Colegio S. José

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

DON PEDRO ALIAGA Y MILLAN

CATEDRÁTICO POR O[illegible]ICION
DE ESTA ASIGNATURA, EN EL [illegible]TITUTO PROVINCIAL
DE CASTELLON D[illegible]A PLANA

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

CASTELLON
Imprenta y libreria de José Armengot, Enmedio, núm. 77
1895

PRELIMINARES

1. Si consideramos un cuerpo cualquiera, un libro por ejemplo, vemos que ocupa un lugar en el espacio. Este lugar que ocupa en el espacio, es su *extension*.

La *extension*, puede separarse mentalmente de las demás propiedades de un cuerpo. Un cuerpo así concebido sin más propiedad que su extension, se llama *cuerpo geométrico*.

En todo cuerpo se pueden distinguir, su *longitud* ó largo, su *latitud* ó ancho y su grueso, que se llama tambien *profundidad* ó *altura*.

La *longitud*, la *latitud* y la *profundidad*, toman el nombre genérico de *dimensiones*.

Este libro que consideramos, lo mismo que otro cuerpo cualquiera, está *limitado* y separado del espacio indefinido que le rodea, por su *superficie*.

Esta superficie, se compone de varias caras, que no pueden separarse del cuerpo que limitan, sino mentalmente.

Estas caras las concebimos con solo dos dimensiones, *longitud* y *latitud*, siendo nula su profundidad ó grueso.

Las distintas caras, están limitadas y separadas por líneas.

Estas líneas, no pueden tampoco separarse, sino mentalmente, y entonces las concebimos con una sola dimension, la *longitud*; siendo nulas la latitud y la profundidad.

Las líneas, están á su vez limitadas por sus extremos, que son puntos.

Estos puntos, los concebimos mentalmente sin *ninguna dimension*, y se denominan *puntos matemáticos*.

El *punto matemático*, es pues el límite de la extension, y por consiguiente no tiene nada de largo, ni de ancho, ni de grueso.

Los puntos se señalan en el papel con lapiz ó tinta, y se designan por una letra escrita al lado del punto. Asi (fig.ª 1.ª) se expresan los puntos A, B, C.

2. Procediendo de un modo inverso, podemos á partir del punto, reconstruir mentalmente el cuerpo geométrico.

Imaginemos que el punto se mueve, dejando rastro de las posiciones que va ocupando en su movimiento; tendremos engendrada la línea. Imaginemos que la linea se mueve dejando rastro de las posiciones que va ocupando en su movimiento, y tendremos engendrada la superficie. Imaginemos por fin que la superficie se mueve dejando rastro de las distintas posiciones que ocupa, y tendremos engendrado el cuerpo geométrico.

3. Los cuerpos geométricos, las superficies y las líneas, son tres clases distintas de extension: de tres dimensiones, de dos dimensiones y de una sola dimension respectivamente.

La *extension* limitada, se llama *figura*. Todas las figuras se pueden concebir engendradas por el movimiento de un punto.

GEOMETRÍA *es la ciencia que tiene por objeto, el estudio de la* EXTENSION.

4. Todos conocen la *línea recta*. Su figura puede representarse por un hilo tirante.

La línea recta puede definirse diciendo, *que es el camino más corto entre dos puntos*.

Tambien refiriéndose á su generacion por medio del punto, puede decirse que línea recta *es la que tiene todos sus puntos en una misma direccion*.

Todas las líneas rectas, se consideran indefinidamente prolongadas.

La distancia entre dos puntos, se mide por la porcion de recta que los une.

Por dos puntos cualesquiera A, B (fig.ª 2.ª) siempre puede pasar una recta. Si imaginamos otra recta que pase tambien por los mismos puntos A, B, ésta se confundirá con la primera; luego por dos puntos cualesquiera A, B, puede pasar siempre una recta, y no puede pasar más que una: De donde se deduce que, *dos puntos determinan la posicion de una recta.*

Para designar, pues, una recta, bastará señalar con letras dos cualesquiera de sus puntos. Asi (fig.ª 2) recta A B, es la que pasa por dichos dos puntos.

La porcion de la recta indefinida AB, comprendida entre dos de sus puntos A y B, se llama tambien distancia A B.

Dos rectas son siempre superponibles.

Dos rectas diferentes no pueden tener más que un punto comun; pues si tuviesen más de un punto comun, coincidirían en toda su extensión, y no formarían más que una sola recta.

5. *Línea quebrada*, es la que se compone de dos ó más distancias que pertenecen á rectas diferentes.

A B C D (fig.ª 3) es una línea quebrada.

Línea curva, es la que no tiene ninguna parte recta. Puede considerarse engendrada por el movimiento de un punto que cambia constantemente de direccion.

La línea A B C (fig.ª 4) es una curva.

La que se compone de recta y curva, se llama *linea mixta.*

La línea A B C (fig.ª 5) es línea mixta.

6. *Superficie plana ó plano*, es aquella sobre la que pueden trazarse rectas en todas direcciones. Si se unen dos puntos cualesquiera de un *plano* por una recta, ésta, se halla toda ella en el plano.

Puede comprobarse empíricamente, si una superficie es plana, aplicando sobre ella, en varias direcciones el borde recto de una regla bien construída; si este borde coincide con la superficie en todas la posiciones en que se le aplica, la superficie es plana.

A todo plano se le supone prolongado indefinidamente.

Superficie curva, es la que no tiene ninguna parte plana.

Superficie quebrada, es la que se compone de varios planos diferentes.

Superficie mixta, es la que se compone de parte plana y parte curva.

La Geometría se divide en plana y del espacio.

Geometría plana, es la que trata de las figuras cuyos puntos están situados todos en un mismo plano.

La Geometría del espacio, se refiere á las figuras, cuyos puntos no están todos en un mismo plano.

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA PLANA

LIBRO I

DE LAS LÍNEAS

CAPÍTULO I

DE LA LÍNEA RECTA Y DE LOS ÁNGULOS

§ I.—*Perpendiculares y oblícuas*

L. 2.ª

7. Dos rectas A O y O B (figura 6.ª) que concurren en un punto O, forman un ángulo. Las dos rectas A O, y OB, son los lados del ángulo, y el punto O, comun á los dos lados, es el vértice. Este ángulo se expresa diciendo, ángulo A O B, es decir, con tres letras, una en cada lado, y la del vértice; poniendo ésta entre las otras dos.

Los dos lados del ángulo A O B, parten del vértice O, y se prolongan indefinidamente.

Angulo, es pues la separacion ó abertura de dos rectas, que se encuentran en un punto.

Los ángulos C D E, y E D F, (fig. 7.ª) que tienen el vértice D y un lado D E comunes, y los otros dos lados C D y D F, á diferente lado del D E comun á ambos, se llaman contiguos ó adyacentes.

Cuando un ángulo no tiene su vértice comun con ningun otro, se le puede designar con la letra del vértice solamente: Así el ángulo AOB (fig.ª 6.ª) se expresa tambien diciendo, ángulo O.

Si consideramos fijos el lado AO (fig.ª 7.ª bis) y el vértice O del ángulo AOB, y suponemos que el otro lado BO gira apartándose del lado AO, y tomando sucesivamente las posiciones OB', OB'', OB''', es evidente que dicho ángulo crecerá en este movimiento de una manera contínua.

8. Si por el punto O de la recta AC (fig.ª 8) se traza la recta OB, se formarán dos ángulos adyacentes (7) que tienen los lados no comunes OC y OA, sobre una misma recta. Si suponemos que el lado comun OB, gira al rededor del vértice comun O, acercándose al lado OA, el ángulo BOA disminuirá de una manera contínua, y llegará á anularse, cuando BO, se confundan con AO. Si ahora suponemos que gira en sentido inverso, es decir, separándose de OA, el ángulo BOA desde cero crecerá de una manera contínua; y es evidente que á manera que en este movimiento crece el ángulo AOB, mengua el BOC; que si al principio del movimiento, el ángulo BOA, es mucho menor que el COB, á manera que OB se separa de OA, la diferencia entre estos dos ángulos disminuye y llegará el ángulo BOA á ser mayor que el BOC, y que éste se anulará cuando OB se confunda con OC. Si pues en este movimiento del lado OB, el ángulo BOA pasa de menor que el COB á mayor que el COB, forzosamente habrá *una posicion única* de la recta BO, en que los dos ángulos COB, y BOA serán iguales. Cuando la recta OB, tienen esta posicion segun la cual los dos ángulos AOB, y BOC son iguales, se dice que la *OB es perpendicular á la CA, y entonces los dos ángulos AOB y BOC son ángulos rectos.*

Resulta, pues, que

Una recta es perpendicular á otra, cuando forma con ella dos ángulos adyacentes iguales, cada uno de estos ángulos adyacentes iguales, es un ángulo recto.

Una recta es oblícua á otra, cuando forma con ella dos ángulos adyacentes desiguales, de los que el uno que es mayor que un recto se llama obtuso, y el otro que es menor que un recto se llama agudo.

TEOREMA I

9. *Por un punto cualquiera O de una recta CA, (figura 9) no se puede trazar á ésta mas que una perpendicular* O B.

Porque segun hemos dicho (8); solo hay una posicion de la recta O B, que forme con la C A, dos ángulos adyacentes C O B y B O A iguales.

TEOREMA II

10. *Todos los ángulos rectos son iguales.*

Sean CO (figura 10) perpendicular á AB, y C'O' perpendicular á A'B', digo que los dos ángulos rectos cuyo vértice es O, son iguales á los otros dos rectos cuyo vértice es O'.

En efecto, superponiendo estas dos figuras de modo que O' coincida con O y la recta A' B' se confunda con AB, la recta O'C', coincidirá forzosamente con la O C, por que ambas son perpendiculares á la recta única, que han formado al coincidir las A'B' y A B; y por un punto de una recta no se puede trazar á ésta, mas que una sola perpendicular (9).

Esta demostracion es general, porque es aplicable á todos los ángulos rectos.

Son *ángulos complementarios*, dos ángulos cuya suma es igual á un recto; y *ángulos suplementarios* dos ángulos cuya suma es igual á dos rectos.

TEOREMA III

11. *Si dos ángulos adyacentes, tienen los lados no comunes AO y OB* (fig.ª 11) *en una misma recta, son suplementarios.*

Si el lado comun, O C fuese perpendicular á la recta A B, la proposicion seria evidente. Si O C es oblícua á AB, se formarian dos ángulos desiguales, uno agudo B O C y otro obtuso A O C. Trazando la D O perpendicular á A B, D O caerá dentro del ángulo obtuso A O C; y tendremos que

AOC escede al recto AOD en el ángulo DOC, y á COB, le falta el mismo DOC para ser igual al recto DOB; luego AOC + COB=2 rectos, y por consiguiente AOC y COB son suplementarios.

TEOREMA IV

12. *Si dos ángulos adyacentes AOC y COB (fig.ª 11) son suplementarios, los lados no comunes AO y, OB están en una misma recta.*

En efecto, el ángulo formado por OC y la prolongacion de AO, debe ser suplementario del AOC (Teorema III) y por lo tanto igual al BOC, luego dicha prolongacion debe coincidir con OB; luego AO y O B, están en una misma recta.

Corolario 1.º Si dos ángulos contiguos ó adyacentes AOB y BOC, (fig.ª 13) n o tienen los lados no comunes AO y OC en una misma recta, no son suplementarios; porque si lo fueran, AO y OC estarian en una misma recta.

NOTA: Las líneas auxiliares que se emplean para las demostraciones, se marcan con trazos cortos.

Corolario 2.º La suma de todos los ángulos consecutivos que pueden formarse al rededor del punto O (fig.ª 14), pero situados á un mismo lado de la recta AB, es igual á dos ángulos rectos; puesto que se tiene evidentemente.

AOC + COD + DOE + EOF + FOB=AOE + EOB=2 rectos

Corolario 3.º La suma de todos los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOA que se pueden formar al rededor del punto O (fig.ª 15) es igual á cuatro rectos; pues si prolongamos uno cualquiera de los lados BO, hasta B', segun el corolario anterior, la suma de los ángulos formados al rededor de O, y cada lado de BB' valen dos rectos: Luego la suma en los formados á ambos lados, valdrá cuatro rectos, y los formados á ambos lados de BB' componen precisamente los formados al rededor del punto O.

Corolario 4.º Si una recta CO (fig.ª 16.) es perpendicular á otra AB, ésta es perpendicular tambien á la CO; pues si prolongamos á CO hasta C', los ángulos adyacentes COB, y BOC' son suplementarios, y siendo el COB recto lo será tambien el BOC', luego OB ó AB, que forman con la CC' dos ángulos iguales, será perpendicular á éste.

TEOREMA V

13. *Por un punto C situado fuera de la recta AB (figura 17), siempre se puede bajar á esta recta una perpendicular, y no se puede bajar más que una.*

En efecto; doblando la figura por la recta AB, el punto C, tomará la posicion C', y uniendo C y C' por la recta COC', los ángulos COB y BOC' serán iguales, porque coincidirán, si doblamos de nuevo la figura por AB; es decir, que las rectas OB y C'C' son perpendiculares, ó lo que es lo mismo CO es perpendicular á AB.

Además, cualquiera otra recta CM trazada desde el punto C á la AB, tomará al doblar la figura por AB una posicion MC', y como la línea CMC' no puede ser recta por serlo la CC', los ángulos adyacentes CMB, y B MC' que son iguales no son suplementarios por no tener los lados CM y MC' (12 cor.) en una misma recta, y por consiguiente CMB no es recto, y la CM no es perpendicular á la AB; luego por el punto C solo se puede bajar á la AB una perpendicular.

Por un punto A. (fig.ª 20) de una recta AD se puede trazar á ésta una sola perpendicular AB, y varias oblícuas AM, AN, AP.

Por un punto A (fig.ª 21) situado fuera de una recta CD, se pueden bajar á ésta una sola perpendicular AB, y varias oblícuas AN, AM, AP.....

Los puntos P, B, M, N, se llaman respectivamente pies de las distancias AP, AB. AM, AN.

BISECTRIZ de un ángulo, es la recta que lo divide en dos partes iguales. Así, siendo (fig.ª 18) AOC igual COB. CO será la bisectriz del ángulo AOB.

Los ángulos que como los AOB y COD (figura 19) tienen los lados del uno prolongaciones de los lados del otro, se llaman *ángulos opuestos por el vértice*.

Los ángulos AOC y DOB son tambien opuestos por el vértice.

TEOREMA VI

14. *Los ángulos opuestos por el vértice, son iguales.*

En efecto; los ángulos AOB, COD (fig.ª 19) opuestos por el vértice, tienen el mismo suplemento BOD (11) luego son iguales.

Corolario Si uno de los cuatro ángulos que forman dos rectas que se cortan es recto, lo serán los cuatro; y si uno de dichos cuatro ángulos no es recto, no lo será ninguno.

TEOREMA VII

15. *Si desde un punto A* (fig.ª 23) *fuera de una recta MN, se traza á ésta la única perpendicular AB, y una oblícua cualquiera AC, la perpendicular es más corta que la oblícua.*

En efecto, doblando la figura por NM, de modo que A tome la posicion A', las AB y AC, tomarán respectivamente las posiciones A'B, y A'C. Pero ABA' es (12) una línea recta, y ACA', es una línea quebrada; luego (4) ABA'<ACA' ó lo que es lo mismo 2 AB<2 AC, y dividiendo por 2 los miembros de esta desigualdad, resulta AB<AC, conforme con el teorema enunciado.

TEOREMA VIII

16. *Si desde un punto A (fig.ª 24) situado fuera de una recta MN, se bajan á ésta la perpendicular AB, y las dos oblícuas AC y AD, cuyos pies C y D equidistan del pie B de la perpendicular, dichas oblícuas serán iguales.*

En efecto; doblando la figura por AB, la BC tomará la direccion BD, por ser rectos los ángulos en B; y C caerá sobre D, por ser iguales las distancias BC y BD; permaneciendo fijo el punto A, y habiendo coincidido los C y D, coinciden las oblícuas AC y AD, y por consiguiente son iguales.

TEOREMA IX

17. *Si desde el punto A (fig.ª 25) situado fuera de la recta MN, se bajan á ésta la perpendicular AB, y las dos oblícuas AC y AD, cuyos pies C y D distan desigualmente del pie B de la perpendicular; la oblícua AD, cuyo pie dista más, es la mayor.*

En efecto; trazando por C la perpendicular CE á la MN, y prolongándola hasta que encuentre á la AD, tendremos $AC < AE + EC$ (4) y como $EC < ED$ (15) será $AC < AE + ED$, ó $AC < AD$ conforme con el enunciado.

TEOREMA X

18. *Si desde un punto A (fig.ª 23) situado fuera de la recta MN, se trazan las rectas AB y AC, y la AB es más corta que cualquiera otra AC, que vaya desde el mismo punto A, á la recta MN, AB es perpendicular á MN.*

En efecto; si AB no fuera perpendicular á MN, se podría trazar desde A, una que lo fuese, y por serlo, sería más corta que la AB, contra lo que se supone de que AB es más corta que todas; luego la A B no puede dejar de ser perpendicular á la MN.

Este teorema es recíproco del teorema VII.

Corolario: La distancia de un punto á una recta, es la perpendicular trazada desde aquél á ésta, puesto que dicha perpendicular es más corta que cualquiera otra recta trazada desde dicho punto á la recta.

TEOREMA XI

19. *Trazando desde un punto A (fig.ª 24) fuera de una recta MN, una perpendicular AB y las dos oblícuas AC y AD; si éstas son iguales, sus pies C y D equidistarán del pie B de la perpendicular.*

En efecto; si las distancias CB y BD no fueran iguales, las oblícuas AC y AD, serían desiguales (17) contra lo que se supone, es pues imposible que CB y BD no sean iguales.

Este *teorema* es recíproco del teorema VIII

Corolario. Desde un punto á una recta, no se pueden trazar tres rectas iguales; porque es imposible que los pies de éstas equidisten del pie de la perpendicular.

TEOREMA XII

20. *Si desde un punto A (fig.ª 25) situado fuera de una recta MN, se trazan á ésta la perpendicular AB, y las dos oblícuas desiguales AD y AC; el pie de la más larga AD dista más del pie de la perpendicular.*

En efecto: si BD no fuese mayor que BC, AD no sería mayor que AC (17) contra lo que se supone; luego es imposible que BD no sea mayor que BC.

Este teorema es el recíproco del teorema IX

TEOREMA XIII

21. *Todo punto A, (fig.ª 26) que se halla en la perpendicular AB, levantado á la MN en su punto medio B; equidista de los extremos M y N de esta recta.*

En efecto; las distancias AM y AN, son iguales por serlo las MB y NB. (16)

TEOREMA XIV

22. *Todo punto C (fig.ª 27) situado fuera de la AB, perpendicular á la MN por su punto medio B, no equidista de los extremos M* y *N de esta recta.*

En efecto, trazando la EN, tendremos (4) que $CN < CE + EN$ y como (21) $EN = EM$, será $CN < CE + EM$ ó bien.

$$CN < CM$$

Conforme con el enunciado.

TEOREMA XV

23. *Todo punto A (fig.ª 26) que equidiste de los extremos de la recta M N, se halla en la perpendicular A B, levantada á la M N, en su punto medio B.*

En efecto: si A, no estuviese en la perpendicular A B, no equidistaría de M y N (22) contra lo que se supone: luego es imposible que A no esté en la recta A B.

Este teorema es recíproco del XIII.

TEOREMA XVI

24. *Todo punto C, (fig.ª 27) que no equidista de los extremos de la recta MN, no está en la perpendicular A B á la MN, trazada por el punto medio de ésta.*

En efecto; si C estuviera en la A B, equidistaría de M y N (21) contra lo que se supone; luego es imposible que C esté en la recta AB.

Corolario. Resulta, que los puntos de la A C (fig.ª 28) perpendicular á la M N que pasa por su punto medio B, tienen la propiedad *comun y exclusiva,* de equidistar de los extremos M y N.

La recta AB es el *lugar geométrico* de los puntos equidistantes de M y N.

TEOREMA XVII

25. *Todo punto M situado en la bisectriz AD (fig.ª 29) del ángulo BAC, equidista de los lados de este ángulo.*

En efecto, trazando las MP y MQ, distancias del punto M á cada uno de los lados del ángulo, y doblando la figura por la bisectriz AD; el lado AB caerá sobre el AC; laperpendicular MP, tomará la direccion MQ porque desde el punto M, no se puede trazar mas que una perpendicular á la AC, y por lo tanto el punto P, que pertenece á las rectas MP y AB, caerá sobre el Q que pertenece á las MQ y AC. MP ha coincidido con MQ; luego M equidista de los lados AB y AC, conforme con el enunciado

TEOREMA XVIII

26. *Todo punto M (fig.ª 30) situado fuera de la bisectriz AD del ángulo B A C, no equidista de los lados de este ángulo.*

Trazando las MP y MQ, distancias del punto M á cada uno de los lados del ángulo, digo que PM es menor que MQ. En efecto trazando la OR perpendicular á AB, y uniendo R y M por medio de la recta RM, tendremos.

$$PM < RM \quad (15)$$

$RM < RO + OM$ (4) y como $RO = OQ$ será

$$RM < QO + OM, \text{ ó } RM < QM$$

Luego con más razon será

$$PM < MQ$$

Conforme con el enunciado.

Este teorema es contrario al XVII.

TEOREMA XIX

27. *Todo punto M (fig.ª 29) equidistante de los lados A B y A C del ángulo BAC, está situado en la bisectriz de este ángulo.*

Porque si no estuviera situado en la bisectriz, no equidistaría (26) de los lados del ángulo; luego el punto M, por equidistar de los lados del ángulo, no puede dejar de estar en la bisectriz.

Este teorema es recíproco del XVII.

TEOREMA XX

28. *Todo punto M (fig.ª 30), que no equidista de los lados AB y AC del ángulo BAC; no está situado en la bisectriz de este ángulo.*

Porque si estuviera en dicha bisectriz, equidistaría (25) de los lados del ángulo, contra lo que se supone; luego el punto M, por no equidistar de los lados del ángulo no puede estar en la bisectriz, conforme con el enunciado.

Este teorema es recíproco del XVIII y contrario al XIX.

29. COROLARIO. Resulta pues que los puntos de la bisectriz AD (fig.ª 29) del ángulo BAC; tienen la propiedad *comun* y *exclusiva*, de equidistar de los lados de dicho ángulo.

La bisectriz AD es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo BAC.

§ II.—*Paralelas*

30. Dos rectas situadas en un mismo plano, que no se encuentran por más que se prolonguen, son *paralelas*.

Esta definicion, no nos dá ningun medio de comprobar que dos rectas son paralelas, porque no podremos prolongarlas indefinidamente.

TEOREMA XXI

31. *Dos rectas AB y CD,* (fig.ª 31) *perpendiculares á una tercera recta MN, son paralelas entre sí.*

En efecto; las rectas AB y CD, no se encontrarán por más que se prolonguen; pues suponiendo que se encontrasen, desde el punto comun á las dos rectas, tendríamos trazadas dos perpendiculares á la MN, lo que es imposible.

32 POSTULADO DE EUCLIDES.—*Si dos rectas AB y CD* (figura 32) *cortan á la MN, la AB perpendicularmente y la CD oblícuamente, dichas dos rectas no son paralelas.*

Esta proposicion se admite como evidente.

TEOREMA XXII

33. *Por un punto M situado fuera de la recta AB,* (figura 33) *se puede trazar á ésta una sola paralela.*

Primeramente probaremos, que por el punto M siempre podrá pasar una paralela á la AB.

En efecto; tracemos por M la MN perpendicular á AB, y la CD perpendicular á MN. Tendremos que las AB y CD son perpendiculares á la MN; luego (31) CD es paralela á AB, y además pasa por M. Ahora para probar que por M no puede pasar otra paralela á AB, observemos que cualquiera otra recta C' D' que pase por M, será oblícua á la MN, y por consiguiente, segun el postulado de Euclides, la C' D' no puede ser paralela á la MN.

TEOREMA XXIII

34. *Si dos rectas CD y AB* (fig.ª 34) *son paralelas, toda recta MN perpendicular á una de ellas, CD lo será tambien á la otra AB.*

En efecto; la MN no puede ser paralela á AB. (33) Tampoco MN puede ser oblícua á AB (32); luego forzosamente será MN perpendicular á AB; puesto que dos rectas situadas en un plano, no pueden ser más que paralelas, oblícuas ó perpendiculares.

TEOREMA XXIV

35. *Si dos rectas CD y AB* (fig.ª 35) *son paralelas, toda recta MN, que corta á una de ellas CD, corta á la otra AB.*

En efecto; si MN no cortara á AB, por el punto O pasarian dos paralelas á AB, lo que es imposible.

TEOREMA XXV

36. *Dos rectas AB y CD, paralelas á una tercera MN, son paralelas entre sí* (fig.ª 36).

En efecto; las AB y CD no pueden encontrarse, porque si se encontraran, por el punto comun á ambas, tendríamos dos paralelas á la recta MN, lo que es imposible.

TEOREMA XXVI

37. *Dos rectas MN y OP* (fig.ª 37) *respectivamente perpendiculares á las paralelas AB y CD, son paralelas entre sí.*
En efecto; OP por ser perpendicular á CD, lo será tambien á AB (34); serán, pues, MN y OP perpendiculares á AB, luego serán paralelas.

TEOREMA XXVII

38. *Dos rectas O' A', O' B'* (fig.ª 39) *respectivamente perpendiculares á las no paralelas OA y OB, no son paralelas.*
En efecto; si suponemos que las O' A' y O' B' son paralelas, en virtud del teorema XXVI, las OA y OB serian tambien paralelas, lo que es contrario á lo supuesto en el teorema; luego O' A' y O' B' no pueden ser paralelas.
39. La recta MN (fig.ª 38) que corta á otras dos rectas AB y CD, se llama *secante* ó *transversal.*
La secante MN forma con las rectas AB y CD ocho ángulos: cuatro que tienen el vértice en O (1, 2, 3, 4) y cuatro que tienen el vértice en O' (5, 6, 7, 8).
Los 1, 2, 7 y 8, se llaman ángulos *externos*, y los 3, 4, 5 y 6, *internos*.
Los ángulos 3 y 6, internos, situados á diferente lado de la secante y no adyacentes, se llaman *alternos internos*.
Los 4 y 5 son tambien *alternos internos*.
Los ángulos 1 y 8, externos, situados á diferente lado de la secante y no adyacentes, se llaman *alternos externos*.
Los 2 y 7 son tambien *alternos externos*.
Los ángulos 1 y 5, el uno externo y el otro interno, situados al mismo lado de la secante y no adyacentes, se llaman *correspondientes*. Tambien son correspondientes 3 y 7, 2 y 6 y 4 y 8.

TEOREMA XXVIII

40. *Si dos rectas AB y CD*, (fig.ª 40) *cortadas por una secante MN, forman dos ángulos alternos internos iguales, dichas rectas son paralelas*.

En efecto; si los dos ángulos alternos internos 1 y 2 son iguales, lo serán tambien sus suplementarios 3 y 4; y haciendo girar la porcion de plano BPQD alrededor de O, (punto medio de la distancia QP) de modo que OQ se confunda con OP, QD coincidirá con PA por la igualdad de los ángulos 2 y 1; y PB con QC, por la igualdad de los ángulos 3 y 4.

Ahora bien; si suponemos que las rectas AB y CD se encuentran, por ejemplo, á la derecha de la secante, en virtud de la anterior superposicion, se encontrarán tambien á la izquierda de la secante; es decir, que las dos rectas AB y CD tendrian dos puntos comunes sin confundirse, lo que es un absurdo. Dichas rectas, pues, no pueden encontrarse; luego son paralelas.

41. COROLARIO 1.º *Si dos rectas AB y CD* (fig.ª 41) *forman con la secante dos ángulos alternos externos iguales, serán paralelas.*

En efecto; si los ángulos 1 y 8 son iguales, tambien serán iguales 4 y 5 (14), alternos internos; luego, segun el teorema anterior, las rectas AB y CD serán paralelas.

42. COROLARIO 2.º *Si dos rectas AB y CD* (fig.ª 41) *forman con la secante MN dos ángulos correspondientes iguales, serán paralelas.*

En efecto; si dos ángulos correspondientes cualesquiera 1 y 5, por ejemplo, son iguales, como 1 es igual á 4 (14), 5 y 4 serán tambien iguales; luego, segun el teorema anterior, las rectas AB y CD serán paralelas.

43. COROLARIO 3.º *Si dos rectas AB y CD* (fig.ª 41) *forman con la secante MN dos ángulos internos de un mismo lado de la secante suplementarios, dichas rectas serán paralelas.*

En efecto; si suponemos que 3 y 5 son suplementarios, como 4 es suplemento de 3; 4 y 5 serán iguales, por ser ambos suplementarios de 3; y como 4 y 5 son alternos internos, las rectas AB y CD serán paralelas.

44. COROLARIO 4.° *Si dos rectas AB y CD* (fig.ª 41) *forman con la secante MN, dos ángulos externos de un mismo lado de la secante suplementarios, serán paralelas.*

En efecto; si suponemos que 2 y 8 son suplementarios, como 1 es suplemento de 2, serán 1 y 8 iguales; pero 1 y 8 son alternos externos; luego (41) las rectas AB y CD serán paralelas.

TEOREMA XXIX

45. *Dos rectas paralelas AB y CD* (fig.ª 42), *cortadas por una secante MN, forman ángulos alternos internos iguales.*

En efecto; si suponemos que las paralelas AB y CD, no forman con la secante MN ángulos alternos internos iguales; es decir, si suponemos que los ángulos BPN y CQM son desiguales, podremos trazar por el punto P una recta RS que forme con la secante el ángulo SPN igual al CQM; pero entonces, segun lo dicho, (40) la RS seria paralela á CD; y tendríamos por el punto P trazadas dos paralelas á CD lo que es imposible (33). Luego las paralelas AB y CD formarán con la secante MN ángulos alternos internos iguales.

Este teorema es recíproco del XXVIII.

46. Del teorema XXIX, se deducen fácilmente los siguientes corolarios:

Dos rectas paralelas cortadas por una secante, forman con esta

1.° Angulos alternos externos iguales.

2.° Angulos correspondientes iguales.

3.° Angulos internos de un mismo lado de la secante suplementarios.

4.° Angulos externos de un mismo lado de la secante suplementarios.

Estos corolarios son respectivamente proposiciones recíprocas de los corolarios del teorema XXVIII.

TEOREMA XXX

47. *Todos los puntos de una recta AB, equidistan de su paralela CD* (fig.ª 43).

En efecto; sean dos puntos M y N de la recta AB: tracemos las perpendiculares MO y NP, á la paralela CD, que serán (18) las distancias de M y N á la CD. Tracemos ahora desde Q, punto medio de la distancia MN, la QR perpendicular á CD. Si doblamos la figura por QR, QB tomará la direccion QA, por ser rectos los ángulos en Q (10); y por ser QN = QM, el punto N caerá sobre el punto M.

Ahora, como las MO y NP, son tambien perpendiculares á AB (13), NP caerá sobre MO; de modo que el punto P, ha de caer en algun punto de la MO; pero como los ángulos en R son rectos, la RD, tomará la direccion RC, de modo que P ha de caer en algun punto de la RC; es decir que P, debe caer á la vez en la MO y en la RC; luego forzosamente caerá sobre O, y NP será igual á M O.

Como M y N, son dos puntos *cualquiera* de la AB, resulta que *todos* los puntos de la AB equidistan de CD y tambien todos los puntos de la CD equidistan de AB.

COROLARIO. *Si una recta AB* (fig.ª 43), *tiene todos sus puntos equidistantes de otra recta CD, dichas rectas son paralelas,* puesto que nunca se encontrarán.

TEOREMA XXXI

48. *Las partes de paralelas interceptadas por dos paralelas, son iguales.*

En efecto; si las paralelas EF y GH (fig.ª 45) se cortan por las dos paralelas AB y CD, digo que las partes MO y NP de las primeras interceptadas por las dos segundas, son iguales. Trazando las distancias MQ y NR entre las paralelas AB y CD, los ángulos OMQ y PNR son iguales por ser

ángulo BMO=ángulo BNP (46 cor. 2.º)

ángulo BMQ=ángulo BNR.

Superponiendo la figura RNP, sobre la QMO de modo que NR y MQ que son iguales (47) coincidan, la recta NP caerá sobre MO, RP sobre QO, y por consiguiente P caerá sobre O. Han coincidido N con M, y P con O; luego NP=MO, conforme con el enunciado

TEOREMA XXXII

49. *Si la recta AB* (fig.ª 46) *es paralela á la CD, y la distancia entre ambas es MN, la AB es el lugar geométrico de todos los puntos situados sobre la CD, y cuya distancia á ésta es MN.*

En efecto: la distancia de un punto cualquiera de la AB á la CD, es igual á MN. (47)

Además, la distancia de un punto cualquiera K, ó K' que no está en la AB, es evidentemente mayor ó menor que MN: Resulta pues, que todos los puntos de la AB, tienen la propiedad *general* y *exclusiva* de que su distancia á la CD, es igual á MN; luego AB, es el *lugar geométrico* de todos los puntos cuya distancia á CD es MN.

COROLARIO. *Si una recta AB* (fig.ª 47) *tiene dos puntos M y N equidistantes de otra recta CD, AB; es paralela á CD.*

En efecto; si las distancias MR, y NS de los puntos M y N á la CD, son iguales; dichos puntos M y N, pertenecen, segun el teorema anterior á la paralela á CD, que dista de ésta lo mismo que dichos puntos; luego (4) la AB que pasa por M y N, es paralela á la CD.

50. ESCOLIO. Si desde el punto M (fig.ª 48) situado en la AB, paralela á CD, se trazan á ésta la perpendicular MN y las oblícuas MN', MN'', MN''', MN^{IV} MN^{V}... observaremos que á manera que los pies N', N'', N''', N^{IV}, N^{V}... de las oblícuas, se alejan de N, pie de la perpendicular MN; los ángulos 1, 2, 3, 4, 5... internos disminuyen y por consiguiente la posicion de dichas oblícuas se va aproximando á la posicion de la paralela AB; y como las distancias NN', NN'', NN''', NN^{IV},NN^{V}... pueden llegar á ser mayores que cualquier cantidad dada y siempre que crecen dichas distancias los ángulos 1, 2, 3, 4, 5... y sus alternos internos respectivos, disminuyen y por consiguiente la posicion de las oblícuas se aproxima á la paralela AB, puede considerarse á ésta, como la posicion límite de las sucesivas posiciones de las oblícuas, y entonces el ángulo límite de los 1, 2, 3, 4, 5 tendrá un valor nulo; puede pues admitirse que *dos rectas paralelas forman un ángulo cero, cuyo vértice está en el infinito.*

TEOREMA XXXIII

51. *Dos ángulos BAC, B'A'C' (fig.ª 49) cuyos lados son respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales.*

En efecto; ambos ángulos BAC y B'A'C' son iguales al B'MC por correspondientes; luego dichos dos ángulos serán iguales entre sí.

TEOREMA XXXIV

52. *Dos ángulos BAC, B'A'C' (fig.ª 50) que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario, son iguales.*

En efecto; prolongando los lados B'A' y C'A' hasta N y M respectivamente, tendremos que BAC=MA'N, en virtud del teorema anterior; y B'A'C'=MA'N, por opuestos por el vértice; luego BAC=B'A'C', conforme con el enunciado.

TEOREMA XXXV

53. *Dos ángulos BAC y B'A'C' (fig.ª 51) que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos los AB y A'B' en el mismo sentido, y los AC y A'C' en sentido contrario; son suplementarios.*

En efecto; prolongando el lado C'A' hasta M, será BMA'=BAC (51); pero el B'A'C' es suplementario del BMA', luego su igual BAC tambien será suplementario del B'A'C'.

54. Podremos, pues. sentar que

Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios.

TEOREMA XXXVI

55. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.*

Sea el ángulo BAC, (fig.ª 52) si por un punto cualquiera O, trazamos las dos rectas QS perpendicular al lado AC, y PR perpendicular al lado AB, dichas perpendiculares formarán los únicos cuatro ángulos cuyo vértice está en O, y tienen sus lados perpendiculares á los lados del ángulo BAC. Vamos á probar que de dichos cuatro ángulos, dos son iguales y los otros dos suplementarios al BAC.

En efecto; haciendo girar el ángulo BAC, de modo que el lado BA tome la posicion B'A perpendicular á la primitiva, el AC tomará precisamente la posicion AC', perpendicular á su posicion primitiva AC. Es evidente que B'AC' es igual á BAC; pero B'AC' es igual á dos de los cuatro ángulos formados al rededor de O, y suplementario de los otros dos (54); luego su igual BAC será tambien igual á dos de los formados al rededor de O, y suplementario de los otros dos, conforme con el enunciado.

CAPÍTULO II

DE LA CIRCUNFERENCIA

§ I.—*De las rectas en la circunferencia*

56. CIRCUNFERENCIA DE CÍRCULO *ó simplemente* CIRCUNFERENCIA, *es una línea curva* (fig.ª 53) *cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de otro interior O, llamado centro.*

La recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia, se llama RADIO. OA, OB, OC, son radios.

La recta que pasando por el centro une dos puntos de la circunferencia, se llama DIÁMETRO. La recta COB es un diámetro.

De la definicion de circunferencia se deduce que

La distancia entre un punto cualquiera de la circunferencia y el centro, es igual al radio.

La distancia entre un punto M situado fuera de la circunferencia y el centro O, es mayor que el radio.

La distancia entre un punto N situado dentro de la circunferencia y el centro O, es menor que el radio.

Luego

La circunferencia es el LUGAR GEOMÉTRICO *de los puntos, cuya distancia al centro es igual al radio.*

Todos los radios de una circunferencia son iguales.

Todos los diámetros de una circunferencia son iguales.

Todo diámetro es la suma de dos radios.

Dos circunferencias que tienen el mismo radio, son superponibles, y por consiguiente iguales.

La porcion de plano, limitada por la circunferencia, se llama CÍRCULO.

Una porcion cualquiera de circunferencia, se llama ARCO.

Una porcion ADB (fig.ª 54) de circunferencia, es un arco.

Toda recta AB que une dos puntos de una circunferencia, se llama *cuerda.*

Todo diámetro es, pues, una cuerda.

Toda cuerda AB, divide á la circunferencia en dos arcos ADB y ASB. De modo que la cuerda AB, une los extremos del arco ADB y los del arco ASB.

Se dice que la cuerda *subtiende* al arco cuyos extremos une, é inversamente el arco está *subtendido* por la cuerda que une sus extremos.

De donde se deduce, que toda cuerda AB subtiende dos arcos ADB y ASB, que juntos componen toda la circunferencia.

SECANTE es una recta indefinida, que corta en dos puntos á la circunferencia.

La recta HQ es una secante.

TANGENTE es una recta indefinida, que tiene un solo punto comun con la circunferencia.

La recta RSP es una tangente.

TEOREMA XXXVII

57. *En todo círculo, un diámetro CD* (fig.ª 55) *es mayor que cualquiera otra cuerda AB.* L. 6

En efecto; el diámetro CD es igual á la línea quebrada BOA y ésta es mayor que la cuerda AB; luego CD es mayor que AB conforme con el enunciado.

TEOREMA XXXVIII

58. *Un diámetro cualquiera de una circunferencia, divide á ésta y al círculo en dos partes iguales.*

En efecto; si doblamos (fig.ª 56) la figura por el diámetro CD, el arco CAD coincidirá forzosamente con el CBD; pues de lo contrario los radios no serian iguales.

Las dos partes iguales de plano CDA y CDB, se llaman semicírculos, y los dos arcos iguales CAD y CBD semicircunferencias.

Corolario. *Toda cuerda* (fig.ª 57) *que no pasa por el centro, divide á la circunferencia y al círculo en dos partes desiguales.* L.

En efecto; trazando por el extremo B de la cuerda AB el diámetro BC, que divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales, resulta evidente que el arco BFCA es mayor que media circunferencia; y el arco ADB menor que media circunferencia; y tambien la porcion de plano BACF mayor que un semicírculo, y la porcion BAD menor que un semicírculo.

Aunque cada cuerda corresponde á dos arcos, se entiende que corresponde al menor, cuando no se dice lo contrario.

TEOREMA XXXIX

59. *Todo diámetro AB.* (fig.ª 58) *perpendicular á una cuerda CD, divide á ésta y á los dos arcos que la misma subtiende en dos partes iguales.* L. 7

En efecto; doblando la figura por el diámetro AB, coincidirán la semicircunferencia ADB con la ACB (58), y la recta RD con la RC (10); y por consiguiente D caerá sobre C; luego será RD=RC, arco CA=arco AD y arco CB=arco BD, conforme con el enunciado.

Otra demostracion:

Las dos oblicuas OC y OD, que son radios de un mismo círculo, son iguales; luego sus piés C y D (19) se apartarán igualmente del pié R de la perpendicular; luego CR=RD. Además, AB es el lugar geométrico (24 cor.) de todos los puntos equidistantes de C y D; luego AC=AD, por consiguiente los arcos AC y AD serán iguales, y lo mismo sucederá con los arcos CB y BD.

ESCOLIO. Conviene observar que la recta AB, satisface las cinco condiciones siguientes: pasar por O, R, A y B, centro del círculo y puntos medios respectivamente de la cuerda CD, y de los arcos CAD y CBD, que son cuatro condiciones, y la quinta ser perpendicular á CD.

Es fácil demostrar, que si una recta satisface dos de estas cinco condiciones, satisfará forzosamente las otras tres, porque dos de ellas determinan la recta.

COROLARIO: El diámetro perpendicular á una cuerda, es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas á ésta.

TEOREMA XL

60. *Tres puntos A, B, C,* (fig.ª 59) *que no están en línea recta, determinan una circunferencia.*

Debemos, pues, probar: 1.º que por los tres puntos A, B, C no situados en una recta, siempre puede pasar una circunferencia, y 2.º que no puede pasar mas que una.

1.º En efecto; uniendo uno cualquiera de dichos puntos B con los otros dos A y C, por medio de las rectas BA y BC, y trazando por M y N puntos medios de dichas dos rectas las respectivas perpendiculares MK y NR, éstas forzosamente se encontrarian, por ser perpendiculares á dos rectas que se cortan (37); ahora el punto de interseccion O, por pertenecer á la MK, equidista de A y B (21) y por pertenecer á la NR equidista de B y C; luego O equidista de A, B y C; si hacemos pues, centro en O, y con un radio OA, OB, ú OC trazamos una circunferencia precisamente pasará por los puntos A, B y C; luego por estos tres puntos siempre puede pasar una circunferencia.

2.° Toda circunferencia que pase por los puntos A, B, C, tendrá su centro en O, porque toda perpendicular levantada en el punto medio de una cuerda, pasa por el centro y como MK y NR son perpendiculares á las cuerdas AB y BC por sus puntos medios, su único punto O de interseccion será el centro. Además toda circunferencia que pasa por A, B y C y tenga su centro en O, tiene por radio cualquiera de las distancias OA, OB, OC: Luego todas las circunferencias que pasan por A, B y C, tienen el mismo centro y el mismo radio; luego se confunden en una sola.

COROLARIO. *Por tres puntos A, B, C* (fig.ª 60) *situados en una recta, no puede pasar una circunferencia*; porque no existe ningun punto que equidiste de A, B y C; pues suponiendo que el punto O tuviese esta propiedad, resultaría el absurdo de que las tres distancias OA, OB y OC, serian iguales. (19 cor.)

Una recta, no puede pues tener con una circunferencia más de dos puntos comunes.

TEOREMA XLI

61. *Toda tangente AB* (fig.ª 61) *á una circunferencia, es perpendicular al radio OM del punto de contacto.*

En efecto; OM es menor que cualquier otra recta OH trazada desde el centro O á la tangente AB, por estar M en la circunferencia, y H fuera de la circunferencia.

Luego (18) OM es perpendicular á AB, ó AB perpendicular á OM; conforme con el enunciado.

TEOREMA XLI

62. *Toda perpendicular AB al radio OM* (fig.ª 61) *que pasa por el extremo de éste, es tangente á la circunferencia.*

En efecto; todos los puntos de la recta AB, excepto M están á una distancia de O mayor que el radio OM, 15 (~~56~~) es decir que todos los puntos de AB son exteriores á la circunferencia escepto el punto M que está en la misma circunferencia; luego AB es tangente, conforme con el enunciado.

Este teorema es recíproco del anterior

COROLARIO. Por un punto dado en una circunferencia, se puede trazar á ésta una tangente y no se le puede trazar más que una; porque por el extremo del radio que pasa por dicho punto siempre se puede trazar una perpendicular á dicho radio, y no se puede trazar más que una.

ESCOLIO. El radio de un punto de la circunferencia, se llama tambien *normal* á la circunferencia en este punto. Así OM (fig.ª 61) es la normal á la circunferencia en el punto M.

En general, *normal* á una curva cualquiera en un punto de ella, es la perpendicular por dicho punto á la tangente correspondiente.

Todas las normales á una circunferencia pasan por el centro.

TEOREMA XLIII

63. *En un mismo círculo ó en círculos iguales se verifica:*

1.° *Que si dos arcos son iguales, las cuerdas tambien son iguales.*

2.° *Que si dos arcos son desiguales, corresponde al arco mayor la cuerda mayor.* (1)

1.° En efecto; si suponemos iguales los arcos ACB y MNP, (fig.ª 62) é iguales tambien los círculos O y O', superponiendo estos círculos de modo que M y K extremos del diámetro MK, coincidan respectivamente con A y H, extremos del AH, y que el arco MNP, caiga al mismo lado del diámetro AH, que el arco ACB, forzosamente el punto P coincidirá con el B, habrán coincidido pues, los extremos M y P de la cuerda MP con los extremos A y B de la cuerda AB; luego las dos cuerdas MP y AB que subtienden arcos iguales, son iguales.

(1) Se suponen arcos que no excedan de una semicircunferencia.

Del mismo modo, si suponemos iguales los arcos RST y ACB, que pertenecen al mismo círculo O, las cuerdas RT y AB que los subtienden tambien serán iguales; pues segun acabamos de demostrar, AB=MP y tambien RT=MP; luego AB=RT.

2.° Si suponemos iguales los círculos O y O' (fig.ª 63) y el arco CDF del segundo mayor que el ANB del primero, digo que la cuerda CF será mayor que la AB.

En efecto: superponiendo el círculo O sobre el O', de modo que A y K, extremos del diámetro AK, coincidan respectivamente con C y G, extremos del CG, que el arco AB caiga al mismo lado del diámetro CG, que el arco CDF, el punto B caerá precisamente en un punto D, situado en la circunferencia entre C y F. Trazando ahora los radios O'D y O'F, tendremos las desigualdades CS+SD>CD; O'S+SF>O'F; sumándolas ordenadamente, resulta CF+O'D>CD+O'F y restando del primer miembro el radio O'D y del segundo el radio O'F, resulta CF>CD ó CF>AB, conforme con el enunciado.

Del mismo modo, si suponemos en el mismo círculo O, HML>ANB; como de lo que acabamos de demostrar se deduce HL>CD; siendo CD=AB, tendremos HL>AB, conforme con el enunciado.

Escolio. Estas dos proposiciones son contrarias.

TEOREMA XLIV

64. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, se verifica:*

1.° *Que si dos cuerdas son iguales, los arcos que subtienden tambien son iguales.*

2.° *Que si dos cuerdas son desiguales, los arcos que subtienden tambien son desiguales, correspondiendo á la cuerda mayor el arco mayor.* (1)

Estas dos proposiciones contrarias entre sí, son respectivamente recíprocas de las anteriores (63), y se demuestran razonando del mismo modo que al demostrar los teoremas 15 y 16 y los 19 y 20.

(1) Considerando el arco menor de media circunferencia.

TEOREMA XLV

65. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, se verifica:*
1.° *Que si dos cuerdas son iguales, equidistan del centro.*
2.° *Que si dos cuerdas son desiguales, la menor dista más del centro.*

1.° Suponiendo iguales los círculos O y O' (fig.ª 64) é iguales tambien las cuerdas AB y CD, digo que sus distancias OM y O'N, al centro respectivo serán iguales.

En efecto; superponiendo el círculo O' sobre el O, de modo que coincidan los centros y las cuerdas CD y AB (64), forzosamente coincidirán las perpendiculares O'N y OM (13), y el punto N caerá sobre M; luego las distancias O'N y OM serán iguales.

Del mismo modo, si suponemos iguales las cuerdas AB y EF del mismo círculo O, sus distancias OM y OK al centro O, tambien serán iguales; pues segun se acaba de demostrar, siendo CD=AB y CD=EF, será O'N=MO y O'N=OK; luego OM=OK.

2.° Suponiendo iguales los círculos O y O' (fig.ª 65) y la cuerda AB menor que la CE, digo que la distancia OM será mayor que la distancia O'N.

En efecto; tomando desde C un arco CD igual al AB, el punto D caerá entre C y E, y la cuerda CD será igual á la AB; y segun se acaba de demostrar, será OM=O'P; pero O'P>O'Q y O'Q>O'N (15). Luego OM>O'N.

Del mismo modo, suponiendo en el mismo círculo O, la cuerda ST mayor que la AB, digo, que la distancia OM será mayor que la OH; pues segun se acaba de demostrar, siendo CD igual á AB, y por consiguiente menor que ST, será O'P>OH, y como O'P=OM será tambien OM>OH.

ESCOLIO. Estas dos proposiciones son contrarias.

TEOREMA XLVI

66. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, se verifica:*
1.° *Que si dos cuerdas equidistan del centro, son iguales.*

2.° *Que si dos cuerdas no equidistan del centro, la que más dista es la menor.*

Estas dos proposiciones contrarias entre sí, son respectivamente recíprocas de las anteriores, y se demuestran razonando del mismo modo, que al demostrar los teoremas XV y XVI, y los XIX y XX.

L. 6ª

TEOREMA XLVII

67. *Los arcos de una circunferencia, interceptados por dos rectas paralelas, son iguales.*

Pueden ocurrir tres casos:

1.° Que las dos paralelas sean secantes.

2.° Que sean una secante y una tangente.

3.° Que sean dos tangentes.

1.° Si las secantes AB y CD (fig.ª 66) son paralelas, los arcos interceptados AC y BD serán iguales.

En efecto; trazando el diámetro EF, perpendicular á dichas paralelas, los arcos CAE y DBE serán iguales (59), y tambien lo serán los AE y BE; se verificará pues,

$$\text{arco } CAE = \text{arco } DBE.$$

$$\text{arco } AE = \text{arco } BE.$$

Restando ordenadamente estas dos igualdades, será:

$$\text{arco } CAE - \text{arco } AE = \text{arco } DBE - \text{arco } BE,$$

$$\text{ó arco } CA = \text{arco } BD,$$

conforme con el enunciado.

2.° Si la secante CD y la tangente KL son paralelas, tirando el diámetro EF del punto de contacto F, EF será perpendicular (34) á la CD, y por lo tanto

$$\text{arco } CF = \text{arco } DF,$$

conforme con el enunciado.

3.° Si las tangentes IJ y KL son paralelas, trazando los radios FO y EO de los respectivos puntos de contacto, dichos radios perpendiculares á ambas tangentes paralelas, y que pasan por el mismo punto O, pertenecerán á una misma recta; EF es pues, recta, y pasa por el centro; luego es un diámetro y por consiguiente

Arco ECF = arco EDF,

conforme con el enunciado.

§ II.—*Posiciones de dos circunferencias en un plano*

68. Puesto que tres puntos que no están en línea recta, determinan la posicion de una circunferencia, dos circunferencias no pueden tener tres puntos comunes sin confundirse; pero pueden tener dos puntos comunes (fig.ª 69) en cuyo caso se llaman secantes.

Sentado esto, examinemos las posiciones relativas que pueden tener dos circunferencias en un plano.

69. Estas son cinco:

1.ª Circunferencias exteriores (fig. 67).
2.ª Circunferencias tangentes exteriores (fig.ª 68).
3.ª Circunferencias secantes (fig.ª 69)
4.ª Circunferencias tangentes interiores (fig.ª 70).
5.ª Circunferencias interiores (fig.ª 71).

TEOREMA XLVIII

70. *Si dos circunferencias* (fig.ª 69) *son secantes, la distancia de los centros OO', es perpendicular á la cuerda comun AB.*

En efecto; O y O' por ser centros respectivos de las dos circunferencias, equidistan de A y B, puntos comunes de las mismas; luego (24 cor.) la recta O O' es perpendicular á la cuerda comun AB.

TEOREMA XLIX

71. *Si dos circunferencias son tangentes* (figuras 68 y 70), *el punto de contacto se hallará en la recta que une los centros.*

En efecto; si suponemos que el punto de contacto se hallase fuera de la recta O O', por ejemplo en B, trazando por

B la perpendicular BC á OO', y tomando una parte MC = BM, como O y O' equidistan de B y de C, si B es punto comun á las dos circunferencias, tambien lo será C, de modo que dichas circunferencias tendrán dos puntos comunes B y C; luego serian secantes contra la hipótesis.

TEOREMA L

72. *Si dos circunferencias* (figs. 68 y 70) *tienen un punto comun A situado en la recta OO', que une los centros, dichas circunferencias serán tangentes.*

En efecto; puesto que tienen un punto comun, no pueden ser exteriores ni interiores; si probamos además que no pueden ser secantes, quedará demostrado que son tangentes. No pueden ser secantes, porque si suponemos que tienen otro punto comun B además del A, uniendo B con los centros resultará en la figura 68

$$OA + AO' = OB + BO';$$

pues ambos miembros han de ser la suma de los radios y dicha igualdad es imposible (4); y en la fig.ª 70

$$OA = O'A + OO' \ (a);$$

pero como suponemos que B es punto comun á las dos circunferencias, será OA = OB y O'A = O'B, sustituyendo en la igualdad (a), tendremos

$$OB = O'B + OO'$$

tambien imposible. Luego el teorema queda demostrado.

Este teorema es recíproco del teorema XLIX.

73. COROLARIO. *Si dos circunferencias tienen un punto comun en la recta que une los centros, y situado entre los centros, las circunferencias son tangentes exteriores* (fig.ª 68); *y cuando el punto comun está en la prolongacion de la recta que une los centros, las circunferencias son tangentes interiores* (figura 70).

TEOREMA LI

74. *Si dos circunferencias son exteriores* (fig.ª 67), *la distancia de los centros OO' es mayor que la suma de los radios.*

En efecto; puesto que son exteriores, todos los puntos de la circunferencia O', están fuera de la circunferencia O; de modo que la distancia de B al centro O, es mayor que el radio AO; es decir, que $OB > OA$; añadiendo á los dos miembros de esta desigualdad BO' será

$$OB + BO' > OA + BO'$$

ó

$$OO' > OA + BO',$$

conforme con el enunciado.

TEOREMA LII

75. *Si dos circunferencias son tangentes exteriores, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios* (fig.ª 68).

En efecto puesto que (71) el punto de tangencia ha de estar en la línea de los centros, y (73) entre estos, será $OO' = OA + AO'$.

TEOREMA LIII

76. *Si dos circunferencias* (fig.ª 69) *son secantes, la distancia de los centros, es menor que la suma de los radios, y mayor que la diferencia.*

1.° En efecto; puesto que los dos puntos de interseccion han de estar fuera de la línea de los centros, uniendo uno de dichos dos puntos, A por ejemplo, con los centros O y O' resultará (4) $OO' < OA + AO'$.

2.° Además como tambien (4)

$$AO' + OO' > OA,$$

restando de ambos miembros de esta desigualdad AO' resulta

$$OO' > OA - AO',$$

conforme con el enunciado.

TEOREMA LIV

77. *Si dos circunferencias son tangentes interiores* (fig.ª 70), *la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

En efecto; puesto que (73) el punto de contacto ha de estar situado en la prolongacion de la distancia de los centros, será

$$OO' = OA - AO'.$$

TEOREMA LV

78. *Si dos circunferencias son interiores* (fig.ª 71), *la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

En efecto; puesto que las circunferencias son interiores, si prolongamos la OO' distancia de los centros en el sentido de O' centro de la interior, hasta llegar á B punto de la exterior, el radio de esta OB se compondrá de OO' (distancia de los centros) O'A' (radio de la interior) y AB; luego la diferencia de los radios es OO' más AB; es decir que la distancia de los centros OO' es menor que la diferencia de los radios, conforme con el enunciado.

TEOREMA LVI

79. *Si la distancia de los centros de dos circunferencias* (figura 67) *es mayor que la suma de los radios, dichas circunferencias serán exteriores.*

En efecto; dichas circunferencias no pueden ser TANGENTES EXTERIORES, porque en este caso la distancia de los centros es igual á la suma de los radios; ni SECANTES, porque en este caso la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia; ni TANGENTES INTERIORES, porque en este caso la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios; ni INTERIORES, porque en este caso la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios; y como dos circunferencias situadas en un plano no pueden tener mas que cinco posiciones (65); habiendo probado que las que tienen la distancia de los centros mayor que la suma de los radios, no pueden ser tangentes exteriores, ni secantes, ni tangentes interiores, ni interiores, FORZOSAMENTE serán exteriores, conforme con el enunciado.

80. ESCOLIO. El anterior teorema es recíproco del LI; y conviene observar, que los teoremas LII, LIII, LIV y LV

tienen tambien sus respectivos recíprocos, cuyo enunciado se deduce fácilmente de cada uno de los respectivos directos, y cuya demostracion es análoga á la del teorema LVI.

Dichos recíprocos se enunciarán del modo siguiente:

RECÍPROCO DEL LII

Si la distancia de los centros de dos circunferencias, es igual á la suma de los radios, dichas circunferencias serán tangentes exteriores.

RECÍPROCO DEL LIII

Si la distancia de los centros de dos circunferencias, es menor que la suma y mayor que la diferencia de los radios, dichas circunferencias serán secantes.

RECÍPROCO DEL LIV

Si la distancia de los centros de dos circunferencias, es igual á la diferencia de los radios, dichas circunferencias serán tangentes interiores.

RECÍPROCO DEL LV

Si la distancia de los centros de dos circunferencias, es menor que la diferencia de los radios, dichas circunferencias serán interiores.

Todas estas proposiciones recíprocas se demostrarán fácilmente como el teorema LVI.

81. ESCOLIO 2.º Podemos, pues, establecer:

1.º *Para que dos circunferencias sean* EXTERIORES, *se necesita y basta que la distancia de los centros sea mayor que la suma de los radios.*

2.º *Para que dos circunferencias sean* TANGENTES EXTERIORES, *se necesita y basta que la distancia de los centros sea igual á la suma de los radios.*

3.º *Para que dos circunferencias sean* SECANTES, *se necesita y basta que la distancia de los centros sea menor que la suma y mayor que la diferencia de los radios.*

4.º *Para que dos circunferencias sean* TANGENTES INTERIORES, *se necesita y basta que la distancia de los centros sea igual á la diferencia de los radios.*

5.º *Para que dos circunferencias sean* INTERIORES, *se necesita y basta que la distancia de los centros sea menor que la diferencia de los radios.*

82. ESCOLIO 3.º Si examinamos los cinco teoremas (74, 75, 76, 77 y 78) y sus respectivos recíprocos, veremos que en los teoremas directos, se hacen todas las *hipótesis posibles* sobre las posiciones que pueden tener dos circunferencias en un plano. Dos circunferencias situadas en un plano, no pueden ser en efecto, (68) más que exteriores, tangentes exteriores, secantes, tangentes interiores ó interiores, y en cada una de estas posiciones, la relacion entre la distancia de los centros y la magnitud de los radios es distinta y excluye todas las demás; es decir, que supuesta una de las cinco posiciones de las dos circunferencias, forzosamente se verificará una relacion entre la distancia de los centros y la magnitud de los radios, con exclusion de todas las otras relaciones entre la distancia de los centros y la magnitud de los radios, de manera que en cada uno de los cinco teoremas directos, la conclusion es GENERAL para todos los casos en que se verifica la hipótesis, y EXCLUSIVA de estos casos; luego siempre que se verifique la conclusion, se verificará la hipótesis; es decir, que los recíprocos forzosamente son verdaderos.

Así, por ejemplo. En TODOS los casos en que las circunferencias son tangentes exteriores, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, y SOLO y EXCLUSIVAMENTE cuando sean tangentes exteriores, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios; porque en ninguna de las otras cuatro posiciones posibles, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios.

Luego siempre que la distancia de los centros sea igual á la suma de los radios, las circunferencias serán tangentes exteriores.

Podemos, pues, sentar como principio general, que siempre que como en este caso, se hagan sobre un sujeto todas las hipótesis posibles, y cada una de estas hipótesis conduzca á una conclusion diferente, y que excluya á todas las demás, los recíprocos son verdaderos y por consiguiente, puede excusarse su demostracion.

En tal caso se encuentran los teoremas recíprocos párrafos 21 y 23, 25 y 27.

§ III. *Medida de los ángulos*

83. El ángulo AOB (fig.ª 72) cuyo vértice está en el centro de la circunferencia O, se llama *ángulo central*, y el arco AB, comprendido entre los lados de dicho ángulo, es su arco correspondiente en dicha circunferencia.

Si haciendo centro en el vértice O (fig.ª 73) del ángulo MON, se trazan los arcos AB, A'B', A''B'', A'''B''' con los respectivos radios OA ,OA', OA'', OA''', dichos arcos son todos correspondientes al ángulo MON; de modo que todo ángulo tiene un número indefinido de arcos correspondientes porque el vértice es centro de un número ilimitado de circunferencias. Para designar pues, uno de los arcos correspondientes á un ángulo es preciso determinar el radio de dicho ángulo.

Si imaginamos que O B (fig.ª 72) uno de los lados del ángulo AOB, gira al rededor de O aproximándose al OA hasta confundirse con él, tomará sucesivamente las posiciones Ob, Ob', Ob'' OA, y el ángulo irá disminuyendo hasta anularse. Al mismo tiempo, el arco correspondiente en esta circunferencia va sucesivamente disminuyendo, hasta quedar tambien reducido á cero.

Si por el contrario el lado OB gira al rededor del punto O separándose del lado AO, tomará sucesivamente las posiciones OB', OB'', el ángulo aumentará y el arco correspondiente de dicha circunferencia aumentará tambien.

El ángulo central y cualesquiera de sus arcos correspondientes son pues cantidades que *dependen* la una de la otra, (Algebra 258) porque toda variacion de la una, lleva consigo una variacion de la otra.

Examinemos ahora si esta dependencia, es dependencia proporcional.

TEOREMA LVII

84. *Si dos ángulos AOB, y A'O'B'* (fig.ª 74) *son iguales, sus arcos correspondientes trazados con el mismo radio CD y C'D' tambien serán iguales.*

En efecto; superponiendo el ángulo A'O'B' sobre el AOB de modo que coincidan los vértices O y O', el lado O'B' con el OB y el O'A' con el OA, el punto D' caerá forzosamente sobre D, y el C' sobre C; luego los arcos C'D' y CD, trazados con el mismo radio y cuyos extremos coinciden, coincidirán en toda su extension.

TEOREMA LVIII

85. *Si dos arcos C D y C'D' (fig.ª 74) trazados con el mismo radio son iguales, sus ángulos centrales correspondientes COD y C'O'D' tambien serán iguales.*

En efecto; superponiendo el centro O' sobre el O, y el punto C' sobre el C, el punto D' forzosamente caerá sobre el D, por la igualdad de los arcos; luego los ángulos C'O'D' y COD, habrán coincidido conforme con el enunciado.

Este teorema es recíproco del anterior.

TEOREMA LIX

86. *Dos ángulos centrales AOB y A'O'B' (fig.ª 75) son proporcionales á sus arcos correspondientes MN y M'N' trazados con el mismo radio.*

En esta demostracion conviene distinguir dos casos: 1.º Que los arcos sean conmensurables. 2.º Que los arcos sean inconmensurables.

Primer caso: Suponiendo que la medida comun de los arcos MN y M'N' sea MR, y que esté contenida 3 veces en el arco MN y 4 en el M'N', 3 será el número que mide al arco MN, y 4 el que mide al M'N', si tomamos por unidad dicha medida comun; y como (Arit.ª 343) la *razon* de dos cantidades es la de los números que las miden con una misma unidad, será

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{3}{4}$$

Si unimos ahora los vértices O y O' con los puntos de division de los arcos respectivos, el ángulo AOB quedará dividido en 3 ángulos y el A'O'B' en 4, todos iguales (85). Si tomamos el ángulo parcial MOR por unidad, los números 3 y 4 serán los que midan respectivamente los ángulos AOB y A'O'B' y (Arit.ª 343) tendremos

$$\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{3}{4}$$

$$\text{luego} \quad \frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{MN}{MN'} \quad (\text{Alg.}^a\ 55)$$

conforme con el enunciado.

Segundo caso: Si los arcos MN y M' N' (fig. 76) son inconmensurables, podemos suponer dividido el M' N' en n partes iguales; y colocando la enésima parte de M' N' todas las veces que se pueda sobre MN, empezando por M, y suponiéndola contenida m veces; es decir, suponiendo que el mayor número de enésimas de M' N', contenidos en MN, sea m; el extremo de la última *enésima*, caerá en un punto R, próximo á N, puesto que RN, ha de ser menor que dicha *enésima* parte de M' N'. A medida que crece n, R se acerca á N, porque disminuyendo la *enésima* de M' N', disminuirá tambien el arco RN y su ángulo correspondiente RON, y como podemos hacer á n tan grande como queramos; la *enésima* de M' N', y la de M' O' N' llegarán á ser tan pequeñas como se desee, y RN y RON podrán ser menores que cualquier cantidad dada.

De manera que MR es una cantidad variable que á medida que aumenta n, crece, acercándose á su límite MN, y tambien AOR, es una cantidad variable que á medida que aumenta n crece acercándose á su límite AOB. Ahora, puesto que MR contiene m veces la *enésima* parte de M' N', será

$$\frac{MR}{M'N'} = \frac{m}{n}; \quad \frac{MN}{M'N'} > \frac{m}{n}; \quad \frac{MN}{M'N'} < \frac{m+1}{n},$$

de modo que tenemos la limitacion

$$\frac{m}{n} < \frac{MN}{N'N'} < \frac{m+1}{n}$$

Pero tambien MOR contiene m veces la *enésima* parte de N' O' B'';
luego

$$\frac{MOR}{M'O'N'} = \frac{m}{n}: \quad \frac{MON}{M'O'N'} > \frac{m}{n}; \quad \frac{MON}{M'O'N'} < \frac{m+1}{n}$$

tenemos pues la limitacion

$$\frac{m}{n} < \frac{MON}{M'O'N'} < \frac{m+1}{n};$$

luego (Arit.^{a} 343)

$$\frac{MON}{M'O'N'} = \frac{MN}{M'N'},$$

conforme con el enunciado.

87. COROLARIO. *Un ángulo y cualquiera de sus arcos correspondientes, tienen la misma medida.*

Si el ángulo AOB (fig.ª 77) se quiere medir tomando por unidad el A'O'B', su medida será el número abstracto (entero, fraccionario ó inconmensurable), expresado por la razon $\frac{AOB}{A'O'B'}$. Pero, segun el teorema anterior, si trazamos con el mismo radio los arcos AB y A'B', correspondientes respectivamente al ángulo que se quiere medir, y al ángulo unidad, tendremos

$$\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{AB}{A'B'}$$

El primer miembro de esta igualdad, es la medida del ángulo AOB, tomando por unidad el A'O'B'; y el segundo es la medida de su arco correspondiente AB, tomando por unidad el arco A'B', correspondiente al ángulo unidad A'O'B' y trazado con el mismo radio que el AB. Para medir, pues, un ángulo, bastará trazar uno de sus arcos correspondientes, y con el mismo radio el arco correspondiente al ángulo adoptado como unidad, hallar la medida del primero de estos dos arcos tomando por unidad el segundo, y esta medida será precisamente la del ángulo que se queria medir.

88. *La unidad adoptada para medir los ángulos, es el ángulo recto;* por consiguiente la unidad para medir arcos, será el arco correspondiente al recto, que es la cuarta parte de la circunferencia y se llama *cuadrante.* (1)

Para facilitar la medida de los arcos, se divide cada cuadrante en 90 partes iguales que se llaman grados; cada grado en 60 partes iguales que se llaman minutos, cada minuto en 60 segundos, cada segundo en 60 tercios, etc. Como al arco un grado, ($\frac{1}{90}$ de cuadrante), corresponderá $\frac{1}{90}$ del ángulo recto; si se divide al recto en 90 partes iguales, cada una de éstas se llaman tambien grados angulares, cuyos arcos correspondientes, son grados de cuadrante. Del mismo modo

(1) Puesto que si se traza en un círculo dos diámetros perpendiculares se forman 4 ángulos rectos, sus arcos correspondientes serán iguales; luego á cada recto corresponde la cuarta parte de la circunferencia ó sea un cuadrante.

cada grado angular se divide en 60 minutos, cada minuto angular en 60 segundos; y sus arcos correspondientes son respectivamente minutos y segundos de cuadrante.

Para averiguar, pues, los grados, minutos, segundos, etcétera de un ángulo, bastará hallar los grados, minutos y segundos, etc. de uno cualquiera de sus arcos correspondientes. Esto se consigue fácilmente con un instrumento llamado semicírculo graduado ó transportador, cuyo uso se explicará en el próximo capítulo.

El valor de los ángulos ó de los arcos se expresa escribiendo el signo *o*, á la derecha y en la parte superior del número de grados, el signo ', á la derecha y en la parte superior del número de minutos, el signo '', á la derecha y en la parte superior del de segundos, etc. Así, por ejemplo, un ángulo ó un arco de 34 grados, 5 minutos, 17 segundos, se expresa

ángulo ó arco de $34^{\circ}\ 5'\ 17''$

Puesto que un cuadrante tiene 90°, toda la circunferencia tendrá 360° y media circunferencia 180°.

En el sistema métrico, el cuadrante se divide en 100 grados que se expresan 100^{g}, cada grado en un $100'$ y cada minuto en $100''$, etc. Esta division se usa poco; y será fácil reducir un arco expresado en la division antigua ó sexagesimal, á su equivalente de la division centesimal, y recíprocamente (Arit.ª 404).

89. Angulo *inscripto*, es el que tiene su vértice en la circunferencia, y sus lados son dos cuerdas.

El ángulo AOB (fig.ª 78) es un ángulo inscripto.

TEOREMA LX

El ángulo inscripto, tiene la misma medida, que la mitad del arco comprendido entre sus lados.

En esta demostracion conviene distinguir tres casos: 1.° Cuando el centro del círculo está en uno de los lados del ángulo. 2.° Cuando el centro está dentro del ángulo, y 3.° Cuando el centro está fuera del ángulo.

Primer caso: Sea el ángulo inscripto (fig.ª 79) BAC, cuyo lado AB pasa por el centro O. Trazando el diámetro MN paralelo al otro lado AC, tendremos el ángulo BAC igual al central BON por correspondiente de éste; y como la medida del BON es la misma que la del arco BN (87), la medida de su igual BAC tambien será la misma que la del arco BN. Pero los arcos BN y MA son iguales, por tener el mismo radio y corresponder á los dos ángulos iguales BON y MOA (84), y como el arco MA es igual al CN por estar interceptados por dos rectas paralelas, serán BN = NC y BN = $\frac{1}{2}$ BC; luego la medida del ángulo inscripto BAC será la misma que la del arco $\frac{1}{2}$ BC, conforme con el enunciado

Segundo caso: Sea el ángulo inscripto BAC (fig.ª 80). Trazando el diámetro AM que pasa por el vértice A, como el centro del círculo está dentro del ángulo BAC, éste quedará dividido en los dos ángulos BAM y MAC, que son inscriptos y están comprendidos en el caso anterior. La medida del BAM será la del arco $\frac{1}{2}$ BM, y la del MAC será la del arco $\frac{1}{2}$ MC; luego la medida de la suma de estos dos ángulos, que es el ángulo BAC, será la suma de las medidas de los arcos $\frac{1}{2}$ BM y $\frac{1}{2}$ MC, ó lo que es lo mismo, la medida del arco

$$\tfrac{1}{2}(BM + MC) = \tfrac{1}{2} BC,$$

conforme con el enunciado.

Tercer caso: Sea el ángulo inscripto BAC (fig.ª 81). Trazando el diámetro que pasa por el vértice A, como el centro del círculo está fuera del ángulo BAC, tendremos

$$\text{ángulo } BAC = \text{ángulo } BAM - \text{ángulo } CAM.$$

Pero, segun el primer caso, la medida del ángulo BAM es igual á la del arco $\frac{1}{2}$ BM, y la del ángulo CAM es igual á la del arco $\frac{1}{2}$ CM; luego la del ángulo BAC, diferencia entre éstos, será la medida del arco $\frac{1}{2}$ BM menos la medida del arco $\frac{1}{2}$ CM, es decir, la medida del

$$\text{arco } \tfrac{1}{2}(BM - CM) = \text{arco } \tfrac{1}{2} BC,$$

conforme con el enunciado.

90. Corolarios: 1.º Todos los ángulos inscriptos BAC, BA'C, BA''C, BA'''C (fig.ª 82), que comprenden el mismo arco entre sus lados, son iguales.

2.º Todos los ángulos inscriptos, BAC, BA'C, BA''C, BA''C (fig.ª 83), cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro, son ángulos rectos.

3.º El lugar geométrico de los vértices A, A', A'', A''' (figuras 82 y 83), cuya medida es la del arco $\frac{1}{2}$ BC ó un $\frac{1}{2}$ BMC respectivamente, es un arco de círculo.

TEOREMA LXI

91. *El ángulo BAC* (fig.ª 84) *cuyos lados son una tangente y una cuerda, que concurren en un punto de la circunferencia, tiene la misma medida que la mitad del arco AC comprendido entre sus lados*

En efecto; trazando el diámetro AM que pasa por el vértice A, tendremos que el ángulo BAC es igual al ángulo BAM menos el ángulo CAM; y como BAM es recto, su medida será la de un cuadrante ó la del arco $\frac{1}{2}$ ACM, y la del CAM será la del arco $\frac{1}{2}$ CM; luego la medida del ángulo BAC será la del arco $\frac{1}{2}$ ACM menos la del arco $\frac{1}{2}$ CM, es decir, la del arco

$$\tfrac{1}{2}\,(ACM - CM) = \tfrac{1}{2}\,AC,$$

conforme con el enunciado.

TEOREMA LXII

92. *El ángulo BAC* (fig.ª 85) *cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados son una cuerda y la prolongacion de otra, tiene la misma medida que el arco MAC, semisuma de los arcos MA y AC, que subtienden dichas cuerdas.*

En efecto; la suma de los ángulos suplementarios BAC y CAM, tiene por medida la de un arco igual á la mitad de la circunferencia; pero el MAC, tiene por medida la del arco $\frac{1}{2}$ MC; luego la medida de su suplementario BAC, será el arco mitad de la circunferencia menos arco $\frac{1}{2}$ MC, es decir $\frac{1}{2}$ MAC conforme con el enunciado.

TEOREMA LXIII

93. *El ángulo BAC* (fig.ª 86); *cuyo vértice está situado entre el centro y la circunferencia, tiene la misma medida que*

la semisuma de los arcos BC y MN interceptados por sus lados prolongados.

En efecto; trazando por N la cuerda NP paralela al otro lado MC, tendremos

ángulo BAC = ángulo BNP

pero la medida de éste es la misma que la del arco $\frac{1}{2}$ BCP, y como CP = MN, (67), será

$$\tfrac{1}{2}\,BCP = \tfrac{1}{2}(BC + MN)$$

es decir, que la medida del ángulo BNP es la del arco $\frac{1}{2}(BC + MN)$; luego tambien será la medida del ángulo BAC, conforme con el enunciado.

TEOREMA LXIV

94. *El ángulo cuyo vértice está situado fuera de la circunferencia, y sus lados son dos secantes, una secante y una tangente, ó dos tangentes; tiene la misma medida, que la semidiferencia de los arcos interceptados por los lados del ángulo*

En esta demostracion, conviene distinguir tres casos: Primero. Cuando los dos lados del ángulo son secantes. Segundo. Cuando uno de los lados es secante y el otro tangente, y tercero. Cuando los dos lados son tangentes.

Primer caso: Sea el ángulo BAC (fig.ª 87), trazando por M la cuerda MP paralela al otro lado AC, tendremos

ángulo BAC = ángulo BMP.

Pero (89) la medida de éste es la del arco

$$\tfrac{1}{2}\,BP = \tfrac{1}{2}(BC - PC) = \tfrac{1}{2}(BC - MN).$$

Luego tambien será la medida del ángulo BAC la misma que la del arco $\frac{1}{2}(BC - MN)$, conforme con el enunciado.

Segundo caso: Sea el ángulo BAC (fig.ª 88); trazando por N la cuerda NM paralela al otro lado AC, tendremos

ángulo BAC = ángulo BNM.

Pero (89) la medida de éste, es igual al arco $\frac{1}{2}$ BM, y como

$$\tfrac{1}{2}\,BM = \tfrac{1}{2}\,(BMC - MC) = \tfrac{1}{2}\,(BMC - NC)\ (67)$$

la medida del ángulo BNM, y la de su igual BAC, será la misma que la del arco $\frac{1}{2}$ (BMC — NC), conforme con el enunciado.

Tercer caso: Sea el ángulo BAC (fig.ª 89) trazando por el vértice A, la secante AM; tendremos

$$\text{ángulo } BAC = \text{ángulo } BAM + \text{ángulo } MAC;$$

y como la medida del ángulo BAM es la misma que la del arco $\frac{1}{2}$ (BM — BN), y la medida del ángulo MAC, es la misma que la del arco $\frac{1}{2}$ (MC — NC); la medida del ángulo BAC será la misma que la del arco

$$\tfrac{1}{2}\,(BM - BN) + \tfrac{1}{2}\,(MC - NC) = \tfrac{1}{2}\,(BMC - BNC),$$

conforme con el enunciado.

CAPÍTULO III

PROBLEMAS

PROBLEMA I

95. *Por un punto dado, trazar una perpendicular á una recta dada.*

En este problema se distinguen cuatro casos particulares:

Primer caso: Cuando el punto dado O (fig.ª 90) está situado en la recta dada AB, y ésta es ilimitada.

Tomando á uno y otro lado de O dos distancias iguales OM y ON; y haciendo centro sucesivamente en M y N con un radio mayor que la mitad de la distancia en los centros M y N, trazaremos dos arcos que se cortarán precisamente en un punto P situado fuera de la línea de los centros MN.

Este punto P y el O, por equidistar de M y N, (23) estarán situados en la perpendicular que pasa por O, punto medio de la distancia MN; luego PO es la perpendicular pedida.

Segundo caso: Cuando el punto dado O, (fig.ª 91) está situado fuera de la recta dada AB, y ésta es ilimitada.

Haciendo centro en el punto dado O, con un radio mayor que la distancia de O á la recta AB, trazaremos un arco que cortará á esta recta en estos dos puntos M y N. Si hacemos ahora centro sucesivamente en estos dos puntos, y con un radio mayor que la mitad de la distancia MN, trazamos dos arcos, éstos se contarán en P, fuera de la línea de los centros. Este punto P y el O, equidistan de M y N; luego (23) la OP es la perpendicular pedida.

Tercer caso: Cuando el punto dado O (fig.ª 92) situado en la recta dada, la limita en el sentido AO.

Tiremos la ON de modo que forme un ángulo agudo con la recta dada. Haciendo centro en un punto N de la ON tracemos una circunferencia con un radio NO, que pasará por el punto dado O, y por otro punto M de la recta dada. Tracemos ahora el diámetro MP, y unamos el extremo P de este diámetro, con el punto dado O por medio de la recta PO. Esta será la perpendicular pedida; porque el ángulo inscripto MOP es recto (90 cor. 2.º)

Cuarto caso: Cuando el punto dado O (fig.ª 93) está situado fuera de la recta dada, limitada por B en el sentido AB.

Haciendo centro en el punto dado O, con dos radios desiguales, tracemos dos arcos que corten á la recta AB en dos puntos N y M. Haciendo ahora centro en N y M con los radios NO y MO respectivamente, tracemos dos arcos que se cortarán precisamente en un punto P situado fuera de la línea de los centros. Unamos los puntos O y P por medio de la recta OP, y ésta será la perpendicular pedida, porque (23) los puntos N y M equidistan de O y P.

ESCOLIO. El primer y el tercer caso de este problema, pueden tambien resolverse con la escuadra y el semicírculo graduado. El exámen de estos instrumentos y las indicaciones del profesor, enseñarán el procedimiento más fácil y claramente que ninguna explicacion escrita.

PROBLEMA II

96. *Dividir una recta AB* (fig.ª 94) *en dos partes iguales por medio de una perpendicular.*

Con un radio mayor que la mitad de AB, y haciendo centro en A y B sucesivamente, tracemos dos arcos que se cortarán en dos puntos M y N situados fuera de la línea de los centros. Unamos los dos puntos M y N por medio de una recta MN, y ésta será la perpendicular á la AB y pasará por su punto medio (24 cor.)

PROBLEMA III

97. *Dado un ángulo AOB* (fig.ª 95), *trazar su bisectriz.*

Con un radio cualquiera OM, se traza el arco MN correspondiente al ángulo dado. Haciendo centro sucesivamente en M y N con un radio mayor que la mitad de la cuerda MN, se trazan dos arcos que se cortarán en D. La recta OD es la bisectriz pedida.

En efecto; la DO es perpendicular á la cuerda MN, y pasa por su punto medio; luego (59 esc.) divide al arco MN en dos partes iguales; y por consiguiente los ángulos centrales AOD y DOB (85) son iguales.

PROBLEMA IV

98. *Dadas dos rectas AB y CD* (fig.ª 96) *trazar otra recta cuyos puntos equidisten de las dadas.*

Trazando la MN secante á las AB y CD, y las bisectrices de los cuatro ángulos interiores que forman estas rectas dadas, con dicha secante, el punto O interseccion de las dos bisectrices de un lado, y el O' interseccion de las dos bisectrices del otro lado de la secante equidistan (25) de las rectas AB y CD, luego (27) pertenecen á la bisectriz del ángulo que formarian las AB y CD si se prolongasen; y como dos puntos determinan una recta, la O'O' es dicha bisectriz; es decir, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las AB y CD.

COROLARIO. Las tres rectas BA, DC y O'O' concurren en un mismo punto, si se prolongan suficientemente.

ESCOLIO. Si AB y CD son paralelas entre sí, lo son tambien á la OO'.

PROBLEMA V

99. *Por un punto A* (fig.ª 97) *dado en una recta AB, trazar otra recta que forme con la primera un ángulo igual á otro dado MOP.*

Haciendo centro en el vértice O del ángulo dado MOP y con un radio cualquiera OM, se traza el arco MP. Con el mismo radio OM, y haciendo centro en el punto dado, se traza á partir de S situado en la recta dada un arco indefinido. Se toma la cuerda del arco MP, y con un radio igual á esta cuerda y haciendo centro en S, se traza un arco que cortará al anterior en D, y uniendo D con A, tendremos el ángulo DAS igual al dado MOP, porque sus arcos correspondientes son iguales (85).

PROBLEMA VI

100. *Por un punto A* (fig.ª 98) *situado fuera de una recta DB, trazar otra recta que forme con la primera un ángulo igual á otro dado MOP.*

Por un punto cualquiera S de la recta dada DB, tracemos (99) un ángulo RSB igual al dado MOP. Por el punto dado A, tracemos la AT paralela á RS; y el ángulo ATB será el ángulo pedido (46).

PROBLEMA VII

101. *Dados dos ángulos ABC y MOP* (fig.ª 99) *trazar un ángulo igual á la suma, y otro igual á la diferencia de los ángulos dados.*

Haciendo centro en los vértices O y B y con un mismo radio, tracemos los arcos RS y TL. Haciendo centro en un punto cualquiera H de la recta indefinida EQ, tracemos el arco indefinido FN. Tomando ahora la distancia LT y haciendo centro en F, tracemos un arco que cortará al indefinido en

G, y con un radio igual á la distancia RS y haciendo centro en G, tracemos dos arcos que cortarán al indefinido en J y K. Trazando JH y HK, tendremos el ángulo JHF igual á la suma de los dados, y el KHF igual á la diferencia de los dados

La construccion de un ángulo igual á la suma de otros dos, nos conducirá facilmente á la construccion de un ángulo duplo, triplo, cuadruplo..... y en general múltiplo de otro.

PROBLEMA VIII

102. *Por un punto dado A* (fig.ª 100) *trazar una paralela á la recta dada BC.*

Primera construccion: Tracemos por el punto A, la perpendicular AM á la recta dada BC; ahora tracemos otra perpendicular PR á la MA por el punto A. La PR es la paralela pedida (31).

Segunda construccion: Por el punto dado A (fig ª 101) tracemos una recta cualquiera AM, que corte á la dada BC. Ahora tracemos por el punto A una recta PA, que forme con la AM un ángulo PAM = AMC (99); la recta PR es la paralela pedida (40).

PROBLEMA IX

103. *Por un punto A* (fig.ª 102) *trazar una secante á las paralelas MN y PQ, cuya parte interceptada entre dichas paralelas sea igual á una recta dada RS.*

Haciendo centro en un punto cualquiera H de una de las paralelas MN, con un radio igual á la recta dada RS, tracemos un arco que cortará á la otra paralela en dos puntos J y K. Unamos J y K con H, por medio de las rectas JH y KH, y trazando la AL paralela á HK, y AL' paralela á HJ, tendremos que la AL y AL' resuelven el problema (48).

DISCUSION: [1] Observemos que este problema se resuelve

(1) Discutir un problema en Geometría, es lo mismo que en Algebra, determinar los distintos valores de las incógnitas, cuando los datos pasan por todos los valores posibles.

por la recta AL, y tambien por la AL'; es decir, que estas dos rectas satisfacen las condiciones exigidas por el enumerado del problema. Se han descubierto, pues, dos soluciones al resolverlo.

El punto dado A, puede tener tres posiciones distintas; fuera de las paralelas, en una de las paralelas, y entre las paralelas. El procedimiento (1) seguido, es aplicable en todos estos casos.

Observemos, que la recta dada RS, puede ser mayor que la distancia entre las paralelas, igual, y menor que dicha distancia.

En el primer caso, se obtienen, como se ha visto, dos soluciones.

En el segundo caso, cuando la recta dada RS (fig.ª 103) es igual á la distancia entre MN y PE, empleando la misma construccion que en el caso anterior, veremos que haciendo centro en un punto H, situado en una de las paralelas MN con un radio RS; como RS es igual á la distancia entre ambas paralelas, el arco será tangente á la otra paralela PE en un punto J, de modo que la AL única paralela que se puede trazar por el punto dado A á la HJ es la que resuelve el problema. Este no tiene, pues, más que una solucion.

Por fin, si suponemos RS menor que la distancia entre ambas paralelas, empleando el mismo procedimiento que antes, nos encontramos con que si hacemos centro en un punto H' de una de sus paralelas, con un radio menor que la distancia entre ambas, el arco CD, no tocará á la otra paralela, y por consiguiente, el procedimiento que en los casos anteriores nos conducía á la resolucion del problema, no nos dá ahora ninguna solucion, y es evidente, que en efecto el problema no tiene ninguna solucion *ó es imposible*, por cuanto se pide trazar una secante tal, que la parte interceptada entre las paralelas, sea menor que la distancia entre ambas paralelas.

PROBLEMA X

104. *Dada una circunferencia ó un arco, hallar su centro.* Sean la circunferencia ABC y el arco AB (fig.ª 104).

(1) Este procedimiento gráfico, con que se resuelve el problema, con la regla y el compás, se llama construccion.

Señalando en una y otro respectivamente los tres puntos A, B, C y A' B' C'; y trazando las cuerdas AB y BC, A'B' y B'C', si levantamos perpendiculares en los puntos medios de dichas cuerdas, dichas perpendiculares pasarán por los respectivos centros, (59 esc.) Luego los puntos de interseccion O y O' serán los centros buscados.

PROBLEMA XI

105. *Medir un ángulo dado AOB* (fig.ª 105).

Colóquese el transportador como indica la figura, y el número de grados señalados por M en el limbo del instrumento, que es la medida del arco NM, correspondiente al ángulo dado, será la medida de éste.

PROBLEMA XII

106. *Medir un arco dado* (fig.ª 106).

Trazando los radios OA y OB, tendremos el ángulo AOB cuya medida es igual á la del arco AB (87). Busquemos la medida del ángulo AOB, siguiendo el procedimiento empleado en el problema anterior, y esta medida será la del arco AB.

PROBLEMA XIII

107. *Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados A, B, C* (fig.ª 107).

Uniendo dichos puntos por medio de las rectas AB y BC, y levantando en los puntos medios de éstas, las perpendiculares PO y QO, el punto O de interseccion de estas perpendiculares equidistará (60) de los puntos dados A, B, C,. Haciendo centro en O, con un radio OA, trazaremos la circunferencia pedida.

DISCUSION: Desde luego se descubre, que este problema es imposible cuando los tres puntos dados A, B, C, están en línea recta (fig.ª 108) (60 cor.) y la construccion lo manifiesta, pues las dos perpendiculares PO, QO', levantadas en los puntos medios de las rectas AB y BC, no pueden encontrarse.

Si los tres puntos dados, no están en línea recta, el problema tiene siempre una solucion, pues (fig.ª 107) las dos perpendiculares á las AB y BC, siempre se encuentran en O, y O es el *único* punto que equidista de A, B, C.

PROBLEMA XIV

108. *Dividir un arco AB* (fig.ª 109) *en dos partes iguales.*

Trazando la cuerda AB y á ésta una perpendicular MN por su punto medio, el punto M, de interseccion entre el arco dado AB y la perpendicular MN en el punto medio del arco dado (59 esc.)

PROBLEMA XV

109. *Sobre una distancia dada AB* (fig.ª 110), *trazar un arco capaz de un ángulo dado MOP.* (1)

Sobre la recta AB, tracemos un ángulo HAB igual al dado MOP; levantemos la perpendicular AC á la AH por el extremo A de la dada AB, y la perpendicular SC á la AB por su punto medio. Haciendo centro en el punto C, interseccion de las dos perpendiculares y con un radio CA, tracemos una circunferencia que pasará por los extremos A y B de la recta dada. El arco AB es el pedido.

En efecto; el ángulo HAB igual al dado, tiene la misma medida (91) que cualquiera ángulo ARB, inscripto en el arco ARB.

PROBLEMA XVI

110. *Por un punto dado, trazar una tangente á una circunferencia dada.*

(1) Arco capaz del ángulo dado MOP y trazado sobre la recta AB, es el arco ARB, que pasa por A y B, satisfaciendo la condicion de que todo ángulo ARB inscripto en dicho arco, es igual al dado MOP.

Distinguiremos dos casos:

1.° Que el punto dado esté en la circunferencia.

2.° Que el punto dado esté fuera de la circunferencia.

1.° Para trazar una tangente á la circunferencia O (figura 111) que pase por el punto A situado en ésta, bastará tirar la perpendicular MN al radio OA del punto de contacto (62).

2.° Para trazar una tangente á la circunferencia O, (fig.ª 112) por el punto A, situado fuera de dicha circunferencia, se une el punto dado A con el centro O de la circunferencia dada, por medio de la recta AO. Sobre esta recta, tomada como diámetro, se describe otra circunferencia AMN, y las rectas AM y AN, trazadas desde A á los puntos M y N de interseccion de las dos circunferencias, son tangentes á la circunferencia dada O; puesto que los ángulos OMA y ONA inscriptos en la circunferencia auxiliar son rectos (62), y OM y ON son radios de la circunferencia dada. (110) Cor. 2

Otra construccion. Haciendo centro en A (fig.ª 113), se traza un arco indefinido que pase por el centro O. Ahora, haciendo centro en O con un radio igual al diámetro de la circunferencia dada, se trazan dos arcos que corten al anterior en dos puntos B y C. Se trazan las cuerdas OB y OC, y las dos rectas AN y AM, trazadas desde el punto dado A á los puntos M y N, son tangentes que satisfacen las condiciones del problema; puesto que AM y AN son respectivamente perpendiculares á los radios OM y ON, y pasan por los extremos de éstos. (59 esc.)

PROBLEMA XVII

111. *Trazar una circunferencia que sea tangente á la recta AB en el punto T* (fig.ª 114) *y que pase además por un punto M.*

Puesto que, segun las condiciones del problema, la circunferencia que se ha de trazar debe ser tangente á la recta AB en el punto T, la perpendicular TO á la AB, trazada por el punto T, forzosamente ha de pasar por el centro de la circunferencia que se busca (61). Como además esta circunferencia ha de pasar por el punto M, la recta TM, que tiene dos puntos en la circunferencia, será una cuerda. La perpendicular HO, levantada en el punto medio H de la cuerda TM, tambien ha de pasar por el centro de dicha circunferencia (59).

Si, pues, las dos rectas TO y HO forzosamente han de pasar por el centro de la circunferencia que se busca, el punto O de interseccion será el centro, y el radio será OT. Si, pues, con un radio OT, haciendo centro en O, trazamos una circunferencia, ésta satisfará las condiciones del problema.

Fácilmente se descubre (fig.ª 115) que si el punto M está situado en la recta AB, que ha de ser tangente á la circunferencia que se busca, el problema es imposible, porque la circunferencia que pasa por dos puntos T y M de la recta AB, no puede ser tangente á ésta, como exige el problema. La construccion tambien nos indica esta imposibilidad, pues la perpendicular TO á la recta dada, y la perpendicular HO' por el punto medio de la cuerda TM, son paralelas.

PROBLEMA XVIII

112. *Trazar una circunferencia que sea tangente á otra dada O* (fig.ª 116) *en el punto A, y que pase además por el punto B.*

Puesto que la circunferencia que se busca y la dada O han de ser tangentes en A, este punto de contacto estará en la línea de los centros (71); luego el centro de la que se ha de trazar, estará en la recta determinada por los puntos O y A. Pero además la circunferencia ha de pasar por el punto B. Si pasa por A y B, la recta AB será cuerda de la circunferencia pedida, y por lo tanto la perpendicular HO' levantada en el punto medio de AB, pasará (59) forzosamente por el centro de dicha circunferencia. El punto O', interseccion de las OA y HO', será el centro de la circunferencia, pues en ambas está situado. Haciendo centro en O' con un radio O'A, trazaremos una circunferencia que satisfará las condiciones del problema.

Fácilmente se descubre que si el punto B (fig.ª 117) se halla situado en la tangente BQ del punto A, el problema es imposible, por cuanto el radio AO y la perpendicular trazada por el medio de la AB, que debe ser cuerda de la circunferencia que se pide y en cuya interseccion debe hallarse el centro, son paralelas. Fuera de este caso el problema es posible. Si el punto B se encuentra como en la figura 116 á distinto lado de la tangente PQ que la circunferencia dada, las circunferencias serán tangentes exteriores; y si el punto B se halla como en la figura 118 al mismo lado que la circunferencia dada, las circunferencias serán tangentes interiores.

113. *Trazar una tangente á dos circunferencias dadas.*

Sean O y O' (fig.ª 119) las dos circunferencias dadas. Con un radio igual á la diferencia de los dos radios de las circunferencias dadas, tracemos una circunferencia auxiliar concéntrica con la O. Desde O' centro de la otra tiremos (110) las tangentes O'E y O'H, á la circunferencia auxiliar. Tracemos los dos radios OE y HO de los puntos de contacto E y H, y prolonguémoslos hasta que encuentren en A y B á la circunferencia dada O. Tracemos ahora los dos radios O'C y O'D perpendiculares respectivamente á las tangentes O'E y O'H; y trazando por fin una recta que pase por A y C, y otra por B y D, estas dos rectas serán las tangentes pedidas.

En efecto; AE y CO' son iguales y perpendiculares á O'E, luego (49 cor.) los puntos A y C pertenecen á la paralela á O'E, cuya distancia á ésta es AE, AC es pues paralela á EO' y por ello perpendicular á los radios OA y O'C, y pasa por los extremos de éstos; luego AC es tangente á las dos circunferencias dadas.

Del mismo modo se demuestra que DB es tambien tangente comun á las dos circunferencias dadas, de modo que las rectas AC y DB son dos soluciones del problema.

Si en la (fig.ª 120) se traza una circunferencia auxiliar concéntrica con la O, y con un radio igual á la suma de los radios de las dos circunferencias dadas O y O'; y desde el centro O' se trazan las O'E y O'H, tangentes á la circunferencia auxiliar; se tiran despues los radios OE y OH de los puntos de contacto de dichas tangentes; se trazan el radio, O'D perpendicular á la tangente O'E, y el radio O'C perpendicular á la otra tangente O'H, las rectas AD y CB, que unen respectivamente los extremos de los radios OA y O'D, y los extremos de los radios OBy O'C son tambien tangentes, comunes á las dos circunferencias dadas.

En efecto; OE y DO' son perpendiculares á O'E, además

AE es igual á DO'; por consiguiente A y D equidistan de la O'E, y la DA que pasa por A y D, es paralela á O'E, (49) y por ello perpendicular á OA y O'D radios de las circunferencias dadas y pasa por los extremos de estos radios; luego AD es perpendicular comun á las dos circunferencias; y por la misma razon CB es tambien tangente comun á las dos circunferencias.

Este problema tiene, pues, cuatro soluciones; es decir, que se pueden trazar cuatro tangentes comunes á dos circunferencias dadas; dos exteriores (fig.ª 119) y dos interiores (figura 120).

COROLARIO. Facilmente se descubre, que la línea de los centros de dos circunferencias, es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de las tangentes comunes á dichas circunferencias; y por consiguiente que el punto de interseccion de las tangentes internas y el de las externas, cuando éstas no son paralelas, está en la línea de los centros.

LIBRO II

DE LOS POLÍGONOS

CAPÍTULO I

DE LOS TRIÁNGULOS

§ I.—*Propiedades de los triángulos*

114. Si unimos por medio de una recta los puntos B y C (fig.ª 121) situados respectivamente en los lados AB y AC del ángulo BAC, habremos limitado una porcion de plano por medio de las tres rectas AB, AC y BC.

Esta porcion de plano así limitada, es un triángulo, que se designa por las tres letras A, B, C situadas en los puntos de interseccion de dichas tres rectas.

Las tres rectas que forman el triángulo ABC, se llaman lados del triángulo, y los tres ángulos A, B y C, formados por los lados, son los ángulos del triángulo.

Cada uno de los lados, es opuesto al ángulo formado por los otros dos lados. El lado BC, es opuesto al ángulo A y recíprocamente.

Base del triángulo ABC es uno cualquiera de sus lados, y altura la perpendicular trazada á la base desde el vértice del ángulo opuesto. Siendo AC la base, BD es la altura del triángulo ABC.

Perímetro ó contorno del triángulo ABC, es la suma de sus tres lados.

Dos vértices cualesquiera A, C del triángulo, están unidos por una recta, que es el lado AC, y una quebrada ABC, formada por los otros dos lados.

Como todo lo dicho del triángulo ABC, es aplicable á un triángulo cualquiera, tendremos que

TRIÁNGULO, *es una porcion de plano limitado por tres rectas.*

LADOS, *son las rectas que lo forman, y* ÁNGULOS *los formados por los lados.*

BASE *de un triángulo, es uno cualquiera de sus lados.*

ALTURA *de un triángulo, es la perpendicular trazada á la base ó á su prolongacion desde el vértice del ángulo opuesto á la base.*

PERÍMETRO, *de un triángulo, es la suma de sus lados.*

TRIÁNGULO EQUILÁTERO, *es el que tiene los tres lados iguales.*

TRIÁNGULO ISÓSCELES, *el que tiene dos lados iguales; y* TRIÁNGULO ESCALENO, *el que tiene los tres lados desiguales.*

TEOREMA LXV

115. *En todo triángulo ABC* (fig.ª 121) *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

La primera parte de esta proposicion es evidente, pues (4) el camino más corto entre dos puntos, es la recta que los une, y por consiguiente

$$AB < BC + AC$$

$$AC < AB + BC$$

$$BC < AC + AB$$

La segunda parte es consecuencia de los primeros; pues las desigualdades

AB-BC<AC

$$AB > AC - BC$$

$$AC > AB - BC$$

$$BC > AC - AB$$

se deducen facilmente de las anteriores.

TEOREMA LXVI

116. *La suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual á dos ángulos rectos.*

En efecto; prolongando el lado AC (fig.ª 122) del triángulo ABC, hasta E, y trazando desde el vértice C, la CD paralela al lado opuesto AB; tendremos que

$$\text{ángulo } a + \text{ángulo } b + \text{ángulo } c = 2 \text{ rectos}$$

(12 cor. 2.º); pero como (45)

$$\text{ángulo } b = \text{ángulo } d$$

y (46)

$$\text{ángulo } c = \text{ángulo } f,$$

tendremos

$$\text{ángulo } a + \text{ángulo } d + \text{ángulo } f = 2 \text{ rectos},$$

conforme con el enunciado.

COROLARIO 1.º El ángulo externo (1) BCE, es igual á la suma de los dos internos no adyacentes A y B, y por consiguiente mayor que cualquiera de ellos.

COROLARIO 2.º La suma de dos ángulos de un triángulo, es el suplemento del tercero.

COROLARIO 3.º Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, forzosamente tendrán los tres ángulos respectivamente iguales.

COROLARIO 4.º Un ángulo no puede tener más de un ángulo recto, ni más de un ángulo obtuso; y tiene siempre dos ángulos agudos.

Un triángulo, que tiene un ángulo recto, se llama *triángulo rectángulo,* en el que el lado opuesto al ángulo recto, es la *hipotenusa,* y los otros dos lados, son los *catetos.*

Un triángulo que tiene un ángulo obtuso, se llama *obtusángulo.*

Un triángulo que tiene los tres ángulos agudos, se llama *acutángulo.*

Los triángulos *obtusángulos* y *acutángulos,* reciben la denominacion comun de triángulos *oblicuángulos.*

---

(1) Angulo externo de un triángulo, es el formado por un lado y la prolongacion de otro.

TEOREMA LXVII

117. *Si dos lados AB y BC* (fig.ª 123) *de un triángulo ABC, son iguales; los ángulos opuestos á dichos lados, tambien son iguales.*

En efecto; trazando desde el vértice B, la perpendicular BD al lado opuesto AC; D pié de esta perpendicular, debe equidistar (19) de los vértices A y C. Doblando ahora la figura por dicha perpendicular, DA tomará la direccion DC, por ser iguales los ángulos en D, y A caerá sobre C, por ser iguales las distancias DA y DC; si A coincide con C, BC coincidirá con BA; luego el ángulo C habrá coincidido con el A y por consiguiente

$$\text{ángulo } C = \text{ángulo } A,$$

conforme con el enunciado.

TEOREMA LXVIII

118. *Si dos lados AB y BC de un triángulo ABC* (figura 124) *son desiguales, el ángulo C opuesto al lado mayor AB, será mayor que el ángulo A opuesto al lado menor BC.*

En efecto; tomando desde B en el lado mayor BA, una parte BD igual al lado menor BC, y trazando la DC, tendremos, segun el teorema anterior,

$$\text{ángulo } BDC = \text{ángulo } BCD.$$

Pero (116 cor. 1.º)

$$\text{ángulo } BDC > \text{ángulo } A$$

luego con más razon

$$\text{ángulo } BCA, \text{ ó ángulo } C > \text{ángulo } A,$$

conforme con el enunciado.

119. Los teoremas recíprocos de estos dos últimos, son verdaderos en virtud del principio (82).

COROLARIO 1.º Todo triángulo equilátero, es tambien equiángulo.

COROLARIO 2.° Del teorema LXVII y su recíproco, se deduce, que la altura BD (fig. 123) de un triángulo isósceles, es bisectriz del ángulo B opuesto á la base AC, y que la altura BD de un triángulo isósceles, satisface á las cuatro condiciones siguientes: Pasa por el vértice B, pasa por el punto medio D de la base, es perpendicular á ésta, y es bisectriz del ángulo B; y como dos condiciones determinan una recta, cuando una recta satisface dos de dichas condiciones, cumple forzosamente las otras dos.

TEOREMA LXIX

120. *Si dos triángulos ABC y ABC'* (fig.ª 125) *tienen un lado comun AB, y están dispuestos de modo, que el ABC envuelve al ABC', se verificará, que la suma de los lados AC y BC no comunes del triángulo envolvente, es mayor que la suma de los AC' y BC' no comunes del triángulo envuelto.*

En efecto; prolongando AC' hasta encontrar en D al lado CB, tendremos

$$BD + DC' > BC'$$

$$DC + CA > DC' + C'A,$$

sumando ordenadamente estas dos desigualdades y suprimiendo en ambos miembros DC' resulta

$$BC + CA > BC' + C'A$$

121. TRIÁNGULO INSCRIPTO en un círculo, es el que tiene sus tres vértices en la circunferencia. En este caso, el círculo está circunscripto al triángulo.

TRIÁNGULO CIRCUNSCRIPTO á un círculo, es aquel cuyos tres lados son tangentes á la circunferencia. En este caso el círculo está inscripto en el triángulo.

En la (fig.ª 126) el triángulo ABC está circunscripto al círculo O, y el círculo O inscripto en el triángulo ABC. El triángulo A'B'C' está inscripto en el círculo O', y el círculo O' circunscripto al triángulo A'B'C'.

TEOREMA LXX

122. *Todo triángulo, se puede inscribir en un círculo, y circunscribir á otro.*

En efecto: 1.º Puesto que (60) por tres puntos que no están en línea recta, siempre se puede hacer pasar una circunferencia, siempre podremos trazar una circunferencia que pase por los tres vértices de un triángulo.

2.º Si trazamos (fig 127) las bisectrices BO y AO, de dos ángulos cualesquiera A y B del triángulo ABC, estas dos bisectrices forzosamente se encontrarán, (46 3.º) en un punto O, y éste equidistará (29) de los tres lados del triángulo. Si con la distancia OD de O á un lado cualquiera AB del triángulo, tomada como radió, y haciendo centro en O, se traza una circunferencia, ésta será tangente á los tres lados del triángulo (62), y por consiguiente el triángulo ABC estará circunscripto al círculo O. C. C. E. E. (1)

ESCOLIO: Si desde un punto C (fig.ª 127) exterior á una circunferencia O, se trazan dos tangentes CM y CN; las distancias CM y CN desde el punto C á los puntos de contacto M y N, son iguales; puesto que en el triángulo CMN, los ángulos en M y en N son iguales. (91)

§ II.—*Igualdad de los triángulos.*

123. *Superponer* dos figuras, es poner ó imaginar que se pone, la una sobre la otra.

Cuando al superponer dos figuras, se confunden en una sola, se dice que coinciden, y por consiguiente que son iguales.

La *superposicion*, es el principal procedimiento empleado en Geometría para demostrar la igualdad de las figuras.

Para los efectos de la superposicion, se distinguen en cada figura dos caras, la anterior y la posterior.

Cuando la cara posterior de una figura, se aplica sobre la

(1) En adelante, la frase *conforme con el enunciado*, la escribiremos abreviadamente así C. C. E. E.

anterior de otra, la superposicion *es directa*, y cuando se aplican las dos caras anteriores ó las dos posteriores, la superposicion es *inversa*,

Segun la clase de superposicion empleada, las figuras iguales se dividen en *idénticas*, si coinciden por superposicion directa, y *simétricas* si coinciden por superposicion inversa.

Cuando se quiere demostrar la igualdad de dos figuras por medio de la superposicion, conviene distinguir dos clases de elementos. Unos cuya coincidencia *puede* verificarse siempre en virtud de la hipótesis del enunciado, y otros que dada la coincidencia de los primeros y las condiciones supuestas en las figuras, *necesariamente* deben coincidir, si las figuras son iguales. En la necesidad de la coincidencia de estos últimos, estriba la fuerza de la demostracion.

La verdad de esta doctrina, puede comprobarla el lector examinando los teoremas anteriores, en que se ha empleado la superposicion; y al reflexionar sobre ella, podrá aplicarla con mayor facilidad y exactitud en los siguientes teoremas.

124. Dos triángulos que coinciden al superponerlos son iguales.

Los elementos (lados y ángulos) que coinciden en la superposicion son iguales, y se llaman *homólogos*.

Si dos triángulos tienen los tres ángulos y los tres lados del uno respectivamente iguales á los tres ángulos y los tres lados del otro, y se superponen convenientemente, coinciden y por consiguiente son iguales.

TEOREMA LXXI

125. *Si dos triángulos ABC y A'B'C'* (fig.ª 128) *tienen un ángulo del uno igual á un ángulo del otro ($A = A'$) y los dos lados que forman el primero respectivamente iguales á los dos lados que forman el segundo ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$); dichos triángulos son iguales.*

En efecto; superponiendo el A'B'C' sobre el ABC, de modo que A'C' se confunda con AC, y el punto B' caiga al mismo lado de AC que el punto B, lo cual puede verificarse siempre, el lado A'B' tomará necesariamente la direccion AB, por la igualdad de los ángulos A y A'; y el punto B' caerá sobre B, por la igualdad de los lados A'B' y AB. De modo que las tres vértices A', B', C', se han confundido respectivamente, con los A,B,C, y por consiguiente los triángulos han coincidido, y son iguales C. C E. E.

TEOREMA LXXII

126. *Si dos triángulos ABC y A'B'C', (fig.ª 128) tienen un lado del uno igual á un lado del otro (AC = A'C'), y respectivamente iguales los ángulos adyacentes á dichos lados (A = A', C = C'), dichos triángulos son iguales.*

En efecto; superponiendo el triángulo ABC, sobre el A'B'C' de modo que A'C' se confunda con AC. y el punto B' caiga al mismo lado de AC, que el punto B, (lo cual puede verificarse siempre), el lado A'B' *necesariamente* tomará la direccion AB por la igualdad de los ángulos A y A', y el C'B' tomará la direccion CB, por la igualdad de los ángulos C' y C, y por consiguiente B' caerá precisamente en un punto del lado AB, y tambien en un punto del lado CB; luego forzosamente se confundirá con B. De modo, que los tres vértices A'B'C', se han confundido respectivamente con los A, B, C, y por lo tanto han coincidido los triángulos.

TEOREMA LXXIII

127. *Si dos triángulos ABC, A'B'C' (fig.ª 129) tienen un ángulo B > B', y los lados que forman el ángulo B respectivamente iguales á los que forman el ángulo B' (AB = A' B', BC = B'C'), se verificará que el lado AC, opuesto al ángulo mayor B, será mayor que el lado A'C', opuesto al ángulo menor B'.*

En efecto; colocando el triángulo A'B'C' sobre el ABC, de modo que A'B' coincida con su igual AB, por ser el ángulo B > B'; el lado B'C' tomará una posicion intermedia entre BA, y BC, y el vértice C' caerá en D', D'' ó D'''.

De modo que el triángulo A'B'C' tomará una de las tres posiciones, ABD', ABD'', ABD'''.

En la primera posicion tendremos:

$$BO + OC > BC, \text{ y } AO + OD' > AD'$$

Sumando ordenadamente estas desigualdades, será

$$AC + BD' > BC + AD'$$

y restando del primer miembro BD', y del segundo su igual BC, quedará

$$AC > AD', \text{ ó } AC > A'C'$$

C. C. E. E.

En la segunda posicion, es evidente que

$$AC > AD'' \text{ ó } AC > A'C'$$

C. C. E. E.

Y en la tercera posicion, tendremos (120)

$$AC + CB > AD''' + D'''B,$$

y restando del primer miembro BC, y del segundo su igual D''' B, queda

$$AC > AD'''$$

ó

$$AC > A' C'$$

C. C. E. E.

128. Examinando los dos teoremas LXXI y LXXIII se descubre, que son dos proposiciones contrarias, y por consiguiente (82) las recíprocas son verdaderas. Podremos pues admitir sin demostracion los dos siguientes teoremas.

TEOREMA LXXIV

Si dos triángulos ABC y A'B'C' (fig. 128) *tienen respectivamente iguales dos lados del uno á dos lados del otro (AB = A'B') (AC = A'C'), y el tercer lado BC del uno igual tambien al tercer lado del otro B'C', el ángulo A opuesto al primero, será igual al A', opuesto al segundo.*

COROLARIO. *Si dos triángulos ABC, y A'B'C'* (fig. 130) *tienen respectivamente iguales los tres lados del uno á los tres* *lados del otro; (AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C') dichos triángulos son iguales,*

Puesto que segun el teorema anterior, tienen el ángulo A del uno, igual al A' del otro, es decir, que tienen un ángulo del uno igual á un ángulo del otro (A = A'), é iguales respectivamente los lados que forman el ángulo A, y los que formen el ángulo A', (AB = A'B', AC = A'C') segun el teorema LXXI son triángulos iguales.

129. Este corolario puede demostrarse tambien directamente.

Sean en efecto los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 130) en los que suponemos

$$AC = A'C'$$
$$AB = A'B'$$
$$BC = B'C'$$

Colocando el triángulo A'B'C' de modo que A'C' coincida con su igual AC, y que B' caiga en B'', á distinto lado de AC que B, y uniendo B y B'' con la recta BB'', tendremos (24 cor.) que AC es perpendicular á BB'' en su punto medio O. Doblando ahora la figura por AC', OB'' tomará la direccion OB, por ser rectos los ángulos en O, y B'' coincidirá con B, por ser O punto medio de BB''. Habrán pues coincidido los triángulos ABC y AB''C, y como AB''C es el A'B'C' resulta que los triángulos ABC y A'B'C' son iguales.

C. C. E. E.

TEOREMA LXXV

130. *Si dos triángulos ABC A' B' C'* (fig. 131) *tienen dos lados del uno respectivamente iguales á dos lados del otro (AB=A'B', BC=B'C'), y el tercer lado del primero mayor que el tercer lado del segundo (AC $<$ A'C'), el ángulo B opuesto al lado mayor AC, será mayor que el B' opuesto al lado menor A'C'.*

Este teorema es recíproco del LXXIII, y por consiguiente verdadero.

131. De lo expuesto en este párrafo se deduce, evidentemente, que dos triángulos cuyos seis elementos, tres lados y tres ángulos, son respectivamente iguales, coinciden cuando

se superponen convenientemente, y por consiguiente son iguales. Pero si examinamos los teoremas LXXI, LXXII, y el corolario del teorema LXXIV, vemos que *basta* suponer iguales respectivamente, tres de los seis elementos de dos triángulos, para que dichos triángulos coincidan, debiendo notar que entre los tres elementos que se suponen iguales, hay siempre un lado.

Estas distintas condiciones *suficientes* para que dos triángulos coincidan, se llaman en Geometría *casos generales de igualdad de triángulos* que son tres, y pueden enumerarse brevemente diciendo:

Dos triángulos son iguales:

1.° *Cuando tienen un ángulo igual, é iguales los lados que lo forman.*

2.° *Cuando tienen un lado igual, é iguales los dos ángulos adyacentes á dicho lado.*

3.° *Cuando tienen los tres lados iguales.*

Demostrada la igualdad de dos triángulos, se puede afirmar la de los ángulos y lados homólogos.

132. Cuando dos triángulos son rectángulos, como tienen siempre un ángulo igual, el número de condiciones suficientes es solamente dos. De modo que los casos de igualdad de los triángulos, rectángulos, son los siguientes:

Dos triángulos rectángulos son iguales:

1.° Cuando tienen los dos catetos respectivamente iguales.

2.° Cuando tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente iguales.

3.° Cuando tienen un cateto y un ángulo agudo iguales; y

4.° Cuando tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.

Los tres primeros casos, están comprendidos en los casos generales, por lo que no necesitan demostracion.

Para demostrar el cuarto caso: Supongamos (fig. 132) BC = B'C' y BA = B'A'.

Superponiendo el triángulo A'B'C'; y el ABC, de modo que B'A' se confunda con BA. y C' caiga al mismo lado de BA que C; A'C' tomará la direccion AC, por la igualdad de los ángulos A y A'; y como B'C' y BC serán oblícuas é iguales, se separarán igualmente del pié A de la perpendicular BA; luego C' caerá sobre C, y por consiguiente los triángulos coincidirán.

CAPÍTULO II

DE LOS CUADRILÁTEROS

133. La porcion de plano limitada por las cuatro rectas AB, BC, CD, DA, (fig 133) es un cuadrilátero, que se designa por las cuatro letras A, B, C, D, expresadas ordenadamente, de modo que cada dos letras consecutivas, pertenezcan á la misma recta.

Las cuatro partes AB, BC, CD, DA, de las rectas, que forman el cuadrilátero ABCD, se llaman lados del cuadrilátero, y los cuatro ángulos, A, B, C, D, formados por dichos lados, son los cuatro ángulos del cuadrilátero.

Los lados AB y DC que no tienen ningun punto comun, son lados opuestos, y los AB y BC que tienen un punto comun, son lados contiguos.

Los ángulos B y D que no tienen ningun lado comun, son ángulos opuestos, y los B y C que tienen un lado comun BC son ángulos contiguos.

Base de un cuadrilátero ABCD, es uno cualquiera de sus lados, y altura es la perpendicular BM trazada á la base desde el vértice B más alejado de la base.

Perímetro ó contorno, es la suma de sus cuatro lados.

La recta BD que une dos vértices no contiguos, se llama diagonal.

TEOREMA LXXVI

134. *La suma de los cuatro ángulos A, B, C, D,* (fig. 134) *de un cuadrilátero ABCD, es igual á cuatro ángulos rectos.*

En efecto: trazando la diagonal AD, tendremos los dos triángulos ACD y ABD, cuyos seis ángulos, componen justamente los cuatro del cuadrilátero; pero (116) la suma de los seis ángulos de dichos triángulos, es igual á cuatro rectas; luego la de los cuatro ángulos del cuadrilátero, será igual tambien á cuatro rectos. C. C. E. E.

135. *Cuadrilátero inscripto en un círculo*, es el que tiene

sus cuatro vértices en la circunferencia. En este caso el círculo está circunscripto al cuadrilátero.

Cuadrilátero circunscripto á un círculo, es aquel cuyos cuatro lados son tangentes al círculo. En este caso el círculo está inscripto en el cuadrilátero.

En la (fig. 135), el cuadrilátero ABCD, está inscripto en el círculo O, y el círculo O circunscripto al cuadrilátero ABCD; y el cuadrilátero A'B'C'D' está circunscripto al círculo O' y éste inscripto en el cuadrilátero A'B'C'D'.

TEOREMA LXXVII

136 *En todo cuadrilátero inscripto, ABCD,* (fig. 135) *los ángulos opuestos son suplementarios.*

En efecto; los ángulos opuestos A y C, por ser inscriptos, é interceptar entre sus lados respectivamente los arcos BCD y BAD, que componen toda la circunferencia, (89) tienen por medida media circunferencia; luego son suplementarios. Lo mismo sucede con los otros ángulos opuestos B y D; luego el teorema es verdadero.

TEOREMA LXXVIII

137. *Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero ABCD* (fig. 136) *son suplementarios, la circunferencia que pasa por tres cualesquiera de sus vertices A,B,C, pasará forzosamente por el vértice D.*

En efecto; supongamos que en el cuadrilátero ABCD se verifica

$$\text{ángulo A} + \text{ángulo C} = 2 \text{ rectos}$$

ó

$$\text{ángulo B} + \text{ángulo D} = 2 \text{ rectos}$$

Si hacemos pasar una circunferencia por los tres vértices A, B, y C, lo cual siempre es posible, forzosamente ha de pasar por D.

Supongamos que D quede fuera de la circunferencia, y que ésta corte á la recta AD en el punto D'. Trazando la CD', el cuadrilátero ABCD' estará inscripto en la circunferencia y por consiguiente segun el teorema anterior, el ángulo B será suplemento del AD'C; pero por hipótesis, el ángulo B, es suplemento del ADC; luego los ángulos AD'C y ADC deberán ser iguales Pero esto es imposible (116 cor. 1.°); luego el vértice D, no puede quedar fuera de la circunferencia. Del mismo modo se probaria que no puede quedar dentro y pasar por D': punto de la recta AD'. Si pues el vértice D, no puede quedar fuera ni dentro de la circunferencia, estará en la circunferencia. C. C. E. E

Este teorema es recíproco del anterior.

TEOREMA LXXIX

138. *En todo cuadrilátero MNPQ* (fig. 137) *circunscripto á un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos (MN + QP = MQ + NP.)*

En efecto; sabemos (122 escolio) que

$$MB = MA$$
$$NB = NC$$
$$QD = QA$$
$$PD = PC.$$

Sumando ordenadamente estas cuatro igualdades, tendremos

$$MB + NB + QD + PD = MA + NC + QA + PC,$$

de donde

$$MN + QP = MQ + NP.\ \ C.\ C.\ E.\ E.$$

TEOREMA LXXX

139. *Todo cuadrilátero ABCD* (fig. 138) *en el que se verifica que la suma de dos lados opuestos, es igual á la de los otros dos (AB + CD = AD + BC), se puede circunscribir á un círculo.*

En efecto; trazando las bisectrices de los ángulos A y B, éstas se encuentran (29) en un punto O, equidistante de los tres lados AB, AD, y BC. Si trazamos pues, una circunferencia, cuyo centro sea O, y cuyo radio sea la distancia OR, de O, á uno cualquiera de dichos tres lados, éstos serán tangentes á la circunferencia trazada.

Pero ésta, forzosamente ha de pasar por S extremo de la distancia de O, al lado DC; porque si suponemos que pasara por el punto T de dicha distancia, y situado dentro del cuadrilátero, trazando la HQ paralela al lado DC, tendremos el cuadrilátero ABQH, circunscripto al círculo O; y por lo demostrado en el teorema directo se verificará,

$$AH + BQ = AB + HQ;$$

pero por hipótesis tenemos

$$AD \pm BC = AB + DC.$$

Restando ordenadamente de esta igualdad la anterior, será

$$HD + QC = DC - HQ$$

de donde $$DC = HD + HQ + QC$$

lo que es imposible. (4)

Del mismo modo se probaria que no puede la circunferencia cortar á la perpendicular OS en un punto exterior al cuadrilátero, luego pasará por S. C. C. E. E.

140. El cuadrilátero ABCD (fig 139) en el que los lados opuestos no son paralelos; (AD no es paralelo á BC, ni AB es paralelo á DC;) se llama *trapezoide*. L. 16

El cuadrilátero A'B'C'D' en el que los lados opuestos A'B' y C'D' son paralelos, y los otros dos A'C' y B'D', no lo son, se llama *trapecio*.

El cuadrilátero A''B''C''D'' en el que los lados opuestos A''B'' y C''D'' son paralelos, y los otros dos A''C'' y B''D'' lo son tambien, se llaman *paralelógramo*.

Resulta pues,

Que los cuadriláteros se dividen en trapezoides, trapecios y paralelógramos.

Trapezoide es un cuadrilátero, en el que ningun lado es paralelo á otro.

Trapecio, es un cuadrilátero, que tiene dos lados opuestos paralelos, y los otros dos no lo son.

Paralelógramo, es un cuadrilátero, en el que los lados opuestos son paralelos.

El paralelógramo á su vez se divide en romboide que tiene dos lados mas largos que los otros dos, y cuyos ángulos no son rectos; rombo que tiene los cuatro lados iguales, y cuyos ángulos no son rectos; rectángulo que tiene dos lados mas largos que los otros dos, y cuyos ángulos son rectos; y cuadrado que tiene los cuatro lados iguales, y cuyos ángulos son rectos.

TEOREMA LXXXI

141. *Todo cuadrilátero, ABCD,* (fig. 140,) *cuyos lados opuestos son iguales (AB = CD, AD = BC) es un paralelógramo.*

En efecto; trazando la diagonal DB, se forman los triángulos ADB y CDB iguales, por tener un lado comun DB, é iguales respectivamente los otros dos (48). De la igualdad de estos triángulos se deduce

ángulo ABD = ángulo CDB.

ángulo ADB = ángulo DBC; luego (40)

AB es paralela á DC, y AD es paralela á BC; y por consiguiente (140) el cuadrilátero ABCD, es un paralelógramo. C. C. E. E.

TEOREMA LXXXII

142 *Todo cuadrilátero ABCD* (fig. 141) *cuyos ángulos opuestos son iguales, (A = C, D = B) es un paralelógramo.*

En efecto; sabemos (134) que

$$A + B + C + D = 4 \text{ rectos}$$

y puesto que por hipótesis se tiene

$$A = C,$$
$$D = B.$$

será

$$2A + 2B = 4 \text{ rectos}$$
$$2A + 2D = 4 \text{ rectos}$$

ó

$$A + B = 2 \text{ rectos}$$
$$A + D = 2 \text{ rectos}$$

de donde (43) AD es paralelo al BC, y AB es paralelo á DC. Luego el cuadrilátero ABCD es un paralelógramo.

TEOREMA LXXXIII

143. *Todo cuadrilàtero ABCD* (fig. 140) *que tiene dos lados iguales y paralelos (AB igual y paralelo á DC), es un paralelógramo.*

En efecto; trazando la diagonal DB, se forman los triángulos ADB y DCB iguales, pues AB = DC, DB es comun y el ángulo ABD es igual al ángulo BDC.

De la igualdad de estos triángulos se deduce,

ángulo ADB = ángulo CBD.

Luego (40) el lado AD es tambien paralelo al BC, y por lo tanto el cuadrilátero ABCD es un paralelógramo, conforme con el enunciado.

TEOREMA LXXXIV

144. *Todo cuadrilátero ABCD* (fig. 142) *cuyas diagonales se cortan en su punto medio, es un paralelógramo.*

Puesto que se supone DO = OB; y AO = OC; los triángulos AOB y DOC serán iguales (131 1.°) y tendrán

ángulo ABO = ángulo CDO

de donde AB será paralela á DC.

Pero tambien serán iguales los triángulos AOD y BOC que tendrán

ángulo CAD = ángulo BCA

de donde AD será paralela á BC.

Luego el cuadrilátero ABCD es un paralelógramo, conforme con el enunciado.

TEOREMA LXXXV

145. *En todo paralelógramo ABCD* (fig. 142) *las diagonales AC y BD, se cortan por su punto medio.*

En efecto; los triángulos AOB y DOC, son iguales por tener

AB = DC

ángulo OAB = ángulo OCD

ángulo ODC = ángulo ABO.

Luego serán

OA = OC

OD = OB

C. C. E. E.

Este teorema es recíproco del anterior.

146. COROLARIO.—*Si por el punto O* (fig. 143) *de interseccion de las dos diagonales AC y BD de un paralelógramo ABCD, se traza una secante MN; las partes OM y ON comprendidas entre O y el perímetro del paralelógramo, son iguales.*

Esto se deduce facilmente de la igualdad de los triángulos AOM y CON.

El punto O interseccion de las dos diagonales de un paralelógramo, se llama *centro* del paralelógramo.

Centro de una figura es el punto que divide en dos partes iguales, á toda secante que pase por dicho punto, y esté limitada por el perímetro de la figura.

147. Facilmente se demuestra que

Las diagonales de un romboide son desiguales y se cortan oblícuamente.

Las diagonales de un rombo son desiguales y se cortan perpendicularmente.

Las diagonales de un rectángulo son iguales y se corton oblícuamente.

Las diagonales de un cuadrado són iguales y se cortan perpendicularmente.

Y recíprocamente (82)

Todo paralelógramo cuyas diagonales son desiguales y se cortan oblícuamente, es un romboide.

Todo paralelógramo, cuyas diagonales son desiguales y se cortan perpendicularmente, es un rombo

Todo paralelógramo, cuyas diagonales son iguales y se cortan oblícuamente, es un rectángulo.

Todo paralelógramo, cuyas diagonales son iguales y se cortan perpendicularmente, es un cuadrado.

148. De lo dicho (136, 137, 138, 139) se deduce que

El romboide no es inscriptible, ni circunscriptible al círculo.

El rombo es circunscriptible; pero no inscriptible en el círculo.

El rectángulo es inscriptible, pero no circunscriptible al círculo

El cuadrado es inscriptible y circunscriptible al círculo.

149. Haciendo aplicacion de lo dicho (123,) sobre la superposicion de las figuras, podemos establecer, que,

Dos cuadriláteros que coinciden al superponerlos son iguales, y los lados y ángulos que coinciden en la superposicion, se llaman homólogos.

Es evidente que los elementos homólogos (lados y ángulos) de los cudriláteros iguales, son tambien iguales.

Si dos cuadriláteros, tienen sus ocho elementos (cuatro lados y cuatro ángulos) respectivamente iguales y colocados en el mismo órden; son evidentemente superponibles, y por consiguiente iguales.

Lo mismo que en los triángulos, basta suponer iguales algunos de los ocho elementos de los cuadriláteros, para que forzosamente sean superponibles y por consiguiente iguales.

Las distintas *condiciones suficientes* para que dos cuadriláteros sean superponibles, (1) son los casos de igualdad de cuadriláteros. Su exámen carece de importancia, por lo que lo suprimimos.

150. Es facil demostrar que

1.° *Dos romboides ABCD, A'B'C'D'* (fig. 144) *que tienen un ángulo igual (ángulo ABC = ángulo A'B'C')*

(1) Al decir que dos *figuras son superponibles*, se quiere expresar, que pueden coincidir por superposicion.

é iguales los lados que forman este ángulo, ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$.) *son superponibles.*

2.° *Que dos rombos* $ABCD$ $A'B'C'D'$ (fig. 145) *que tienen un ángulo igual* (*ángulo* ABC = *ángulo* $A'B'C'$) *é igual un lado* ($AB = A'B'$) *son superponibles.*

3.° *Que dos rectángulos* $ABCD$, $A'B'C'D'$ (fig. 146) *que tienen dos lados contiguos iguales* ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$) *son superponibles*

4.° *Que dos cuadrados* $ABCD$, $A'B'C'D'$ (fig. 147) *que tienen un lado igual* ($AB = A'B'$) *son superponibles.*

CAPÍTULO III

DE LOS POLÍGONOS EN GENERAL

151. La porcion de plano (fig. 148) limitada por las rectas AB, BC, CD, DE, EF, FA, es *un polígono*. Estas rectas son los lados del polígono, (1). Angulos de un polígono, son los formados por dos lados consecutivos del polígono.

Para designar un polígono, se expresan ordenadamente las letras situadas en los vértices de sus ángulos (vértices del polígono), de modo, que cada dos letras consecutivas indiquen puntos de un mismo lado.

El polígono (fig. 148) se expresa diciendo polígono ABCDEF.

Contorno ó *perímetro* de un polígono, es la suma de sus lados.

Base de un polígono, puede ser uno cualquiera de sus lados, y *altura,* es la perpendicular bajada á la base, desde el vértice más distante de dicha base.

Los polígonos se clasifican segun el número de lados, y reciben los nombres de

triángulo	si	tiene	tres lados
cuadrilátero	»	»	cuatro lados
pentágono	»	»	cinco lados

(1) En rigor los lados del polígono, no son las rectas indefinidas que lo limitan, sino las partes AB,BC,CD... de dichas rectas indefinidas.

exágono	si	tiene	seis lados
eptágono	»	»	siete lados
octógono	»	»	ocho lados
eneágono	»	»	nueve lados
decágono	»	»	diez lados
dodecágono	»	»	doce lados
pentadecágono	»	»	quince lados

los demás no tienen nombre especial y se denominan, polígono de trece lados, de catorce lados, etc. etc.

Un polígono se llama convexo, cuando su perímetro no puede ser cortado por una recta en más de dos puntos, y cóncavo cuando su perímetro, puede ser cortado por una recta en más de dos puntos.

El polígono ABCDEF (fig. 148) es convexo, y el ABC DEF (fig. 149) es cóncavo.

En el polígono convexo, todos los ángulos son salientes,y en el cóncavo, uno ó más ángulos son entrantes.

El ángulo C del polígono cóncavo ABCDEF (fig. 149) es entrante, y comprende todo el espacio angular, que necesita recorrer el lado CB en el sentido que indica la figura, para confundirse con el lado CD.

En esta obra solo estudiaremos los polígonos convexos.

152. *Diagonal* de un polígono, es la recta que une dos vértices no consecutivos

Las rectas FB, FA, FC, FD, (fig. 148) son diagonales.

TEOREMA LXXXVI

En un polígono de n *lados, el número de diagonales que se pueden trazar es* $\frac{n(n-3)}{2}$

En efecto; desde cada vértice del polígono se pueden trazar $n-3$ diagonales; y como hay n vertices, se podrán trazar $n\,(n-3)$ diagonales; pero como cada diagonal une dos vértices del polígono, cada dos diagonales se confunden; luego el número de diagonales distintas será la mitad de $n\,(n-3)$ C. C. E. E.

153. Un polígono se puede descomponer en tantos trián-

gulos como lados tiene el polígono, y tambien en tantos triángulos como lados tiene menos dos.

Trazando desde un punto O interior del polígono ABCDE (fig. 150) las rectas OA, OB, OC, OD, OE á todos los vértices, resultarán tantos triángulos como lados tiene el polígono.

Trazando desde un vértice F del polígono ABCDEF (figura 148) las diagonales FB, FC, FD, á todos los vértices menos á los dos contiguos A y E, resulta descompuesto el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos.

TEOREMA LXXXVII

154. *La suma de los ángulos de un polígono cualquiera ABCDEF*, (fig 148) *es igual á tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*

En efecto; descomponiendo este polígono en tantos triángulos como lados tiene el polígono menos dos, la suma de los ángulos de todos éstos $n - 2$ triángulos, será (116) $n - 2$ veces dos rectos, y como la suma de los ángulos de estos triángulos, es precisamente igual á la suma de los ángulos del polígono, resulta que esta suma es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos

Llamando S á la suma de los ángulos de un polígono de n lados, y tomando el ángulo recto por unidad, será

$$S = (n - 2)\,2$$

COROLARIO 1.° En un polígono equiángulo, llamando A al valor de un ángulo cualquiera del polígono, será

$$A = \frac{(n - 2)\,2}{n}$$

COROLARIO 2.° De la fórmula

$$S = (n - 2)\,2$$

se deduce facilmente, que:

La suma de los ángulos	de un triángulo	=	2 rectos
id.	id. de un cuadrilátero	=	4 rectos
id.	id. de un pentágono	=	6 rectos

y así sucesivamente.

Y tambien

ángulo de un	triángulo equiángulo	=	60°
id.	cuadrilátero equiángulo	=	90°
id.	pentágono equiángulo	=	108°
id.	exágono equiángulo	=	120°

etc., etc.

ESCOLIO: Examinando la fórmula

$$A = \frac{(n-2)\,2}{n},$$

vemos que A es funcion de n, es decir, que el valor del ángulo de un polígono regular, depende del número de lados del polígono. Para apreciar las alteraciones que en el valor de A producen las variaciones del valor de n, haremos las siguientes transformaciones:

$$A = \frac{(n-2)\,2}{n} = \frac{2n-4}{n} = 2 - \frac{4}{n}; \text{ de donde}$$

$$A = 2 - \frac{4}{n} \quad (a)$$

Si suponemos en esta fórmula que n aumenta, disminuirá el valor de la fraccion $\frac{4}{n}$, que es el sustraendo de la resta $2 - \frac{4}{n}$; y si disminuye el sustraendo, aumentará el resto A.

Luego si aumenta el número de lados de un polígono regular, aumenta el valor del ángulo.

Además, segun dicha fórmula, por muy grande que sea n, $\frac{4}{n}$ tendrá algun valor, por consiguiente A será menor que 2 rectos.

Luego el valor del ángulo de un polígono regular, aunque aumenta á medida que es mayor el número de lados, no puede llegar á valer dos ángulos rectos.

Angulo *externo* de un polígono, es el formado por uno de sus lados y la prolongacion de otro contiguo al primero. CDM es un ángulo externo del polígono ABCDE. (fig. 151).

TEOREMA LXXXVIII

155. *Si se prolongan los lados de un polígono ABCDE* (fig. 151) *todos en el mismo sentido, la suma de los ángulos externos formados, es igual á cuatro rectos.*

En efecto; cada ángulo externo es suplementario del interno adyacente; la suma pues de los ángulos internos y externos del polígono, será n veces dos rectos, es decir, que el número de rectos de esta suma estará expresado por $2n$; quitando de esta suma la de los internos $(n - 2)\,2$, será

$$2n - (n - 2)\,2 = 2n - 2n + 4 = 4$$

Luego la suma de los ángulos externos de un polígono, es igual á cuatro rectos.

COROLARIO. Un polígono no puede tener más de tres ángulos agudos; porque si los tuviera, la suma de los externos valdria más de cuatro rectos, contra lo que se ha demostrado.

156. *Polígonos iguales*, son los que pueden coincidir por superposicion; es decir, los que son superponibles.

Dos polígonos superponibles, tienen respectivamente iguales, y colocados en el mismo órden, los lados y los ángulos.

Los lados, y los ángulos, de dos polígonos iguales, que coinciden en la superposicion, se llaman homólogos. De modo, que los ángulos homólogos de dos polígonos iguales, son respectivamente iguales.

Dos polígonos, que tienen sus lados y sus ángulos respectivamente iguales, y colocados en el mismo órden, son evidentemente superponibles ó iguales.

Así como hemos visto en los triángulos, que basta suponer iguales algunos de sus elementos, para que forzosamente lo sean los demás; en los polígonos en general, basta tambien suponer iguales algunos de sus elementos, en ciertas condiciones, para que los demás lo sean forzosamente. De modo, que cuando se suponen ciertas condiciones en parte de los elementos de dos polígonos, éstos son superponibles.

Las condiciones suficientes, para que dos polígonos sean superponibles, constituyen los casos de igualdad de polígonos.

El exámen de estas condiciones carece de importancia, por lo que prescindimos de él limitándonos á considerar solo el siguiente caso de igualdad de polígonos.

TEOREMA LXXXIX

157. *Dos polígonos cualesquiera ABCDEF, A'B'C'D' E'F' (fig. 152) descompuestos en el mismo número de triángulos iguales y colocados del mismo modo, son iguales.*

En efecto; superponiendo los triángulos iguales A'F'E', AFE, coincidirán los tres vértices A', F' y E' del primero, respectivamente con los vértices A, F, E del segundo. Habiendo coincidido A' con A, y E' con E, como los triángulos DAE y D'A'E' son iguales y están colocados del mismo modo, el vértice D' caerá precisamente sobre D Del mismo modo probaríamos que C' caerá sobre C, y B' sobre B; de modo que los dos polígonos han coincidido por superposicion; luego son iguales.

ESCOLIO 1.° Nótese que dos polígonos superponibles, se pueden descomponer en el mismo número de triángulos iguales y colocados del mismo modo.

ESCOLIO 2.° Todo polígono de n lados, tiene n ángulos y $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Los lados, los ángulos y las diagonales son elementos del polígono. Si examinamos el enunciado del teorema anterior, vemos, que los elementos que se suponen iguales, al suponer la igualdad de los $n-2$ triángulos en que se hallan descompuestos los dos polígonos, son tres elementos del primer triángulo supuesto igual, y dos de cada uno de los demás, es decir

$$3+2(n-3)=3+2n-6=2n-3$$

Del exámen de otros casos de igualdad, se deduce que se necesitan siempre $2n-3$ elementos iguales en cada caso de igualdad de polígonos, lo que nos conduce á establecer, que se necesita suponer $2n-3$ elementos iguales en cada caso de igualdad de polígonos.

CAPÍTULO IV

PROBLEMAS

PROBLEMA XX

L. 18

158. *Construir un triángulo, dados dos lados* b *y* c, (fig. 153) *y el ángulo comprendido A.* (1)

Sobre la recta indefinida AB, se toma una parte AB igual á *c*, uno de los lados dados, se construye un ángulo BAC igual al ángulo dado A, y se toma desde A en el otro lado una parte AC igual á *b*. Se unen los puntos C, B, por una recta; y tendremos el triángulo ABC, que satisface las condiciones del problema.

Este problema, es posible cualquiera que sea el valor de los datos.

PROBLEMA XXI

159. *Construir un triángulo, dados un lado* c (fig. 154) *y los dos ángulos A, B, adyacentes á dicho lado.*

Sobre una recta indefinida, se toma una parte AB, igual al lado dado *c*; por los puntos A y B se trazan rectas, que forman con AB dos ángulos; uno CAB igual á A, y otro ABC igual á B. Se prolongan estas rectas hasta que se corten, y el triángulo ABC, será el triángulo perdido.

Este problema es imposible, cuando la suma de los ángulos dados es igual ó mayor que dos rectos.

PROBLEMA XXII

160. *Construir un triángulo, dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de los ángulos dados.*

---

(1) Ordinariamente se representan los tres ángulos del triángulo, por las letras A, B y C, y sus lados respectivamente opuestos, por las *a*, *b* y *c*. Angulo comprendido entre dos lados, es el formado por ellos. Angulos adyacentes á un lado de un triángulo, son los que tienen su vértice en los extremos de este lado.

Hallando el otro ángulo, suplemento de los dados, queda reducido este caso al anterior.

PROBLEMA XXIII

161. *Construir un triángulo dados los tres lados* a, b *y* c. (fig. 155)

Sobre una recta indefinida se toma una parte AB igual á uno de los lados *c*. Haciendo centro en A con un radio igual á otro de los lados *b*, se traza un arco indefinido, y con un radio igual al tercer lado *a*, haciendo centro en B, se traza un arco que corte al anterior ya trazado. Se une el punto de interseccion C con los A y B, y tendremos el triángulo ABC, cuyos lados son respectivamente iguales á los dados.

Este problema es imposible, cuando uno de los lados dados es mayor que la suma de los otros dos.

PROBLEMA XXIV.

162. *Construir un triángulo, dados dos lados* a *y* b (fig. 156) *y el ángulo A, opuesto á uno de dichos lados*

Por el extremo A de la recta indefinida AB, se traza la AC, que forme con la anterior, un ángulo igual al dado. Se toma en esta recta, una parte AC igual al lado *b* adyacente al ángulo dado, y ahora haciendo centro en el extremo C del lado *b* con un radio *a*, igual al lado opuesto, se traza un arco, que cortará á la recta indefinida AB en el punto B. Se traza la recta CB, y tendremos construido el triángulo ABC, que satisface las condiciones del problema.

DISCUSION. Distinguiremos en este problema tres casos:
1.° Cuando el ángulo dado A es obtuso. 2.° Cuando el ángulo dado A es recto. 3.° Cuando el ángulo dado A es agudo.

Primer caso: Cuando el ángulo dado A (fig. 157) es obtuso, es necesario, para que el problema sea posible, que el lado opuesto *a*, sea mayor que el adyacente *b*; y es claro, que siguiendo la construccion antes expuesta, haciendo centro en C, extremo del lado adyacente *b*, con un radio *a* mayor que *b*, forzosamente el arco trazado cortará al lado AB en un punto B más distante que A, del pie O de la perpendicular CO, á la AB. Luego siempre se podrá construir un triángulo CAB, que satisfaga las condiciones del problema. Además solo se podrá construir un triángulo CAB, que satisfaga el problema, porque la circunferencia cuyo radio es *a*, y cuyo centro es C, solo cortará á la AB en otro punto B', y el triángulo C B'A, aunque tiene dos lados CA y CB' respectivamente iguales á *b* y á *a*, el ángulo opuesto al lado B'C = *a*, no es el ángulo dado A; sino su suplementario, y por consiguiente dicho triángulo C B'A, no es solucion del problema.

Segundo caso: Cuando el ángulo dado A (fig. 158) es recto, exije tambien la posibilidad del problema, que sea $a > b$. Siguiendo la construccion expuesta al principio, haciendo centro en C extremo del lado adyacente *b*, con un radio *a*, mayor que *b*, el arco cortará forzosamente á la AB, en un punto B, y tendremos un triángulo CAB, que satisface el problema. Ahora, del mismo modo que en el caso anterior, se formará otro triángulo C B'A; cuyos lados CA, y CB' son respectivamente iguales á *b* y á *a* lados dados, y el ángulo CAB' suplemento del dado A. Pero siendo A recto, su suplemento tambien será recto, de modo que el triángulo B'CA tiene dos lados CA, y CB', iguales á los dados, y el ángulo CAB' opuesto al CB' igual al ángulo dado A.

Tercer caso: Cuando el ángulo dado A sea agudo, el lado opuesto *a* podrá ser mayor, menor ó igual que *b*.

Si $a > b$, siguiendo la construccion primera (fig. 159), se vé fácilmente, que el problema es siempre posible, y no tiene más que una solucion, el triángulo CBA.

Si $a = b$, siguiendo la misma construccion, fig. 160) se vé tambien, que el problema es posible, y que no tiene más solucion, que el triángulo, CAB.

Si $a < b$, vemos fig. 161) que si *a* es mayor que la perpendicular CO, siguiendo la misma construccion, se formarán dos triángulos CAB, y CAB', que satisfacen el problema, de manera que resultan dos soluciones.

Si el lado opuesto *a* es igual á la perpendicular CO, hallaremos, siguiendo la misma construccion, el triángulo CAO, única solucion del problema.

Y por fin, si el lado dado *a* es menor que la perpendicular CO, tendremos, que si haciendo centro en C, extremo del lado adyacente *b*, con un radio *a* (lado opuesto) trazamos un arco, éste no puede cortar ni tocar á la recta AB, y por consiguiente el problema es imposible.

PROBLEMA XXV

163. *Construir un paralelógramo, dados dos lados a y b, y el ángulo comprendido M.* (fig. 162).

Trácese una recta CD igual á uno de los lados *a*, por el extremo C, de ésta fórmese un ángulo ACD, igual al ángulo dado M; desde el vértice C tómese en el lado CA, una parte CA igual al otro lado *b* Ahora haciendo centro en A y D, con radios respectivamente iguales á *a* y á *b*, trácense dos arcos y desde el punto de interseccion B de estos arcos, trácense las rectas BA y BD; y tendremos el paralelógramo pedido.

ESCOLIO. Obsérvese, que el rombo queda determinado, con los dos elementos, un lado y un ángulo, ó las dos diagonales. El rectángulo, con dos lados, ó con una diagonal y el ángulo que forman las diagonales; y el cuadrado, con un solo elemento, un lado ó una diagonal.

Pueden, segun esto, proponerse los siguientes problemas, cuya resolucion omitimos, porque el lector la hallará con facilidad.

Construir un rombo dados un lado y un ángulo.
Construir un rombo, dadas las diagonales
Construir un rectángulo, dados dos lados no opuestos.
Construir un rectángulo, dado el ángulo que forman las diagonales y la longitud de éstas.
Construir un cuadrado, dado un lado.
Construir un cuadrado, dada la diagonal.

PROBLEMA XXVI

164. *Construir un polígono idéntico á otro dado ABCDE* (fig. 163)

Desde los vértices A, B, C, D, E, del polígono dado, trácense las rectas AA', BB', CC', EE' y DD', iguales y paralelas entre sí, únanse ordenadamente por medio de rectas, los puntos A' y B', B' y C', C' y D', D' y E', E y A'; y tendremos el polígono, A'B'C'D E' idéntico al dado.

En efecto; si superponemos, por superposicion directa el polígono A'B'C'D'E, sobre el ABCDE, conseguiremos fácilmente que coincidan, por tener todos sus lados y ángulos respectiva y ordenadamente iguales.

OTRA CONSTRUCCION. Sea el polígono dado ABCDE, (figura 164) para construir otro idéntico, se le descompone en triángulos por medio de las diagonales AC y AD; y despues se construyen sucesivamente los triángulos A'B'C', A'C'D' y A'D'E', iguales á los triángulos del dado y colocados del mismo modo, y tendremos al polígono A'B'C'D'E' que coincidirá efectivamente con el dado por superposicion directa.

PROBLEMA XXVII

165. *Construir un polígono igual á otro dado ABCDE,* (fig. 165) *dados un lado AB y las distancias de los extremos de este lado, á todos los demás vértices del polígono.*

Tomando sobre una recta indefinida, una parte A'B' = AB, se determinan por medio de la construccion de un triángulo cuando se dan los tres lados, (161) los puntos C', D' y E'; se unen por medio de rectas los puntos B' y C', C' y D', D' y E', E' y A', y quedará construido el polígono A'B'C'D'E' idéntico al dado.

En efecto; es fácil hacer coincidir los polígonos por superposicion.

LIBRO III

DE LA SEMEJANZA DE LAS FIGURAS

CAPÍTULO I

DE LAS LÍNEAS PROPORCIONALES

166. Sabemos (83) que el ángulo central y su arco correspondiente, son cantidades dependientes la una de la otra, y que esta dependencia es de proporcionalidad (86); es decir, que si A y B son dos ángulos centrales, y A' y B' sus arcos correspondientes trazados con el mismo radio, se verificará la proporcion

L. 2

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

En general, si las magnitudes geométricas, M y M' son proporcionalmente dependientes la una de la otra (Algebra 260), dos valores A y B de M, y otros dos valores A' y B' de M' respectivamente correspondientes á los primeros, formarán la proporcion (Algebra 261).

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \quad \text{ó} \quad \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

segun que las magnitudes M y M' sean directa ó inversamente proporcionales.

Ahora si medimos A y B con la unidad V, y A' y B' con la unidad V' correspondiente á V, y llamamos a y b, a' y b'

los números que respectivamente miden dichas cuatro magnitudes, tendremos la proporcion

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \text{ ó } \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}$$

Obsérvese que en éstas, los términos son números abstractos, y por consiguiente sujetos á las leyes del cálculo, y que en las proporciones

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}; \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

sus términos no son números. Cuando hablemos de operaciones del cálculo con magnitudes geométricas, líneas, superficies ó cuerpos geométricos, debe sobreentenderse, que no se calcula con dichas magnitudes; sino con los números que las miden, y que se llaman respectivamente longitudes, áreas y volúmenes.

167. Las distancias de un punto cualquiera situado en una recta AB (fig. 166) á los puntos A y B, se llaman segmentos de la distancia AB. Si el punto está situado en N entre los A y B, los segmentos AN y NB se llaman *aditivos* porque,

$$AN + NB = BA$$

Si el punto está situado en N', no comprendido entre A y B, los segmentos N'A y N'B se llaman *sustractivos*, porque

$$N'A - N'B = AB$$

Si imaginamos que el punto N se mueve sobre AB desde A hasta B, la razon $\frac{NA}{NB}$ de los dos segmentos aditivos, vá creciendo de una manera continua desde cero hasta el infinito.

En efecto; cuando N está en A, tendremos

$$\frac{NA}{NB} = \frac{0}{AB} = 0$$

Al moverse N, desde A hasta B, el numerador de la razon $\frac{NA}{NB}$, crece de una manera continua, y el denominando NB decrece del mismo modo; luego dicha razon crece de una manera continua, y cuando N está en B, tendremos

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AB}{0} = \infty$$

Además, puesto que la razon $\frac{NA}{NB}$, crece de una manera continua desde cero al infinito, á cada valor particular de $\frac{NA}{NB}$ corresponde una posicion única del punto N.

TEOREMA XC

1º 168. *Si se toman partes iguales en una recta AB,* (figura 167) *y por los puntos de division se trazan rectas paralelas entre sí, que corten á otra recta cualquiera CD; las partes interceptadas en ésta por las paralelas, son iguales entre sí.*

En efecto; trazando las MR y PR' paralelas á la CD, se forman los triángulos MNR y PQR', que son iguales, por estar comprendidos en el segundo caso de igualdad de triángulos, pues tienen MN = PQ; NMR = QPR' y MNR = PQR', de donde RM = PR';

pero
$$\left.\begin{array}{l} MR = M'N' \\ PR' = P'Q' \end{array}\right\} \text{luego } M'N' = P'Q'.$$

Y como se probaría del mismo modo que M'N' es igual á cualquiera otra de las partes interceptadas en la CD, resulta que todas éstas son iguales. C. C. E. E.

TEOREMA XCI

2º 169. *Si tres paralelas MM', NN' PP'* (fig. 168) *cortan á dos rectas cualesquiera AB y CD, los segmentos QR, RS, interceptados en la primera por dichas paralelas, son directamente proporcionales á los segmentos correspondientes, Q'R', R'S', interceptados en la segunda.*

Distinguiremos dos casos: 1.° Que los segmentos QR y RS sean conmensurables. 2.° Que dichos segmentos sean inconmensurables.

Primer caso: Suponiendo que la medida comun de estos dos segmentos esté contenida tres veces en el QR y cinco en el RS, y dividiéndolos respectivamente en tres y cinco partes iguales, cada una de estas partes será igual á la medida comun. Si se toma ésta como unidad para medir ambos segmentos QR y RS, las medidas de éstos serán los números 3 y 5, y como (Arit. 343), la razon de dos cantidades, es igual á la de los números que las miden, será

$$\frac{QR}{RS} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

Ahora, si por los puntos de division se trazan paralelas á RR', interceptarán en la CD partes iguales entre sí segun el teorema anterior, y Q'R' y R'S', quedarán respectivamente divididos en 3 y 5 partes iguales. Si tomamos una de estas partes como unidad para medir los segmentos Q'R' y R'S' tendremos

$$\frac{Q'R'}{R'S'} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

Luego $$\frac{QR}{RS} = \frac{Q'R'}{R'S'}$$

Segundo caso: Si los segmentos QR, RS, (fig. 169) son inconmensurables; suponiendo dividido el RS en n partes iguales, y colocando la *enésima* parte de RS, todas las veces que se pueda sobre QR, empezando por R, y suponiéndola contenida m veces, es decir, suponiendo que el mayor número de *enésimas* de RS contenidos en QR, sea m, el extremo de la última *enésima*, caerá en un punto T próximo á Q, puesto que QT ha de ser menor que dicha *enésima* parte de RS.

Trazando ahora por T, la TT' paralela ó RR' puesto que segun el caso anterior

$$\frac{TR}{RS} = \frac{T'R'}{R'S'}$$

si TR contiene m veces la *enésima* parte de RS, T'R' contendrá tambien m veces la *enésima* parte de R'S'.

Si á continuacion de T tomamos TH igual á una de dichas *enésimas*, Q estará comprendido entre T y H; y si por H, trazamos la paralela

HH' á QQ', tambien Q' estará comprendido entre T' y H' y siendo H'T' igual á la *enésima* de R'S', Q'T' será menor que dicha *enésima* parte. Ahora á manera que n aumente, T se acerca á Q y T' á Q' pudiendo llegar á ser QT y Q'T' menor que cualquier cantidad dada; es decir que TR, y T'R' son variables, cuyos respectivos límites son QR y Q'R' y tambien los límites de las variables iguales

$$\frac{TR}{RS} = \frac{T'R'}{R'S'}$$

serán respectivamente $\frac{QR}{RS}$, $\frac{Q'R'}{R'S'}$, y como en estas razones se puede establecer la limitacion

$$\frac{m}{n} < \frac{QR}{RS} < \frac{m+1}{n}, \text{ y } \frac{m}{n} < \frac{Q'R'}{R'S'} < \frac{m+1}{n}$$

será (Arit. 343),

$$\frac{QR}{RS} = \frac{Q'R'}{R'S'}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO 1.° De la anterior proporcion se deducen las

$$\frac{QR}{Q'R'} = \frac{RS}{R'S'},$$

$$\frac{QS}{QR} = \frac{Q'S'}{Q'R'},$$

$$\frac{QS}{RS} = \frac{Q'S'}{R'S'}$$

COROLARIO 2.° *Si varias paralelas MM', NN', PP', QQ' cortan á dos rectas cualesquiera AB, y CD; la razon de los segmentos correspondientes es constante; es decir que*

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{NP}{N'P'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{MP}{M'P'}$$

170. ESCOLIO. Puesto que el cuadrilátero QQ' SS' (figura 169) es un trapecio, el teorema XCI puede enunciarse diciendo:

Toda paralela RR' á las bases de un trapecio, que corta á sus lados no paralelos QS, Q'S', divide á éstos en partes proporcionales.

TEOREMA XCII

4º + 171. *Si una recta RR'; (fig. 169) divide en partes proporcionales, á los lados no paralelos QS, Q'S' de un trapecio QQ' S'S', dicha recta RR' es paralela á las bases del trapecio.*

En efecto; puesto que RR' divide en partes proporcionales las rectas QS, Q'S', tendremos

$$\frac{QR}{RS} = \frac{Q'S'}{R'S'}$$

Pero segun el teorema (169) si por R trazamos una paralela á las bases QQ' SS', esta paralela debe pasar por el punto único de Q'S' que la divide en partes cuya razon sea igual á $\frac{QR}{RS}$, y como por hipótesis este punto es el punto R', la paralela pasará por R y R' luego RR' es paralela á las bases. C. C. E. E.

5º + COROLARIO. *La recta RR' (fig. 170, bis) que une los puntos medios R, R' de los lados no paralelos QS y Q'S', del trapecio QQ' S'S, es igual á la semisuma de sus bases.*

En efecto; trazando por R la MM' paralela á Q'S', y prolongando la QQ hasta que encuentre á la MM', se formarán los triángulos RQM, y RSM', iguales por tener

lado QR = lado RS, por construccion.
ángulo MRQ = ángulo SRM', por opuestos por el vértice
ángulo MQR = ángulo RSM', por alternos internos.

La igualdad de estos triángulos nos dá,

$$MQ = SM'.$$

Además segun el teorema anterior, RR' es paralela á las bases del trapecio. De todo esto se deduce

$$RR' = MQ' = MQ + QQ' \text{ y } RR' = M'S' = SS' - SM'$$

$$\text{ó } \quad RR' = MQ + QQ', \text{ y } RR' = SS' - SM'$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, será

$$RR' + RR' = MQ + QQ' + SS - SM' = QQ' + SS',$$

ó $2RR' = QQ' + SS'$, ó por fin $RR' = \dfrac{QQ' + SS'}{2}$

C. C. E. E.

172 Puesto que un triángulo ABC (fig. 171) puede considerarse como un trapecio en que una de las bases es AC, y la otra se ha reducido á cero, pueden desde luego establecerse los dos siguientes teoremas.

TEOREMA XCIII

Toda paralela MN, á uno de los lados AC del triángulo ABC (fig. 171), *que corta á los otros dos, AB y BC, divide á éstos, en partes proporcionales.*

Es decir, que

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} \quad (1)$$

de esta proporcion se deducen (Alg. 56).

$$\frac{BM + MA}{BM} = \frac{BN + NC}{BN}, \text{ ó } \frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN} \quad (2)$$

y

$$\frac{BM + MA}{MA} = \frac{BN + NC}{NC}, \text{ ó } \frac{BA}{MA} = \frac{BC}{NC} \quad (3)$$

TEOREMA XCIV

Si una recta MN (fig. 171) *divide en partes proporcionales, á los lados BA y BC del triángulo ABC, dicha resta MN, es paralela al tercer lado AC.*

Este teorema es recíproco del anterior.

TEOREMA XCV

173. *La bisectriz de un ángulo interno ó externo de un triángulo, divide al lado opuesto, en dos segmentos aditivos ó sustractivos, proporcionales á los otros dos lados del triángulo.*

Primer caso: Sea ABC (fig. 172) el triángulo, y BD la bisectriz del ángulo interno ABC. Prolongando el lado AB hasta M, donde encuentra á la CM paralela á la bisectriz BD, tendremos en el triángulo AMC (172)

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BM};$$

pero como en el triángulo MBC, por ser el ángulo

$$BCM = CBD, \text{ y el } BMC = ABD; \text{ y el } CBD = ABD$$

será $BCM = BMC$, luego $BM = BC$.

Sustituyendo en la anterior proporcion, BM por BC, será

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \quad (1)$$

Luego la bisectriz BD, divide al lado opuesto AC, en dos segmentos aditivos DA y DC proporcionales á los lados BA, BC.

Segundo caso: Trazando la bisectriz BD' del ángulo externo CBM, prolongándola hasta que encuentre la prolongacion del lado AC en D', y trazando la NC paralela á la bisectriz BD', en el triángulo ABD', tendremos

$$\frac{D'A}{D'C} = \frac{BA}{NB}$$

Pero en el triángulo NBC se tiene

$$\text{ángulo } BNC = \text{ángulo } MBD'$$
$$\text{ángulo } BCN = \text{ángulo } CBD'.$$

Siendo los segundos miembros iguales, lo serán los primeros, y por consiguiente $NB = BC$.

Sustituyendo NB por BC en la proporcion anterior, será

$$\frac{D'A}{D'C} = \frac{BA}{BC} \quad (2)$$

Luego la bisectriz BD', divide al lado AC, en dos segmentos sustractivos D'A y D'C proporcionales á los lados BA y BC. C. C. E. E.

ESCOLIO. De las proporciones (1) y (2) se deduce la siguiente:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{D'A}{D'C}$$

Segun esta proporcion, los puntos D y D' dividen la distancia AB, en dos segmentos aditivos DA y DC, proporcionales á los dos segmentos sustractivos D'A, y D'C.

Los puntos D y D', dividen *armónicamente* la recta AC, ó tambien D y D' son puntos *conjugados armónicos*, con respecto á la recta AC.

CAPÍTULO II

DE LA SEMEJANZA DE LOS TRIÁNGULOS

174. Dos triángulos ABC, A'B'C' (fig. 173) que tienen sus ángulos respectivamente iguales ($A = A'$, $B = B'$, $C = C'$) y sus lados proporcionales $\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}\right)$ son semejantes.

Obsérvese que los dos lados de cada razon, se oponen á ángulos respectivamente iguales de los triángulos.

Los ángulos iguales A y A', B y B', C y C', son ángulos *homólogos*, y los lados AB y A'B', y BC y B'C', AC y A'C' opuestos á ángulos respectivamente iguales, son lados *homólogos*. La razon de dos lados homólogos, es la *razon de la semejanza* de los triángulos.

TEOREMA XCVI

175. *Si se traza una paralela MN* (fig. 174) *á uno de los lados AC de un triángulo ABC, que corte á los otros dos lados, el triángulo parcial que resulta MNB, es semejante al total ABC.*

En efecto; los triángulos ABC y MBN, tienen el ángulo B comun, y por ser paralela MN á AC (46)

ángulo BAC = ángulo BMN
ángulo BCA = ángulo BNM.

Es decir que tienen sus ángulos respectivamente iguales.
Además, (Teorema XCIII, proporcion (2)

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN} \quad (1)$$

Trazando ahora la MP paralela á BC, tendremos (Teorema XCIII, proporcion (3)

$$\frac{BA}{MB} = \frac{AC}{PC}$$

pero como PC = MN (48).

Será $$\frac{BA}{MB} = \frac{AC}{MN} \quad (2)$$

De las proporciones (1) y (2) se deduce

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} \quad (3)$$

Es decir, que dichos triángulos tienen tambien sus lados proporcionales.

Luego el triángulo parcial BMN y el total ABC son semejantes. C. C. E. E.

TEOREMA XCVII

176. *Si dos triángulos ABC y A'B'C', (fig. 175) tienen dos ángulos respectivamente iguales (B = B', A = A'); dichos triángulos son semejantes.*

En efecto; tomando en BA una parte BM igual á B'A', y trazando por M la NM paralela á AC, el triángulo parcial BMN, es semejante al total BAC.

Pero los triángulos BMN y B'A'C' tienen:

ángulo B = ángulo B' por hipótesis
lado BM = lado B'A' por construccion
y ángulo BMN = ángulo B'A'C',

por ser ambos iguales al ángulo A, el BMN por correspondiente, y el B'A'C', por hipótesis.

De donde los triángulos B'A'C' y BMN, son iguales; y como éste es semejante al BAC, B'A'C', tambien lo será. C. C. E. E.

TEOREMA XCVIII

177. *Si dos triángulos ABC y A'B'C' (fig. 175) tienen un ángulo igual (B = B'), y proporcionales los dos lados que lo forman* $\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}\right)$*; dichos triángulos son semejantes.*

En efecto; tomando en BA una parte BM igual á B'A', y trazando la MN paralela á AC, el triángulo parcial BMN, será semejante al total BAC, de donde se deduce que,

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BN} \quad (1).$$

Además por hipótesis tenemos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (2),$$

y por construccion BM = A'B'.

Las proporciones (1) y (2) tienen pues, los tres primeros términos iguales, por lo que el cuarto tambien lo será; es decir BN = B'C'.

Ahora los triángulos BMN y B'A'C' tienen

ángulo B = ángulo B', por hipótesis
lado BM = lado B'A', por construccion
y lado BN = lado B'C', porque se acaba de demostrar. Los triángulos B'A'C' y BMN son pues iguales, y éste es semejante al ABC; luego los triángulos BAC y B'A'C', son semejantes. C. C. E. E.

TEOREMA IC

178. *Si dos triángulos ABC, y A'B'C' (fig. 175) tienen sus tres lados respectivamente proporcionales* $\left(\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}\right)$*, dichos triángulos son semejantes.*

En efecto; tomando en AB una parte BM igual á B'A', y trazando la MN paralela á AC, el triángulo parcial BMN, será semejante al total ABC.

De donde se deduce que

$$\frac{BA}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} \quad (1).$$

Por hipótesis tenemos

$$\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Comparando las proporciones

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN}, \text{ y } \frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'},$$

se vé que tienen iguales los tres primeros términos, luego

$$BN = B'C'.$$

Comparando tambien las proporciones

$$\frac{BA}{BM} = \frac{AC}{MN} \text{ y } \frac{BA}{B'A'} = \frac{AC}{A'C'}$$

puesto que tienen tambien iguales los tres primeros términos será

$$MN = A'C'$$

Ahora los triángulos BMN y A'B'C'; tienen

BM = B'A' por construccion
BN = B'C' por haberlo demostrado;
y NN = A'C', tambien por haberlo demostrado;

luego los triángulos A'B'C' y BMN son iguales; pero éste es semejante al ABC, luego el A'B'C' tambien lo será. C. C. E E.

179. Segun lo establecido (174) dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados proporcionales son semejantes.

Pero si examinamos los teoremas XCVII, XCVIII y IC, vemos, que *basta* suponer *dos* de las anteriores condiciones para que forzosamente se verifiquen las demás, es decir, para que los triángulos sean semejantes.

Estas distintas condiciones *suficientes* para que dos triángulos sean semejantes, determinan los *casos generales de semejanza de triángulos* que son tres, y pueden enunciarse de acuerdo con los anteriores teoremas, diciendo:

Dos triángulos son semejantes:

1.° *Cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

2.° *Cuando tienen un ángulo igual, y proporcionales los dos lados que lo forman.*

3.° *Cuando tienen los tres lados respectivamente proporcionales.*

Conviene observar que las condiciones para la semejanza de dos triángulos son *dos*, y para la igualdad son *tres*, y que la igualdad de triángulos, es un caso particular de semejanza en que la razon de los lados homólogos es uno.

COROLARIO 1.° *Dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo del uno igual á un ángulo agudo del otro, son semejantes.*

COROLARIO 2.° *Dos triángulos rectángulos, que tienen la hipotenusa y un cateto proporcionales, son semejantes.*

COROLARIO 3.° *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, son semejantes.*

En efecto; llamemos A, B, C, á los tres ángulos de uno de los triángulos, y A', B' C' á los del otro, y supongamos que los lados perpendiculares ó paralelos, sean respectivamente los del ángulo A á los del A'; los del ángulo B á los del B', y los del ángulo C á los del C'. (Pag 24 N.° 5.

Si suponemos que los tres ángulos A, B, C, son respectivamente suplementarios á los A', B' C', será

$$A + A' = 2 \text{ rectos}$$
$$B + B' = 2 \text{ rectos}$$
$$C + C' = 2 \text{ rectos}$$

lo que es imposible porque la suma de los seis ángulos de los dos triángulos, valdria seis rectos.

Si suponemos los ángulos A y A' iguales, y los B B' y C' C' suplementarios, será

$$A = A'$$
$$B + B' = 2 \text{ rectos}$$
$$C + C' = 2 \text{ rectos},$$

lo que es imposible, porque la suma de los seis ángulos de los dos triángulos valdria más de cuatro rectos.

Solo es pues posible

$$A = A'$$
$$B = B'$$

luego los triángulos serán semejantes. C. C. E. E.

180. CONSECUENCIAS MAS IMPORTANTES DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

TEOREMA C

En los triángulos semejantes ABC, $A'B'C'$ (figuras 176 y 177) *en que se toman por bases los lados homólogos AC y $A'C'$, éstas son proporcionales á las alturas BD y $B'D'$.*

En efecto; de la semejanza de los triángulos BAC y B'A'C', se deduce

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \quad (1),$$

y de la semejanza de los triángulos rectángulos BAD, B'A'D'.

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'} \quad (2)$$

Pero como estas dos proposiciones tienen una razon comun, tendremos

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CI

181. *Si desde un punto A* (fig. 178) *parten las rectas AB, AC, AD, AE, AF, que cortan á dos paralelas BF, B'F', las partes de éstas interceptadas por las rectas que parten de A, son proporcionales.*

En efecto; de la semejanza de los triángulos ABC y AB'C', ACD y AC'D', ADE y AD'E', AEF y AE'F', se deduce la siguiente serie de razones iguales.

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{EF}{E'F'}$$

y de estas

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'}. \text{ C. C. E. E.}$$

182. Proyeccion de un punto A, (fig. 179) sobre una recta MN, es el pie A' de la perpendicular AA', bajada desde el punto A á la recta MN.

Proyeccion de una recta limitada DE, sobre otra MN, es la parte D'E' de la MN, comprendida entre las proyecciones de los extremos de la recta DE.

TEOREMA CII

183. *Si desde el vértice A del ángulo recto de un triángulo rectángulo* (fig. 180) *se baja una perpendicular AD á la hipotenusa BC, se verifica.*

1.° *Que la perpendicular AD, es media proporcional entre los segmentos BD y DC de la hipotenusa.*

2.° *Que cada cateto es medio proporcional, entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.*

3.° *Que los cuadrados de los catetos, son proporcionales á los segmentos correspondientes de la hipotenusa.*

4.° *Que el cuadrado de la hipotenusa, es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

En efecto;

1.° Los triángulos parciales ADB, ADC, son rectángulos y semejantes entre sí, por tener sus lados respectivamente perpendiculares. Comparando lados homológos, podremos formar la proporcion

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

que demuestra el primer teorema.

2.° El triángulo parcial BAD es rectángulo y tiene el ángulo agudo B comun con el total; luego estos dos triángulos son semejantes.

Tambien el parcial ADC tiene el ángulo agudo C comun con el total, luego tambien estos triángulos son semejantes. Tenemos pues, que los triángulos parciales ABD y ADC son semejantes al total.

De la semejanza del triángulo total y del parcial ADB, se deduce,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \quad (1),$$

y de la semejanza del total y del parcial ADC resulta

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \quad (2)$$

Estas proporciones demuestran el segundo teorema.

3.° De las proporciones (1) y (2) se deduce

$$(3) \begin{cases} \overline{BA}^2 = BC \times BD. \\ \overline{AC}^2 = BC \times DC. \end{cases}$$

y dividiendo ordenadamente estas dos igualdades será

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BC \times BD}{BC \times DC}$$

y simplificando la segunda razon, tendremos

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{DC} \text{ ó } \frac{\overline{AB}^2}{BD} = \frac{\overline{AC}^2}{DC}$$

que demuestran el tercer teorema.

4.° Sumando ordenadamente las igualdades (3) resulta,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BD + BC \times DC = BC(BD+DC) = \overline{BC}^2$$

$$\text{ó } \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad (4),$$

que demuestra el cuarto teorema, conocido en la ciencia con el nombre de TEOREMA DE PITÁGORAS.

COROLARIO 1.° De las igualdades (3)

$$\overline{AB}^2 = BC \,.\, BD$$
$$\overline{AC}^2 = BC \,.\, DC$$

y la $\overline{BC}^2 = BC \,.\, BC$ se deduce

$$\frac{\overline{AB}^2}{BC \,.\, BD} = \frac{\overline{AC}^2}{BC \,.\, DC} = \frac{\overline{BC}^2}{BC \,.\, BC}$$

y dividiendo los denominadores de estas tres fracciones por BC, será

$$\frac{\overline{AB}^2}{BD} = \frac{\overline{AC}^2}{DC} = \frac{\overline{BC}^2}{BC},$$

lo que traducido al lenguaje vulgar expresa, que

Los cuadrados de los tres lados de un triángulo rectángulo BAC, son proporcionales á las proyecciones de dichos lados sobre la hipotenusa BC.

COROLARIO 2.° Conocido el valor numérico de dos lados de un triángulo rectángulo, puede determinarse el valor del tercer lado; pues de la fórmula (4) $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ se deduce

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$$

$$AB = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}$$

$$AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}$$

COROLARIO 3.° Si desde el punto A (fig. 181) de la circunferencia O, se trazan las cuerdas AC y AB que pasan por los extremos del diámetro BC, se formará el triángulo rectángulo BAC; y si ahora trazamos desde el vértice A la perpendicular AD al diámetro BC, como la hipotenusa BC de este triángulo es un diámetro, y los catetos AB y AC son cuerdas, podremos establecer.

1.° Que si desde un punto A de una circunferencia se tira una perpendicular á un diámetro BC, la perpendicular es media proporcional entre los segmentos BD y BC del diámetro.

2.° Que si desde el extremo B de un diámetro BC, se traza una cuerda BA, ésta es media proporcional entre el diámetro BC, y la proyeccion BD, de la cuerda sobre el diámetro.

3.° Que si desde un punto A de una circunferencia se trazan las cuerdas AB, AC á los extremos de un diámetro BC, ~~dichas cuerdas~~ son proporcionales á sus proyecciones BD y DC sobre el diámetro.

COROLARIO 4.° Puesto que segun se desprende del corolario 1.° en el triángulo ACB (fig. 182) se tiene

$$\frac{\overline{AC}^2}{AM} = \frac{\overline{BC}^2}{MB} = \frac{\overline{AB}^2}{AB};$$

tendremos tambien

$$\frac{\overline{AE}^2}{AP} = \frac{\overline{AB}^2}{AB} \text{ y } \frac{\overline{AD}^2}{AN} = \frac{\overline{AB}^2}{AB}$$

y por consiguiente

$$\frac{\overline{AE}^2}{AP} = \frac{\overline{AD}^2}{AM} = \frac{\overline{AC}^2}{AM}$$

lo que traducido al lenguaje vulgar significa, que si por el extremo A de un diámetro se tiran varias cuerdas AD, AE, AC, los cuadros de estas cuerdas, son proporcionales á sus proyecciones sobre el diámetro AB.

TEOREMA CIII

184. *En un triángulo cualquiera ABC* (fig. 183), *el cuadrado de un lado BC, opuesto á un ángulo agudo A, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de uno de éstos por la proyeccion del otro sobre éste.*

En efecto; bajando la perpendicular BD, en el triángulo rectángulo BDC, se verificará que

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad (a)$$

Pero en el triángulo rectángulo BAD, tendremos

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 \quad (b)$$

Además, $\quad DC = AC - AD,$

y $\overline{DC}^2 = (AC - AD)^2 = \overline{AC}^2 - 2\,AC\,.\,AD + \overline{AD}^2 \quad (c)$

sustituyendo ahora en la igualdad (a) los valores de $\overline{BD}^2$ y $\overline{DC}^2$; (a) y (b), tendremos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC\,.\,AD + \overline{AD}^2$$

y simplificando, será

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC\,.\,AD. \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CIV

185. *En un triángulo obtusángulo ABC* (fig. 184) *el cuadrado del lado BC opuesto al ángulo obtuso A, es igual á la*

suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas el duplo de uno de éstos, por la proyeccion del otro sobre éste.

En efecto; bajando la altura BD, en el triángulo rectángulo BDC, se verificará que

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad (n);$$

pero en el triángulo rectángulo BDA, tendremos

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 \quad (m).$$

Además $$DC = AC + AD$$

y $$\overline{DC}^2 = \left(AC + AD\right)^2 = \overline{AC}^2 + 2\,AC\,.\,AD + \overline{AD}^2 \quad (p)$$

Sustituyendo ahora en la igualdad (n) los valores de $\overline{BD}^2$ y $\overline{DC}^2$ (m) y (p), tendremos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AC\,.\,AD + \overline{AD}^2$$

y simplificando será

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AC\,.\,AD. \quad \text{C. Q. E. D.}$$

COROLARIO. Del teorema de Pitágoras y los dos anteriores se deduce, que en un triángulo,

El cuadrado de un lado opuesto á un ángulo recto ES IGUAL *á la suma de los cuadrados de los otros dos; el cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo, es* MENOR *que la suma de los cuadrados de los otros dos, y el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo obtuso, es* MAYOR *que la suma de los cuadrados de los otros dos, y recíprocamente.*

TEOREMA CV

186. *Si desde un punto M* (fig. 185) *situado dentro de un círculo, se trazan dos cuerdas AB y DC; las partes en que M divide á cada cuerda, son recíprocamente proporcionales.*

En efecto; trazando las DA y BC, resultan los triángulos MDA y MBC, que son semejantes por tener

ángulo A = ángulo C
y ángulo D = ángulo B

por inscriptos que comprenden el mismo arco.

Comparando lados homólogos, es decir, lados opuestos á ángulos respectivamente iguales, tendremos

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \quad (a) \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CVI

187. *Si desde un punto M* (fig. 186) *situado fuera de un círculo, se trazan las secantes MA, MC, que terminan en los segundos puntos de interseccion; estas secantes son inversamente proporcionales á sus segmentos externos.*

En efecto; trazando la DA y BC, resultan dos triángulos MDA y MBC, que son semejantes por tener

ángulo M comun
ángulo A = ángulo C

por inscriptos que abrazan el mismo arco.

Comparando lados homólogos, tendremos

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \quad (b) \quad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO. Estos dos últimos teoremas, están comprendidos en el siguiente

Si desde un punto M (fig.as 185 y 186) *se trazan secantes á un círculo, los productos de las distancias de M á los puntos de interseccion con la circunferencia en cada secante, son iguales.*

Es decir, que

$$MA \,.\, MB = MC \,.\, MD.$$

CoROLARIO. Si imaginamos que la secante MC, (fig. 186) gira al rededor del punto fijo M, apartándose de MA, los puntos D y C de interseccion, se van aproximando, hasta que se confunden en E; y como el teorema anterior es independiente del valor de la cuerda DC, será verdadero aunque esta cuerda sea cero, y MD se convierta en ME. Podremos pues sustituir en la proporcion (*b*) MD y MC por ME y resultará

$$\frac{MA}{ME} = \frac{ME}{MB}$$

Esta proporcion puede tambien deducirse de la semejanza de los triángulos MAE y MBE.

Luego,

Si desde un punto fuera de la circunferencia se trazan una tangente y una secante que termine en el segundo punto de interseccion, la tangente es media proporcional entre la secante y el segmento externo.

CAPÍTULO III

DE LA SEMEJANZA DE LOS POLÍGONOS

188. *Se dice que dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E'* (figura 187) *son* SEMEJANTES *cuando, tienen los ángulos respectiva y ordenadamente iguales* ($A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$, $E = E$) *y los lados adyacentes á estos ángulos iguales, respectivamente proporcionales* $\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}\right)$

Los ángulos A y A', B y B' . . . . respectivamente iguales, y colocados en el mismo órden, *son ángulos homólogos*, los vértices de los ángulos homólogos son *vértices homólogos*, y los lados AB y A'B', BC y B'C' . . . . adyacentes á estos ángulos iguales, que unen vértices homólogos, son *lados homólogos*.

Razon de semejanza de dos polígonos semejantes, es la razon de dos *lados homólogos* $\frac{AB}{A'B'}$

189. Del mismo modo que en la semejanza de triángulos (179); en los polígonos, basta suponer algunas de las condiciones establecidas en el párrafo anterior, para que forzosamente se verifiquen los demás.

Estas distintas condiciones *suficientes*, para que dos polígonos sean semejantes, determinan *los casos de semejanza de polígonos*. El exámen de estos casos de semejanza, ofrece aquí poco interés, por lo que nos limitamos á considerar solo el siguiente

TEOREMA CVII

Dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E', (fig. 188) *compuestos del mismo número de triángulos ABC, CAD, DAE y A'B'C', C'A'D', D'A'E', respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

En efecto; de la semejanza de los triángulos de dichos polígonos se deduce,

$$\text{ángulo } ABC = \text{ángulo } A'B'C'$$

por ser ángulos homólogos de triángulos semejantes;

$$\text{ángnlo } BCD = \text{ángulo } B'C'D'$$

por componerse cada uno, de dos ángulos homólogos de triángulos respectivamente semejantes. Lo mismo puede decirse respecto de los demás ángulos de los polígonos.

Estos tienen pues sus ángulos ordenada y respectivamente iguales.

Además, de la semejanza de los triángulos se deduce tambien;

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}$$

Observemos que en estas tres series de razones, la última razon de cada una, es la primera de la siguiente; de modo que todas estas razones son iguales, podremos pues, suprimiendo las razones de las diagonales establecer la siguiente serie:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{DE'} = \frac{AE}{AE'} \quad (a)$$

Los polígonos tienen pues tambien sus lados respectiva y ordenadamente proporcionales; luego son semejantes. C. C. E. E.

TEOREMA CVIII

190. *Si dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E'* (fig. 188) *son semejantes, pueden descomponerse en el mismo número de triángulos semejantes, y semejantemente dispuestos.*

En efecto; descomponiendo dichos polígonos en triángulos por medio de diagonales trazadas desde dos vértices homólogos A y A', tendremos que los triángulos ABC y A'B'C', son semejantes; puesto que tienen (179, 2.°)

$$\left.\begin{array}{l} \text{ángulo } ABC = \text{ángulo } A'B'C' \\ \text{y} \quad \dfrac{AB}{A'B} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{array}\right\} \text{por la semejanza de los polígonos.}$$

Los triángulos ACD y A'C'D, tambien son semejantes, puesto que tienen

$$\text{ángulo } ACD = \text{ángulo } A'C'D'$$

porque

$$\text{ángulo } ACD = \text{ángulo } BCD - \text{ángulo } BCA \quad \text{y}$$
$$\text{ángulo } A'C'D' = \text{ángulo } B'C'D' - \text{ángulo } B'C'A'$$

y siendo iguales los segundos miembros, tambien lo serán los primeros.

Además $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CD}{C'D'}$

puesto que de la semejanza de los triángulos ABC y A'B'C' se deduce

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

y de la semejanza de los polígonos

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

y de estas dos proporciones resulta

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Luego segun el segundo caso, (179) dichos triángulos son semejantes. Del mismo modo se demostraria la semejanza de los demás triángulos.

Luego el teorema es verdadero.

TEOREMA CIX

191. *Los perímetros de dos polígonos semejantes ABCDE, A'B'C'D'E'* (fig. 188) *son proporcionales á los lados homólogos.*

En efecto; puesto que dichos polígonos son semejantes, tendremos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

y por consiguiente (Algebra 62)

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'} \text{ C. C. E. E.}$$

COROLARIO. *Tambien los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á dos diagonales homólogas, porque éstas lo son á dos lados homólogos.*

CAPÍTULO IV

PROBLEMAS

PROBLEMA XXVIII

192. *Dividir una recta en un número cualquiera de partes iguales.*

PRIMERA CONSTRUCCION. Propongámonos dividir la recta AB (fig. 189) en cinco partes iguales. Para conseguirlo, bastará trazar por uno de los extremos A, de dicha recta AB, la indefinida AC, tomar desde A en la AC con una abertura de compás arbitraria cinco partes iguales; unir el extremo *f* de la última division con el extremo B de la recta dada por medio de la *f* B, y trazar ahora por los puntos *e*, *d*, *c*, *b*, paralelas á *f* B que corten á la AB; con lo que ésta quedará dividida en cinco partes iguales, (168)

SEGUNDA CONSTRUCCION. Para dividir la recta AB (figura 190) en cinco partes iguales, se trazan desde los extremos A y B de la recta dada, las indefinidas AD y BC, paralelas entre sí y dirigidas en sentido contrario. Con una abertura cualquiera de compás, se toman cinco partes iguales en cada una de las rectas AD y BC, empezando respectivamente por A y B, se une un extremo A de la recta dada, con el extremo A' de la última parte tomada sobre una de las paralelas BC, se unen ahora con rectas los puntos *a* y *a'*, *b* y *b'*, *c* y *c'*...... y la AB quedará dividida por estas rectas en cinco partes iguales.

En efecto, las figuras AA'*aa'*, *aa'b'b*..... son paralelógramos; de modo que las rectas AA', *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* son paralelas; luego (168) dividirán á la AB en partes iguales.

TERCERA CONSTRUCCION. Para dividir la recta AB (figura 191) en siete partes iguales, se toman sobre la indefinida MN, con una abertura arbitraria de compás, siete partes iguales. Sobre QP se construye el triángulo equilátero QOP, se une O con los puntos de division de la QP, se toman sobre OQ y OP las partes OA' y OB', iguales á la recta dada

AB, se traza la A'B', y ésta, que será igual á la AB, quedará dividida en siete partes iguales.

En efecto; A'B' es paralela á MN (172), por lo que el triángulo OA'B' semejante al OPQ, será como este equilátero, y por consiguiente A'B' = OA' = AB. Además las rectas que parten de O, dividirán á las QP y A'B' en partes proporcionales (181); luego la A'B' ha quedado dividida en siete partes iguales.

PROBLEMA XXIX

193. *Dividir una recta en partes proporcionales á otras rectas dadas.*

Propongámonos dividir la recta AB (fig. 192) en tres partes proporcionales, á las rectas P, N, M.

Para conseguirlo, se traza por uno de los extremos A de la recta dada, la indefinida AC. Se toman sobre ésta, empezando desde A, las distancias AP', P'N' y N'M', respectivamente iguales á las rectas dadas P, N, M. Se unen con una recta BM', el extremo B de la recta dada con el extremo M' de la última distancia tomada en la AC; se trazan por los puntos N' y P' las paralelas á BM', N'R, y P'Q, y tendremos, que las partes AQ, QR y RB en que ha quedado dividida la AB, son proporcionales á las rectas dadas puesto que (169, cor. 2.º)

$$\frac{AQ}{AP'} = \frac{QR}{P'N'} = \frac{RB}{N'M'}$$

ó $$\frac{AQ}{P} = \frac{QR}{N} = \frac{RB}{M} \qquad \text{C. C. E. E.}$$

PROBLEMA XXX

194. *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas.*

PRIMERA CONSTRUCCION. Propongámonos hallar una cuarta proporcional á las tres rectas M, N, P, (fig. 193), es decir hallar una recta x que forme con las tres dadas, la siguiente proporcion:

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{x}$$

Para conseguirlo, se traza un ángulo cualquiera BAC. Sobre uno de sus lados, y desde el vértice, se toma una parte AM', igual á la recta dada M, á continuacion se toma otra parte M'N' igual á N, sobre el otro lado y desde el vértice se toma tambien la parte AP', igual á la tercera recta P. Se une al extremo M' de la primera parte tomada, con el extremo P' de la tercera, por medio de la recta M'P', se trazan la N'x paralela á M'P', y la P'x será la cuarta proporcional pedida.

En efecto; sabemos (172) que

$$\frac{AM'}{M'N'} = \frac{AP'}{P'x},$$

y sustituyendo en esta proporcion las rectas dadas, será

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{P'x}.$$

SEGUNDA CONSTRUCCION. Se toma desde el vértice, sobre uno de los lados AC del ángulo ABC (fig. 194), AM' igual á la primera recta M, sobre el mismo lado, y desde A la parte AN' igual á N, y sobre AB, y desde A, la parte AP' igual á la tercera recta P. Se une M', extremo de la primera con P' extremo de la tercera, se traza por N' extremo de la segunda la N'x paralela á la M'P', y Ax será la cuarta proporcional pedida; puesto que (172)

$$\frac{AM'}{AN'} = \frac{AP'}{Ax} \quad \text{ó} \quad \frac{M}{N} = \frac{P}{Ax}$$

TERCERA CONSTRUCCION. Se toma desde el punto A de la AC (fig. 195), una parte AM' igual á M, sobre la misma una parte AN' igual á N, desde M' y con una direccion cualquiera que no se confunda con AC, se traza la M'P' igual á la tercera recta dada P. Se traza por A y P' la indefinida

AB, y por N' la paralela N'x á la M'P'. La N'x será la cuarta proporcional buscada; puesto que (175)

$$\frac{AM'}{AN'} = \frac{M'P'}{N'x} \text{ ó } \frac{M}{N} = \frac{P}{N'x}.$$

PROBLEMA XXXI

195. *Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas*

Es decir hallar una recta x tal, que con las dos dadas M y N forme la siguiente proporcion

$$\frac{M}{N} = \frac{N}{x}.$$

Como se vé, este problema es el caso particular del anterior, en que N es el término medio de una proporcion continua. Se resolverá pues, como el anterior.

PROBLEMA XXXII

196. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas.*

PRIMERA CONSTRUCCION. Propongámonos hallar una media proporcional entre las rectas M y N (fig. 196). Para conseguirlo, sobre la recta indefinida AB, se toma una parte AC igual á M, y á continuacion una parte CB igual á N. Sobre la AB como diámetro se traza una semicircunferencia, se levanta por C una perpendicular á la AB, prolongada hasta que encuentre la semicircunferencia, y esta perpendicular Cx, será la media proporcional, puesto que (183, cor. 3.° 1.°)

$$\frac{AC}{xC} = \frac{xC}{CB} \text{ ó } \frac{M}{xC} = \frac{xC}{N}$$

SEGUNDA CONSTRUCCION Sobre la recta indefinida AM' (fig. 197) se toma AM' igual á la recta mayor M, y AN' igual á la menor N. Sobre AM' como diámetro, se traza una semicircunferencia, se levanta por N' la perpendicular N'x á la AM' hasta que encuentre la semicircunferencia, se traza la Ax, y ésta será la media proporcional pedida; puesto que (183, cor. 3.º 2.º)

$$\frac{AM'}{Ax} = \frac{Ax}{AN'} \text{ ó } \frac{M}{Ax} = \frac{Ax}{N}.$$

PROBLEMA XXXIII

197. *Dividir una recta AB* (fig. 198) *en media y extrema razon.* (1)

Para conseguirlo, por uno de los extremos B de la recta dada, se levanta una perpendicular BO á dicha recta AB, é igual á su mitad Haciendo centro en O, y con un radio BO, se traza un círculo que será tangente á la AB. Se traza la secante AC, que pasa por el otro extremo A de la recta dada y el centro del círculo, se toma en la AB desde A, una parte Ax igual á AD, y el punto x dividirá la recta dada AB, en media y extrema razon.

En efecto; tenemos (187, cor. 2.º)

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

de donde (Algebra 56, 2.º)

$$\frac{AC - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD} \quad \text{ó}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{Bx}{AD} \quad \text{ó}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{Bx} \quad \text{ó por fin}$$

$$\frac{AB}{Ax} = \frac{Ax}{Bx}$$

(1) Dividir una recta en media y extrema razon, es dividirla en dos segmentos tales, que el mayor sea medio proporcional entre el menor y la recta completa.

PROBLEMA XXXIV

198 *Construir un triángulo semejante á otro dado ABC* (fig 199)

Sobre una recta A'B' trácese la A'C', que forme con la anterior un ángulo B'A'C' igual al BAC del triángulo dado. Por el otro extremo B' se traza la C'B', que forme con la A'B' un ángulo A'B'C' igual al ABC, y el triángulo A'B'C' será el buscado, punto que tiene los dos ángulos A' y B' respectivamente iguales á los A y B.

PROBLEMA XXXV

199 *Construir un polígono semejante á otro dado ABCDE* (fig. 200) *sobre una recta dada A'E', tomada como lado homólogo del lado AE del polígono dado.*

Sobre la recta dada A'E', se construye un triángulo A'E'D', semejante al AED del polígono dado. Sobre A'D' se construye el triángulo A'D'C', semejante al ADC del polígono dado; y sobre A'C' se construye el triángulo A'C'B', semejante al ACB del polígono dado. Segun esta construccion los polígonos A'B'C'D'E' y ABCDE, están compuestos del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos; luego (189) el A'B'C'D'. es semejante al dado.

Escolio. Si se quiere construir un polígono semejante á otro dado ABCDE, y cuya razon de semejanza sea la razon de dos rectas $\frac{m}{n}$, se buscará primeramente un lado A'B' homólogo de otro AB del polígono dado. Esto se conseguirá hallando una cuarta proporcional á las rectas *m*, *n* y AB, puesto que el problema exige que

$$\frac{m}{n} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Hallado A'B', se emplea la construccion anterior.

CAPÍTULO V

DE LOS POLÍGONOS REGULARES

200. Un polígono está *inscripto* en un círculo, ó un círculo está *circunscripto* á un polígono, cuando todos los vértices de éste, están en la circunferencia. Los lados del polígono, son cuerdas del círculo

El polígono ABCDE (fig. 201) está inscripto en el círculo O.

Un polígono está *circunscripto* á un círculo, ó un círculo está inscripto en un polígono, cuando todos los lados del polígono son tangentes del círculo.

El polígono A'B'C'D'E' está circunscripto al círculo O.

Polígono regular, es el que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales. Polígono regular es pues un polígono equiángulo y equilátero.

TEOREMA CX

201. *Dos polígonos regulares del mismo número de lados, son semejantes.*

En efecto; puesto que tienen el mismo número de lados (154) la suma de todos los ángulos del uno, es igual á la suma de todos los ángulos del otro; y como además constan del mismo número de ángulos iguales (154, cor. 1°), dichos polígonos serán equiángulos. Además la razon entre un lado de uno de los polígonos, y un lado del otro polígono es constante; es decir que tienen los lados proporcionales. Luego son semejantes. (188)

En general, línea quebrada ó poligonal regular, es la que tiene todos los lados y todos los ángulos iguales.

TEOREMA CXI

202. *Si se divide una circunferencia O* (fig. 201) *en tres ó más partes iguales, y por los puntos de division,*

A, B, C, D...... se trazan cuerdas, resulta un polígono ABCDEF regular inscripto

En efecto; este polígono tiene todos los lados iguales, (63, 1.°) y todos los ángulos iguales tambien, (89); luego es regular y los vértices están en la circunferencia, luego es inscripto.

COROLARIO. Puesto que una circunferencia puede considerarse dividida en un número cualquiera de partes iguales, existen polígonos regulares de un número cualquiera de lados.

TEOREMA CXII

203. *Si se divide una circunferencia O'* (fig. 201) *en tres ó más partes iguales, y por los puntos de division M, N, P, Q...... se trazan tangentes, resulta un polígono regular circunscripto A' B' C'....*

En efecto; este polígono tiene todos los ángulos iguales (A' = B' = C' = D'....) (94)

Además, los triángulos SA'M, MB'N, NC'P.... tienen los lados SM, MN, NP .. iguales (63, 1.°), é iguales tambien los ángulos A'SM = A'MS = B'MN = B'NM.... (91) adyacentes á estos lados; luego dichos triángulos son iguales (131, 2.°) é isósceles, (119) y por consiguiente tendremos

SA' = A'M = MB' = B'N = NC' = C'P = PD'.....,

de donde

A'B' = B'C' = C'D' = C'D'.....

De modo que son iguales tambien los lados del polígono.

Si pues el polígono A'B'C'D'.... que resulta es equiángulo y equilátero, es un polígono regular, y como sus lados son tangentes, es tambien circunscripto. C. Q. E. D.

TEOREMA CXIII

204. *Si en un polígono regular ABCDEF* (fig. 203) *se trazan las bisectrices de los ángulos, y se levantan perpendiculares á los lados por sus puntos medios, todas las*

bisectrices y todas las perpendiculares, concurren en un mismo punto O.

En efecto; trazando las bisectrices de dos ángulos cualesquiera consecutivos A y B, éstas se encontrarán forzosamente en un punto O. Uniendo este punto O, con el vértice consecutivo C, tendremos dos triángulos OAB y OBC, que tienen, el lado OB comun,

lado AB = lado BC
y ángulo ABO = OBC,

por ser BO bisectriz del ángulo B Estos dos triángulos son pues iguales é isósceles ambos, pues lo es el OAB.

Siendo el OBC isósceles, será

ángulo OBC = ángulo OCB

y siendo OBC mitad del B, será OCB mitad del C.

Luego CO es la bisectriz del ángulo C é igual á OB. Del mismo modo, se demostraría que OD, OE, OF..... son bisectrices de los ángulos D, E, F.... y que son iguales.

Todas las bisectrices de los ángulos del polígono regular ABCD..... concurren pues á un mismo punto O que equidista de los vértices de dicho polígono.

Ahora una perpendicular PO, levantada en el punto medio de un lado cualquiera CD, pasa por todos los puntos equidistantes de C y D, (24, cor.); luego pasará por O que es uno de ellos. Lo mismo puede decirse de las demás perpendiculares NO, MO, SO.. .

Además todos los triángulos rectángulos AOM, MOB, BON, NOC..... son iguales; luego tendrán iguales los catetos homólogos OM, ON, OP.....

Todas las perpendiculares á los lados del polígono regular ABCD..... trazadas por sus puntos medios, concurren pues á un mismo punto O, que equidista de dichos lados. C. C E. E.

205. El punto O, donde concurran todas las bisectrices de los ángulos de un polígono regular, y todas las perpendiculares levantadas en los puntos medios de sus lados, se llama *centro del polígono*.

El centro de un polígono regular equidista de sus vértices.

El centro de un polígono regular equidista de sus lados.

Radio de un polígono regular, es la recta que une el centro con uno de sus vértices.

Apotema de un polígono regular, es la recta que une el centro con el punto medio de uno de sus lados.

OA, OB, OC..... son radios del polígono

OM, ON, OP..... son apotemas del polígono

Una línea quebrada, cuyos lados y ángulos son iguales, es una *línea quebrada regular*.

Dos ó más lados contiguos de un polígono regular, *forman una línea quebrada regular*.

Así ABCDE (fig. 203), es una línea quebrada regular.

206. COROLARIO: *Todo polígono regular, se puede inscribir en un círculo, y circunscribir á otro.*

En efecto; puesto que el punto O, centro del polígono regular ABCD..... equidista de todos los vértices; si hacemos centro en O y con una abertura de compás OC igual al radio del polígono trazamos una circunferencia, ésta pasará por todos los vértices A, B, C, D....., y tendremos el polígono inscripto en el círculo.

Si hacemos ahora centro en O y con un radio igual á ON apotema del polígono, trazamos una circunferencia, ésta pasará por los puntos M, N, P, Q.... y tendremos el polígono circunscripto al círculo.

COROLARIO: *Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados ABCDE, A'B'C'D'E'*, (fig. 204), *son proporcionales á sus radios y apotema.*

En efecto; los triángulos AOB, A'O'B', son semejantes, por tener

$$\text{ángulo } OAB = O'A'B'$$
$$\text{ángulo } OBA = O'B'A$$

de donde

$$(a)\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'}\quad (b)\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{MO}{M'O'},\ (180)$$

Pero los polígonos son tambien semejantes y por serlo, sus perímetros serán proporcionales á sus lados homólogos; es decir (llamando P al perímetro del primero, y P' al del segundo).

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'} \quad (c)$$

y por tener las proporciones (*a*), (*b*), (*c*) la razon comun $\frac{AB}{A'B'}$, será

$$\frac{P}{P'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{MO}{M'O'}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

207. Se llama *línea convexa*, la que no puede ser cortada por una recta; más que en dos puntos.

TEOREMA CXIV

Toda línea cerrada que envuelve á una convexa cerrada, es mayor que ésta.

Es evidente, que hay infinitas líneas que encierran la porcion de plano ABCDE (fig. 205). Nos proponemos demostrar que la línea convexa ABCDE es la menor de todas.

En efecto; sea MNOPQ, una cualquiera de éstas, diferente de la ABCDE, y por consiguiente que envuelve ésta.

Trazando la ST que no corte á la ABCDE, tendremos evidentemente

$$STOPQ < MNOPQ,$$

y lo mismo se podrá decir de todas las demás que encierran la superficie dicha, excepto de la ABCDE. Es decir, que ABCDE, es entre las infinitas que encierran la mencionada porcion de plano, la única que no admite otra menor; luego ella es la menor; y por lo tanto toda línea cerrada que envuelve á la convexa ABCDE es mayor que ésta.

TEOREMA CXV

208. *Si se dividen en dos partes iguales los arcos AB, BC, CD,* (fig. 206) *correspondientes á los lados de un polígono regular inscripto ABCD........, y se trazan las cuerdas de los arcos parciales que resultan, se formará un nuevo polígono regular inscripto de doble número de lados que el anterior.*

En efecto; siendo el polígono ABCD........ regular é inscripto, los arcos AB, BC, CD........ serán iguales, y tambien lo serán los arcos AM, MB, BN, NC........, mitades de los anteriores.

Si trazamos las cuerdas de estos últimos, tendremos un polígono regular inscripto (200), y de doble número de lados que el anterior, por cuanto la circunferencia ha quedado dividida por los puntos A, M, B, N, C........ en doble número de partes iguales, que lo estaba por los puntos A, B, C, D........ C. C. E. E.

COROLARIO 1.° *El perímetro de un polígono ABCD........ inscripto en una circunferencia O, es menor que ésta. Y el perímetro de un polígono inscripto ABCD........ es menor que el perímetro del polígono inscripto AMBNC...... de doble número de lados que el anterior.* ~~(205)~~ 207

COROLARIO 2.° *Si imaginamos una serie de polígonos regulares inscriptos en un círculo, construidos como se indica en el anterior teorema; es decir tales, que cada uno tenga doble número de lados que el anterior, obtendremos polígonos, cuyos perímetros van creciendo, y que son siempre menores que la circunferencia* ~~(205)~~. *Como podremos prolongar la serie de estos polígonos indefinidamente, llegaremos á divisiones de la circunferencia menores que cualquier cantidad dada y con mayor razon á polígonos, cuyos lados, sean tambien menores que cualquier cantidad dada. Cuando el número de lados del polígono inscripto, sea infinito, se habrá confundido con la circunferencia.* 207

COROLARIO 3.° *Es facil de descubrir, que la apotema OH* (fig. 206), *del polígono regular inscripto ABCD........ es menor que la apotema OK del polígono regular inscripto BNCS........ de doble número de lados que el anterior, y que en todo polígono regular inscripto, la apotema es menor que el radio. De aquí se deduce, que los apotemas de los polígonos regular inscriptos, van creciendo á manera que se duplica el número de sus lados, y que cuando el número de éstos sea infinito; la apotema y el radio son iguales.*

Resulta pues que

La circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, cuyo número de lados se vá duplicando indefinidamente.

La circunferencia se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados.

TEOREMA CXVI

209. *Si se dividen en dos partes iguales los arcos M'N', N'S', S'P',.....* (fig. 206) *comprendidos por los ángulos de un polígono regular circunscripto A' B' C' D'........, y por los puntos de division B'', C'', D'', E''........ se trazan tangentes, se formará un nuevo polígono regular, circunscripto de doble número de lados que el anterior.*

En efecto; los arcos M'B'', B''N', N'C'', C''S'........, son todos iguales, por ser mitades de arcos iguales; luego (201) las tangentes trazadas por los puntos de division M', B'', N', C''. S'........ formarán un polígono regular. Además como cada arco M'N', N'S', S'P........ se ha dividido en dos partes iguales, la circunferencia ha quedado dividida en doble número de partes iguales, y el número de lados del nuevo polígono, será doble que el número de lados del primitivo.

COROLARIO. *El perímetro del polígono A'B'C'D'........ circunscripto á una circunferencia O' es mayor que ésta, y mayor tambien que el perímetro del polígono circunscripto de doble número de lados.*

TEOREMA CXVII

210. *Si se dividen en dos partes iguales los arcos AB, BC, CD......* (fig. 202) *correspondientes á los lados de un polígono regular inscripto ABCD......., y se trazan las tangentes de los puntos de division M, N, O, P........ se formará un polígono regular circunscripto A'B'C'D'........ del mismo número de lados que el anterior.*

En efecto; siendo iguales los arcos AB, BC, CD........ tambien serán iguales, arcos MN, NO, OB.......; de modo que los puntos M, N, O, P......., dividen en partes iguales la circunferencia O, por consiguiente (201) las tangentes trazadas por estos puntos, formarán un polígono regular circunscripto. Además los puntos M, N, O, P......... dividen la circunferencia en el mismo número de partes iguales que los A, B, C, D.......; luego el polígono circunscripto A'B'C'D'........ se compone del mismo número de lados que el inscripto ABCD........

COROLARIO 1.° *Los polígonos ABCD...... y A'B'C'D', tienen sus lados AB y A'B': BC y B'C'; CD y C'D'........ respectivamente paralelos; puesto que BC y B'C' son perpendiculares á ON, y lo mismo puede decirse de los demás lados.*

COROLARIO 2.° *Puesto que los tres puntos O, B, B' equidistan de M y N, extremos de la MN, los tres estarán situados en la perpendicular que pasa por el punto medio de la MN; es decir, que el centro O y los dos vértices B y B' están en una misma recta. Lo mismo puede decirse de los puntos O, C, C'; ODD'........*

TEOREMA CXVIII

211. *Dos circunferencias cualesquiera, son proporcionales á sus radios respectivos.*

En efecto; llamando C y C' á dos circunferencias cualesquiera y R, R', á sus radios respectivos, tendremos (204 corolario) puesto que (208 cor. 3.°) toda circunferencia puede considerarse como un polígono regular de infinito número de lados.

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$$

COROLARIO 1.° De la anterior proporcion se deduce

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Es decir, que la razon de una circunferencia y su diámetro, es la misma para todas las circunferencias, pues C y C' son dos circunferencias cualesquiera. Podremos pues sentar que

La razon de la circunferencia al diámetro, es un número constante,

Este número se representa por π, y es inconmensurable; (1)

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Estudiaremos despues el modo de calcularlo aproximadamente.

Conviene conocer los siguientes valores:

$$\pi = 3'14159\ 26535\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0'31830\ 98861\ldots.\ .$$

$$\text{Log. } \pi = 0'49714\ 98726\ldots\ldots$$

COROLARIO 2.° De la fórmula

$$\frac{C}{2R} = \pi, \qquad (a)$$

se deduce

$$C = 2\pi R, \qquad (b)$$

$$R = \frac{C}{2\pi}, \qquad (c)$$

La fórmula (b) *expresa, que conocido el radio, se halla la longitud de la circunferencia, multiplicando el doble de la longitud del radio, por el número* π

La fórmula (c) *expresa, que conocida la circunferencia, se halla la longitud del radio, multiplicando la mitad de la longitud de la circunferencia, por el número* $\frac{1}{\pi}$

COROLARIO 3.° *La fórmula*

$$C = 2\pi R \qquad \textit{expresa}$$

(1) Segun demostró Lambert en 1761.

que la longitud de toda la circunferencia (arco de 360°), es igual para un radio R, á $2\pi R$*; de donde*

longitud de la semicircunferencia (arco 180°) $= \pi R$ *y*

$$\text{longitud del arco } 1.^\circ = \frac{\pi R}{180}$$

Si llamamos L á la longitud de un arco de n grados, tendremos

$$L = \frac{\pi R n}{180} \quad (p)$$

y

$$n = \frac{180 L}{\pi R} \quad (q)$$

$$R = \frac{180 L}{\pi n} \quad (r)$$

Fórmulas con las que se calcula una cualquiera de las cantidades L, n, R, conociendo las otras dos.

TEOREMA CXIX

212. *Dos arcos correspondientes á ángulos iguales,* (1) *son proporcionales á sus radios.*

Sean dos arcos A y A', correspondiente cada uno de ellos á un ángulo de n grados, y sean R y R', sus radios respectivos; digo que

$$\frac{A}{R} = \frac{A'}{R'}$$

En efecto; puesto que (86) en un mismo círculo ó en círculos iguales, los ángulos centrales son proporcionales á sus arcos correspondientes, tendremos

$$\frac{\text{ángulo de } n \text{ grados}}{360^\circ} = \frac{A}{2\pi R};$$

(1) Estos arcos se llaman arcos semejantes.

$$\frac{\text{ángulo de } n \text{ grados}}{360^\circ} = \frac{A'}{2\pi R'},$$

de donde

$$\frac{A}{2\pi R} = \frac{A'}{2\pi R'},$$ ó

$$\frac{A}{R} = \frac{A'}{R'}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

Esta proposicion puede tambien enunciarse diciendo: *Dos arcos semejantes, son proporcionales á sus radios.*

CAPÍTULO VI

PROBLEMAS

PROBLEMA XXXVI

213. *Inscribir un exágono regular en un círculo.*

Supongamos resuelto el problema (fig. 207). Trazando por los extremos de uno de los lados AB, del exágono inscripto, los radios OA, OB, tendremos el triángulo OAB, en el que el ángulo O vale 60°, por ser el arco AB la sexta parte de la circunferencia. Los otros dos ángulos juntos OAB y OBA valdrán 180° — 60° = 120°; y como dichos dos ángulos son iguales, cada uno valdrá tambien 60°. El triángulo AOB, es pues equiángulo y por consiguiente equilátero;

luego AB *lado del exágono es igual al radio.*

Segun esto, si llevamos seis veces consecutivas el radio como cuerda sobre la circunferencia, ésta quedará dividida en seis arcos iguales. Trazando las cuerdas de estos arcos, tendremos el exágono regular inscripto.

PROBLEMA XXXVII

214. *Inscribir un triángulo regular ó equilátero en un círculo.*

Dividiremos la circunferencia en seis partes iguales (figura 208) AD, DB, BC..... como para inscribir un exágono regular; los arcos duplos de estos, AB, BF, FA, son cada uno la tercera parte de la circunferencia. Trazando sus cuerdas tendremos el triángulo regular inscripto ABF

COROLARIO 1.° Trazando el diámetro AC de uno de los vértices del triángulo, y uniendo por medio de la BC, el extremo C del diámetro, con otro vértice B de dicho triángulo; se habrá formado el triángulo rectángulo ABC. Ahora segun el teorema de Pitágoras será

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2};$$

y como AC es un diámetro, y BC es igual al radio, representando á éste por R, tendremos

$$AB = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3};$$

es decir que

$$AB = R\sqrt{3} \quad \text{ó} \quad \frac{AB}{R} = \sqrt{3}$$

COROLARIO 2.° Observemos que los puntos B y F, equidistan de los extremos del radio OC, luego BF divide al radio OC, en dos partes iguales, es decir que la apotema OM del triángulo equilátero inscripto ABF, es igual á la mitad del radio de la circunferencia

COROLARIO 3.° Si trazamos la OP que une el punto medio de AC y el punto medio de BC, OP será paralela, é igual á la mitad de AB. (175) Luego, la apotema del exágono regular inscripto, es igual á la mitad del lado del triángulo equilátero inscripto. Llamando a á esta apotema, será

$$a = \tfrac{1}{2} R\sqrt{3}$$

PROBLEMA XXXVIII

215. *Inscribir un cuadrilátero regular ó un cuadrado en un círculo.*

Trazando dos diámetros DB y AC (fig. 209) perpendiculares entre sí; los cuatro ángulos cuyo vértice es O, serán rectos y por lo tanto iguales; sus arcos correspondientes AB, BC, CD, DA, serán tambien iguales. Trazando pues las cuerdas de estos arcos, tendremos el cuadrado ABCD inscripto en el círculo.

COROLARIO. En el triángulo rectángulo AOB, segun el teorema de Pitágoras, tendremos

$$AB = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2},$$

y como AO y OB son radios, será

$$AB = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$

es decir que

$$AB = R\sqrt{2} \quad ó \quad \frac{AB}{R} = \sqrt{2} = 1.41.4.$$

ESCOLIO. Obsérvese, que el lado del triángulo equilátero y el del cuadrado inscriptos, son inconmensurables con el radio del círculo.

PROBLEMA XXXIX

No

216. *Inscribir un decágono regular en un círculo.*

Supongamos (fig. 210), que AB sea el lado del decágono regular inscripto. Trazando los radios OA y OB, y la bisectriz AC del ángulo A, tendremos, que

$$\text{ángulo } O = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

de donde

$$\text{ángulo } OAB + \text{ángulo } OBA = 144^\circ \quad \text{y}$$

$$\text{ángulo } OAB = 72^\circ \quad \text{ángulo } OBA = 72^\circ,$$

y por ser AC, bisectriz de A, será

$$\text{ángulo } OAC = \text{ángulo } CAB = 36^\circ.$$

Resulta pues, que en el triángulo OCA,

$$OC = CA,$$

y en el triángulo CAB

$$CA = AB;$$

es decir que

$$OC = CA = AB.$$

Ahora segun el teorema XCV,

$$\frac{AO}{AB} = \frac{OC}{CB} \text{ ó bien } \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{CB}$$

que expresa que OC es la parte mayor del radio dividido en media y extrema razon (197), y como CO es igual á AB lado del decágono, resulta que

El lado del decágono regular inscripto. es igual á la parte mayor del radio, dividido en media y extrema razon.

Para resolver pues, este problema, se dividirá el radio en media y extrema razon, y llevando la parte mayor diez veces consecutivas como cuerda sobre la circunferencia, ésta quedará dividida en diez arcos iguales, y trazando las cuerdas de estos arcos, tendremos el decágono regular inscripto.

COROLARIO. Inscripto un decágono regular en un círculo, se inscribirá fácilmente en pentágono regular.

PROBLEMA XL

217. *Inscribir un pentedecágono regular en un círculo.*

Tomemos la sexta parte de la circunfesencia trazando una cuerda AC igual al radio (fig. 211), desde el extremo C del arco AC, con un radio BC igual al lado del decágono regular inscripto, tomemos el arco BC que será igual á la décima parte de la circunferencia.

Ahora

$$\text{arco AB} = \text{arco ABC} - \text{arco BC}$$

ó $\text{arco AB} = \frac{1}{6}$ de la circunferencia $- \frac{1}{10}$ de la circunferencia,

y verificando la sustraccion del segundo miembro será

$$\text{arco AB} = \frac{1}{15} \text{ de la circunferencia.}$$

La cuerda AB, será pues el lado del pentedecágono regular inscripto. Llevando esta cuerda quince veces consecutivas sobre la circunferencia, ésta quedará dividida en quince partes iguales, y trazando las cuerdas de estos arcos, tendremos el pentedecágono regular inscripto.

ESCOLIO. De los teoremas CXV y CXVI, se deducen fácilmente procedimientos para inscribir ó circunscribir un polígono regular de doble número de lados, que otro ya inscripto ó circunscripto.

Y como sabemos ya inscribir en un círculo, un triángulo, un cuadrado, un pentágono, un exágono, un decágono y un pentedecágono regulares, podremos inscribir y circunscribir en un círculo, polígonos regulares de

12, 24, 48, 96......
8, 16, 32, 64......
10, 20, 40, 80......
30, 60, 120, 240......

lados.

PROBLEMA XLI

218. *Dado el lado de un polígono regular inscripto, calcular el lado del polígono regular de doble número de lados, inscripto en el mismo círculo.*

Sea MN (fig. 211) un lado de un polígono regular inscripto de n lados. Trazando el radio OT, perpendicular á la cuerda MN, ésta y el arco correspondiente MTN, quedarán divididos en dos partes iguales por dicho radio (58). Segun esto, la cuerda MT, será el lado del polígono regular inscripto de $2n$ lados. Se trata pues, de hallar el valor de MT en funcion de MN y del radio.

Puesto que el ángulo MOT es forzosamente agudo, en el triángulo MOT tendremos (184)

$$\overline{MT}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{TO}^2 - 2OT \,.\, OS.$$

Poniendo en esta igualdad R en vez de MO y OT será

$$\overline{MT}^2 = R^2 + R^2 - 2 \,.\, R \,.\, OS$$

de donde

$$MT = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \,.\, OS} \qquad ó$$

$$MT = \sqrt{2R^2 - 2R \,.\, OS} \qquad (a);$$

pero en el triángulo MOS

$$OS = \sqrt{R^2 - \overline{MS}^2} \qquad ó$$

$$OS = \sqrt{R^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{\overline{MN}^2}{4}}$$

y sustituyendo este valor de OS en la fórmula (α), tendremos

$$MT = \sqrt{2R^2 - 2R.\sqrt{R^2 - \frac{\overline{MN}^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{\frac{4R^2 - \overline{MN}^2}{4}}}$$

$$= \sqrt{R\left(2R - 2.\frac{\sqrt{4R^2 - \overline{MN}^2}}{2}\right)} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \overline{MN}^2}\right)} \text{ y}$$

haciendo MN = L y MT' = L', será

$$L' = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - L^2}\right)} \qquad (b)$$

fórmula que resuelve el problema propuesto.

PROBLEMA XLII

219. ***Dado el lado de un polígono regular inscripto, calcular el lado del polígono regular del mismo número de lados, y circunscripto al mismo círculo.***

Sea MN (fig. 211) un lado de un polígono regular inscripto, de n lados. Por T, punto medio del arco correspondiente MTN, tracemos la tangente PTQ, y prolonguemos los radios OM y ON, hasta que encuentren á dicha tangente, PQ será un lado del polígono regular circunscripto de n lados.

Se trata pues, de hallar el valor de PQ, en funcion de MN y del radio.

En los triángulos semejantes POQ, MON; tomando PQ y MN por bases, sus respectivas alturas serán TO y SO; segun lo dicho (180) será

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{TO}{SO}, \qquad \text{de donde}$$

$$PQ = \frac{MN \cdot TO}{SO},$$

y poniendo R en vez de TO, será

$$PQ = \frac{MN \cdot R}{SO} \qquad (K);$$

pero segun lo dicho en el párrafo anterior,

$$SO = \sqrt{R^2 - \frac{\overline{MN}^2}{4}}$$

Sustituyendo este valor de OS en la fórmula (K), será

$$PQ = \frac{MN\ .\ R}{\sqrt{R^2 - \frac{\overline{MN}^2}{4}}} = \frac{MN\ .\ R}{\sqrt{\frac{4R^2 - \overline{MN}^2}{4}}}$$

$$= \frac{MN\ .\ R}{\frac{\sqrt{4R^2 - \overline{MN}^2}}{2}} = \frac{2MN\ .\ R}{\sqrt{4R^2 - \overline{MN}^2}}$$

y sustituyendo L en vez de MN y L" en vez de PQ será

$$L'' = \frac{2L\ .\ R}{\sqrt{4R^2 - L^2}} \qquad (d),$$

fórmula que resuelve el pıoblema prupuesto.

PROBLEMA XLIII

220. *Calcular el valor de* π (1)
Si en la fórmula (a) (209 cor. 2)

$$\pi = \frac{C}{2R}$$

hacemos $R = 1$ se convierte en

$$\pi = \frac{C}{2}.$$

Lo que nos dice que π, es igual á la mitad de la circunferencia cuando el radio es igual á la unidad.

Todo se reduce pues, hallar valores aproximados en esta mitad de la circunferencia.

Sabemos (206) que los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, crecen á medida que se va duplicando el número de sus lados, aproximándose á la circunferencia que es límite de aquellos perímetros. El valor pues de cada uno de estos perímetros, será un valor aproximado de la circunferencia, y tambien el valor de cada semiperímetro será un valor aproximado de la semicircunferencia, es decir, un valor aproximado de π, cuando $R = 1$.

(1) Demostrado que π es un número inconmensurable, solo se pueden hallar sus valores aproximados.

Ahora sabemos que el lado del cuadrado inscripto es igual á $R\sqrt{2}$ y del exágono regular inscripto es igual á R, ó tomando R por unidad.

$$\text{Lado del cuadrado} = \sqrt{2}$$
$$\text{Lado del exágono} = 1$$

por consiguiente

$$\text{Semiperímetro del cuadrado inscripto} = 2\sqrt{2} = 2\text{'}8284.....$$
$$\text{Semiperímetro del exágono regular incripto} = 3.$$

Lo que nos dá los dos números 2'8284....... y 3; valores más ó menos aproximados de π.

Pero por medio de la fórmula (*b*) (218), sustituyendo en ella en vez de L, 3, y uno en vez de R, hallaremos el valor del lado del dodecágono regular inscripto, y multiplicando este valor por seis, mitad del número de lados, hallaremos el semiperímetro de dicho polígono, que será un valor de π más aproximado que 3, semiperímetro del exágono regular inscripto.

Del mismo modo que del semiperímetro del exágono, hemos pasado al semiperímetro del dodecágono; pasaremos del semiperímetro de éste al del polígono de 24, 48, 96...... lados; y del semiperímetro del cuadrado al del polígono de 8, 16, 32, 64....... lados.

Valores todos, cada vez más aproximados de π.

Verificando los cálculos necesarios, se llega á los siguientes resultados:

Número de lados	Semiperímetros	Número de lados	Semiperímetros
6............	3'00000	4,............	2'82842
12............	3'10582	8............	3'06146
24............	3'13262	16............	3'12144
48............	3'13935	32...,.........	3'13654
96............	3'14103	64............	3'14033
192............	3'14145	128............	3'14127

Ahora por medio de la fórmula (*d*) (219), conocido el lado de un polígono regular inscripto, podemos determinar el del polígono regular circunscripto del mismo número de lados que el anterior, y por consiguiente el semiperímetro del polígono circunscripto.

Haciendo los cálculos necesarios se obtiene 3'14188, valor del semiperímetro del polígono regular circunscripto de 192 lados.

Tenemos pues

Semiperímetro del polígono regular *inscripto* de 192 lados = 3'14145
Semiperímetro del polígono regular *circunscripto* de 192 lados = 3'14188

Y como (209 cor. y 208 cor. 1.º).

La circunferencia es menor que el perímetro de todo polígono circunscripto y mayor que el perímetro de todo polígono inscripto, tendremos

$$\pi > 3'14145$$
$$\pi < 3'14188$$

Por consiguiente

$$\pi = 3'141$$

con menos error de una milésima.

Se comprende sin dificultad, que se puede hallar un valor de π tan aproximado como se quiera. (1)

PROBLEMA XLIV

221. *Rectificar la circunferencia.*

En la circunferencia O (fig 212) se traza la cuerda EH, igual al radio, el diámetro AB perpendicular á dicha cuerda EH y la tangente del punto A limitada en C por la prolongacion del radio OE. Desde C se toman sucesivamente, y en direccion de CD, tres radios. Se une el extremo D del último radio con el extremo B del diámetro AB, y tendremos la recta BD, aproximadamente igual á la semicircunferencia rectificada.

En efecto; de la semejanza de los triángulos OAC, OFE, se deduce

$$\frac{CA}{EF} = \frac{AO}{FO}$$

de donde

$$CA = \frac{AO \cdot EF}{FO}$$

y como $FO = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$ (214 cor. 3.º) será

$$CA = \frac{R \cdot \frac{1}{2} R}{\frac{1}{2} R \sqrt{3}} = \frac{R \sqrt{3}}{3}$$

(1) Arquímedes partiendo del exágono, y deteniéndose en los polígonos inscriptos y circunscriptos de 96 lados, halló que π está comprendido entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{10}{70}$. El valor $3\frac{10}{70} = \frac{22}{7}$ muy usado, excede á π en menos de media milésima. Adriano Mecio calculó la razon $\frac{355}{113}$, cuyo error es menor que media millonésima.

Pero $AD = CD - CA = 3R - \dfrac{R\sqrt{3}}{3} = \dfrac{R(9 - \sqrt{3})}{3}$

Ahora en el triángulo rectángulo BAD, tendremos

$$BD = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{4R^2 + \left(\frac{R(9 - \sqrt{3})}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{R\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}}{3} = R \,.\, 3'141533, \text{ de donde}$$

$$BD = R \,.\, 3'141533,$$

valor que se diferencia de $\frac{1}{2}C = \pi R = R \,.\, 3'141592$, en 0'000059.

LIBRO IV

AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS

CAPÍTULO I

AREAS DE LOS POLÍGONOS

222. *Area* de una figura, es la medida de su extension superficial; es decir, el *número* que expresa la *razon* entre la superficie de la figura que se *mide*, y la *unidad* adoptada como medida.

La unidad para medir una superficie, debe ser otra superficie, y conviene que tenga la figura de *cuadrado*.

Las unidades superficiales adoptadas, son el metro cuadrado, el pié cuadrado, la legua cuadrada, etc.; es decir, cuadrados cuyos lados son unidades lineales.

Un cuadrado cuyo lado es una unidad lineal, es pues, una unidad superficial.

Si queremos medir una figura superficial, comparándola *directamente* con el cuadrado unidad, tropezaremos con dificultades casi insuperables, por lo que buscaremos otro procedimiento, segun el cual, para hallar las áreas de las figuras, bastará medir líneas.

Dos figuras que tienen la misma área, son *equivalentes*.

TEOREMA CXX

223. *Las superficies de dos rectángulos* $ABCD$, $A'B'C'D'$ (fig. 213) *de bases iguales* ($BC = B'C'$); *son proporcionales á sus alturas* AB *y* $A'B'$.

Distinguiremos dos casos: 1.º Que las alturas AB y A'B', sean conmensurables. 2.° Que dichas alturas sean inconmensurables.

Primer caso: Suponiendo que la medida comun de estas dos alturas, esté contenida cinco veces en la AB y cuatro en la A'B', y dividiéndolas respectivamente en cinco y cuatro partes iguales, cada una de estas partes será igual á la medida comun.

Si se toma ésta como unidad para medir ambas alturas AB y A'B', las medidas de ésta serán los números cinco y cuatro, y como (Arit. 343), la razon de dos cantidades es la misma que la de los números que las miden, será

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{5}{4} \quad (1).$$

Ahora si por los puntos de division, se trazan paralelas á BC en el primer rectángulo, y á B'C' en el segundo, ambos rectángulos quedarán divididos en rectángulos parciales todos superponibles. Si tomamos uno de estos rectángulos parciales por unidad para medir los rectángulos ABCD, A'B'C'D', tendremos por la misma razon que antes

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{5}{4} \quad (2)$$

Luego (Arit. 55) $\dfrac{ABCD}{A'B'C'D'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.

Segundo caso: Si los rectángulos ABCD, A'B'C'D' (fig. 214) cuyas bases son iguales, tienen las alturas AB, A'B', inconmensurables, podemos suponer dividida la A'B' en n partes iguales; y poniendo la *enésima* parte de A'B' todas las veces que se pueda sobre AB empezando por B, y suponiéndola contenida m veces; es decir, suponiendo que el mayor número de *enésimos* de A'B', contenidos en AB, sea m, el extremo de la última *enésima*, caerá en un punto P próximo á A; puesto que PA, ha de ser menor que dicha *enésima* parte de A'B'. Trazando ahora por P, la PQ, paralela á AD, formaremos un rectángulo PBCQ, que tiene su base igual á la del A'B'C'D', y su altura BP conmensurable con la altura B'A'. Segun el caso anterior tendremos

$$\frac{BPQC}{A'B'C'D'} = \frac{BP}{B'A'}.$$

Si á continuacion de P tomamos PP' igual á la *enésima* parte de A'B', trazamos la P'Q' paralela á AD, y prolongamos la CD hasta Q', formaremos un rectángulo P'BCQ' que se encuentra respecto del A'B'C'D', en el mismo caso que el BPQC, por consiguiente tendremos

$$\frac{\text{BP'Q'C}}{\text{A'B'C'D'}} = \frac{\text{BP'}}{\text{B'A'}}.$$

Ahora, á medida que n crece, P y P' se acercan á A, y las PQ y P'Q' á AD, de una manera indefinida. De modo que AB, es el límite superior de la variable BP, y el inferior de la variable BP', y tambien ABCD, es el límite superior del rectángulo PBCQ y el inferior del P'BCQ'.

Además,

$$\frac{\text{BP}}{\text{B'A'}} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{BP'}}{\text{B'A'}} = \frac{m+1}{n}$$

luego $$\frac{m}{n} < \frac{\text{BA}}{\text{A'B'}}, < \frac{m+1}{n}. \quad (a)$$

Tambien

$$\frac{\text{BPQC}}{\text{A'B'C'D'}} = \frac{m}{n} \quad \frac{\text{BP'Q'C}}{\text{A'B'C'D'}}, = \frac{m+1}{n}$$

Luego

$$\frac{m}{n} < \frac{\text{ABCD}}{\text{A'B'C'D'}} < \frac{m+1}{n} \quad (b)$$

Las limitaciones (a) y (b), prueban (Aritmética 343) que

$$\frac{\text{ABCD}}{\text{A'B'C'D'}} = \frac{\text{AB}}{\text{A'B'}}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO. Puesto que en dos rectángulos ABCD, A'B'C'D' (fig. 214) pueden tomarse indistintamente por bases ó alturas AB y BC, A'B' y B'C', podremos sentar que

Las superficies de dos rectángulos ABCD, A'B'C'D' de alturas iguales (BC = B'C') son proporcionales á sus bases BA y B'A'.

La base y la altura de un rectángulo, reciben el nombre comun de dimensiones.

TEOREMA CXXI

224. ***Las superficies de dos rectángulos cualesquiera ABCD, A'B'C'D'*** **(fig. 215),** ***son proporcionales á los productos de sus bases por sus respectivas alturas.***

En efecto; construyamos un tercer rectángulo A''B''C''D'', que tenga su base igual á la del primero (B''C'' = BC), y su altura igual á la del segundo (A''B'' = A'B').

Segun el teorema anterior tendremos

$$\frac{ABCD}{A''B''C''D''} = \frac{AB}{A''B''}, \text{ y } \frac{A''B''C''D''}{A'B'C'D'} = \frac{B''C''}{B'C'}$$

multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, resulta

$$\frac{ABCD \times A''B''C''D''}{A''B''C''D'' \times A'B'C'D'} = \frac{AB \times B''C''}{A''B'' \times B'C'}.$$

Suprimiendo en los dos términos de la primera razon el factor comun A''B''C''D'', y poniendo en la segunda en vez de B''C'' su igual BC, y en vez de A''B'' su igual A'B será

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{AB \times BC}{A'B' \times B'C'}. \quad \text{C. C. F. E. (1)}$$

TEOREMA CXXII

225. *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto; sea ABCD (fig. 216) un rectángulo, cuya área queremos determinar, y *abcd*, el cuadrado adoptado como unidad superficial.

Segun el teorema anterior, tendremos la proporcion

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{BC \times BA}{bc \times ba} \quad (a).$$

Pero el primer miembro de esta igualdad, es la *razon* entre la superficie del rectángulo ABCD, y el cuadrado *unidad abcd;* luego este primer miembro es el área del dicho rectángulo.

Ahora, si en el segundo miembro, tomamos por unidad lineal para medir las líneas BC, BA, *bc*, *ba*, el lado del cua-

(1) No debe perderse de vista, que AB, BC, A'B', B'C', representan los números abstractos que resultan de medir estas líneas con una misma unidad lineal.

drado unidad *abcd*, este segundo miembro se convierte en $\frac{BC \times BA}{1.1} = BC \times BA$, es decir, el número abstracto que resulta de multiplicar los números BC y BA. C. C. E. E.

Luego el área de un rectángulo, es igual al producto de los números que representan su base y su altura, medidas con el lado de la unidad superficial.

Lo que se expresa brevemente diciendo:

El área de un rectángulo, es igual al producto de su base por su altura.

COROLARIO. *El área de un cuadrado, es igual á la segunda potencia de su lado.*

Por eso á la segunda potencia de un número, se le llama tambien cuadrado.

Tambien suele llamarse rectángulo al producto de dos números.

TEOREMA CXXIII

226. *El área de un paralelógramo ABCD* (fig. 217), *es igual al producto de su base DC por su altura BN.*

En efecto; trazando desde los vértices A y B, las perpendiculares AM y BN á la base DC, y prolongando ésta hasta M, se forman los triángulos AMD, BNC iguales (132-4.º) por ser rectángulos y tener AD = BC y AM = BN (48).

Ahora, si del trapecio AMCB, se quita el triángulo AMD, queda el paralelógramo dado ABCD, y si de dicho trapecio se quita el triángulo BNC, queda el rectángulo AMNB, de donde

paralelógramo ABCD equivalente al rectángulo AMNB.

Además $\qquad DC = MN,$

pero

$$\text{área del rectángulo } AMNB = MN \times BN.$$

Luego

$$\text{área del paralelógramo } ABCD = MN \times BN = DC \times BN.$$

C. C. E. E.

TEOREMA CXXIV

227. *El área de un triángulo ABC* (fig. 218), *es igual á la mitad del producto de su base AC, por su altura BN.*

En efecto; trazando por el vértice B la BD paralela al lado opuesto AC, y por el vértice C la CD paralela al lado opuesto AB, dichas paralelas se encontrarán en un punto D, y tendremos el paralelógramo ABDC del que es mitad el triángulo ABC.

Ahora

$$\text{área del paralelógramo ABDC} = \text{AC} \times \text{BN}.$$

Luego

$$\text{área del triángulo ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{AC} \times \text{BN}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

228. COROLARIO 1.° Dos paralelógramos de bases y alturas iguales, son equivalentes.

COROLARIO 2.° Dos triángulos de bases y alturas iguales, son equivalentes.

COROLARIO 3.° Las áreas de dos triángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por su altura. Si tienen sus alturas iguales, son proporcionales á sus bases; y si tienen sus bases iguales, son proporcionales á sus bases.

En efecto; llamando T y T' á la área de dos triángulos cuyas bases y alturas respectivas son a, b y a', b', será

$$\text{T} = \tfrac{1}{2}\, a.b$$

$$\text{T}' = \tfrac{1}{2}\, a'.b',$$

de donde

$$\frac{\text{T}}{\text{T}'} = \frac{a.b}{a'.b'};$$

si $a = a'$ será

$$\frac{\text{T}}{\text{T}'} = \frac{b}{b'}$$

y si $b = b'$ será

$$\frac{\text{T}}{\text{T}'} = \frac{a}{a'}.$$

TEOREMA CXXV

229. *El área de un trapecio ABCD* (fig. 219), *es igual á la semisuma de sus bases* $\frac{1}{2}$ *(DC + AB), por su altura BR.*

En efecto; trazando la diagonal DB, se forman los dos triángulos ADB y DBC. Ahora

$$\text{área ADB} = \tfrac{1}{2}\,\text{AB.DS}$$
$$\text{área BDC} = \tfrac{1}{2}\,\text{DC.BR.}$$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades, será

$$\text{área del trapecio ABCD} = \tfrac{1}{2}\,\text{AB.DS} + \tfrac{1}{2}\,\text{DC.BR.}$$

Pero (48) $\quad \text{DS} = \text{BR}.$

Sustituyendo DS por BR en la igualdad anterior, tendremos

$$\text{área del trapecio ABCD} = \tfrac{1}{2}\,\text{AB . BR} + \tfrac{1}{2}\,\text{DC.BR}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(\text{AB} + \text{DC})\,\text{BR},$$

ó $\quad \text{área del trapecio ABCD} = \tfrac{1}{2}\,(\text{AB} + \text{DC}).\text{BR.}$

C. C. E. E.

COROLARIO. Puesto que (171 cor.) $\text{MN} = \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{DC})$; tendremos área del trapecio ABCD = MN.BR, luego

El área de un trapecio es igual á la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos, por la altura.

TEOREMA CXXVI

230. *El área de un polígono regular ABCDEF* (fig. 203), *es igual á la mitad del producto del perímetro, por la apotema.*

En efecto; trazando desde el centro O del polígono todos sus radios, quedará descompuesto en tantos triángulos OAB, OBC, OCD..... iguales todos entre sí, como lados tiene el polígono. Ahora el área de uno cualquiera de dichos triángulos OAB es igual á $\frac{1}{2}$ AB $\times$ OM.

El área del polígono ABCDEF será igual á la suma de las áreas de los triángulos en que se ha descompuesto, es decir, área ABCDEF $= \frac{1}{2}$ AB . MO $+ \frac{1}{2}$ BC . NO $+ \frac{1}{2}$ CD . PO.....

Pero las apotemas MO, NO, PO..... son todas iguales, de modo que será

área ABCDEF $= \frac{1}{2}$ AB . MO $+ \frac{1}{2}$ BC . MO $+ \frac{1}{2}$ CD . MO.....

y sacando en el segundo miembro fuera de un paréntesis el factor comun $\frac{1}{2}$ MO, será

área ABCDF $= \frac{1}{2}$ MO (AB $+$ BC $+$ CD....)

Llamando P al perímetro, y a á la apotema, será

área de un polígono regular $= \frac{1}{2} P \times a$. (k) C. C. E. E.

CorolARIO. Para hallar el área de un polígono irregular, bastará descomponerlo en triángulos, y sumar las áreas de estos triángulos.

CAPÍTULO II

ÁREAS DE LAS FIGURAS CIRCULARES

231. La porcion de círculo comprendido entre un arco AB (fig 221) y los radios OA y OB, que pasan por los extremos de dicho arco, es un *sector circular*.

La porcion de círculo comprendida entre un arco AB, y su cuerda AB, es un *segmento circular*.

La porcion de círculo comprendido entre dos circunferencias concéntricas, es una *corona circular*.

La porcion de corona circular limitada por dos radios OA y OB, es un *trapecio circular*.

TEOREMA CXXVII

232. *El área de un círculo, es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

En efecto; puesto que (208 cor. 3.°) la circunferencia se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados, su área se determinará del mismo modo que la del polígono regular.

Bastará sustituir en la fórmula (k) (230) en vez del perímetro P, la circunferencia C, y en vez de la apotema a, el radio R (puesto que (208 cor. 3.°) la apotema es igual al radio cuando el polígono regular tiene un número infinito de lados.)

Será pues

$$\text{área del círculo} = \tfrac{1}{2}\,C.R. \quad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO. Sustituyendo en esta fórmula en vez de C, su valor 2π R (211-cor. 2.°) será

$$\text{área del círculo} = \tfrac{1}{2}.2\pi\,R.R = \pi\,R^2$$

y llamando A, al área del círculo será,

$$A = \pi\,R^2 \quad (h)$$

fórmula que nos dá tambien

$$R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

TEOREMA CXXVIII

233. *El área de un* SECTOR *circular MON* (fig. 211), *es igual á la mitad del producto de su arco MN, por el radio ON.*

En efecto; discurriendo como en los párrafos (84, 85 y 86), demostraríamos, que dos sectores circulares, cuyos arcos tienen el mismo radio, son proporcionales á estos arcos; suponiendo un círculo O y un sector MON cuyo radio comun es ON, tendremos

$$\frac{\text{área del círculo O}}{\text{área del sector MON}} = \frac{\text{circunferencia del círculo O}}{\text{arco MN}}$$

Multiplicando los dos términos de la segunda razon, por $\frac{1}{2}$ ON será

$$\frac{\text{área del círculo O}}{\text{área del sector MON}} = \frac{\text{circunferencia del círculo O} \times \frac{1}{2}\,\text{ON}}{\text{arco MN} \times \frac{1}{2}\,\text{ON}}$$

Pero los numeradores de estas dos fracciones son iguales; luego forzosamente lo serán los denominadores; es decir que

$$\text{área del sector MON} = \tfrac{1}{2}\,\text{arco MN} \times \text{ON}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CXXIX

234. *El área de un* SEGMENTO *circular ABR* (fig. 207) *es igual al producto de la mitad del radio OB, por el exceso de su arco ARB, sobre AP, mitad de la cuerda de un arco duplo.*

En efecto; el segmento ABR, es igual al sector ARBO, menos el triángulo AOB; es decir

$$\text{área del segmento ARB} = \text{arco ARB} \times \tfrac{1}{2}\,\text{OB} - \text{AP} \times \tfrac{1}{2}\,\text{OB},$$

ó $$\text{área del segmento ARB} = \tfrac{1}{2}\,\text{OB}\,(\text{arco ARB} - \text{AP}),$$ y como

$$\text{AP} = \tfrac{1}{2}\,\text{AF}$$ será

$$\text{área del segmento ARB} = \tfrac{1}{2}\,\text{OB}\,(\text{arco ARB} - \tfrac{1}{2}\,\text{AF}).$$ C. C. E. E. (1)

COROLARIO. Facilmente se deduce de lo expuesto, que el área de una corona circular, es igual á la diferencia de las áreas de los círculos concéntricos; y que el área de un trapecio circular es igual á la diferencia de los sectores correspondientes.

CAPÍTULO III

COMPARACION DE LAS ÁREAS

L. 29

TEOREMA CXXX

235. *Las areas de dos triángulos ABC y DEC* (fig. 222) *que tienen un ángulo comun C, son proporcionales á los productos AC . BC y DC . EC, de los lados que en cada triángulo, forman el ángulo comun.*

En efecto; trazando la AE, tendremos los triángulos ABC y AEC, que tienen la misma altura, por lo que (228 cor. 3.°) serán proporcionales á sus bases BC y EC, es decir que será

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área AEC}} = \frac{\text{BC}}{\text{EC}}.$$

(1) La longitud del arco, dato necesario para hallar el área del sector, se determinará fácilmente conocido el radio y el número de grados, por medio de la fórmula (p) (211 cor. 3.°)

Pero los triángulos AEC y DEC que tienen tambien la misma altura, serán igualmente proporcionales á sus bases AC y DC, es decir que será

$$\frac{\text{área } AEC}{\text{área } DEC} = \frac{AC}{DC}.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, tendremos

$$\frac{\text{área } ABC \times \text{área } AEC}{\text{área } AEC \times \text{área } DEC} = \frac{BC.AC}{EC.DC};$$

y simplificando el primer miembro será

$$\frac{\text{área } ABC}{\text{área } DEC} = \frac{BC.AC}{EC.DC}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CXXXI

236. *Las áreas de dos triángulos semejantes ABC y A'B'C'* (fig.as 176 y 177), *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

En efecto; de la semejanza de los triángulos ABC y A'B'C', se deduce

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'},$$

y de la semejanza de los triángulos rectángulos, ABD y A'B'D', se deduce igualmente

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y tomando la mitad de los dos primeros términos de la proporcion que resulta, será

$$\frac{\frac{1}{2}\, AC.BD}{\frac{1}{2}\, A'C'.B'D'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CXXXII

237. *Las áreas de dos polígonos semejantes ABCDE, A'B'C'D'E';* (fig. 200) *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

En efecto; descomponiendo los polígonos en el mismo número de triángulos semejantes, y semejantemente dispuestos (190), trazando diagonales desde los vértices homólogos A y A', tendremos (236)

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área A'B'C'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

$$\frac{\text{área ACD}}{\text{área A'C'D'}} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}$$

$$\frac{\text{área ADE}}{\text{área A'D'E'}} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}$$

y como las segundas razones son iguales, lo son todas las de estas proporciones; y por consiguiente será

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área A'B'C'}} = \frac{\text{área ACD}}{\text{área A'C'D'}} = \frac{\text{área ADE}}{\text{área A'D'E'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

Pero de esta serie de razones iguales se deduce (Alg. 62)

$$\frac{\text{área ABC} + \text{área ACD} + \text{área ADE}}{\text{área A'B'C'} + \text{área A'C'D'} + \text{área A'D'E'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

ó $$\frac{\text{área del polígono ABCDE}}{\text{área del polígono A'B'C'D'E'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} \quad (m). \text{ C. C. E. E.}$$

COROLARIO. *Las áreas de dos polígonos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus diagonales homólogos.*

En efecto; de la semejanza de los triángulos ABC y A'B'C', se deduce

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'},\ \text{ó}\ \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2},$$

y como ésta proporcion y la proporcion (m) tienen una razon comun, se podrá formar la siguiente

$$\frac{\text{área del polígono ABCDE}}{\text{área del polígono A'B'C'D'E'}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}.\quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CXXXIII

238. *Las áreas de dos polígonos regulares semejantes ABCDE y A'B'C'D'E'* (fig. 204), *son proporcionales á los cuadrados de sus radios y á los cuadrados de sus apotemas.*

En efecto; de la semejanza de estos polígonos se deduce

$$\frac{\text{área del polígono ABCDE}}{\text{área del polígono A'B'C'D'E}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}\quad (a)$$

De la semejanza de los triángulos semejantes AOB y A'O'B'

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{AO}^2}{\overline{A'O'}^2},\quad (b)$$

y de la semejanza de los triángulos AOM y A'O'M',

$$\frac{\overline{AO}^2}{\overline{A'O'}^2}=\frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M'}^2}\quad (c)$$

Pero las razones de las tres proporciones (a), (b) y (c), son todas iguales, luego tendremos

$$\frac{\text{área del polígono ABCD}}{\text{área del polígono A'B'C'D'}}=\frac{\overline{AO}^2}{\overline{A'O'}^2}=\frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M'}^2}$$

C. C. E. E.

TEOREMA CXXXIV

239. *Las áreas de dos círculos, son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Sean C y C' dos círculos, y R, R', sus radios respectivos, tendremos

$$\text{área de C} = \pi R^2$$

$$\text{área de C'} = \pi R'^2$$

de donde

$$\frac{\text{área de C}}{\text{área de C'}} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} \quad \text{ó}$$

$$\frac{\text{área de C}}{\text{área de C'}} = \frac{R^2}{R'^2}. \quad \text{C. Q. E. E.}$$

240. *Dos sectores circulares*, cuyos arcos son semejantes, son tambien *semejantes.*

Dos segmentos circulares cuyos arcos son semejantes, son tambien *semejantes.*

TEOREMA CXXXV

Las áreas de dos sectores circulares semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Sean T y T' dos sectores circulares semejantes, A y A' sus arcos respectivos, y R, R' los radios de estos arcos. Tendremos (233)

$$\text{área T} = \tfrac{1}{2} A \,.\, R, \quad \text{área T'} = \tfrac{1}{2} A' \,.\, R' \quad \text{de donde}$$

$$\frac{\text{área T}}{\text{área T'}} = \frac{A \,.\, R}{A' \,.\, R'} \quad (a)$$

Pero como los arcos A y A', son tambien semejantes, será

$$\frac{A}{A'} = \frac{R}{R'} \quad (b)$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y simplificando, resulta

$$\frac{\text{área } T}{\text{área } T'} = \frac{R^2}{R^2}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CXXXVI

241. *Las áreas de dos segmentos circulares semejantes ABC, A'B'C'* (fig. 220), *son proporcionales á los cuadrados de sus radios OB, O'B'.*

En efecto; por ser semejantes los sectores OACB, O'A'C'B', tendremos

$$\frac{\text{área OACB}}{\text{área O'A'C'B'}} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{O'B'}^2}$$

y por ser semejantes los triángulos AOB y A'O'B', tendremos

$$\frac{\text{área AOB}}{\text{área A'O'B'}} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{O'B'}^2}.$$

De estas dos proporciones se deduce

$$\frac{\text{área OACB}}{\text{área O'A'C'B'}} = \frac{\text{área AOB}}{\text{área A'O'B'}} \quad \text{y de esta}$$

$$\frac{\text{área OACB} - \text{área AOB}}{\text{área O'A'C'B'} - \text{área A'O'B'}} = \frac{\text{área OACB}}{\text{área O'A'C'B'}} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{O'B'}^2}$$

de donde

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área A'B'C'}} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{O'B'}^2}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

£.30

TEOREMA CXXXVII

242. *El cuadrado construido sobre la hipotenusa CB* (figura 223) *de un triángulo rectángulo CAB, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos AB y AC.*

En efecto; construyendo cuadrados sobre la hipotenusa y sobre los catetos del triángulo réctángulo ABC, y trazando desde A la perpendicular AP á la hipotenusa, y prolongando dicha perpendicular hasta Q, el cuadrado CBER, construido sobre la hipotenusa, ha quedado dividido en los dos rectángulos PBEQ y PCRQ. Trazando las rectas CD y AE se forman los triángulos CBD y ABE, que son iguales por tener el

ángulo CBD = ángulo ABE

que se componen ambos de un recto, más el ángulo ABC, además el

lado BD = lado AB

y lado BC = lado BE,

por lados de un mismo cuadrado. Ahora, el área del triángulo CBD es equivalente á la mitad del área del cuadrado BDSA, por tener ambos la misma base y la misma altura. Y por la misma razon, el área del triángulo ABE equivalente á la mitad del área del rectángulo PBEQ, luego el área del cuadrado ABDS es equivalente al área del rectángulo PBEQ.

Del mismo modo se demostraria, que el área del cuadrado ACZT, es equivalente al área del rectángulo CPQR; por consiguiente, la suma de las áreas de los dos rectángulos PBEQ y PQRC que componen juntos el cuadrado CBER, construido sobre la hipotenusa, es equivalente á la suma de las áreas de los dos cuadrados SDBA y TACZ, construidos sobre los catetos. C. C. E. E.

OTRA DEMOSTRACION: Sea CAB (fig. 224) un triángulo rectángulo. Tomando en la prolongacion del cateto AB, una parte BD igual al otro cateto AC, y levantando por D una perpendicular DE á la BD, cuya perpendicular sea igual al cateto AB, tracemos la recta EB. Levantando ahora por los puntos C y E perpendiculares respectivamente á las BC y BE, dichas perpendiculares se encontrarán en un punto F, habiéndose formado el cuadrado CBEF cuyo lado es igual á la hipotenusa BC del triángulo CAB. Tracemos ahora la FK perpendicular á AD, y las CG y EH perpendiculares ambás á la FK. Facilmente se deduce de esta construccion, que CAB, BDE, FHE y FGC, son cuatro triángulos rectángulos iguales, y que CBEF, CGKA y HEDK, son cuadrados cuyos lados son respectivamente la hipotenusa CB, y los catetos AC, y AB.

Ahora, si del pentágono total CFEDA, quitamos los triángulos CAB y BDE, queda el cuadrado CFEB construido sobre la hipotenusa CB; y si del mismo pentágono total, quitamos los triángulos CGF y FHE, quedan los cuadrados CGKA, y HEDK, cuyos lados son los catetos del triángulo CAB.

Luego queda probado que el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo CAB, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

COROLARIO 1.º *El polígono construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los polígonos construidos sobre los catetos, si los tres polígonos son semejantes, y además la hipotenusa y los catetos, son lados respectivamente homólogos de los polígonos.*

En efecto, sean a, b y c la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo; P, P' P'', las áreas de los polígonos que tienen las condiciones del enunciado.

Por ser semejantes dichos polígonos, tendremos (237)

$$\frac{P}{a^2} = \frac{P'}{b^2} = \frac{P''}{c^2},$$

de aquí se deduce (Algebra, 62)

$$\frac{P' + P''}{b^2 + c^2} = \frac{P}{a^2}.$$

Pero (183) los denominadores de estas dos fracciones iguales, son iguales; luego forzosamente serán iguales los numeradores; es decir que

$$P = P' + P'' \quad \text{C. C. C. C.}$$

COROLARIO. *El círculo cuyo radio es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente, á la suma de los círculos cuyos radios son respectivamente los catetos de dicho triángulo.*

En efecto; sean R, R', R'', la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, las áreas de los círculos cuyos radios sean R, R', R'' serán πR^2, $\pi R'^2$, $\pi R''^2$. Ahora es evidente que

$$\frac{\pi R^2}{R^2} = \frac{\pi R'^2}{R'^2} = \frac{\pi R''^2}{R''^2};$$ pero de aquí se deduce

$$\frac{\pi R'^2 + \pi R''^2}{R'^2 + R''^2} = \frac{\pi R^2}{R^2},$$

y como $R'^2 + R''^2 = R^2$ (183), será

$$\pi R^2 = \pi R'^2 + \pi R''^2 \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CXXXVIII

243. *El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas, es equivalente, á la suma de los cuadrados construidos, sobre cada una*

de dichas rectas, más el duplo del rectángulo construido sobre las mismas.

En efecto; sean AB y CB, (fig. 225) estas dos rectas. Construyamos sobre su suma AC, al cuadrado AGEC; tracemos la BF perpendicular á AC y tomando AH = AB, tracemos la HD paralela á AC.

Del exámen de la figura se deduce facilmente la verdad del enunciado.

TEOREMA CXXXIX

244. *El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre cada una de dichas rectas, menos el duplo del rectángulo construido sobre las mismas.*

En efecto; sean AC y BC (fig. 226) estas dos rectas. Construyamos sobre la mayor AC el cuadrado AGEC, y sobre la menor BC el cuadrado BCLF. Tomemos GH igual á la menor y tracemos la HD perpendicular á AG, prolonguemos ahora la BF hasta R, y tendremos que AHRB, es el cuadrado construido sobre la diferencia de las dos rectas AC y BC, y que los rectángulos GEDH y RDLF están construidos sobre dichas dos rectas AC y BC.

Del exámen de la figura se deduce facilmente la verdad del enunciado.

TEOREMA CXL

245. *El rectángulo construido sobre la suma y la diferencia de dos rectas, es igual á la diferencia de los cuadrados construidos sobre dichas dos rectas.*

En efecto; sean AB y BC dos rectas, (fig. 227) sobre la AC, suma de dichas rectas, construyamos el rectángulo AHDC, cuyos lados sean AC suma de las rectas, y AH diferencia de las mismas, Prolonguemos AH y CD, de modo AG y CE sean iguales á la recta AB, tracemos la GE, y por el punto B, la BFperpendicular á la AC. Tendremos, que el rectángulo GFOH es igual al rectángulo FECB, por tener ambos los lados contiguos iguales respectivamente á AB y á BC.

Del exámen de la figura, resulta

$$HDCA = HOBA + ODCB = HOBA + FECB - FEDO$$

y como $FECB = GFOH$ será

$$HDCA = HOBA + GFOH - FEDO = GFBA - FEDO$$

Luego $HDCA = GFBA - FEDO.$ C. C. E. E.

CAPÍTULO IV

PROBLEMAS

PROBLEMA XLV

L. 31

246. *Reducir un polígono ABCDE* (fig. 228) *á otro equivalente que tenga un lado menos.*

Trácese una diagonal BD, que forme triángulo con dos lados del polígono, por el vértice C, trácese una paralela á la diagonal BD; prolónguese el lado ED, hasta que encuentre á dicha paralela, y únase el punto de interseccion H con el vértice B. El polígono ABHE es el polígono pedido.

En efecto; los triángulos BDC y BDH, son equivalentes por tener la misma base y la misma altura; luego

$$\text{ABDE} + \text{BCD} = \text{ABDE} + \text{BHD}, \text{ ó } \text{ABCDE} = \text{ABHE}.$$

C. C. E. E.

Corolario. La construccion anterior nos conducirá facilmente á resolver el siguiente problema:

Reducir un polígono cualquiera á un triángulo equivalente.

PROBLEMA XLVI

247. *Hallar un cuadrado que sea equivalente á un triángulo dado ABC* (fig. 229).

Llamando x al lado del cuadrado que se busca, tendremos

$$x^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{AC}.\text{BO} \quad \text{ó} \quad x^2 = \text{AC}.\tfrac{1}{2}\,\text{BO}.$$

Igualdad que expresa, que x es una media proporcional entre los factores AC y $\frac{1}{2}$ BO. La construccion será la expuesta (196, 2.ª construccion). Hallaremos el punto M, medio de la altura BO. Desde M tomaremos en la prolongacion de BO, una parte MN igual á la base AC del triángulo. Sobre MN como diámetro, trazaremos la semicircunferencia MRN trazaremos la MR, y esta recta será el lado del cuadrado que se busca, punto que (183, cor. 3.º, 2.º)

$$\overline{MR}^2 = MN.MO \quad ó \quad \overline{MR}^2 = AC \times \tfrac{1}{2} OB.$$

COROLÁRIO. La construccion anterior nos conducirá fácilmente á resolver los siguientes problemas:

Hallar un cuadrado quesea equivalente á un paralelógramo, á un trapecio, á un polígono regular.

Bastará hallar una media proporcional entre los dos factores del área de cada una de estas figuras; y esta media proporcional será el lado del cuadrado equivalente.

Para hallar un cuadrado equivalente á un polígono irregular, se reducirá previamente á triángulo equivalente y despues se reducirá este triángulo á cuadrado.

PROBLEMA XLVII

248. *Hallar un cuadrado equivalente á un círculo dado.*

Este problema de *la cuadratura del círculo*, no se puede resolver con exactitud; porque no se conoce el procedimiento para hallar una recta exactamente igual á la circunferencia rectificada; pero puede hallarse aproximadamente construyendo una media proporcional, entre el valor aproximado de la semicircunferencia rectificada (221), y el radio. Este medio proporcional, será el lado del cuadrado aproximadamente de igual área que el círculo dado.

PROBLEMA XLVIII

249. *Hallar un cuadrado igual á la suma de otros dos dados.*

La resolucion de este problema, se deduce facilmente del teorema CXXXVII. Bastará construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean respectivamente iguales á los lados de los cuadrados dados. La hipotenusa del triángulo construido será el lado del cuadrado suma.

El discípulo descubrirá facilmente la resolucion de los siguientes problemas:

1.° *Hallar un cuadrado igual á la diferencia de otros dos dados.*

2.° *Hallar un cuadrado, duplo, triplo, etc. que otro dado.*

3.° *Hallar un cuadrado cuya área sea la mitad que la de otro dado.*

4.° *Dados dos polígonos semejantes, hallar otro semejante á los dados, y cuya área sea igual á la suma ó á la diferencia de las áreas de dichos polígonos.*

5.° *Hallar un círculo, cuya área sea igual á la suma ó á la diferencia de otros dos dados.*

PROBLEMA XLIX

250. *Hallar un cuadrado cuya razon con otro dado ABCD,* (fig. 230) *sea igual á la razon de dos rectas dadas* m *y* n.

Sobre una recta indefinida, tomemos dos partes, MO y OP, una á continuacion de otra, é iguales respectivamente á las rectas dadas *m* y *n*. Sobre MP como diámetro, tracemos la semicircunferencia MNP. Por O levantemos la perpendicular ON al diámetro MP, hasta que encuentre en N á la semicircunferencia. Unamos N con M y P. Desde N tomemos en el cateto NM, NQ igual á AD lado del cuadrado dado. Por Q tiremos la QS paralela al diámetro MP, y NS, será el lado del cuadrado que se busca.

En efecto; sabemos (183, 3.°) que

$$\frac{\overline{MN}^2}{\overline{NP}^2} = \frac{MO}{OP}$$

Ahora de la semejanza de los triángulos MNP y QNS se deduce

$$\frac{\overline{MN}^2}{\overline{NP}^2} = \frac{\overline{NQ}^2}{\overline{NS}^2}, \quad \text{de donde}$$

$$\frac{\overline{NQ}^2}{\overline{NS}^2} = \frac{MO}{OP}, \quad \text{ó bien}$$

$$\frac{\overline{NQ}^2}{\overline{NS}^2} = \frac{m}{n},$$

y como $\overline{NQ}^2$ es igual al cuadrado dado, será

$$\frac{ABCD}{\overline{NS}^2} = \frac{m}{n}.$$

Luego el cuadrado NHTS construido sobre NS, es el cuadrado pedido.

El discípulo deducirá facilmente de esta construccion el procedimiento para resolver los siguientes problemas:

1.° *Construir un polígono semejante á otro dado, y cuya razon con éste sea la de las rectas* m *y* n.

2.° *Construir un círculo cuya razon con otro dado sea la recta de las rectas* m *y* n.

SEGUNDA PARTE

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

LIBRO I

DE LOS PLANOS

CAPÍTULO I

PERPENDICULARES Y OBLÍCUAS Á UN PLANO

251. Aunque un plano es (6) una superficie ilimitada, para representarlo sobre el papel ó el encerado, se considera solo una parte de él, comunmente en forma de paralelógramo.

Sabemos (6), que si una recta AB, (fig. 231), tiene dos puntos A y B comunes con el plano MN, toda la recta está situada en dicho plano.

Se concibe fácilmente una recta (fig. 232) que atraviese un plano PQ. En este caso la recta no tiene más que un punto O, comun con el plano PQ. (1)

Tambien se concibe sin dificultad una recta EF (fig. 233) y un plano RS, tales, que no tengan ningun punto comun, aun suponiéndolos ilimitados.

---

(1) Los planos representados en las láminas, se suponen transparentes, y las líneas que no deberian verse sin esta suposicion, se señalan con puntos.

Vemos pues, que una recta y un plano, puede tener tres posiciones distintas.

1.ª Cuando la recta tiene todos sus puntos en el plano (fig. 231).

2.ª Cuando la recta y el plano no tienen más que un punto comun (fig 232). En esta posicion la recta y el plano son secantes, y el punto comun se llama pié de la recta.

3.ª Cuando la recta y el plano no tiene ningun punto comun (fig. 233). En esta posicion, la recta y el plano son paralelas.

TEOREMA CXLI

252. *Tres puntos A, B, C,* (fig. 234) *no situados en línea recta, determinan la posicion de un plano.*

La demostracion de este teorema exige probar, que por dichos tres puntos siempre puede pasar un plano, y que no puede pasar más que uno.

Imaginemos un plano que pase por la recta indefinida AB, que une los puntos A y B. Es evidente, que el plano indefinido que pasa por la recta AB, girando al rededor de esta recta, pasará por todos los puntos del espacio; habrá pues una posicion de dicho plano que contendrá al punto C, y puesto que además pasa por la recta AB en todas sus posiciones, los tres puntos A, B y C, estarán en este plano. Luego por los tres puntos A, B y C siempre puede pasar un plano.

Supongamos ahora que por dichos tres puntos A, B, C, pasan dos planos distintos. Tracemos en uno de dichos planos las dos rectas indefinidas AC y BC que se cortan en C, y que dividen á dicho plano en cuatro ángulos.

Puesto que la recta AC tiene dos puntos A y C en ambos planos, toda ella estará situada en ambos planos; y como la BC tiene dos puntos B y C en ambos planos, toda ella se hallará tambien en ambos planos.

Ahora todo punto situado en el plano donde se trazaron las rectas AC y BC, estará ó en estas rectas indefinidas, en cuyo caso estará en ambos planos por estarlo las dos rectas, ó estará fuera de dichas rectas, en E por ejemplo. Trazando por E la recta ER que forme con la CF un ángulo ERC menor que el suplemento del DCR, cortará á las dos rectas

CD y CF, y los puntos H y R estarán en los dos planos; y por consiguiente toda la recta HR, y el punto E de esta recta estará en ambos planos. Es decir, que todo punto situado en uno de dichos dos planos estará forzosamente en el otro. Ambos planos se confunden pues, en uno solo. Luego por tres puntos no situados en línea recta, no puede pasar ~~poner~~ más que un plano.

COROLARIO 1.º *Dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

COROLARIO 2.º *Dos rectas paralelas determinan la posicion de un plano.*

COROLARIO 3.º *La interseccion de dos planos PQ y MN* (fig. 235) *es una línea recta AB*, pues de lo contrario, dichos planos tendrian tres puntos comunes no situados en línea recta, y por consiguiente se confundirian en un solo plano.

COROLARIO 4.º *Si una recta AB* (fig. 242) *resbala sobre otra MN de modo que en todas las posiciones AB, A'B', A''B''..... que toma en su movimiento permanezca paralela á su primera posicion AB, engendra un plano.*

En efecto; los planos AB B'A', AB B''A'', AB B'''A'''... que pasan por AB, y por cada una de las posiciones que ocupa esta recta al resbalar sobre la MN, pasan por las AB y MN, luego (cor. 2.º) todos estos planos se confunden en uno solo, y por consiguiente la AB en su movimiento engendra un plano.

ESCOLIO. Por una recta cualquiera AB (fig. 236) pueden pasar infinitos planos AE, AD, AC, AF..... y por un punto P de la AB se pueda trazar en *cada plano*, una perpendicular á dicha recta.

Sean PS, PR, PQ, PH..... estas perpendiculares.

Luego por un punto P de una recta AB, se pueden trazar á ésta infinitas perpendiculares en el espacio.

Debe observarse, que en cada plano que pasa por la recta AB, no se puede trazar á ésta, por un punto P situado en ella, más que una sola perpendicular. (9)

253. Si una recta que tiene un solo punto comun con un plano, es perpendicular á todas las rectas situadas en este plano, y que pasan por este punto, dicha recta es perpendicular al plano, y éste perpendicular á la recta.

Recta oblícua á un plano es la que tiene un solo punto comun con él, y no es perpendicular á dicho plano.

TEOREMA CXLII

Si una recta AO (fig. 237) *que tiene un solo punto O comun con un plano MN, es perpendicular á dos rectas cualesquiera OB y OD que pasan por O y están en dicho plano, será tambien perpendicular á otra recta cualquiera OC, que pase por O, y esté situada en el mismo plano.*

En efecto; trazando la BD secante de las tres rectas OB, OC y OD, prolongando la AO hasta A' de modo que A'O, sea igual á AO, y uniendo los puntos de interseccion B, C y D, con A y A', tendremos los triángulos BAD y BA'D que son iguales por tener el lado BD comun,

el BA igual al BA',

por oblícuas cuyos piés se apartan igualmente del pié O de la perpendicular; y el

AD igual al A'D,

por la misma razon. Además los triángulos ABC y A'BC tambien son iguales por tener el lado BC comun,

$$BA = BA',$$

$$\text{y ángulo } ABC = \text{ángulo } A'BC$$

por la igualdad de los triángulos ABD y A'BD. De aquí resulta CA = CA'; es decir, que C equidista de A y A'; y como O tambien equidista de A y A', OC será perpendicular á AO, ó AO perpendicular á OC. C. C. E. E.

COROLARIO. Puesto que lo que se ha demostrado para la recta OC, se demostraria del mismo modo para cualquier otra recta que pase por O y esté en el plano MN, resulta que

Si una recta que tiene un solo punto comun con un plano, es perpendicular á dos que pasan por su pié en el plano, es perpendicular á este plano.

TEOREMA CXLIII

254. *El lugar geométrico de todas las perpendiculares trazadas por un punto á una recta, es el plano perpendicular á esta recta por dicho punto.*

En efecto; sea el plano MN (fig. 238) perpendicular á la recta AB en el punto O. Vamos á probar:

1.° Que toda recta OP situada en el plano MN y que pasa por el pié O, de la recta AB, es perpendicular á la AB.

2.° Que toda recta OQ, que pasa por O, y no está situada en el plano MN, no es perpendicular á la recta á AB.

La primera proposicion se deduce de lo dicho. (253)

Para demostrar la segunda, contraria á la primera, hagamos pasar un plano por las AB y OQ, y sea OQ' la interseccion de este plano con el MN. Tendremos que las rectas OQ, OQ' y AB, están situadas en un mismo plano.

La OQ' es perpendicular á la AB, porque pasa por O, y está en el plano MN; luego la OQ no puede ser perpendicular á la AB.

Si pues, todas las rectas que pasan por el pié O de la AB, y están en el plano MN, son perpendiculares á la AB, y todas las que no están en el plano MN y pasa por O no son perpendiculares á la AB; *el plano MN perpendicular por O, á la AB, es el lugar geométrico de las perpendiculares á AB por el punto O.*

En virtud del principio (82) se pueden establecer las siguientes proposiciones recíprocas de las anteriores:

1.° *Toda perpendicular OQ á la AB, por el punto O está situada en el plano MN perpendicular á la AB por O.*

2.° *Toda recta OQ' que pasa por O, y no es perpendicular á la AB, no está en el plano MN perpendicular* a' *á dicha recta en O.*

TEOREMA CXLIV

255. *Por un punto O,* (fig. 237) *situado en un plano MN, siempre se puede trazar á éste una perpendicular, y no se puede trazar mas que una.*

Tracemos en el plano MN, una recta BD, que no pase por O, desde O una perpendicular OC á la BD, por C la CA perpendicular tambien á BD, y que forme el ángulo agudo OCA. Ahora, si en el plano OCA se traza la OA perpendicular á OC, dicha recta OA será perpendicular al plano MN.

En efecto; prolongando AO hasta A', de modo que A'O, sea igual á AO, y uniendo C y un punto D de la BD, con

A y A', como BD es perpendicular á CO y CA; será tambien perpendicular al plano AOC, por lo que dicha recta BD, será tambien perpendicular á CA' (253). Tendremos, que los triángulos rectángulos ACD, y A'CD, que tienen el cateto CD comun y el AC igual al A'C, serán iguales; serán pues iguales sus hipotenusas AD y A'D, de donde DO será perpendicular (24 cor.) á AA'. Si pues AA' ó AO es perpendicular á la OC y OD, lo será (253) al plano MN.

Luego por un punto situado en un plano, siempre se puede trazar una perpendicular.

Ahora, si por el punto O (fig. 239) suponemos dos perpendiculares OA y OB al plano MN, dichas rectas serán ambas perpendiculares á la interseccion ó traza PQ del plano de las OA y OB con el MN; lo que es imposible. (9)

Luego por un punto situado en un plano, no se puede trazar á éste más que una perpendicular.

TEOREMA CXLV

256. *Por un punto A, situado fuera de un plano MN,* (fig. 237), *siempre se puede trazar á éste, una perpendicular, y no se puede trazar más que una.*

Tracemos la AC perpendicular á una recta BD, situada en el plano MN. Por C y en el plano MN, tracemos la CO perpendicular tambien á BD; ahora en el plano de las AC y CO tracemos la AO perpendicular á CO. Esta será perpendicular al plano. Lo que se demuestra lo mismo que el teorema anterior.

Luego por un punto fuera de un plano, siempre se puede trazar á éste una perpendicular.

Ahora, si por el punto A' (fig. 239) suponemos dos perpendiculares A'O' y A'O'' al plano MN, dichas rectas, serán tambien perpendiculares (253) á la interseccion O'O'', del plano de las A'O' y A'O'' con el MN, lo que es imposible.

Luego por un punto situado fuera de un plano, no se puede trazar á éste más que una perpendicular.

TEOREMA CXLVI

257. *Si desde un punto A'* (fig. 239) *situado fuera del plano MN se tiran á éste la perpendicular A'O' y una*

oblícua cualquiera A'O''; la perpendicular, es más corta que la oblícua.

En efecto; en el plano A'O'O'', tenemos el triángulo rectángulo A'O'O'', cuya hipotenusa A'O'' es mayor que el cateto A'O'. C. C. E. E.

TEOREMA CXLVII

258. *Si desde un punto A'* (fig. 239) *situado fuera del plano MN, se trazan á éste la perpendicular A'O' y las oblícuas A'O'', AT, cuyos piés equidistan del pié O, de la perpendicular; dichas oblícuas son iguales.*

En efecto; en los planos A'O'O'' y A'O'T, tenemos los triángulos rectángulos A'O'O'' y A'O'T, iguales. Luego las hipotenusas A'O' y A'T, serán iguales. C. C. E. E.

TEOREMA CXLVIII

259. *Si desde un punto A' situado fuera de un plano MN, se trazan á éste las oblícuas, A'O'' y A'H cuyos piés O'' y H distan desigualmente del pié O' de la perpendicular, la oblícua A'H cuyo pié dista más, es la mayor.*

En efecto; en los planos A'O'O'', A'O'H, tenemos los triángulos A'O'O'' A'O''H. Tomando O'T igual á O'O'', y trazando la TA', será

$$A'H > A'T$$

y como $A'T = A'O''$

tendremos $A'H > A'O''$. C. C. E. E.

ESCOLIO. Los recíprocos de estos tres últimos teoremas, son verdaderos, y se demuestra como sus análogos X, XI y XII, de la Geometría plana.

COROLARIO 1.º *La distancia de un punto á un plano es la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.*

COROLARIO 2.º *Desde un punto situado fuera de un plano, se pueden tirar á éste, infinitas oblícuas iguales, y el lugar geométrico de los piés de estas oblícuas, es la* *circunferencia cuyo centro es el pié de la perpendicular y cuyo radio es la distancia del pié de la perpendicular al pié de una de las oblícuas iguales.*

TEOREMA CXLIX de las 3 perpendiculares

260. *Si desde el pié O* (fig. 240) *de la AO perpendicular al plano MN, se traza una perpendicular OB á una recta CD situada en dicho plano MN; la AB trazada desde B á un punto cualquiera A de la OA; es perpendicular á la CD.* BC

En efecto; tomando BD igual á DC, y uniendo C y D con O y A; tendremos OD = OC (16) y

AC = AD (258)

Si pues, A y B equidistan de C y D, AB será perpendicular á CD. C. C. E. E. v. Picatoste p. 141 otro enunciado

CAPÍTULO II

PARALELISMO EN EL ESPACIO

L. 33

TEOREMA CL

261. *Por un punto C* (fig. 241) *cualquiera del espacio, no situado en la recta AB, se puede trazar una paralela á ésta, y no se puede trazar más que una.*

En efecto; dos puntos A y B de la recta AB, y el punto C, determinan la posicion de un plano (252); por el punto C y en este plano, siempre se puede trazar á la AB, una paralela MN (33). Ahora cualquiera otra recta HP que pase por C, si está en el plano de las AB y MN, no puede (33) ser paralela á AB, y si no está en el plano ABC, HP es secante á este plano; de modo que las AB y HP no están en un mismo plano; luego no son paralelas (30).

TEOREMA CLI

262. *Si dos rectas AO y CB* (fig. 243) *son perpendiculares á un plano MN; dichas rectas son paralelas entre sí.*

En efecto; unamos los dos piés de estas perpendiculares, por medio de la recta OB, tracemos en el plano MN la DE perpendicular á la OB, unamos B con un punto A de la AO, y tendremos que las tres rectas CB, AB y OB son perpendiculares á la DE por el punto B. La CB por ser perpendicular al plano, la AB, en virtud de lo dicho (260), y la OB por construccion. Estas tres perpendiculares estarán situadas en un mismo plano (254) y en este plano está la AO; de modo que las AO y CB, están situadas en un mismo plano y además son perpendiculares á la OB (131); luego son paralelas entre sí. C. C. E. E.

TEOREMA CLII

263. *Si dos rectas AO y CB* (fig. 243) *son paralelas entre sí, y una de ellas AO es perpendicular al plano MN, la otra será tambien perpendicular á dicho plano.*

En efecto; si la BC no fuese perpendicular al plano MN, por el punto B podríamos trazar otra que lo fuese, que seria paralela á la AO segun el teorema anterior, y tendríamos por el punto B dos paralelas á la AO lo que es imposible. Luego la CB será forzosamente perpendicular al plano MN.

COROLARIO. *Si un plano es perpendicular á una recta, es tambien perpendicular á todas las paralelas á esta recta.*

TEOREMA CLIII

264. *Dos planos PQ y MN* (fig. 244) *perpendiculares una recta AB, son paralelos entre sí.*

En efecto; si dichos planos se encontraran, podrian trazarse desde un punto C de la arista comun, las rectas CA y CB situadas respectivamente en los planos MN y PQ, y por consiguiente (253) perpendiculares á la AB, lo que es imposible.

TEOREMA CLIV

265. *Si un plano CB* (fig. 245) *corta á otros dos paralelos MN y PQ; las intersecciones AB, CD de éstos, con el plano secante, son paralelas entre sí.*

En efecto; si las intersecciones AB y CD, no fuesen paralelas, se encontrarian puesto que están en un mismo plano, y en este caso se encontrarian tambien los planos MN y PQ que contienen dichas intersecciones, lo que es imposible, puesto que por hipótesis, dichos planos son paralelos.

TEOREMA CLV

266. *Si dos rectas AB y CD* (fig. 246) *son paralelas en el espacio á una tercera MN; dichas rectas AB y CD, son paralelas entre sí.*

En efecto; si imaginamos un plano perpendicular á la MN, éste será tambien perpendicular á la AB y CD (263); de modo que las AB y CD, serán perpendiculares á dicho plano; luego (262) serán paralelas entre sí.

TEOREMA CLVI

267. *Si una recta AB* (fig. 247) *es paralela á otra DC situada en un plano MN, será tambien paralela á este plano.*

En efecto; si la AB, no fuese paralela al plano MN, cortaria á este plano, y el punto comun entre la AB y el plano MN, ha de estar precisamente en el plano de las paralelas AB y CD, que es donde está la AB, y como el plano MN y el de dichas paralelas, no tienen más puntos comunes que los situados en la DC, el punto comun entre la AB y el plano MN, forzosamente habia de hallarse en la DC, lo que es imposible, pues suponemos paralelas las AB y DC.

TEOREMA CLVII

268. *Si la recta AB* (fig. 247) *es paralela al plano MN, y por un punto D de este plano se traza la DC paralela á la AB; la recta CD estará situada en el plano MN.*

En efecto; la interseccion del plano MN, con el plano de las paralelas AB y CD, pasará por D y estará situada en el plano MN. Ahora esta interseccion está situada en el plano de las paralelas AB y CD, y no puede encontrar á la AB por ser ésta paralela al plano MN; de modo que dicha interseccion es paralela á la AB y pasa por D; y como por D no puede pasar más que una paralela á la AB, dicha interseccion coincidirá con la DC paralela á la AB por hipótesis. Luego CD está situada en el plano MN.

COROLARIO. *Si una recta HP* (fig. 248) *es paralela á dos planos que se cortan; es paralela tambien á la interseccion MN de dichos planos.*

En efecto, segun el teorema anterior, si por el punto M se traza una paralela á la HP, dicha paralela, estará á la vez en el plano MB y en el NA; luego se confundirá con la interseccion MN.

TEOREMA CLVIII

269. *Si dos ángulos CAB, C'A'B'* (fig. 249) *situados en planos diferentes, tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en un mismo sentido; dichos ángulos son iguales y están situados en planos paralelos.*

Tomando AC igual á A'C', y AB igual á A'B', trazando CB y C'B', y uniendo por medio de rectas los puntos A, B y C, respectivamente con los A', B', C', tendremos (143) AA' igual y paralela á las CC' y BB'; de donde CC' y BB' son iguales tambien y paralelas; y por consiguiente CB igual y paralela á C'B'. Resulta que los triángulos ABC y A'B'C' tienen sus tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos homólogos CAB y C'A'B' son tambien iguales.

Además los planos CAB y C'A'B' son paralelos, porque el plano paralelo al A'B'C' trazado por A, debe pasar precisamente por B y C.

270. *Proyeccion de un punto* sobre un plano, es el pié de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

Proyeccion de una línea sobre un plano, es la línea formada por las proyecciones de los puntos de dicha línea sobre el plano.

La proyeccion del punto A (fig. 250) sobre el plano MN, es el punto A'.

La proyeccion de la recta AB, sobre el plano MN, es la línea formada por los puntos A'*b*'*a*'B', proyecciones respectivas de los puntos A *a*, *b*, B de la recta AB.

TEOREMA CLIX

271. *La proyeccion de una recta AB, sobre un plano MN, es una línea recta.*

En efecto; las rectas AA', *aa*', *bb*' BB'..... por ser perpendiculares al plano MN, son paralelas entre sí, y segun (252, cor. 3.°) están situadas todas en un mismo plano; de modo que la proyeccion de la AB sobre MN, formada por las proyecciones de los puntos de la AB sobre dicho plano, es precisamente la interseccion del plano AB' con el MN; luego es una línea recta.

Corolario. Como una recta queda determinada con dos de sus puntos, la proyeccion de la recta AB, sobre el plano MN, se hallará, determinando las proyecciones A' y B', de los extremos A y B de dicha recta, y uniendo por medio de una recta los puntos A' y B'.

El plano que contiene á una recta AB, y á la proyeccion A'B', se llama plano *proyectante*, y el plano MN, sobre el que se proyecta la recta AB, se llama plano *de proyeccion.*

272. Angulo de una recta AB, (fig. 251) con un plano MN, es el ángulo agudo BAC, que forma dicha recta con su proyeccion AC sobre el plano.

TEOREMA CLX

El ángulo BAC que forma la recta AB con su proyeccion AC sobre el plano MN, es menor que el formado por dicha recta AB, con cualquiera otro AD, que pasa por su pié A en dicho plano.

En efecto; tomando AD igual á AC, y uniendo B con D, será BD $>$ BC (257); luego (130) en los triángulos BAC y BAD, el ángulo BAD opuesto al lado BD, será mayor que el BAC opuesto al lado BC. C. C. E. E.

Angulo de dos rectas AB y CD (fig. 252) que no se cortan en el espacio, es el ángulo DEF formado por una de ellas CD y la EF paralela á la otra AB, y trazada por un punto E de la primera CD.

CAPÍTULO III.

ÁNGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

273. Dos planos NA y MB (fig. 248) que concurren en la MN, forman un *ángulo diedro*. Los dos planos NA y MB son las caras, y la recta MN comun á las dos caras, es la *arista* de dicho ángulo. Este se expresa diciendo, ángulo AMNB, es decir, con cuatro letras, una en cada cara y las dos de la arista en medio.

Las dos caras del ángulo AMNB, se consideran indefinidamente prolongadas.

Angulo diedro, es pues, la separacion ó abertura de dos planos que se encuentran en una recta.

Dos ángulos diedros que coinciden al superponerlos, son iguales.

Los ángulos CABD y DABE (fig. 236) que tienen la arista AB, y la cara AD comunes, y las otras dos caras AC y AE, á diferente lado de la cara comun AD, se llaman contiguos ó adyacentes.

Cuando un ángulo diedro, no tiene su arista comun con ningun otro, se le puede designar con las dos letras de su arista solamente. Así el ángulo AMNB (fig. 248) se expresa tambien diciendo ángulo MN.

ESCOLIO: Haciendo sobre los ángulos diedros, las mismas consideraciones que se hicieron en la geometría plana (8) deduciremos que

Un plano es perpendicular á otro, cuando forma con él dos ángulos diedros adyacentes iguales. Cada uno de estos ángulos adyacentes iguales, es un ángulo diedro recto.

Los ángulos MPQR y NPQR, (fig. 257) son rectos.

Un plano es oblícuo á otro, cuando forma con él dos ángulos adyacentes desiguales, de los que el uno que es mayor que un recto se llama obtuso, y el otro que es menor que un recto, se llama agudo.

De los ángulos adyacentes PMNS y SMNQ (fig. 248 bis) el primero es obtuso y el segundo es agudo. El plano MS es oblícuo al QP.

Por una recta QP, situada en un plano MN, (fig. 257) *no se puede trazar á éste más que un plano perpendicular PR.*

Todos los ángulos diedros rectos son iguales. Angulos diedros complementarios, son dos ángulos cuya suma es igual á un recto; y *ángulos diedros suplementarios*, dos ángulos cuya suma es igual á dos rectos.

Si dos ángulos diedros adyacentes, tienen sus caras no comunes en un mismo plano; son suplementarios, y recíprocamente.

La suma de todos los ángulos consecutivos, que se pueden formar al rededor de una arista, situada en un plano, y á un mismo lado de éste, es igual á dos rectos.

La suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar al rededor de una arista comun, es igual á cuatro rectos.

Angulos opuestos por la arista, son los que tienen las caras del uno prolongaciones de las caras del otro.

Los ángulos MABQ (fig. 235), y PABN, son opuestos por la arista.

Dos ángulos diedros opuestos por la arista, son iguales.

PLANO BISECTOR *de un diedro, es el que lo divido en dos iguales.*

274. Angulo rectilíneo correspondiente á un diedro AB (fig. 254) es el MON, formado por las dos perpendiculares MO y NO á la arista AB, por un mismo punto O de ésta y situadas una en cada plano.

TEOREMA CLXI

Si dos ángulos diedros CBAD y C'B A'D' (fig. 254) *son iguales, sus rectilíneos correspondientes MON y M'O'N' tambien serán iguales.*

En efecto: haciendo coincidir los diedros iguales C'A'B'D' y CABD, de modo que el punto O' caiga sobre el O, forzosamente coincidirán las perpendiculares O'M' con OM y O'N' con ON (9); luego los ángulos rectilíneos M'O'N' y MON son iguales. C. C. E. E.

TEOREMA CLXII

275. *Si los ángulos rectilíneos M'O'N' y MON* (fig. 254), *son iguales; los diedros C'B'A'D' y CBAD, tambien serán iguales.*

En efecto; haciendo coincidir los ángulos rectilíneos iguales M'O'N' y MON, coincidirán forzosamente las aristas A'B' y AB, (255) y tambien las caras A'D' con la AD, y la A'C' con la AC, (252, cor. 1.°); luego los ángulos diedros C'B'A'D' y CBAD, son iguales. C. C. E. E.

COROLARIO. *Si los ángulos diedros MPQA* (fig. 257), *y NPQA son rectos, sus rectilíneos correspondientes HOA y AOT tambien son rectos.*

En efecto; segun el teorema CLXI, si dichos diedros son iguales, sus rectilíneos correspondientes tambien lo serán, por consiguiente los adyacentes HOA y AOT, situados en el plano HTA son iguales; luego son rectos. C. C. E. E.

TEOREMA CLXIII

276. *Dos ángulos diedros CBAD y C'B'A'D'* (fig. 255), *son proporcionales á sus ángulos rectilíneos correspondientes PMQ y P'M'Q'.*

En esta demostracion distinguiremos dos casos:

1.° Que los ángulos rectilíneos PMQ y P'M'Q' sean conmensurables. 2.° Que sean inconmensurables.

Primer caso: Suponiendo que la medida comun de los ángulos PMQ y P'M'Q' sea el ángulo PMH y que esté contenido cuatro veces en el PMQ y tres en el P'M'Q'; si dividimos el primero en cuatro partes iguales, y el segundo en tres, cuatro será el número que mide el ángulo PMQ, y tres el que mide al ángulo P'M'Q', si tomamos por unidad dicha medida comun; y como (Arit. 343) la razon de dos cantidades, es la de los números que las miden con la misma unidad, será

$$(1) \quad \frac{\text{PMQ}}{\text{P'M'Q}} = \frac{4}{3}.$$

Si trazamos ahora los planos ABH, ABR, ABS, por la arista AB, y las rectas MH, MR, MS; y los planos A'B'H', A'B'R' por la arista A'B' y las rectas M'H', M'R', el diedro DABC habrá quedado dividido en cuatro partes, y el D'A'B'C' en tres partes todas iguales.

Tomando por medida una de estas partes, cuatro será el número que mide al diedro DABC, y tres el que mide al D'A'B'C', y (Arit. 343)

$$(2)\quad \frac{DABC}{D'A'B'C'} = \frac{4}{3}.$$

Como las proporciones (1) y (2), tienen una razon comun, tendremos

$$\frac{DABC}{D'A'B'C'} = \frac{PMQ}{P'M'Q'}$$

C. C. E. E.

Segundo caso: Que los rectilíneos POQ y P'O'Q' sean inconmensurables. Este caso se demuestra empleando los mismos razonamientos, que en el párrafo (86)

COROLARIO. *La medida de un ángulo diedro, es la misma, que la de su rectilíneo correspondiente.*

En efecto; si el ángulo CABD (fig. 256) se quiere medir tomando por unidad al recto C'A'B'D', su medida será el número abstracto expresado por la razon

$$\frac{CABD}{C'A'B'D'}$$

Ahora trazando los MOP y M'O'P' rectilíneos correspondientes á dichos diedros, tendremos (276)

$$\frac{CABD}{C'A'B'D'} = \frac{MOP}{M'O'P'}$$

Pero el primer miembro de esta igualdad, es la medida del diedro CABD, tomado por unidad el diedro recto; y el segundo la medida del MOP, (rectilíneo correspondiente al diedro CABD) tomado por unidad el ángulo rectilíneo recto.

Luego la medida de un diedro es la misma que la de su rectilíneo correspondiente.

TEOREMA CLXIV

277. *Si una recta AO* (fig. 257) *es perpendicular á un plano MN, todo plano PR que pase por dicha recta, será tambien perpendicular al plano MN.*

En efecto; trazando en el plano MN la HT perpendicular á la arista PQ por O pié de la perpendicular AO, se formarán los ángulos HOA y TOA rectos (253, 274) y rectilíneos correspondientes á los diedros adyacentes MPQR y NPQR; luego (275) éstos serán iguales y por consiguiente rectos (273 esc.); de modo que el plano PR es perpendicular al MN. C. C. E. E.

TEOREMA CLXV

278. *Si dos planos MN y PR* (fig 257) *son perpendiculares entre sí, y por un punto O de su interseccion, se traza una perpendicular OA á uno de los planos MN, dicha perpendicular estará situada en el plano PR.*

En efecto; si trazáramos en el plano PR, una perpendicular á la arista PQ por el punto O, dicha perpendicular formaria con la OT el rectilíneo correspondiente al diedro recto NPQR; seria pues perpendicular al plano MN; luego (255) se confundiria con la OA; y por consiguiente ésta estará en el plano PR. C. C. E. E.

COROLARIO. *Si dos planos OQ y OH* (fig. 258) *que se cortan, son perpendiculares á un tercero MN; la interseccion OA de los primeros, es perpendicular al tercero MN.*

En efecto; si por el punto O, se levanta una perpendicular al plano MN, ésta estará situada, segun el teorema anterior, en los dos planos OQ y OH, luego se confundirá con su interseccion OA.

279. Tres planos AOC, AOB y BOC (fig. 263) que concurren en un punto O, forman un ANGULO TRIEDRO. Los planos AOC, AOB y BOC, son sus caras ó *ángulos planos*. Las rectas OA, OB, OC, intersecciones de las caras, son las aristas, los diedros formados por las caras son los ángulos diedros del triedro, y el punto O, comun á las tres caras es el vértice del triedro.

Este se expresa por la letra O del vértice seguido de las letras A, B, C, situadas una en cada arista, ó tambien solo con la O letra del vértice.

Varios planos AOB, BOC, COD, DOF y FOA, que concurren en un punto O (fig. 259) forman un *ángulo* poliedro ó un ángulo sólido. Los planos AOB, BOC. . . son sus caras ó ángulos planos. Cada cara corta á las dos caras contiguas. Las rectas OA, OB, OC..... intersecciones de las caras son las aristas, los diedros formados por las caras consecutivas son los ángulos diedros del poliedro, y el punto O comun á todas las caras es el vértice del ángulo poliedro. Este se expresa por la letra del vértice O, seguida de las letras de las aristas A, B, C..... situadas una en cada arista, ó tambien solo con la O, letra del vértice.

Los ángulos poliedros pueden ser *convexos* ó *cóncavos*.

Cuando la seccion de la superficie de un ángulo poliedro, por un plano que corte á todas sus aristas es un polígono convexo, el poliedro es convexo; y cuando dicha seccion es un polígono cóncavo, el poliedro es cóncavo.

Aquí solo nos ocuparemos de los poliedros convexos.

Plano diagonal de un ángulo poliedro, es el plano que pasa por dos aristas no situadas en la misma cara.

El ángulo triedro es el más sencillo de los ángulos poliedros.

Si desde una arista de un ángulo poliedro se trazan planos diagonales á las demás aristas, quedará descompuesto en tantos ángulos triedros como caras tiene el ángulo poliedro menos dos. Si desde una recta interior al ángulo poliedro, y que pase por el vértice de éste, se trazan planos á todas las aristas, el ángulo poliedro queda dividido en tantos triedros como caras tiene.

Dos ángulos triedros que pueden coincidir por superposicion, son *iguales*.

Dos ángulos triedros, en los que las aristas del uno son prolongaciones de las aristas del otro, son *simétricos*.

Dos ángulos triedros en los que los ángulos planos de cada uno, son suplementos respectivamente de los ángulos diedros del otro, son *suplementarios*.

TEOREMA CLXVI

280. *En todo ángulo triedro OABC* (fig. 260), *un ángulo plano cualquiera AOC, es menor que la suma de los otros dos AOB y BOC; y mayor que su diferencia.*

Suponiendo que el ángulo AOC, es mayor que cada uno de los otros dos del triedro O, (pues en otro caso el teorema no exigiría demostracion), tomemos en él una parte DOC igual al BOC, tracemos la recta AC que cortará á la OD, tomemos OB igual á OD, y unamos por medio de rectas el punto B con los A y C. Los triángulos DOC y BOC, que tienen el lado OC común, OD igual á OB y el ángulo DOC igual al BOC serán iguales, y por consiguiente tendrán iguales los lados homólogos CD y CB. Ahora en el triángulo ACB, tendremos

$$AC < AB + BC$$

restando del primer miembro de esta desigualdad DC, y del segundo BC, que son rectas iguales, resultan

$$AD < AB.$$

Pero los triángulos AOD y AOB, tienen AO comun, OD y OB iguáles, y segun se acaba de probar AB mayor que AD; luego (130) tendremos

$$\text{ángulo } AOD < \text{ángulo } AOB.$$

Añadiendo al primer miembro de esta igualdad DOC y al segundo BOC, que son ángulos iguales, resultan

$$AOC < AOB + BOC$$

que demuestra la primera parte del teorema.

La segunda se deduce facilmente de ésta. (115)

TEOREMA CLXVII

281. *La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo O* (fig. 261), *es menor que cuatro rectos.*

Trazando un plano que corte todas sus aristas, las intersecciones de este plano con las caras del polígono, formarán el polígono convexo ABCDE.

Llamando n al número de caras del ángulo poliedro, el polígono formado por las intersecciones del plano secante, tendrá tambien n lados. Uniendo un punto interior O' de dicho polígono, con sus vértices, se formarán n triángulos cuyo vértice comun es O', y cuyas bases son respectivamente las mismas que las de los n triángulos cuyo vértice comun es O; bases que son los lados del polígono ABCDE.

Ahora si en los triángulos cuyo vértice comun es O, llamamos V á la suma de los ángulos de sus vértices, y B á la suma de los ángulos de sus bases; y en los triángulos cuyo vértice comun es O', llamamos tambien V' á la suma de los ángulos de sus vértices, y B' á la suma de los ángulos de sus bases, tendremos

$$B + V = B' + V'$$

Pero, segun el teorema anterior, en cada uno de los triedros A, B, C..... las sumas de los dos ángulos de los triángulos cuyo vértice comun es O, es mayor que la suma de los dos ángulos de los triángulos cuyo vértice comun es O', y que concurren á formar con los anteriores los respectivos triedros; tendremos pues en la igualdad

$$B + V = B' + V'$$

$$B > B';$$

luego forzosamente será

$$V < V'$$

y como

$$V' = 4 \text{ rectos},$$

resulta

$$V < 4 \text{ rectos}. \qquad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO. La suma de los tres ángulos planos de un triedro es menor que cuatro rectos.

TEOREMA CLXVIII

282. *Si desde un punto O'* (fig. 262) *situado en el interior de un triedro O, se trazan las rectas O'A', O'B', O'C' respectivamente perpendiculares á las tres caras de dicho triedro, el triedro O'A'B'C' determinado por dichas perpendiculares, y el triedro primitivo O, son suplementarios.*

En efecto; sean A', B' y C' los piés de las perpendiculares trazadas desde O', y AA', y AB'; BB' y BC', CC' y CA', las intersecciones de las caras del triedro O' con las del triedro O.

El plano A'O'B' será perpendicular (277) á los planos AOC y AOB, y por consiguiente (278 cor.) la arista OA será perpendicular al plano A'O'B', el ángulo A'AB' será pues el rectilíneo correspondiente al diedro cuya arista es OA; y en el cuadrilátero AA'O'B', que tiene los ángulos A' y B' rectos, los O' y A serán suplementarios; luego el ángulo plano A'O'B', es suplementario del diedro COAB.

Del mismo modo se demostraría que los otros dos ángulos planos del triedro O' son suplementarios respectivamente de los otros dos diedros del triedro O.

Ahora, siendo la arista OA perpendicular al plano A'O'B' é igualmente la arista OC perpendicular al plano A'O'C' y la arista OB perpendicular tambien al plano B'O'C'; en el cuadrilátero AOCA', los ángulos A y C son rectos, por lo que los O y A' serán suplementarios, y como el A' es el rectilíneo correspondiente al diedro cuya arista es A'O', resulta que el ángulo plano COA es suplementario del diedro AA'O'C.

Del mismo modo se demostraria que los otros dos ángulos planos del triedro O, son suplementarios respectivamente de los otros dos diedros del triedro O'.

Luego los triedros O y O' son suplementarios.

TEOREMA CLXIX

283. *La suma de los tres ángulos diedros de un triedro, es mayor que dos rectos y menor que seis.*

En efecto; llamando A, B y C, á los tres diedros de un triedro, y a, b y c á los ángulos planos de un triedro suplementario al primero, segun el teorema anterior, tendremos

$$A + a = 2 \text{ rectos}$$
$$B + b = 2 \text{ rectos}$$
$$C + c = 2 \text{ rectos}$$

de donde

$$A + B + C = 6 \text{ rectos} - (a + b + c).$$

Ahora, puesto que (281 cor.)

$$a + b + c \begin{matrix} < 4 \text{ rectos} \\ > \text{cero} \end{matrix}$$

forzosamente se deduce de la anterior igualdad, que

$$A + B + C \begin{matrix} > 2 \text{ rectos} \\ < 6 \text{ rectos.} \end{matrix}$$

C. C. E. E.

284. Dos ángulos triedros, que pueden coincidir por superposicion, son iguales.

TEOREMA CLXX

284 *Si dos triedros O y O'*, (fig. 263) *tienen un ángulo diedro igual (OA = O'A'), respectivamente iguales las caras que lo forman (AOC = A'O'C y AOB = A'O'B') y además colocados del mismo modo, dichos triedros son iguales.*

En efecto; colocando los triedros O y O' de modo que coincida el ángulo plano A'O'C' con el AOC, la cara A'O'B' caerá sobre la AOB, por la igualdad de los diedros A'O' y AO, y como además el ángulo plano A'O'B' es igual al AOB, la arista O'B' coincidirá con la OB, de modo que han coincidido las tres aristas; y por consiguiente han coincidido las caras y los ángulos diedros de los triedros.

TEOREMA CLXXI

285. *Si dos triedros O y O'* (fig. 263) *tienen una cara igual (AOC = A'O'C'), iguales respectivamente, los diedros adyacentes á dichas caras (AO = A'O', CO = C'O') y colocados del mismo modo, dichos triedros son iguales.*

En efecto; colocando los triedros O y O' de modo que coincida el ángulo plano A'O'C' con el AOC, la cara A'O'B' caerá sobre la AOB, por la igualdad de los diedros A'O' y AO; y la cara B'O'C' caerá tambien sobre la BOC por la igualdad de los diedros O'C' y OC, y por lo tanto la arista O'B' coincidirá con la OB; de modo que han coincidido las tres aristas, y por consiguiente han coincidido las caras y lo ángulos diedros de los triedros.

TEOREMA CLXXII

286. *Si dos triedros O y O'* (fig. 264) *tienen las tres caras del uno respectivamente iguales á las tres caras del otro (AOC = A'O'C', AOB = A'O'B'. BOC = B'O'C') y colocadas del mismo modo, dichos triedros son iguales.*

Si demostráramos que estos triedros tienen los diedros AO y A'O' iguales, como por hipótesis las caras que forman estos diedros son respectivamente iguales, tendríamos probada la igualdad de los triedros propuestos, en virtud de lo demostrado (284).

Para esto, tomemos en las aristas de dichos triedros las partes OA, OB, OC, O'A', O'B', O'C', todas iguales. Unamos en el triedro O los puntos A, B y C por medio de rectas; y hagamos lo mismo en el triedro O' con los puntos A', B' y C'. Tendremos

triángulo AOB = triángulo A'O'B'

triángulo AOC = triángulo A'O'C'

triángulo BOC = triángulo B'O'C',

y de estas igualdades deduciremos la igualdad de los triángulos ABC y A'B'C' (131, 3.°)

Ahora, tomando AM igual á A'M', y trazando por M y M' respectivamente los planos NMP y N'M'P' perpendiculares el primero á la arista AO, y el segundo á la arista A'O'; NMP y N'M'P' serán los rectilíneos correspondientes respectivamente á los diedros AO y A'O'.

El plano NMP, cortará precisamente los lados AB y AC, porque los ángulos AMN y AMP son rectos, y los NAM y PAM son agudos. Por la misma razon el plano M'N'P' cortará á los lados A'B' y A'C'

Además tenemos

triángulo AMN = triángulo A'N'M'

triángulo AMP = triángulo A'M'P'

por ser rectángulos y tener iguales los catetos AM y A'M', y los ángulos agudos en A y en A', de donde

$$\left.\begin{array}{l} MN = M'N' \\ MP = M'P' \end{array}\right\} (a)$$

y tambien
$$\left.\begin{array}{l} AN = A'N' \\ AP = A'P' \end{array}\right\}$$

Pero como además tenemos

ángulo CAB = ángulo C'A'B'

resulta que los triángulos PAN y P'A'N', son iguales, de donde

NP = N'P'.

Ahora de esta igualdad y de las igualdades (a) se deduce que el triángulo NMP es igual al N'M'P', y por consiguiente

ángulo NMP = ángulo N'M'P'.

Pero como estos son los rectilíneos correspondientes á los diedros AO y A'O', resulta que éstos tambien son iguales; y por consiguiente queda demostrado el teorema.

TEOREMA CLXXIII

287. *Si dos triedros tienen los tres ángulos diedros del uno, respectivamente iguales á los del otro, y colocados del mismo modo, dichos triedros son iguales.*

En efecto; dos ángulos triedros suplementarios de los propuestos serán iguales por tener sus tres caras respectivamente iguales (279) y si son iguales tendrán tambien iguales sus ángulos diedros; luego las caras de los propuestos serán iguales respectivamente por suplementos de diedros respectivamente iguales; luego los ángulos triedros propuestos serán iguales. (286)

ESCOLIO. Observemos que los triedros simétricos OABC y OA'B'C' (fig. 265) no pueden en general coincidir por superposicion, pues haciendo girar el OC'B'A' al rededor de MN bisectriz del ángulo A'OC, de modo que el ángulo C'OA' coincida con el AOC como los diedros OA' y OC no son iguales, y tampoco lo son los OC' y OA, la arista OB' no coincidirá con la OB; y por consiguiente los triedros simétricos no son en general iguales. Pero si estos triedros fuesen isósceles, es decir si los diedros AO y CO fuesen iguales, y por consiguiente lo fuesen tambien OA' y OC', entonces al girar OA'B'C' al rededor de MN, al coincidir C'OA' con AOC la arista OB' coincidiria tambien con OB, y entonces dichos triedros serian superponibles y por lo tanto iguales.

LIBRO II

DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

CAPÍTULO I

DE LOS POLIEDROS

§ *I.—De los poliedros en general*

288. Un cuerpo geométrico limitado en todos sentidos por planos, ES UN POLIEDRO.

Al limitarse estos planos unos á otros, determinan polígonos que son las caras del poliedro, y cuyo conjunto es su superficie.

Las caras del poliedro, forman ángulos poliedros cuyas vértices, aristas y ángulos diedros, son los vértices aristas y ángulos diedros del poliedro. Un poliedro se expresa con las letras de sus vértices.

Diagonal de un poliedro, es la recta que une dos vértices que no están en una misma cara.

Los poliedros se clasifican segun el número de sus caras; pero reciben nombres particulares los siguientes:

El poliedro de	cuatro	caras se llama	tetraedro
»	seis	»	exaedro
»	ocho	»	octaedro
»	doce	»	dodecaedro
»	veinte	»	icosaedro

El poliedro cuya superficie no puede ser cortada por una recta en más de dos puntos, se llama *convexo*.

Poliedros iguales, son los que pueden coincidir por superposicion.

Los elementos que coinciden en la superposicion de dos poliedros iguales, se llaman *homólogos.*

Poliedros semejantes, son los que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales y colocados en el mismo órden, y además semejantes respectivamente las caras adyacentes á dichos diedros.

Los elementos que se corresponden en dos poliedros semejantes, se llaman *homólogos,*

El conjunto de las caras de un poliedro es su *superficie.*

Area de un poliedro, es la medida de su superficie.

Volúmen de un poliedro, es la medida de su magnitud.

§ *II.—De las pirámides*

289. Un poliedro OABCD, (fig. 266) cuyas caras son, un polígono cualquiera ABCD, y varios triángulos OAB, OBC, OCD, ODA, que tienen un vértice comun O, se llama PIRÁMIDE.

El polígono ABCD es la base, y las demás caras triangulares son las caras laterales. El vértice comun de los triángulos laterales, es el *vértice* ó cúspide de la pirámide.

La perpendicular OP, bajada desde el vértice á la base, es la altura de la pirámide.

Las pirámides se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales, exagonales, etc., segun que la base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, un exágono, etc.

La pirámide triangular, se llama tambien *tetraedro.*

La pirámide SMNQRT (fig 266) cuya base es un polígono regular, y cuyas aristas laterales SM, SN, SQ, SR, ST, son todas iguales, es una *pirámide regular.* La altura SZ de uno de los triángulos laterales se llama *apotema* de la pirámide.

La porcion de pirámide comprendida entre la base y un plano que corta todas las aristas laterales, se llama pirámide *trúncada* ó *tronco* de pirámide.

TEOREMA CLXXIV

290. *Si se corta una pirámide OABCD* (fig. 266) *por un plano A'B'C'D' paralelo á la base ABCD, se verifica:*

1.° *Que las aristas laterales y todas las rectas que bajan desde el vértice á la base, quedan divididas por el plano secante, en partes proporcionales.*

2.° *Que la base ABCD y la seccion A'B'C'D', paralela á la base, son polígonos semejantes.*

3.° *Que las áreas de la base y de la seccion paralela á ésta, son proporcionales á los cuadrados* $\overline{PO}^2$ *y* $\overline{P'O}^2$ *de sus distancias al vértice O.*

En efecto:

1.° De la semejanza de los triángulos

ODA y OD'A'
ODC y OD'C'
OCB y OC'B'
OBA y OB'A'
OAP y OA'P'

resulta

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AO}{OA'} = \dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{OD}{OD'} \\[2ex] \dfrac{OD}{OD'} = \dfrac{DC}{D'C'} = \dfrac{OC}{OC'} \\[2ex] \dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{CB}{C'B'} = \dfrac{OB}{OB'} \\[2ex] \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{OA}{OA'} \\[2ex] \dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{AP}{A'P'} = \dfrac{OP}{OP'} \end{array}\right\} (K)$$

De donde $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OD}{OD'} = \dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{OP}{OP'}$

C. C. E. E.

2.° Los polígonos ABCD y A'B'C'D', tienen sus ángulos respectivamente iguales (269); y además tienen los lados proporcionales, puesto que de las series de razones iguales (K) se deduce

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Luego son semejantes. C. C. E. E.

3.° De lo dicho (237) se deduce

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

Pero como (K)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OP}{OP'} \text{ será } \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP'}^2}$$

y por consiguiente

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP'}^2}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

291. *Si dos pirámides $SMNQRT$, $OABCD$* (fig. 266) *tienen las alturas iguales ($SH = OP$) las áreas de sus respectivas bases son proporcionales á las áreas de las secciones $M'N'Q'R'T'$, $A'B'C'D'$, paralelas á dichas bases y equidistantes de ellas.*

En efecto; segun el teorema anterior, tenemos

$$\frac{\text{área } MNQRT}{\text{área } M'N'Q'R'T'} = \frac{\overline{SH}^2}{\overline{SH'}^2}$$

y

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP'}^2}$$

y como por hipótesis

$$SH = OP \text{ y } HH' = PP'$$

será tambien

$$SH' = OP'$$

de modo que las segundas razones de las anteriores proporciones son iguales; y por consiguiente, podremos formar la siguiente proporcion

$$(a) \quad \frac{\text{área } MNQRT}{\text{área } M'N'Q'R'T} = \frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO. *Si dos pirámides SMNQRT y OABCD, (fig. 266) de iguales alturas (SH = OP) tienen las bases equivalentes, las secciones M'N'Q'R'T', A'B'C'D' paralelas á dichas bases, y equidistantes de ellas, tambien serán equivalentes.*

En la anterior proporcion (a) los antecedentes son iguales, luego forzosamente lo serán los consecuentes. C. C. E. E.

§ *III.—De los prismas*

292. Un poliedro AD' (fig. 267) cuyas caras son: dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E', iguales y paralelos, y varios paralelógramos AE', ED'....., se llama PRISMA.

Las dos caras iguales y paralelas, se llaman *bases*, y la distancia entre éstas, *altura*.

Los prismas se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales....., segun que sus bases sean triángulos, cuadriláteros pentágonos.....

Las rectas AA', BB', CC'..... que unen los vértices de una base con los de la otra, se llaman *aristas laterales*. Cuando éstas son perpendiculares á las bases, el prisma es *recto*, y las caras laterales son rectángulos; y cuando son oblícuas á las bases, el prisma es *oblícuo*, y las caras laterales, no son rectángulos.

Un prisma AC' (fig. 278) cuyas bases son paralelógramos, se llama PARALELEPÍPEDO. En éste, todas las caras son paralelógramos.

Un paralelepípedo, que tiene por bases dos rectángulos y además es recto, se llama *paralelepípedo rectángulo*.

Un paralelepípedo rectángulo, cuyas bases y caras laterales son cuadrados, se llama CUBO.

Todas las caras del cubo son cuadrados iguales, y por consiguiente serán tambien iguales todas sus aristas.

Seccion recta de un prisma, es la seccion perpendicular á las aristas laterales.

La porcion de prisma comprendida entre una de las bases, y un plano oblícuo á ésta, se llama *prisma truncado* ó tronco de prisma.

TEOREMA CLXXV

293. *Si dos prismas rectos AD' y MP'* (fig. 267) *tienen las bases y las alturas iguales, ($A'B'C'D'E' = M'N'O'P'Q'$ y $A'A = M'M$), son iguales.*

En efecto; poniendo el prisma AD', sobre el MP', de modo que la base A'B'C'D'E' del primero se confunda con la base M'N'O'P'Q' del segundo, las aristas A'A, B'B, C'C.... tomarán la misma direccion que las aristas M'M, N'N, O'O... (255), y como además son iguales, los vértices A, B, C... coincidirán con los M, N, O..... y por consiguiente los prismas habrán coincidido. C. C. E. E.

TEOREMA CLXXVI

294. *Si se corta un prisma $A'C$* (fig. 268) *por un plano paralelo á las bases, la seccion que resulta, $A''B''C''D''$, es igual á las bases.*

En efecto; los polígonos ABCD y A''B''C''D'' tienen sus lados y sus ángulos respectiva y ordenadamente iguales, luego son iguales. C. C. E. E.

CAPÍTULO II

DE LOS CUERPOS REDONDOS

§ *1.—Del cono y del cilindro de revolucion*

295. Si imaginamos que el triángulo rectángulo AOB (fig. 269) gira al rededor del cateto AO hasta volver á tomar su posicion primitiva, despues de haber dado una vuelta

completa, veremos que este triángulo ha engendrado en su movimiento de rotacion un cuerpo geométrico. Este cuerpo se llama CONO DE REVOLUCION.

En este movimiento de rotacion del triángulo rectángulo AOB, el cateto OB, engendra una figura plana (254) en la que B equidista en todas sus posiciones del punto O; por consiguiente el cateto OB engendra un círculo, que es la *base del cono*.

La hipotenusa AB, engendra una superficie curva, que es la *superficie lateral del cono*.

El cateto fijo AO, eje al rededor del cual ha girado el triángulo AOB, es la *altura del cono*.

El extremo A de la altura es el *vértice ó cúspide* del cono.

La hipotenusa del triángulo generador en cualquiera de sus posiciones, se llama *lado ó apotema* del cono. AB, AD, AC, son *apotemas* del cono.

Cono truncado ó trozo de cono, es la porcion del cono comprendida entre la base, y un plano que corta todos los lados del cono.

TEOREMA CLXXVII

296. *Si se corta un cono ACB* (fig. 269) *por un plano paralelo á la base, la seccion C'B'D' que resulta, es un círculo, cuyo centro está en el eje del cono.*

En efecto; de la semejanza de los triángulos

AOB y AO'B'
AOD y AO'D'
AOC y AO'C'

resultan las proporciones

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{OB}{O'B'}$$

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{OD}{O'D'}$$

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{OC}{O'C'}.$$

Todas estas proporciones tienen iguales respectivamente los tres primeros términos, luego los cuartos términos serán iguales; es decir, que tendremos

$$O'B' = O'D' = O'C'.....$$

Luego la seccion C'D'B' es una figura plana, cuyos puntos C', D', B',.... equidistan del O' situado en el eje. Luego dicha seccion es un círculo cuyo centro está en el eje del cono. C. C. E. E.

297. *Plano tangente* á un cono, es el determinado por una tangente á su base y el lado que pasa por el punto de tangencia.

El plano AST (fig. 269) es tangente al cono ACDB.

Si se inscribe en la base de un cono un polígono regular, y se hacen pasar planos por el vértice del cono, y cada uno de los lados del polígono inscripto, tendremos una pirámide regular *inscripta al cono*.

Si se circunscribe á la base de un cono de revolucion un polígono regular, y se hacen pasar planos por el vértice del cono y cada uno de los lados del polígono circunscripto, tendremos una pirámide regular *circunscripta al cono*.

Es evidente que la superficie lateral del cono, es mayor que la superficie lateral de la pirámide inscripta, y menor que la superficie lateral de la pirámide circunscripta.

Si tenemos una pirámide regular de n lados inscripta en un cono, é inscribimos en la base de éste un polígono regular de $2n$ lados (206), y trazamos planos por el vértice del cono y los lados de este polígono, tendremos una pirámide regular de $2n$ caras laterales inscripta en el cono.

Es evidente que el área lateral de la pirámide regular inscripta de *$2n$ caras laterales*, es mayor que el área lateral de la pirámide regular inscripta de *n caras laterales*, y menor que el área lateral del cono.

Ahora si imaginamos una serie de pirámides regulares inscriptas en un cono del modo que se ha dicho, en que se van duplicando el número de sus caras laterales, obtendremos pirámides, cuyas superficies laterales van creciendo, y que son siempre menores que la superficie lateral del cono. Como podremos prolongar la serie de estas pirámides *indefinidamente*, resulta que la superficie lateral del cono, es el *límite* de las superficies laterales de las pirámides regulares inscriptas, y cuando el número de caras laterales de la pirámide inscripta sea infinito, su superficie lateral se habrá confundido con la del cono, y la base poligonal de la pirámide se habrá confundido tambien con la base circular del cono.

De donde resulta que

El cono de revolucion se puede considerar como una pirámide regular de infinito número de caras laterales.

La misma conclusion obtendríamos partiendo de la pirámide regular circunscripta.

298. Si imaginamos que el rectángulo O'OBA (fig. 270) gira al rededor del lado O'O, hasta volver á tomar su posicion primitiva despues de haber dado una vuelta completa, veremos que este rectángulo ha engendrado en su movimiento de rotacion un cuerpo geométrico. Este cuerpo se llama CILINDRO DE REVOLUCION.

En este movimiento de rotacion del rectángulo O'OBA, los lados O'A y OB engendran dos figuras planas en las que A y B equidistan respectivamente en todas sus posiciones de los puntos O' y O; por consiguiente los lados O'A y OB engendran dos círculos que son las *bases del cilindro*.

El lado AB engendra una superficie curva que es la *superficie lateral del cilindro*.

El lado fijo O'O, eje al rededor del cual ha girado el rectángulo O'O BA, es la *altura del cilindro*.

El lado AB en cualquiera de sus posiciones, es el *lado del cilindro*.

TEOREMA CLXXVIII

299. *Si se corta un cilindro AD* (fig. 270), *por un plano paralelo á las bases, la seccion D'C'B' que resulta, es un círculo igual á dichas bases, y cuyo centro está en el eje del cilindro.*

En efecto; tendremos (254) que las distancias D'O'', C'O'', B'O'', están en un mismo plano y son todas iguales á OB, luego la seccion D'C'B' es un círculo igual á las bases, y cuyo centro está en O''. C. C. E. E.

300. *Plano tangente* á un cilindro, es el determinado por una tangente á una de sus bases, y el lado que pasa por el punto de contacto.

El plano RQC es tangente al cilindro AD.

Si se inscribe en una de las bases de un cilindro de revolucion un polígono regular, y se hacen pasar planos perpendiculares á dicha base por los lados del polígono, dichos planos encontrarán á la otra base, y tendremos un prisma regular inscripto al cilindro.

Si se circunscribe á la base de un cilindro de revolucion un polígono regular, y se hacen pasar planos perpendiculares á dicha base por los lados del polígono, dichos planos encontrarán al plano de la otra base, y tendremos un prisma regular circunscripto al polígono.

Es evidente que la superficie lateral del cilindro, es mayor que la superficie lateral del prisma inscripto, y menor que la superficie lateral del prisma circunscripto.

Si tenemos un prisma regular de n lados inscripto en un cilindro, é inscribimos en una de las bases de éste, un polígono regular de $2n$ lados (206) y trazamos planos perpendiculares á esta base por los lados de este polígono, dichos planos encontrarán al plano de la otra base, y tendremos un prisma regular inscripto en el cilindro de $2n$ caras laterales.

Es evidente que el área lateral del prisma regular inscripto de $2n$ caras laterales, es mayor que el área lateral del prisma regular inscripto de n caras laterales, y menor que el área lateral del cilindro.

Ahora, si imaginamos una serie de prismas regulares inscriptos en un cilindro del modo que se ha dicho, en que se van duplicando el número de sus caras laterales, obtendremos prismas cuyas superficies laterales van creciendo, y que son siempre menores que la superficie lateral del cilindro. Como podremos prolongar la serie de estos prismas *indefinidamente*, resulta que la superficie lateral del cilindro, es el límite de las superficies laterales de los prismas regulares inscriptos, y cuando el número de caras laterales del prisma inscripto sea infinito, su superficie lateral se habrá confundido con la del cilindro, y las bases poligonales del prisma se habrán confundido tambien con las bases circulares del cilindro.

De donde resulta que

El cilindro de revolucion se puede considerar como un prisma regular de infinito número de caras laterales.

La misma conclusion obtendríamos partiendo del prisma regular circunscripto.

L. 39

§ II.—De la esfera

301. Si imaginamos que el semicírculo ACB (fig. 271) gira al rededor del diámetro AB, hasta volver á tomar su posicion primitiva despues de haber dado una vuelta completa, veremos que este semicírculo ha engendrado en su movimiento de rotacion un cuerpo geométrico. Este cuerpo se llama ESFERA.

En este movimiento de rotacion del semicírculo, la semicircunferencia ACB engendra una superficie curva, cuyos puntos equidistan del punto O centro del semicírculo. Esta superficie se llama *superficie esférica*.

El centro O del semicírculo generador es el centro de la esfera, y la distancia de un punto cualquiera de la superficie esférica al centro de la esfera, se llama *radio de la esfera* y es igual al radio del semicírculo generador.

Es evidente, que todo punto del espacio cuya distancia al centro O de la esfera es igual al radio OA de ésta, está en superficie esférica, todo punto del espacio cuya distancia al centro O de la esfera es mayor que el radio OA, está fuera de la esfera, y todo punto del espacio cuya distancia al centro O de la esfera menor que el radio OA, está dentro de la esfera, de donde resulta que

La superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de uno fijo.

El diámetro AB del semicírculo generador se llama *eje* de la esfera, y los extremos A y B del eje son los *polos* de la esfera.

Diámetro de una esfera, es la recta que pasando por el centro, está limitada por la superficie esférica.

Todos los diámetros de una esfera son iguales.

Todo diámetro de una esfera es doble que el radio.

Si dos esferas tienen los radios iguales, son iguales.

TEOREMA CLXXIX

302. *Si se corta una esfera O* (fig. 271) *por un plano, la seccion que resulta es un círculo.*

En efecto; si el plano es el AHB que pasa por el centro de la esfera, resulta que en dicho plano se encuentran el centro de la esfera y la interseccion de la superficie esférica con dicho plano; y como los puntos de esta interseccion son puntos de la superficie esférica, equidistan del centro de la esfera, dicha interseccion es pues un círculo cuyo centro es el de la esfera.

Si el plano es el SRQ que no pasa por el centro de la esfera, trazando la OP perpendicular desde O centro de la esfera á dicho plano, y uniendo los puntos S, R, Q.... de la interseccion entre el plano y la superficie esférica con O, las oblícuas OS, OR, OQ.... serán iguales por radios de la esfera, por lo que las distancias SP, RP, QP... serán tambien iguales, luego dicha interseccion es un círculo, cuyo centro es la proyeccion del centro de la esfera sobre la seccion.

COROLARIO 1.º En el triángulo rectángulo POS, tendremos que $PO < OS$, y en la igualdad

$$\overline{PS}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{PO}^2$$

á medida que PO disminuye crece PS, y cuando PO es igual á cero, $PS = OS$. De donde resulta que en la seccion de un plano que pasa por el centro de la esfera, el radio de la seccion es igual al de la esfera, (valor máximo del radio de la seccion de un plano y una esfera); y cuando el plano no pasa por el centro de la esfera, el radio de la seccion es menor que el de la esfera.

La seccion de un plano que pasa por el centro, se llama *círculo máximo*.

La seccion de un plano que no pasa por el centro de la esfera, es un *círculo menor*.

COROLARIO 2.º *Si dos círculos menores equidistan del centro de la esfera, son iguales.*

Si dos círculos menores no equidistan del centro de la esfera, el que dista menos es el mayor.

303. *Todo círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales, puesto que son superponibles.*

Una recta secante á una esfera, no puede tener con la superficie esférica más que dos puntos comunes, porque dicha secante y el círculo máximo determinado por ésta y el centro de la esfera, no pueden tener más que dos puntos comunes.

Polos de un círculo de la esfera, son los extremos del diámetro perpendicular al plano de dicho círculo. A y B (fig. 272), son los polos del círculo CED.

TEOREMA CLXXX

Los puntos C, E, D.... de la circunferencia de un círculo de la esfera O (fig. 272) *equidistan de uno cualquiera de sus polos A y B.*

En efecto; las distancias del polo A á los puntos C, E, D... son oblícuas cuyos piés se apartan igualmente del pié P de la perpendicular OP, luego son iguales.

Lo mismo puede decirse del polo B. C. C. E. E.

COROLARIO. Los arcos de círculo máximo AC, AE, AD... comprendidos entre el polo A y el círculo CED, son iguales. (64)

Y lo mismo sucede con los arcos BC, BE y BD, comprendidos entre el otro polo B y el círculo CED.

Aunque todo círculo de la esfera tiene dos polos, si se trata de un círculo menor CDE, y no se determina de cual de los dos se trata, entiéndase que nos referimos al polo A más próximo del círculo.

Distancia polar de un círculo CED, es la recta AD que vá desde el polo á un punto cualquiera de dicho círculo.

Radio esférico de un círculo CED, es el arco AD de círculo máximo, que vá desde el polo á un punto cualquiera de dicho círculo.

304. *Plano tangente* á una esfera, es el que tiene un solo punto comun con la esfera.

TEOREMA CLXXXI

Todo plano RS (fig. 272) *tangente á una esfera O, es perpendicular al radio OB del punto de contacto.*

TEOREMA CLXXXII

Todo plano RS perpendicular al radio OB, que pasa por el extremo de éste, es tangente á la esfera.

COROLARIO. *Por un punto de una esfera, se puede trazar á ésta un plano tangente, y no se puede trazar más que uno.*

Estas proposiciones se demuestran fácilmente recordando lo dicho (61 y 62)

ESCOLIO. El radio de un punto de la esfera, se llama normal á la esfera en este punto

El radio OB es la normal á la esfera en el punto B.

TEOREMA CLXXXIII

305. *Cuatro puntos A, B, C, D,* (fig. 273) *que no están en un mismo plano, determinan una esfera.*

Para demostrar este teorema probaremos: 1.º que por los cuatro puntos A, B, C, D, siempre puede pasar una esfera. 2.º que no puede pasar más que una.

1.º Si levantamos por P, centro de la circunferencia circunscripta al triángulo ABC, la perpendicular PO al plano ABC, y por Q centro de la circunferencia circunscripta al triángulo ABD, la perpendicular QO al plano ADB; estas perpendiculares se encontrarán. En efecto; uniendo R punto medio de AB, cuerda comun, con P y Q centros de dichas circunferencias, será AB perpendicular á las RP y RQ, por lo tanto al plano PRQ, y por consiguiente el plano PRQ, perpendicular á los planos ABC y ABD. (277) Pero las QO, PO, son perpendiculares respectivamente á los planos ABD y ABC, en los puntos Q y P, de las aristas RQ y RP; luego las QO y PO, están situadas en el plano PRQ (278). Pero dicha rectas QO y PO son respectivamente perpendiculares, á la RP y RQ que se cortan y están en su plano; luego la QO y PO se cortarán tambien. Ahora el punto O de interseccion, por pertenecer á la QO equidista de A, B y D, y por pertenecer á la PO equidista de A, B y C, O equidista pues de los cuatro puntos A, B, C, D, y por consiguiente la esfera cuyo centro sea O y cuyo radio sea OA, pasará por los cuatro puntos dados; luego por los puntos A, B, C, D, siempre puede pasar una esfera.

2.º Si suponemos que por los cuatro puntos A, B, C, D, pasara otra esfera, el plano ABC produciria en esta esfera una seccion circular cuyo centro será P, y la perpendicular

PO á dicha seccion por su centro P, pasará por el centro de dicha esfera; porque pasa por todos los puntos equidistantes de la circunferencia de dicha seccion. Por las mismas razones, la perpendicular QO á la seccion que el plano ABD produce en la esfera, y que pasa tambien por el centro de la seccion, pasará tambien por el centro de la esfera. O es pues tambien el centro de esta segunda esfera, y OA su radio. Si pues esta segunda esfera tiene el mismo centro y el mismo radio que la primera, estas dos esferas no son más que una; luego por los cuatro puntos A, B, C, D, no puede pasar más que una esfera.

Si los cuatro puntos dados están en un mismo plano y en una circunferencia, por dichos puntos podrán pasar infinitas esferas cuyos centros estarán situados en la perpendicular levantada al plano de los cuatro puntos, por el centro de la circunferencia que pase por ellos.

Si los cuatro puntos están situados en un mismo plano, pero no en una circunferencia, no pasará por dichos cuatro puntos una esfera, porque si suponemos que pasara, la seccion del plano de dichos cuatro puntos y la esfera, no seria un círculo.

306. Dos arcos de círculo máximo CA y DA (fig. 274) que concurren en un punto A, forman un *ángulo esférico*. Los dos arcos CA y DA son los lados del ángulo, y el punto A comun á los dos lados es el vértice.

El valor de un ángulo esférico CAD, es el del rectilíneo MAN, formado por las tangentes MA y NA á cada uno de los lados CA y DA, trazadas por el vértice A. (1)

Observemos que el ángulo MAN, es el rectilíneo correspondiente al diedro CABD, cuyas caras son los círculos ACB y ADB; por consiguiente la medida de un ángulo esférico es la del diedro formado por los planos que pasan por los lados del ángulo esférico.

Tres arcos de círculo máximo AC, CD, AD, que limitan una porcion de superficie esférica, forman un *triángulo esférico*. Cada uno de los lados de un triángulo esférico, es menor que una semicircunferencia de círculo máximo.

(1) En general ángulo de dos curvas, que pasan por un mismo punto, es el ángulo que forman sus respectivas tangentes trazadas por el punto comun.

En el triángulo esférico ACD, los lados son los arcos AC, CD, AD; los ángulos son los ángulos esféricos CAD, ADC, ACD, y los vértices los puntos A, C, D, donde se cortan los lados.

307. Si se unen los tres vértices del triángulo ACD con el centro O de la esfera, se forma un ángulo triedro OACD. El triedro OACD y el triángulo esférico ACD, son respectivamente *correspondientes*, y en ellos se verifica, que los lados del triángulo esférico, son respectivamente las medidas de las caras del triedro, y que los ángulos del triángulo esférico y los respectivos ángulos diedros del triedro, tienen la misma medida.

De aquí se deducen fácilmente, las siguientes propiedades de los triángulos esféricos, análogas á las de los ángulos triedros.

En todo triángulo esférico, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.

La suma de los tres lados de un triángulo esférico, es menor que una circunferencia máxima.

La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico, es mayor que dos rectos y menor que seis.

Un triángulo esférico, puede tener dos, ó los tres ángulos rectos, y tambien dos ó los tres ángulos obtusos.

El triángulo esférico que tiene un ángulo recto, se llama *rectángulo*, si tiene dos ángulos rectos *birectángulo*, y si tiene los tres ángulos rectos *trirectángulo*. Los ángulos no rectos de un triángulo esférico, se llaman ángulos *oblícuos*. En el triángulo esférico rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos*, y el lado opuesto al ángulo recto *hipotenusa*.

Dos triángulos esféricos ABC, $A'B'C'$ (fig. 275) *de una misma esfera ó de esferas iguales, son iguales.*

1.º Cuando tienen un ángulo igual ($A = A'$) y respectivamente iguales y colocados del mismo modo, los lados que los forman ($AC = A'C'$, $AB = A'B'$).

2.º Cuando tienen un lado igual ($AC = A'C'$) y respectivamente iguales y colocados del mismo modo los ángulos adyacentes á dichos lados ($A = A'$, $C = C'$.)

3.º Cuando tienen los tres lados respectivamente iguales y colocados del mismo modo. ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.)

4.º Cuando tienen los tres ángulos respectivamente iguales, y colocados del mismo modo. ($A = A'$, $B = B'$, $C = C'$).

305. La porcion de esfera limitada por tres ó más arcos de círculo máximo es un polígono esférico.

TEOREMA CLXXXIV

Un lado cualquiera DE (fig. 276) *de un polígono esférico $ABCDE$, es menor que la suma de todos los demás.*

En efecto; sabemos (307) que

$$DE < DA + AE$$
$$DA < DC + CA$$
$$AC < CB + BA$$

Sumando ordenadamente estas desigualdades, tendremos

$$DE + DA + AC < DA + AE + DC + CA + CB + BA$$ y

simplificando, será

$$DE < AE + AB + CB + CD.$$ C. C. E. E.

TEOREMA CLXXXV

308. *La línea más corta que se puede trazar sobre una superficie esférica, entre dos puntos M, N* (fig. 276) *situados en ella, es el menor de los arcos MN del círculo máximo que pasa por dichos puntos.*

En efecto;

Sea MN el menor arco del círculo máximo que pasa por M y N, y MQN, una curva cualquiera situada sobre la superficie esférica y que une los puntos M y N.

Siendo MPQRN una porcion de polígono esférico inscripto en la curva MQN, tendremos segun se acaba de demostrar

$$MN < MP + PQ + QR + RN.$$

Pero, aumentando el número de lados de la parte de polígono esférico inscripto APQRN, sus lados tienden hácia cero, y el límite del segundo miembro de la desigualdad anterior, será la curva AQN.

Luego el arco de círculo máximo MN, es menor que cualquiera otra curva que situada sobre la superficie esférica, pasa por M y N. C. C. E. E

LIBRO III

ÁREAS Y VOLÚMENES
DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

CAPÍTULO I

ÁREAS DE LOS POLIEDROS

309. *Area de un poliedro* (288) es la suma de las áreas de sus caras.

En la pirámide y en el prisma, se distinguen el *área lateral*, suma de las áreas de las caras laterales; y *área total*, suma del área lateral más el área de la base ó las bases.

Esto facilita la determinacion del área de estos poliedros.

TEOREMA CLXXXVI

310. *El área lateral de una pirámide regular $SMNQRT$* (fig. 266), *es igual al producto del semiperímetro de su base $MNQRT$, por su apotema SZ.*

En efecto; el área lateral de esta pirámide, es la suma de las áreas de los triángulos SMN, SNQ, SQR.... isósceles é iguales entre sí (289), es decir, (teniendo en cuenta que todas las apotemas de la pirámide son iguales).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Area lateral de la}\\ \text{pirámide}\,SMNQRT\end{array}\right\}=\tfrac{1}{2}MN.SZ+\tfrac{1}{2}NQ.SZ+\tfrac{1}{2}QR.SZ\ldots$$

ó

$$\left.\begin{array}{l}\text{área lateral de la}\\ \text{pirámide}\,SMNQRT\end{array}\right\}=\tfrac{1}{2}\,(MN+NQ+QR\ldots\ldots)\,SZ$$

Llamando P al perímetro de la base de la pirámide, y A á la apotema de la pirámide, será

$$\text{área lateral de una pirámide regular} = \tfrac{1}{2}\,P\,.\,A\,.\ (K)$$

C. C. E. E.

CoROLARIO. Para hallar el área total de una pirámide regular, bastará sumar el área lateral, con el área de la base, y como la base es un polígono regular, tendremos (230)

$$\left.\begin{matrix}\textit{área total de una}\\ \textit{pirámide regular}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\,P\,.\,A + \tfrac{1}{2}\,P\,.\,a = \tfrac{1}{2}\,P\,(A + a).$$

TEOREMA CLXXXVII

311. *El área lateral de una pirámide regular truncada de bases paralelas, EB'* (fig 266 bis), *es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las dos bases* ($\frac{1}{2}$ *(ABCDE* + *A'B'C'D'E'*)) *por la altura MM', de uno de los trapecios laterales.*

En efecto; puesto que todas las caras laterales son trapecios iguales, y el área de uno cualquiera de estos trapecios es igual (229) al producto de la semisuma de sus bases por su altura, tendremos

$$\text{área } EAA'E' = \tfrac{1}{2}(EA + E'A').MM'$$

y como todas las alturas de los trapecios laterales son iguales, será

$$\text{área lateral del trozo de pirámide } EB' = \tfrac{1}{2}(EA + E'A')\,MM'$$
$$+ \tfrac{1}{2}(AB + A'B')\,MM' + \tfrac{1}{2}(BC + B'C')\,MM'\ldots.$$

de donde

$$\text{área lateral del trozo de pirámide } EB' = \tfrac{1}{2}\,(EA + AB$$
$$+ BC\ldots. + E'A' + A'B' + B'C'\ldots.)\,.\,MM',$$

y llamando P al perímetro de la base mayor, P' al de la base menor y A' á la altura comun de los trapecios laterales, será

$$\text{área lateral del trozo de pirámide } EB = \tfrac{1}{2}\,(P + P')\,.\,A'.(x)$$

C. C. E. E.

ESCOLIO. Si por el punto medio E" de una de las aristas laterales, trazamos un plano paralelo á las bases de la pirámide, la seccion A"B"C"D"E", será un polígono semejante á las bases, y su perímetro será igual á la semisuma de los perímetros de dichas bases (171-cor.); de modo que llamando P" al perímetro de esta seccion paralela á las bases, será

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = P'',$$

y sustituyendo en la fórmula anterior (x) P" en vez de $\tfrac{1}{2}(P + P')$, será

$$\text{área lateral de EB} = P''.A'.$$

Luego

El área lateral de una pirámide regular truncada de bases paralelas, es igual al producto del perímetro de la seccion paralela á las bases y equidistante de éstas, por la altura de una cara lateral.

Para hallar el *área total* de una pirámide truncada regular de bases paralelas, bastará añadir al área lateral, las áreas de las bases.

TEOREMA CLXXXVIII

312. *El área lateral de un prisma cualquiera AG* (figura 277) *es igual al producto de una de sus aristas laterales CF, por el perímetro de la seccion recta* [1] *KRTS.*

En efecto; el área lateral de este prisma, es la suma de las áreas de los paralelógramos CFGD, DGHB, BHEA, AEFC; es decir,

$$\text{área lateral de AG} = CF.ST + DG.TR + BH.RK + AE.KS;$$

y como todas las aristas laterales son iguales, tendremos

$$\text{área lateral de AG} = CF.ST + CF.TR + CF.RK + CF.KS$$

ó

$$\text{área lateral de AG} = CF\,(ST + TR + RK + KS).$$

(1) Seccion recta de un prisma, es la producida por un plano que corta al prisma perpendicularmente á sus aristas laterales.

Pero CF es una arista lateral, y la suma

$$ST + TR + RK + KS$$

es el perímetro de la seccion recta, resulta pues, que

El área lateral de un prisma, es igual al producto de una de las aristas laterales, por el perímetro de la seccion recta. C. C. E. E.

COROLARIO. *El área lateral de un prisma recto, es igual á una de las aristas laterales, por el perímetro de una de las bases.*

Para hallar el *área total* de un prisma, bastará añadir al área lateral, las áreas de las dos bases.

CAPÍTULO II

ÁREAS DE LOS CUERPOS REDONDOS

TEOREMA CLXXXIX

313. *El área lateral de un cono de revolucion ABC,* (fig. 269) *es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base, por su lado.*

En efecto; puesto que el cono de revolucion se puede considerar (297) como una pirámide regular de infinito número de caras laterales, su área lateral se determinará del mismo modo que la de la pirámide regular.

Bastará sustituir en la fórmula (*K*) (310), en vez del perímetro P, la circunferencia C, y en vez de la apotema A, el lado L del cono.

Será pues

$$\text{área lateral del cono} = \tfrac{1}{2}\, C.L = \pi RL \ (S).$$

COROLARIO. Para hallar el área total de un cono de revolucion, bastará sumar el área lateral con el área de la base, y como la base es un círculo, tendremos (232-cor.)

$$\text{área total del cono} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R\,(L + R).$$

TEOREMA CXC

314. *El área lateral de un cono truncado de revolucion B'C* (fig. 279) *es igual al producto de la semisuma de las circunferencias de las bases, por el lado.*

En efecto; trazando la CD perpendicular al lado AC, é igual á la circunferencia O rectificada, uniendo A con D y trazando la C'D' paralela á la CD, comparando los lados de los triángulos semejantes ACD y AC'D', tendremos

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{CD}{C'D'} \quad (a).$$

Ahora, de la semejanza de los triángulos AOC y AO'C', resulta tambien

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{OC}{O'C'} \quad \text{ó bien}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{2\pi OC}{2\pi O'C'} \quad (b).$$

Pero las dos proporciones (a) y (b) tienen iguales respectivamente los tres primeros términos, luego será

$$C'D' = 2\pi O'C' \quad (c).$$

Además tenemos

$$\text{área del triángulo ACD} = \tfrac{1}{2}\,CD.CA$$

$$\text{área lateral del cono ABC} = \tfrac{1}{2}\,2\pi OC.CA$$

y como

$$CD = 2\pi OC$$

los segundos miembros de estas dos igualdades son iguales, luego tambien lo serán los primeros, es decir,

$$\text{área del triángulo ACD} = \text{área lateral del cono ABC}. \quad (m)$$

Del mismo modo se demostrará puesto que tambien (c)

$$C'D' = 2\pi O'C' \qquad \text{que}$$

$$\text{área del triángulo AD'C'} = \text{área lateral del cono AB'C'}. \quad (n)$$

Restando ordenadamente las igualdades (m) y (n), resulta área del trapecio C'D = área lateral del tronco de cono B'C.

Pero

$$\text{área del trapecio C'D} = \tfrac{1}{2}\,(CD + C'D').\,CC'.$$

Sustituyendo en esta igualdad en vez de área del trapecio C'D, su igual área lateral del tronco de cono B'C, y en vez de CD y C'D', respectivamente $2\pi OC$ y $2\pi O'C'$ será

$$\left.\begin{array}{l}\text{área lateral del}\\ \text{tronco de cono}\end{array}\right\} B'C = \tfrac{1}{2}\,(2\pi OC + 2\pi O'C').CC'$$

Llamando R y R' y L respectivamente á las OC, O'C', y CC', y simplificando será

$$\text{área lateral del tronco de cono B'C} = (\pi R + \pi R')\,L.$$

C. C. E. E.

COROLARIO 1.° Trazando la seccion O'' paralela á las bases O y O' del tronco de cono y equidistante de ellas, y en el trapecio C'D, la C''D'' paralela á las bases y equidistante de ellas, tendremos

$$\text{área del trapecio C'D} = C''D''.CC' \quad (h)$$

Pero

$$C''D'' = 2\pi O''C''$$

Sustituyendo en la igualdad (h) en vez de área del trapecio C'D, su igual área lateral del tronco de cono B'C, y en vez de C''D'' y CC' respectivamente $2\pi O''C''$ y L, será

$$\text{área lateral del tronco de cono B'C} = 2\pi O''C''.L.$$

Llamando R'' al O''C'' será

$$\text{área lateral del tronco de cono B'C} = 2\pi R''.L.$$

COROLARIO 2.° Para hallar el área total de un cono truncado, bastará añadir al área lateral, las áreas de sus dos bases, es decir, que

$$\left.\begin{array}{l}\text{área total del}\\ \text{trozo de cono}\end{array}\right\} B'C = (\pi A + \pi R')L + \pi R^2 + \pi R'^2 \qquad \text{ó}$$

$$\text{área total del trozo de cono B'C} = 2\pi R''.L + \pi R^2 + \pi R'^2$$

TEOREMA CXCI

315. *El área lateral de un cilindro de revolucion AD* (fig. 270) *es igual al producto de la circunferencia de su base, por su lado.*

En efecto; puesto que el cilindro de revolucion se puede considerar (300) como un prisma recto regular de infinito número de caras laterales, su área lateral se determinará del mismo modo que la del prisma recto. Bastará sustituir (312, cor.) en vez del perímetro de una de las bases, la circunferencia de una de las bases del cilindro, y en vez de una de las aristas laterales, el lado del cilindro; será pues llamando C á la circunferencia de una de sus bases y L al lado.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Area lateral del ci-}\\\text{lindro de revolucion}\end{array}\right\} = \mathrm{C\,L} = 2\pi\mathrm{R.L.} \quad (x)$$

COROLARIO. Para hallar el área total de un cilindro de revolucion, bastará sumar el área lateral, con las áreas de las dos bases, y como las bases son circulares, será

$$\left.\begin{array}{l}\text{área total del cilin-}\\\text{dro de revolucion}\end{array}\right\} = 2\pi\mathrm{RL} + 2\pi\mathrm{R}^2 = 2\pi\mathrm{R}\,(\mathrm{L} + \mathrm{R})$$

ESCOLIO. Puesto que (205) *línea quebrada* regular, es la que tiene sus lados y sus ángulos iguales, demostraríamos empleando los mismos razonamientos que en la demostracion del teorema CXIII (204), que

Si se trazan las bisectrices de los ángulos de una línea quebrada regular, y se levantan perpendiculares en los puntos medios de sus lados, todas las bisectrices y todas las perpendiculares concurren en un mismo punto. Este punto es el centro de la línea quebrada regular.

Las rectas que unen el centro con los vértices son los *radios*, y las que unen dicho centro con los puntos medidos de los lados son las *apotemas* de la línea quebrada regular. Todos los radios son iguales, y todas las apotemas son iguales.

Toda línea quebrada regular, será pues inscriptible y circunscriptible; y los radios y apotemas de la línea quebrada regular, son respectivamente los radios de los círculos circunscripto é inscripto, y el centro comun de estos círculos es el centro de la línea quebrada poligonal.

En una línea quebrada regular inscripta, los arcos correspondientes á sus lados, podrán no ser partes alícuotas en la circunferencia, en una porcion de perímetro de polígono regular inscripto, los arcos correspondientes á sus lados, son forzosamente partes alícuotas de la circunferencia.

Toda porcion de perímetro de un polígono regular, es una línea quebrada poligonal.

Sector poligonal, es la porcion de plano limitado por una línea quebrada regular y los dos radios trazados desde el centro de esta línea á sus extremos

Empleando los mismos razonamientos expuestos en el párrafo (308) se demuestra que

Un arco cualquiera, se puede considerar como una línea poligonal regular de infinito número de lados.

Si el arco AC (fig. 286) gira al rededor del diámetro MN, hasta dar una vuelta completa, engendrará una parte de superficie esférica que se llama *zona esférica.*

Las circunferencias descritas por los extremos A y C del arco generador, son las bases de la zona, y la proyeccion RS de dicho arco sobre el eje, es la altura de la zona.

Si uno de los extremos M, del arco generador AM está en el eje, se engendra una zona que tiene una sola base AB que es la circunferencia descrita por el otro extremo A. Esta zona que tiene una sola base, se llama *casquete esférico.*

TEOREMA CXCII

316. *El área de la superficie engendrada por la base AB de un triángulo isósceles AOB* (fig.as 280, 281, 282) *al girar al rededor de una recta EJ situada fuera del triángulo, en el plano de éste y pasando por su vértice, es igual al producto de la proyeccion de dicha base AB sobre la recta EJ, por una circunferencia cuyo radio sea la altura del triángulo.*

Distinguiremos tres casos: 1.° Que la base AB (fig. 280) del triángulo, sea paralela al eje EJ. 2.° Que la base AB (fig. 281) del triángulo, sea oblícua al eje EJ, y no tenga ningun punto comun con éste, y 3.° que la base AB (figura 282) tenga un extremo A en el eje EJ.

Primer caso. El área de la superficie engendrada por la base AB (fig. 280), es el área lateral de un cilindro de revolucion cuyas bases tienen los radios iguales á la altura CO, y cuyo lado es la base AB del triángulo. Tendremos, pues,

$$\left.\begin{array}{l}\text{área superficie}\\ \text{engendrada por}\end{array}\right\}AB = AB.2\pi OC = MN.2\pi OC.$$

C. C. E. E.

Segundo caso. El área de la superficie engendrada por la base AB (fig. 281) es el área lateral de un cono truncado de bases paralelas. Tendremos, pues (314 cor. 1.º).

$$\text{área superficie engendrada por } AB = AB.2\pi CR \quad (a)$$

Ahora, de la semejanza de los triángulos (179 cor. 3.º) ABS y OCR, se deduce

$$\frac{AB}{OC} = \frac{AS}{CR} \text{ ó } \frac{AB}{OC} = \frac{MN}{CR}, \text{ de donde}$$

$$AB.CR = MN.OC.$$

Sustituyendo en la igualdad (*a*) resulta

$$\text{área engendrada por } AB = MN.2\pi OC. \quad \text{C. C. E. E.}$$

Tercer caso. El área de la superficie engendrada por la base AB (fig. 282) es el área lateral de un cono de revolucion, cuya base tiene por radio la recta BS. Tendremos, pues

$$\text{área superficie engendrada por } AB = AB.\pi BS$$

pero como $BS = 2CR,$ será

$$\text{área superficie engendrada por } AB = AB.2\pi CR. \quad (b)$$

Ahora, de la semejanza de los triángulos ABS y OCR, (179 cor. 3.º) se deduce

$$\frac{AB}{OC} = \frac{AS}{CR},$$

de donde

$$AB.CR = AS.OC$$

sustituyendo en la igualdad (*b*), resulta

área superficie engendrada por AB = AS.2π OC.

C. C. E. E.

TEOREMA CXCIII

317. *El área de la superficie engendrada por la línea quebrada regular ABCDE* (fig. 283) *al girar al rededor del eje EJ, (que pasa por el centro de la circunferencia inscripta en dicha línea quebrada, está situado en el plano de ésta, y no la corta); es igual al producto de la proyeccion PQ de la generatriz sobre el eje, por la circunferencia inscripta en dicha generatriz.*

En efecto; la superficie engendrada por la línea quebrada ABCDE, es igual á la suma de las superficies engendradas por sus lados AB, BC, CD, DE. Pero (316)

área superficie engendrada por AB = PH.2π OM
» » » » BC = HT.2π OM
» » » » CD = TS.2π OM
» » » » DE = SQ.2π OM.

Por consiguiente

$$\left.\begin{array}{l}\text{área superficie}\\ \text{engendrada por}\end{array}\right\}\text{ABCDE} = (\text{PH}+\text{HT}+\text{TS}+\text{SQ})\,2\pi\,\text{OM} \text{ ó}$$

área sup. eng. por ABCDE = PQ.2π OM. C. C. E. E.

COROLARIO 1.° Como al arco AB (fig. 284) se le puede considerar como una línea quebrada regular de infinito número de lados, si imaginamos que gira al rededor del diámetro EJ, el área de la superficie engendrada será, segun el teorema anterior, igual al producto PQ.2πOA. Pero el arco AB en su movimiento engendra una zona esférica cuya altura es PQ. Luego

El área de una zona esférica, es igual al producto de su altura, por la circunferencia de círculo máximo.

COROLARIO 2.° Tambien fundándose en los mismos razonamientos del corolario anterior, el área de la superficie engendrada por el arco AB, (fig. 285) al girar al rededor del diámetro AS, será igual al producto $AP.2\pi AO$. Pero el arco AB en su movimiento engendra un casquete esférico, cuya altura es AP.

Luego

El área de un casquete esférico, es igual al producto de su altura por la circunferencia de círculo máximo.

TEOREMA CXCIV

318. *El área de la superficie esférica es igual, al producto de su diámetro por la circunferencia de círculo máximo.*

En efecto; el área de la superficie engendrada por la semicircunferencia EABJ (fig. 284) al girar al rededor de su diámetro EJ, es igual al producto de su proyeccion EJ sobre el diámetro, por la circunferencia de círculo máximo; puesto que toda semicircunferencia puede considerarse como una línea quebrada regular de infinito número de lados. Pero como al girar la semicircunferencia al rededor de su diámetro, engendra una superficie esférica, tendremos que el

Area de la superficie esférica es igual, al producto de su diámetro, por la circunferencia de círculo máximo. C. C. E. E.

COROLARIO 1.° Puesto que el diámetro es igual á 2R, y la circunferencia de círculo máximo es igual á $2\pi R$, será

$$\text{área superficie esférica} = 2R.2\pi R = 4\pi R^2. (a)$$

COROLARIO 2.° De la fórmula anterior se deduce, que el área de la superficie esférica es el cuádruplo del área de un círculo máximo.

Y tambien, llamando D al diámetro de un círculo máximo, será

$$\text{área de la superficie esférica} = \pi D^2$$

Es decir, que el área de la superficie esférica es igual, al *área de un círculo de doble radio que la esfera.*

CAPÍTULO III

Lo. 43

VOLÚMEN DE LOS POLIEDROS

319. *Volúmen* de un cuerpo es la medida de su *extension* (1); es decir, el número que expresa la *razon* entre la

extension del cuerpo que se *mide*, y la *unidad* adoptada como medida.

La unidad para medir la extension de un cuerpo, conviene que tenga la figura de *cubo*.

Las unidades de volúmen adoptadas, son el metro cúbico, el pié cúbico, la legua cúbica, etc.; es decir, cubos cuya arista sea una unidad lineal.

Un cubo cuya arista es una unidad lineal, es pues, una unidad de volúmen, ó una unidad cúbica.

Si queremos medir la extension de los cuerpos comparándola *directamente* con el cubo unidad, tropezaremos con dificultades insuperables, por lo que buscaremos otro procedimiento, segun el cual, para hallar los volúmenes de los cuerpos bastará medir líneas.

Dos cuerpos que tienen el mismo volúmen, son *equivalentes*.

TEOREMA CXCV

320. *Dos paralelepípedos rectángulos MC y M'C'* (figura 287) *cuyas bases AC y A'C' son iguales, son proporcionales á sus alturas MA y M'A'.*

Distinguiremos dos casos: 1.° Que las alturas MA y M'A' sean conmensurables· 2.° Que dichas alturas sean inconmensurables.

Primer caso: Suponiendo que la medida comun de estas alturas esté contenida cuatro veces en la AM, y tres en la A'M', y dividiéndolas respectivamente en cuatro y tres partes iguales, cada una de estas partes será igual á la medida comun.

Si se toma ésta como unidad para medir ambas alturas MA y M'A', las medidas de éstas serán los números cuatro y tres, y como (Arit. 343) la razon de dos cantidades es la misma que la de los números que las miden, será

$$\frac{AM}{M'A'} = \frac{4}{3} \quad (1)$$

Ahora si por los puntos de division se trazan planos paralelos á la base AC en el paralelepípedo MC, y á la base A'C', en el paralelepípedo M'C', ambos paralelepípedos quedarán divididos en paralelepípedos rectángulos parciales, todos superponibles. Si tomamos uno de estos paralelepípedos parciales por unidad para medir los paralelepípedos MC y M'C', tendremos por la misma razon que antes

$$\frac{MC}{M'C'} = \frac{4}{3}. \quad (2)$$

Luego (Art. 55) $\frac{MC}{M'C'} = \frac{MA}{M'A'}$. C. C. E. E.

Segundo caso: Cuando las alturas MA y M'A' son inconmensurables, se demuestra empleando los mismos razonamientos que el párrafo (223).

ESCOLIO. En un paralelepípedo rectángulo MC, las tres aristas AB, AD, AM que parten de un vértice A, son las tres dimensiones del paralelepípedo; las bases de los MC y M'C', quedarán pues determinadas, respectivamente, por las dos dimensiones AB y AD, A'B' y A'D'. Segun ésto, el teorema anterior podrá enunciarse tambien diciendo,

Dos paralelepípedos rectángulos MC y M'C' que tienen comunes dos dimensiones, (AB = A'B', AD = A'D') son proporcionales á sus terceras dimensiones AM y A'M'.

TEOREMA CXCVI

321. *Dos paralelepípedos rectángulos P y P' (fig. 288) que tienen una dimension A comun, son proporcionales á los productos de las otras dos dimensiones B. C y B'. C'.*

Sean los P, P', P'' tres paralelepípedos rectángulos, en los que

A, B, C, son las dimensiones de P
A, B' C' son las dimensiones de P'
A, B, C' son las dimensiones de P''.

Como se vé, los paralelepípedos P y P', tienen una dimension A comun, y el paralelepípedo P'' tiene las dos dimensiones A y B comunes con el P, y las A y C' comunes con el P'.

En virtud del teorema anterior, tendremos

$$\frac{P}{P''} = \frac{C}{C'} \text{ y } \frac{P''}{P'} = \frac{B}{B'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, será

$$\frac{P.P''}{P''.P'} = \frac{B.C}{B'.C'},$$

y simplificando la primera razon, resulta

$$\frac{P}{P'} = \frac{B.C}{B'.C'}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

ESCOLIO. Como la dimension comun A, puede tomarse como altura, y entonces los productos B.C y B'.C', de las otras dos dimensiones, son las áreas de las respectivas bases de los paralelepípedos; el teorema anterior, puede tambien enunciarse diciendo

Dos paralelepípedos rectángulos, que tienen la altura comun, son proporcionales á las áreas de sus bases.

TEOREMA CXCVII

322. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, P y P'* (fig. 289) *son proporcionales á los productos de sus tres dimensiones A.B.C y A'.B'.C'*

Sean los P, P', P'' tres paralelepípedos rectángulos en que

A, B C son las dimensiones de P
A', B', C' son las dimensiones de P'
A', B, C son las dimensiones de P''

Como se vé, P'' tiene las dos dimensiones B y C comunes con P, y la dimension A' comun con el P'.

En virtud de los dos teoremas anteriores, tendremos

$$\frac{P}{P''} = \frac{A}{A'}, \text{ y } \frac{P''}{P'} = \frac{B.C}{B'.C'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, será

$$\frac{P.P''}{P''.P'} = \frac{A.B.C}{A'.B'.C'},$$

y simplificando la primera razon, resulta

$$\frac{P}{P'} = \frac{A.B.C}{A'.B'.C'}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

ESCOLIO. Como los productos B.C y B'.C', son respectivamente las áreas de las bases de los paralelepípedos P y P', el teorema anterior puede tambien enunciarse, diciendo

Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de las áreas de sus bases por sus alturas.

TEOREMA CXCVIII

323. *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo, es igual al producto de sus tres dimensiones.*

En efecto; sea P (fig. 290) un paralelepípedo rectángulo, que se quiere medir, y Q el cubo que se toma como unidad de medida.

Puesto que el cubo, es un paralelepípedo rectángulo, tendremos (322)

$$\frac{P}{Q} = \frac{A.B.C}{a.b.c}. \quad (v)$$

Ahora, puesto que el cubo Q es la unidad para medir la extension de P, si tomamos la arista a de dicho cubo, como unidad lineal para medir las rectas A, B, C, a, b, c, y si llamamos tambien A, B, y C á los números que expresan las medidas de las tres dimensiones de P, tomando por unidad la arista de Q, tendremos, que la igualdad (v) se convierte en la igualdad

$$\text{volúmen de P} = \frac{A.B.C}{1.1.1} \quad \text{ó}$$

$$\text{volúmen de P} = A.B.C. \quad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO. Como el producto B.C, es el área de la base del paralelepípedo P, y A es su altura, podremos enunciar el teorema anterior, diciendo

El volúmen de un paralelepípedo rectángulo, es igual al producto del área de su base por su altura.

COROLARIO. *El volúmen de un cubo es igual, á la tercera* *potencia de su arista*, puesto que el cubo es un paralelepípedo rectángulo, cuyas tres dimensiones son iguales.

De aquí proviene el llamar *cubo* de un número á su tercera potencia.

TEOREMA CIC

324. *El volúmen de un paralelepípedo recto es igual, al producto del área de su base por su altura.*

En efecto; sea el paralelepípedo recto NT (fig. 291), cuyas bases no son rectángulos. Trazando desde los vértices D y C de la base inferior del paralelepípedo NT, las perpendiculares DA y CB á la prolongacion del lado ST, tendremos el rectángulo ABCD equivalente al paralelógramo STCD (226)

Si ahora se levantan planos perpendiculares á dicho rectángulo por sus cuatro lados hasta que encuentre al plano OQ, se formará el *paralelepípedo* rectángulo NB.

Trazando las PQ y BS, se habrá construido un prisma trapecial recto, cuyas bases son los trapecios ATCD, y MRON, y tambien se han construido dos prismas rectos triangulares, uno, cuyas bases son los triángulos ASD y MQN, y el otro cuyas bases son los triángulos TCB y ROP; prismas triangulares que son superponibles (293) y por consiguiente iguales.

Ahora si del prisma trapecial NT, se quita el primer prisma triangular NS, queda el paralelepípedo dado NT; y si del mismo prisma trapecial se quita el otro prisma triangular OT, queda el paralelepípedo *rectángulo* NB. Luego

el paralelepípedo NT es equivalente al NB;

y además estos dos paralelepípedos tienen las alturas iguales y las bases equivalentes.

Pero el volúmen del paralelepípedo NB es igual al producto del área de su base por su altura; luego el ~~área~~ volúmen del paralelepípedo NT será igual tambien al producto del área de su base por su altura. C. C. E. E.

TEOREMA CC

325. *Dos paralelepípedos que tienen una base comun, é iguales las alturas, son equivalentes.*

Desde luego se descubre, que teniendo una base comun, y las alturas iguales, las bases no comunes estarán forzosamente en un mismo plano paralelo al de la base comun.

Distinguiremos dos casos: 1.° Que las bases no comunes, estén comprendidas entre dos paralelas. 2.° Que las bases no comunes, no estén comprendidas entre dos paralelas.

Primer caso. Sean los paralelepípedos NB y NT (fig. 291) que tienen la base comun NC, y las bases no comunes MB y QT comprendidas entre las dos paralelas MR y AT.

Discurriendo del mismo modo que al demostrar el teorema anterior, demostraremos que dichos paralelepípedos NB y NT son equivalentes, con lo que queda demostrado el primer caso.

Segundo caso. Sean los paralelepípedos AM y AN (fig. 292) que tienen la base comun AB, y las otras dos bases OM y RN en un mismo plano y en una posicion cualquiera. Si prolongamos los lados DM y OE hasta que corten á las prolongaciones de los lados RG y FN, se formará un paralelógramo HP igual á la base de los paralelepípedos primitivos AM y AN. Ahora uniendo por medio de rectas los cuatro vértices de la base comun AB, con los cuatro vértices del paralelógramo HP, tendremos un tercer paralelepípedo AP, equivalente á cada uno de los anteriores AM y AN, en virtud de lo demostrado en el primer caso. Luego los dos paralelepípedos AM y AN son equivalentes. C. C. E. E.

TEOREMA CCI

326. *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera AN* (fig. 292) *es igual al producto del área de su base por su altura.*

En efecto; suponiendo recto al paralelepípedo AM, y además que las bases OM y RN están en un mismo plano, los paralelepípedos AN y AM, serán equivalentes segun lo demostrado en el teorema anterior.

Pero el volúmen del paralelepípedo recto AM es (324) igual al producto del área de su base por su altura, luego el volúmen del paralelepípedo equivalente AN (que tiene la misma base y la misma altura que el AM), será tambien igual al producto de su base por su altura. C. C. E. E.

TEOREMA CCII

327. *El volúmen de un prisma triangular es igual, al producto del área de su base por su altura.*

Distinguiremos dos casos: 1.° Que el prisma sea recto. 2.° Que el prisma sea oblícuo.

Primer caso: Sea el prisma triangular recto ABDMNP (fig. 293). Trazando las BC y DC paralelas respectivamente á los lados AD y AB, tendremos el paralelógramo AC; y levantando por dichas paralelas los planos BO y DO perpendiculares al plano AC, sus intersecciones con el plano MNP, serán las rectas NO y PO, y resultará el paralelepípedo recto MC. Ahora este paralelepípedo se compone de los dos prismas triangulares ABDMNP y DBCNOP, iguales (393), y por consiguiente el ABDMNP, será mitad del paralelepípedo MC. Además el prisma ABDMNP y el paralelepípedo MC, tienen la misma altura AM y la base ABD del primero, es mitad de la base ABCD del segundo.

Pero

volúmen del paralelepípedo MC $=$ área ABCD $\times$ AM, luego
volúmen del prisma ABDMNP $= \frac{1}{2}$ área ABCD $\times$ AM ó
volúmen del prisma ABDMNP $=$ área ABD.AM. C.C.E.E.

Segundo caso: Sea el prisma triangular oblícuo ABDMNP (fig. 294) y construyamos el paralelepípedo MC de doble base y de igual altura que el anterior. El paralelepípedo oblícuo MC, se compone de los dos prismas triangulares oblícuos ABDMNP y BDCNOP, que no son superponibles en general.

Para demostrar su equivalencia, prolonguemos las cuatro caras laterales del paralelepípedo MC, y el plano diagonal PB; por el punto H de la prolongación de la arista MA, trazaremos la seccion recta HT; desde H tomemos una distancia HP' igual á MA, y tracemos otra seccion recta P'R, con lo que se ha formado el paralelepípedo recto HR compuesto de dos prismas triangulares rectos é iguales, y dos prismas triangulares truncados MNPHZL y ABDPSQ á un lado del plano diagonal PQ; y otros dos prismas triangulares truncados PNOZTL y DBCQRS al otro lado del plano diagonal PQ, y los prismas cuadrangulares truncados MT y AR.

Ahora, si suponemos que el prisma AR, se mueve de manera que los cuatro vértices P', Q, R, S, recorran respectivamente las distancias P'H, QZ, RT y SL; los paralelógramos P'QRS, HZTL, habrán coincidido, y tambien los ABCD y MNOP.

Además el prisma triangular truncado SQRDBC, se habrá confundido con el LZTPNO; y tambien el P'QSABD y el HZLMNP habrán coincidido.

Resulta pues,

prisma SQRDBC = prisma LZTPNO, y
prisma P'QSABD = prisma HZLMNP.

Restando de los dos miembros de la primera igualdad, el prisma triangular truncado LZTDβC queda

prisma SQRLZT equivalente al prisma BCDNOP, (*s*)

y restando de los dos miembros de la segunda igualdad, el prisma triangular truncado HZLABD, queda

prisma P'QSHZL equivalente al prisma ABDMNP (*t*)

Pero como los dos primeros miembros de las equivalencias (*s*) y (*t*) son iguales, los segundos miembros serán equivalentes; luego

El prisma triangular ABDMNP, será mitad del paralelepípedo MC, y como el volúmen de éste es igual al área de la base ABCD por su altura, el volúmen del prisma triangular ABDMNP, que es mitad del anterior, será el área de su base ABD por su altura. C. C. E. E.

TEOREMA CCIII

328. *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de su base por su altura.*

En efecto; Sea el prisma LD (fig. 295). Descomponiéndolo en prismas triangulares por medio de planos diagonales trazados desde una arista AL, tendremos que la suma de los volúmenes de los prismas triangulares en que se ha descompuesto, será igual al volúmen del prisma total DL. Pero éste y los prismas parciales tienen la misma altura, y la base ABCDE del total, es igual á la suma de las bases ABC, ACD, ADE de los parciales. Sumando pues las expresiones de los volúmenes de los prismas parciales, y sacando fuera de un paréntesis la altura, factor comun de los sumandos, resultará

vol. del prisma LD = área de su base por su altura.

C. C. E. E.

COROLARIO. *Dos prismas de bases equivalentes y alturas iguales, son equivalentes.*

TEOREMA CCIV

329. *Dos tetraedros OABC y O‘A‘B‘C‘* (fig. 296) *cuyas bases ABC y A‘B‘C‘ son equivalentes y cuyas alturas son iguales, son equivalentes.*

En efecto; supongamos que las bases ABC y A‘B‘C‘ están en un mismo plano, y desde un punto H‘ de este plano levantémosle la perpendicular H‘H igual á la altura de los tetraedros. Si dividimos la perpendicular H‘H en partes iguales, y trazamos planos por los puntos de división, que corten á los tetraedros y sean paralelos al plano de sus bases, se habrán producido en los dos tetraedros secciones triangulares respectivamente equivalentes; (291 cor.) es decir,

seccion	MDE	equivalente á la	M‘D‘E‘
»	NFG	»	N‘F‘G‘
»	PLR	»	P‘L‘R‘

Ahora si trazamos por DE, FG, LR, planos paralelos á la arista OA, y por D‘E‘ F‘G‘ L‘R‘ planos paralelos á la arista O‘A‘ se formarán prismas triangulares inscriptos en los tetraedros, y respectivamente equivalentes (328 cor.) los inscriptos en el tetraedro OABC á los inscriptos en el O‘A‘B‘C‘, y por consiguiente la suma de los primeros igual á la suma de los segundos.

Pero á medida que aumente el número de los prismas inscriptos, su suma crece acercándose al tetraedro respectivo; y como el número de dichos prismas puede ser tan grande como se desee, cuando sea infinito, la suma de los prismas inscriptos en cada tetraedro se habrá confundido con éste; y como dichas sumas son siempre equivalentes en todos los grados de su magnitud, los tetraedros tambien serán equivalentes. C. C. E. E.

TEOREMA CCV

330. *El volúmen de un tetraedro, es igual al tercio del producto del área de su base por su altura.*

En efecto; sea el tetraedro ABCD (fig. 297), trazando por el vértice A, las AF y AE iguales y paralelas respectivamente á las CD y CB, y uniendo por medio de rectas E y F, E y B, F y D, habremos construido el prisma triangular EAFBCD de iguales base y altura que el tetraedro propuesto.

Pero este prisma triangular, se compone del tetraedro ABCD, mas la pirámide cuadrangular ABDFE. Si hacemos pasar un plano por A, B, F, esta pirámide cuadrangular queda dividida en los dos tetraedros ABFE, y ABDF, equivalentes (329). Además los dos tetraedros BEAF y ABCD, son tambien equivalentes (329).

De aquí resulta que el prisma triangular EAFBCD se compone de los tres tetraedros equivalentes, ABCD, BAEF y ABDF; por consiguiente el tetraedro propuesto ABCD será la tercera parte del prisma EAFBCD, de igual base é igual altura. Pero el volúmen del prisma EAFBCD, es igual al producto del área de su base por su altura; luego el volúmen del tetraedro ABCD, será igual al tercio del producto del área de su base por su altura. C. C. E. E.

TEOREMA CCVI

331. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto del área de su base por su altura.*

En efecto; sea la pirámide OABCDE (fig. 298), descomponiéndola en tetraedros por medio de planos diagonales trazados desde una arista lateral OA, tendremos que la suma de los volúmenes de los tetraedros en que se ha descompuesto la pirámide propuesta, es igual al volúmen de ésta. Pero la pirámide propuesta y los tetraedros en que se ha descompuesto tienen la misma altura, y la base ABCDE de aquélla es igual á la suma de las bases ABC, ACD, ADE de los tetraedros.

Sumando pues las expresiones de los volúmenes de los tetraedros y sacando fuera de un paréntesis, la altura factor comun de los sumandos, resultará, que el volúmen de una pirámide es igual al tercio del área de su base por su altura. C. C. E. E.

TEOREMA CCVII

332. *El volúmen de un tetraedro truncado de bases paralelas es igual, al tercio del producto de su altura, por la suma de las áreas de sus bases y de la media proporcional entre ellas.*

En efecto, sea el tetraedro truncado de bases paralelas ABCDEF (fig. 299). Trazando los planos DCF y DCB, quedará descompuesto en los tres tetraedros CDEF, CDAB y CDBF.

Trazando la CG paralela á la arista BF y uniendo G con los dos vértices D, y B se habrá formado el tetraedro GDBF que tiene la base DBF comun con el CDBF, y la misma altura, pues los vértices C y G de dichos tetraedros están en la CG paralela al plano BDF. De modo, que estos tetraedros, el CDBF y el GDBF son equivalentes.

Por consiguiente el tetraedro propuesto ACBDEF, es equivalente á la suma de los tres tetraedros CDEF, CADB y GDBF.

Trazando ahora la GH paralela á DE, tendremos que las áreas de los triángulos GDF y GHF por tener la misma altura, serán proporcionales á sus bases. (227, cor. 3.º)

$$\frac{\text{área GDF}}{\text{área GHF}} = \frac{\text{DF}}{\text{HF}} \quad (a)$$

y como tambien los triángulos DEF y DGF tienen la misma altura sus áreas serán proporcionales á sus bases; y será

$$\frac{\text{área DEF}}{\text{área DGF}} = \frac{\text{EF}}{\text{GF}} \quad (b)$$

Pero las segundas razones de las proporciones (*a*) y (*b*) son iguales, por ser la HG paralela al lado DE del triángulo FDE; luego las primeras razones formarán proporcion, y será

$$\frac{\text{área GDF}}{\text{área GHF}} = \frac{\text{área DEF}}{\text{área DGF}} \quad (c)$$

de donde

$$\overline{\text{área GDF}}^2 = \text{área GHF} \times \text{área DEF} \quad (d).$$

Pero GHF = ACB sustituyendo en la igualdad anterior, en vez de área GHF su igual área ACB, resulta

$$\overline{\text{área GDF}}^2 = \text{área ACB} \times \text{área DEF}. \quad (m)$$

Observemos que los tres tetraedros CDEF, DACB y BDGF, cuya suma es equivalente al tetraedro propuesto ABCDEF, tienen la misma altura que éste, y además

la base del CDEF es DEF (base mayor del tetraedro propuesto)
la base del DACB es ACB, (base menor del tetraedro propuesto)
la base del BDGF es DGF (media proporcional entre las dos bases anteriores) (m)

Si hacemos

$$\text{DEF} = b, \quad \text{y} \quad \text{ACB} = b',$$

y llamamos a á la altura comun de todos estos tetraedros será

$$\text{Volúmen tetr. ABCDEF} = \frac{1}{3}\,a.b + \frac{1}{3}\,ab' + \frac{1}{3}\,a\sqrt{bb'} \quad \text{ó}$$

$$\text{Volúmen tetr. ABCDEF} = \frac{1}{3}\,a\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right). \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CCVIII

333. *El volúmen de una pirámide truncada de bases paralelas es igual, al tercio del producto de su altura por la suma de las áreas de sus bases y de la media proporcional entre ellas.*

En efecto; sean las pirámides OACDE y VMNP (fig. 300) de bases equivalentes y alturas iguales. Si trazamos las dos secciones A'C'D'E' y M'N'P' paralelas á sus respectivas bases, y equidistantes de ellas, tendremos (291 cor.) que las secciones A'C'D'E' M'N'P, son equivalentes, y como las alturas OL y VS de las pirámides parciales son iguales, resulta.

$$\text{Vol. OA'C'D'E'} = \text{Vol. VM'N'P'}. \quad (a)$$

Pero tambien

$$\text{Vol. OACDE} = \text{Vol. VMNP}. \quad (b)$$

Restando ordenadamente de la igualdad (b) la igualdad (a) será

$$\text{Vol. pirám. trunc. A'D} = \text{Vol. pirám. trunc. M'P}. \quad (c)$$

Ahora, llamando b, b' y a respectivamente á la base mayor, base menor y altura de la pirámide truncada M'P, será (332)

$$\text{Vol. pirám. trunc. M'P} = \frac{1}{3}\,a\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right) \quad (d)$$

Pero como (c) las pirámides truncadas A'D y M'P' son equivalentes, y además tienen las alturas iguales y sus respectivas bases equivalentes, sustituyendo en la igualdad (d) volúmen de la pirámide truncada A'D en vez de volúmen de la pirámide truncada M'P, tendremos

$$\text{Vol. pirám. trunc. A'D} = \frac{1}{3}\,a\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right). \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CCIX

334. *El volúmen de un prisma triangular truncado es igual, al tercio del producto del área de una de sus bases, por la suma de las perpendiculares bajadas á esta base, desde los vértices de la otra.*

En efecto; sea el prisma triangular truncado ABFECD (fig. 301), trazando los planos EFC y EFB quedará descompuesto el prisma en los tres tetraedros FEDC, FECB y FABE. Si trazamos ahora los planos BED y ADC, se formarán los tetraedros FEDC, AEDC y BEDC, que tienen la base comun EDC y cuyos vértices son F, A y B.

Examinando la figura se descubre facilmente, que el tetraedro FEBC es equivalente (329) al BEDC, y que el FBAE es tambien equivalente (329) al AEDC.

Resulta pues, que

prisma ABFECD es equival. á tet.° FEDC + tet.° AEDC + tet.° BEDC.

Luego (330) el volúmen del prisma ABFECD es igual al tercio del producto del área EDC por la suma de las distancias á la base EDC de los tres vértices F, A y B. C. C. E. E.

COROLARIO. El volúmen de un prisma truncado cualquiera, se hallará descomponiéndolo en prismas truncados triangulares, y sumando los volúmenes de éstos.

ESCOLIO. Si desde un punto interior de un poliedro cualquiera se trazan planos á todas sus aristas, quedará descompuesto en pirámides cuyas bases serán las caras del poliedro; y como toda pirámide se puede descomponer en tetraedros, resulta, que todo poliedro se puede descomponer en tetraedros. De aquí se deduce que el volúmen de un poliedro cualquiera se hallará sumando los volúmenes de las pirámides ó tetraedros en que se haya descompuesto.

L. 45

CAPÍTULO IV

VOLÚMENES DE LOS CUERPOS REDONDOS

§ I.—*Volúmenes del cono y del cilindro*

TEOREMA CCX

335. *El volúmen de un cono de revolucion es igual, al tercio del producto del área de la base del cono por su altura.*

En efecto; puesto que el cono de revolucion se puede considerar (297) como una pirámide regular de infinito número de caras laterales, puede aplicarse al cono de revolucion lo demostrado (331) para una pirámide cualquiera.

Llamando A á la altura de un cono de revolucion, y R al radio de su base, será

$$\text{Vol. de un cono de rev.} = \frac{1}{3}\,\pi R^2 A$$

TEOREMA CCXI

336. *El volúmen de un cono truncado de revolucion es igual, al tercio del producto de su altura, por la suma de las áreas de sus bases y de una media proporcional entre ellas.*

Puesto que un cono de revolucion, puede considerarse (297) como una pirámide; puede aplicarse al cono, lo demostrado (333) para la pirámide OACDE (fig. 300), y puesto que allí se demostró (igualdad *c)* que el volúmen de la pirámide truncada A'D es igual al volúmen del tetraedro truncado, M'P puede admitirse (puesto que un cono puede considerarse como una pirámide) que

El volúmen de un cono truncado de revolucion, es igual al volúmen de un tetraedro truncado de bases paralelas, cuyas bases son equivalentes respectivamente á las del cono truncado, y cuya altura es igual á la de éste.

Si llamamos pues b, b' respectivamente á las áreas de las bases mayor y menor del cono y del tetraedro truncado equivalente, y a' á la altura comun, será

$$\text{Volúmen cono trunc. de bases paralelas} = \frac{1}{3}\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right)$$

Si llamamos R al radio de la base mayor del cono, y r al radio de la base menor, la igualdad anterior se transforma en

$$\text{Vol. cono trunc. bases paral.} = \frac{1}{3}\,a\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2\,\pi r^2}\right) \text{ ó}$$

$$\text{Vol. cono trunc. bases paralela} = \frac{1}{3}\,a\pi\left(R^2 + r^2 + R.r\right)$$

TEOREMA CCXII

337. *El volúmen de un cilindro de revolución, es igual al producto del área de su base por su altura.*

En efecto; puesto que el cilindro de revolucion puede considerarse (300) como un prisma regular de infinito número de caras laterales, puede aplicarse al cilindro de revolucion lo demostrado (312, cor.) para un prisma recto cualquiera.

Llamando A á la altura de un cilindro de revolución, y R al radio de la base, será

$$\text{vol. de un cilindro rev.} = \pi R^2 A.$$

§ *II.—Volúmen de la esfera*

338. Sea EABJ (fig. 284) un semicírculo, AOB un sector circular y PQ la proyeccion del arco AB, (base del sector circular) sobre el diámetro EJ. Si gira dicho semicírculo al rededor del diámetro EJ hasta dar una vuelta completa, engendra una esfera.

El arco AB, engendra una zona esférica, que tiene por bases los dos círculos, cuyos radios son las perpendiculares AP y BQ.

El sector circular AOB engendra un cuerpo que se llama *sector esférico*, cuya base es la zona engendrada por el arco AB.

El cuadrilátero ABQP, (cuyo lado AB es un arco) engendra un cuerpo que se llama *segmento esférico*, cuyas bases son los dos círculos paralelos engendrados por AP y BQ, y cuya altura es la distancia entre las bases.

De estas consideraciones resulta que

SECTOR ESFÉRICO, *es el cuerpo engendrado por un sector circular que gira al rededor de un diámetro exterior á su superficie. La zona engendrada por el arco del sector circular generador, es la base del sector esférico.*

SEGMENTO ESFÉRICO, *es la porcion de esfera comprendida entre dos planos secantes paralelos. Los círculos determinados por los planos secantes, son las bases del segmento esférico; y la distancia entre las bases es la altura.*

Si uno de los planos secantes es tangente á la esfera, una de las bases se reduce á un punto, y entonces el segmento tiene una sola base.

TEOREMA CCXIII

339. *El volúmen del cuerpo engendrado por un triángulo OAB* (fig. 302, 303, 304, 305) *al girar al rededor de*

una recta EJ situada en el plano del triángulo, fuera de éste y que pasa por su vértice, es igual al producto del área engendrada por la base AB, multiplicada por la altura OH. el $\frac{1}{3}$ de

Distinguiremos tres posiciones del triángulo generador.

1.ª Cuando uno de los lados del triángulo generador coincide con el eje EJ, (fig. 302 y 303).

2.ª Cuando ningun lado del triángulo generador coincide con el eje, y la base es oblicua á éste. (fig. 304)

3.ª Cuando la base del triángulo es paralela al eje. (figura 305).

Primera posicion. Trazando la AR perpendicular al eje, (fig. 302), se forman los dos triángulos rectángulos ARO y ARB; por consiguiente al girar el triángulo OAB, se engendra un cuerpo compuesto de dos conos de revolucion, cuya base comun tiene por radio la perpendicular AR, y cuyas alturas son las OR y RB. Segun esto tendremos

$$\text{vol. eng. por OAR} = \frac{1}{3}\,\text{OR}.\pi\,\overline{\text{AR}}^2.$$

$$\text{vol. eng. por BAR} = \frac{1}{3}\,\text{RB}.\pi\,\overline{\text{AR}}^2.$$

de donde

$$\text{vol. eng. por OAB} = \frac{1}{3}\,\text{OR}.\pi\,\overline{\text{AR}}^2 + \frac{1}{3}\,\text{RB}.\pi\overline{\text{AR}}^2$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,\overline{\text{AR}}^2\,\text{OB}$$

ó

$$\text{vol. eng. por OAB} = \pi\,\overline{\text{AR}}^2.\,\frac{1}{3}\,\text{OB} \quad (a)$$

Ahora trazando la altura OH del triángulo OAB, y siendo

$$\text{OB}.\text{AR} = \text{AB}.\text{OH}$$

por expresar ambos miembros de esta igualdad el doble del área del triángulo OAB; si sustituimos en la igualdad (a) en vez del producto OB.AR su igual, AB.OH, resulta

$$\text{vol. eng. por OAB} = \pi\text{AR}.\text{AB}.\,\frac{1}{3}\,\text{OH}$$

ó $$\text{vol. eng. por OAB} = \text{área eng. por AB}.\,\frac{1}{3}\,\text{OH}$$

C. C. E. E.

Si como en la (fig. 303) la perpendicular AR cae fuera del triángulo OAB, la demostracion es la misma que se acaba de exponer, sin más diferencia que en vez de ser el cuerpo engendrado por OAB igual á la suma de los dos conos de revolucion engendrados por los triángulos OAR y BRA, es igual al cono engendrado por el triángulo BRA menos el engendrado por OAR.

Segunda posicion. Prolongando la base AB del triángulo generador (fig. 304) hasta que encuentre en S al eje, y trazando la altura OH del triángulo; tendremos que segun lo demostrado para la primera posicion;

$$\text{vol. eng. por OAS} = \text{área eng. por AS}.\frac{1}{3}\text{OH}$$

$$\text{vol. eng. por OBS} = \text{área eng. por BS}.\frac{1}{3}\text{OH} \quad \text{pero}$$

$$\text{vol. eng. por OAB} = \text{vol. eng. por OAS} - \text{vol. eng. por OBS},$$

y será

$$\text{vol. eng. por OAB} = \text{área eng. por AS}.\frac{1}{3}\text{OH} - \text{área eng. por BS}.\frac{1}{3}\text{OH}$$

ó

$$\text{vol. eng. por OAB} = (\text{área eng. por AS} - \text{área eng. por BS})\frac{1}{3}\text{OH}$$

ó por fin

$$\text{vol. eng. por OAB} = \text{área eng. por AB}.\frac{1}{3}\text{OH}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

Tercera posicion. Trazando la altura OH del triángulo OAB (fig. 305) y las AR y BT perpendiculares al eje, el cuerpo engendrado por el triángulo OAB, será igual al cilindro engendrado por el rectángulo RABT menos la suma de los conos engendrados, por los triángulos ARO y BTO.

Pero

$$\text{vol. eng. por RABT} = \pi\overline{\text{AR}}^2.\text{AB} = \pi\overline{\text{OH}}^2.\text{RT} \quad (a)$$

y

$$\left.\begin{array}{l}\text{vol. eng. por ARO} = \pi\overline{\text{OH}}^2.\frac{1}{3}\text{RO} \\ \text{vol. eng. por BTO} = \pi\overline{\text{OH}}^2\frac{1}{3}\text{OT}\end{array}\right\}$$

Sumando estas dos igualdades, será

$$\text{vol. eng. por ARO} + \text{vol. eng. por BOT} = \pi\overline{OH}^2 \tfrac{1}{3} RT. \quad (b)$$

Restando ordenadamente la igualdad (*b*) de la igualdad (*a*) resulta

$$\text{vol. eng. por OAB} = \pi\overline{OH}.^2 RT - \pi OH^2 \tfrac{1}{3} RT$$

$$= \pi\overline{OH}.^2 \tfrac{2}{3} RT.$$

ó

$$\text{vol. eng. por AOB} = 2\pi OH.RT.\tfrac{1}{3} OH = 2\pi AR.AB.\tfrac{1}{3} OH$$

Pero $2\pi AR.AB$, es el área engendrada por la ba AB, y $\frac{1}{3}$ OH es el tercio de la altura del triángulo OAB. Luego

$$\text{vol. eng. por OAB} = \text{área engendrada por AB} \times \tfrac{1}{3}\ OH.$$

TEOREMA CCXIV

El volúmen del cuerpo engendrado por el sector poligonal OABCDE (fig. 283) *al girar al rededor del eje EJ que pasa por el centro de la circunferencia inscripta en dicha línea quebrada, está situado en el plano de ésta y no la corta; es igual al producto del área engendrada por la línea quebrada regular ABCDE, multiplicada por el tercio del radio de dicha circunferencia inscripta.*

En efecto; el volúmen del cuerpo engendrado por el sector poligonal OABCDE, es igual á la suma de los volúmenes de los cuerpos engendrados por los triángulos OAB, OBC, OCD y ODE. Pero

$$\text{vol. eng. por OAB} = \text{área eng. por AB} \times \tfrac{1}{3} OM$$

$$\text{» » » OBC} = \text{área eng. por BC} \times \tfrac{1}{3} OM$$

$$\text{» » » OCD} = \text{área eng. por CD} \times \tfrac{1}{3} OM$$

$$\text{» » » ODE} = \text{área eng. por CD} \times \tfrac{1}{3} OM$$

Por consiguiente, sumando ordenadamente estas igualdades, tendremos

$$\left.\begin{array}{l}\text{vol. del cuerpo eng.}\\ \text{por OABCDE.}\end{array}\right\} = \text{Area eng. por ABCDE} \times \frac{1}{3}\,\text{OM}.$$

COROLARIO. Como al arco AB (fig. 284) se le puede considerar como una línea quebrada regular de infinito número de lados, si imaginamos que el sector circular gira al rededor del diámetro EJ, el volúmen del sector circular engendrado, será segun el teorema anterior igual al producto

$$\text{área engendrada por AB} \times \frac{1}{3}\,\text{OA};$$

pero AB engendra una zona.

Luego

El volúmen de un sector esférico es igual al producto del área de la zona que le sirve de base, por el tercio del radio de la esfera.

TEOREMA CCXV

340. *El volúmen de la esfera es igual al producto del área de su superficie por el tercio de su radio.*

En efecto; puesto que un semicírculo EABJ (fig. 284) se puede considerar como un sector circular, una esfera O, puede considerarse como un sector esférico en el que la zona que le sirve de base es la superficie esférica. Aplicando lo dicho en el corolario anterior tendremos

$$\text{vol. eng. por el semicír. EABJ} = \text{área eng. EABJ} \times \frac{1}{2}\,\text{EO}.$$

Luego el volúmen de una esfera O, es igual al área de su superficie por el tercio de su radio. C. C. E. E.

COROLARIO 1.° Puesto que el área de la esfera es igual (318, cor.) á $4\pi R^2$ tendremos

$$\text{vol. de la esfera} = 4\pi R^2\,\frac{1}{3}\,R \qquad \text{ó}$$

$$\text{vol. de la esfera} = \frac{4}{3}\,\pi R^3$$

COROLARIO 2.° Sustituyendo en la fórmula anterior D diámetro de la esfera en vez de 2R, tendremos

$$\text{vol. de la esfera} = \frac{1}{6}\,\pi D^3$$

LIBRO IV

DE LA SEMEJANZA DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS —DE LOS POLÍGONOS REGULARES

CAPÍTULO I

SEMEJANZA DE LOS POLIEDROS

341. Puesto que (288) poliedros semejantes son los que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales y colocados en el mismo orden, y además semejantes respectivamente las caras adyacentes á dichos diedros, resulta que los poliedros semejantes tienen sus ángulos poliedros respectivamente iguales, por cuanto tienen sus ángulos planos y ángulos diedros respectivamente iguales y colocados en el mismo orden. Podremos pues, sentar que,

Poliedros semejantes son los que tienen sus ángulos poliedros iguales, y además las caras respectivamente semejantes.

TEOREMA CCXVI

Si se corta una pirámide OABCD (fig. 266) *por un plano A'B'C'D' paralelo á la base ABCD, la pirámide OA'B'C'D' que resulta, es semejante á la propuesta.*

En efecto; estas dos pirámides tienen semejantes las bases ABCD, A'B'C'D', (290.—2.°), y tienen tambien semejantes las caras laterales AOB y A'O'B', BOC y B'O'C'...

Además el ángulo poliedro O, es comun para ambas, y,

triedro A = triedro A'
triedro B = triedro B'
triedro C = triedro C'
triedro D = triedro D'

por tener respectivamente iguales sus tres ángulos planos.

Si pues tienen iguales los ángulos poliedros respectivamente y semejantes las caras, son semejantes. C. C. E. E.

TEOREMA CCXVII

342. *Si dos tetraedros OABC, O'A'B'C' (fig. 306) tienen dos caras del uno respectivamente semejantes á dos caras del otro (OAB semejante á O'A'B', y OAC semejante á O'A'C') é iguales los diedros que forman estas caras (diedro OA = diedro O'A'), dichos tetraedros son semejantes.*

En efecto; superponiendo el diedro O'A', sobre su igual OA de modo que O' caiga sobre O, y A' en D entre O y A; las aristas O'B' y O'C' caerán sobre las OB y OC, y los puntos A', B' y C' tomarán respectivamente las posiciones D, E y F, de manera que el tetraedro O'A'B'C' habrá tomado la posicion ODEF.

Pero como por hipótesis O'A'B' y OAB son semejantes, y tambien lo son O'A'C' y OAC, resultará que los triángulos ODE y OAB son semejantes, y tambien lo son los ODF y OAC, por consiguiente (172) DE será paralela á AB, y DF á AC; de donde el plano EDF será paralelo al BAC, y (341) el tetraedro ODEF será semejante al OABC; luego los tetraedros OABC y O'A'B'C' serán semejantes. C. C. E. E.

TEOREMA CCXVIII

343. *Las áreas de las bases ABC, A'B'C' (fig. 306) de dos tetraedros semejantes OABC, O'A'B'C', son proporcionales á los cuadrados de las alturas OM, O'M' de dichos tetraedros.*

En efecto; si tomamos en la arista OA del tetraedro OABC, una parte OD, igual á O'A' arista del tetraedro O'A'B'C', homóloga á la OA; y por el punto D trazamos el plano DEF paralelo á la base ABC el tetraedro ODEF parcial que resulta es (341) semejante al total OABC, é igual (287) al O'A'B'C'.

Pero (290 3.°)

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área DEF}} = \frac{\overline{MO}^2}{\overline{PO}^2}$$

y como los tetraedros ODEF, O'A'B'C', son iguales, tendrán iguales sus alturas OP y O'M', y las áreas de sus bases. Sustituyendo en la proporcion anterior, tendremos

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área A'B'C'}} = \frac{\overline{MO}^2}{\overline{M'O'}^2} \qquad \text{C. C. E. E.}$$

COROLARIO. Segun lo demostrado (290, 1.°) tendremos la proporcion (fig. 306)

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OA}{OD} \qquad \text{y}$$

$$\text{como} \quad \left.\begin{array}{l} OP = O'M' \\ OD = O'A' \end{array}\right\} \quad \text{será}$$

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{OA}{O'A'} \qquad (a).$$

Además segun el teorema anterior

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área A'B'C'}} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M'}^2}$$

$$\text{Luego} \quad \frac{\text{área ABC}}{\text{área A'B'C'}} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2} \qquad (b)$$

De las proporciones (*a*) y (*v*) se deduce que

En dos tetraedros semejantes las alturas son proporcionales á las aristas homólogas, y las áreas de sus bases, son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.

TEOREMA CCXIX

344. *Si dos poliedros ABCDEF, A'B'C'D'E'F'* (fig. 307) *se componen del mismo número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

En efecto; suponiendo

AFED semejante á A'F'E'D'
AFDC semejante á A'F'D'C'
BADC semejante á B'A'D'C

se descubre facilmente examinando la figura, que los poliedros totales, tienen todas sus caras respectivamente semejantes, y todos los ángulos diedros respectivamente iguales, luego dichos poliedros serán semejantes.

TEOREMA CCXX

345. *Si dos poliedros ABCDEF, A'B'C'D'E'F'* (fig. 307) *son semejantes, pueden descomponerse en el mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos.*

En efecto; trazando los planos diagonales AFD y ADC, A'F'D' y A'D'C'; resultarán ambos poliedros descompuestos en tetraedros; y examinado la figura se descubre facilmente que de la semejanza de los poliedros se deduce la semejanza de los respectivos tetraedros.

TEOREMA CCXXI

La razon de las aristas homólogas de dos poliedros semejantes, es constante.

En efecto; puesto que dos aristas homólogas cualesquiera AD y A'D', pertenecen á dos caras distintas contiguas respectivamente semejantes, la razon de AD y A'D', será la misma que la de otras dos aristas homólogas pertenecientes á dichas dos caras, y por consiguiente igual tambien á la razon de otras dos aristas homólogas cualesquiera.

TEOREMA CCXXII

346. *Las áreas de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

En efecto; sean P y P' dos poliedros semejantes

A, B, C,... las caras de P.
A'B'C'.... las caras respectivamente homólogas de P'
a y *a'*.... dos lados homólogos de las caras A y A'
b y *b'*.... » » » » B y B'
c y *c'*.... » » » » C y C'

Puesto que son semejantes las caras homólogas de los poliedros P y P', tendremos (237)

$$\frac{\text{área A}}{\text{área A'}}=\frac{a^2}{a'^2},\ \frac{\text{área B}}{\text{área B'}}=\frac{b^2}{b'^2},\ \frac{\text{área C}}{\text{área C'}}=\frac{c^2}{c'^2}\ (K)$$

Pero como a y a', b y b' c y c', son aristas homólogas, y su razon es constante (Teor. CCXXI) será

$$\frac{a^2}{a'^2}=\frac{b^2}{b'^2}=\frac{c^2}{c'^2}.$$

De donde

$$\frac{\text{área A}}{\text{área A'}}=\frac{\text{área B}}{\text{área B'}}=\frac{\text{área C}}{\text{área C'}}\dots\dots=\frac{a^2}{a'^2}$$

y

$$\frac{\text{área A}+\text{área B}+\text{área C}\dots}{\text{área A'}+\text{área B'}+\text{área C'}\dots}=\frac{a^2}{a'^2}\quad \text{ó}$$

$$\frac{\text{área P}}{\text{área P'}}=\frac{a^2}{a'^2}\qquad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CCXXIII

347. *Los volúmenes de dos tetraedros semejantes OABC, O'A'B'C',* (fig. 306) *son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas*

En efecto; Sabemos (343 cor.) que

$$\frac{\text{área ABC}}{\text{área A'B'C'}}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2}$$

y

$$\frac{OM}{O'M'}=\frac{OA}{O'A'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y multiplicando por $\frac{1}{3}$ los dos primeros miembros será

$$\frac{\text{área ABC}.\frac{1}{3}\,OM}{\text{área AB'C'}\,\frac{1}{3}.O'M'}=\frac{\overline{OA}^3}{\overline{O'A'}^3}.\ \text{ó}\ \frac{\text{vol. OABC}}{\text{vol. O'A'B'C'}}=\frac{\overline{OA}^3}{\overline{O'A'}^3}.$$

C. C. E. E.

348. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

En efecto; sean P y p dos poliedros semejantes, y supongámoslos descompuestos en el mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos.

Sean T, T', T''... los tetraedros que componen el poliedro P, y t, t', t''... los respectivamente semejantes que componen el p.

A, B, C.., y a, b, c... las aristas homólogas de T y t
A', B', C'... y a', b', c'... las aristas homólogas de T' y t'
A'', B'', C''... y a'', b'', c''... las aristas homólogas de T'' y t''

y supongamos además que A y a sean aristas homólogas de P y p.

Segun el teorema anterior tendremos

$$\frac{\text{vol. T}}{\text{vol. } t} = \frac{A^3}{a^3}; \quad \frac{\text{vol. T}'}{\text{vol. } t'} = \frac{A'^3}{a'^3}; \quad \frac{\text{vol. T}''}{\text{vol. } t''} = \frac{A''^3}{a''^3}.$$

Y puesto que las segundas razones de estas proporciones son iguales, será

$$\frac{\text{vol. T}}{\text{vol. } t} = \frac{\text{vol. T}'}{\text{vol. } t'} = \frac{\text{vol. T}''}{\text{vol. } t''} \ldots = \frac{A^3}{a^3} \qquad \text{ó}$$

$$\frac{\text{vol. T} + \text{vol. T}' + \text{vol. T}''\ldots}{\text{vol. } t + \text{vol. } t' + \text{vol. } t''\ldots} = \frac{A^3}{a^3}, \text{ bien}$$

$$\frac{\text{vol. P.}}{\text{vol. } p.} = \frac{A^3}{a^3}. \qquad \text{C. C. E. E.}$$

CAPÍTULO II

SEMEJANZA DE LOS CUERPOS REDONDOS

349. Se llaman *conos semejantes*, los engendrados por triángulos semejantes.

Se llaman *cilindros semejantes*, los engendrados por rectángulos semejantes.

Todas las esferas son semejantes.

TEOREMA CCXXIV

Las áreas laterales de dos conos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas, á los cuadrados de los radios de sus bases y á los cuadrados de sus lados.

En efecto; sean A, R, y L, la altura, el radio de la base y el lado de un cono de revolucion, y A', R', L', la altura, el radio de la base y el lado, de otro cono de revolucion semejante al primero.

Puesto, que sus respectivos triángulos generadores son semejantes, será

$$\frac{R}{R'} = \frac{A}{A'} = \frac{L}{L'}$$

De esta serie de razones iguales se deducen las proporciones

$$\frac{\pi R}{\pi R'} = \frac{A}{A'}$$

$$\frac{L}{L'} = \frac{A}{A'}$$

multiplicándolas ordenadamente, tendremos

$$\frac{\pi RL}{\pi R'L'} = \frac{A^2}{A'^2} \qquad \text{y tambien}$$

$$\frac{\pi RL}{\pi R'L'} = \frac{A^2}{A'^2} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{L^2}{L'^2}. \qquad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CCXXV

350 *Las áreas laterales de dos cilindros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas y á los cuadrados de los radios de sus bases.*

En efecto; sean A, R y L, la altura, el radio de la base y el lado de un cilindro de revolucion, y A', R' L', la altura, el radio de la base y el lado de otro cilindro de revolucion semejante al primero.

Puesto que los rectángulos generadores son semejantes y las alturas y los lados son iguales en cada cilindro, será

$$\frac{R}{R'} = \frac{A}{A'}$$ de donde

$$\frac{2\pi R}{2\pi R'} = \frac{A}{A'}$$

y como

$$\frac{L}{L'} = \frac{A}{A'},$$

si multiplicamos ordenadamente las dos últimas proporciones tendremos

$$\frac{2\pi RL}{2\pi R'L'} = \frac{A^2}{A'^2},$$ y puesto que

$$\frac{A^2}{A'^2} = \frac{R^2}{R'^2}$$ será

$$\frac{2\pi RL}{2\pi R'L'} = \frac{A^2}{A'^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$ C. C. E. E.

TEOREMA CCXXVI

351 *Las áreas de dos esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

En efecto, sean R y R', los radios de dos esferas E y E'. Tendremos

$$\text{Area E} = 4\pi R^2$$

$$\text{Area E}' = 4\pi R'^2$$

Dividiendo ordenadamente estas igualdades, y simplificando el segundo miembro del resultado, será

$$\frac{\text{Area E}}{\text{Area E}'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$ C. C. E. E.

TEOREMA CCXXVII

352 *Los volúmenes de dos conos semejantes, son proporcionales á los cubos de sus alturas, á los cubos de los radios de sus bases y á los cubos de sus lados.*

En efecto; será A, R, L, la altura, el radio de la base y el lado de un cono de revolución; y A‘, R‘, L‘, la altura, el radio de la base y el lado de otro cono de revolucion semejante al primero.

Puesto que los respectivos triángulos generadores son semejantes, tendremos

$$\frac{R}{R'}=\frac{A}{A'}=\frac{L}{L'},$$ y de esta série de razones iguales deduciremos

$$\frac{R^3}{R'^3}=\frac{A^3}{A'^3}=\frac{L^3}{L'^3} \quad (a)$$

$$\frac{\pi R^2}{\pi R'^2}=\frac{R^2}{R'^2} \quad (b)$$

$$\frac{A}{A'}=\frac{R}{R'} \quad (c)$$

Multiplicando ordenadamente las proporciones (*b*) y (*c*), y multiplicando por $\frac{1}{3}$ los dos primeros términos de la proporcion que resulte, tendremos

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 A}{\frac{1}{3}\pi R'^2 A'}=\frac{R^3}{R'^3},$$ y segun la série de razones (*a*) será

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 A}{\frac{1}{3}\pi R'^2 A'}=\frac{A^3}{A'^3}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{L^3}{L'^3}. \quad \text{C. C. E. E.}$$

TEOREMA CCXXVIII

353 *Los volúmenes de dos cilindros semejantes, son proporcionales, á los cubos de sus alturas, y á los cubos de los radios de sus bases.*

En efecto; sean A, R la altura y el radio de la base de un cilindro de revolucion; y A', R' la altura y el radio de la base de otro cilindro de revolucion semejante al primero.

Puesto que los respectivos rectángulos generadores son semejantes, tendremos

$$\frac{A}{A'} = \frac{R}{R'} \quad (a)$$

$$\frac{R^3}{R'^3} = \frac{A^3}{A'^3} \quad (b)$$

$$\frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2} \quad (c)$$

Multiplicando ordenadamente las proporciones (*a*) y (*c*) tendremos

$$\frac{\pi R^2 A}{\pi R'^2 A'} = \frac{R^3}{R'^3},$$ y segun la proporcion (*b*) será

$$\frac{\pi R^2 A}{\pi R'^2 A'} = \frac{A^3}{A'^3} = \frac{R^3}{R'^3}.$$ C. C. E. E.

TEOREMA CCXXIX

354 *Los volúmenes de dos esferas, son proporcionales á los cubos de sus radios.*

En efecto; sea R y R', los radios de dos esferas E y E'
Tendremos

$$\text{vol. E} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{vol. E'} = \frac{4}{3}\pi R'^3$$

Dividiendo ordenadamente estas igualdades y simplificando el segundo miembro de la igualdad que resulta, será

$$\frac{\text{vol. E.}}{\text{vol. E}'.} = \frac{R^3}{R'^3} = \qquad \text{C. C. E. E.}$$

CAPÍTULO III

DE LOS POLIEDROS REGULARES

355. POLIEDROS REGULARES, son los que tienen iguales y regulares todas sus caras, é iguales todos sus ángulos diedros.

TEOREMA CCXXX

No pueden existir mas que cinco poliedros regulares convexos.

En efecto; sabemos (281) que la suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro rectos, y que el triedro es el más sencillo de los ángulos poliedros; por consiguiente los ángulos poliedros de un poliedro constará lo menos de de tres ángulos planos, cuya suma debe ser menor que 360°.

Como además las caras de los poliedros regulares son polígonos regulares, los ángulos poliedros de cada poliedro estarán formados por tres ó más ángulos de polígonos regulares iguales.

Ahora

Angulo de triángulo regular $= 60°$

Angulo de cuadrilátero regular ó cuadrado $= 90°$

Angulo de pentágono regular $= 108°$

Angulo de exágono regular $= 120°$

Resulta pues de todo lo dicho, que

Se puede formar ángulo poliedro con tres ángulos de triángulo regular, porque su suma 180°, es menor que 360°.

El poliedro correspondiente es el *tetraedro regular* (fig. 308)

Se puede formar ángulo poliedro con cuatro ángulos de triángulo regular, porque la suma 240°, es menor que 360°.

El poliedro correspondiente es el *octaedro regular* (fig. 309).

Se puede formar ángulo poliedro con cinco ángulos de triángulo regular, porque su suma 300°, es menor que 360°. El poliedro correspondiente es el *icosaedro regular* (fig. 310).

La suma de seis ángulos de triángulo regular es igual á 360°, luego no se puede formar ángulo poliedro con más de cinco ángulos de triángulo regular.

Se puede formar ángulo poliedro con tres ángulos de cuadrado, porque su suma 270°, es menor que 360°. El poliedro correspondiente es el *exaedro ó cubo* (fig. 311)

La suma de cuatro ángulos de cuadrado, vale 360°; luego no se puede formar ángulo poliedro con más de tres ángulos de cuadrado.

Se puede formar ángulo poliedro con tres ángulos de pentágono regular, porque su suma 324° es menor que 360°. El poliedro correspondiente es el *dodecaedro regular* (fig. 312)

La suma de cuatro ángulos de pentágono regular vale 424° mayor que 360; luego no se puede formar ángulo poliedro con más de tres caras de pentágono regular.

La suma de tres ángulos de exágono regular vale 360°; luego no se puede formar ángulo poliedro con ángulos de exágono regular.

Y puesto que el valor del ángulo de un polígono regular crece con el número de lados, resulta, que no se puede formar ángulo poliedro con ángulos de polígonos regulares de más de cinco lados.

Por consiguiente no puede haber más poliedros regulares que los cinco siguientes:

El *tetraedro regular*, que consta de cuatro caras triangulares, cuatro vértices y seis aristas. (fig. 308)

El *octaedro regular*. que consta de ocho caras triangulares, seis vértices y doce aristas. (fig. 309)

El *icosaedro regular*, que consta de veinte caras triangulares, doce vértices y treinta aristas. (fig. 310)

El *exaedro ó cubo*, que consta de seis caras cuadrangulares, ocho vértices y doce aristas. (fig. 311)

El *dodecaedro*, que consta de doce caras pentagonales, veinte vértices y treinta aristas. (fig. 312)

Fin de la Geometría

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

PRELIMINARES

1. Al examinar (geometría 131) los casos generales de igualdad de triángulos hemos visto, que un triángulo queda determinado cuando se conocen tres de sus seis elementos, siempre que entre los elementos conocidos haya un lado.

En virtud de esta determinacion se han propuesto y se han resuelto los problemas XX, XXI, XXII y XXIII, (Geometría).

Estos problemas están comprendidos en el siguiente problema general:

Conocidos tres elementos que determinen un triángulo, hallar los otros tres.

Este problema de la resolucion de los triángulos, que constituye el objeto de la TRIGONOMETRÍA, no se resuelve con la necesaria exactitud por los procedimientos gráficos empleados en la GEOMETRÍA, por lo que se ha acudido al cálculo algebraico. Pero como el establecer ecuaciones que expresen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo presenta grandes dificultades, se han introducido, para obviar este inconveniente, las líneas trigonométricas, que se relacionan con los lados de los triángulos mediante ecuaciones sencillas, y que sirven además para determinar los ángulos.

LA TRIGONOMETRÍA *tiene, pues, por objeto la resolucion de los triángulos por medio del cálculo algebraico.*

Se divide en *rectilínea* y *esférica*, segun que trata de la resolucion de los triángulos rectilíneos ó de los triángulos esféricos.

situado en el origen del arco, y el diámetro prolongado que pasa por su extremo.

SECANTE *trigonométrica de un arco es la distancia entre el centro y el extremo de su tangente.*

SENOVERSO *de un arco es la parte de diámetro comprendida entre el pie del seno y el origen del arco.*

En este tratado solo nos ocuparemos del seno y de la tangente.

3. El arco MB que sumado con el AB dá un cuadrante, es el complemento del arco A B.

BL seno del arco BM, complemento del AB, es el COSENO del arco AB, y como BL es igual á SO, SO es tambien el coseno del arco AB; MK tangente del arco MB, complemento del A B, es la COTANGENTE del arco A B.

En general:

Arcos complementarios son dos arcos que sumados dan un cuadrante. Cada uno de estos arcos es el complemento del otro.

COSENO *de un arco es el seno de su complemento, ó la distancia entre el pie del seno y el centro.*

COTANGENTE *de un arco es la tangente de su complemento.*

Las palabras seno, coseno, tangente y cotangente, se expresan abreviadamente sen., cos., tang., cot.

4. Si prolongamos el seno BS hasta que encuentre á la circunferencia en otro punto E, veremos (Geom. 59) que

$$BS = SE,$$

y que arco AB = arco AE, de donde se deduce

$$BAE = 2\ BA$$

$$\text{y } BS = \tfrac{1}{2}\ BE$$

Luego,

El seno de un arco es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo.

5. La aplicación del cálculo algebráico nos conduce á considerar en los arcos y en las líneas trigonométricas, además de su valor, su afeccion cualitativa; es decir, que los arcos y las líneas trigonométricas serán *positivos* ó *negativos*.

Consideramos como positivos los arcos que partiendo de A, punto de origen, crecen en el sentido ABMC.....; y como *situado en el origen del arco, y el diámetro prolongado que pasa por su extremo.*

SECANTE *trigonométrica de un arco es la distancia entre el centro y el extremo de su tangente.*

SENOVERSO *de un arco es la parte de diámetro comprendida entre el pie del seno y el origen del arco.*

En este tratado solo nos ocuparemos del seno y de la tangente.

3. El arco MB que sumado con el AB dá un cuadrante, es el complemento del arco A B.

BL seno del arco BM, complemento del AB, es el COSENO del arco AB, y como BL es igual á SO, SO es tambien el coseno del arco AB; MK tangente del arco MB, complemento del A B, es la COTANGENTE del arco A B.

En general:

Arcos complementarios son dos arcos que sumados dan un cuadrante. Cada uno de estos arcos es el complemento del otro.

COSENO *de un arco es el seno de su complemento, ó la distancia entre el pie del seno y el centro.*

COTANGENTE *de un arco es la tangente de su complemento.*

Las palabras seno, coseno, tangente y cotangente, se expresan abreviadamente sen., cos., tang., cot.

4. Si prolongamos el seno BS hasta que encuentre á la circunferencia en otro punto E, veremos (Geom. 59) que

$$BS = SE,$$

y que arco AB = arco AE, de donde se deduce

$$BAE = 2\,BA$$

$$\text{y } BS = \tfrac{1}{2}\,BE$$

Luego,

El seno de un arco es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo.

5. La aplicación del cálculo algebráico nos conduce á considerar en los arcos y en las líneas trigonométricas, además de su valor, su afeccion cualitativa; es decir, que los arcos y las líneas trigonométricas serán *positivos* ó *negativos*.

Consideramos como positivos los arcos que partiendo de A, punto de origen, crecen en el sentido ABMC.....; y como negativos los que partiendo de A, punto de origen, crecen en sentido inverso, es decir, en el sentido AEPD.....

Los arcos en su crecimiento no tienen límite.

Consideraremos como positivas las líneas trigonométricas que tengan la misma direccion que las de un arco positivo menor que un cuadrante; y como negativas las que tengan direccion contraria,

Segun esto, son positivas el seno BS, la tangente AT, el coseno SO y la cotangente MK, líneas trigonométricas del arco AB positivo y menor que un cuadrante; y serán negativas las líneas trigonométricas que respectivamente tengan direccion contraria.

6. Si partiendo de A, origen de los arcos, tomamos un arco AB mayor que cero y menor que un cuadrante, su complemento será el arco + BM, puesto que (*)

$$(+ AB) + (+ BM) = 90^\circ$$

Segun las definiciones dadas, las líneas trigonométricas del arco AB son:

BS, el seno
AT, la tangente
SO, el coseno
MK, la cotangente

Si el arco AB crece acercándose á un cuadrante, observaremos examinando la figura, que aumentan el seno y la tangente, disminuyendo el coseno y la cotangente.

Cuando el arco AB continuando en su crecimiento llega á ser igual al cuadrante AMB, su seno es igual al radio, su tangente es infinita, y su coseno y su cotangente son iguales á cero.

Si partiendo de A origen de los arcos tomamos un arco AMC mayor que un cuadrante y menor que dos, su complemento será el arco — MC, puesto que

$$(+ AMC) + (- MC) = 90^\circ.$$

Segun las definiciones dadas, las líneas trigonométricas del arco AMC son:

(*) El origen de los arcos complementarios es M, siendo positivos los que se cuentan en el sentido MB, y negativos los que se cuentan en el sentido MC.

CS', el seno
AT', la tangente
S'O, el coseno
MK', la cotangente

Si el arco AMC continua creciendo, entre uno y dos cuadrantes, observaremos examinando la figura, que disminuyen el seno y la tangente, y crecen el coseno y la cotangente.

Cuando el arco llega á ser el AMN, igual á media circunferencia, el seno y la tangente son iguales á cero, el coseno es igual al radio y la cotangente es infinita.

Si partiendo de A, punto de origen, tomamos el arco AMND, mayor que dos cuadrantes y menor que tres, su complemento será el arco — MND, puesto que

$$(+ \text{AMND}) + (- \text{MND}) = 90°.$$

Segun las definiciones dadas, las líneas trigonométricas del arco AMND son:

DS', el seno
AT, la tangente
OS', el coseno
MK, la cotangente

Si el arco AMND continua creciendo, entre dos y tres cuadrantes observaremos, examinando la figura, que aumentan el seno y la tangente, y disminuyen el coseno y la cotangente.

Cuando el arco llega á ser el AMNP, igual á tres cuadrantes, su seno es igual al radio, su tangente infinita, y su coseno y su cotangente son iguales á cero.

Si partiendo de A, punto de origen, tomamos el arco AMNPE mayor que tres cuadrantes y menor que cuatro, su complemento será — MNPE, puesto que

$$(+ \text{AMNPE}) + (- \text{MNPE}) = 90°.$$

Segun las definiciones dadas, las líneas trigonométricas del arco AMNPE, son:

ES, el seno
AT', la tangente
SO, el coseno
MK', la cotangente

Si el arco AMNPE continua creciendo, entre tres y cuatro cuadrantes observaremos, examinando la figura, que disminuyen el seno y la tangente, y que aumentan el coseno y la cotangente.

Cuando el arco llega á ser el AMNPA, igual á cuatro cuadrantes, el seno y la tangente se reducen á cero, el coseno es igual al radio y la cotangente es infinita.

Si el arco AB, menor que un cuadrante, disminuye hasta reducirse á cero, confundiéndose el extremo B con el origen A, su complemento será el cuadrante + MBA puesto que

$$\text{cero} + (+\text{ MBA}) = 90^\circ$$

Las líneas trigonométricas del arco cero serán, el seno y la tangente iguales á cero, el coseno igual al radio y la cotangente infinita.

7. ESCOLIO. Conviene observar, que si añadimos á cualquiera de los arcos considerados en esta discusion una ó más circunferencias, las líneas trigonométricas permanecen las mismas; porque el origen y el extremo de los arcos, que se diferencian en una ó más circunferencias, son los mismos. De modo que un arco dado no tiene más que un seno, una tangente, un coseno y una cotangente; pero una cualquiera de estas líneas trigonométricas corresponde á un número indefinido de arcos. De esta consideracion resulta, que si a es un arco cualquiera positivo menor que una circunferencia, puesto que 2π es el valor de una circunferencia cuando el radio es igual á uno; $2k\pi + a$, será la expresion general de todos los arcos que tienen los mismos extremos que el arco a, siendo k cero ó número entero positivo ó negativo. Por consiguiente todos los arcos comprendidos en la expresion $2k\pi + a$, tienen las mismas líneas trigonométricas.

8. Examinando la figura, y teniendo presente lo dicho, (5) veremos que los arcos comprendidos entre 0° y 90°, tienen el seno, el coseno, la tangente y la cotangente positivas.

Los arcos comprendidos entre 90° y 180° tienen el seno positivo, y la tangente, el coseno y la cotangente negativas.

Los arcos comprendidos entre 180° y 270° tienen el seno y el coseno negativos, y la tangente y la cotangente positivas.

Los arcos comprendidos entre 270° y 360° tienen el coseno positivo, y el seno, la tangente y la cotangente negativas.

Además los valores de las líneas trigonométricas de los arcos 0°, 90°, 180°, 270° y 360° son los que se expresan en la siguiente tabla:

	Arco 0°	Arco 90°	Arco 180°	Arco 270°	Arco 360°
sen	O	+R	O	—R	O
cos	+R	O	—R	O	+R
tang	O	$\pm\infty$	O	$\pm\infty$	O
cot	$\mp\infty$	O	$\mp\infty$	O	$\mp\infty$

(*)

§ *II.—Relaciones entre las líneas de dos arcos iguales y de signo contrario, de dos arcos complementarios, y dos arcos suplementarios.*

9. Si desde A (fig. 313) punto de origen, tomamos en la circunferencia dos partes iguales AB y AE, éstos serán dos arcos iguales y de signo contrario. El complemento del arco positivo + AB, será + MB; y el complemento del arco negativo — AE será + MAE.

Trazando las líneas trigonométricas de dichos arcos + AB y — AE, segun las definiciones dadas, tendremos

	Del arco + AB	Del arco — AE
seno	+ BS	— ES
coseno	+ OS	+ OS
tangente	+ AT	— AT'
cotangente	+ KM	— K'M

y observando que

triángulo BSO = triángulo SEO
triángulo TAO = triángulo T'AO
triángulo KOM = triángulo K'OM

resulta

(*) En los signos de ambigüedad, el superior corresponde á los ángulos crecientes, y el inferior á los decrecientes.

Que los arcos + AB y — AE iguales y de signo contrario, tienen sus líneas trigonométricas iguales y de signo contrario, excepto el coseno que es igual y del mismo signo en ambos arcos.

De modo, que siendo $+a$ y $-a$ dos arcos iguales y de signo contrario, segun lo que se acaba de demostrar, será

$$\begin{aligned} \text{sen.}\ a &= -\text{sen.}\ (-a) \\ \text{cos.}\ a &= \text{cos.}\ (-a) \\ \text{tang.}\ a &= -\text{tang.}\ (-a) \\ \text{cot.}\ a &= -\text{cot.}\ (-a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{sen.}\ (-a) &= -\text{sen.}\ a \\ \text{cos.}\ (-a) &= \text{cos.}\ a \\ \text{tang.}\ (-a) &= -\text{tang.}\ a \\ \text{cot.}\ (-a) &= -\text{cot.}\ a \end{aligned}$$

10. De las definiciones dadas (3) se deduce, que siendo a un arco, $(90^\circ - a)$ es su complemento, y que el complemento de $(90^\circ + a)$ es $-a$. Por consiguiente será

$$\begin{aligned} \text{sen.}\ (90^\circ - a) &= \text{cos.}\ a \\ \text{tang.}\ (90^\circ - a) &= \text{cot.}\ a \\ \text{cos.}\ (90^\circ - a) &= \text{sen.}\ a \\ \text{cot.}\ (90^\circ - a) &= \text{tang.}\ a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen.}\ (90^\circ + a) &= \text{cos.}\ (-a) = \text{cos.}\ a \\ \text{tang.}\ (90^\circ + a) &= \text{cot.}\ (-a) = -\text{cot.}\ a \\ \text{cos.}\ (90^\circ + a) &= \text{sen.}\ (-a) = -\text{sen.}\ a \\ \text{cot.}\ (90^\circ + a) &= \text{tang.}\ (-a) = -\text{tang.}\ a \end{aligned}$$

11. Si desde el punto B, extremo del arco AB, trazamos la cuerda BC paralela al diámetro AN, los arcos AB y CN serán iguales.

Ahora AMC y CN son suplementarios; luego tambien lo serán los arcos AMC y AB. Trazando las líneas trigonométricas de estos arcos, y segun las definiciones dadas (2 y 3), tendremos

	Del arco AB	Del arco AMC
sen	$+$ BS	$+$ CS'
cos	$+$ OS	$-$ OS'
tang	$+$ AT	$-$ AT'
cot	$+$ MK	$-$ MK'

y observando que

$$\begin{aligned} \text{triángulo } BOS &= \text{triángulo } COS' \\ \text{triángulo } TAO &= \text{triángulo } T'AO \\ \text{triángulo } KMO &= \text{triángulo } K'MO, \end{aligned}$$

resulta que

Los arcos AB y AMC, que son suplementarios, tienen las líneas trigonométricas iguales y de signo contrario, excepto el seno que es igual y del mismo signo en ambos arcos.

Siendo a y $(180^\circ - a)$ dos arcos suplementarios, segun lo que acabamos de demostrar, será

$$\begin{aligned} \text{sen. } a &= \text{sen. } (180^\circ - a) \\ \text{cos. } a &= -\text{cos. } (180^\circ - a) \\ \text{tang. } a &= -\text{tang } (180^\circ - a) \\ \text{cot. } a &= -\text{cot. } (180^\circ - a) \end{aligned}$$

Esto puede tambien demostrarse por medio de las siguientes transformaciones:

$$\text{sen. } (180^\circ - a) = \text{sen. } (90^\circ + (90^\circ - a)) = \text{cos. } (-(90^\circ - a)) = \text{cos. } (90^\circ - a) = \text{sen. } a.$$

$$\text{cos. } (180^\circ - a) = \text{cos. } (90^\circ + (90^\circ - a)) = \text{sen. } (-(90^\circ - a)) = -\text{sen } (90^\circ - a) = -\text{cos. } a.$$

$$\text{tang. } (180^\circ - a) = \text{tang. } (90^\circ + (90^\circ - a)) = \text{cot. } (-(90^\circ - a)) = -\text{cot } (90^\circ - a) = -\text{tang. } a.$$

$$\text{cot. } (180^\circ - a) = \text{cot. } (90^\circ + (90^\circ - a)) = \text{tang. } (-(90^\circ - a)) = -\text{tang. } (90^\circ - a) = -\text{cot. } a.$$

§. III —*Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco.*

12. Trazando el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de un arco cualquiera AB (fig. 313) tendremos el triángulo rectángulo BSO, y segun el teorema de Pitágoras

$$\overline{BO}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{OS}^2$$

Llamando a al arco AB, y observando que BO es el radio, BS el seno y SO el coseno del arco AB, la igualdad anterior puede transformarse en

$$R^2 = \text{sen.}^2\, a + \cos.^2\, a \qquad (1)$$

De la semejanza de los triángulos TAO y BSO se deduce la proporcion

$$\frac{AT}{AO} = \frac{BS}{SO}$$

y como AT es la tangente del arco AB, y AO es el radio, tendremos que la proporcion anterior se puede transformar en

$$\frac{\text{tang.}\, a}{R} = \frac{\text{sen.}\, a}{\cos.\, a} \quad \text{de donde}$$

$$\text{tang.}\, a = \frac{R \,.\, \text{sen.}\, a}{\cos.\, a} \qquad (2)$$

De la semejanza de los triángulos KMO y BSO, se deduce la proporcion

$$\frac{KM}{MO} = \frac{OS}{BS}$$

y como KM es la cotangente del arco AB, y OM es el radio, tendremos que la proporcion anterior se puede transformar en

$$\frac{\cot.\, a}{R} = \frac{\cos.\, a}{\text{sen.}\, a} \quad \text{de donde}$$

$$\cot. a = \frac{R . \cos . a}{\operatorname{sen} . a} \quad (3)$$

De la semejanza de los triángulos TAO y KMO, se deduce la proporcion

$$\frac{KM}{OM} = \frac{OA}{AT}$$

que segun lo dicho puede transformarse en

$$\frac{\cot. a}{R} = \frac{R}{\tang. a}$$ de donde

$$R^2 = \tang. a . \cot. a \quad (4)$$

De la fórmula (2) se deduce

$$R^2 + \tang.^2 a = R^2 + \frac{R^2 . \operatorname{sen}.^2 a}{\cos.^2 a}$$

y de esta

$$R^2 + \tang.^2 a = \frac{R^4}{\cos.^2 a} \quad (5)$$

Del mismo modo se deduce de la fórmula (3)

$$R^2 + \cot.^2 a = \frac{R^4}{\operatorname{sen}.^2 a} \quad (6)$$

ESCOLIO. Las fórmulas

$$\operatorname{sen}.^2 a + \cos.^2 a = R^2$$

$$\tang. a = \frac{R . \operatorname{sen} . a}{\cos . a}$$

$$\cot . a = \frac{R . \cos . a}{\operatorname{sen} . a}$$

en las que entran las cuatro cantidades, sen. a, cos. a, tang a, cot. a además del radio, forman un sistema determinado de ecuaciones conociendo el radio y cualquiera de las otras cantidades. Por consiguiente dadas el radio y cualquiera de las líneas trigonométricas, se pueden determinar las demás.

13. Si en las fórmulas (1), (2), (3), (4), (5) y (6), deducidas en el párrafo anterior, tomamos R por unidad para medir todas las líneas que entran en ellas, se reducirán á estas más sencillas

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sen.}^2 a + \cos.^2 a = 1\\
&\text{tang.}\, a = \frac{\text{sen.}\, a}{\cos.\, a}\\
&\cot.\, a = \frac{\cos.\, a}{\text{sen.}\, a}\\
&\text{tang.}\, a \cot.\, a = 1\\
&1 + \text{tang.}^2 a = \frac{1}{\text{sen}^2 a}\\
&1 + \cot.^2 a = \frac{1}{\cos.^2 a}
\end{aligned}\right\} \quad (F)$$

Si se quiere restablecer el radio en estas fórmulas, es decir, si se quiere tomar por unidad para medir las líneas que entran en ellas una unidad diferente de R, bastará sustituir en dichas fórmulas, en vez de sen. a, cos. a, tang. a, cot. a, respectivamente $\frac{\text{sen.}\, a}{R}$, $\frac{\cos.\, a}{R}$, $\frac{\text{tang.}\, a}{R}$, $\frac{\cot.\, a}{R}$.

§. *IV.—Fórmulas de las líneas trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos arcos*

14. Sean (fig. 314) AB $= a$, y BC $= b$, dos arcos positivos, cuya suma ABC sea menor que un cuadrante. Trazando los radios OA y OB, y las BM y CP perpendiculares á OA, y la CS perpendicular á OB serán

$$(K)\quad \begin{cases} BM = \text{sen. } a \\ MO = \cos. \ a \\ CS = \text{sen. } b \\ OS = \cos. \ b \\ CP = \text{sen. } (a+b) \\ OP = \cos. \ (a+b). \end{cases}$$

Trazando además desde S, la SQ perpendicular á la CP, y la SN perpendicular á la AO, tendremos

$$\text{sen. } (a+b) = CP = CQ + QP = CQ + SN$$
$$\cos. \ (a+b) = OP = ON - NP = ON - SQ$$

ó

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen. } (a+b) = CQ + SN \\ \cos. \ (a+b) = ON - SQ \end{array}\right\} (H)$$

Ahora como el triángulo OBM es semejante al OSN, y al SQC (Geometría 175, y 179 cor. 3.), podremos establecer las siguientes proporciones.

$$\frac{BO}{OS} = \frac{BM}{SN} \qquad \frac{BO}{CS} = \frac{BM}{SQ}$$
$$\text{y}$$
$$\frac{BO}{OS} = \frac{OM}{ON} \qquad \frac{BO}{CS} = \frac{OM}{CQ}$$

Sustituyendo en ellas los valores (K) y haciendo $R = 1$, se convierten en

$$\frac{1}{\cos. \ b} = \frac{\text{sen. } a}{SN} \qquad \frac{1}{\text{sen. } b} = \frac{\text{sen. } a}{SQ}$$
$$\text{y}$$
$$\frac{1}{\cos. \ b} = \frac{\cos. \ a}{ON} \qquad \frac{1}{\text{sen. } b} = \frac{\cos. \ a}{CQ}$$

Pero de estas últimas proporciones se deduce

$$SN = \text{sen. } a \ . \ \cos. \ b; \qquad SQ = \text{sen. } a \ . \ \text{sen. } b$$
$$ON = \cos. \ a \ . \ \cos. \ b; \qquad CQ = \cos. \ a \ . \ \text{sen. } b$$

Sustituyendo ahora estos valores en las igualdades (H) resulta

$$(7)\ \text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a.\cos.b+\cos.a.\text{sen.}b$$
$$(8)\ \cos.(a+b)=\cos.a.\cos.b-\text{sen.}a.\text{sen.}b$$

Pero como estas fórmulas solo se han demostrado para el caso particular en que a y b son positivos y su suma $(a+b)$ es menor que un cuadrante, vamos á probar que son ciertas para dos arcos cualesquiera.

1.° Supongamos que los arcos a y b son positivos menores que un cuadrante, y cuya suma $(a+b)$ es mayor que un cuadrante.

Si llamamos a' y b', á los arcos respectivamente complementarios de a y b, será

$$a+a'=90°,\quad b+b'=90°,\quad \text{y}\quad (a+b)+(a'+b')=180°$$

y puesto que

$$a+b>90° \quad \text{será} \quad a'+b'<90°.$$

De lo dicho (10) y (11) y segun las fórmulas (7) y (8) se deduce,

$$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}(a'+b')=\text{sen.}a'\cos.b'+\cos.a'\text{sen.}b'$$
$$=\cos.a.\text{sen.}b+\text{sen.}a\cos.b=\text{sen.}a.\cos.b+\cos.a.\text{sen.}b$$

de donde

$$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a.\cos.b+\cos.a\,\text{sen.}b.$$

Del mismo modo

$$\cos.(a+b)=-\cos.(a'+b')=-(\cos.a'.\cos.b'-\text{sen.}a'\text{sen.}b')$$
$$=\text{sen.}a'\text{sen.}b'-\cos.a'\cos.b'=\cos.a.\cos.b-\text{sen.}a.\text{sen.}b.$$

de donde

$$\cos.(a+b)=\cos.a.\cos.b-\text{sen.}a.\text{sen.}b.$$

Luego las fórmulas (7) *y* (8) *son verdaderas, para dos arcos* a *y* b, *menores que un cuadrante, y cuya suma* (a + b) *es mayor que un cuadrante.*

2.° Suponiendo verdaderas las fórmulas (7) y (8) para dos arcos cualesquiera a y b, si añadimos 90° á uno de dichos arcos, tendremos

$$\text{sen.}\big((a+90°)+b\big)=\text{sen.}(90°+(a+b))=\cos.\big(-(a+b)\big)$$
$$=\cos.(a+b)=\cos.a.\cos.b-\text{sen.}a\,\text{sen.}b=$$
$$\text{sen.}(90°-a).\cos.b-\cos.(90°-a)\,\text{sen.}b$$
$$=\text{sen.}(90°+a).\cos.b+\cos.(90°+a)\,\text{sen.}b$$

ó bien

$$\text{sen.}\big((a+90°)+b\big)=\text{sen.}(a+90°)\cos.b+\cos.(a+90°)\,\text{sen.}b\quad(1)$$

Del mismo modo

$$\cos.\left((a+90^\circ)+b\right)=\cos.\left(90^\circ+(a+b)\right)=\text{sen.}\left(-(a+b)\right)$$
$$=-\text{sen.}(a+b)=-\text{sen.}\,a\cos.\,b-\cos.\,a\,\text{sen.}\,b$$
$$=-\cos.(90^\circ-a)\cos.\,b-\text{sen.}(90^\circ-a)\,\text{sen.}\,b$$
$$=\cos.(a+90^\circ).\cos.\,b-\text{sen.}(a+90^\circ).\,\text{sen.}\,b$$

ó bien

$$\cos.\left((a+90^\circ)+b\right)=\cos.(a+90^\circ).\cos.\,b-\text{sen.}(a+90^\circ)\text{sen.}\,b \quad (2)$$

Las igualdades (1) y (2) prueban que si suponemos ciertas las fórmulas (7) y (8) para dos arcos cualesquiera, lo serán tambien si se añaden 90 á uno cualquiera a de los arcos. Pero hemos demostrado que son verdaderas en el caso en que a y b son cada uno menor que un cuadrante; luego lo serán para los arcos $(a+90^\circ)$ y b, $(a+2.90^\circ)$ y b, $(a+3.90^\circ)$ y b..... $(a+n.90^\circ)$ y b. Y como lo que se ha dicho con respecto á a, es aplicable al arco b, resulta que

Las fórmulas (7) *y* (8) *son verdaderas para dos arcos positivos cualesquiera.*

3.° Suponiendo verdaderas las fórmulas (7) y (8) para dos arcos cualesquiera a y b, si restamos 90° de uno de dichos arcos b, tendremos

$$\text{sen.}\left(a+(b-90^\circ)\right)=-\text{sen.}\left(90^\circ-(a+b)\right)=-\cos.(a+b)$$
$$=-\cos.\,a.\cos.\,b+\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b$$
$$=-\cos.\,a.\,\text{sen.}(90^\circ-b)+\text{sen.}\,a.\cos.(90^\circ-b)$$
$$=\cos.\,a\,\text{sen.}(b-90^\circ)+\text{sen.}\,a\cos.(b-90^\circ)$$
$$=\text{sen.}\,a\cos.(b-90^\circ)+\cos.\,a\,\text{sen.}(b-90^\circ)$$

ó bien

$$\text{sen.}\left(a+(b-90^\circ)\right)=\text{sen.}\,a\cos.(b-90^\circ)+\cos.\,a\,\text{sen.}(b-90^\circ) \quad (3)$$

Del mismo modo

$$\cos.\left(a+(b-90^\circ)\right)=\cos.\left(90^\circ-(a+b)\right)=\text{sen.}(a+b)$$
$$=\text{sen.}\,a\cos.\,b.+\cos.\,a\,\text{sen.}\,b$$
$$=\text{sen.}\,a\,\text{sen.}(90^\circ-b)+\cos.\,a\cos.(90^\circ-b)$$
$$=-\text{sen.}\,a\,\text{sen.}(b-90^\circ)+\cos.\,a\cos.(b-90^\circ)$$
$$=\cos.\,a.\cos.(b-90^\circ)-\text{sen.}\,a\,\text{sen.}(b-90^\circ)$$

ó bien

$$\cos.\left(a+(b-90^\circ)\right)=\cos.\,a\cos.(b-90^\circ)-\text{sen.}\,a.\,\text{sen.}(b-90^\circ) \quad (4)$$

Las igualdades (3) y (4), prueban que si suponemos ciertas las fórmulas (7) y (8) para dos arcos cualesquiera, lo serán tambien, si se restan 90° de uno cualquiera de dichos arcos. Pero hemos demostrado que son verdaderas para el caso en que a y b, son menores que un cuadrante, y tambien para el caso en que a y b, son dos arcos positivos cualesquiera; luego lo serán para los arcos a y $(b-90^\circ)$

a y $b - 2 \,.\, 90^o$), a y $(b - 3 \,.\, 90^o)$...., a y $(b - n \,.\, 90^o)$. Pero lo dicho para el arco b, es aplicable para el arco a.

Luego,

Las fórmulas (7) *y* (8) *son verdaderas, para dos arcos cualesquiera* a *y* b, *uno positivo y otro negativo, ó los dos negativos.*

De todo lo dicho resulta que dichas fórmulas (7) y (8) son generales.

15. Siendo dichas fórmulas generales, tendremos

$$\begin{aligned} \text{sen.}\,(a - b) &= \text{sen.}\,(a + (-b)) \\ &= \text{sen.}\,a\,.\,\text{cos.}\,(-b) + \text{cos.}\,a\;\text{sen.}\,(-b) \\ &= \text{sen.}\,a\,\text{cos.}\,b - \text{cos.}\,a\;\text{sen.}\,b \qquad \text{ó} \end{aligned}$$

$$\text{sen.}\,(a - b) = \text{sen.}\,a \cos b - \text{cos.}\,a\;\text{sen.}\,b$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} \text{cos.}\,(a - b) &= \text{cos.}\,(a + (-b)) \\ &= \text{cos.}\,a\;\text{cos.}\,(-b) - \text{sen.}\,a\;\text{sen.}\,(-b) \\ &= \text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,b + \text{sen.}\,a\;\text{sen.}\,b \qquad \text{ó} \end{aligned}$$

$$\text{cos.}\,(a - b) = \text{cos.}\,a\;\text{cos.}\,b + \text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,b$$

Tenemos pues las fórmulas

$$(9)\quad \text{sen.}\,(a - b) = \text{sen.}\,a\,.\,\text{cos.}\,b - \text{cos.}\,a\,.\,\text{sen.}\,b$$

$$(10)\quad \text{cos.}\,(a - b) = \text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,b + \text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,b$$

generales tambien para dos arcos cualesquiera a y b.

Resulta pues, que por medio de las fórmulas (7), (8), (9) *y* (10) *se pueden determinar el seno y el coseno de la suma y de la diferencia de dos arcos, conociendo, el seno y el coseno de dichos arcos.*

16. Puesto que (13)

$$\text{tang.}\,a = \frac{\text{sen.}\,a}{\text{cos.}\,a},$$

tendremos que

$$\text{tang.}\,(a+b) = \frac{\text{sen.}\,(a+b)}{\cos\,(a+b)} = \frac{\text{sen.}\,a\;\text{cos.}\,b + \text{cos.}\,a\;\text{sen.}\,b}{\text{cos.}\,a \cos\,b - \text{sen.}\,a\;\text{sen.}\,b}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen.}\,a\;\text{cos.}\,b}{\text{cos.}\,a\;\text{cos.}\,b} + \dfrac{\cos\,a\;\text{sen.}\,b}{\text{cos.}\,a \cos\,b}}{\dfrac{\text{cos.}\,a \cos\,b}{\text{cos.}\,a\;\text{cos.}\,b} - \dfrac{\text{sen.}\,a\;\text{sen}\,b}{\text{cos.}\,a\;\text{cos.}\,b}}$$

$$= \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$$

de donde

$$(11)\ \text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$$

Del mismo modo se deduce que

$$(12)\ \text{tang. } (a - b) = \frac{\text{tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{tang. } a . \text{tang. } b}$$

Ahora puesto que (13)

$$\text{tang. } a \text{ cot. } a = 1$$

ó $$\text{cot. } a = \frac{1}{\text{tang. } a}$$ será

$$(13)\ \text{cot. } (a + b) = \frac{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}{\text{tang. } a + \text{tang. } b}$$

y $$(14)\ \text{cot. } (a - b) = \frac{1 + \text{tang. } a \text{ tang. } b}{\text{tang. } a - \text{tang. } b}$$

De donde resulta que por medio de las fórmulas (11), (12), (13) *y* (14), *se pueden determinar la tangente y la cotangente de la suma y de la diferencia de dos arcos, conociendo la tangente y la cotangente de dichos arcos.*

§. *V.—Fórmulas de las líneas trigonométricas de los arcos múltiplos y submúltiplos de un arco.*

17. Si en las fórmulas (7) y (8) hacemos $b = a$, tendremos

$$\text{sen. } (a + a) = \text{sen. } a \text{ cos. } a + \text{cos. } a \text{ sen. } a$$
$$\text{cos. } (a + a) = \text{cos. } a \text{ . cos. } a - \text{sen. } a \text{ sen. } a$$

de donde

$$\text{sen. } 2a = 2 \text{ sen. } a \text{ cos. } a \qquad (15)$$

$$\text{cos. } 2a = \text{cos.}^2 a - \text{sen.}^2 a \qquad (16)$$

Por medio de estas fórmulas, conocidos el seno y el coseno de un arco, se pueden determinar el seno y el coseno del arco duplo.

18. Si en las fórmulas (11) y (13) hacemos $b = a$, tendremos

$$\text{tang. } 2a = \frac{2 \text{ tang. } a}{1 - \text{tang.}^2 a} \qquad (17)$$

$$\text{cot. } 2a = \frac{1 - \text{tang.}^2 a}{2 \text{ tang. } a} \qquad (18)$$

Por medio de estas fórmulas, conocida la tangente de un arco se determinan la tangente y la cotangente del arco duplo.

19. Si sumamos ordenadamente las fórmulas (7) y (9) y las (8) y (10) tendremos

$$\text{sen. } (a + b) + \text{sen. } (a - b) = 2 \text{ sen. } a \cos b$$
$$\cos. (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos. a \cos. b.$$

Si hacemos ahora $b = na$ en estas últimas igualdades, deduciremos facilmente las siguientes fórmulas llamadas de Simpson.

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen. } (n + 1)\, a = 2 \text{ sen. } a \cos. na + \text{sen. } (n - 1)\, a \\ \cos. (n + 1)\, a = 2 \cos. a \cos na - \cos. (n - 1)\, a \end{array}\right\} (19)$$

Por medio de las que, conocidos el seno y el coseno de un arco, se determinan los senos y cosenos de los arcos múltiplos de dicho arco.

20. Si en la fórmula (1) (despues de hacer $R = 1$) y en las fórmulas (15) y (16), hacemos $2a = A$, se convertirán en

$$1 = \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A + \cos.^2 \tfrac{1}{2} A \qquad (20)$$
$$\text{sen. } A = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} A \cdot \cos. \tfrac{1}{2} A \qquad (21)$$
$$\cos. A = \cos.^2 \tfrac{1}{2} A - \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A \qquad (22)$$

sumando y restando ordenadamente las (20) y (22) resulta

$$1 + \cos. A = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A$$
$$1 - \cos. A = 2 \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} A$$

y de estas

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos. A}}{2}} \qquad (23)$$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos. A}}{2}} \qquad (24)$$

Por medio de estas fórmulas, se pueden hallar el seno y el coseno de la mitad de un arco, conocido el coseno de dicho arco.

Sumando y restando ordenadamente las igualdades (20) y (21) resulta

$$1 + \text{sen. A} = (\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} + \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,\text{A})^2$$
$$1 - \text{sen. A} = (\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} - \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,\text{A})^2$$

de donde

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} + \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} = \pm \sqrt{1 + \text{sen. A}}$$
$$\text{sen. } \tfrac{1}{4}\,\text{A} - \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} = \pm \sqrt{1 - \text{sen. A}}$$

de donde

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} = \pm \sqrt{1 + \text{sen. A}} \pm \sqrt{1 - \text{sen. A}} \qquad (25)$$
$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} = \pm \sqrt{1 + \text{sen. A}} \mp \sqrt{1 - \text{sen. A}} \qquad (26)$$

Por medio de estas fórmulas, se pueden hallar el seno y el coseno de la mitad de un arco, conociendo el seno de dicho arco.

Dividiendo ordenadamente las fórmulas (23) y (24) resulta

$$(25) \quad \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,\text{A} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos. A}}{1 + \text{cos. A}}}$$

$$\text{y} \quad \text{cot. A} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos. A}}{1 - \text{cos. A}}} \qquad (26)$$

Por medio de estas fórmulas se pueden hallar la tangente y la cotangente de un arco, conociendo el coseno de dicho arco.

21. De las fórmulas

$$\text{sen. } (a + b) = \text{sen. } a \text{ cos. } b + \text{cos. } a \text{ sen. } b$$
$$\text{cos. } (a + b) = \text{cos. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } a \text{ sen. } b$$
$$\text{sen. } (a - b) = \text{sen. } a \text{ cos. } b - \text{cos. } a \text{ sen. } b$$
$$\text{cos. } (a - b) = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } a \text{ sen. } b$$

se deduce

$$\begin{aligned}
&\text{sen.}\,(a+b)+\text{sen.}\,(a-b)=2\,\text{sen.}\,a\,\cos.\,b\\
&\text{sen.}\,(a+b)-\text{sen.}\,(a-b)=2\,\cos.\,a\,\text{sen.}\,b\\
&\cos.\,(a+b)+\cos.\,(a-b)=2\,\cos.\,a\,\cos.\,b\\
&\cos.\,(a-b)-\cos.\,(a+b)=2\,\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b
\end{aligned}$$

Si hacemos $a+b=\mathrm{A},\quad a-b=\mathrm{B}.$

será $a=\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2},\ \text{y}\ b=\dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$ ó

si sustituimos en las igualdades anteriores estos valores de $a+b$, $a-b$, a y b, tendremos

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sen. A}+\text{sen. B}=2\,\text{sen.}\,\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,.\,\cos.\,\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\\
&\text{sen. A}-\text{sen. B}=2\,\cos.\,\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\\
&\cos.\,\mathrm{A}+\cos.\,\mathrm{B}=2\,\cos.\,\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,.\,\cos.\,\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\\
&\cos.\,\mathrm{B}-\cos.\,\mathrm{A}=2\,\text{sen.}\,\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Fórmulas que transforman en producto la suma y la diferencia de los senos y de los cosenos de dos arcos.

ESCOLIO. Dividiendo ordenadamente la 1.ª y la 2.ª de estas fórmulas resulta

$$\frac{\text{sen. A}+\text{sen. B}}{\text{sen. A}-\text{sen. B}}=\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\quad(28)$$

22. Tambien puede transformarse en producto la suma del seno con el coseno de un arco.

En efecto;

$$\begin{aligned}
\text{sen. A}+\cos.\,\mathrm{B}&=\text{sen. A}+\text{sen.}\,(90^\circ-\mathrm{B})\\
&=2\,\text{sen.}\left(45^\circ+\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\right).\cos.\left(45^\circ-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\text{sen.A}+\cos.\mathrm{B}=2\,\text{sen.}\left(45^\circ+\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\right).\cos.\left(45^\circ-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)\quad(29)$$

Puesto que

$$\text{tang. A} + \text{tang. B} = \frac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}} + \frac{\text{sen. B}}{\text{cos. B}} = \frac{\text{sen. (A + B)}}{\text{cos. A . cos. B}}$$

tendremos

$$\text{tang. A} + \text{tang. B} = \frac{\text{sen. (A + B)}}{\text{cos. A . cos. B}} \qquad (30)$$

y tambien deduciremos facilmente

$$\text{tang. A} - \text{tang. B} = \frac{\text{sen. (A - B)}}{\text{cos. A . cos. B}} \qquad (31)$$

Las fórmulas (30) *y* (31) *trasforman tambien la suma y la diferencia de las tangentes de dos arcos, en expresiones bien dispuestas para el cálculo logarítmico.*

CAPÍTULO II

DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS

23. Para poder aplicar á la resolucion de los triángulos las líneas trigonométricas, se necesita que éstas y los ángulos correspondientes se puedan determinar respectivamente, es decir, que dada la medida de un ángulo, queden determinadas sus líneas trigonométricas, y recíprocamente, dado el valor de una línea trigonométrica, se puedan determinar la medida del ángulo correspondiente.

Si trazamos (fig. 315) los arcos AB, A'B', A''B''..... correspondientes al ángulo O, y los senos BP, B'P', B''P''..... de dichos arcos, vemos que á dicho ángulo corresponden varios arcos, y por consiguiente varios senos; pero observando que las razones

$$\frac{BP}{OB}, \quad \frac{B'P'}{OB'}, \quad \frac{B''P''}{OB''} \ldots\ldots$$

son todas iguales resulta, *que la razon entre el seno y el radio, de un arco cualquiera correspondiente á un ángulo, tiene un valor constante. Si llamamos* SENO DE UN ÁNGULO Á ESTE VALOR CONSTANTE, *dado el valor de un ángulo queda determinado el valor de su seno,* y recíprocamente conocido el valor del seno de un ángulo, queda determinado el valor de éste.

ESCOLIO. Obsérvese sin embargo, que para que un ángulo quede determinado por el seno, es preciso saber si el ángulo es agudo ú obtuso; pues dos ángulos suplementarios tienen el mismo seno. (11)

Puesto que el radio es arbitrario, se adopta para mayor sencillez el radio igual á uno, y en esta suposicion tendremos que

SENO DE UN ÁNGULO, *es el número abstracto que expresa la razon, entre el seno y el radio uno, del arco correspondiente.*

Extendiendo á las demás líneas trigonométricas lo dicho del seno de un ángulo, diremos tambien que COSENO, TANGENTE Y COTANGENTE DE UN ÁNGULO *son los números abstractos que expresan las razones entre el coseno, tangente, cotangente, y el radio uno, del arco correspondiente*;

Resulta pues, que conocida la medida de un ángulo, quedan determinadas sus líneas trigonométricas, y recíprocamente, conocida una línea trigonométrica, puede determinarse la medida del ángulo correspondiente.

Pero conviene además, que dada la medida de un ángulo se hallen fácil y rápidamente sus líneas trigonométricas; y recíprocamente, que dada una línea trigonométrica se pueda tambien hallar del mismo modo la medida del ángulo correspondiente.

Esto se consigue por medio de las tablas trigonométricas.

Estas tablas contienen los arcos desde $0°$ á $90°$, en progresión aritmética formando columna, y á la derecha de cada arco, y en fila, las líneas trigonométricas correspondientes.

Estas tablas se llaman *naturales*.

Generalmente, para facilitar los cálculos, en vez de los valores de las líneas trigonométricas, se ponen sus logaritmos. Las tablas con esta sustitucion, son las generalmente usadas y se llaman artificiales.

24. CONSTRUCCION DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS. Propongámonos construir unas tablas trigonométricas de los arcos.

$$0°, 1', 2', 3', 4' \ldots\ldots \quad 90°,$$

es decir, unas tablas en que los arcos empezando por cero crezcan en progresion aritmética de minuto en minuto hasta 90°, y suponiendo el radio igual á uno.

Observemos que una vez determinado el valor del seno del arco 1', pueden calcularse sin mas datos, todas las líneas trigonométricas de todos los arcos de las tablas que nos proponemos construir.

En efecto; de las fórmulas (F) (párrafo 13) se deduce

$$\cos.1' = \sqrt{1 - \operatorname{sen.}^2 1'}$$

y conocidos el sen. 1' y el cos. 1' tendremos tambien

$$\operatorname{tang}.1' = \frac{\operatorname{sen}.1'}{\cos.1'} \quad \text{y} \quad \cot.1' = \frac{\cos.1'}{\operatorname{sen}.1'}$$

Ahora por medio de las fórmulas (15), (16) hallaremos, primero

$$\operatorname{sen}.2' = 2 \operatorname{sen}.1' \cos 1', \text{ y } \cos.2' = \cos.^2 1' - \operatorname{sen}.^2 1'$$

y despues haciendo en las (19)

$$n = 3', n = 4', n = 5'.....$$

determinaremos los valores de los senos y cosenos de todos los arcos, y conocidos éstos se calcularán sin dificultad los de las demás líneas trigonométricas.

Pero notemos, que bastará hallar los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los arcos, comprendidos entre 0° y 45°, por cuanto los arcos comprendidos entre 45° y 90° son los complementos de los anteriores; y por consiguiente los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los arcos comprendidos entre 0° y 45° son respectivamente los cosenos, senos, cotangentes y tangentes de los arcos comprendidos entre 45° y 90°

Además, por medio de las tablas que contengan las líneas trigonométricas de los arcos desde 0° á 90° se podrán hallar fácilmente las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos en 90° y 180°, por cuanto éstos serán suplementos de los anteriores, y sabemos que los valores absolutos de las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son iguales.

25. Puesto que conocido el valor del sen. 1' pueden calcularse los valores de todas las líneas trigonométricas de las tablas, vamos á determinar dicho valor. Para esto necesitamos demostrar antes las siguientes proposiciones:

1.° *Todo arco AB* (fig. 316) *positivo y menor que un cuadrante, es mayor que su seno BP y menor que su tangente AT.*

En efecto, tenemos

$$BP < AB < ASB;$$

luego

$$\text{arco } ASB > \text{sen. } PB$$

El área del sector OAB, es menor que el área del triángulo OAT, es decir

B

$$\tfrac{1}{2}\, AO \times ASQ < \tfrac{1}{2}\, AO \times AT$$

de donde

ASB

$$\text{arco } \cancel{AOS} < \text{tang. } AT. \qquad \text{C. C. E. E.}$$

2.° *El seno de un arco, positivo y menor que un cuadrante, es mayor que la diferencia entre el arco correspondiente, y la cuarta parte del cubo de este mismo arco.*

En efecto; siendo a un arco positivo y menor que un cuadrante, tendremos segun se acaba de demostrar

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a > \tfrac{1}{2} a \qquad \text{de donde}$$

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} a}{\cos. \frac{1}{2} a} > \tfrac{1}{2} a \quad \text{ó} \quad \text{sen. } \tfrac{1}{2} a > \tfrac{1}{2} a \cos. \tfrac{1}{2} a;$$

multiplicando los dos miembros de esta última desigualda por 2 cos. $\frac{1}{2} a$, será

$$2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} a \cos. \tfrac{1}{2} a > \tfrac{1}{2} a 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} a \qquad \text{ó}$$

$$\text{sen. } a > a \cos.^2 \tfrac{1}{2} a \qquad \text{y tambien}$$

$$\text{sen. } a > a\,(1 - \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} a) \qquad \text{ó}$$

$$\text{sen. } a > a - a \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} a$$

Pero puesto que sen. $a < a$ tendremos $\text{sen}^2 \frac{a}{2} < \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\text{sen.}\, a > a - a \,.\left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad \text{ó}$$

$$\text{sen.}\, a > a - \frac{a^3}{4}. \qquad \text{C. C. E. E.}$$

Esto supuesto, pasemos á calcular el sen. 1'.
Sabemos que

$$\frac{C}{2R} = \pi \quad \text{y haciendo } R = 1$$

$$\frac{C}{2} = \pi \quad \text{ó arco} \quad 180^\circ = 3'14159\ 26535\ 89\ldots$$

y por consiguiente

$$\text{arco } 1' = \frac{\pi}{180 \times 60} = 0'00029\ 08882\ 08 < 0'0003$$

$$\text{y} \quad \frac{(\text{arco } 1')^3}{4} < 0'00000\ 00000\ 07 \quad \text{luego}$$

$$\text{sen. } 1' > 0'00029\ 08882\ 08\ldots - 0'00000\ 00000\ 07 \quad \text{ó}$$
$$\text{sen. } 1' > 0'00029\ 08882\ 01\ldots\ldots$$

De modo que tenemos

$$\text{sen. } 1' < 0'00029\ 08882\ 08$$
$$\text{sen. } 1' > 0'00029\ 08882\ 01$$

y como estos dos valores tienen 11 cifras decimales comunes, será

$$\text{sen. } 1' = 0'00029\ 08882\ 20$$

con menos error de una unidad decimal del orden undécimo.

Ahora segun hemos dicho, las fórmulas

$$\cos.\ 1' = \sqrt{1 - \text{sen.}^2\, 1'}$$

$$\text{sen. } 2' = 2 \text{ sen. } 1' \cos. 1'$$
$$\cos. 2' = \cos.^2 1' - \text{sen.}^2 1'$$

dan los valores del cos. 1' y de los senos y cosenos del arco 2'.

Para hallar el seno y coseno del arco 3' tendremos (for. 7 y 8) haciendo $a = 2'$ y $b = 1'$

$$\text{sen. } 3' = \text{sen } 2' \cos. 1' + \cos. 2' \text{ sen } 1'$$
$$\cos. 3' = \cos. 2' \cos. 1' - \text{sen. } 2' \text{ sen. } 1'$$

y así sucesivamente, hasta llegar al arco de 45°

Conocidos los senos y cosenos, se hallarán fácilmente las tangentes y cotangentes.

Conocidas las líneas trigonométricas, se hallarán sus logaritmos y tendremos las tablas que ordinariamente se usan.

Juzgamos inutil entrar en más detalles, pues solo nos hemos propuesto indicar un procedimiento elemental, por el cual se podrian construir las tablas. Estas se construyen en la práctica por otros procedimientos más expeditos, que no son de este lugar.

26. Por medio, pues, de unas tablas trigonométricas se pueden resolver fácilmente estos dos problemas:

1.° Dado un ángulo de un triángulo, hallar el valor de sus líneas trigonométricas.

2.° Dado el valor de una línea trigonométrica, determinar la medida del ángulo correspondiente.

Las reglas para resolver estos problemas las encontrará el lector en cualquiera de las tablas publicadas. Nosotros le recomendamos las de Vazquez Queipo donde hallará dichas reglas, que omitimos aquí para evitar inútiles repeticiones.

CAPÍTULO III

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS

§. I *Fórmulas para la resolucion de los triángulos*

27. Tratemos ahora de hallar ecuaciones que expresen las relaciones que existen entre las líneas trigonométricas de los ángulos, y los lados de los triángulos.

Sabemos (Geometría, 184), que (fig. 317) en el triángulo ABC,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AC\,.\,AD$$

Si designamos los ángulos de este triángulo por A, B y C, letras de sus tres vértices, y por *a*, *b* y *c*, los lados respectivamente opuestos á los ángulos A, B y C, la igualdad anterior se convierte en

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,.\,AD. \quad (g)$$

Trazando con un radio 1 el arco MN correspondiente al ángulo A, AP será el coseno de este ángulo.

Ahora, de la comparacion de los triángulos semejantes ABD y AMP, resulta la proporcion

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AD} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{c} = \frac{\cos.\,A}{AD}$$

de donde

$$AD = c\,.\,\cos.\,A;$$

sustituyendo en la igualdad (*g*) en vez de AD su valor, será

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos.\,A \quad (y)$$

Del mismo modo (Geometría, 185) (fig. 318) en el triángulo obtusángulo ABC

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AC\,.\,AD$$

y designando tambien los ángulos por A, B y C, y los lados respectivamente opuestos por *a*, *b* y *c*, la igualdad anterior se convierte en

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,.\,AD \quad (f)$$

Trazando con un radio 1 el arco MN correspondiente al ángulo A, AP será el coseno de este ángulo.

Ahora, de la comparacion de los triángulos semejantes ABD y AMP, resula la proporcion

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AD}$$

y como el coseno AP del arco MN es negativo será

$$\frac{1}{c} = \frac{-\cos. A}{AD}$$

de donde

$$AD = -c.\cos. A.$$

Sustituyendo en la igualdad (f) en vez de AD, su valor será

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A. \quad (x)$$

Las fórmulas (x) (y), nos permiten establecer, que

El cuadrado de un lado cualquiera (1) *de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido.*

Aplicando esta proposicion á los tres lados del triángulo, tendremos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos. A \quad (m)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos. B \quad (n)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos. C \quad (p)$$

Sistema de ecuaciones que ponen en relacion los lados con los cosenos de los ángulos de un triángulo cualquiera; y por consiguiente que resuelve el problema de la trigonometría.

28. Aunque los triángulos podrían resolverse con las anteriores ecuaciones, conviene deducir otras mejor dispuestas para el cálculo.

Sumando y restando ordenadamente las ecuaciones (m) y (n), tendremos

$$c = b \cos. A + a \cos. B$$
$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos. B - b \cos. A)$$

(1) Aunque el lado se oponga á un ángulo recto es tambien cierta esta proposicion, pues si en la igualdad (x) ponemos cos. 90° en vez de cos. A, tendremos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. 90° = b^2 + c^2 - 2bc.0$$

ó

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Multiplicando éstas ordenadamente, y dividiendo por c la ecuacion que resulta, será

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos.^2 B - b^2 \cos.^2 A, \qquad \text{de donde}$$

$$a^2 - a^2 \cos.^2 B = b^2 - b^2 \cos.^2 A,$$

y $$a^2 (1 - \cos.^2 B) = b^2 (1 - \cos.^2 A), \qquad \text{y} \quad (3)$$ (F)

$$a^2 \operatorname{sen.}^2 B = b^2 \operatorname{sen.}^2 A,$$ y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros

$$a \operatorname{sen.} B = b \operatorname{sen.} A \qquad \text{de donde}$$

$$\frac{\operatorname{sen.} A}{a} = \frac{\operatorname{sen.} B}{b},$$

y como del mismo modo puede demostrarse la proporcion

$$\frac{\operatorname{sen.} A}{a} = \frac{\operatorname{sen.} C}{c}, \qquad \text{resulta que}$$

$$\frac{\operatorname{sen.} A}{a} = \frac{\operatorname{sen.} B}{b} = \frac{\operatorname{sen.} C}{c}. \qquad (h)$$

Lo que demuestra que,

En todo triángulo los senos de los ángulos son proporcionales á los lados opuestos.

De la serie de razones (h) se deduce

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen.} A}{\operatorname{sen.} B},$$ y de esta proporcion

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen.} A + \operatorname{sen.} B}{\operatorname{sen.} A - \operatorname{sen.} B}.$$

Pero teniendo presente la fórmula (28) será

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tang.} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang.} \frac{1}{2}(A-B)} \qquad (q)$$

fórmula que expresa, que

En todo triángulo la suma de dos lados es á la diferencia de los mismos, como la tangente de la semisuma de *los ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la semidiferencia de dichos ángulos.*

De la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A$$

se deduce sucesivamente

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (2)$$

$$1 - \cos. A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

pág. 266)

$$2 \operatorname{sen.}^{2} \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

de donde

$$2 \operatorname{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

Si hacemos $a + b + c = 2p$, la anterior igualdad se convierte en

$$2 \operatorname{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2(p-c) \,.\, 2(p-b)}{2bc}$$

$$\operatorname{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

y por fin

$$\operatorname{sen.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad (r)$$

De la igualdad (2) se deduce

$$1 + \cos. A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

y de esta

$$2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}$$

de donde

$$2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}$$

y haciendo $a + b + c = 2p$ la igualdad anterior se convierte en

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{p(p - a)}{bc}$$ y por fin

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} \qquad (s)$$

Dividiendo ordenadamente las igualdades (r) y (s) resulta

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}} \qquad (t)$$

Aplicando las fórmulas (r), (s) y (t) á los tres ángulos de un triángulo, tendremos los tres sistemas de fórmulas siguientes

$$(\mathrm{M}) \left\{ \begin{aligned} \text{sen.} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \\ \text{sen.} \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}} \\ \text{sen.} \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}} \end{aligned} \right.$$

$$
(\mathrm{N}) \left\{ \begin{aligned}
\cos.\ \tfrac{1}{2}\mathrm{A} &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}} \\
\cos.\ \tfrac{1}{2}\mathrm{B} &= \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}} \\
\cos.\ \tfrac{1}{2}\mathrm{C} &= \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{ab}}
\end{aligned} \right.
$$

$$
(\mathrm{P}) \left\{ \begin{aligned}
\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\mathrm{A} &= \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} \\
\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\mathrm{B} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}} \\
\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\mathrm{C} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}
\end{aligned} \right.
$$

Con las fórmulas (h), (q) y cualquiera de estos tres últimos sistemas preparados para el cálculo logarítmico, se puede resolver el problema de la trigonometría.

29. Pero estas fórmulas, al aplicarse á la resolucion de los triángulos rectángulos, pueden hacerse más sencillas.

En efecto; suponiendo $\mathrm{A} = 90°$ (1) la fórmula fundamental (m) (27) se reduce á

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Si en $\dfrac{\text{sen. } a}{a} = \dfrac{\text{sen. B}}{b} = \dfrac{\text{sen. C}}{c}$

hacemos $\mathrm{A} = 90°$ resulta

$$
\left. \begin{aligned}
\frac{1}{a} &= \frac{\text{sen. B}}{b} \\
\frac{1}{a} &= \frac{\text{sen. C}}{c}
\end{aligned} \right\} \text{(1) de donde} \quad
\left. \begin{aligned}
b &= a \text{ sen. B} \\
c &= a \text{ sen. C}
\end{aligned} \right\}
$$

(1) En los triángulos rectángulos se ha convenido en representar el ángulo recto por la letra A, y los agudos por las B y C; y por consiguiente por a la hipotenusa y por b y c los catetos.

y como siendo A = 90°, B + C = 90° será

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{a}=\dfrac{\text{cos. C}}{b}\\[2ex]\dfrac{1}{a}=\dfrac{\text{cos. B}}{c}\end{array}\right\}\text{(2) de donde}\quad\left.\begin{array}{l}b=a\,\text{cos. C}\\c=a\,\text{cos. B}\end{array}\right\}$$

Dividiendo ahora ordenadamente las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l}a.\text{sen. B}=b\\a.\text{cos. B}=c\end{array}\right\}\text{ y las }\quad\left.\begin{array}{l}a.\text{sen. C}=c\\a\ \text{cos. C}=b\end{array}\right\}$$

tendremos

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. B}=\dfrac{b}{c}\\[2ex]\text{tang. C}=\dfrac{c}{b}\end{array}\right\}\text{ de donde }\quad\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\text{tang. B}}=\dfrac{c}{b}\\[2ex]\dfrac{1}{\text{tang. C}}=\dfrac{b}{c}\end{array}\right\}\ (3)$$

Las anteriores transformaciones nos permiten establecer que en todo triángulo rectángulo, suponiendo R = 1 se verifica, (1), (2), (3) que

1.° *Uno es á la hipotenusa, como el seno de un ángulo agudo, es al cateto opuesto.*

2.° *Uno es á la hipotenusa como el coseno de un ángulo agudo, es al cateto adyacente.*

3.° *Uno es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente es al cateto opuesto.*

ESCOLIO. Las anteriores fórmulas, pueden deducirse directamente comparando los triángulos semejantes

ABC y BMP y los ABC y RBQ (fig. 319).

§. II.—*Resolucion de los triángulos rectángulos*

30. En los triángulos rectángulos, como el ángulo recto tiene un valor conocido, bastarán dos datos, entre los cuales haya un ángulo, para determinar el triángulo. Por consi-

guiente, en la resolucion de estos triángulos pueden ocurrir los cuatro casos siguientes:

1.° *Resolver un triángulo dados los dos catetos.*

2.° *Resolver un triángulo dados la hipotenusa y un cateto.*

3.° *Resolver un triángulo dados un cateto y un ángulo agudo.*

4.° *Resolver un triángulo dados la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Primer caso. *Dados los dos catetos* b *y* c, *hallar la hipotenusa* a *y los ángulos B y C.*

De la fórmula $$\frac{1}{\text{tang. B}} = \frac{c}{b} \qquad \text{(párrafo 29)}$$

deduciremos

$$\text{tang. B} = \frac{b}{c}$$

y tomando los logaritmos de los dos miembros, será

$$\text{log. tang. B} = \text{log. } b + \text{comp. log. } c$$

lo que nos dará el valor de B.

Para hallar C, tendremos

$$\text{C} = 90° - \text{B}.$$

Falta determinar el valor de la hipotenusa a.

Este puede deducirse de la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$

de donde $$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Pero como esta fórmula no está dispuesta para el cálculo logarítmico, será preferible deducir su valor de la

$$\frac{1}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b} \qquad \text{(párrafo 29)}$$

de donde

$$a = \frac{b}{\text{sen. B}}$$

y tomando los logaritmos, será

$$\log. a = \log. b + \text{comp. } \log. \text{sen. B}$$

con lo que queda resuelto el triángulo.

Segundo caso. *Dados la hipotenusa* a, *y el cateto* b, *hallar el otro cateto* c, *y los ángulos agudos B y C.*

El valor de c se deduce de la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2$$

de la que se tiene

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

ó

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

y tomando los logaritmos, será

$$\log. c = \frac{\log. (a+b) + \log. (a-b)}{2}.$$

El valor del ángulo B, se deduce de la fórmula

$$\frac{1}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b} \qquad \text{(pár. 29)}$$

de donde

$$\text{sen. B} = \frac{b}{a}$$

y tomando los logaritmos

$$\log. \text{sen. B} = \log. b + \text{comp. } \log. a;$$

y por fin $C = 90^\circ - B$.

Obsérvese que si el seno B hallado determina al ángulo B, es porque sabemos que es agudo.

Tercer caso. *Dados el cateto* b *y el ángulo agudo B, hallar el otro ángulo agudo C, la hipotenusa* a *y el otro cateto* c.

Sabemos que

$$C = 90^\circ - B,$$

igualdad que determina el valor del ángulo C.

Para hallar el de la hipotenusa a, emplearemos la fórmula (párrafo 29)

$$\frac{1}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b}$$

de donde

$$a = \frac{b}{\text{sen. B}}$$

y tomando los logaritmos, será

$$\log. a = \log. b + \text{comp. log. sen. B}$$

que nos dá el valor de a.

El valor de c se deduce de la fórmula (pár. 29)

$$\frac{1}{\text{tang. B}} = \frac{c}{b}$$

de donde

$$c = \frac{b}{\text{tang. B}}$$

y tomando los logaritmos, será

$$\log. c = \log. b + \text{comp. log. tang. B}$$

que nos dá el valor de c.

Cuarto caso. *Dados la hipotenusa* a *y el ángulo agudo B, hallar el ángulo C y los catetos* b *y* c.

Para hallar C tenemos

$$C = 90° - B.$$

El cateto c se determinará por medio de la fórmula (párrafo 29)

$$\frac{1}{a} = \frac{\text{cos. B}}{c} \quad \text{de donde } c = a \text{ cos. B}$$

y tomando los logaritmos, será

$$\log. c = \log. a + \log. \text{cos. B},$$

que nos dá el valor de c.

El cateto b se determinará por la fórmula

$$\frac{1}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b} \quad \text{de donde } b = a \text{ sen, B}$$

y tomando los logaritmos, será

$$\log. b = \log. a + \log. \text{sen. B}$$

que nos dá el valor de b.

§, *III.—Resolucion de los triángulos oblicuángulos*

31. En la resolucion de estos triángulos pueden ocurrir los cuatro casos siguientes:

1.° *Resolver un triángulo dados un lado y dos ángulos.*

2.° *Resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.*

3.° *Resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.*

4.° *Resolver un triángulo dados los tres lados.*

Primer caso. *Dados el lado* a *y los ángulos B y C, hallar el ángulo A y los lados* b *y* c.

El ángulo A lo deduciremos de la igualdad

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

y de las fórmulas (párrafo 29)

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b}$$

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. C}}{c}$$

se deducen $$b = \frac{a \text{ sen. B}}{\text{sen. A}}$$

$$c = \frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}$$

y tomando los logaritmos, será

$$\log. b = \log. a + \log. \text{sen. B} + \text{comp. log. sen. A}$$
$$\log. c = \log. a + \log. \text{sen. C} + \text{comp. log. sen. A}$$

Segundo caso. *Dados los dos lados* a, b, *y el ángulo comprendido C, hallar el lado* c *y los ángulos A y B.*

Desde luego tenemos la suma de los ángulos que se buscan, pues

$$A + B = 180^\circ - C$$

Ahora, de la fórmula (q) (párrafo 28)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B)}$$

deduciremos

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{(a-b) \,.\, \text{tang. } \frac{1}{2}(A+B)}{a+b}$$

de donde

$$\log. \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \log. (a-b) + \log. \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$+ \text{comp. log. } (a+b)$$

que nos dá el valor de $\frac{1}{2}(A - B)$; y por consiguiente tendremos

$$A = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$B = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B)$$

El lado c lo hallaremos valiéndonos de la fórmula

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. C}}{c} \text{ de donde } c = \frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}$$

y tomando los logaritmos

$$\log. c = \log. a + \log. \text{sen. C} + \text{comp. log. sen. A},$$

con lo que queda resuelto el triángulo.

Tercer caso. *Dados dos lados* a, b, *y el ángulo A opuesto al primero, hallar los otros dos ángulos B, C, y el lado* c.

Para hallar el ángulo B, emplearemos la fórmula

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b} \quad \text{de donde}$$

$$\text{sen. B} = \frac{b\,.\,\text{sen. A}}{a}.$$

Pero debemos observar, que dos ángulos suplementarios tienen el mismo seno, y por consiguiente en general el valor del sen. B no determina al ángulo B, no sabiendo de antemano si B es agudo ú obtuso.

Si el ángulo dado A es obtuso ó recto, el ángulo B es forzosamente agudo, y por consiguiente sen. B determina al ángulo agudo B.

Si A es agudo, puede suceder que sea

$$a > b$$
$$a < b$$
$$a = b.$$

Si $a > b$, el ángulo agudo A será mayor que el ángulo B; luego éste será tambien agudo, y por lo consiguiente sen. B determina el valor del ángulo agudo B.

Si $a < b$, será el ángulo A menor que el ángulo B; y por lo tanto el ángulo B, podrá tener dos valores, uno el correspondiente al sen. B, hallado en las tablas, y otro el suplementario de éste.

Además la fórmula

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b}$$

ó $$b\,.\,\text{sen. A} = a\,.\,\text{sen. B} \quad \text{(D)}$$

nos dice; que si a es mayor que b.sen. A, es decir mayor que la perpendicular CO (fig. 161) (29 for. (1)) forzosamente será sen. B < 1; y por consiguiente el problema tendrá dos soluciones, el triángulo ACB en el que B es agudo, y el triángulo ACB' en que B' es obtuso.

Si a es igual á b sen. A, es decir á la perpendicular CO, entonces la igualdad (D) exije que sea sen. B $= 1$, y por consiguiente B $= 90°$.

La única solucion del problema en este caso es el triángulo rectángulo CAO.

Si por fin, a es menor que b sen. A; es decir menor que la perpendicular CO, la igualdad (D) exije que sen. B $>$ 1, lo que expresa que el problema es imposible.

Como se vé, esta discusion está de acuerdo con la estudiada en la Geometría (162).

Determinado el ángulo B, en su único ó en su doble valor, hallaremos

$$C = 180° - (A + B),$$

que dará uno ó dos valores para C, segun que B tenga uno ó dos valores.

Para hallar el lado c, emplearemos la fórmula

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. C}}{c} \quad \text{de donde}$$

$$c = \frac{a.\text{sen.C}}{\text{sen.A}}$$

que dará uno ó dos valores para el lado c, segun que C tenga uno ó dos valores.

Cuarto caso. *Dados los tres lados* a, b, c, *hallar los tres ángulos A, B, C.*

Para resolver este caso, podremos emplear cualquiera de los tres sistemas de fórmulas (M), (N) (P), (párrafo 28)

Si empleamos el primero, tendremos

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

y tomando los logaritmos será

$$\log.\text{sen}.\tfrac{1}{2}\,A = \frac{\log.(p-b)+\log.(p-c)+\text{comp.}\log.b+\text{comp.}\log.c}{2}$$

$$\log.\text{sen}.\tfrac{1}{2}\,B = \frac{\log.(p-a)+\log.(p-c)+\text{comp.}\log.a+\text{comp.}\log.c}{2}$$

$$\log.\text{sen}.\tfrac{1}{2}\,C = \frac{\log.(p-a)+\log.(p-b)+\text{comp.}\log.a+\text{comp.}\log.b}{2}$$

que nos darán los valores de $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{2}$ B, $\frac{1}{2}$ C, cuyos duplos serán los valores de los tres ángulos del triángulo.

32. Los elementos que determinan un triángulo, bastan para determinar tambien su área, y ésto nos conduce á proponer y resolver los siguientes problemas:

1.° *Hallar el área de un triángulo ABC* (fig. 320) *dados los dos lados* b, c *y el ángulo comprendido A*.

Si bajamos la CD altura del triángulo ABC, tendremos

$$\text{área ACB} = \tfrac{1}{2}\,AB \times CD$$

Pero (29) $$CD = b\ \text{sen.}\ A$$

y $$AB = c$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad primera, será

$$\text{área ABC} = \tfrac{1}{2}\,bc\ \text{sen.}\ A$$

que resuelve el problema.

2.° *Hallar el área de un triángulo ABC dados el lado* c *y los dos ángulos A y B.*

De la fórmula

$$\frac{\text{sen.}\ B}{b} = \frac{\text{sen.}\ C}{c}$$

se deduce

$$b = \frac{c\ \text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ C} = \frac{c\ \text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ (A+B)}$$

Sustituyendo este valor de b, en la igualdad

$$\text{área ABC} = \tfrac{1}{2}\,bc\ \text{sen.}\ A$$

resulta

$$\text{área ABC} = \frac{c^2 \text{ sen. A . sen. B}}{2 \text{ sen. (A + B)}}$$

que resuelve el problema.

3.° *Hallar el área de un ángulo ABC dados los lados* a *y* b, *y el ángulo A.*

Tenemos segun el primer problema

$$\text{área ABC} = \frac{ab \text{ sen. C}}{2} = \frac{ab \text{ sen. (A + B)}}{2}$$

y como B se deduce de la proporcion

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b}$$

en funcion de los datos a, b y A, la fórmula

$$\text{área ABC} = \frac{ab \text{ sen. (A + B)}}{2}$$

dá el área del triángulo sin más datos que a, b y A.

4.° *Hallar el área de un triángulo ABC dados los tres lados* a, b, c.

Tenemos (28) (M) y (N)

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} \text{ A} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$2 \cos. \tfrac{1}{2} \text{ A} = 2\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$\text{sen. A} = 2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2}}$$

y sustituyendo este valor de sen. A en la fórmula

$$\text{área ABC} = \tfrac{1}{2} bc \text{ sen. A}$$ será

$$\text{área ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

que resuelve de problema.

EJERCICIOS

ELEMENTOS de un triángulo rectángulo	ELEMENTOS de un triángulo oblicuángulo
$a = 8926'975^{m}$	$a = 3043'17^{m}$
$b = 7701'87^{m}$	$b = 5610'43^{m}$
$c = 4513'55^{m}$	$c = 4216'9^{m}$
$B = 59^{o}\ 37'41''$	$A = 32^{o}\ 17'\ 37''$
$C = 30^{o}\ 22'19''$	$B = 99^{o}\ 56'\ 52''$
	$C = 47^{o}\ 45'\ 31''$

El lector podrá ejercitarse proponiéndose la resolucion de todos los casos, con los anteriores valores, y comprobando despues los resultados

Fin de la Trigonometría

ÍNDICE

SEGUNDA PARTE

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Páginas

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

ERRATAS PRINCIPALES

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
11	11	C'C'	CC'
14	22	levantado	levantada
23	14	AB : es paralela	AB es paralela
25	14	B'A'C'	B'AC'
28	36	(37)	(38)
30	2	(56)	(15)
31	35	15 y 16 y los 19 y 20	15, 16 y 17 y los 18, 19 y 20
32	25	ON'	O'N
37	28	(65.)	(69)
48	28	Este punto P y el O, por	Este punto P, por
56	17	(62)	(190) cor. 2.°)
68	9 y 10	ABC sobre el A'B'C'	A'B'C' sobre el ABC
71	35	y el	sobre el
75	1	(29)	(46.3.°)
75	2	y BC	y BC (29)
81	25	FB, FA, FC, FD	FB, FC, FD
93	18	PR' = P'Q	PR' = P'Q'
102	20	NN = A'C'	MN = A'C'
104	17	DD'	B'D'
109	3	cuadros	cuadrados
122	12	O	O'
127	6 y 11	(205)	(207)
137	9	(209 cor. 2.°)	(211 cor. 2.°)
137	17	(206)	(208 cor. 3.°)

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
158	15	BCLF	BCZF
158	18	RDLF	RDZF
165	6	poner	pasar
166	19	ABC'	A'BC
166	32	trazadas por un punto á una recta	trazadas á una recta por un punto dado en ella
167	26	perpendicular á a' dicha	perpendicular á dicha
169	9	AT	A'T
169	19	A'OH	A'O'H
170	10	DC	BC
170	27	HP'	HP
171	24	perpendiculares	perpendiculares á
192	14	T''	T'
208	29	EB	EB'
209	10	EB	EB'
216	7	EJ	FJ
222	31	área	volúmen
224	12	(393)	(293)
224	31 y 34	P	P'
233	3	multiplicada por la	multiplicada por el tercio de la
235	25, 26, 27 y 28	$+$	$\times$
237	3	polígonos	poliedros
237	23	A'O'B', B'O'C'	A'OB', B'OC'
238	25	sus	las
238	32	(287)	(288)
245	7	fíe	de
247	29	ángulos de los	ángulos
248	17	424°	432°
248	19	en	de
260	15	$1+\mathrm{tg.}^2 a=\frac{1}{\mathrm{sen.}^2 a}$	$1+\mathrm{tg.}^2 a=\frac{1}{\mathrm{cos.}^2 a}$

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
260	16	$1+\cot.^2 a=\frac{1}{\cos.^2 a}$	$1+\cot.^2 a=\frac{1}{\text{sen}.^2 a}$
267	18	(25)	(25 bis.)
267	18	(26)	(26 bis.)
267	1	cot. A	cot. $\frac{1}{2}$ A
271	13	sen.^{2}	sen. 2‘
271	15	$4=3‘, n=4‘, n=5‘$	$a=1‘, n=3‘, n=4‘. n=5‘$
272	13	arco ASB $>$ sen. PB	arco ASB $>$ PB
272	16	$\frac{1}{2}$ AO $\times$ ASO	$\frac{1}{2}$ AO $\times$ ASB
272	18	arco AOS $<$ tg. AT	arco ASB $<$ AT
277	5	(3)	(F)
277	17	proporcion	proporcion (Alg. 56 cor. 3.º)
278	8	2 sen. $\frac{1}{2}$ A	2 sen.^{2} $\frac{1}{2}$ A
283	20	seno B	seno de B
285	19	(párrafo 29)	(párrafo 28 (h))

Este libro se acabó de imprimir en Castellon
en el establecimiento tipográfico
de don José Armengot
el dia 23 de Abril
de 1897