Universidad Jaume I

Máster en Matemática Computacional

Semigrupos numéricos y curvas con un lugar en el infinito

Autora: Silvia Gonzalo Santos

Tutor: Julio Moyano Fernández

Noviembre 2021

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la relación entre los semigrupos numéricos y ciertos aspectos geométricos de las curvas con un lugar en el infinito, y de forma más general del caso de curvas polinomiales.

Para desarrollar esta memoria ha sido necesario familiarizarnos con conceptos como las δ-sucesiones características, los semigrupos planares y valoraciones, así como las sucesiones que forman las raíces aproximadas de la ecuación que define una curva con un lugar en el infinito.

Todo ello nos ha servido para entender los principales resultados relacionados con este tema, como el Teorema del Semigrupo de Abhyankar-Moh y su recíproco dado por Sathaye y Stenerson. Además, nos ha permitido ampliar el estudio a resultados más recientes derivados de los planteamientos aplicados al caso general de curvas polinomiales.

Abstract

The purpose of this work is to study the relationship between numerical semigroups and certain geometric aspects of curves with a single place at infinity, and in a broader sense to polynomial curves.

In order to develop this work it has been necessary to get used to some concepts such as characteristic δ-sequences, planar semigroups and valuations, as well as the sequences formed by the approximate roots of the equation that defines the curve with a single place at infinity.

Those have been the keys to study the main results concerning this topic, such as Abhyankar-Moh's Semigroup Theorem and its reciprocal given by Sathaye and Stenerson. Furthermore, this let us extend this work to more recent results concerning the general case of polynomial curves.

Índice general

Introducción

La presente memoria estudia la relación existente entre los subconjuntos de los enteros no negativos cerrados por la suma y cuyo complementario en $\mathbb{N}$ es finito (semigrupos numéricos) y las curvas definidas sobre un cuerpo de característica cero algebraicamente cerrado tales que su clausura interseca con la recta en el infinito del plano proyectivo en un único punto y son localmente irreducibles en ese punto (curvas con un lugar en el infinito).

Para relacionar estos objetos que a priori parecen tan distantes, necesitamos introducir la definición de δ-sucesión característica, esto es, sucesiones de enteros positivos cuyos términos satisfacen determinadas condiciones que explicaremos en el trabajo. Estas δ-sucesiones características generan semigrupos numéricos con propiedades especiales a los que llamaremos semigrupos planares, siguiendo la terminología de Sathaye y Stenerson en [14].

Por otra parte, si tenemos un polinomio f en dos variables X e Y sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado que satisface ciertos requerimientos, podemos definir una curva mediante $f = 0$ y si además el grado de f en Y no es congruente con cero módulo la característica del cuerpo sobre el que está definido, entonces podremos decir que la curva definida por f tiene un lugar en el infinito.

Dada una curva C con un lugar en el infinito, existe un semigrupo de valores $\Gamma(C)$ formado por los órdenes de los polos para elementos de ciertas funciones regulares que se pueden asociar a C; es más, esto lleva a probar que $\Gamma(C)$ está generado por ciertos valores que forman una δ-sucesión característica que se puede computar como los órdenes de los polos de las llamadas raíces aproximadas de la ecuación que define a C, esto es, $f = 0$.

Estas raíces aproximadas de la curva definida por f forman lo que denominaremos una g-sucesión, y los términos de la δ-sucesión característica son los órdenes de polo de estas raíces aproximadas, lo que nos da la relación entre el semigrupo planar generado por esta δ-sucesión característica y las raíces aproximadas de la curva. Además, las imágenes módulo k de los monomios estándar en esta g-sucesión forman la base de un k-espacio vectorial en el anillo de coordenadas de la curva definida por f.

En esta memoria se presentan algunos resultados cuyas demostraciones requieren del manejo de conceptos que escapan al alcance de este trabajo, como el operador de Tschirnhausen, los desarrollos en serie de Puiseux o las deformaciones de series de potencias. Esto se debe a que hay otras maneras de trabajar los aspectos geométricos relacionados con el tema que nos ocupa, por ejemplo, también se puede establecer que una curva algebraica irreducible en el plano complejo afín $\mathbb{C}^2$ tiene un lugar en el infinito si la normalización de la curva es analíticamente isomorfa a una superficie de Riemann compacta agujereada en un punto.

Nosotros esquivaremos este enfoque en medida de lo posible, aunque algunos resultados aquí presentados se pueden demostrar utilizando estos planteamientos junto con herramientas topológicas como el estudio del grafo dual de la resolución minimal de la singularidad de la curva en el infinito. Para más información sobre estas cuestiones puede consultarse, por ejemplo, [15].

El primer capítulo de esta memoria está dedicado a introducir la definición de semigrupo numérico junto con sus elementos más representativos, como los conjuntos de Apéry, número de Frobenius o el conductor (sección 1.1); introducir las δ-sucesiones características y algunos aspectos relacionados con su computación en GAP (sección 1.2); y la definición y propiedades principales de los semigrupos planares, es decir, semigrupos generados por δ-sucesiones características (sección 1.3).

El segundo capítulo establece de manera más formal el vínculo entre las δ-sucesiones características y las curvas con un lugar en el infinito mediante el uso de valoraciones, definiendo el semigrupo de valores de la curva (sección 2.1) para después introducir las g-sucesiones y sumergirse en los resultados más importantes que nos permiten establecer bajo qué condiciones existe un semigrupo de valores generado por una δ-sucesión característica para un polinomio conocido, y recíprocamente, bajo qué condiciones una δ-sucesión característica dada tiene asociada una curva con un lugar en el infinito cuyo semigrupo de valores sea el semigrupo numérico generado por la δ-sucesión característica.

Los resultados que proporcionan respuesta a estas cuestiones son, respectivamente, el Teorema del Semigrupo de Abhyankar-Moh y el Teorema de Sathaye-Stenerson, publicado en la principal referencia bibliográfica de este trabajo, [14], cuyo esquema se ha seguido para la elaboración de esta memoria. Además, también incluyen la existencia de la g-sucesión, y que esta g-sucesión efectivamente representa las raíces aproximadas de f y el semigrupo numérico generado por la δ-sucesión característica representa el conjunto de grados de los monomios estándar.

La sección final del segundo capítulo (sección 2.3) trata los avances sobre la siguiente cuestión planteada por Abhyankar: dado un semigrupo planar, ¿existe una curva polinomial tal que su δ-sucesión característica asociada genere dicho semigrupo planar? Veremos brevemente los diversos avances que publicaron diferentes autores hasta que Fujimoto, Suzuki y Yokoyama proporcionaron una respuesta a esta pregunta en su publicación [8], del año 2004.

Capítulo 1

Semigrupos numéricos y δ-sucesiones

Como hemos dicho, el objetivo de esta memoria es estudiar la relación entre los semigrupos numéricos generados por δ-sucesiones características y las singularidades en el infinito de curvas polinomiales. Para conseguir dicha meta, debemos empezar por introducir las definiciones de semigrupo numérico y δ-sucesión característica, así como los aspectos más relevantes de estos objetos, antes de continuar nuestro camino hacia los resultados principales del segundo capítulo.

El presente capítulo trata los mencionados aspectos de los semigrupos numéricos y las δ-sucesiones características, e ilustra mediante el uso de la herramienta computacional GAP y su paquete para semigrupos numéricos NumericalSgps, algunos ejemplos de los objetos que definiremos. Además veremos algunas funciones del paquete NumericalSgps que resultan de gran utilidad.

1.1. Semigrupos numéricos

Comencemos esta primera sección definiendo qué es un semigrupo numérico, para después introducir sus elementos más relevantes para el desarrollo del tema que nos ocupa:

Definición 1.1. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de enteros no negativos. Un *semigrupo numérico* es un subconjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{N}$ cerrado por la suma, que contiene el cero y cuyo complementario en $\mathbb{N}$ es finito.

Nótese que la condición de que su complementario en $\mathbb{N}$ sea finito es equivalente a que el máximo común divisor de sus elementos sea 1.
Si $a_1, ..., a_n$ son enteros positivos con $\text{mcd}(a_1, ..., a_n) = 1$, entonces el conjunto

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle = \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \in \mathbb{N}\}$$

es un semigrupo numérico. Además, todo semigrupo numérico es de esta forma.

El estudio de semigrupos numéricos es equivalente al estudio de las soluciones enteras no negativas de ecuaciones diofánticas lineales, es decir, de ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes enteros positivos: Dados $a_1, ..., a_n$ enteros positivos y primos relativos, el conjunto de elementos $b \in \mathbb{N}$ tales que existe solución entera no negativa para $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ forma un semigrupo numérico.

Más adelante explicaremos como esto nos permite utilizar los semigrupos numéricos para el estudio de las singularidades de curvas planas.

Definición 1.2. Diremos que $a_1, ..., a_n$ forman un *sistema de generadores* para el semigrupo numérico S si todo elemento de S se puede expresar como combinación lineal de su sistema de generadores, es decir, si $\langle a_1, ..., a_n \rangle = S$. Si existe un sistema de generadores de S finito, diremos que S es *finitamente generado.*
En caso de que ningún subconjunto de $\{a_1, ..., a_n\}$ sea un sistema de generadores para S, diremos que es un sistema de generadores *minimal* para S.

Observemos que si $\langle a_1, ..., a_n \rangle = S$, entonces $\mathrm{mcd}(a_1, ..., a_n) = 1$ y recíprocamente, si $a_1, ..., a_n$ es un conjunto de enteros no negativos tales que se tiene $\mathrm{mcd}(a_1, ..., a_n) = 1$, entonces $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ es un semigrupo numérico.

Definición 1.3. Se define la *dimensión de inmersión* de un semigrupo numérico S como el cardinal de su sistema minimal de generadores, y la denotaremos por $e(S)$.

Definición 1.4. Se define la *multiplicidad* de un semigrupo numérico S como el más pequeño de los elementos de S, y la denotaremos por $m(S)$.

La multiplicidad es también el menor de los elementos que forman un sistema de generadores minimal para S y da una cota superior para la dimensión de inmersión de un semigrupo numérico, es decir, $e(S) \leq m(S)$. La razón es que dos generadores minimales no pueden ser congruentes módulo la multiplicidad del semigrupo numérico.

Definición 1.5. Diremos que un semigrupo numérico tiene *máxima dimensión de inmersión* si se da la igualdad $e(S) = m(S)$.

Los semigrupos numéricos con máxima dimensión de inmersión son particularmente interesantes debido a ciertas aplicaciones en el álgebra conmutativa y a sus propiedades maximales. Existen dos subclases dentro de los semigrupos numéricos con máxima dimensión de inmersión, formados por aquellos que cumplen la propiedad de Arf y aquellos que son saturados. Estas dos familias de semigrupos numéricos están relacionadas con la resolución de ciertas singularidades en una curva, es decir, poseen un significado geométrico.

Definición 1.6. Diremos que un semigrupo numérico tiene la propiedad de *Arf* si para todo $x, y, z \in S$ tales que $x \geq y \geq z$ se cumple que $x+y-z \in S$.

Definición 1.7. Diremos que un semigrupo numérico es *saturado* si dados $s, s_1, ..., s_r \in S$ tales que $s_i \leq s$ para todo $i = 1, ..., r$ y $z_1, ..., z_r \in \mathbb{Z}$ son tales que $z_1 s_1 + ... + z_r s_r \geq 0$, se tiene que $s + z_1 s_1 + ... + z_r s_r \in S$.

Definición 1.8. Se dice que un elemento de un semigrupo numérico S es *primitivo* si no es la suma de dos elementos no nulos de S.

Introduzcamos ahora el número de Frobenius, que en términos de ecuaciones diofánticas representa, para un semigrupo numérico S con sistema de generadores $a_1, ..., a_n$, el entero más grande para el que no existe solución entera no negativa de $a_1 x_1 + ... + a_n x_n = b$.

Definición 1.9. Se define el *número de Frobenius* de un semigrupo numérico S como el mayor entero positivo que no pertenece a S. Denotaremos este número por g.

En [4], A. Assi y P. A. García-Sanchez proporcionan un método computacional para hallar con GAP todos los posibles sistemas de generadores para semigrupos numéricos con un número de Frobenius dado.

Existe otro elemento dentro de un semigrupo numérico de gran interés (como veremos más adelante) que está íntimamente relacionado con el número de Frobenius:

Definición 1.10. Se define el *conductor* de un semigrupo numérico S como el menor entero no negativo perteneciente a S tal que todos los enteros mayores que él también pertenecen a S. El conductor de un semigrupo numérico es igual a su número de Frobenius más uno.

Otros subconjuntos de los semigrupos numéricos de gran utilidad son los conjuntos de Apéry, pues son un sistema de generadores del semigrupo numérico no minimal, que nos permitirán demostrar la finitud de cualquier sistema minimal de generadores de un semigrupo numérico:

Definición 1.11. Sea S un semigrupo numérico, y sea $n \in S$ un elemento no nulo. Se define el *conjunto de Apéry de n en S* como

$$\mathrm{Ap}(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}.$$

Lema 1.12. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S$ un elemento no nulo. Entonces*

$$\mathrm{Ap}(S,n) = \{w(0) = 0, w(1), ..., w(n-1)\},$$

donde $w(i)$ es el elemento de S más pequeño congruente con i módulo n, para todo $i = 0, ..., n-1$.

Demostración. Basta observar que si S es semigrupo numérico, entonces para todo $i = 1, ..., n-1$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $i + kn \in S$. □

El Lema 1.12 implica que el conjunto de Apéry de n en S consta de n elementos, y además nos proporciona el siguiente corolario:

Corolario 1.13. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S$ un elemento no nulo. Entonces para todo $s \in S$ existe un único par $(k, w) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Ap}(S,n)$ tal que $s = kn + w$.*

Para la demostración de que todo semigrupo numérico es finitamente generado necesitaremos de los conjuntos de Apéry y del siguiente resultado auxiliar:

Lema 1.14. *Sea S un semigrupo numérico y denotemos $S \setminus \{0\}$ por S^*. Entonces $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema minimal de generadores para S. Además, todo sistema de generadores para S contiene a $S^* \setminus (S^* + S^*)$.*

Demostración. Sea $s \in S$. Empecemos por ver que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema de generadores para S:
Si $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, entonces existen x e y en S^* tales que $s = x + y$. Repitiendo este argumento para x e y y dado que $x, y < s$, tras un número finito de pasos obtenemos una colección de elementos $s_1, ..., s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ tales que $s = s_1 + ... + s_n$. Por tanto, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema de generadores para S.
Sea ahora A otro sistema de generadores para S, y tomemos $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ no nulo, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}$, y $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$. Puesto que $x \notin S^* + S^*$, tenemos que $x = a_i$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$, luego $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema minimal de generadores para S y cualquier otro sistema de generadores para S lo contiene. □

Como decíamos, este Lema 1.14 nos permite demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.15. *Todo semigrupo numérico admite un sistema minimal de generadores. Además, este sistema minimal de generadores es finito.*

Demostración. En el Lema 1.14 vimos que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es el sistema minimal de generadores para S. Por el Corolario 1.13, para todo $n \in S^*$ se tiene que $S = \langle \mathrm{Ap}(S,n) \cup \{n\} \rangle$. Como $\mathrm{Ap}(S,n) \cup \{n\}$ es finito, ocurre que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ también lo es. □

Definición 1.16. Sean S un semigrupo numérico y $\{a_1, ..., a_n\}$ un sistema minimal de generadores para S. Sean $d_1 = a_0$, $d_i = \text{mcd}(d_{i-1}, a_{i-1})$ y $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$ para $i = 2, ..., n+1$. Diremos que S es un semigrupo numérico *libre* si satisface las siguientes condiciones:

1. $n_i > 1$ para $i = 1, ..., n$.
2. $n_i a_i \in \langle a_0, ..., a_{i-1}\rangle$ para $i = 1, ..., n$.

Dado un semigrupo numérico S con un sistema minimal de generadores $\{n_1, ..., n_e\}$, Para todo $i = 2, ..., e$ podemos definir ciertas constantes que pueden resultar de utilidad:

- $d_i = \text{mcd}(n_1, ..., n_{i-1})$,
- $\bar{c}_i = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_i \text{ es múltiplo de } d_i\}$,
- ${c_i}^* = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_i \in \langle n_1, ..., n_{i-1}\rangle\}$,
- $c_i = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_i \in \langle n_1, ..., n_{i-1}, n_{i+1}, ..., n_e\rangle\}$,

Las constantes $\bar{c}_i$ se pueden utilizar para expresar de manera única cualquier entero como combinación lineal de $n_1, ..., n_e$:

Lema 1.17. *Sea S un semigrupo numérico con $\{n_1, ..., n_e\}$ un sistema minimal de generadores. Entonces todo $z \in \mathbb{Z}$ se puede expresar de manera única como $z = \lambda_1 n_1 + ... + \lambda_e n_e$, con $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_i \in \{0, ..., \bar{c}_i - 1\}$ para todo $i = 2, ..., e$.*

Demostración. Puesto que $\text{mcd}(n_1, ..., n_e) = 1$, existen $\mu_1, ..., \mu_e \in \mathbb{Z}$ tales que $z = \mu_1 n_1 + ... + \mu_e n_e$. Por el algoritmo de la división, existen $q, \lambda_e \in \mathbb{Z}$ tales que $\mu_e = q\bar{c}_e + \lambda_e$ con $0 \leq \lambda_e < \bar{c}_e$. Por tanto, $z = \mu_1 n_1 + ... + \mu_{e-1} n_{e-1} + q\bar{c}_e n_e + \lambda_e n_e$. Sustituyendo $\bar{c}_e n_e$ por su expresión en términos de $n_1, ..., n_{e-1}$ y utilizando la Identidad de Bézout, obtenemos que $z = \gamma_1 n_1 + ... + \gamma_{e-1} n_{e-1} + \lambda_e n_e$, donde $\gamma_1, ..., \gamma_{e-1} \in \mathbb{Z}$.
Repitiendo este procedimiento con los coeficientes de n_{e-1} hasta n_2 obtenemos la expresión que buscábamos.
Veamos ahora la unicidad de la expresión. Supongamos que

$$z = \lambda_1 n_1 + ... + \lambda_e n_e = \mu_1 n_1 + ... + \mu_e n_e,$$

con $\lambda_1, ..., \lambda_e, \mu_1, ..., \mu_e \in \mathbb{Z}$ tales que $\lambda_i \mu_i \in \{0, ..., \bar{c}_i - 1\}$ para todo $i = 2, ..., e$. Sea j el entero más grande en $\{1, ..., e\}$ tal que $\lambda_j \neq \mu_j$. Dado que $\lambda_1 n_1 = \mu_1 n_1$ implica que $\lambda_1 = \mu_1$, tenemos que $j > 1$.
Sin pérdida de generalidad, $\lambda_j \geq \mu_j$. Entonces

$$(\lambda_j - \mu_j)n_j = (\mu_1 - \lambda_1)n_1 + ... + (\mu_{j-1} - \lambda_{j-1})n_{j-1},$$

siendo esto un múltiplo de d_j. Por la minimalidad de $\bar{c}_j$, se tiene que $0 \leq \lambda_j - \mu_j < \bar{c}_j$ implica $\lambda_j = \mu_j$, lo que supone una contradicción. □

Ejemplo con GAP: Utilizando la librería para semigrupos numéricos de GAP NumericalSgps, podemos obtener los elementos de un semigrupo numérico:

```
gap> S:=NumericalSemigroup(3,7);
<Numerical semigroup with 2 generators>
gap> SmallElements(S);
[ 0, 3, 6, 7, 9, 10, 12 ]
gap> MinimalGeneratingSystemOfNumericalSemigroup(S);
[ 3, 7 ]
gap> EmbeddingDimension(S);
2
gap> MultiplicityOfNumericalSemigroup(S);
3
gap> FrobeniusNumberOfNumericalSemigroup(S);
11
gap> Conductor(S);
12
gap> GapsOfNumericalSemigroup(S);
[ 1, 2, 4, 5, 8, 11 ]
```

En este caso hemos definido el semigrupo numérico S generado por $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$, y vemos que con GAP podemos hallar fácilmente los elementos de S menores o iguales que el conductor de S, el sistema de generadores minimal de S, su multiplicidad y número de Frobenius, e incluso los *gaps* o *lagunas* de S: los enteros positivos que no pertenecen al semigrupo numérico, el mayor de los cuales es el número de Frobenius.

1.2. Las δ-sucesiones y GAP

La relación entre los semigrupos numéricos y las curvas con un lugar en el infinito viene dada en gran medida por el concepto de δ-sucesión característica, como explicaremos más adelante.

En esta sección veremos como las δ-sucesiones características nos proporcionan un sistema de generadores, no necesariamente minimal, para un semigrupo numérico, cumpliendo además sus términos algunas propiedades que resultarán necesarias para dar con los resultados más importantes del segundo capítulo de esta memoria.

Construcción de sucesiones características: Sea $\nu \neq 0$ un entero dado y sea J un subconjunto de los enteros inferiormente acotado. Definimos inductivamente un entero $h(\nu, J) = h$ y dos sucesiones $m(\nu, J) = (m_1, ..., m_h)$ y $d(\nu, J) = (d_1, ..., d_{h+1})$ de la siguiente manera:

1. Si $J = \emptyset$, entonces $h = 0$, $d_1 = |\nu|$ y $m(\nu, J) = \emptyset$.
2. Si $J \neq \emptyset$, sea $D = \text{mcd}(J)$, $d_1 = |\nu|$, $m_1 = \min J$ y $d_2 = \text{mcd}(m_1, d_1)$. Si $d_2 = D$, fijamos $h = 1$ y paramos.
3. Si ya hemos definido $d_1, ..., d_{r+1}$ y $m_1, ..., m_r$, y $D = d_{r+1}$, entonces fijamos $h = r$ y paramos. Si no, definimos

$$m_{r+1} = \min\{p \in J : p \not\equiv 0 \bmod d_{r+1}\} \text{ y}$$

$$d_{r+2} = \text{mcd}(m_1, ..., m_{r+1}) = \text{mcd}(d_{r+1}, m_{r+1}).$$

Nótese que $D = d_{h+1}|d_h| \cdots |d_2|d_1$.

Algunas expresiones útiles que utilizaremos más adelante relacionadas con los términos de las sucesiones características son:

· Para $i = 2, ..., h$, tenemos $q_1 = m_1$ y $q_i = m_i - m_{i-1}$. Definiremos $q_{h+1} = m_{h+1} = \infty$.

· Para $i = 1, ..., h$, se tiene $s_i = \sum_1^i q_j d_j$.

· Para $i = 1, ..., h$, fijamos $r_i = \frac{s_i}{d_i}$ y $\delta_i = -r_i$.

· Para $i = 1, ..., h$, se tiene $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$.

Nótese que en todos los casos estos números dependen de ν y J. Salvo que sea necesario, omitiremos este exceso de notación.

Definición 1.18. Sea $u \in \tau \in k(\tau)$ una serie de potencias meromorfa en τ. Dado un entero n, se define la *sucesión característica de* $u(\tau)$ como

$$J = \text{Supp } u(\tau) = \{r : \text{ el coeficiente de } \tau^r \text{ en } u(\tau) \text{ es distinto de cero}\}.$$

Entonces $m(\nu, u(\tau)) = m(\nu, J)$.
Más allá, si $f = f(X, Y)$ es un polinomio tal que

$$f(\tau^{-n}, Y) = \prod_{w^n=1} (Y - u(w\tau)),$$

donde n es el Y-grado de $f(X, Y)$, entonces todas las series de potencias $u(w\tau)$ tienen el mismo soporte y podemos definir $m(f) = m(-n, u(\tau))$.

Aunque retomaremos el detalle sobre este asunto más adelante, por ahora podemos adelantar que esto quiere decir que la curva definida por f tiene $h = h(f)$ términos característicos $m_f = (m_1(f), ..., m_h(f))$, y estos términos característicos son los que nos dan la anhelada relación entre el polinomio f y el semigrupo numérico que generan, ya que si $n \not\equiv 0 \bmod \text{char } k$, diremos que una curva definida por este tipo de polinomios es una *curva con un lugar en el infinito*.

Definición 1.19. Una sucesión de enteros positivos $(\delta_0, ..., \delta_h)$ es una δ-*sucesión característica* si satisface las siguientes condiciones:

1. Sea $d_i = \text{mcd}(\delta_0, ..., \delta_{i-1})$ para $1 \leq i \leq h+1$. Sea $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$ para $1 \leq i \leq h$, entonces $d_{i+1} = 1$ y $n_i > 1$ para todo $i \geq 2$.

2. Se tiene $\delta_i n_i \in \{\delta_0, ..., \delta_{i-1}\}\mathbb{N}$, que es el semigrupo (no necesariamente numérico) generado por $\{\delta_0, ..., \delta_{i-1}\}$.

3. Ocurre que $\delta_i < \delta_{i-1} n_{i-1} - q_i$, de forma que $q_i > 0$ para $i \geq 2$.

Definición 1.20. Diremos que una δ-sucesión característica es *no principal* si ninguno de δ_0, δ_1 divide al otro.

Existe una función implementada en el paquete NumericalSgps de GAP para determinar si una sucesión es δ-sucesión característica o no. Basta introducir sus términos de la siguiente manera y nos devuelve el resultado:

Ejemplo con GAP:

```
gap> IsDeltaSequence([42,30,57,10]);
true
gap> IsDeltaSequence([22,11,17]);
false
```

El problema es que si nos detenemos a ver qué considera GAP una δ-sucesión característica, nos encontramos con la siguiente definición:

Definición 1.21. Sea $l = (a_0, a_1..., a_h)$ un conjunto de enteros positivos. Entonces l es una δ-sucesión característica si $\text{mcd}(a_0, ..., a_h) = 1$, $\langle a_0, ..., a_h \rangle$ es libre, $a_k D_k > a_{k+1} D_{k+1}$ y $a_0 > a_1 > D_2 > D_3 > ... > D_{h+1}$, donde $D_1 = a_0$ y $D_k = \text{mcd}(D_{k-1}, a_{k-1})$.

Si la comparamos con la definición dada en la sección anterior (definición 1.19), observamos algunas diferencias. Empecemos por ver que la definición de D_i de GAP para las δ-sucesiones características es equivalente a la definición de los d_i en la definición 1.19:

El caso $i = 1$ no representa ningún problema, ya que vemos fácilmente que $D_1 = \delta_0 = \text{mcd}(\delta_0) = d_1$. Pero, ¿qué ocurre para $i > 1$? En tal caso tenemos que $D_i = \text{mcd}(D_{i-1}, \delta - i - 1) = \text{mcd}(d_{i-1}, \delta_{i-1})$. Puesto que $d_{i-1} = \text{mcd}(\delta_0, ..., \delta_{i-2})$, esto es igual a $\text{mcd}(\delta_0, ..., \delta_{i-2}, \delta_{i-1}) = d_i$. Como hemos visto que se cumple para el caso $i = 1$, el proceso de inducción nos proporciona el resultado para todo i.

Pero por desgracia esto no basta para que las dos definiciones que tenemos para δ-sucesión característica sean equivalentes. Veámoslo con un contraejemplo:

Contraejemplo: Consideremos la δ-sucesión característica $(22, 11, 17)$ y veamos si es δ-sucesión según la definición 1.19:

Para la sucesión formada por los valores $\delta_0 = 22$, $\delta_1 = 11$ y $\delta_2 = 17$, obtenemos $d_1 = \text{mcd}(22) = 22$, $d_2 = \text{mcd}(22, 11) = 11$ y $d_3 = \text{mcd}(22, 11, 17) = 1$, de forma que se cumple que $d_1 > d_2 > d_3$. Obtenemos también $n_1 = \frac{d_1}{d_2} = 2$ y $n_2 = \frac{11}{1} = 11$, siendo $n_1, n_2 > 1$. Además se tiene que $\delta_2 = 17 < \delta_1 n_1 = 11 \cdot 2 = 22$. Puesto que es evidente que $\delta_0 > \delta_1$, sólo queda comprobar que $\delta_1 n_1 = 22 \in \langle \delta_0 \rangle = \langle 22 \rangle$ y $\delta_2 n_2 = 17 \cdot 11 \in \langle \delta_0, \delta_1 \rangle = \langle 22, 11 \rangle$. Por tanto, tenemos una δ-sucesión característica según la definición 1.19.

Sin embargo:

```
gap> IsDeltaSequence([22,11,17]);
false
```

Esto nos obliga a plantearnos dónde está la razón de esta no equivalencia, es decir, para qué δ-sucesiones características las dos definiciones coinciden y para cuales no. Si conseguimos resolver esta cuestión, podremos sacar provecho de la función de GAP IsDeltaSequence() sin encontrarnos con sorpresas desagradables.

Observemos con más detenimiento la cuarta condición de la definición 1.21:

$$\delta_0 > \delta_1 > d_2 > ... > d_{h+1}.$$

Puesto que $d_2 = \text{mcd}(\delta_0, \delta_1)$, si tomamos una sucesión principal, es decir, con $\delta_0 = k\delta_1$ para algún $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, obtendremos que $d_2 = \delta_1$, con lo que no se cumplirá la desigualdad estricta $\delta_1 > d_2$ y GAP no considerará que sea una δ-sucesión característica. Sin embargo, en la definición 1.19 no se pide tal requisito, por lo que para nosotros sí que será una δ-sucesión característica y simplemente diferenciaremos que es una δ-sucesión característica principal.

Para evitar discrepancias con GAP y otras complicaciones, conviene trabajar con δ-sucesiones características formadas por sistemas minimales de generadores, ya que esto obliga, como poco, a que las δ-sucesiones sean no principales.

Estudiaremos los semigrupos generados por δ-sucesiones en la siguiente sección.

1.3. Semigrupos planares y sus propiedades

En la sección anterior, veíamos la relación entre un polinomio f y una δ-sucesión característica $(\delta_0, ..., \delta_h)$ a través de los términos característicos de la curva definida por $f = 0$.

Ahora, a través de la δ-sucesión característica podemos definir el tipo de semigrupo numérico que va a protagonizar en gran medida el siguiente capítulo de esta memoria, así como presentar algunas de sus propiedades más importantes:

Definición 1.22. Un semigrupo generado por una δ-sucesión característica se llama *semigrupo planar*. Denotaremos el semigrupo planar generado por la δ-sucesión característica $(\delta_0, ..., \delta_h)$ por $\Gamma = \{\delta_0, ..., \delta_h\}\mathbb{N}$.

Vamos a ver ahora algunas propiedades de los semigrupos planares que nos ayudarán a determinar si un semigrupo es o no planar y ver sus posibles δ-sucesiones características generadoras.

Sea Γ un semigrupo planar generado por la δ-sucesión característica $(\delta_0, ..., \delta_h)$.

· **Capa de un semigrupo planar:** Dado i con $1 \leq i \leq h$, sea $\delta_j^{'} = \frac{\delta_j}{d_{j+1}}$.
El semigrupo $\Gamma_i = \{\delta_0^{'}, ..., \delta_i^{'}\}\mathbb{N}$ es planar para todo i con $1 \leq i \leq h$, y está generado por la δ-sucesión característica $(\delta_0^{'}, ..., \delta_i^{'})$.
Llamaremos a Γ_i la *i-ésima capa de* $\Gamma = \Gamma_h$.

Demostración. Fijemos $i \in \{1, ..., h\}$ y sea $\Gamma^{'} = \{\delta_0^{'}, ..., \delta_i^{'}\}\mathbb{N}$ un semigrupo numérico. Veamos que $(\delta_0^{'}, ..., \delta_i^{'})$ es una δ-sucesión característica:
Sea $j \in \{1, ..., i\}$, entonces:

$$d_j^{'} = \mathrm{mcd}(\delta_0^{'}, ..., \delta_{j-1}^{'}) = \mathrm{mcd}(\frac{\delta_0}{d_{i+1}}, ..., \frac{\delta_{j-1}}{d_{i+1}}) =$$

$$= \frac{1}{d_{i+1}}\mathrm{mcd}(\delta_0, ..., \delta_{j-1}) = \frac{d_j}{d_{i+1}}.$$

$$n_j^{'} = \frac{d_j^{'}}{d_{j+1}^{'}} = \frac{d_j}{d_{j+1}}.$$

Con ayuda de estas igualdades, podemos comprobar fácilmente las condiciones que ha de cumplir una δ-sucesión característica por definición:
En primer lugar, $d_{i+1}^{'} = \frac{d_{i+1}}{d_{i+1}} = 1$ y $n_j^{'} = n_j > 1$ para todo $j = 1, ..., i$.
En segundo lugar,

$$n_j^{'}\delta_j^{'} \in \langle\delta_0^{'}, ..., \delta_{j-1}^{'}\rangle \iff n_j\frac{\delta_j}{d_{i+1}} \in \langle\frac{\delta_0}{d_{i+1}}, ..., \frac{\delta_{j-1}}{d_{i+1}}\rangle \iff$$

$\frac{1}{d_{i+1}}\delta_j \in \frac{1}{d_{i+1}}\langle\delta_0, ..., \delta_{j-1}\rangle \iff \delta_j \in \langle\delta_0, ..., \delta_{j-1}\rangle$ para todo $j \in \{1, ..., i\}$.

Por último,

$$\delta_0^{'} > \delta_1^{'} \iff \frac{\delta_0}{d_{i+1}} > \frac{\delta_1}{d_{i+1}} \iff \delta_0 > \delta_1, \text{ y}$$

$$n_j^{'}\delta_j^{'} > \delta_{j+1}^{'} \iff n_j\frac{\delta_j}{d_{i+1}} > \frac{\delta j + 1}{d_{i+1}} \iff n_j\delta_j > \delta_{j+1}.$$

Nótese que $(\delta_0^{'}, ..., \delta_i^{'})$ hereda su condición de δ-sucesión característica de $(\delta_0, ..., \delta_h)$. □

· **Expresión estándar:** Todo entero a puede expresarse de manera única como $a = \sum_0^h a_i\delta_i$, donde $0 \leq a_i \leq n_i - 1$, para $i \geq 1$.
Además, $a \in \Gamma$ si y sólo si $a_0 \geq 0$.
Llamaremos a esta expresión la *la expresión estándar de a respecto de la δ-sucesión característica.*

Demostración. Dado que $\text{mcd}(\delta_0, ..., \delta_h) = d_{h+1} = 1$, por la Identidad de Bézout deducimos que $a = \sum_0^h b_i\delta_i$ para $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i \geq 1$ sin pérdida de generalidad.
Supongamos que $a = \sum_0^j b_{i,j}\delta_i + \sum_{j+i}^h a_p\delta_p$, con $0 \leq a_p \leq n_p$ y $b_{i.j} > 0$ para $1 \leq i \leq j$.
En tal caso, tenemos que

$$a = \sum_0^{j-1} b_{i,j-1}\delta_i + \sum_j^h a_p\delta_p,$$

donde $0 \leq a_j \leq n_j - 1$ y $b_{i,j-1} \geq b_{i,j}$ para $0 \leq i \leq j - 1$. Puesto que partimos de una δ-sucesión característica, tenemos que $n_j\delta_j = \sum_0^{j-1} u_i\delta_i$, con $u_i \geq 0$, de forma que basta definir $b_{i,j-1} = b_i, j + u_i$ para $0 \leq i \leq j - 1$ para obtener recursivamente la expresión deseada.
Probemos ahora la unicidad de esta expresión: Supongamos que tenemos dos expresiones estándar distintas, de manera que

$$a = \sum_0^h a_1\delta_i = \sum_0^h a_i^{'}\delta_i \iff \sum_0^h (a_i - a_i^{'})\delta_i = 0.$$

Asumimos que $a_j - a_j^{'}$ es el último término no nulo, de manera que todos los anteriores son divisibles por d_j.
Entonces tenemos que $d_j|(a_j - a_j^{'})\delta_j$, lo que nos lleva a que $d_{j+1} = \text{mcd}(\delta_j, d_j)$ y a que $n_j = \frac{d_j}{d_{j+1}}|(a_j - a_j^{'})$.
Por otra parte, puesto que $0 \leq a_j, a_j^{'} \leq n_j - 1$, tenemos que $0 < |a_j - a_j^{'}| < n_j$, lo que nos lleva a una contradicción. □

· **La fórmula del conductor:** Sea

$$c(\Gamma) = 1 - \delta_0 + \sum_0^h (n_i - 1)\delta_i$$

Entonces se tiene que $\alpha + \beta = c(\Gamma) - 1$ si y sólo si exactamente uno de α o β pertenece a Γ. Por tanto, $c(\Gamma)$ es el elemento más pequeño de Γ tal que todos los enteros mayores o iguales que él están en Γ.

Demostración. Sea $\alpha = \sum_0^h a_i\delta_i$, con $0 \leq a_i \leq n_i - 1$ para todo $i = 1, ..., h$. Entonces

$$\beta = c(\Gamma) - 1 - \alpha = 1 - \delta_0 + \sum_1^h (n_i - 1)\delta_i - 1 - \sum_0^h a_i\delta_i =$$

$$-\delta_0 + \sum_1^h (n_i - 1)\delta_i - a_0\delta_0 - \sum_1^h a_i\delta_i = (-1 - a_0)\delta_0 + \sum_1^h (n_i - 1 - a_i)\delta_i.$$

Por la propiedad de la expresión estándar, tenemos que

$$\alpha \in \Gamma \iff a_0 \geq 0 \text{ y } \beta \in \Gamma \iff (-1 - a_0) \geq 0.$$

Puesto que si $\alpha \in \Gamma$, entonces $a_0 \geq 0$ implica que $-1 - a_0 < 0$ y por tanto $\beta \notin \Gamma$; y si $\beta \in \Gamma$, entonces $-1 - a_0 \geq 0$ implica que $0 > -1 \geq -a_0$, por tanto $\alpha \notin \Gamma$.
Dado que $c(\Gamma)-1$ se puede expresar como $(c(\Gamma)+v)+(-v-1)$, tenemos que si $v \geq 0$, entonces $-v - 1 \notin \Gamma$ y por tanto $c(\Gamma) + v \in \Gamma$ para todo $v > 0$. Como $0 \in \Gamma$, tenemos que $c(\Gamma) - 1 \notin \Gamma$, lo que conlleva que $c(\Gamma)$ es el menor entero en Γ tal que todo entero mayor o igual que él está en Γ. □

· **Límite de la sucesión de generadores:** Si la δ-sucesión característica es no principal, entonces

$$\max(\delta_0, \delta_1) \leq c(\Gamma) + 1 \text{ y } \delta_i \leq c(\Gamma) - 1, \text{ para todo } 2 \leq i \leq h.$$

Demostración. Utilizando la fórmula del conductor, tenemos que

$$c(\Gamma) - 1 = 1 - \delta_0 + \sum_1^h (n_i - 1)\delta_i - 1 = -\delta_0 + (n_1 - 1)\delta_1 + \sum_2^h (n_i - 1)\delta_i$$

$$> \sum_2^h (n_i - 1)\delta_i \iff -\delta_0 + (\frac{d_1}{d_2} - 1)\delta_1 > 0 \iff -\frac{d_2\delta_0}{d_2} + \frac{\delta_0\delta_1}{d_2} - \frac{d_2\delta_1}{d_2} > 0$$

$$\iff d_2(-\frac{\delta_0}{d_2}+\frac{\delta_0}{d_2\delta_1/d_2}-\frac{\delta_1}{d_2})>0 \iff (\frac{\delta_0}{d_2}-1)(\frac{\delta_1}{d_2})-1>0.$$

Dado que $n_i > 1$ para todo $i = 2, ..., h$, tenemos que

$$\delta_i < \frac{c(\Gamma)-1}{n_i-1} \leq c(\Gamma)-1, \text{ para todo } i = 2, ..., h.$$

Supongamos $\delta_0 > \delta_1$. Demostraremos que $c(\Gamma)+1 \geq \delta_0$ por inducción:
Si $h = 0$, tenemos que $c(\Gamma_0) = 0$.
Supongamos que se cumple $\frac{\delta_0}{d_h} \leq c(\Gamma_{h-1}) + 1$. Veamos que se cumple para h:

$$c(\Gamma) = c(\Gamma_h) = (c(\Gamma_{h-1}) - 1)d_h + (n_h - 1)\delta_h + 1$$

Puesto que $n_h = \frac{d_h}{d_{h+1}} = d_h$,

$$c(\Gamma) = (c(\Gamma_{h-1}) + 1)d_h + (d_h - 1)\delta_h - 2d_h + 1,$$

por lo que se tiene

$$c(\Gamma) + 1 = (c(\Gamma_{h-1}) + 1)d_h + (d_h - 1)\delta_h - 2d_h + 2 =$$

$$(c(\Gamma_{h-1}) + 1)d_h + (d_h - 1)(\delta_h - 2) \geq \delta_0 + (d_h - 1)(\delta_h - 2).$$

Para $\delta_h \leq 2$ ya habríamos terminado. Para $\delta_h = 1$ consideremos que en este caso $\Gamma = \mathbb{N}$ y por tanto $c(\Gamma) = 0$. $\square$

· **Elementos primitivos:** Todo elemento primitivo de Γ es un δ_j, y recíprocamente cada δ_j es o bien un elemento primitivo o bien múltiplo de algún δ_r donde $r > j$ ó $\delta_j = \delta_1$ y $\delta_r = \delta_0$.

Demostración. Sea $\delta_j \in \{\delta_0, ..., \delta_h\}$ no primitivo. Entonces $\delta_j = a + b$ con a y b no nulos y con las expresiones estándar $a = \sum_0^h (a_i + \delta_i)$ y $b = \sum_0^h b_i\delta_i$. Entonces la expresión $\delta_j = \sum_0^h (a_i + b_i)\delta_i$ no es estándar. Utilizando el mismo método que utilizábamos en la propiedad de la expresión estándar, obtenemos que

$$\delta_j = \sum_0^r (a_i+b_i+v_i)\delta_i, \text{ con } a_r+b_r+v_r \neq 0 \text{ y } v_i \geq 0 \text{ para } i \in \{1, ..., r\}.$$

El lado derecho de la igualdad no es estándar, por tanto $r > 0$. Además, $r \geq j+1$ ya que en caso contrario sí hubiésemos obtenido una expresión estándar.
Sea $un_r = a_r + b_r + v_r$ y $n_r\delta_r = \sum_0^{r-1} p_i\delta_i$. Entonces:

$$\delta_j = \sum_0^r (a_i + b_i + v_i)\delta_i = (a_r + b_r + v_r)\delta_r + \sum_0^{r-1} (a_i + b_i + v_i)\delta_i =$$

$$= un_r\delta_r + \sum_0^{r-1}(a_i + b_i + v_i)\delta_i = u\sum_0^{r-1} p_i\delta_i + \sum_0^{r-1}(a_i + b_i + v_i)\delta_i =$$

$$= \sum_0^{r-1}(a_i + b_i + v_i + up_i)\delta_i.$$

Como $a_i, b_i, v_i, p_i, u \geq 0$, entonces:

$$up_i = 0, \text{ si } i \neq q, \text{ y}$$

$$up_i = 1, \text{ si } i = q.$$

De esta manera, $u = p_j = 1$ y $p_i = 0$ para $i \neq j$.
Dado que $n_r\delta_r = \sum_0^{r-1} p_i\delta_i$, obtenemos $\delta_j = n_r\delta_r$. □

· **Números primos primitivos en un semigrupo planar:** Hay como mucho un número primo primitivo en Γ, a no ser que Γ esté generado por dos números primos.
En particular, un semigrupo que contiene dos o más números primos primitivos y no esté generado por ellos, no es planar.

Demostración. Supongamos que existen dos números primos $a, b \in \Gamma$ primitivos. La propiedad anterior implica que $a = \delta_i$ y $b = \delta_j$ para ciertos $i, j \in \{0, ..., h\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i < j$.
Estudiando los posibles valores de d_{i+1} y d_{j+1} observamos que $d_{i+1} =$ 1 ó a y $d_{j+1} = 1$, lo que implica que $j = h$.
En el caso $d_{i+1} = a$, tenemos que $\frac{\delta_i}{d_{i+1}} = 1 \in \Gamma_i$, de donde obtenemos que

$$\langle\delta_0, ..., \delta_i\rangle = a\Gamma_i = a\mathbb{N},$$

y entonces basta $(\delta_0, ..., \delta_{i-1})$ para generar Γ_i.
En caso de que $a = \delta_0$ y $d_1 = a$, $d_2 = a$ implica que $a|\delta_1$ y podemos quitar δ_1 de la δ-sucesión característica. De esta forma, $d_2 = 1$ y $h = j = 1$. □

Llegados a este punto, estamos en condiciones de plantearnos dos preguntas naturales:

1. Si tenemos un semigrupo planar, es decir, generado por una δ-sucesión característica conocida, ¿existirá siempre un polinomio f cuyo grado en Y no sea congruente con cero módulo la característica del cuerpo en el que nos encontremos? Y si existe, ¿cómo podemos encontrarlo?

2. Si tenemos un polinomio f tal que su grado en Y no es congruente con cero módulo la característica del cuerpo k, ¿podemos hallar la δ-sucesión característica (y por tanto el semigrupo planar que ésta genera) asociada a la curva C que se define mediante $f = 0$? ¿Existirá siempre esta δ-sucesión característica, o necesitamos que se den determinadas condiciones?

El siguiente capítulo tratará de dar respuesta a estas preguntas.

Capítulo 2

Curvas con un lugar en el infinito

Como comentábamos al final del capítulo anterior, queremos saber si a partir de una δ-sucesión característica dada podemos hallar un polinomio que defina una curva con un lugar en el infinito, o si a partir del polinomio que define la curva podemos hallar el semigrupo asociado a la singularidad de la curva en el infinito.

Dada una curva C con un lugar en el infinito, existe un semigrupo $\Gamma(C)$ formado por los órdenes de los polos para varios elementos no nulos del anillo de coordenadas de C, es decir, $\Gamma(C)$ está generado por una δ-sucesión característica que se puede computar como los órdenes de los polos de las raíces aproximadas de la ecuación que define a C.

Este capítulo trata de explicar la relación entre el semigrupo planar generado por una δ-sucesión característica y los aspectos geométricos de la curva con un lugar en el infinito, así como de presentar los resultados hallados en la investigación de ciertas cuestiones relacionadas con este tema.

2.1. De la curva C a su semigrupo de valores $\Gamma(C)$

Antes de entrar en los resultados que proporcionan respuesta a las cuestiones planteadas y que veremos en las sucesivas secciones de este capítulo, debemos dejar un poco más claro cómo se define el semigrupo de valores de la curva en el infinito, ya que las nociones introducidas hasta ahora no bastan para dejarlo debidamente formalizado.

Los elementos que nos permiten relacionar los semigrupos numéricos con las singularidades de curvas algebraicas son las valoraciones. Empezaremos por definir lo que son:

Definición 2.1. Sea K un cuerpo. Una *valoración discreta* en K es una aplicación v de $K^* = K \setminus \{0\}$ sobre $\mathbb{Z}$ tal que $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$ y $v(x+y) \geq \min\ [v(x), v(y)]$.

La imagen de una valoración discreta puede interpretarse a veces como inmersa en $\mathbb{N}$ y tiene estructura de semigrupo numérico.

Definición 2.2. El conjunto $\{0\} \cup \{x \in K^* : v(x) \geq 0\}$ tiene estructura de anillo, y se llama *anillo de valoración de* v.

Geométricamente, que una curva C en el plano complejo afín $\mathbb{C}^2$ tenga un lugar en el infinito quiere decir que su clausura interseca con la recta en el infinito del plano proyectivo en un único punto P, y C es localmente irreducible en P.

Tras ciertos cambios de coordenadas, la ecuación de la curva en un entorno de dicho punto P es de la forma $f(x,y) = 0$, donde f es un elemento del anillo de series de potencias formales $k[[x,y]]$ y podemos definir el anillo local $k[[x,y]] \big/ \langle f \rangle$, que nos permite estudiar la curva en el punto.

Sobre el cuerpo de cocientes de C, $K = k((x,y))$, podemos definir una valoración discreta $v : K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$, que nos permite asociar un semigrupo numérico a la curva C.

De una manera más formal, diremos que si tenemos un cuerpo K y un semigrupo numérico S, podemos definir los siguientes anillos:

$$K[S] = \bigoplus_{s \in S} K x^s \text{ y } K[[S]] = \prod_{s \in S} K x^s.$$

Entonces se tiene que $K[[S]]$ es un anillo local con ideal maximal $m = \langle x^{n_1}, ..., x^{n_e} \rangle$, donde $\{n_1, ..., n_e\}$ es un sistema minimal de generadores para S, y e es la dimensión de inmersión de S.

En $K[[S]]$ se puede definir la valoración $v : K[[S]] \to S$, donde $v(\sum_{s \in S} a_s x^s)$ es el menor $s \in S$ tal que $a_s \neq 0$.

Definición 2.3. Sea $f = f(X,Y)$ un polinomio irreducible y C la curva irreducible correspondiente definida por el ideal $\langle f \rangle$. Suponemos que $f \notin k[X]$.
Llamaremos a $A = k[X,Y] \big/ \langle f \rangle$ el *anillo de coordenadas de* C.
Diremos que $K = \mathrm{qt}\ A$ es el *cuerpo de cocientes de* C.

La curva C tiene un lugar en el infinito si hay un único anillo de valoración V de K/k que no contiene a A. Sea ν la valoración asociada a V, entonces:

Para los elementos no nulos $h \in A$, definimos su grado en V como $\deg_V h = -\nu(h)$. En el caso de que h sea nulo, definiremos su grado como $-\infty$.

Si tenemos una curva plana definida mediante $f = f(X,Y) = 0$, podemos extender este concepto de grado a polinomios $h(X,Y)$ como $\deg_V h(X,Y) = \deg_V \bar{h}$, donde $\bar{h}$ es la imagen de $h(X,Y)$ módulo $f(X,Y)$.

Definición 2.4. Dada una curva C con un lugar en el infinito, obtenemos el *semigrupo de valores*

$$\Gamma(C) = \Gamma(A) = \{\deg_V h : 0 \neq h \in A\}.$$

Otra manera de ver si una curva dada tiene un lugar en el infinito es ver si f es irreducible como elemento de $K((X^{-1}))[Y]$.

Hay una estrecha relación entre valoraciones y las singularidades de curvas con un lugar en el infinito que, junto con la herramienta que suponen las raíces aproximadas que veremos en la próxima sección, permite definir valoraciones planas en el infinito y generalizar el concepto de δ-sucesión característica. En [9], C. Galindo y F. Monserrat formularon y demostraron resultados análogos a los que protagonizan la siguiente sección utilizando estas valoraciones planas.

Por dar una pequeña aclaración de lo que es una serie de Newton-Puiseux, daremos su definición sin entrar en más detalles:

Definición 2.5. Se dice que una serie de potencias es *de Newton-Puiseux* si sus exponentes son racionales con denominadores acotados.

Supongamos que tenemos un polinomio f mónico en Y cuyos coeficientes son series meromorfas formales en X sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Entonces f es de la siguiente manera:

$$f = f(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + ... + a_n(X),$$

donde $n > 0$ es el grado de f en Y y los coeficientes $a_1(X), ..., a_n(X)$ pertenecen al cuerpo de series meromorfas en X sobre k, es decir, $k((X))$. Supongamos que n no es divisible por la característica del cuerpo k.

Dadas las descritas circunstancias, se puede factorizar f en el producto

$$\prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i),$$

donde $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es el conjunto de los ceros de f. Como el discriminante de un polinomio mónico es el producto de las diferencias entre sus raíces, se tiene que

$$\alpha_i - \alpha_j = u_{i,j}(X)X^{\lambda_{i,j}},$$

con $u_{i,j}(0) \neq 0$.

Los $\lambda_{i,j}$ son racionales y no negativos, y para f irreducible e $i \neq j$, son los llamados exponentes característicos de f. Definiendo un orden parcial, se pueden configurar los exponentes característicos para que formen una sucesión creciente $(h_1, ..., h_s)$, denominada sucesión característica de f y cuyos términos son los llamados términos característicos.

En estas condiciones, el siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para que la curva plana afín definida por $f(X,Y) = 0$ tenga un lugar en el infinito:

Teorema 2.6. ***Criterio de Irreducibilidad de Abhyankar-Moh:*** *Supongamos que* $n = \deg_Y f(X,Y) \not\equiv 0 \mod \operatorname{char} k$ *y* $f(X,Y)$ *es mónico en* Y. *Entonces* $f(X,Y)$ *tiene un lugar en el infinito si y sólo si existe una serie test* $u(\tau) \in k(\tau)$ *tal que* $\operatorname{ord}_\tau f(\tau^{-n}, u(\tau)) > s_h(-n, u(\tau))$.
Además, dada cualquier serie que pase el test, hay una raíz $y(\tau)$ *llamada serie de Newton-Puiseux de* f *que satisface*

$$f(\tau^{-n}, y(\tau)) = 0,$$

$$\operatorname{ord}_\tau(y(\tau) - u(\tau)) > m_h(-n, u(\tau)).$$

Conceptualmente, esto significa que si tenemos una candidata a $u(\tau)$ que describe la parte inicial completa de una raíz a través del último término característico, entonces podemos verificar que es $u(\tau)$ y que f es irreducible. Para ello basta sustituirla en f y comparar el orden con números intrínsecamente calculados de la candidata.

Además, si f tiene una serie de Newton-Puiseux como la descrita, se obtiene una factorización como

$$f(\tau^{-n}, Y) = \prod_{w^n=-1} (Y - y(w\tau)),$$

y hay varias sucesiones características asociadas a f.

Se puede encontrar la demostración del Teorema 2.6 dada por Abhyankar en [2], cuyo método implica propiedades de las raíces aproximadas de f, el operador de Tschirnhausen, desarrollos en serie de Puiseux y deformaciones de series de potencias.

Además, a través de este resultado Abhyankar proporcióno una respuesta a la pregunta hasta entonces abierta formulada por Kuo: ¿se puede determinar la irreducibilidad de f sin considerar aspectos relacionados con grafos duales (que son invariables topológicos completos de una singularidad de curva plana) y series de potencias racionales? El Teorema 2.6 demuestra que sí.

J. Gwoździewicz y A. Ploski dieron otra demostración que no involucra deformaciones de series de potencias, pero sí utiliza desarrollos en serie de Puiseux para construir pseudoraíces aproximadas. Para más detalles sobre esta demostración alternativa, véase [11].

Definición 2.7. Sea $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x)$ un polinomio no nulo en $K[x][y]$ tal que para todo $1 \leq i \leq n$, $\deg_x a_i(x) < i$ y f tiene un lugar en el infinito. Se define el *semigrupo de Abhyankar* asociado a f como el conjunto

$$\Gamma(f) = \{\mathrm{int}(f,g) : g \in K[x,y] \setminus \langle f \rangle\},$$

donde $\mathrm{int}(f,g)$ denota la multiplicidad de intersección de f y g y es igual a la dimensión del K-espacio vectorial $K[x,y] \big/ \langle f,g \rangle$.

Diremos que un semigrupo $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$ es un semigrupo de Abhyankar si existe f tal que $\Gamma = \Gamma(f)$.

Todo semigrupo de Abhyankar tiene complementario en $\mathbb{N}$ finito, por tanto es un semigrupo numérico.

A. Assi y P.A. García-Sanchez dieron un método en [4] para ver si una curva plana $f \in K[x,y]$ tiene un único lugar en el infinito y en caso afirmativo, construir su δ-sucesión característica asociada y su semigrupo de valores:

Ejemplo con GAP:

```
brk> f:=((y^3-x^2)^2-x*y^2)^4-(y^3-x^2);;
brk> SemigroupOfValuesOfPlaneCurveWithSinglePlaceAt
Infinity(f,"all");
[ [ 24, 16, 28, 7 ], [ x_2, x_2^3-x_1^2,
 x_2^6-2*x_1^2*x_2^3+x_1^4-x_1*x_2^2 ] ]
brk> g:=last[2][3];
x_2^6-2*x_1^2*x_2^3+x_1^4-x_1*x_2^2
brk> SemigroupOfValuesOfPlaneCurveWithSinglePlaceAt
Infinity(g,"all");
[ [ 6, 4, 7 ], [ x_2, x_2^3-x_1^2 ] ]
brk> S:=SemigroupOfValuesOfPlaneCurveWithSinglePlace
AtInfinity(f);
<Numerical semigroup with 4 generators>
brk> FrobeniusNumber(S);
57
brk> SmallElements(S);
```

```
[ 0, 7, 14, 16, 21, 23, 24, 28, 30, 31, 32, 35, 37,
 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51,
  52, 53, 54, 55, 56, 58 ]
brk> MinimalGeneratingSystemOfNumericalSemigroup(S);
[ 7, 16, 24 ]
```

Esta función se basa en las raíces aproximadas y el Criterio de Irreducibilidad de Abhyankar-Moh (Teorema 2.6), y de hecho también sirve para saber mediante dicho criterio si la curva que le introducimos tiene realmente un lugar en el infinito:

```
brk> SemigroupOfValuesOfPlaneCurveWithSinglePlaceAt
Infinity((y^3-x^2)^2-y);
Error, The polynomial is not irreducible or it has not
a single place at infinity
```

2.2. El Teorema del Semigrupo de Abhyankar-Moh

S. S. Abhyankar y T. Moh demostraron que, dada una curva C y bajo las condiciones que veremos sobre la característica del cuerpo k y el grado en Y del polinomio que define a C, existe una δ-sucesión característica que genera el semigrupo en el infinito de C. A. Sathaye y J. Stenerson demostraron además su recíproco: dada una δ-sucesión característica y bajo ciertas condiciones sobre el primer término de la δ-sucesión característica y la característica del cuerpo k, existe una curva con un lugar en el infinito cuyo semigrupo está generado por dicha δ-sucesión.

El propósito de esta sección es introducir ambos resultados, así como las herramientas necesarias para comprenderlos.

Definición 2.8. Sean g y h dos polinomios en $K[x, y]$. Diremos que g y h son *equivalentes* si existe un automorfismo σ en $K[x, y]$ tal que $h = \sigma(g)$.

Si dos polinomios son equivalentes y la curva que definen tiene un lugar en el infinito, entonces tienen la misma δ-sucesión característica. En general, el recíproco no es cierto.

Sea $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x)$ un polinomio con un lugar en el infinito y supongamos que $a_1(x) = 0$ y $\deg_x(a_i(x)) < i$ para todo $2 \geq i \geq n$. Sea $r_0 = n$, y para todo $1 \geq k \geq h$ sean $d_{k+1} = \mathrm{mcd}(r_k, d_k)$ y $e_k = \frac{d_k}{d_{k+1}}$. Entonces se dan las siguientes condiciones:

1. Para todo $1 \geq k \geq h - 1$, se tiene que $r_k d_k > r_{k+1} d_{k+1}$.
2. Para todo $1 \geq k \geq h$, se tiene que $e_k r_k \in \langle r_0, ..., r_{k-1} \rangle$.

Si además $n = r_0 = d_1 > r_1 > d_2 > ... > d_{h+1} = 1$, entonces $(r_0, ..., r_h)$ es una δ-sucesión característica.

Recíprocamente, dada una sucesión de enteros coprimos $(r_0, ..., r_h) \in \mathbb{N}$, si $d_1 = n$ y $d_{k+1} = \text{mcd}(r_k, d_k)$ y $e_k = \frac{d_k}{d_{k+1}}$ para todo $1 \leq k \leq h$, y si se cumplen las dos condiciones anteriores, entonces existe un polinomio f con un lugar en el infinito tal que $\Gamma(f) = \langle r_0, ..., r_h \rangle$.

En [4], A. Assi y P.A. García-Sanchez introdujeron un método en GAP para, dada una sucesión en $\mathbb{N}$, decidir si genera el semigrupo de valores de un polinomio con un lugar en el infinito y en tal caso, calcular la ecuación de dicho polinomio. También permite, utilizando polígonos de Newton generalizados, calcular todos los polinomios de un semigrupo dado. De esta forma, si le introducimos como parámetro la δ-sucesión característica $(6, 4, 3)$, nos devuelve el polinomio asociado al semigrupo planar generado por ella:

Ejemplo con GAP:

```
brk_2> CurveAssociatedToDeltaSequence([6,4,3]);
x_2^6-2*x_1^2*x_2^3+x_1^4-x_1
```

Recordemos que la definición de δ-sucesión característica en GAP no es la misma que la que estamos considerando en esta memoria, ya que en [4] se utiliza la definición de GAP. Por tanto, no debemos intentar utilizar esta función con δ-sucesiones características principales.

También dieron un método para construir todas las δ-sucesiones características con un número de Frobenius dado, que en este caso también nos permite comprobar que varias δ-sucesiones características diferentes pueden generar el mismo semigrupo numérico:

Ejemplo con GAP:

```
brk_2> l:=DeltaSequencesWithFrobeniusNumber(13);
Syntax warning: Unbound global variable in *errin*:2
l:=DeltaSequencesWithFrobeniusNumber(13);
[ [ 6, 4, 11 ], [ 8, 3 ], [ 8, 6, 3 ], [ 9, 6, 5 ],
 [ 10, 4, 7 ], [ 12, 8, 3 ], [ 12, 8, 6, 3 ],
  [ 15, 2 ], [ 15, 6, 2 ], [ 15, 10, 2 ] ]
brk_2> Length(l);
10
brk_2> Length(Set(l,NumericalSemigroup));
5
```

Esta función computa, para un entero g dado, el conjunto de semigrupos numéricos de polinomios con un lugar en el infinito con conductor $2g$.

Ejemplo con GAP: El semigrupo $\Gamma = \{9, 12, 15, 17, 20, 23, 25, 28\}\mathbb{N}$ no es planar, y por tanto los semigrupos de grado de curvas planas con un lugar en el infinito no son necesariamente planares en característica positiva.

```
brk_2> S:=NumericalSemigroup(9,12,15,17,20,23,25,28);
<Numerical semigroup with 8 generators>
brk_2> x:=Indeterminate(Rationals,"x");;
brk_2> p:=NumericalSemigroupPolynomial(S,x);
Syntax warning: Unbound global variable in *errin*:8
p:=NumericalSemigroupPolynomial(S,x);
x^32-x^31+x^23-x^22+x^20-x^19+x^17-x^16+x^15-x^13+x^12-x^10+x^9-x+1
brk_2> SemigroupOfValuesOfPlaneCurveWithSinglePlaceAtInfinity(p);
Error, The polynomial does not have a single place at infinity or
or the leading coefficient in x_2 is not a rational number
```

Esto se debe a que 17 y 23 son primos y primitivos en Γ pero no lo generan, por lo que la propiedad de los números primos primitivos de los semigrupos planares que veíamos al final del capítulo anterior impide que Γ sea un semigrupo planar.

Definición 2.9. Sea $f(x, y)$ el polinomio de definición de la curva C con un lugar en el infinito con f mónico en y. Sea $(\delta_0, ..., \delta_h)$ la δ-sucesión característica asociada a f. Denotaremos por $n = \deg_y f$, $d_k = \operatorname{mcd}(\delta_0, ..., \delta_h)$ y $n_k = \frac{n}{d_k}$, para $k = 1, ..., h+1$. Entonces, para cada $k = 1, ..., h+1$ existe una pareja de polinomios $(g_k(x, y), \Psi_k(x, y))$ unívocamente determinados que satisfacen las siguientes condiciones:

1. g_k es mónico en y y $\deg_y g_k = n_k$.
2. $\deg_y \Psi_k < n - n_k$.
3. $f = g_k + \Psi_k$.

Llamaremos a g_k la *k-ésima raíz aproximada de f*, y en ocasiones la denotaremos por $\mathrm{App}_k f$.

Los términos de la δ-sucesión característica no son otra cosa que los órdenes de polo de las raíces aproximadas de f, dándonos así la relación entre el semigrupo planar que genera la δ-sucesión característica y las raíces aproximadas de la curva definida por f, que forman otra importante sucesión a la que nos referiremos en las secciones restantes:

Definición 2.10. Diremos que una sucesión de polinomios $g_0, g_1, ..., g_{h+1}$ en $k[x, y]$ es una *g-sucesión* si satisface las siguientes condiciones:

1. $g_0 = x$ y $g_1, ..., g_{h+1}$ son mónicos en Y con un lugar en el infinito
2. $\deg_Y g_{h+1} \not\equiv 0 \mod \operatorname{char} k$. Además, g_{h+1} tiene exactamente h términos característicos. Llamaremos m_i al i-ésimo término característico $m_i(g_{h+1})$ y análogamente para todas las sucesiones asociadas con g_{h+1}. Necesitaremos que $\deg_Y g_i = \frac{n}{d_i}$.
3. Existe una serie de Newton-Puiseux $y_i(\tau)$ para g_i, $1 \leq i \leq h+1$ tal que $\operatorname{ord}_\tau y_{h+1}(\tau) - y_i(\tau^{d_i}) = m_i$ para $1 \leq i \leq h$.

Denotaremos $y_{h+1}(\tau)$ como $y(\tau)$.

Además, si denotamos por C_k la curva definida por $g_k(x, y) = 0$ en $\mathbb{C}^2$, tenemos que las C_k también son curvas con un lugar en el infinito para todo k, y g_k tiene el polo de orden δ_k de la curva C.

El siguiente resultado sobre el grado de monomios en una g-sucesión resultará de gran utilidad más adelante:

Lema 2.11. *Sea $g_0 = X, g_1, ..., g_{h+1}$ una g-sucesión y sea*

$$g^* = \prod_0^h g_i^{p_i}, \text{ con } 0 \leq p_i \leq n_i - 1 \text{ para } i \geq 1.$$

Entonces $\deg_Y g^* < \deg_Y g_{h+1} = n$.

Demostración. La demostración se da por inducción sobre h:
Si $h = 0$ no tenemos nada que probar. Si $h > 0$, tenemos que

$$\deg_Y \prod_0^{h-1} g_i^{p_i} = \sum_0^{h-1} p_i \frac{n}{d_i} < \deg_Y g_h = \frac{n}{d_h}.$$

Por tanto,

$$\deg_Y g^* < \frac{n}{d_h} + p_h \deg_Y g_h \leq \frac{n}{d_h} + (d_h - 1)\frac{n}{d_h} = n = \deg_Y g_{h+1}.$$

□

Teorema 2.12. ***Teorema del Semigrupo de Abhyankar-Moh:*** *Sea f con un lugar en el infinito. Supongamos que $n = \deg_Y f(X, Y) \not\equiv 0 \mod \operatorname{char} k$. Entonces existe el semigrupo de grados $\Gamma(f)$ y es un semigrupo planar. Además, existe una g-sucesión asociada $(X = g_0, ..., g_h, g_{h+1} = f)$ tal que la correspondiente sucesión de grados $(\delta_0 = \deg(g_0, f), ..., \delta_h = \deg(g_h, f))$ es una δ-sucesión característica y genera el semigrupo de grados de f. Además, las imágenes módulo k de los monomios estándar en $\langle g_0, ..., g_h \rangle$ forman la base de un k-espacio vectorial en el anillo de coordenadas de f tal que los monomios estándar distintos tienen grados inducidos distintos en el semigrupo de grados Γ.*

El Teorema del Semigrupo de Abhyankar-Moh (Teorema 2.12) quiere decir que las δ-sucesiones características asociadas a la curva plana C representan una sucesión de órdenes de polo de raíces aproximadas de C, esto es, que Γ es simplemente el conjunto de grados de los monomios estándar.

La demostración del Teorema 2.12 requiere de un argumento basado no sólo en el conjunto de las raíces aproximadas de f, sino de ciertos conocimientos sobre el operador de Tschirnhausen, desarrollos en serie de Newton-Puiseux y deformaciones de series de potencias. Por esta razón omitiremos su desarollo. Para profundizar en los detalles se deben consultar las referencias [3] y [1] de la bibliografía.

El siguiente Teorema de Sathaye y Stenerson (véase [14]) da el recíproco para el Teorema del Semigrupo 2.12:

Teorema 2.13. *Sea* $(\delta_0, ..., \delta_h)$ *una* δ*-sucesión característica tal que* $\delta_0 \not\equiv 0 \mod \operatorname{char} k$. *Entonces existe una curva* f *con un lugar en el infinito cuyo semigrupo de grado está generado por* $(\delta_0, ..., \delta_h)$.
Además, existe una g*-sucesión* $(g_0, ..., g_h, g_{h+1})$ *tal que* $f = g_{h+1}$ *y* $\delta_i = \deg_Y(g_i, f)$ *para* $0 \leq i \leq h$.
Además, $\deg_Y f = \delta_0$.

Demostración. La demostración se da por inducción en h:
Para $h = 0$, tenemos que $\delta_0 = 1$ y basta tomar $g_0 = X$, $g_1 = Y$ para obtener el resultado deseado.
Supongamos ahora que $h > 0$. Sea $\delta_i' = \frac{\delta_i}{d_h}$ para $i = 1, ..., h-1$. Tomamos la correspondiente d-sucesión como $d_0' = \frac{d_0}{d_h}, ..., d_{h-1}' = \frac{d_{h-1}}{d_h}, d_h' = 1$. Entonces $(\delta_0', ..., \delta_{h-1}')$ satisface la hipótesis de inducción y obtenemos la g-sucesión $(X = g_0, ..., g_h)$ tal que $\deg(g_i, g_h) = \delta_i'$ para $i = 0, ..., h-1$.
Por definición de δ-sucesión característica, tenemos que

$$\delta_h = \sum_0^{h-1} p_i \delta_i' \text{ y } \delta_h = \delta_{h-1} n_{h-1} - q_h,$$

donde la expresión para δ_h es estándar, es decir, $p_0 \geq 0$ y $0 \leq p_i \leq n_i - 1$ para $1 \leq i \leq h-1$.
Además, $q_h > 0$.
Sean c y z elementos de k que determinaremos más tarde. Fijamos:

$$g_{h+1} = g_h^{d_h} + cg*, \text{ donde } g* = \prod_0^{h-1} g_i^{p_i}.$$

Fijamos también $u(\tau) = y_h(\tau^{d_h}) + z\tau^{m_h}$, donde y_h es una serie de Newton-Puiseux de g_h y por tanto,

$$g_h(\tau^{-\delta_0'}, y_h(\tau)) = 0.$$

En consecuencia,

$$g_h(\tau-\delta_0, y_h(\tau^{d_h})) = 0.$$

Nótese que $\delta_0, ..., \delta_h$ es la δ-sucesión característica asociada a la serie $u(\tau)$. Luego, $s_h(-\delta_0, u(\tau)) = -d_h\delta_h$.
Ahora vamos a calcular $f(\tau^{-\delta_0}, u(\tau))$:
Empezamos fijando $\Phi(G(X,Y)) = G(\tau^{\delta_0}, u(\tau))$ para un polinomio $G(X,Y)$ cualquiera. Entonces, tras aplicar ciertos cálculos a la g-sucesión $g_0, ..., g_h$ obtenemos

$$\Phi(g_h) = (za_h)\tau^{-d_h d'_{h-1}\delta'_{h-1}+q_h} + ... \text{ términos más altos, y}$$

$$\Phi(g_i) = a_i\tau^{-d_h\delta'_i} + ... \text{ términos más altos.}$$

Observamos que

$$-d_h d'_{h-1}\delta'_{h-1} + q_h = -d'_{h-1}\delta_{h-1} + q_h = -n_{h-1}\delta_{h-1} + q_h = -\delta_h.$$

De esta manera obtenemos:

$$\Phi(g_h^{d_h}) = (za_h)^{d_h}\tau^{-d_h\delta_h} + ... \text{ términos más altos, y}$$

$$\Phi(cg*) = c(\prod_0^{h-1} a_i^{p_i})\tau^{\sum_0^{h-1}} - \delta_i^{p_i} + ... \text{ términos más altos } =$$

$$= c(\prod_0^{h-1} a_i^{p_i})\tau^{-d_h\delta_h} + ... \text{ términos más altos.}$$

Aquí las constantes a_i dependen únicamente de los coeficientes de los términos característicos de $y_h(\tau)$ y por tanto no dependen de z ni de c.
Elegimos ahora los elementos no nulos z y c tales que

$$(za_h)^{d_h} + c\prod_0^{h-1} a_i^{p_i} = 0.$$

Se sigue que $\mathrm{ord}_r\Phi(f) > s_h(-\delta_0, u(\tau)) = -d_h\delta_h$. Además, nótese que $\deg_Y f = d_h \deg_Y g_h = d_h\delta'_0 = \delta_0$, ya que el Y-grado de $g*$ es menor por el Lema 2.11. Finalmente, f tiene un lugar en el infinito por el Criterio de Irreducibilidad de Abhyankar-Moh (Teorema 2.6). Además, la serie de Newton-Puiseux correspondiente $y(\tau)$ de f coincide con $u(\tau)$ a partir del h-ésimo término característico m_h y por tanto $\mathrm{ord}_\tau g_i(-\delta_0, y(\tau)) = \mathrm{ord}_\tau g_i(-\delta_0, u(\tau)) = -\delta_i$ y tenemos la g-sucesión completa $X = g_0, g_1, ..., g_h, g_{h+1} = f$ que buscábamos. El semigrupo de grado $\Gamma(f)$ está también generado por la δ-sucesión característica $\delta_0, ..., \delta_h$. $\square$

Esto significa que si una sucesión $(\delta_0, ..., \delta_h)$ de números naturales satisface las hipótesis del Teorema 2.13, entonces existe una curva con un lugar en el infinito cuya δ-sucesión característica es $(\delta_0, ..., \delta_h)$, siendo este Teorema un cierto inverso para el Teorema del Semigrupo de Abhyankar-Moh (Teorema 2.12).

Recordemos las preguntas que formulábamos al final del primer capítulo de esta memoria:

1. Si tenemos un semigrupo planar, es decir, generado por una δ-sucesión característica conocida, ¿existirá siempre un polinomio f cuyo grado en Y no sea congruente con el cero módulo la característica del cuerpo en el que nos encontremos?

2. Si tenemos un polinomio f tal que su grado en Y no es congruente con cero módulo la característica del cuerpo k, ¿existe una δ-sucesión característica (y por tanto el semigrupo planar que ésta genera) asociada a la curva C que se define mediante $f = 0$?

El Teorema del Semigrupo (Teorema 2.12) y el Teorema de Sathaye y Stenerson (Teorema 2.13) establecen que bajo sus hipótesis en el grado en Y de f y el primer término de la δ-sucesión característica δ_0 respectivamente, que no deben ser congruentes con cero módulo la característica del cuerpo k, la respuesta a estas preguntas es sí.

¿Pero qué pasa si no se cumplen estas condiciones? ¿Se puede dar algún otro resultado alternativo? Veámoslo en la siguiente sección de este capítulo.

2.3. Semigrupos de grado de curvas polinomiales

Definición 2.14. Sea C una curva algebraica definida por $f(x, y) = 0$ con $f(x, y)$ un polinomio irreducible en $\mathbb{C}[x, y]$. Diremos que C es una *curva polinomial* si tiene una parametrización $x = x(t)$, $y = y(t)$, con $x(t)$, $y(t)$ polinomios en $\mathbb{C}[t]$.

Obsérvese que toda curva racional con un lugar en el infinito es una curva polinomial.

Abhyankar planteó la siguiente pregunta: Dado un semigrupo planar, ¿existe una curva polinomial tal que su δ-sucesión característica asociada genere ese semigrupo planar?

Se hicieron varios avances desde el planteamiento de esta cuestión hasta que, finalmente, Fujimoto, Suzuki y Yokoyama pudieron dar una respuesta en 2004:

· Moh demostró que no existe una curva polinomial para la δ-sucesión característica $(6, 8, 3)$. Sin embargo, sí que existe la curva polinomial $(x, y) = (t^3, t^8)$ para la δ-sucesión característica $(3, 8)$, que genera el mismo semigrupo planar que la anterior.

· Sathaye y Stenerson demostraron que el semigrupo planar generado por $(6, 22, 17)$ no tiene otras δ-sucesiones características que lo generen, y conjeturaron que no existe ninguna curva polinomial para esta δ-sucesión.

· Fujimoto y Suzuki desarrollaron un método de construcción de curvas con un lugar en el infinito (véase [7]) para, a partir de una δ-sucesión característica que satisface las hipótesis del Teorema 2.13 de Sathaye y Stenerson, hallar el polinomio mónico en Y que define la curva con un lugar en el infinito para esa δ-sucesión característica, además de hallar el conjunto de sus raíces aproximadas. Este método supuso un nuevo acercamiento a la conjetura de Sathaye y Stenerson que mencionábamos en el punto anterior, siendo una importante herramienta para la investigación de la curva con un lugar en el infinito asociada a la δ-sucesión característica $(6, 22, 17)$.

· Fujimoto, Suzuki y Yokoyama dieron en [8] como contraejemplo la δ-sucesión característica $(6, 21, 4)$, quedando respondida la pregunta de Abhyankar con resultado negativo.

Veamos los resultados obtenidos sobre la δ-sucesión característica $(6, 22, 17)$ por Sathaye y Stenerson:

En primer lugar, observemos que 6, 22 y 17 son elementos primitivos de Γ, de forma que por la propiedad de los elementos primitivos de los semigrupos planares vista en la sección 1.3, deben estar presentes en cualquier δ-sucesión característica de Γ.

Consideremos ahora los posibles lugares de 6, 22 y 17 dentro de las posibles δ-sucesiones características de Γ:

· Si 6 ó 22 apareciesen antes que 17, entonces la δ-sucesión característica al llegar a 17 tendría mcd igual a 1, y deberá terminar ahí, por lo que 17 será el último término de la δ-sucesión.

· Si 6 ó 22 aparecieran después de 17, tan pronto como introdujésemos cualquiera de los dos la δ-sucesión característica tendría mcd igual a 1 y la δ-sucesión terminaría antes de introducir el otro. Por tanto, 17 está forzado a ser el último término de la δ-sucesión en ambos casos.

Pasamos ahora a considerar los posibles lugares de 6 y 22 dentro de la δ-sucesión característica:

- Si 6 fuese antes que 22, la δ-sucesión sería de la forma $(..., 6, ..., 22, ..., 17)$. Al llegar a 6, el mcd tendría que ser 6, 3 ó 2. No puede ser 3, ya que al llegar a 22 el mcd sería igual a 1 y no tendría cabida el 17 en la δ-sucesión característica. No puede ser 2 porque entonces el mcd no disminuiría al introducir el 22. Por tanto, debe de ser 6 y tendremos que el 6 es el primer término de la δ-sucesión. El siguiente término debe disminuir el mcd a 3 ó 2. No puede ser 3 o no tendríamos el 17 en la δ-sucesión, por tanto es 2 y esto implica que el segundo término de la δ-sucesión característica sea el 22. Puesto que el tercer término tiene que reducir el mcd a 1, debe ser el 17. De esta manera obtenemos la δ-sucesión característica $(6, 22, 17)$.

- Por el mismo razonamiento, en caso de que el 22 fuera antes que el 6 la única solución posible sería que la δ-sucesión característica fuese exactamente $(22, 6, 17)$.

Para continuar, necesitamos ver que el semigrupo Γ tiene una única δ-sucesión característica generadora. Para ello necesitamos el siguiente Lema, cuya demostración omitiremos debido a que algunos de los resultados involucrados en ella escapan al alcance de este trabajo:

Lema 2.15. *Sea C una curva plana polinomial, y sea $\Gamma(C)$ con δ-sucesión característica (m, n, δ_2). Sean $d = d_2 = \operatorname{mcd}(m, n)$, $m' = \frac{m}{d}$ y $n' = \frac{n}{d}$. Entonces existe una g-sucesión característica (X, Y, g_2), donde g_2 es un polinomio de la forma*

$$g_2(X, Y) = X^{n'} - Y^{m'} + \sum_{i,j} X^i Y^j,$$

donde la suma es sobre todos los i, j tales que $im + jn < \frac{mn}{d}$.
Además, existen dos polinomios $x(t)$, $y(t)$ de grados m y n respectivamente, tales que $g_2(x(t), y(t))$ tiene grado δ_2 en t.

Sea $x(t)$ un polinomio de grado 6 e $y(t)$ un polinomio de grado 22. Si demostramos que $\deg_t g_2(x, y) > 17$ para cualquier polinomio $g_2(X, Y)$ de la forma descrita en el lema 2.15, habremos demostrado que no existe ninguna curva polinomial con semigrupo de grados $\{6, 22, 17\}\mathbb{N}$.

El problema es que la utilización del lema para plantear y resolver el sistema de ecuaciones que proporciona, nos lleva a resolver un sistema de 23 ecuaciones sin aparente dependencia lineal. Es por esto que el siguiente Teorema de Fujimoto y Suzuki para dar un método de construcción de curvas con un lugar en el infinito (véase [7]) supuso una potente herramienta computacional para la resolución de este problema:

Teorema 2.16. *Sea* $(\delta_0, ..., \delta_h)$, $h \geq 1$, *una sucesión de números naturales que satisfacen las hipótesis del Teorema 2.13. Sea* $d_k = \mathrm{mcd}(\delta_0, ..., \delta_{k-1})$ *con* $1 \leq k \leq h+1$ *y* $q_k = \frac{d_k}{d_{k+1}}$, $1 \leq k \leq h$.

1. *Definamos* g_k *para* $0 \leq k \leq h+1$ *de la siguiente manera:*

$$g_0 = x,$$

$$g_1 = y + \sum_{j=0}^{\lfloor p/q \rfloor} c_j x^j,\ c_j \in \mathbb{C},\ p = \frac{\delta_1}{d_2},\ q = \frac{\delta_0}{d_2},$$

$$g_{i+1} = g_i^{q_i} + a_{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_{i-1}} g_0^{\bar{\alpha}_0} g_1^{\bar{\alpha}_1} \cdots g_i^{\bar{\alpha}_i} + \sum_{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_i \in \Lambda_i} c_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_i} g_0^{\alpha_0} g_1^{\alpha_1} \cdots g_i^{\alpha_i},$$

donde $a_{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_{i-1}} \in \mathbb{C}^*$, $c_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_i} \in \mathbb{C}$ *para* $1 \leq i \leq h$, $(\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_{i-1})$ *es la sucesión de* i *enteros no negativos que satisfacen*

$$\sum_{j=0}^{i-1} \bar{\alpha}_l \delta_j = q_i \delta_i,\ \text{con}\ \bar{\alpha}_j < q_j\ \text{para}\ 0 < j < i,$$

y

$$\Lambda = \{(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_i) \in \mathbb{N}^{i+1} : \alpha_j < q_j\ \text{para}\ 0 < j < i,\ \alpha_i < q_i - 1,$$

$$\sum_{j=0}^{i} \alpha_j \delta_j < q_i \delta_i\}.$$

Entonces, $g_0, g_1, ..., g_h$ *son las raíces aproximadas de* f $(f = g_{h+1})$ *y* f *es el polinomio de definición mónico en* y *de una curva con un lugar en el infinito para la* δ*-sucesión característica* $(\delta_0, \delta_1, ..., \delta_h)$.

2. *El polinomio de definición* f, *mónico en* y, *de una curva con un lugar en el infinito para la* δ*-sucesión característica* $(\delta_0, \delta_1, ..., \delta_h)$ *se obtiene mediante el procedimiento del punto anterior, y los valores de los parámetros* $\{a_{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_{i-1}}\}_{1 \leq i \leq h}$ *y* $\{c_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_i}\}_{0 \leq i \leq h}$ *están determinados de manera unívoca por* f.

No incluiremos la demostración de este resultado debido a que se basa en una visión más geométrica que incluye el uso de la relación que dió Suzuki entre la δ-sucesión característica y el grafo dual de la resolución minimal de la singularidad de la curva en el infinito (véase [15]), siendo éstos conceptos que escapan al alcance de este trabajo. Se puede encontrar el detalle sobre el desarollo de este método en [7].

El Teorema 2.16 implica que el polinomio de definición de la curva con un lugar en el infinito de la δ-sucesión característica $(6, 22, 17)$ es de la siguiente forma:

$$f = (g_2^2 + a_{2,1}x^2g_1) + c_{5,0,0}x^5 + c_{4,0,0}x^4 + c_{3,0,0}x^3 + c_{2,0,0}x^2 + c_{1,1,0}xg_1+$$

$$+c_{1,0,0}x + c_{0,1,0}g_1 + c_{0,0,0},$$

donde

$$g_1 = y + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

$$g_2 = (g_1^3 + a_{11}x^{11}) + c_{10,0}x^{10} + c_{9,0}x^9 + c_{8,0}x^8 + (c_{7,1}g_1 + c_{7,0})x^7+$$

$$+(c_{6,1}g_1 + c_{6,0})x^6 + (c_{5,1}g_1 + c_{5,0})x^5 + (c_{4,1}g_1 + c_{4,0})x^4 + (c_{3,1}g_1 + c_{3,0})x^3+$$

$$+(c_{2,1}g_2 + c_{2,0})x^2 + (c_{1,1}g_1 + c_{1,0})x + c_{0,1}g_1 + c_{0,0}.$$

La δ-sucesión característica $(6, 22, 17)$ será un contraejemplo para la pregunta que formuló Abhyankar si se puede demostrar que una curva de la forma descrita no puede incluir una curva polinomial.

Suponiendo que C es una curva polinomial y tiene δ-sucesión característica $(6, 22, 17)$, y eliminando las variables y coeficientes de términos cuyo grado sea mayor que 18 en g_2, obtenemos un sistema con 11 variables y 17 polinomios. Si este sistema no tiene solución, concluiremos que $(6, 22, 17)$ es el contraejemplo deseado.

Fujimoto, Suzuki y Yokoyama clasificaron las δ-sucesiones características con género menor o igual que 50 en conjuntos que generaban el mismo semigrupo e hicieron un listado de las δ-sucesiones características que cumplen ciertas condiciones, entre ellas que el número de generadores sea 3 y que no haya otra δ-sucesión característica que genere el mismo semigrupo. Después, utilizaron computaciones relacionadas con las bases de Gröbner para los sistemas de ecuaciones correspondientes a estas δ-sucesiones características y demostraron que $(6, 21, 4)$ es un contraejemplo para la pregunta de Abhyankar.

El polinomio de definición de la curva con un lugar en el infinito para la δ-sucesión característica $(6, 21, 4)$ es de la siguiente manera:

$$f = g_2^3 + a_{2,0}x^2 + c_{1,0,1}xg_2 + c_{1,0,0}x + c_{0,0,1}g_2 + c_{0,0,0},$$

donde

$$g_2 = g_1^2 + a_7x^7 + c_{6,0}x^6 + c_{5,0}x^5 + c_{4,0}x^4 + c_{3,0}x^3 + c_{2,0}x^2 + c_{1,0}x + c_{0,0},$$

$$g_1 = y + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0.$$

Tras ciertos cómputos, obtuvieron que $\deg_t g_2(x(t), y(t)) < 4$, lo que contradice la condición $\deg_t g_2(x(t), y(t)) = 4$, implicando la no existencia de una curva polinomial con δ-sucesión característica $(6, 21, 4)$ y dando una respuesta a la pregunta planteada por Abhyankar.

Los detalles sobre cómo hallaron este contraejemplo se encuentran fuera del alcance de este trabajo, por lo que para más información sobre ellos se debe consultar [8].

De esta manera, quedó cerrada la cuestión planteada por Abhyankar sobre si, dado un semigrupo planar, existe una curva polinomial tal que su δ-sucesión característica asociada lo genere, siendo negativa la respuesta obtenida.

Conclusiones

A lo largo de esta memoria hemos dado un significado geométrico a los conceptos de semigrupo planar y δ-sucesión característica, relacionándolos con la teoría relativa a curvas con un lugar en el infinito:

Hemos empezado por introducir la definición de semigrupo numérico así como algunos de sus elementos y propiedades más importantes: conjuntos de Apéry, número de Frobenius, conductor, o que sus sistemas minimales de generadores consten de un número finito de elementos.

A continuación hemos introducido el concepto de δ-sucesión característica, siendo una sucesión positiva de enteros $(\delta_0, ..., \delta_h)$, para la que se definen $d_i = \text{mcd}(\delta_0, ..., \delta_{i-1})$ para $1 \leq i \leq h+1$ y $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$ para $1 \leq i \leq h$, y que satisface las siguientes condiciones:

1. $d_{i+1} = 1$ y $n_i > 1$ para todo $i \geq 2$.
2. $\delta_i n_i \in \{\delta_0, ..., \delta_{i-1}\}\mathbb{N}$.
3. $\delta_i < \delta_{i-1} n_{i-1} - q_i$, de forma que $q_i > 0$ para $i \geq 2$.

A partir de las δ-sucesiones características, hemos introducido los semigrupos planares, que son semigrupos numéricos generados por δ-sucesiones características, de manera que poseen algunas propiedades especiales: todo entero se puede expresar de manera única como combinación lineal de términos de la δ-sucesión, la fórmula del conductor, etc.

Tras dejar claro qué son y cómo funcionan las δ-sucesiones características y los semigrupos planares, estábamos preparados para abordar las cuestiones geométricas relacionadas con las curvas con un lugar en el infinito:

Para formalizar el paso de los semigrupos numéricos a las singularidades de curvas con un lugar en el infinito hemos tenido que recurrir a las valoraciones, ya que la imagen de una valoración discreta puede interpretarse como inmersa en $\mathbb{N}$ y tiene estructura de semigrupo numérico, de forma que lo que nos permite asociar un semigrupo numérico a una curva es una valoración discreta que va del cuerpo de cocientes de la curva a los enteros. Siguiendo esta línea, que la curva tenga un lugar en el infinito requiere de la existencia de un único anillo de valoración V de ${}^{K}/_{k}$ que no contenga al anillo de coordenadas de la curva, y esto nos permite definir el semigrupo de valores de la curva C como:

$$\Gamma(C) = \{\deg_V h : 0 \neq h \in A\},$$

donde A es el anillo de coordenadas de la curva C.

Estas raíces aproximadas forman una g-sucesión $(g_0, ..., g_{h+1})$ y sus términos satisfacen que

$$\deg_Y g_k = \frac{\deg_Y f}{\mathrm{mcd}(\delta_0, ..., \delta_h)}.$$

De esta forma, vemos que dada una curva C con un lugar en el infinito, existe un semigrupo $\Gamma(C)$ formado por los órdenes de los polos para varios elementos no nulos del anillo de coordenadas de C, es decir, $\Gamma(C)$ está generado por una δ-sucesión característica que se puede computar como los órdenes de los polos de las raíces aproximadas de la ecuación que define a C.

Teniendo ahora claros los significados geométricos de la δ-sucesión característica, el semigrupo planar que ésta genera y los términos de la g-sucesión, pasamos a ver los resultados principales de este trabajo:

El Teorema del Semigrupo de Abhyankar-Moh: Que establece que si tenemos un polinomio que define una curva con un lugar en el infinito y su grado en Y no es congruente con cero módulo la característica del cuerpo sobre el que está definido, entonces existen el semigrupo de valores de la curva, la g-sucesión asociada, y la δ-sucesión característica dada por los grados de los términos de la g-sucesión, y ésta δ-sucesión genera el semigrupo de grado de la curva.

El Teorema de Sathaye-Stenerson: Que establece que dada una δ-sucesión característica tal que su primer término no es congruente con cero módulo la característica de k, entonces existe una curva con un lugar en el infinito cuyo semigrupo de grados está generado por esa δ-sucesión característica, además de existir la correspondiente g-sucesión asociada, de manera que se cumple la relación entre el grado de los términos de la g-sucesión y los términos de la δ-sucesión característica.

Para finalizar, hemos expuesto los últimos avances cuanto a la pregunta planteada por Abhyankar sobre si dado un semigrupo planar siempre existe una curva polinomial tal que su δ-sucesión característica asociada genere ese semigrupo planar. Esta cuestión estuvo abierta hasta 2004 cuando se dió como contraejemplo la δ-sucesión característica $(6, 21, 4)$.

Además, a medida que íbamos construyendo esta teoría, hemos ido viendo algunas funciones interesantes del paquete NumericalSgps de GAP, que ilustraban mediante ejemplos algunos de los conceptos que íbamos introduciendo.

Las más relevantes de estas funciones han sido:

- **MinimalGeneratingSystemOfNumericalSemigroup():** Devuelve el sistema minimal de generadores del semigrupo que le introducimos como parámetro.
- **IsDeltaSequence():** Determina si la sucesión introducida como parámetro es o no una δ-sucesión característica, aunque no considera δ-sucesiones características aquellas que sean principales.
- **NumericalSemigroupPolynomial():** Devuelve el polinomio que tiene por semigrupo de valores el semigrupo numérico que introducimos como parámetro, que no tiene por qué tener un único lugar en el infinito.
- **SemigroupOfValuesOfPlaneCurveWithSinglePlaceAtInfinity():** Determina si una curva plana tiene un único lugar en el infinito, y en tal caso construye su δ-sucesión característica asociada y su semigrupo de valores.
- **CurveAssociatedToDeltaSequence():** Dada una sucesión que introducimos como parámetro, decide si genera el semigrupo de valores de un polinomio con un lugar en el infinito y en tal caso, calcula la ecuación de dicho polinomio.

Bibliografía

[1] Abhyankar, S S. *Expansion Techniques in Algebraic Geometry.* Tata Institute of Fundamental Research (1977).

[2] Abhyankar, S S. *Irreducibility Criterion for Germs of Analytic Functions of Two Complex Variables.* Advances in Mathematics 74, 190-257 (1989).

[3] Abhyankar, S S. and Moh, T. *Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation, I.* Journal für die reine uns angewandte Mathematik (1973).

[4] Assi, A. and García-Sánchez, P. A. *On curves with one place at infinity.* (2014).

[5] Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G. *Introducción al Álgebra Conmutativa.* Editorial Reverté (2005).

[6] Delgado, M., García-Sánchez, P. A. and Morais, J. J. *Numericalsgps - A package for numerical semigroups.* Version 1.2.2.

[7] Fujimoto, M. and Suzuki, M. *Construction of affine plane curves with one place at infinity.* (2001).

[8] Fujimoto, M., Suzuki, M. and Yokoyama, K. *On the Abhyankar's question for affine plane curves with one place at infinity.* (2004).

[9] Galindo, C. and Monserrat, F. *The Abhyankar-Moh theorem for plane valuations at infinity.* (2007).

[10] Gwoździewicz, J. and Hejwej, B. *On Abhyankar's irreducibility criterion for quasi ordinary polinomials.* (2018).

[11] Gwoździewicz, J. and Ploski, A. *On the approximate roots of polynomials.* Annales Polonici Mathematici LX. 3 (1995).

[12] García-Sánchez, P. A. *Tres sesiones con semigrupos numéricos.* Seminario de Geometría Tórica V (2014).

[13] Rosales, J. C. and García-Sánchez, P. A. *Numerical Semigroups.* Departamento de Álgebra, Universidad de Granada.

[14] Sathaye, A. and Stenerson, J. *On Plane Polynomial Curves.* (2014).

[15] Suzuki, M. *Affine plane curves with one place at infinity.* Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº2 (1999).