UNIVERSITAT JAUME I

Grau en Matemàtica Computacional

Estada en Pràctiques i Projecte Final de Grau

Models matemàtics: algorítmia neuronal i sistemes dinàmics.

Autor:
Eva Monzó Planta

Supervisor:
Marcos González Díaz
Tutor acadèmic:
Manuel Sanchis López

Data de lectura: novembre de 2021
Curs acadèmic 2020/2021

Resum

En aquest document es detalla l'estada en pràctiques realitzada en l'empresa TotalMad i el treball final de grau realitzat amb el Prof. Manuel Sanchis.

La primera part del treball consta del resum de l'estada en pràctiques. En aquesta es detallen totes les tasques realitzades per a aconseguir l'objectiu proposat que va ser desenvolupar un fòrum web.

Els darrers capítols detallen el treball final de grau. Donat un sistema dinàmic (X, f) analitzem la relació entre propietat de ser topològicament transitiu i la de tindre una òrbita densa. Demostrem que la propietat de ser topològicament transitiu és preserva per conjugació topològica. Donada la relació entre transitivitat topològica i la dependència de les condicions inicials en algunes definicions de caos, estudiem quan la dependència de les condicions inicials és preserva per conjugació. Finalment, donat un sistema dinàmic discret (X, f) topològicament transitiu, caracteritzem quan el sistema dinàmic induït en l'hiperespai del compactes no buits de X amb la mètrica de Hausdorff és també topològicament transitiu. El resultat obtingut és aplicat a l'estudi del caos en el sentit d'Auslander i Yorke.

Paraules clau

Fòrum, WordPress, topològicament transitiu, dependèndencia de les condicions inicials, hiperespai, caos d'Auslander i Yorke.

Keywords

Forum, WordPress, topologically transitive, sensitive dependence on initial conditions, hyperspace, Auslander-Yorke chaos.

Índex

Capítol 1

Introducció

1.1 Context i motivació del projecte

Aquest treball és la síntesi de l'estada en pràctiques i el projecte final de grau que es desenvolupa en l'assignatura *MT1030 - Pràctiques Externes i Projecte de Final de Grau* cursada a l'últim curs.

La primera part consta de l'estada en pràctiques la qual fou realitzada a TotalMad, una empresa situada a Vila-real. Tot i que va haver de ser en línia, a causa de la pandèmia actual, va ser una experiència enriquidora ja que em sentia molt recolzada pels altres treballadors de l'empresa i el meu supervisor de pràctiques. A més a més, el fet de treballar amb WordPress em va semblar interessant ja que mai havia treballat amb aquest sistema i considerava que em podria ser útil en un futur.

D'altra banda el tema del TFG va ser el que més interessant em va semblar entre les dues opcions que em va oferir el meu tutor. La branca de la topología em sembla molt captivador i vaig considerar que seria un bon assumpte per a tractar en aquest treball final.

Part I

Estada en pràctiques

Capítol 2

Contextualització

2.1 Introducció

L'empresa en la qual he realitzat les pràctiques s'anomena TotalMad. Aquesta empresa està especialitzada en ajudar a altres empresses i starups a desenvolupar projectes tecnològics. El factor que els fa destacar entre altres empreses de màrqueting digital és que apliquen models matemàtics basats en algorítmia neuronal.

Entre els serveis que ofereix l'empresa destaquen el desenvolupament digital, de negoci i d'emprenedoria amb tecnologies més competents i actuals. També fan us del SEO per a millorar el posicionament en línia de la pàgina web dels seus clients. A més a més ajuden a definir, conceptualitzar i implementar una bona estratègia acord amb els objectius i fan us de diferents llenguatges per a fer tangibles les propostes dels clients i oferir una solució.

Respecte al tutor de pràctiques dir que Marcos González es el co-fundador de l'empresa TotalMad. Ha treballat en diferents empreses tecnològiques abans de fundar la seva empresa actual. Aquestes institucions varen ser Indra, DAS Photonics, Freelance i WifiAway de la qual també va ser co-fundador.

2.2 Objectius del projecte formatiu

L'estada en pràctiques estava enfocada en desenvolupar un fòrum en WordPress i el llenguatge PHP en el qual es tractaran sobre temes relacionats amb els ovnis ja que obtindre dades de diferents usuaris és important per al correcte funcionament de l'empresa.

Els principal objectiu és aprendre sobre el funcionament de WordPress per a poder implementar el projecte. Com al llarg dels quatre anys de la carrera no hem treballat en res relacionat amb la programació web m'he de formar a mi mateixa. A més he d'aprendre sobre el llenguatge de programació PHP, sobre el llenguatge CSS i sobre SEO per a posicional millor el fòrum dins dels buscadors.

Capítol 3

Projecte realitzat en l'empresa

3.1 Metodologia i definició de tasques

Les tasques principals a desenvolupar són:

1. Dissenyar un fòrum sobre aliens.
2. Ajudar al desenvolupament d'un altre lloc web.

La primera tasca és la principal i per tant a la qual se li dedicarà més temps. La segona es secundaria i sols es realitzarà si he acabat d'implementar la tasca principal i encara puc dedicar més temps a l'estada en pràctiques.

3.2 Planificació temporal de las tasques

La duració de l'estada en pràctiques consta de 290 hores que en aquest cas es realitzaran de forma en línia a causa de la pandèmia que estem vivint. Les hores setmanals es distribuiran com millor considere, sempre i quan es complisca amb el plaç establert, per a poder compaginar amb les classes presencials.

3.2.1 Explicació detallada del projecte

Primerament el que vaig fer va ser informar-me sobre que era WordPress i el seu funcionament ja que partia d'una base nul·la. Per a dur a terme aquesta tasca vaig veure diversos vídeos de gent que explicava com utilitzar aquesta ferramenta web i vaig llegir tot allò que vaig trobar i penava que em seria d'utilitat. A més a més vaig buscar informació del que era PHP i al veure que era prou més complicat que WordPress vaig dedicar les primeres hores de pràctiques a PHP.

Seguidament per a aprendre PHP vaig decidir que la millor opció era crear el meu propi blog personal programant. Per a realitzar aquest blog vaig necessitar, a més de PHP, aprendre un poc de HTML i CSS per a canviar els colors del blog.

Per a poder crear-lo vaig utilitzar el paquet de software lliure XAMPP el qual implementa el sistema de gestió de bases de dades MariaDB, el servidor web Apache i els intèrprets per a llenguatges de programació PHP i Perl. Aquesta ferramenta proporciona un servidor web lliure, fàcil d'utilitzar i capaç d'interpretar pàgines dinàmiques. Vaig haver de fer us de XAMPP perquè necessitava tindre el meu blog en local ja que simplement era una prova i no feia falta comprar un domini.

Per a dur a terme el blog vaig seguir un curs sobre disseny web per a principiants. Primerament vaig utilitzar el framework front-end Bootstrap. Em va resultar molt útil ja que resolia els errors que es donaven al canviar de dispositiu i feia que sempre s'ajustara de forma adequada a tot tipus de pantalles capaces d'accedir al lloc web. Aquesta ferramenta donava un aspecte professional i qualitat al projecte. També vaig utilitzar JQuery per a ajudar-me a treballar amb JavaScript i, per a que, d'aquesta forma, la pàgina web s'execute en el client, és a dir, en el propi navegador del usuari.

Una vegada instal·lades les eines adequades vaig començar a programar el blog. Primer vaig crear un índex utilitzant Bootstrap. Una vegada fet això vaig canviar el fons i els colors de la pàgina utilitzant, i aprenent tot d'una, CSS. A continuació em vaig posar a administrar el sistema de bases de dades. Per a fer això vaig crear la base de dades anomenada blog i al mateix temps una taula usuari amb atributs útils. Creada la base de dades vaig crear una classe amb el seu constructor i les funcions per a que guardara i obtinguera aquests atributs inserits programant en PHP. Addicionalment vaig utilitzar icones de Bootstrap per a donar-li una visió més estètica.

Amb aquestes funcionalitats inicials vaig seguir implementant el blog creant i programant la pàgina del registre. Per a validar les dades, abans de guardar-les en la base de dades, vaig comprovar si tots els camps estaven complets, si no es produïa cap error i si es complien les restriccions que vaig imposar, com la coincidència d'ambdues contrasenyes. L'aspecte de la pàgina de registre va ser:

Figura 3.1: Formulari de registre

Abans de realitzar la pàgina d'inici de sessió vaig crear una funció la qual executava una consulta en SQL per a poder crear usuaris aleatòriament. També el que vaig fer va ser encriptar la contrasenya del usuari amb el mètode de PHP hash per a que no es veiera en la base de dades i no es poguera produir un atac per a robar-la.

Fet això vaig crear la pàgina d'inici de sessió. Abans de tot vaig elaborar la pàgina a la qual informar a l'usuari de que s'havia registrat correctament i redirigir-lo a la pàgina d'inici de sessió quan ja s'havia creat el seu perfil. La pàgina d'inici de sessió va ser semblant a la de registre però més simple ja que solament contenia el correu electrònic i la contrasenya.

A continuació vaig canviar un poc l'aparença de la barra de navegació. La vaig fer dinàmica per a que no apareguen els enllaços de registre i inici de sessió quan la sessió ja estava iniciada i en canvi veure l'enllaç de tancar sessió.

Una vegada fet això vaig haver de canviar la base de dades i per tant vaig borar l'anterior. A més de la taula dels usuaris vaig crear una nova taula entrades la qual estava unida a usuaris a traves del id del usuari. Una altra taula que vaig crear va ser la de comentaris amb el unida per el id del autor i, a més a més, té una altra clau externa que uneix els comentaris a les entrades.

Tot seguit vaig crear un script per a omplir la base de dades de forma automàtica. A causa de les restriccions de les bases de dades primer hem de crear usuaris, desprès entrades i per últim els comentaris.

Arribat a aquest punt era interessant crear usuaris al atzar i per a això vaig utilitzar una funció que creava un nom d'usuari únic al igual que el correu i la seua contrasenya la qual la vaig encriptar amb el mètode hash.

Per a inserir entrades vaig utilitzar la pàgina web lorem ipsum per a crear un text aleatori. La funció que introduïa entrades tenia un text copiat de la pàgina mencionada amb un títol aleatori i un autor ja creat. També vaig crear una funció comentaris molt similar a aquesta. Una vegada fet això ja tenia un blog amb contingut.

Per continuar vaig treballar per a poder mostrar les entrades a l'índex. Per a fer això vaig crear una funció que obtenia les entrades i les ensenyava per orde descendent a partir de la dada i una altra funció que les escrivia.

Una vegada mostrades les entrades vaig veure un problema, es veien les entrades senceres i si eren molt llargues no era còmode. Per a arreglar el problema vaig pensar que podia resumir-les limitant-les a certs caràcters. Per això vaig crear una funció que resumia els textos limitats amb una longitud de 400 caràcters amb un botó per a poder veure-les completes. L'aspecte va quedar així:

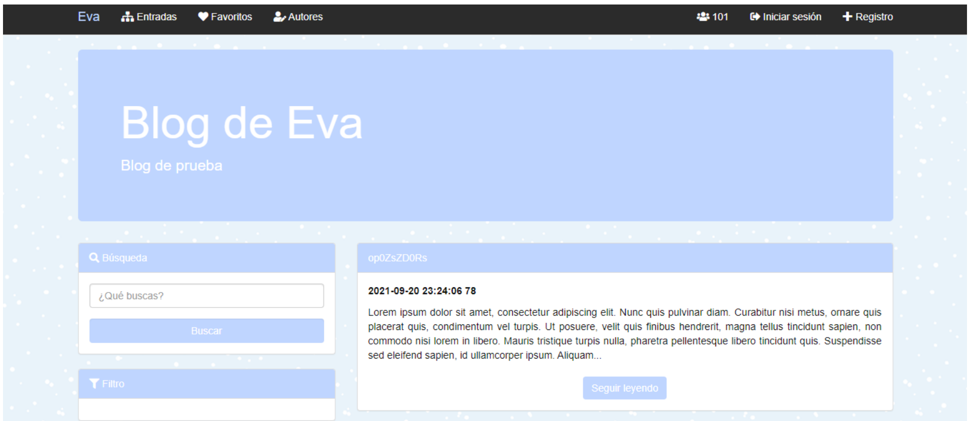


Figura 3.2: Entrades resumides

A més a més vaig elaborar una funció que obtenguera entrades al atzar per a que baix de cada entrada isqueren algunes més per a poder seguir navegant en el blog una vegada l'entrada actual ha sigut llegida.

Una altra funcionalitat que vaig afegir baix del apartat d'entrades interessants va ser un apartat amb els comentaris de l'entrada actual. Per a dur-ho a terme vaig crear una funció que obtenia els comentaris d'una entrada en concret. Aquestes dos funcionalitats tenen aquest aspecte:

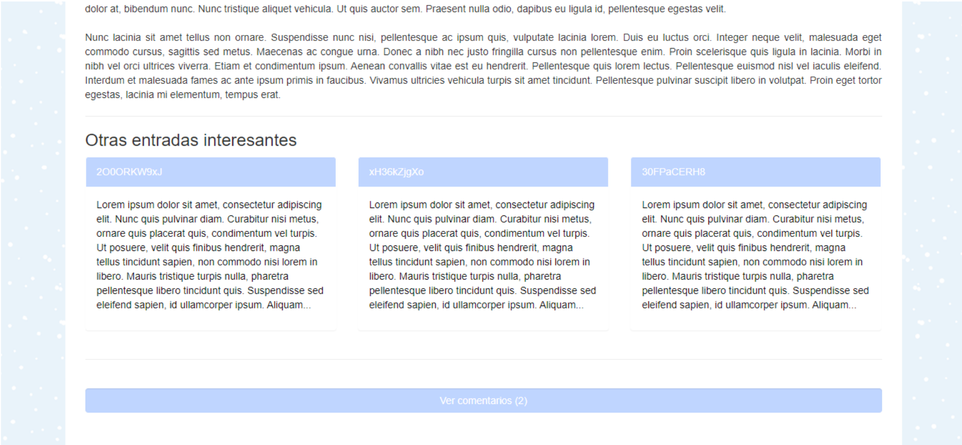


Figura 3.3: Altres entrades interessants i comentaris

Arribat a aquest moment vaig crear el gestor que contenia un enllaç a les entrades, als comentaris i als favorits. Una vegada fet això li vaig donar un poc d'estil al gestor genèric canviant els colors de les lletres i fons de cada enllaç. A més vaig afegir icons per a que quedara més bonic. Per a cada gestor vaig agregar, mitjançant funcions, els subapartats que es veuen en la Figura 3.4. Per a donar-li un poc més d'estil vaig fer que al passar el ratolí per damunt de cada secció canviara de color per a saber que estava sent seleccionada. Va quedar així:

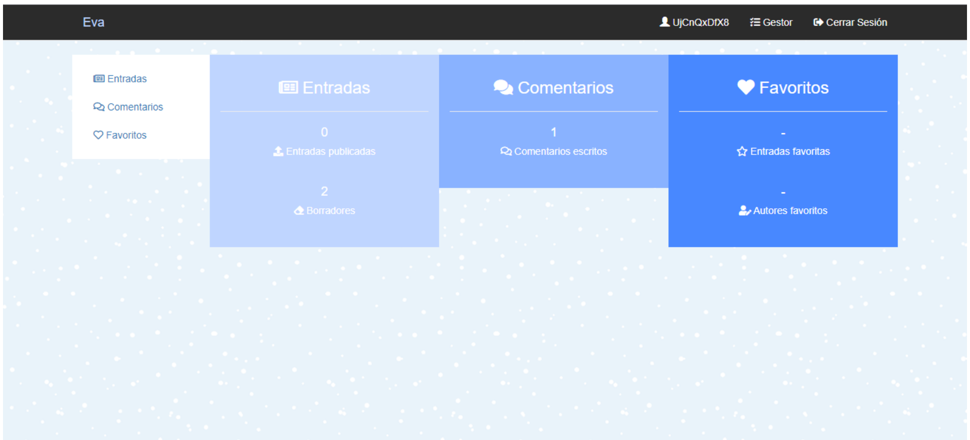


Figura 3.4: Gestor genèric

Amb el gestor genèric creat vaig passar a crear el gestor d'entrades. Per a dur a terme això vaig crear una taula on es llistaren totes les entrades amb les seues característiques. També li vaig donar un poc d'estil canviant els colors amb CSS.

Amb això fet vaig modificar l'apartat d'accions creant dos botons des dels quals es podia editar i esborrar l'entrada en qüestió que més avant vaig fer funcionar. Una altra funcionalitat que vaig crear va ser un botó amb el qual es poguera afegir una nova entrada. Tot va quedar d'aquesta forma:

Figura 3.5: Gestor d'entrades

Al apretar el botó d'afegir una nova entrada vaig crear un formulari amb el contingut de la Figura 3.6. Per a poder afegir la nova entrada vaig crear una nova classe amb el seu constructor i els validadors per a saber si s'han inserit correctament les variables i no existeixen ja. A més vaig fer que si algun usuari accedia a aquesta pàgina sense iniciar sessió el redirigira al inici de sessió. El formulari va quedar així:

Figura 3.6: Crear una nova entrada

Completat el formulari em vaig posar a fer funcionar els botons de les accions. Per al botó d'esborrar vaig haver de fer transaccions ja que per a esborrar una entrada s'han de esborrar abans els comentaris si es el cas. Per al botó editar entrada vaig crear un formulari molt semblant al de nova entrada però amb les dades de l'entrada a editar. Per al correcte funcionament d'aquesta funcionalitat vaig crear una nova classe validador de l'entrada editada i per a actualitzar els canvis vaig crear una funció actualitzar. Aquesta funcionalitat va quedar d'aquesta forma:

Figura 3.7: Editar una entrada

Amb això fet em vaig posar a desenvolupar l'enllaç per a poder recuperar la contrasenya. Per a això el primer que vaig fer va ser crear una nova taula per a recuperar contrasenyes i inserir-la en la base de dades.

A continuació em vaig posar a fer el formulari de recuperació de contrasenya en el qual li demanava a l'usuari el seu correu electrònic per a enviar-li un missatge. Amb el correu vaig aconseguir el nom de l'usuari i vaig crear una URL secreta feta aplicant el hash a una cadena aleatòria afegida al nom del usuari. Ara em vaig posar a guardar aquesta URL a la base de dades. Una vegada fet em vaig dedicar a crear la classe de recuperació de la clau. Seguidament vaig crear una funció per a generar una petició de canvi de contrasenya per a inserir la URL en la base de dades.

Endemés vaig implementar el formulari per a canviar la contrasenya. Aquest formulari tenia la clau, la repetició d'aquesta i un botó per a guardar-la. La nova contrasenya la vaig passar per un hash per encriptar-la i poder actualitzar-la. Una vegada actualitzada vaig crear una pàgina que notificava aquesta actualització i redirigia al usuari a l'inici de sessió. A més per seguretat vaig esborrar la sol·licitud de canvi de contrasenya.

Arribat a aquest pas vaig desenvolupar el buscador del lloc web. Per a això vaig realitzar una pàgina que s'obri al apretar el botó buscar de la pàgina principal. En aquesta pàgina vaig crear un text per a poder escriure i un botó per a busca. Per a fer servir aquesta funcionalitat primer vaig comprovar que hi havia alguna cosa escrita al requadre. Amb això creat vaig crear una funció per a buscar entrades en tots els camps, és a dir, en el títol o en el text. Una vegada creada aquesta funció vaig fer una altra per a mostrar el nombre de resultats que es retornen i els propis resultats de la cerca.

Implementada la cerca bàsica em vaig dedicar a desenvolupar la cerca avançada. Per a això vaig crear un desplegable en el qual es poguera buscar per títol, contingut, autor i etiquetes. Una altra funcionalitat vaig crear un marcador per a buscar per entrades més recents o entrades més antigues. Per últim vaig crear un botó per a aquesta cerca. A causa de tindre una cerca avançada vaig haver de fer funcions per separat per a implementar totes les funcionalitats i poder mostrar-les per separat. Aquesta funcionalitat va quedar així:

Figura 3.8: Cerca

Per últim vaig implementar un perfil d'usuari on es veuen totes les seues dades i una implementació en la qual l'usuari poguera canviar l'imatge de perfil. Per a això vaig crear una pàgina a la que solament es pot accedir si l'usuari ha iniciat sessió. En aquesta pàgina vaig afegir les dades de l'usuari i una imatge de perfil. Per a poder canviar la foto de perfil vaig crear un botó per a poder pujar una imatge amb un tamany restringit a 500kb i del tipus jpg, png, jpeg o gif. En addició vaig fer que al clicar damunt l'imatge predeterminada també el poguera redirigir a la galeria de l'ordenador per a poder seleccionar l'imatge. Aquesta funcionalitat va quedar així:

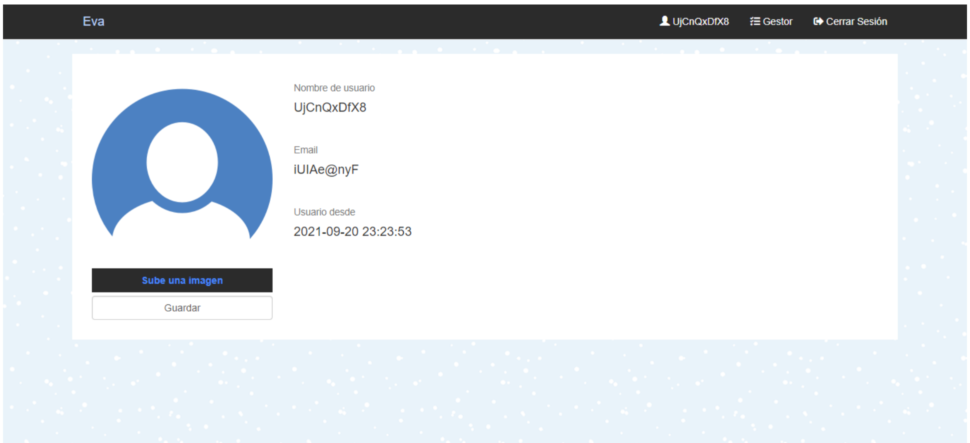


Figura 3.9: Perfil d'usuari

Al finalitzar aquest curs em vaig adonar que vaig aprendre moltes coses sobre PHP, HTML, CSS i moltes més coses que no haguera aprés si no haguera programat aquest blog personal. Pot ser que moltes de les coses apreses no em serviran per a després crear el fòrum en WordPress però aprendre mai està de més, em serà útil per a un futur.

Creat ja aquest blog de prova vaig tindre una reunió amb el meu tutor de pràctiques Marcos González. En aquest encontre li vaig ensenyar el que havia fet en aquests darrers dies i li va semblar molt bé ja que moltes de les funcionalitats les havia d'implementar al fòrum. Al mateix temps varem estar parlant sobre WordPress i com posicionar millor el propi fòrum dins dels buscadors, és a dir, el SEO.

Després de la reunió em vaig investigar sobre WordPress, vaig llegir diversos articles i veure alguns vídeos. Després d'indagar vaig pensar que començar a crear el fòrum era una bona idea. Com encara era un fòrum provisional i no tenia cap hosting vaig crear un host local utilitzant de nou XAMPP. Vaig veure un tutorial de com havia d'instal·lar WordPress al XAMPP i una vegada fet vaig començar a investigar sobre el funcionament de les característiques de WordPress.

Al veure que hi havia moltes característiques molt diverses vaig pensar que seria bona opció posar-me en contacte amb Marcos per a veure si ell sabia quina era la millor opció per a crear el fòrum ja que pensava que si elegia un mal camí després havia de tornar a començar de nou. Marcos em va posar en contacte amb Rubén, un altre alumne en pràctiques de l'empresa. Amb Rubén vaig estar parlant de diverses funcionalitats i ell em va recomanar que utilitzara un tema per al fòrum i que al mateix temps fera us de diversos plugins ja que aquestes dues eines facilitarien molt el desenvolupament del fòrum.

Amb aquestes recomanacions vaig estar investigant sobre quin era el millor tema gratuït per a instal·lar. Vaig estar mirant diverses estadístiques tenint en compte les valoracions els usuaris que instal·laven els diversos temes i les descarregues produïdes per cada tema. Després de mirar en diferents pàgines comparatives em vaig decidir per el tema GeneratePress ja que la gent el recomanava i em va semblar interessant i bonic.

Una vegada instal·lat el tema vaig començar a buscar com podria crear el fòrum. Vaig mirar com podria fer-ho dins de WordPress i la millor de les opcions era instal·lar un plugin. Hi havia dos que treballaven amb fòrums i aquests dos eren WpForo i bbPress. De nou vaig investigar per a veure quina d'ambdues era la millor opció i em vaig decidir per WpForo ja que vaig veure que era un plugin prou complet i amb una aparença que m'agradava. Una vegada instal·lat el plugin ja tenia un fòrum bàsic en el qual s'han de millorar moltes coses.

Una vegada instal·lat WpForo vaig estar mirant els widgets que podia posar a la part de la dreta del fòrum. Mirant-los tots vaig decidir que era una bona opció posar un buscador, un plugin amb el qual si no s'està registrat es poguera iniciar sessió o registrar-se i si estava registrat apareixia les dades de l'usuari, els membres que hi ha en línia i els post recents.

Amb aquesta aparença bàsica vaig decidir que era una bona opció buscar informació sobre ovnis per a insertar-la al blog i així també informar-me per a saber més d'aquest tema. Vaig estar investigant molt i vaig trobar diverses noticies interessants les quals inseriré al blog per a veure com quedaven.

Un altre factor que vaig millorar va ser l'aparença del fòrum. Els colors predeterminats eren de color blanc i vaig decidir que era bona opció canviar els colors a un to negre ja que ara està més de moda i a més vaig canviar alguns altres colors a un to verd claret ja que va bé amb el tema dels ovnis. Vaig estar investigant com canviar el color i vaig descobrir que el propi plugin WpForo tenia un apartat per a canviar els colors al gust del propi creador però no es podia saber a que feia referència cada color. Per a saber-ho vaig anar canviant els colors i refrescant la pàgina per a veure que havia canviat. Una vegada detectats els color que volia que foren diferents els vaig canviar al meu gust però encara hi havia colors que no podia reemplaçar i ho vaig haver de fer mitjançant codi CSS.

Amb l'aspecte millorat vaig voler inserir les noticies recopilades al blog i vaig pensar que seria una bona decisió crear diferents perfils per a veure com es veien en cada perfil. A l'hora de crear perfils em va sorgir un problema amb el correu electrònic i per tant no podia crear més perfils ja que sense la verificació del correu no es pot crear un nou perfil. Aquest es un error que vaig solucionar quan vaig tindre el host de TotalMad. Vaig inserit algunes de les noticies amb el perfil del root per a veure com quedaven i quedaven d'aquesta forma, també es pot veure l'aspecte dels widgets de la dreta:

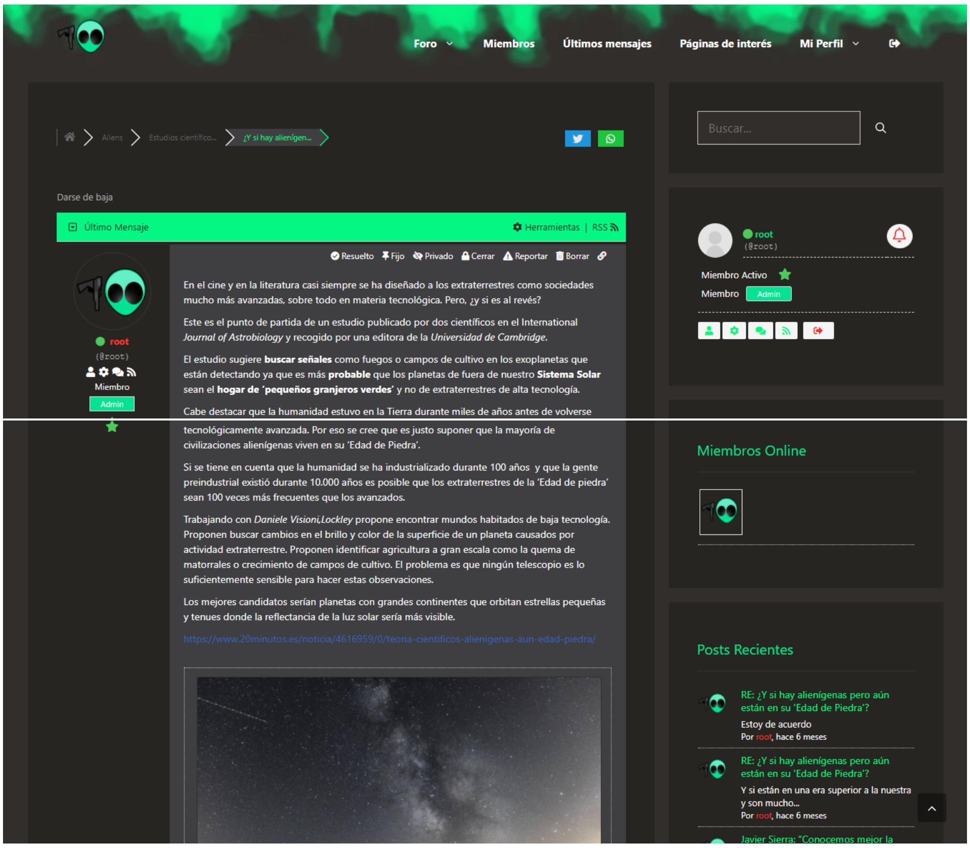


Figura 3.10: Aspecte de les noticies inserides

A continuació vaig pensar que un bon apartat addicional del fòrum podia ser el de pàgines d'interés amb el qual la gent pot informar-se més del tema tractat en el fòrum, els ovnis. Per a dur a terme això vaig haver d'investigar si era legal enllaçar d'un lloc web un altre i vaig veure que si la pàgina enllaçada era pública si que ho era i per tant podia crear aquest nou apartat. La primera referència que vaig inserir va ser un lloc web on s'emmagatzemaven els diversos avistaments que s'havien produït en Estats Units al llarg de l'historia.

Com no es poden crear nous perfils vaig investigar per a veure quins hi havien i que podia fer cadascun. Els perfils que disposava en aquest moment eren el visitant, el registrat, el client, el moderador i l'administrador. Vaig fer una llista amb els aspectes i les característiques de cadascun per a informar a Marcos i veure si calia crear un altre perfil amb algunes característiques diferents als usuaris actuals.

Una vegada finalitzat tot l'anterior vaig inserir en el peu del fòrum una pàgina que redirigia a l'apartat de la política de privacitat la qual vaig copiar de la de TotalMad ja que al cap i a la fi el fòrum forma part de l'empresa.

Un altre factor important a tindre en conter era el tema de les cookies ja que per a un lloc web es fonamental. Com jo no sabia massa coses sobre aquest factor vaig informar-me i llegir sobre aquestes en diverses fonts d'informació. Li vaig dedicar una llarga estona i com vaig recopilar molta informació vaig fer un resum dels factors a tindre en conter.

Altre punt important per a obtindre beneficis del fòrum es la publicitat i, encara que es molt aviat pensar en posar publicitat, he estat pensant on podríem inserir-la sense que resulte molest per als usuaris. Per a això he estat mirant altres fòrums famosos per a veure com tenien plantejat ells aquest aspecte i crec que una de les millors opcions es inserir-la als costats o baix dels debats i noticies. També vaig veure que algunes pàgines el que feien es incloure la publicitat com a fons de la pàgina però a mi em va semblar massa agressiu i molt poc atractiu.

A més a més, vaig estar investigant sobre les xarxes socials que te enllaçades el propi plugin WpForo. He vist que te algunes famoses com son Facebook o Twitter però no he sabut afegir algunes més famoses actualment com pot ser Instagram. Serà un tema que vaig tractar posteriorment.

Per al màrqueting digital un factor molt important es recopilar la major informació dels usuaris ja que aquest fòrum, quan cree una quantitat de contingut determinada, serà venut a persones interessades en ell. Per a dur a terme això vaig canviar el registre per a fer-lo més complet. Investigant vaig veure que abans de canviar el registre els llocs webs recomanen fer primer una còpia de seguretat. Per a fer la còpia de seguretat he instal·lat un plugin anomenat All-in-One WP Migration en el qual he creat una còpia que he guardat en el meu ordenador personal a més d'estar emmagatzemada en WoordPress.

Una vegada obtinguda la còpia de seguretat vaig mirar diversos plugins amb el qual millorar el formulari de registre. D'entre tots els que vaig trobar al final em vaig decidir per un anomenat Pie Register. Amb ell vaig crear un formulari amb les dades bàsiques que son el nom d'usuari, el correu electrònic, la contrasenya i la repetició d'aquesta. A més d'aquestes dades vaig estar investigant en altres fòrums famosos i vaig pensar que també seria interessant guardara la identitat de gènere de la persona, el país i l'edad inserida per rangs. Una altra funcionalitat obligatòria es la caixa per acceptar la política de privacitat i vaig inserir un marcador per a saber si al usuari se li poden enviar missatges informatius.

Implementat ja el registre nou vaig començar a migrar el fòrum a un lloc provisional però que ja estava en línia. Era una pàgina de TotalMad que utilitzaré mentre Macos compra el domini final.

Una característica que no contemplava el fòrum era el veure les imatges quan es publicava una noticia o un debat. Aquestes eixien referenciades amb un link i per a veure-les havies de clicar damunt d'elles. De la mateixa forma passava amb els links de vídeos de Youtube, no es veia la miniatura. Per a arreglar aquest problema vaig investigar i vaig veure que es podia comprar una extensió del plugin WpForo que feia el que jo necessitava però s'havia de pagar. Examinant per Internet vaig descobrir un codi PHP amb el qual podia inserir aquestes característiques i ho vaig implementar al fòrum.

Amb totes aquestes millores vaig tindre una reunió amb el meu company Rubén i em va dir alguns aspectes que millorar. A més a més em va dissenyar un nou logo ja que ell sap de Photoshop. Vaig inserir el logo tant a la miniatura de la pàgina web com a la barra de navegació.

Un altre aspecte que seria interessant inserir en un futur seria la traducció del fòrum, és a dir, que es puga seleccionar l'idioma amb el qual vols llegir-lo. He estat investigant i he vist que hi ha diversos plugins interessants que poden fer aquest treball.

Algunes de les millores que em va plantejar Rubén van ser inserir en el menú de navegació un desplegable on es puga accedir a les categories en les que està distribuït el fòrum. Ho vaig dur a terme i em va semblar una millora molt bona ja que proporcionava més llibertat per a veure les noticies a la pròpia barra de navegació.

Una altra millora que vaig fer va ser millorar la part inferior de la pàgina web, també anomenada footer. El primer que vaig fer va ser llevar el copyright. Per a dur a terme aquesta tasca vaig investigar i vaig veure que era més complicat del que pensava però vaig trobar un codi PHP amb el qual podia eliminar-lo.

Volia seguir millorant el footer però em va sorgir un problema. Van començar a registrar-se molts usuaris falsos en el fòrum. Vaig eliminar tots aquests usuaris i vaig investigar com pervindre aquestes coses. Vaig veure que una molt bona forma, i molt utilitzada, per a arreglar el problema era utilitzar re-captcha i inserir-lo en el registre.

Una vegada arreglat el problema vaig seguir millorant el footer. Per a inspirar-me em vaig dedicar a veure com eren els footers de diferents pàgines web, tant de fòrums com pàgines amb qualsevol altre contingut. Una de les millores que vaig implementar va ser inserir allí la política de privacitat i la pàgina de les cookies.

A més a més vaig crear enllaços a les xarxes socials més utilitzades a dia de hui les quals en un futur redirigiran a la xarxa social del propi fòrum. També vaig pensar que seria una bona idea inserir el logo del fòrum per a que quede mes visual i al mateix temps si es punxa damunt d'aquest el redirigeix als temes dels quals es parlen en el fòrum. Va quedar d'aquesta forma:

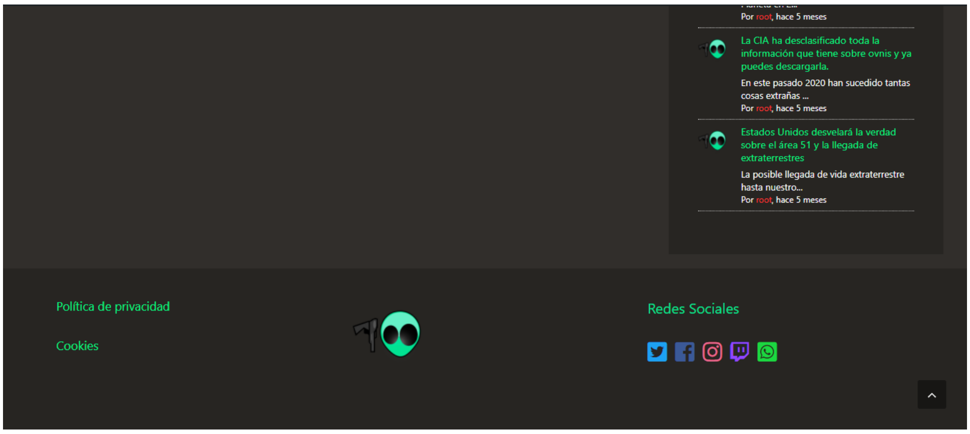


Figura 3.11: Part inferior de la pàgina

Arribat a aquest punt em va sorgir un altre problema. A més d'inserir el re-chapta en el registre el vaig introduir en l'inici de sessió i estava fallant. Això provocava que no es poguera iniciar sessió i no podia eliminar el plugin ja que no posseïa la informació del hosting.

Marcos em va dir que em proporcionaria ja el domini final i hauria de migrar tot el fòrum de nou. Mentre el tutor de pràctiques comprava el domini vaig estar investigant sobre com millorar el menú i la pàgina d'inici. A més a més vaig dedicar aquest temps a buscar més noticies sobre ovnis i més informació addicional per a inserir a l'apartat de pàgines d'interés.

D'entre les diferents pàgines d'interés vaig inserir un enllaç a un podcast que parlava de diferents aspectes relacionats amb els ovnis, aquest podcast s'anomena Podium Podcast i he vist que en alguns dels episodis que tenen publicats parlen de noticies contingudes en el fòrum. En addició vaig inserir diversos llibres d'interés així com alguna serie i pel·lícula relacionada amb els aliens. Aquestes implementacions van quedar d'aquesta forma:

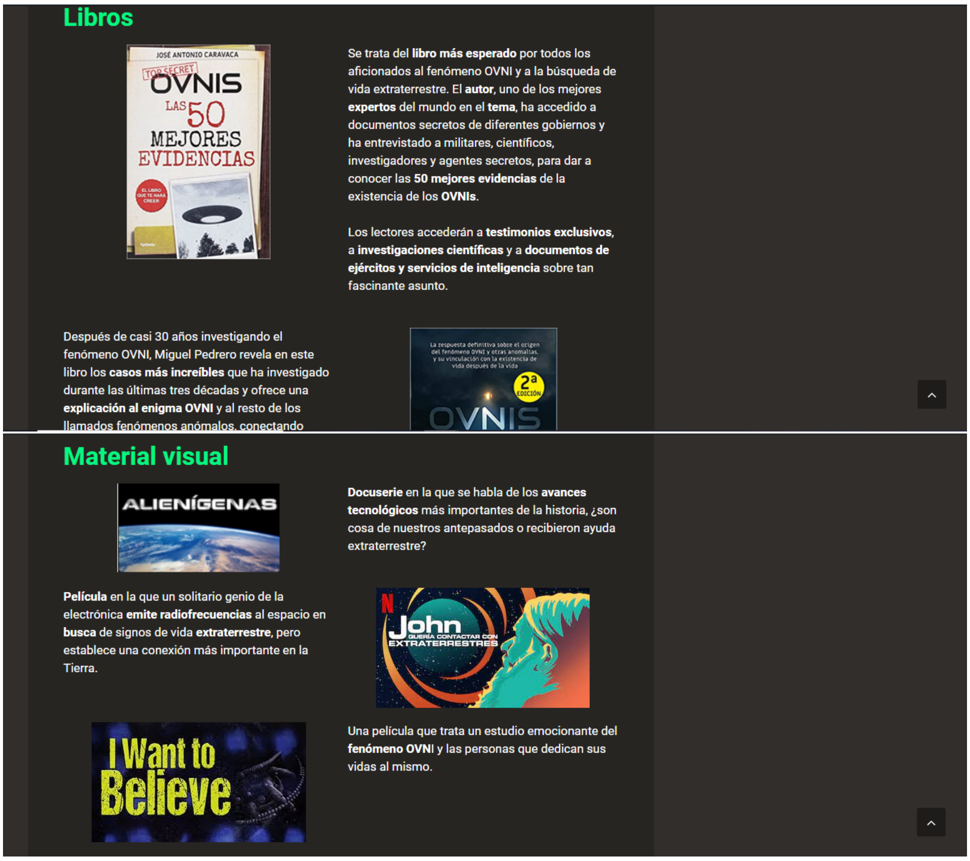


Figura 3.12: Pàgina d'interés

Com tenia el fòrum en local vaig seguir treballant amb aquest i fent millores per a després migrar-ho tot. Un altre aspecte visual que em va comentar Rubén que podia ser interessant a implementar es una especie de moc al menú per a donar un aspecte distintiu i més visual al fòrum. Primerament vaig crear un de prova per a veure com podia posar-lo com a fons de menú i una vegada aconseguit Rubén em va passar una imatge ja més professional i al inserir-la va quedar al que així:

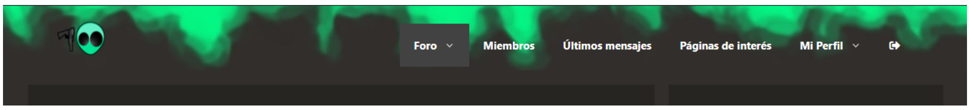


Figura 3.13: Capçalera

Una vegada canviat el menú va sorgir un problema i era que al canviar el fons quan es buscava el fòrum en una dispositiu amb una pantalla inferior a la de l'ordenador. Aquest error era que el desplegable es veia transparent i no es podien distingir bé els diferents apartats. Per a solucionar aquesta errata vaig posar un color fix al fons, vaig aconseguir solucionar-ho mitjançant codi CSS i el vaig fer de color negre.

Una altra millora visual que vaig sospesar va ser la creació de diferents avatars per als usuaris ja que donaria un aspecte més professional al fòrum. Li ho vaig comentar a Rubén i li va semblar que podia ser una millora a implementar més avant.

Arribat a quest punt Marcos em va proporcional el host final però va sorgir un problema amb el certificat SSL o el port 443 que no vaig saber solucionar i tampoc Rubén. Li ho vaig comentar a Marcos i ell es va posar en contacte amb Dani, un informàtic de l'empresa, per a que solucionara l'error. Passats pocs dies l'error va ser resolt i em van informar que era per les ip's.

Una vegada resolt l'error vaig migrar tot el contingut de nou al host final que es 100aliens.com.

Migrat tot el contingut vaig mirar un nou plugin per a canviar el registre i l'inici de sessió ja que amb l'anterior em van sorgir problemes amb el sistema del correu electrònic. Vaig veure que el plugin Ultimate Member estava prou interessant i el vaig instal·lar i crear nous formularis amb les característiques del plugin anterior i van quedar així:

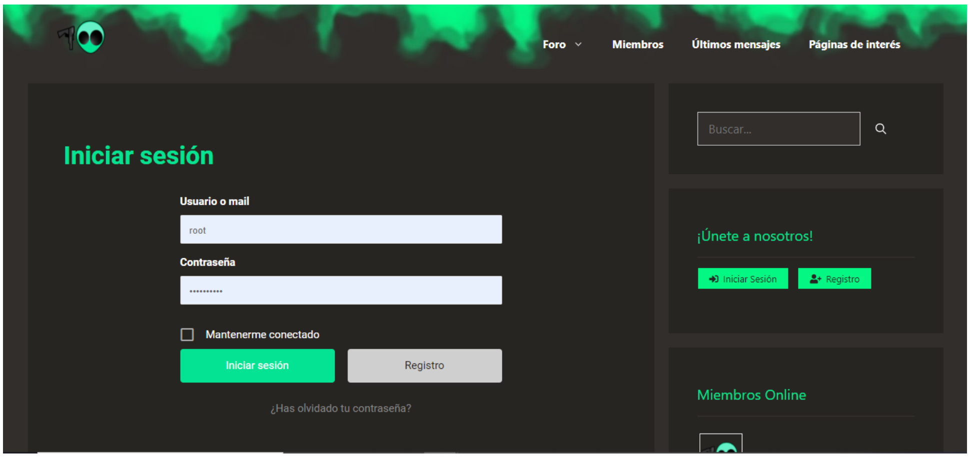


Figura 3.14: Inici sessió

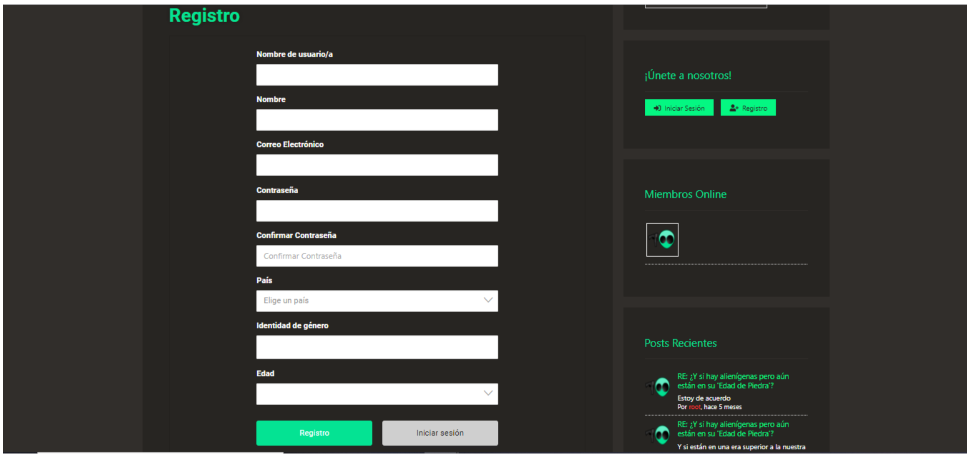


Figura 3.15: Registre

Una millora que vaig implementar va ser optimitzar les Figures per a que ocupen menys espai ja que vaig fer un anàlisi del lloc web en Pingdom i aquesta era una de les millores que deia que es podien realitzar.

Arreglat això vaig començar a mirar el tema d'enviar correus per a que els nous usuaris es pogueren registrar al fòrum. Ho vaig poder solucionar i per tant a partir d'aquest moment qualsevol persona, no robot, podia formar part del fòrum.

Fet això ja tenia un fòrum prou complet amb les característiques bàsiques i prou més cobertes. Actualment l'aspecte del fòrum ha sigut modificat però les funcionalitats implementades segueixen sent les mateixes.

3.2.2 Grau de consecució dels objectius proposats

Una vegada finalitzat aquest fòrum he quedat bastant contenta amb els resultats obtinguts. Cal recalcar que al principi de l'estada en pràctiques jo mai havia tractat amb els llenguatges de programació treballats ni amb WordPress i actualment considere que he aprés molt d'aquestes funcionalitats.

Un objectiu que se m'ha quedat a mitges ha sigut aprendre més sobre el posicionament de la pàgina als buscadors. He dedicat a aprendre pel meu conter per a implementar totes les funcionalitats i per tant no he pogut aprendre tot el proposat.

3.2.3 Conclusions

Com he comentat en l'apartat anterior estic molt contenta amb els resultats obtinguts ja que la base de la qual partia era nul·la i per tant he pogut fomentar les meues capacitats d'autoaprenentatge.

L'equip humà de l'empresa en la qual he realitzat aquesta estada crec que ha sigut prou empàtic ja que sempre que m'ha sorgit cap problema han estat presents per a resoldre-me'l ja siga via correu electrònic o per vídeo conferència.

Amb aquesta experiència he pogut veure més de prop com és el món laboral actual malgrat haver realitzat l'estada via en línia a causa de les condicions provocades per la pandèmia.

Part II

Memòria TFG

Capítol 4

Motivació i Objetius

La transivitat topològica és una característica global d'un sistema dinàmic discret. El concepte de transitivitat topològica es remonta a G.D. Birkhoff. D'acord amb [12], Birkhoff va utilitzar aquest concepte en 1920, cf. [7], vol. 2, p. 108 i p. 221 (veure també [8]).

Considerarem un sistema dinàmic discret (X, f) donat per un espai mètric (l'espai de fases) X i una funció contínua $f\colon X \to X$. Com una motivació de la noció de transitivitat topològica, podem pensar en un sistema físic en el que un estat mai està donat o mesurat exactament, però almenys ho està amb un cert error. Per tant, en lloc de punts podem estudiar subconjunts oberts (petits) de l'espai de fases i descriure com *es mouen* en aquest espai. Per exemple, si la minimalitat de (X, f) es defineix com que qualsevol punt $x \in X$ *visita* tot subconjunt obert no buit V de X, podem intentar estudiar la següent noció: tot subconjunt obert no buit V de X *visita* tot subconjunt obert no buit U de X en el sentit següent: $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ per a algun $n \in \mathbb{N}$. Si el sistema dinàmic (X, f) satisfà aquesta propietat, aleshores direm que ès topològicament transitiu o que f és una funciò topològicament transitiva.

Intuïtivament una funció f topològicament transitiva té punts que eventualment *es mouen* per iteració des d'un entorn arbitrariament petit a un altre.

Cal indicar que la terminologia no està unificada. Alguns autors treballen amb la noció de topològicament transitiu usant una definició diferent: sovint un sistema dinàmic es diu topològicament transitiu si té una òrbita densa, per exemple en [1, 15, 21].

Aquest fet ens du al primer objectiu del treball: estudiar la relació entre ambdós conceptes. Demostrarem que, en general són diferents i, utilitzant el teorema de la categoria de Baire, provarem que en el cas que l'espai de fases és mètric complet (en particular, compacte) ambdues nocions són equivalents.

La noció de funció topològicament transitiva va lligada a la de dependència de les condicions inicials en varies definicions de caos. El primer en formular el concepte de dependència de les condicions inicials va ser Guckenheimer [13] en el seu estudi sobre funcions en l'interval. La frase *dependència de les condicions inicials* va ser utilitzada per primera vegada per Ruelle [18] (veure també [9]) per indicar una raó de divergència exponencial d'òrbites de punts *propers*.

La transitivitat topològica es preserva per conjugació. Del comentari del paràgraf anterior neix un segon objectiu de la memòria: estudiar com es comporta la dependència de les condicions inicials per conjugació.

Per finalitzar el nostre treball caracteritzarem quan el sistema dinàmic induït per (X, f) en l'hiperespai dels subconjunts compactes no buits de X amb la mètrica de Hausdorff és topològicament transitiu. Cal tindre en compte que aquest hiperespai és conegunt com *el lloc on els fractals viuen* (veure [6]), especialment quan $X = \mathbb{R}^n$, i la distància de Hausdorff mesura com *de proper* estem d'un fractal.

Capítol 5

Sistemes dinàmics discrets topològicament transitius

5.1 Conceptes bàsics

Comencarem per recordar algunes nocions de caràracter general.

Definició 5.1.1 *Diem que (X, d) és un espai mètric si està format per un conjunt X sobre el qual es defineix una funció distància $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que per a tot $x, y, z \in X$ es compleixen les propietats següents:*

(i) *No negativa:* $d(x, y) \geq 0$.

(ii) *No degenerada:* $d(x, y) = 0$ *si, i solament si,* $x = y$.

(iii) *Propietat de simètria:* $d(x, y) = d(y, x)$.

(iv) *Desigualtat triangular:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definició 5.1.2 *La mètrica anomenada habitual o euclídia a l'espai mètric $(\mathbb{R}, d_e)$, on $\mathbb{R}$ representa el conjunt dels nombres reals, és la definida com*

$$d_e(x, y) = |x - y|.$$

Definició 5.1.3 *Si (X, d) és un espai mètric, anomenarem bola oberta de radi r centrada en $x_0 \in X$ al conjunt*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Definició 5.1.4 *Un subconjunt $A \subset (X, d)$ és un subconjunt obert de l'espai mètric (X, d) si, donat un $x \in A$, existeix un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.*

Definició 5.1.5 *Un subconjunt $C \subset (X, d)$ és tancat si donada una successió convergent $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset C$, amb $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, el punt x_0 pertany a C.*

Els espais mètrics són un cas particular d'una classe més amplia d'espais, els espais topològics. Tenim les següents definicions bàsiques.

Definició 5.1.6 *Un espai topològic és un parell $(X, \mathcal{T})$ format per un conjunt X i una topologia $\mathcal{T}$, és a dir, una familia de subconjunts de X, anomentats conjunts oberts, amb les següents propietats:*

(i) *Si $A_i \in \mathcal{T}$, aleshores $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$: la unió arbirtaria de conjunts oberts és un conjunt obert.*

(ii) *Si $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T}$, aleshores $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{T}$: la intersecció finita de conjunts oberts és un conjunt obert.*

(iii) *$\emptyset \in \mathcal{T}$ i $X \in \mathcal{T}$.*

Definició 5.1.7 *Un espai topològic $(X, \mathcal{T})$ és de Hausdorff si, per a cada parell de punts diferents, existeixen dos conjunts oberts disjunts $A, B \in T$ tal que $x \in A$ i $y \in B$.*

És fàcil veure que la unió arbitrària de boles obertes defineix una topología de Hausdorff en un espai mètric. En aquest cas, la definició de conjunt obert donada per a espais mètrics és consistent amb la definició anterior.

5.2 Sistemes dinàmics discrets

Abans d'endinsar-nos en aquesta secció hem de definir el concepte de sistema dinàmic discret. *Grosso modo* un sistema dinàmic discret es defineix com una col·lecció d'elements que contínuament interactuen per a formar un conjunt unificat que s'està modificant constantment en petits lapses de temps.

La definició matemàtica d'aquest concepte és la següent: un sistema dinàmic discret és un parell (X, f) on X és un espai mètric i $f : X \to X$ una funció contínua. A continuació anem a definir alguns del conceptes essencials d'aquest capítol. Ens es d'especial interés definir òrbita densa i transitivitat topològica ja que són dos dels conceptes fonamentals que tractarem en el nostre estudi. Primerament anem a recordar tant la definició d'òrbita, així com la de densitat per, a continuació, definir òrbita densa. Si no diguem el contrari, sempre treballarem amb espais mètrics encara que moltes definicions són vàlides en espais topològics generals.

Definició 5.2.1 *Siga (X, d) un sistema diàmic discret. L'òrbita d'un punt $x \in X$ és la successió $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$.*

L'òrbita d'un punt es denota per $Orb_f(x)$. Cal tindre en compte que l'òrbita d'un punt pot ser finita si la successió

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), ..., f^n(x), ...\}$$

conté només un nombre finit d'elements.

Una vegada introduït el concepte d'òrbita, definirem que es un punt fixe per a després relacionar aquests dos conceptes.

Definició 5.2.2 *Siga X un conjunt no buit i siga f una función en X. Direm que $x \in X$ és un punt fix si $f(x) = x$.*

El conjunt del punts fixos d'una funció f el denotarem per $Fix(x)$.

Un teorema interessant relacionant els conceptes d'òrbita i de punt fix és el següent:

Teorema 5.2.3 *Siga (X, f) un sistema dinàmic discret. Si l'òrbita $Orb_f(x)$ d'un punt $x \in X$ convergeix a un punt $x_0 \in X$, aleshores x_0 és un punt fix.*

Demostració. Considerem l'$Orb_f(x)$

$$\{x, f(x, f^2(x), f^3(x), ..., f^n(x), ...\}.$$

Com f és una funció contínua i, per hipòtesi, la successió anterior convergeix a x_0, tenim

$$\{f(x), f^2(x), f^3(x), ..., f^n(x), f^{n+1}(x), ...\}$$

convergeix a $f(x_0)$. Com ambdues successions solament es diferencien en el primer element i X és un espai de Hausdorff, els seus limits coincideixen. és a dir, $x_0 = f(x_0)$, la qual cosa prova el teorema. $\square$

Un altre teorema relacionat amb el concepte de punt fix és el teorema del punt fix de Banach. Abans de la seua demostració hem de definir alguns conceptes previs.

Definició 5.2.4 *Siga (X, d_1) i (Y, d_2) dos espais mètrics. Diem que l'aplicació $f : X \to X$ és una contracció si existeix un nombre real α amb $0 \leq \alpha \leq 1$ tal que, per a tot $x, y \in X$, tenim:*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha d_1(x, y)$$

Diem que α és la constant de contracció de f.

Definició 5.2.5 *Siga (X, d) un espai mètric. Una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ és una successió de Cauchy si donat un $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $n, m > n_0$, es satisfà $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definició 5.2.6 *Un espai mètric (X, d) és complet si tota successió de Cauchy en X és convergent.*

Una vegada introduïdes les nocions que necessitem per a enunciar el teorema de Banach, podem passar a la seua demostració:

Teorema 5.2.7 (Teorema del punt fix de Banach) *Siga (X, d) un espai mètric complet. Suposem que $f : X \to X$ és una contracció en X. Aleshores existeix un únic punt fix $\bar{x} \in X$ per a la funció f.*

*D*emostració. Per a demostrar aquest teorema primerament construirem una successió $(x_n)_{n\geq 1}$ i veurem que es de Cauchy i, per tant, convergent en l'espai complet X. Per últim provarem que el seu límit és l'únic punt fix de f.

Existència

Per un $x_0 \in X$ arbitari definim la successió $(x_n)_{n\geq 1}$ per $x_n = f(x_{n-1})$: $n = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

És a dir, en general tenim $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1, 2, ...$

Com es pot observar, hem construït una successió d'imatges de x_0 baix iterades de f. Ara demostrarem que és una successió de Cauchy en X.

Per a $m \geq 1$, tenim

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(f(x_m), f(x_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{m-1}), f(x_{m-1}) \leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &= \alpha^2 d(f(x_{m-2}), f(x_{x-3}) \leq \alpha^3 d(x_{m-2}, x_{m-3}). \end{aligned}$$

Aplicant diverses vegades la definició de contracció obtenim:

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^m d(x_0, x_1).$$

Per tant tenim que $d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^m d(x_0, x_1), m \in \mathbb{N}$.

Per a $m \geq n \geq 1$, tenim

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_{n+1})) + ... + d(f(x_{m-2}), f(x_{m-1})) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) + \alpha(x_n, x_{n+1}) + ... + \alpha(x_{m-2}, x_{m-1}). \end{aligned}$$

Aplicant de nou la definició de contracció obtenim:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n (1 + \alpha + ... + \alpha^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= a^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Sabem que $0 \leq \alpha \leq 1$ i per tant tenim $1 - \alpha^{m-n} \leq 1$. Aleshores

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

A més a més,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0.$$

Amb la qual cosa obtenim

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

i per tant la successió $(x_n)_{n\geq 1}$ és de Cauchy en X. Com X és complet, la successió convergeix a un punt de X, diguem que a $\bar{x} \in X$.

Ara anem a demostrar que $\bar{x}$ es un punt fix de f. Tenim que

$$d(f(\bar{x}, \bar{x})) \leq d(f(\bar{x}), x_n) + d(x_n, \bar{x}).$$

Sabem, per la definició de contracció, que $x_n = f(x_{n-1})$ i per tant:

$$\begin{aligned} d(f(\bar{x}, \bar{x})) &\leq d(f(\bar{x}), f(x_{n-1})) + d(x_n, \bar{x}) \\ &\leq \alpha d(\bar{x}, x_{n-1}) + d(x_n, \bar{x}). \end{aligned}$$

Com sabem que la successió x_n convergeix a $\bar{x}$, cada terme del segon membre de la desigualtat anterior tendeix a 0 i per tant $f(x) = x$, quedant demostrada l'existència d'un punt fix.

<u>Unicitat</u>

Per a dur a terme la demostració, suposem que existeix un altre punt fix de f, diguem $\bar{y} \in X$, tal que $\bar{x} \neq \bar{y}$. Com $f(\bar{x}) = \bar{x}$ y $f(\bar{y}) = \bar{y}$, aleshores

$$0 < d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq \alpha d(\bar{x}, \bar{y}).$$

Per tant,

$$\frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{d(\bar{x}, \bar{y})} \leq \alpha,$$

és a dir, $1 \leq \alpha$ la qual cosa es una contradicció. La prova és completa. $\square$

Cal resaltar la interpretació dinàmica del teorema del punt fix de Banach. En realitat es demostra que per a tot $x_0 \in X$, la successió iterada $x_n = f(x_{n-1})\ : n = 1, 2, ...$ convergeix a $\bar{x}$. És a dir, el punt fix *és un atractor de totes les òrbites del sistema dinàmic* (X, f).

Com una aplicació del teorema del punt fix de Banach, donarem el següent

Exemple 5.2.8 *Siguen $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$ i $g : [a, b] \to [a, b]$ una funció diferenciable en $]a, b[$ i contínua en $[a, b]$ tal que:*

$$|g'(x)| \leq k < 1, \ x \in]a, b[.$$

Aleshores:

1. *Existeix un únic punt fix $\bar{x}$ de g.*
2. *Per a tot $x_0 \in [a, b]$, la successió iterada $x_n = g(x_{n-1})\, n = 1, 2, \ldots$ convergeix a $\bar{x}$*

Adoneu-nos que, pel teorema de Lagrange, la funció g és contractiva. Per tant, és suficient aplicar el teorema del punt fix de Banach per obtenir el resultat desitjat.

Nota. En el cas anterior, la existència d'un punt fix està garantida pel teorema del punt fix de Brower. Resaltem que el teorema de Brower no implica la unicitat del punt fix.

5.3 Transitivitat topològica versus òrbita densa

Recordem que, donat un espai topològic $(X, \mathcal{T})$, la clausura d'un subconjunt A de X és defineix com el conjunt de punts $x \in X$ tal que, per a tot subconjunt obert V de X que conté el punt x, $V \cap A \neq \emptyset$. Pasem ara al concepte de densitat. Donat un espai topològic $(X, \mathcal{T})$, un subconjunt D de X direm que és dens en X si la seua clausura és tot X. En simbols, $\overline{D} = X$. És ben sabut que en un espai mètric (X, d), un subconjunt D és dens si, i només si, tot punt de X és el límit d'una successió d'élements de D.

Estem ja en condicions de definir el concepte d'òrbita densa:

Definició 5.3.1 *Siga (X, f) un sistema dinàmic discret. Direm que un punt x_0 té òrbita densa (o que és un punt transitiu) si el conjunt $Orb_f(x_0)$ és dens en X.*

És a dir, per la definició de densitat tenim que si agafem un punt x arbritari de X i un conjunt obert V que conté x, aleshores:

$$V \cap Orb_f(x_0) \neq \emptyset.$$

Al treballar amb espais mètrics, la propietat anterior és equivalent a que, per a tot $x \in X$, existeix una subsuccessió de l'òrbita de x_0, diguem $(f^{n_k}(x_0))$ que convergeix a x_0.

També ens és necessari introduir el següent concepte.

Definició 5.3.2 *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic i Y un subconjunt de X. Es diu que Y és dens en ninguna part si el interior de la seua clausura és el conjunt buit. En símbols:*

$$\mathring{\overline{Y}} = \emptyset$$

Ara anem a definir l'altre concepte imprescindible en aquest capítol.

Definició 5.3.3 *Un sistema dinàmic (X,f) s'anomena topològicament transitiu si per a cada parell de conjunts oberts no buits U i V en X, existeix un enter positiu n tal que:*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Anem a veure algunes caracteritzacions de la transitivitat topològica.

Teorema 5.3.4 *Siga (X, f) un sistema dinàmic. Les següents propietats són equivalents:*

(i) *f es topoògicament transitiu.*

(ii) *Per a cada conjunt obert no buit U en X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ és densa en X.*

(iii) *Per a cada parell de conjunts oberts no buits U i V en X, existeix un enter positiu n tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

(iv) *Per a cada conjunt obert no buit U en X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ és densa en X.*

Demostració.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Siga U un conjunt obert en X. Com f és topològicament transitiva, si V és un conjunt obert no buit de X, existeix un enter positiu n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. És a dir, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ és densa en X.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) És una conseqüència del fet que si, donats dos conjunts oberts no buits U y V, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, aleshores $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

(iii) $\implies$ (iv) La demostració és la mateixa que la de (i) $\implies$ (ii).

(iv) $\implies$ (i) Tenint que per a cada conjunt obert no buit U en X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es dens en X. Aleshores, per a tot conjunt obert no buit V, $V \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$ que és equivalent a $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$. Per tant, el nostre sistema dinàmic és topológicament transitiu. $\square$

Comentari. La continuïtat no es necessita explícitament en la demostració anterior. No obstant això, s'acostuma a utilitzar aquesta hipòtesi per una qüestió de convenció.

A continuació anem a veure amb exemples que les definicions d'òrbita densa i transitivitat topològica són independents en general.

Exemple 5.3.5 *Prenem $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ dotat amb la mètrica habitual i $f : X \to X$ definida per:*

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \quad \textit{amb} \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

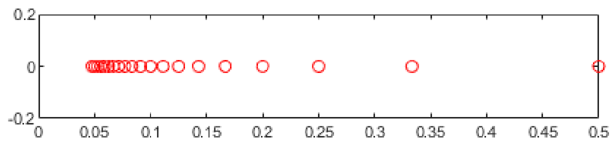


Figura 5.1: Gràfica de la funció f.

Per una part sabem que f és contínua ja que la successió $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ convergeix a zero i la seua imatge $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ també ho fa. També sabem que es compleix la definició d'òrbita densa ja que l'òrbita del punt $x_0 = 1$ convergeix a zero.

Ara anem a veure que el sistema dinàmic discret (X, f) no és topològicament transitiu.

Recordem que per a que el sistema dinàmic discret (X, f) siga topològicament transitiu ha de complir que, donats dos conjunts oberts no buits U i V, existeix un natural n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Si prenem com els dos conjunts oberts

$$U = \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad i \quad V = \{1\},$$

obtenim

$$f^n(U) \cap V = \emptyset$$

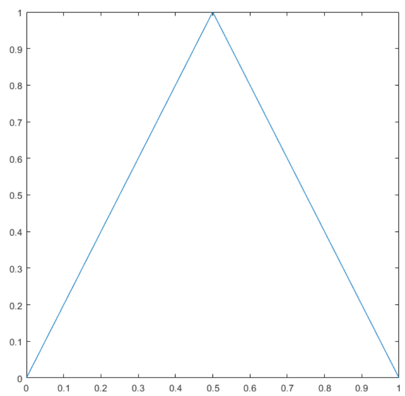
per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, l'existència de punts transitius no implica que un sistema dinàmic siga topològicament transitiu.

Ara anem a veure que ser topològicament transitiu no implica l'existència de punts amb òrbita densa.

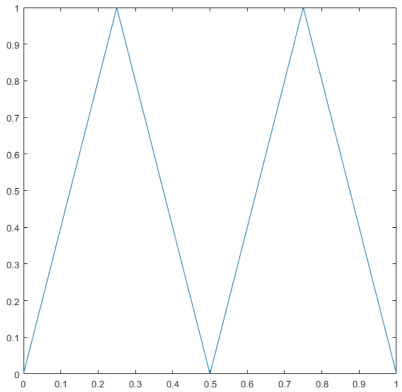
Exemple 5.3.6 *Prenem l'interval $\mathbb{I} = [0, 1]$ i la funció tenda $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida com:*

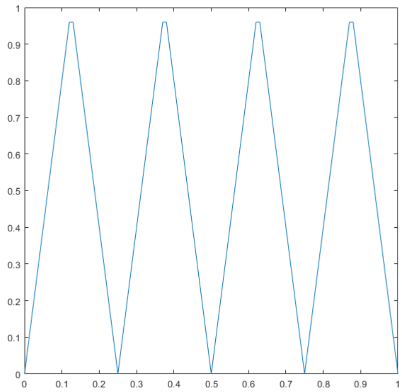
$$f(x) = 1 - |2x - 1| \quad \textit{per a tot} \quad x \in [0, 1],$$

la gràfica de la qual és:



La graàfica de les iterades segona i tercera és:





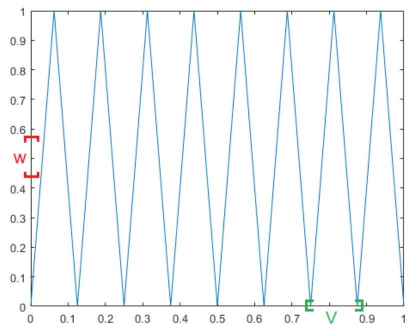
Anem a veure que aquesta funció és topològicament transitiva. Donats dos oberts no buits V i W de $[0,1]$ hem de trobar un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^n(V) \cap W \neq \emptyset.$$

Com cada vegada que iterem tenim el doble de tendes que l'iteracció anterior les bases de les tendes tendeixen a 0. Per tant, donats un V i un W conjunts oberts no buits, podem trobar algun $n \in \mathbb{N}$ tal que la base d'un dels triangles de l'iterada n-éssima es queda inclòs dins de W. La qual cosa implica:

$$f^n(V) = [0,1].$$

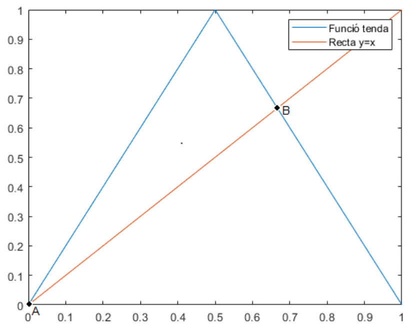
Gràficament es pot representar d'aquesta forma:

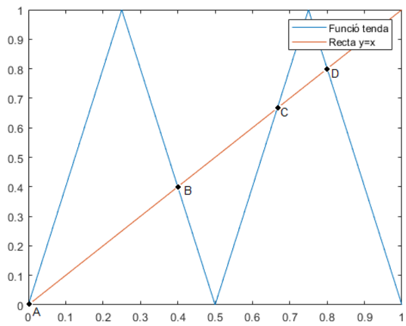


Per tant $f^n(V) \cap W \neq \emptyset$ i la funció tenda és topològicament transitiva.

Ara anem a veure que els punts periòdics son densos. Recordem que, donat un sistema dinàmic discret (X, f), un punt $x \in X$ s'anomena periòdic si existeix un natural n tal que $f^n(x) = x$. Del menor n que satisfà la igualtat $f^n(x) = x$ s'en diu període de x. Notem que els punts fixos són punts periódics de període 1.

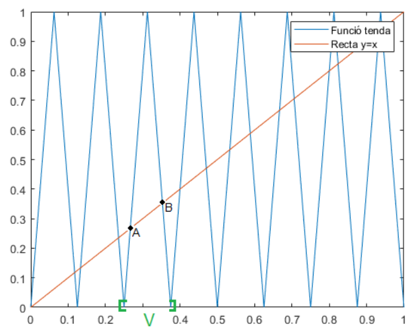
Ho il·ustrarem gàficament. Notem que un punt fix d'una funció f definida en l'interval és la intersecció de la seua gràfica amb la recta $y = x$. En les 2 primeres iterades de la funció tenda tenda (la recta roja es la funció $y = x$):





Es pot observar que la primera iterada té dos punts fixos, el A i el B, mentre que la iterada segona té quatre punts fixos però solament dos de perìode dos ja que els de la primera iterada s'han de restar.

Ara anem a veure que els punts periòdics son densos. Per a això hem de demostrar que si agafem qualsevol conjunt obert no buit de $[0, 1]$ dins ha d'haver un punt periòdic. Podem il·lustar-ho de la següent forma:



Si prenem el obert V existeix una iterada n-èssima tal que V conté una base d'aquesta iterada. Aleshores troben dos punts periòdics A i B. Aquests punts no han de tindre necessàriament periòde n però el que ens interessa és que siguen periòdics. Per tant hem vist que el nostre sistema dinàmic és topològicament transitiu i que els punts periòdics són densos.

Anem a canviar de sistema dinàmic per obtindre l'exemple que estem buscant. Denotem per $P(f)$ el conjunt de tots els punts periòdics de $(\mathbb{I}, f)$. Siga el sistema dinàmic $(P(f), g)$ on g és la restricció de f a $P(f)$. Com la funció f és topològicament transitiva també ho és g ja que $P(f)$ és dens en $[0, 1]$. Notem que no hi ha òrbites denses perquè totes les òbites de $(P(f), g)$ són finites i $P(f)$ és infinit al ser dens en $[0, 1]$. Pert tant, topològicament transitiu no implica l'existència d'òrbites denses.

Ara anem a veure el cas en el que aquests dos conceptes si que són equivalents. Per a això necessitem el Teorema de Baire. Primer anem a definir que es un espai de Baire.

Definició 5.3.7 *Un espai topològic X es diu que és de Baire si per a qualsevol successió $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjunts de X, oberts i densos, la seua intersecció $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ també és densa.*

Demostrarem un lema y un teorema que utilitzarem en la demostració del teorema de Baire. Donat un espai mètric (X,d), definim:

$$B(x, r) := \{y \in X / d(x, y) < r\},$$
$$C(x, r) := \{y \in X / d(x, y) \leq r\}.$$

Lema 5.3.8 *Siga X un espai mètric, A un subconjunt obert de X, $a \in A$ i $R > 0$. Aleshores existeix r tal que $0 < r \leq R$ i $C(a, r) \subseteq A$.*

Demostració. Com A es obert i $a \in A$, existreix $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$. Definim $r := \text{mín}\{R, \delta/2\}$. Aleshores $0 < r \leq R$ i $r < \delta$. Anem a veure que $C(a, r) \subseteq A$. Si $x \in C(a, r)$, aleshores $d(x, a) \leq r < \delta$. Per tant $C(a, r) \subseteq A$ i $r \leq R$. □

Abans de la demostració del teorema de Baire, necessitem una definició i un teorema.

Definició 5.3.9 *Siga (X, d) un espai mètric. Si A és un subconjunt de X, el diàmetre de A es definix com*

$$diam(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}.$$

Teorema 5.3.10 (Teorema de Cantor) *Siga* (X, d) *un espai mètric complet i siga* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successió de conjunts tancats no buits tal que per a cada* $n \in \mathbb{N}$ *es compleix que* $G_{n+1} \subseteq G_n$ *y* $\lim_{n\to\infty} diam(G_n) = 0$. *Aleshores* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ *és exactament un punt.*

Demostració. Siga $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió en X de conjunts tancats que satisfà les condicions del teorema. Triem $x_n \in G_n$ per a tot $x \in \mathbb{N}$. Anem a veure que la successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy.

Com els diàmetres de $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formen una successió que tendeix a 0, tenim que, donat un $\varepsilon > 0$, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, aleshores $diam(G_n) < \varepsilon$. Per tant, com $G_{n+1} \subseteq G_n$, si $n, m > n_0$, amb $m > n$, tenim que $x_n, x_m \in G_n$. Aleshores $d(x_n, d_m) < diam(G_m) < \varepsilon$ i tenim que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de Cauchy.

Com (X, d) és complet, la successió és convergent a un punt $x \in X$. Anem a veure que $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Suposem que no es així. Aleshores existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \neq G_k$. Com G_k és tancat, tenim que $d(x, G_k) = r > 0$ amb la qual cosa la bola $B(x, r/2)$ i G_k no tenen punts en comú. Si $n > k$, aleshores tenim que $x_n \in G_k$ ja que la successió és decreixent. Aquest fet implica que $x_n \notin B(x, r/2)$ la qual cosa no és possible ja que la successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix a x.

Finalment anem a veure que el punt x és l'únic en la intersecció. Per a això, siga $y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Aleshores $d(x, y) \leq diam(G_n)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Com $\lim_{n\to\infty} diam(G_n) = 0$ tenim que $d(x, y) \leq 0$, és a dir, $d(x, y) = 0$ i per tant $x = y$. □

Estem ja en condicions de provar el teorema de Baire.

Teorema 5.3.11 (Teorema de Baire) *Si* (X, d) *és un espai mètric complet, aleshores* (X, d) *és un espai de Baire.*

Demostració. Siga (X, d) un espai mètric complet i $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successió de subconjunts de X, oberts i densos. Siga $V = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ i A un subconjunt obert de X tal que $A \neq \emptyset$

Anem a demostrar que $A \cap V \neq \emptyset$.

Construirem una successió $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X i una altra successió $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $(0, +\infty)$ de la següent manera. Com A es obert i U_1 es dens, $A \cap U_1 \neq \emptyset$. Elegim $x_1 \in A \cap U_1$. Com $A \cap U_1$ és obert apliquem el lema anterior i trobem r_1 en $(0, 1]$ tal que $C(x_1, r_1) \subseteq A \cap U_1$. Per a cada $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, suposem que x_j y r_j amb $j < K$ ja estan elegits i elegirem x_k y r_k.

Com U_k és dens i $B(x_{k-1}, r_{k-1})$ és obert, $U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \neq \emptyset$. Elegim $x_k \in U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$. Usant el lema anterior i el fet de que $U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$ és obert, trobem r_k tal que $0 < r_k \leq 1/k$ y $C(x_k, r_k) \subset U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$. Notem que $(C(x_k, r_k))_{k\mathbb{N}}$ és una successió decreixent de conjunts tancats i no buits. A més $diam((C(x_k, r_k)) \leq 2r_k$ (està entre 0 i $1/k$), així $diam((C(x_k, r_k))$ tendeix a 0 quan k tendeix a ∞.

Donat que (X, d) és un espaci mètric complet, podem aplicar el teorema de Cantor i trobem $y \in X$ tal que $y \in C(x_k, r_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Aplicant $\cap_{k\mathbb{N}} C(x_k, r_k) \neq \emptyset$, com $C(x_1, r_1) \subseteq A$, obtenim $y \in A$.

A més com $C(x_k, r_k) \subseteq U_k$ ja que $(C(x_k, r_k) \subseteq U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$ per a tot $k \in \mathbb{N}$, el punt y pertany a $\cap_{k\in\mathbb{N}} U_k$. □

Anem a presentar un cas en que ambdues nocions són equivalentes. Recordem que un conjunt M és de segona categoria si

$$M \neq \bigcup_{x\in M} A_{n(x)}$$

sent $A_{n(x)}$ dens en ninguna part, és a dir, un conjunt el complementari del qual és dens. Un espai és separable si té un conjunt numerable dens.

Teorema 5.3.12 *Siga (X, f) un sistema dinàmic discret amb X un espai perfecte (és a dir, X no té punts aïllats) i X un espai mètric complet. Aleshores l'existència d'òrbites denses implica que (X, f) és topològicament transitiu. Si (X, f) es separable, aleshores el recíproc també es satisfà.*

Demostració. Siga X perfecte i $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una òrbita densa. Hem de demostrar que donats dos oberts U i V no buits, hi ha una iterada de U que talla a V. Al ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una òrbita densa hi ha algun $x_k \in U$. Per una altra banda definim $V \setminus \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ el qual està format pel conjunt V al que li hem llevat tots els punts de la successió fins al x_k la qual cosa implica que V és obert i, essent X perfect, és no buit. Com tenim de nou un conjunt obert podem aplicar que l'òrbita considerada és densa i agafar un $x_m \in V \setminus \{x_0, x_1, ..., x_k\}$. Aleshores tenim:

$$f^{m-k}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

La qual cosa ens diu que el nostre sistema dinàmic és topològicament transitiu.

Suposem ara que f és topològicament transitiva però no hi ha òrbites denses. Com l'espai X és un espai métric separable, aleshores és segon numerable. Per tant X té una base numerable $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjunts oberts. Aleshores, com cap punt de X té òrbita densa, per a tot $x \in X$ hi haurà algun obert $V_{n(x)}$ tal que alguna iterada $f^k(x) \notin V_{n(x)}$ amb $k \geq 0$. Però

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}\left(V_{n(x)}\right)$$

és obert ja que l'antiimatge d'un conjunt obert per una funció contínua és un conjunt obert i a més la unió arbitraria de conjunts oberts és oberta. Per tant tenim un conjunt obert que talla qualsevol conjunt obert ja que f és topològicament transitiva. Si agafem el conjunt $A_{n(x)}$, el complementari de la unió, aleshores $A_{n(x)}$ conté x, és tancat i dens en ninguna part. Però $X = \bigcup_{x \in X} A_{n(x)}$, és una unió numerable de conjunts de segona categoría la qual cosa contradiu el fet de que l'espai X satisfà el teorema de Baire en ser un espai mètric complet. Aleshores hem arribat a una contradicció i per tant la suposició que havíem fet no és correcta. Per aquest fet tenim que topològicament transitiu implica òrbita densa si X es separable. $\square$

Nota. Resaltem que l'hipòtesi que X siga separable no és restrictiva. Òbviament, si X té una òrbita densa, X és separable.

5.4 Conjugació topològica

Anem a demostrar que la transitivitat topològica és mantè per conjugació topològica, és a dir, si un sistema dinàmic discret és topològicament transitiu, aleshores també ho és qualsevol sistema dinàmic discret *equivalent.*

Definició 5.4.1 *Siga $h : X \to Y$ una funció d'un espai mètric (X, d) en un espai mètric $(Y, \hat{d})$. La funció f s'anomena un homeomorfisme si satisfà les condicions següents:*

(i) *h es una funció bijectiva,*

(ii) *h es una funció contínua,*

(iii) *h^{-1} es una funció contínua.*

Definició 5.4.2 *Siguen (X, f) i (Y, g) dos sistemes dinàmics discrets. Direm que els sistemes dinàmics discrets (X, f) i (Y, g) són topològicament conjugats si existeix un homeomorfisme $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. La funció h s'anomena una conjugació topològica.*

En altres paraules, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

és conmutatiu. Fixen-nos que, per les propietats de composició de funcions, tmabé és satisfà que $h \circ f^n = g^n \circ h$. Dos sistemes dinàmics discrets topològicament conjugats tenen les mateixes propietats dinàmiques. Per tant és important saber si una propietat dinàmica es manté per conjugació topològica. En aquest sentit tenim el següent resultat.

Teorema 5.4.3 *La transitivitat topològica es manté per conjugació.*

Demostració. Siguen (X, f) i (Y, g) dos sistemes dinàmics discrets topològicament conjugats. És suficient demostrar que si (X, f) és topològicament transitiu, aleshores també ho és (Y, g).

Siguen U i V dos conjunts oberts no buits de Y i h una conjugació entre (X, f) i (Y, g). En ser h contínua, $h^{-1}(U)$ i $h^{-1}(V)$ són conjuntos oberts no buits de X.

Com (X, f) és topològicament transitiu, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Aleshores existeix $y \in h^{-1}(U)$ tal que $f^n(y) \in h^{-1}(V)$. En conseqüència $h(y) \in U$ i $h(f^n(y)) \in V$. Com h és una conjugació, $h \circ f^n = g^n \circ h$ i el sistema dinàmic (Y, g) és topològicament transitiu. $\square$

Arguments similars als utilitzats en la prova del teorema anterior permeten demostrar els següents resultats:

(i) Si h no és un homeomorfisme sinó un a aplicació sobreyecció contínua, aleshores la transitivitat de f implica la transitivitat de g. En aquest cas es diu que (X, f) es una extensió de (Y, g) i (Y, g) es un factor de (X, f).

(ii) Si h és una injecció contínua, aleshores ninguna de les dos implicacions entre la transitivitat de f i la transitivitat de g es compleix. Però si h es una injecció oberta, no necessàriament contínua (amb oberta ens referim a que envia conjunts oberts a conjunts oberts), la transitivitat de g implica la transitivitat de f.

Anem a veure ara una propietat que no es manté per conjugació. Es tracta de la *depèndencia de les condicions inicials*, una propietat que va lligada a la transitivitat topològica en diverses definicions de caos, com ara caos en el sentit de Devaney o caos d'Auslander-Yorke.

Definició 5.4.4 *Siga (X, f) un sistema dinàmic discret amb $X := (X, d)$. Direm que (X, f) depén de les condicions inicials si existeix $\varepsilon > 0$ tal que, per a tot $x \in X$ i tot $\delta > 0$, existeix $y \in X$ amb $d(x, y) < \delta$ i $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(y), f^n(x)) \geq \varepsilon$.*

El següent exemple prova que la dependència de les condicions inicials no es mantè per conjugació.

Exemple 5.4.5 *Siga (X, f) el sistema dinàmic discret on X és el subconjunt $(1, \infty)$ de la recta real amb la mètrica usual i f la funció en X definida com $f(x) = 2x$ per a tot $x \in (1, \infty)$. Considerem ara el sistema dinàmic discret (Y, g) amb $Y = \mathbb{R}^+$ dotat de la mètrica usual i $g(x) = x + \ln 2$. Siga el homeomorfisme h de $(1, \infty)$ en $\mathbb{R}^+$ definit com $h(x) = \ln(x)$ per a tot $x \in (1, \infty)$.*

Tenim que el diagrama

$$\begin{tikzcd} (1,\infty) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (1,\infty) \arrow[d, "h"] \\ \mathbb{R}^+ \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^+ \end{tikzcd}$$

és conmutatiu, és a dir, h és una conjugació topològica entre (X, f) i (Y, g). Fixen-nos que g és una traslació i per tant no depén de les condicions inicials. Anem a demostrar que (X, f) és un sistema dinàmic discret que depén de les condicions inicials. El resultat és una conseqüència senzilla del fet que $f^n(x) = 2^n x$. En efecte, siga $\varepsilon = 1$. Si $x \in X$ i $\delta > 0$, considerem $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n \delta/2 \geq 1$. Alesores, si $y \in X$ i $|x - y| = \delta/2$, tenim

$$|f^n(x) - f^n(y)| = |2^n x - 2^n y| = 2^n |x - y| = 2^n \delta/2 \geq 1.$$

Malgrat el teorema anterior, tenim el següent resultat. Primer una definició.

Definició 5.4.6 *Siga $h : X \to Y$ una funció d'un espai mètric (X, d) en un espai mètric $(Y, \hat{d})$. La funció f és uniformement contínua si, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que per a tot $x_1, x_2 \in X$, $d(x_1, x_2) \leq \delta$ implica $\hat{d}(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon$.*

Recordem que dos sistemes dinàmics discrets són uniformement conjugats si són cojugats per una conjugació h tal que h i h^{-1} són funcions uniformement contínues.

Teorema 5.4.7 *Siguen (X, f) i (Y, g) dos sistemes dinàmics tal que (X, f) depén de les condiciones inicials. Si (X, f) i (Y, g) són uniformement conjugats, aleshores (Y, g) depén de les condicions inicials.*

Demostració. Siguen(X, f) i (Y, g) dos sistemes dinàmics discrets amb $X := (X, d)$ i $Y := (Y, \hat{d})$. Suposem que existeix una constant de sensitivitat $\varepsilon > 0$ per al sistema dinàmic (Y, g). Aleshores per a tot $x \in Y$ i tot $\delta > 0$, podem trobar un $n \in \mathbb{N}$ i un $y \in Y$ tal que

$$\hat{d}(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon.$$

Com h^{-1} és uniformement contínua, donat $\varepsilon > 0$ anterior, per a tot $h(x^*), h(y^*) \in Y$, existeix $\sigma > 0$ tal que

$$\hat{d}(h(x^*), h(y^*)) < \sigma \Longrightarrow d(h^{-1}(h(x^*)), h^{-1}(h(y^*))) = d(x^*, y^*) < \varepsilon.$$

Prenem $\hat{\varepsilon} = \sigma$. Per a tot $\hat{x} = h(x) \in Y$, $\hat{y} = h(y) \in Y$, tenim que, per a tot $\hat{\delta} > 0$, $d(x, y) < \delta$ per a tot $x, y \in X$.

Com h es una funció unifromement contínua, tenim $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) < \hat{\delta}$ i

$$\hat{d}(g^n(h(x)), g^n(h(y))) = \hat{d}(h(f^n(x)), h(f^n(y))) > \hat{\varepsilon}$$

la qual cosa demostra que el sistema dinàmic (Y, g) depén de les condicions inicials. □

Aplicant que una funció contínua en un espai compacte és uniformement contínua obtenim:

Corol·lari 5.4.8 *Siguen (X, f) i (Y, g) dos sistemes dinàmics conjugats. Si X i Y són espais compactes i (X, f) depén de les condicions inicials, aleshores (Y, g) també depén de les condicions inicials.*

Capítol 6

Transitivitat en l'hiperespai i caos d'Auslander-Yorke

Quan estudiem el comportament individual dels membres d'un cert ecosistema (l'espai de fases), la pregunta natural que surgeix és: com el comportament individual influeix sobre el comportament global? Y viceversa?

Matemàticament es tracta d'estudiar les propietats dinàmiques d'un sistema dinàmic discret i el sistema dinàmic que indueix en un hioerespai adequat. Anem a començar per estudiar aquesta casuística quan la propietat dinàmica que considerem és la transitivitat topològica. Els resultats presentats estan basats en [17].

Siga (X, f) un sistema dinàmic discret. Considerarem l'hiperespai $\mathscr{K}(X)$ de tots els subconjunts compactes no buits de X. El sistema dinámic (X, f) indueix un sistema dinàmic discret en $\mathscr{K}(X)$. En realitat hem de veure com la funció f permet de definir una funció en $\mathscr{K}(X)$ que siga contínua per a la topolgía que considerem en $\mathscr{K}(X)$. La manera usual de fer-ho és la següent: definim la funció $\bar{f} : \mathscr{K}(X) \to \mathscr{K}(X)$ com:

$$\bar{f}(K) = f(K) = \{f(x) : x \in K\}, \ K \in \mathscr{K}(X).$$

Fixem-nos que, en ser K compacte i f contínua, la función $\bar{f}$ està ben definida.

Un cop definida $\bar{f}(K)$, anem a definir les topologies en $\mathscr{K}(X)$ amb les que treballarem. La més usual és la topologia induïda per la mètrica de Hausdorff. Comencem donant la seua definició.

Definició 6.0.1 *Siga (X, d) un espai mètric. Definim a mètrica de Hausdorff d_H en $\mathscr{K}(X)$ com*

$$d_H(K_1, K_2) = \text{màx}\left\{\sup\left\{d(x_1, K_2) \,:\, x_1 \in K_1\right\}, \sup\left\{d(x_2, K_1) \,:\, x_2 \in K_2\right\}\right\},$$

$K_1, K_2 \in \mathscr{K}(X)$ i on

$$d(x, K) = \inf\left\{d(x, y) \,:\, y \in K\right\},\; x \in X,\; K \in \mathscr{K}(X).$$

El fet que d_H és en efecte una mètrica es dedueix fàcilment del fet que d és una mètrica en X. Notem que la distància de Hausdorff mesura *com en són de prop* dos subconjunts compactes de X.

Per a certs arguments és més senzill utilitzar la topologia de Vietoris.

Definició 6.0.2 *La topologia de Vietoris és la topologia en $\mathscr{K}(X)$ una base de la qual és*

$$\mathscr{V}(U_1, ..., U_k) := \left\{K \in \mathscr{K}(X) : K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ i } K \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, ..., k\right\}$$

on $U_1, ..., U_k$ són subconjunts oberts no buits de X.

La topologia de Vietoris va ser introduïda per Vietoris en 1922 ([20]) en 2^X, la familia de tots els subconjunts tancats no buits d'un espai topològic X. Un resultat ben conegut, i que utilitzarem posteriorment, ens diu que la topologia de Vietoris i la inducida per la de Hausdorff coincideixen en $\mathscr{K}(X)$ i la funció $\bar{f}$ és una funció contínua per a aquesta topologia (veure [16]). Necessitem el següent concepte.

Si (X, f) és un sistema dinàmic discret, el sistema $(X \times X, f \times f)$ es defineix com el sistema dinàmic determinat per la funció producte $f \times f$ definida com

$$(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y)) \quad \text{per a tot} \quad (x, y) \in X \times X.$$

La definició anterior s'estén de forma natural a un producte finit de sistems dinàmics discrets.

Definició 6.0.3 *Un sistema dinàmic discret (X, f) és diu dèbilment mesclant si la funció $f \times f$ és topològicament transitiva.*

Tenint en compte la definició anterior, a vegades direm simplement que la funció f és dèbilment mesclant. Per un resultat de Fustemberg ([11, Proposition II.3]), si f és una funció dèbilment mesclant, aleshores un producte finit de la forma

$$\overbrace{f \times f \times f \times \cdots\cdots \times f \times f \times f}^{m}$$

és una funció topològicament transitiva.

6.1 Transitivitat de $(\mathscr{K}(X), \bar{f})$

El següent teorema caracteritza quan el sistema dinàmic discret $(\mathscr{K}(X), \bar{f})$ és topològicament transitiu.

Teorema 6.1.1 *Siga $f : X \to X$ una funció contínua en un espai topològic X. Aleshores les següents propietats són equivalents:*

(i) *f és dèbilment mesclant.*

(ii) *$\bar{f}$ és dèbilment mesclant.*

(iii) *$\bar{f}$ és topològicament transitiva.*

Demostració.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si f està dèbilment mesclat, aleshores es compleix la propietat de Fusterberg i el m-producte

$$\overbrace{f \times f \times ... \times f}^{m} : X \times X \times ... \times X \to X \times X \times ... \times X$$

és topològicament transitiu per a qualsevol $m \in \mathbb{N}$.

Hem de veure que donats quatre conjunts oberts $\mathscr{V}(U_1^i, ..., U_k^i), \mathscr{V}(V_1^i, ..., V_k^i), i = 1, 2$ en la base de la topologia de Vietoris en $\mathscr{K}(X)$ hi ha un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\bar{f}^n(\mathscr{V}(U_1^i, ..., U_k^i)) \cap \mathscr{V}(V_1^i, ..., V_k^i) \neq \emptyset,\ i = 1, 2.$$

Si usem la propietat anterior amb $m = 2k$ hi ha un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^n(U_j^i) \cap V_j^i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2;\ j = 1, ..., k.$$

Elegim $x_{i,j} \in U_j^i$ amb $y_{i,j} := f^n(x_{i,j}) \in V_j^i, i = 1,2, j = 1, ..., k$ i definim $K_1 := \{x_{1,1}, ..., x_{1,k}\}$, $K_2 := \{x_{2,1}, ..., x_{2,k}\}$. Aleshores

$$K_i \in \mathscr{V}(U_1^i, ..., U_k^i), \quad \bar{f}^n(K_i) \in \mathscr{V}(V_1^i, ..., V_k^i), \quad i = 1, 2$$

on $\bar{f}^n(K_i) = \{y_{i,1}, ..., y_{i,k}\}$, i=1,2.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) és trivial ja que ser dèbilment mesclant implica que el producte

$$\bar{f} \times \bar{f} : X \times X$$

es topològicament transitiu i per tant $\bar{f}$ es transitiva.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Per un resultat de Banks ([4, Lema 5]), és suficient demostrar que donats tres conjunts $U, V_1, V_2 \subset X$ hi ha un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset, \quad f^n(U) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Per a veure això sabem que, per la transitivitat de $\bar{f}$, podem trobar un $K \in \mathscr{V}(U)$ i un $n \in \mathbb{N}$ que satisfà

$$\bar{f}^n(K) \in \mathscr{V}(V_1, V_2).$$

En particular hi ha $x, y \in K \cap U$ tal que $f^n(x) \in V_1$ i $f^n(x) \in V_2$ la qual cosa implica

$$f^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset, \quad f^n(U) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

□

El teorema 6.1.1 pot ser aplicat a l'estudi del caos *colectiu* en el sentit d'Auslabder-Yorke ([2]). Recordem que un sistema dinàmic discret és Auslander-Yorke caòtic si té una òrbita densa i depén de les condicions inicials.

En vista del teorema 6.1.1 podem establir el següent corolari. Aplicarem l'equivalència entre ser topològicament transitiu i tindre una òrbita densa obtinguda en el teorema 5.3.12.

Corol·lari 6.1.2 *Siga (X, f) un sistema dinàmic discret amb X un espai espai complet, separable i perfecte. Aleshores, les següents condicions són equivalents:*

(i) *f és dèbilment mesclant*

(ii) *$\bar{f}$ és transitiva*

(iii) *$\bar{f}$ és Auslander-Yorke caòtica*

Nota. En contrast al corolari anterior, podem trobar nombrosos exemples de sistemes dinàmics transitius que no són Auslander-York caòtics. Un exemple és una rotació irracional g_α definida com:

$$g_\alpha : S^1 \to S^1, \quad g_\alpha(z) := ze^{i2\pi\alpha}$$

on $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ amb

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Una rotación irracional no depén de les condicions inicials ja que tots els punts es mantenen a la mateixa distancia després d'una iteració. Per altra part, el sistema dinàmic (S^1, g_α) és suficient topològicament transitiu ja que, en ser totes les seues òrbites denses [10], és suficient aplicar el teorema 5.3.12.

Nota. El caos individual no és equivalent al caos colectiu en el sentit d'Auslander-Yorke. En efecte, existeixen sistemes dinàmics en el interval que són transititus i depenen de les condicions inicials però no sòn dèbilment mesclants. Aquest és el cas de la funció $h : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definida com (veure [3]):

$$h(x) = \begin{cases} \ \ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x < -1/2, \\ -2x & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ \ \ 2x - 2 & \text{si } -1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Capítol 7

Conclusions

Estudiem el concepte de topològicament transitiu per a un sistema dinàmic discret (X, f). En primer lloc, mitjançant exemples, provem que aquest concepte no és equivalent a la propietat que el sistema dinàmic tinga una òrbita densa. Els punts bàsics dels exemples són l'existència de punts aïllats i les propietats de la funció tenda.

Després de veure que ambdós conceptes no són equivalents, demostrem que ho son en un espai mètric complet separable sense punts aïllats. La base de la prova és el teorema de la categoria de Baire.

Una propietat que va lligada a la transitivitat topològica en algunes definicions de caos és la dependència de les condicions inicials (veure [2, 5, 10]). Demostrem que, al contrari de la transitivitat topològica, la dependència de les condicions inicials no es manté per conjugació topològica. No obstant, si la conjugació és una conjugació uniforme, la propietat sí es preserva. Aquest fet es pot aplicar al cas en que l'espai de fases del sistema dinàmic és compacte.

Finalment caracteritzem quan la transitivitat topològica es preserva al considerar el sistema natural induït en l'hiperespai dels compactes no buits de X dotat de la mètrica de Hausdorff. La propietat utilitzada és la de sistema dinàmic discret dèbilment mesclant. El resultat és aplicat a l'estudi del caos en el sentit d'hiperAuslanbder i Yorke.

Bibliografia

[1] Ll. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz, Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One, World Scientific Publ., Singapore, 1993.

[2] J. Auslander, J.A. Yorke, Interval maps, factors of maps, and chaos. Tohoku Math. J. 1980, 32: 177–88.

[3] L. S. Block, W. A. Coppel, Dynamics in one dimension. Lecture Notes in Mathematics, 1513. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[4] J. Banks, Topological mapping properties de?ned by digraphs. Discr. Cont. Dyn. Syst. 1999, 5: 83–92.

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis i P. Stacey., On Devaney's Definition of Chaos, The American Mathematical Monthly, 1992, 332–334.

[6] M.F. Barnsley, Fractals everywhere. Academic Press; 1988.

[7] G.D. Birkhoff, Collected Mathematical Papers, Vols. 1, 2, 3, New York, 1950.

[8] G. Birkhoff, Dynamical Systems, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1927.

[9] P. Collet, J.P. Eckmann, Iterated Maps offk IntemdaF Dynamical Sysfem (Boston: BirkhSwer), 1980.

[10] R.L. Devaney, Robert, An introduction to chaotic dynamical systems. Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[11] H. Furstenberg, Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation. Syst Theory 1967;1:1–49.

[12] W.H. Gottschalk, G.A. Hedlund, Topological Dynamics, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 36, Providence, RI, 1995.

[13] Guckenheimer, Sensitive dependence on initial conditions for one-dimensional maps Commm. Math. Phys. 70 (1979), 133–60.

[14] S. Kolyada i L. Snoha, Some aspects of topological transitivity–a survey, Iteration theory (ECIT 94) (Opava), 3?35, Grazer Math. Ber., 334, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1997.

[15] W. de Melo and S. van Strien, One-Dimensional Dynamics, Springer, Berlin, 1993.

[16] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182.

[17] A. Peris, Set-valued discrete chaos, Chaos, Solitons and Fractals 26 (2005) 19–23.

[18] D. Ruelle, Dynamical systems with turbulent behavior Marhematical Problem in Theoretical Physics, 1978.

[19] S. Silverman, On Maps with Dense Orbits and the Definition of Chaos, Rocky Mountain J. of Mathematics, 1992, 353–374.

[20] L. Vietoris, Bereiche aweiter Ordnung, Monatsh. fiir Math. und Phys. 32 (1922), 258–280.

[21] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer, New York, 1982.