mientras que la probabilidad del estado absorbente Gana A será 1:

$$P(Salida\ hasta\ llegar\ a\ Gana\ A) = s;$$

$$P(Gana\ A) = 1\ ;\ P(Gana\ B) = P(Gana\ C) = 0;$$

$$P(No\ Gana\ A) = a;\ P(No\ Gana\ B) = b$$

Utilizando la primera regla del valor medio obtenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot a \\ a = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot b \\ b = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot s \end{cases}$$

Cuya solución nos proporciona la probabilidad que desde la $Salida$ lleguemos al estado absorbente de $Gana\ A$.

$$P(Salida\ hasta\ llegar\ a\ Gana\ A) = s = \frac{9}{19}$$

Análogamente calcularemos la probabilidad de que $Gana\ B$, teniendo en cuenta ahora las siguientes probabilidades:

$$P(Salida\ hasta\ llegar\ a\ Gana\ B) = s = \frac{6}{19}$$

Por tanto, la probabilidad que $Gana\ C$:

$$\begin{aligned} &P(Salida\ hasta\ llegar\ a\ Gana\ C) = \\ &\qquad = 1 - P(Salida\ hasta\ llegar\ a\ Gana\ A) \\ &\qquad - P(Salida\ hasta\ llegar\ a\ Gana\ B) = \frac{4}{19} \end{aligned}$$

En el siguiente apartado, se resolverán estas probabilidades simulando numéricamente el proceso estocástico a través del software Arena y se comprobará que repitiendo la experiencia aleatoria muchas veces a lo largo del tiempo nos aproximamos a estos resultados (Ley de los grandes números).

3.3. Modelización e implementación en un software

Para modelizar el problema utilizaremos el gráfico descrito en la Figura 2 y lo implemenntaremos en un software de simulación. La teoría de grafos para la construcción de modelos va a permitir al alumnado adquirir y desarrollar razonamientos matemáticos como la intuición, el diseño y descubrimiento de hipótesis (Braicovich y Cognigni, 2011). Utilizándolos como herramienta nos va a poder modelar el problema planteado.

Arena Simulation es un software de simulación y automatización de eventos discretos que permite el estudio de sistemas reales complejos. La simulación es el diseño de un modelo a partir de un sistema de la vida real, en nuestro caso el problema número dos planteado por Huygens. La simulación nos va a permitir experimentar sobre dicho modelo para describir, explicar y predecir el comportamiento del sistema real. Mediante la simulación no aspiramos soluciones analíticas y exactas del problema, sino a una mejor comprensión del sistema o problema que estamos estudiando.

En este apartado no se pretende una explicación del funcionamiento de los módulos y características de este software, ya que se presupone conocido por el lector, sino que lo que se aspira es a la traducción de un modelo matemático a la herramienta informática del problema de Huygens que nos ocupa para así poder ser simulado por parte del alumnado y que este sea capaz de extraer sus conclusiones de los resultados obtenidos.

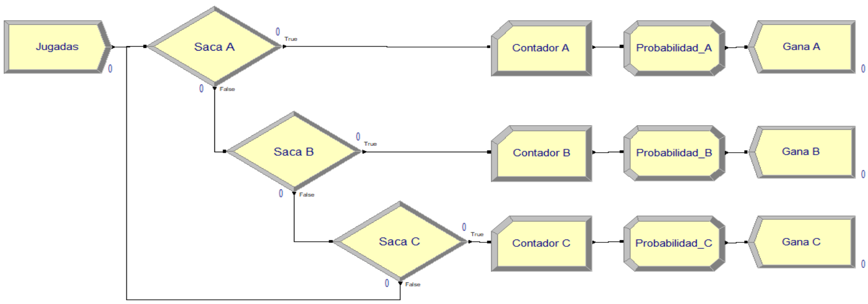
Veamos las correspondencias entre el problema definido anteriormente como una cadena de Markov y la construcción del modelo en Arena. Para construir el modelo de experimento se colocan módulos. Estos módulos representarán los diferentes estados que definimos en la sección anterior. Además, también representarán procesos lógicos que corresponden a las distintas probabilidades de extracción de las bolas por parte de los jugadores.

El modelo generará a través del tiempo considerado discreto, una entidad cada segundo, cada minuto, … Una entidad en nuestro problema no es más que un objeto (en nuestro caso no real) que avanza a través del sistema.

Al igual que el grafo de la cadena de Markov, en Arena se utilizan líneas de conexión para unir los diferentes módulos y especificar el camino que van a seguir las entidades del problema.

El diseño del modelo se observa en la siguiente imagen y refleja gran similitud con el grafo de la cadena de Markov.

FIGURA 3. *Modelo desarrollado en Arena Simulation*



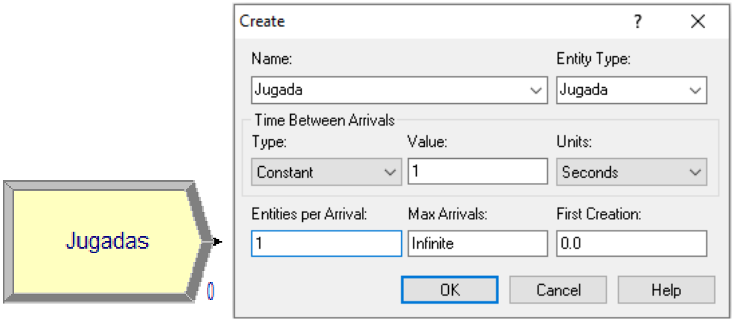
Fuente: elaboración propia

A continuación, se expondrán con más detalle los módulos utilizados.

Módulo CREATE

Este módulo representa la creación y llegada de entidades al modelo de simulación. Hemos creado una entidad no real llamada "Jugada". Como queremos que el parámetro tiempo sea discreto le indicamos al módulo que cada entidad sea creada de manera constante cada segundo.

FIGURA 4. *Menú Módulo Create*

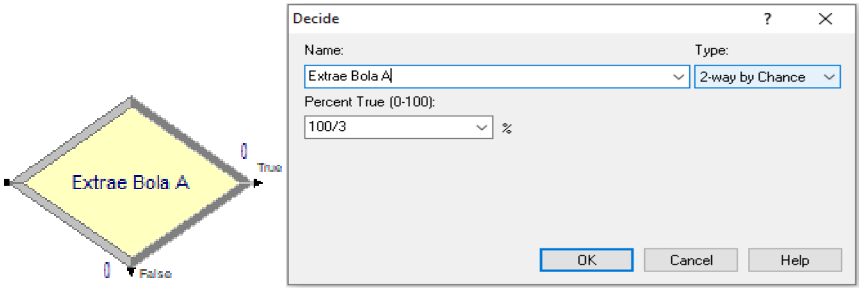


Fuente: elaboración propia

Módulo DECIDE

Este módulo va a permitir al proceso tomar decisiones en el sistema. Nuestro proceso va a ser la extracción de bola por parte de los tres jugadores. Este módulo de decisión guiará a la entidad a través del sistema según la probabilidad de sacar bola blanca o no.

FIGURA 5. *Menú Módulo Decide*



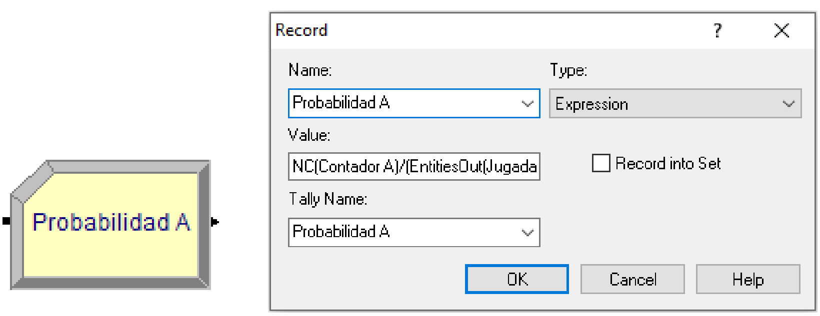
Fuente: elaboración propia

Módulo RECORD

Este módulo se usa para recoger estadísticas del modelo de simulación. El primer RECORD es un contador de las entidades que recorren el camino de haber extraído la bola blanca. De esta manera a continuación, situamos un segundo RECORD del tipo *expression* para calcular la probabilidad de *Ganar A* mediante la sentencia:

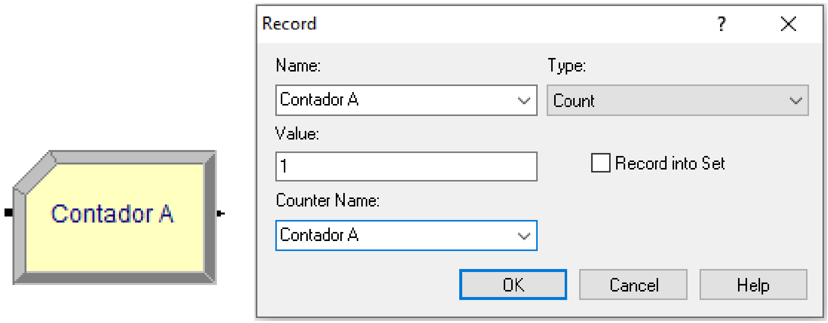
$$NC(Contador\ A)/(EntitiesOut(Jugada)+1)$$

FIGURA 6. *Menú Módulo Record (1)*



Fuente: elaboración propia

FIGURA 7. Menú Módulo Record (2)

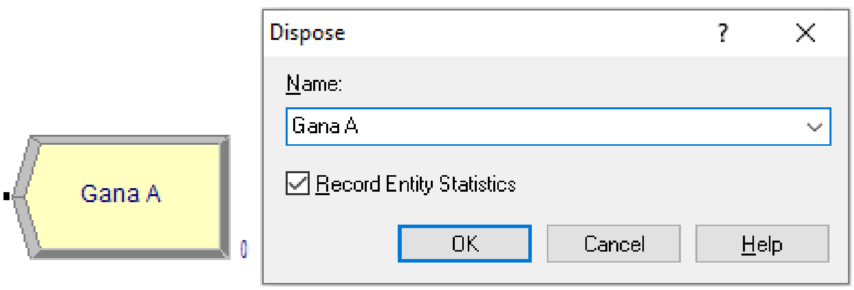


Fuente: elaboración propia

Módulo DISPOSE

En último lugar utilizaremos este módulo, que corresponde con los tres estados absorbentes de la cadena de Markov. Este módulo representa la salida de las entidades en un modelo de simulación.

FIGURA 8. Menú Módulo Dispose



Fuente: elaboración propia

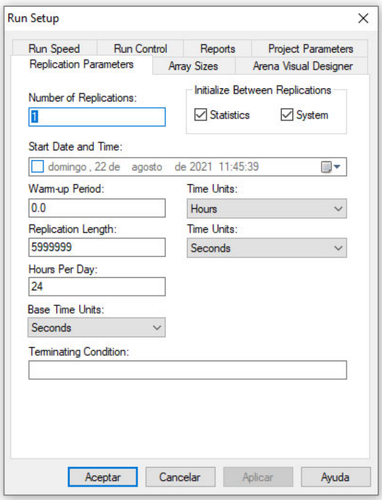
Como vemos, la implementación en el software no es complicada, pero sí que lo puede ser para el alumnado.

3.4. SIMULACIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS CON LOS TEÓRICOS

Una vez confeccionado el modelo se procede a su ejecución en el tiempo y se comprueban los resultados obtenidos mediante los estadísticos utilizados en el software. Esta es la etapa que ha de permitir al alumnado comprender mejor los conceptos de probabilidad.

El alumnado debe de simular el modelo para diferentes tiempos 60.000, 600.000, 6.000.000 y 60.000.000 en segundos dentro del *Run Setup*. De esta manera podrá observar experimentalmente como se acercan los valores obtenidos a los valores reales.

FIGURA 9*. Run Setup*



Fuente: elaboración propia

Vemos a continuación los resultados.

TABLA 1*. Resultados obtenidos para la Probabilidad que gana A*

Valor Real	Nº Jugadas	Valor obtenido	Error
$P(Ganar\ A) = \frac{9}{19} \cong 0{,}47368421$	60.000	0.4716	0,0020842
	600.000	0.4721	0,0015842
	6.000.000	0.4732	0,0004842
	60.000.000	0.4735	0,0001842

Fuente: elaboración propia

Tal como se observa en la tabla 1, los resultados de la simulación van acercándose a los reales. Esta forma de resolución mediante la simulación nos permitirá incluir el concepto de iteración junto con el de infinito y haciendo uso de la ley de los grandes números concluir con el alumnado que la solución al problema planteado es suficientemente correcta un número alto de repeticiones.

4. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado la necesidad de incluir la modelización matemática de los problemas de probabilidad como herramienta didáctica. Este diseño del modelo apoyado mediante las nuevas tecnologías permite la adquisición y afianzamiento de los conceptos básicos de probabilidad por parte del alumnado, además este uso de la modelización permite una relación más cercana con la vida cotidiana.

Se ha observado el cambio de la metodología tradicional donde el docente se ocupa de explicar, proponer y demostrar otra manera de abordar los problemas. Esta forma de plantear, implementar y simular los problemas implica una mayor autonomía por parte del alumnado. La simulación y comparación de los resultados, ya sea de manera individual o trabajando en grupos, permite también una manera de relacionar las matemáticas y el mundo real, favoreciendo que el alumnado pueda validar los datos obtenidos.

Principalmente el objetivo básico era conseguir una mayor comprensión de los conceptos teóricos de probabilidad, mediante la ejecución de un modelo matemático en un software informático. Este se consigue modelizando por parte del alumnado y simulando ese modelo. En todos los pasos debe de ser tutorizado por el profesor, ya que, aunque se pretende que el alumnado sea independiente en sus decisiones, este pueda realizar el problema con éxito. Será necesario por parte del profesorado varias tareas introductorias como la resolución matemática del modelo, la explicación del software de implementación, así como la elección de las actividades o situaciones a modelizar adecuadas al cálculo de probabilidades. Los resultados muestran que una utilización de software de modelización de eventos permite explicar el comportamiento a largo plazo de los sucesos a estudiar de una manera menos teórica y más intuitiva para su comprensión por parte del alumnado.

Cabe destacar el uso de las nuevas tecnologías por parte del docente para el uso en las aulas, que permite una relación entre los conceptos matemáticos y el uso de la vida cotidiana, y permite la transversalidad entre las diferentes asignaturas que conforman el currículum del estudiante de secundaria.

La forma de aproximación a la solución de problemas de probabilidad utilizando la modelización matemática, reduce el nivel de abstracción de las definiciones. Esto permite que el alumnado pueda, mediante casos prácticos modelizados, alcanzar la comprensión del concepto de probabilidad frecuencial, para posteriormente, ser ampliado a su definición axiomática.

Las dificultades del alumnado para comprender conceptos matemáticos que fundamentan, en este caso, la teoría de la probabilidad, provoca una barrera para el posterior aprendizaje y consolidación de nuevos razonamientos. De esta manera, será fundamental proporcionar herramientas a futuros profesores para que estos puedan explicar a su alumnado, mediante diferentes alternativas, esos conceptos básicos matemáticos.

5. REFERENCIAS

Basulto Santos, J., & Pérez Hidalgo, M. D. (2007). La resolución de Montmort (1708, 1713) de los cinco problemas propuestos por Huygens en su tratado (1657). In IV Congreso Internacional de Historia de la Estadística y de la Probabilidad (2007), p 407-420. Universidad de Huelva.

Barragués Fuentes, J. I., & Guisasola Aranzabal, J. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. Educación matemática, 21(3), 127-162.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8(3), 247-263.

Batanero, C. (2002). Estadística y didáctica de la matemática: Relaciones, problemas y aportaciones mutuas. Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales, 1, 95-120.

Bernoulli, J., Lalande, B., & Meusnier, N. (1987). Jacques Bernoulli & l'“Ars conjectandi”: documents pour l'étude de l'émergence d'une mathématisation de la stochastique. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Université de Rouen.Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. ZDM, 38(2), 178-195.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In Teaching Statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education (pp. 85-95). Springer, Dordrecht.

Countinho, C. (2001). Introduction aus situations aléatoires des le Collège: de la modélisation a la simulation d'experiences de Bernoulli dans l'environment informatique Cabri-géométre- II. Tesis Doctoral. Universidad de Grénoble.

Dantal, B., & Henry, M. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité [The betting of modelling in probability]. Enseigner les probabilités au lycée, 57-59.

Doerr, H. (2006). Teachers´ Ways of Listening and Responding to Students´ Emerging Mathematical Models. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(3), 255-268.

Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In Modelling and applications in mathematics education (pp. 69-78). Springer, Boston, MA.

Engel, A., 1976. Probabilidad y Estadística. Ed: Mestral.

Gallart, C., Ferrando Palomares, I., & García Raffi, L. M. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. Modelling in Science Education and Learning, 12(1), 71-86.

Gea, María Magdalena; Parraguez, Rafael; Batanero, Carmen (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En Muñoz, José María; Arnal-Bailera, Alberto; Beltrán-Pellicer, Pablo; Callejo, María Luz; Carrillo, José (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 267-276). Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Godino, J., Batanero, C., & Cañizares, M. (1996). Teoría matemática elemental de la probabilidad. J. Godino, C. Batanero, & MJ Cañizares, Azar y Probabilidad, 144-152..

Huygens, C. (1980). De ratiociniis in ludo aleae. Ex officinia J. Elsevirii.

Inzunza, S. (2017). Conexiones entre las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional. Avances de Investigación en Educación Matemática, 11, 69-86.

Kelton, W. D., 2007. Simulation with Arena. 2rt ed. Ed: McGraw Hill.

Lakoma, E. (2007). Learning mathematical modelling—From the perspective of probability and statistics education. In Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 387-394). Springer, Boston, MA.

Laplace P. S. (1995). Théorie analytique des probabilities. Ed: Jacques Gabay.

Lesh, R., & Yoon, C. (2007). What is Distinctive in (Our Views about) Models & Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching? In Modelling and applications in mathematics education (pp. 161-170). Springer, Boston, MA.

Lupión-Cobos, T., López-Castilla, R., & Blanco-López, Á. (2017). What do science teachers think about developing scientific competences through context-based teaching? A case study. International Journal of Science Education, 39(7), 937-963.

Pollak, H. (1969). How can we teach applications of mathematics? Educational studies in mathematics, 393-404.

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling—A conversation with Henry Pollak. In Modelling and applications in mathematics education (pp. 109-120). Springer, Boston, MA.

Rossetti, M. D., 2016. Simulation Modeling. Ed: Wiley.

Altiok, T. BM (2007). Simulation Modeling and Analysis with Arena. Ed: Elsevier.

Valencia, A. J. A., & De Casas Moreno, P. (2019). El uso de las TIC como herramienta de motivación para alumnos de enseñanza secundaria obligatoria. Estudio de caso español. Hamut´ ay, 6(3), 37-49.

Zaldívar Rojas, J. D., Quiroz Rivera, S. A., & Medina Ramírez, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. IE Revista de investigación educativa de la REDIECH, 8(15), 87-110.