



GRADO EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

ESTANCIA EN PRÁCTICAS Y PROYECTO FINAL DE GRADO

---

*Teorema egregium* de Gauss

---

*Autor:*  
Daniel TRIGUEROS OROZCO

*Supervisor:*  
Luis Miguel CHULVI  
*Tutor académico:*  
Vicente CERVERA MATEU

Fecha de lectura: 30 de Noviembre de 2021  
Curso académico 2020/2021



## Resumen

El presente documento se divide en dos secciones. La primera corresponde a la estancia de prácticas realizada en la empresa Infoware Soluciones Informáticas S.L. (Infoware), ubicada en la Universitat Jaume I (UJI), en el Parque Científico Tecnológico y Empresarial de la Universitat Jaume I (Espaitec 2). Esta empresa se encarga de llevar a cabo aplicaciones y desarrollo web. Mi objetivo dentro de la empresa era ayudar en el desarrollo de diversos proyectos guiado por don Luis Miguel Chulvi, el cual ocupaba el puesto de director de la empresa.

La segunda parte del proyecto detalla el trabajo final de grado, centrado en el teorema *egregium* de Gauss. En esta parte me encargaré de mostrar los conocimientos previos a dicho teorema, enunciarlo y mostrar las consecuencias que ha tenido, usando diversos ejemplos que ayuden a su comprensión.

## Palabras clave

Teorema *egregium*, Geometría diferencial, Gauss

## Abstract

This document is divided into two sections. The first correspondence to the internship held at the company Infoware Soluciones Informáticas S.L. (infoware) located in the Universitat Jaume I (UJI), in the Science, Technology and Business Park of the Universitat Jaume I (Espaitec 2). This company is in charge of carrying out web applications and web development, my objective within the company was to help in the development of various projects guided by Don Luis Miguel Chulvi, who holds the most important position in the company.

The second part of the project details the final degree project, centered on Gauss's *egregium* theorem. In this part i will be in charge of showing previous knowledge of said theorem, enunciating it and the consequences it has had, in addition to using various examples that help to understand it.

## Keywords

Egregium Theorem, Differential geometry, Gauss





# Índice general

<b>1. Estancia en prácticas</b>	<b>13</b>
1.1. Introducción . . . . .	13
1.2. Objetivos del proyecto formativo . . . . .	14
1.3. Explicación detallada de los proyectos realizados en la empresa . . . . .	15
1.3.1. Proyectos . . . . .	15
1.3.2. Software utilizado para los proyectos . . . . .	23
1.3.3. Grado de consecución de los objetivos en los diversos proyectos . . . . .	30
1.3.4. Conclusiones . . . . .	32
<b>2. Memoria TFG</b>	<b>33</b>
2.1. Introducción . . . . .	33
2.2. Motivación y Objetivos . . . . .	33
2.3. Introducción . . . . .	34
2.4. Desarrollo del TFG . . . . .	35
2.4.1. Conceptos previos . . . . .	35
2.4.2. Geometría intrínseca de superficies: Teorema <i>egregium</i> de Gauss . . . . .	53

2.4.3. Consecuencias y aplicaciones . . . . .	72
2.5. Conclusiones . . . . .	88
<b>Anexos</b>	<b>91</b>
<b>A. Código prácticas</b>	<b>93</b>
A.1. Sección HTML . . . . .	93
A.2. Sección PHP . . . . .	104
A.3. Sección CSS . . . . .	111
<b>B. Wolfram Mathematica</b>	<b>131</b>
B.1. Código figuras . . . . .	131

# Índice de figuras (prácticas)

1.1. Bisel . . . . .	16
1.2. Blog ANPE . . . . .	19
1.3. BTI Training Center . . . . .	21
1.4. GitFlow . . . . .	24
1.5. Navicat . . . . .	26
1.6. Bootstrap) . . . . .	27
1.7. Visual Composer . . . . .	28



# Índice de figuras (TFG)

2.1. Karl Friedich Gauss . . . . .	34
2.2. Aplicación cambio de coordenadas . . . . .	37
2.3. Aplicación diferenciable entre superficies . . . . .	39
2.4. Recta que corta la esfera en un cilindro . . . . .	40
2.5. Helicoide . . . . .	45
2.6. Plano a cilindro . . . . .	56
2.7. Catenoide . . . . .	57
2.8. Helicoide . . . . .	58
2.9. Catenoide-Helicoide . . . . .	60
2.10. Catenoide-Helicoide conjunto de imágenes . . . . .	61
2.11. <i>Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas</i> . . . . .	62
2.12. Fragmento de <i>Disquisitiones</i> . . . . .	63
2.13. Paraboloide hiperbólico . . . . .	68
2.14. <i>Curvatura del toro</i> . . . . .	72
2.15. Plano a cilindro . . . . .	73

2.16. Hormiga en cilindro y esfera . . . . .	73
2.17. <i>Proyección cilíndrica</i> . . . . .	75
2.18. <i>Proyección cónica</i> . . . . .	75
2.19. <i>Proyección plana</i> . . . . .	76
2.20. Mapa de Mercator . . . . .	77
2.21. Mapa de Mercator, rectángulos . . . . .	78
2.22. Mapa de Peters . . . . .	79
2.23. Mapa de Peters, modificado . . . . .	79
2.24. Mapa de Hajime Narukawa (AutaGraph) . . . . .	80
2.25. Proyección AuthaGraph . . . . .	80
2.26. Mapa infinito . . . . .	81
2.27. Papel doblado en U . . . . .	82
2.28. Porción de pizza fallida . . . . .	82
2.29. Porción de pizza . . . . .	83
2.30. Brizna de hierba . . . . .	83
2.31. Hipódromo de la Zarzuela . . . . .	84
2.32. Persona sobre lata . . . . .	84
2.33. Huevo . . . . .	85
2.34. Torre de enfriamiento . . . . .	85
2.35. Patata, paraboloides hiperbólico . . . . .	86
2.36. Ciudad de las Artes y las Ciencias . . . . .	86

2.37. Fuerza de la curvatura . . . . . 87





# Capítulo 1

## Estancia en prácticas

### 1.1. Introducción

La estancia de prácticas se realizó en la empresa Infoware Soluciones Informáticas S.L. (Infoware), ubicada en el Parque Científico Tecnológico y Empresarial de la Universitat Jaume I (Espaitec 2), dirigida por Don Luis Miguel Chulvi. Esta empresa se encarga principalmente del desarrollo de páginas y aplicaciones web; y actualmente está asociada a la empresa Cuatroochenta (480), encargada en el desarrollo e implementación de soluciones cloud, ubicada también en el mismo edificio.

La empresa trabaja principalmente en diseño de páginas web y creación de aplicaciones web, realizando también se encarga de alojamiento web o mantenimiento informático.

Entre los últimos proyectos en los que ha trabajado la empresa se encuentran los siguientes sitios web: Bitapic, Grúas la Plana, Ivu y Paiser entre otras.

## 1.2. Objetivos del proyecto formativo

Infoware trabaja tanto en proyectos propios como en proyectos asociados a Cuatroochenta. Durante mi estancia en prácticas me centré principalmente en los proyectos propios de la empresa.

Principalmente, mi trabajo se centró en desarrollo de páginas web tanto en el *front-end* como en el *back-end*, pero en lugar de trabajar en un único proyecto durante toda la estancia, participé en distintos proyectos a lo largo de esta, incluso llegando a trabajar en más de uno de manera simultánea.

El objetivo principal de estas prácticas, fue poner en valor mis conocimientos en programación alcanzados durante la carrera. Los cuales me permitieron adaptarme rápidamente a los lenguajes de programación usados en la empresa logrando así ser autosuficiente en los proyectos encomendados.

Tuve que aprender a utilizar lenguajes de programación no vistos a lo largo de mis estudios, tales como: HTML, CSS, PHP y JavaScript entre otros. También utilicé lenguajes conocidos como SQL. Además, tuve que iniciarme en muchas aplicaciones que no conocía hasta la fecha como: Visual Composer, WAMP o Navicat. Pero principalmente, mi trabajo consistió en programación web, por tanto, lo primero fue aprender el funcionamiento del modelo vista-controlador para comprender de qué manera la vista se comunica con el controlador, éste con los servicios; y los servicios con el repositorio.

## 1.3. Explicación detallada de los proyectos realizados en la empresa

Como he mencionado anteriormente, mi estancia en prácticas no se centró en un único proyecto sino que estuve trabajando en varios a la vez.

### 1.3.1. Proyectos

A continuación expondré los diversos proyectos en los que he participado y mi función en cada uno de ellos:

#### **PrestaShop**

La realización del proyecto de PrestaShop fue muy ágil a pesar de ser la primera vez que utilizaba Navicat. Trataba de crear una base de datos adecuada para la página web y asegurar el correcto funcionamiento de la página, una vez hechas las comprobaciones pertinentes, se me pidió crear una orden capaz de modificar el valor de todos los envíos de manera masiva para la cual utilicé SQL. Una vez la orden fue funcional, la añadí al código para poder realizar dicha modificación desde la página web.

#### **Bisel (Tienda de cuadros)**

Este fue el primer proyecto dentro de la empresa donde tuve que modificar una página web al completo, mi cometido principal fue solucionar aspectos visuales de la página web principalmente en la página de contacto, modificando tanto el header y el formulario, utilizando principalmente CSS.

A continuación trabajé en el back-end de la página creando un script para un reCAPTCHA V3 que no fuera invasivo y que detectara automáticamente que quien intentara enviar el formulario a través de la página de contacto no se tratara de un *bot*.

Cuando el reCAPTCHA ya era funcional, activé el formulario y comprobé que su funcionamiento fuera el adecuado, para lo cual lo redireccioné a mi correo personal creando una consulta. Posteriormente, una vez hechas las comprobaciones, se volvió a habilitar para la empresa.

A continuación se muestra como quedó la página de contacto una vez acabada.

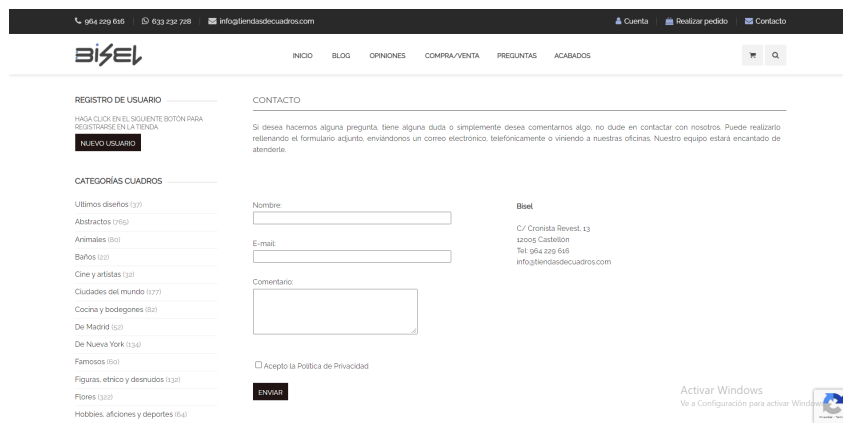


Figura 1.1: Bisel

Link: [Contacto Bisel](#)

## Aplicación para una ONG siria

Esta aplicación es una página web para una organización no gubernamental de Siria; desconozco los nombres de la ONG y de la página web, porque la empresa no nos los comunicó.

Se trata de una aplicación cuyo objetivo es encontrar a personas desaparecidas en los conflictos de Siria, como esta aplicación va a ser internacional y además debe poder comunicarse con la base de datos de Amazon, deberá estar desarrollada en inglés.

Se nos pedía crear una página donde que contara con dos roles de acceso: usuario y administrador.

Los usuarios deberían poder crear una consulta en la cual indicar cierta información sobre una persona y subir fotos de esta. Esta foto debía ser tratada y comparada con las fotos de otras personas sirias ubicadas en la base de datos de Amazon, devolviendo las cincuenta fotos de las personas más parecidas que se encontraran en dicha base de datos.

Para crearla me basé en una versión básica que me proporcionó la empresa, con un par de entidades ya creadas y un login funcional.

Lo primero fue instalar y aprender nociones básicas de Symfony, también tuve que instalar WAMP y crear una base de datos básica con Navicat para poder *logearme* en la página web.

Una vez todo instalado, comencé modificando las entidades ya existentes; algunas de ellas

pude reutilizarlas como, por ejemplo tareas (*tasks*), y en otras modifiqué las entidades para no tener que borrar todos los archivos referentes a estas y crearlos de nuevo para las nuevas entidades; por ejemplo, sustituí la entidad clientes por expedientes (*record*), para ello tuve que modificar todas las variables y campos referentes a clientes en los diferentes elementos del modelo vista-controlador. Además, creé todos los códigos nuevos necesarios como *recordInterface*.

Algunos de estos cambios rompieron la página web, y tuve que aprender a *debugear* usando el comando `dd()` para volver a poner la página en funcionamiento.

Una vez la entidad *record* ya era funcional, modifiqué la vista y el *automapper* (herramienta que permite realizar un mapeo de un objeto a otro ahorrándonos gran cantidad de código) para que los administradores tuvieran opciones de configuración que los usuarios no tenían como, por ejemplo, poder cambiar el estado de una petición.

Después añadí un buscador con filtros para indicar la fecha de inicio y de fin de la consulta a partir de un calendario desplegable que salía al poner el ratón encima del campo correspondiente.

A continuación, busqué una forma de subir los archivos de las imágenes de forma segura, para ello miré la forma de subir archivos desde PHP a SFTP.

En este momento del proceso nos dimos cuenta de que para ciertos casos el buscador no funcionaba correctamente y como estuve trabajando en casa a causa del confinamiento de la COVID me centré en arreglar este buscador durante los días que duró el confinamiento.

Al terminar el teletrabajo, y tener ya solucionado el apartado del buscador, continué trabajando en la subida de archivos a SFTP. Las fotos se tenían que subir a *aws.storage*, para ello la página debía ser capaz de comunicarse con Amazon y así poder usar el almacenamiento de este, por ello cree un botón que permitiría subir las imágenes, pero daba un error al intentar comunicarse con Amazon.

Dejando esto aparcado, pasé a tratar la imagen al subirla a la aplicación, esto lo hice con un *jquery* y que me permitiera recortar la foto entre otras cosas.

A continuación, se me pidió crear una nueva base de datos para probar los nuevos elementos introducidos. Así procedí, borré la base de datos utilizada hasta ahora creando una nueva, siendo la prueba exitosa.

Retomé la subida de ficheros, descubriendo que el problema era la necesidad de unas credenciales para introducir en el código de las que no se disponía. Por tanto se lo comuniqué a mi supervisor y dimos por terminada esta parte hasta disponer del *BUCKET\_NAME*.

La subida de la imagen a la página se hacía en dos pasos y aunque el funcionamiento fuera

correcto era incómodo para el cliente por tanto se me pidió investigarlo y corregirlo. Para ello repasé todos los repositorios, servicios, controladores y *templates* relacionados con la página donde se llevaba a cabo la subida para así encontrar donde se producía este doble paso.

Una vez solucionado se me pidió añadir una entidad nueva, tarea2 (task2). Al contrario que la última vez, esta vez cree todos los archivos desde el principio y modifiqué el *automapper*.

Posteriormente lleve a cabo una limpieza de código de toda la página web, ya que al basarme en un modelo base al principio del proyecto habían entidades y clases que no eran necesarias.

A continuación, se me pidió crear una consulta en SQL desde Navicat que devolviese el número de casos agrupados por mes, el de casos abiertos, el de casos cerrados; y las tareas que se han decidido posponer.

Para finalizar, implementé que si el usuario era *admin*, al conectarse a la página web le aparecieran las consultas indicadas en el párrafo anterior como gráficas, para ello implementé en el código las consultas que había creado en Navicat anteriormente.

## **Blog ANPE**

Este proyecto trataba de actualizar la página de Docentespublica usando Bootstrap, ya que había sido programada usando otra forma de programación ya anticuada.

Lo primero que tuve que hacer fue aprender cómo funcionaba Bootstrap y su sistema de filas y columnas para poder rehacer el *front-end* de la página.

Una vez aprendido el funcionamiento básico de Bootstrap, lleve a cabo la división de la página web en distintas filas cada una con sus respectivas columnas.

Cuando ya tenía escrito gran parte del contenido de la página, mi supervisor al comprobar el proyecto me comentó que no aprovechaba suficientemente todas las funcionalidades que me proporcionaba Bootstrap; y, como el proyecto no era urgente, me recomendó que empezara desde el principio y así lo hice.

Empezando de nuevo la página apliqué todo lo que había ido aprendiendo la vez anterior por lo que el desarrollo esta vez fué más rápido, ingresé todo el texto contenido en la página web original y comencé a situar las imágenes, siendo la más problemática la imagen que se utilizó como cabecera y como fondo de la página web.

Ahora que ya estaba el contenido escrito me faltaba hacer menús funcionales y cambiar todos los estilos de la página así como ingresar un *banner* con noticias.

Empecé por los estilos, para esto usé CSS y modifiqué colores, tamaños, posiciones, botones, menús e imágenes, entre otras cosas.

La página estaba casi acabada, faltando el menú lateral izquierdo y las letras del *banner*, entonces nos repartimos el trabajo, quedándome yo con el menú lateral y mi supervisor con el *banner*.

En ese momento, se me comunicó que la página debía ser *responsive* (que los elementos de la página se adecuen al tamaño de la pantalla). Por tanto dejé apartada la creación del menú izquierdo y di prioridad a la adecuación de la página. Para ello, hice ligeros cambios en el archivo HTML y modifiqué gran parte de la hoja de estilos (CSS); posteriormente, mediante *media-queries*, modifiqué el tamaño de ciertos objetos que no encajaban con los tamaños predefinidos del modelo *responsive*.

Cuando ya tenía el menú situado en el lateral izquierdo con los submenús creados, a falta únicamente de hacer que estos se desplegaran de una forma específica, entraron en la empresa nuevos proyectos urgentes por lo que se postergó el desarrollo de este.

A continuación se muestra un ejemplo de la página web así como también un *link* de esta.



Figura 1.2: Blog ANPE

Link: [Blog ANPE](#)

## BTI Training Center

Tanto este como el siguiente proyecto Informa Consulting los trabajé de forma simultánea y adoptando un rol mucho más importante del que había tenido hasta la fecha, ya que el trabajador encargado de esto estuvo primero de vacaciones y posteriormente de baja por COVID.

Estos proyectos fueron mi inicio en Visual Composer y además en estos proyectos se estaba utilizando la plantilla de Arosa para la cual se había creado un hijo (Arosa Child) sobre el que trabajaría para no modificar la plantilla madre a no ser que fuera estrictamente necesario.

En esta página tuve que encargarme de realizar la página principal(home), cursos y contactos.

Para la página contactos tuve que crear un formulario mediante un *plugin* que se instaló en el Visual Composer, además de cambiar todos los estilos de la página (textos, márgenes , etc.)

La página cursos ahora tenía que tener una distribución un poco distinta, por lo que tuve que hacer esta nueva distribución y rehacer todos los estilos de la página al igual que en la página de contactos

Respecto a la página principal (home), retoqué y cambié las imágenes y estilos, algunos de los cuales fueron más complicados de implementar que los vistos hasta la fecha, principalmente por lo poco acostumbrado que estaba a la herramienta de Visual Composer.

Una vez acabado se me informó que también debía ser *responsive* así que cambie algunos de los estilos, en concreto, los *padding*s y *margins*. Una vez solucionado esto, tuve que usar *media-queries* de nuevo para los distintos tipos de pantalla lo cual me dio muchos quebraderos de cabeza con el *header* de la página.

Por último, el día antes de acabar mi estancia en prácticas, me tocó modificar los números que aparecen en la página web para que tuvieran una animación al aparecer.

Aquí tengo un ejemplo de lo que hice en la página web y un *link* a la página original para que se vea la diferencia entre las dos.

Link: [Training Center](#)



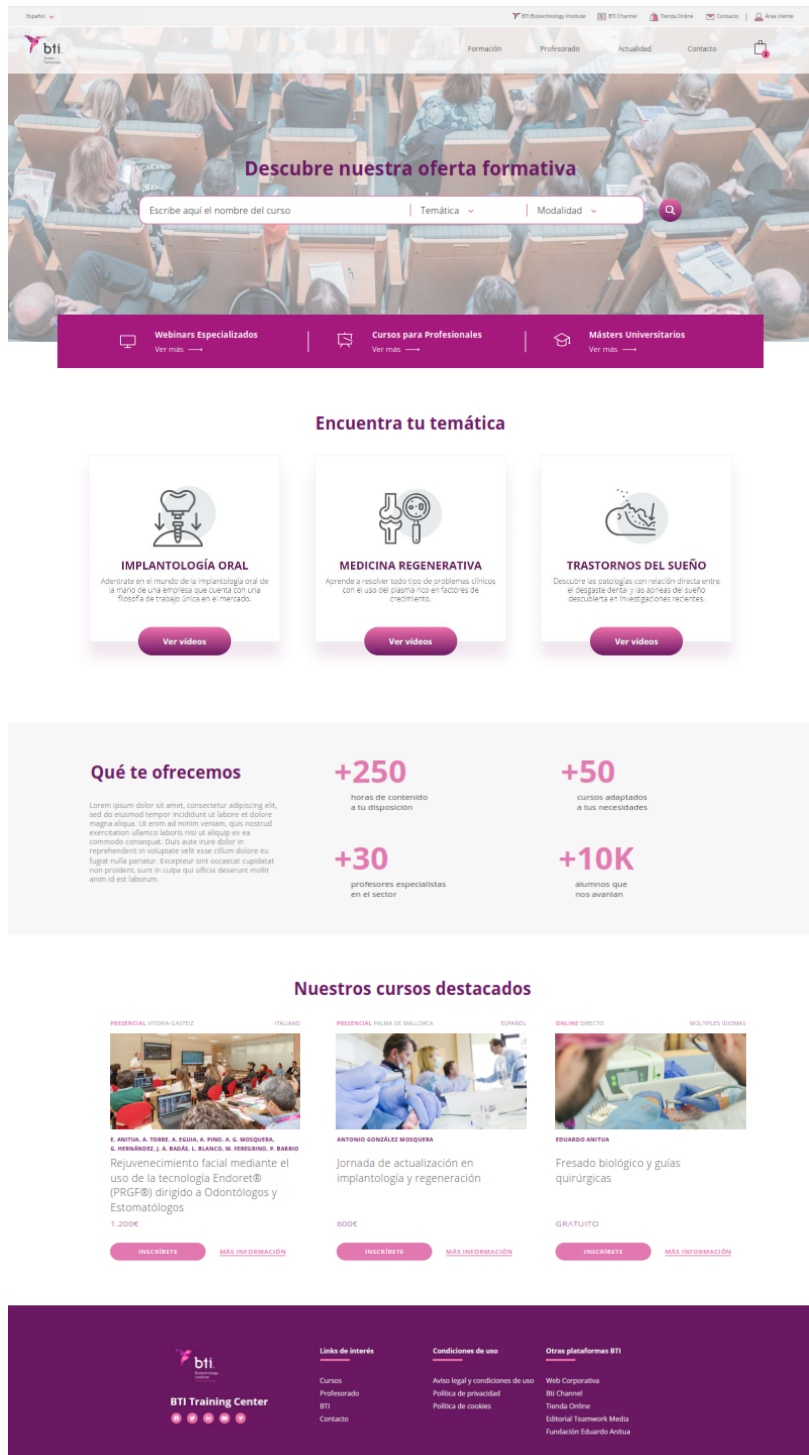


Figura 1.3: BTI Training Center

## Informa Consulting

Como mencioné en el proyecto anterior, este también se llevó a cabo con Visual Composer y se realizó paralelamente con BTI Training Center.

El trabajo consistía en rehacer completamente la página *home* con un nuevo diseño que nos enviaron. En el *header* hubo que hacer un buscador con un *revolution slider* de fondo para el cual tuvimos que instalar un nuevo *plugin* y fue un quebradero de cabeza ya que había que ajustarse lo mayor posible a su diseño, el cual cambiaba semana a semana y las letras que teníamos que poner en el *revolution slider* no se veían con la imagen que nos habían pasado de fondo.

Tuve que realizar todo el contenido desde el inicio ya que el diseño que nos mandaron era completamente distinto a lo que había hasta el momento, con unos estilos completamente nuevos y que nos hicieron cambiar más de una vez porque todas las semanas cambiaban de opinión.

Para el *footer*, tuve que buscar en Google Maps la ubicación de las sedes que tienen en España y crear tres *shortcodes*, uno para cada localización, que mostrara un mapa interactivo con la ubicación de estas sedes.

Luego modifiqué la información e imágenes de todos los tipos de diseños que tenían, además de añadir nuevos diseños y crear nuevos estilos (CSS) para los diseños así como un nuevo menú lateral.

A continuación, tuve que crear una página que muestra todos los estilos del proyecto y crear *links* para interrelacionar todas las páginas del proyecto entre ellas y así, poder navegar fácilmente por este.

También tuve que realizar la página de contacto en la que creé un formulario nuevo y nuevos estilos para botones con un degradado especial, además de estilos para el resto de elementos de la página.

En ese momento, se me informa que el proyecto también debía estar en inglés. Teniendo que rehacer todo en dicho idioma, y a partir de este momento, toda información añadida al proyecto debía estar en ambos idiomas.

Posteriormente tuve que añadir nuevas categorías al apartado de *Robo Gallery*, que es donde se subían las fotos, y añadir nuevos *tags* ciertas imágenes referentes a diferentes lugares tuvieran su ubicación como criterio de búsqueda, por tanto también hubo que añadir un buscador.

Después, tuve que modificar la página sobre Nosotros (*aboutUs*) con información nueva que nos proporcionaron. Y añadir nuevas entradas a las categorías y a la página de proyectos, así

como añadir información y cambiar ciertos estilos de la página actualidad (news).

Las últimas páginas que tuve que crear fueron: *services*, *projectManagment*, *onsiteShowroom*, *italianDesign*, *bespokeForniture*, *interiorStyling* y *3dRendering*.

Por último, solo me faltaba arreglar algún problema que quedaba en cuanto a estilos con CSS y aunque no se acabo la página web al completo, sí conseguí realizar todo el trabajo que se me encomendó antes de los plazos delimitados por la empresa y antes de finalizar mi estancia en prácticas.

Desafortunadamente no puedo adjuntar ninguna foto del desarrollo de esta página ya que, al no estar publicada, el cliente tendría que darme permiso y no dispongo del mismo, pero pongo un *link* de la página original aunque son completamente distintas.

Link: [Informa Consulting](#)

### 1.3.2. Software utilizado para los proyectos

A continuación nombraré los programas y los lenguajes de programación que he usado a lo largo de las prácticas:

#### Visual Code Studio

Es un editor de texto desarrollado por Microsoft, que tiene soporte para gran variedad de lenguajes de programación, entre ellos los principales utilizados en el desarrollo Web: HTML, CSS, y JavaScript, entre otros. Por ello es el editor que he utilizado durante toda mi estancia en practicas.

#### GitLab

Es una suite completa que permite crear, gestionar, conectar y administrar diferentes aplicaciones con los repositorios y así poder hacer todo tipo de integraciones con ellas. Ofrece una plataforma en cual podemos realizar las distintas etapas de su DevOps.

## GitFlow

GitFlow tiene un flujo de trabajo de Git para favorecer el desarrollo de software y las prácticas de DevOps.

Este flujo de trabajo GitFlow define un modelo donde creamos ramas, gracias a estas podemos trabajar sin miedo a modificar el contenido original del proyecto hasta que la parte que estamos diseñando funcione correctamente.

A continuación, hay un ejemplo de cómo funcionan las ramas, tenemos la rama *master*, de la cual sacamos una rama *develop*, de la cual vamos haciendo *features* (características) si está funciona la devolvemos a la rama *develop* y si todo funciona correctamente la unimos con la *master*.

### Release Branches

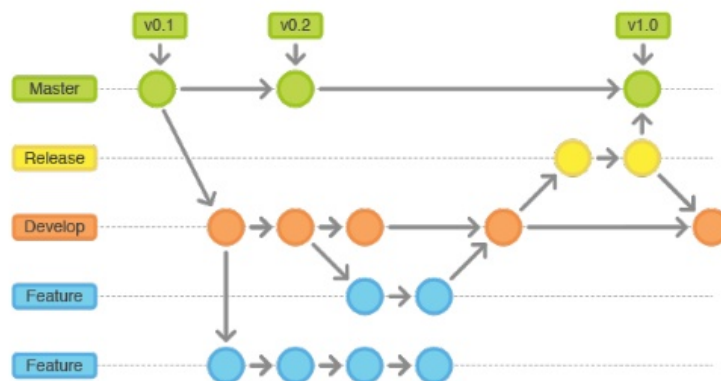


Figura 1.4: GitFlow

## Bitbucket

Bitbucket se trata de un servicio de alojamiento en web, para aquellos proyectos que se basan en el sistema de control de versiones (Mercurial y Git).

## **Filezilla**

Filezilla es una aplicación utilizada para conectarse a un servidor FTP para acceder y gestionar los archivos.

Un servidor FTP es un servicio que usa el protocolo FTP (File Transfer Protocol) utilizado a la hora de compartir archivos a otros usuarios. El acceso a este servidor FTP se hace introduciendo los datos necesarios para la conexión, como son: la dirección del servidor, el usuario y la contraseña.

## **Symfony**

Symfony es un *framework* diseñado para el desarrollo de las aplicaciones web en PHP. Es un conjunto de utilidades y herramientas que sirve para automatizar las tareas más comunes y así permite al desarrollador dedicarse a los aspectos específicos de cada una de las aplicaciones.

## **WAMP**

WAMP derivado de LAMP(Linux, Apache, MySQL y PHP) para Windows. Actúa como un servidor en tu computadora permitiendo probar todas las funcionalidades de WordPress en tu ordenador personal sin consecuencias al no necesitar un alojamiento *online* para tu web.

## **Composer**

Composer es un gestor de paquetes para PHP que ayuda a administrar, descargar e instalar librerías y dependencias. Muy útil cuando nuestros proyectos dependen una gran cantidad de fuentes de instalación. Muy fácil de utilizar ya que Composer descarga cada dependencia de forma automática por nosotros.

## **Navicat**

Navicat consiste en un administrador gráfico de base de datos. Desarrollado por PremiumSoft CyberTech Ltd. para MySQL, Oracle, entre otros. Cuenta con una interfaz gráfica bien diseñada que soporta múltiples conexiones para diversas bases de datos tanto remotas como locales.

A continuación, se puede observar un ejemplo sobre cómo funcionan las tablas y las relaciones entre ellas, donde cada cuadrado representa una entidad con sus características y cada línea representa que entidades están relacionadas.

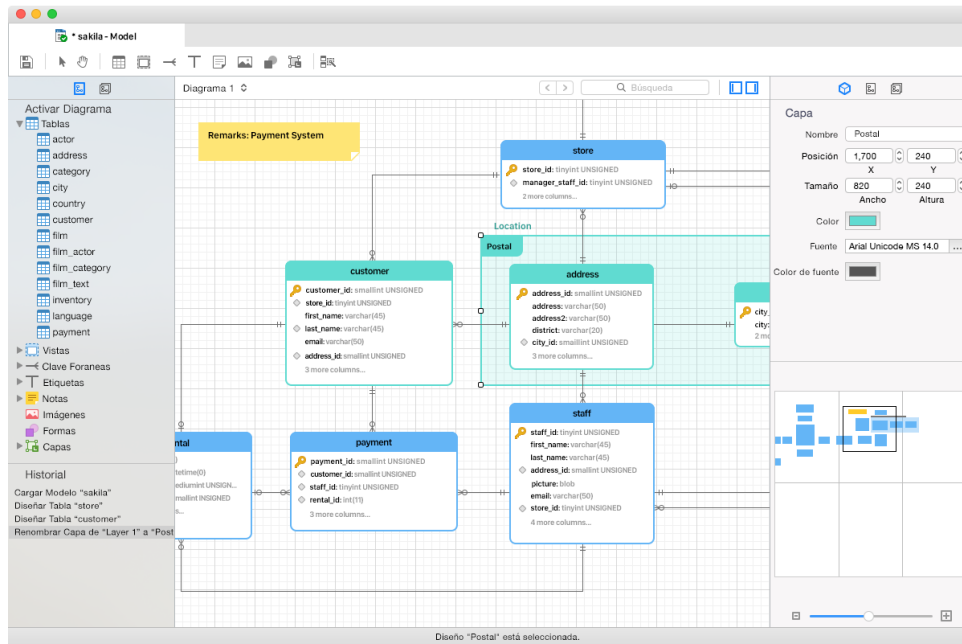


Figura 1.5: Navicat

## Sourcetree

SourceTree es considerado uno de los mejores clientes GUI para manejar repositorios Mercurial y Git, permite clonar y crear repositorios de cualquier sitio. Además es capaz de integrarse perfectamente con Bitbucket o Github. Podemos llevar a cabo distintas órdenes como *commit*, *push*, *pull* y *merge* de nuestros archivos y se utiliza para trabajar distintas personas a la vez en un mismo proyecto permitiendo así que trabajen a la vez en tiempo real en un mismo proyecto.

## Herramientas de desarrollador

Las herramientas de desarrollador son un conjunto de herramientas integradas en todos los navegadores, cuya función es facilitar el desarrollo de aplicaciones web. Por ejemplo, en Chrome se puede acceder a ellas fácilmente utilizando F12 obteniendo así información de todo tipo con respecto a la página como, el código HTML de está, los distintos estilos utilizados, entre otros.

## Bootstrap

Bootstrap es un *framework front-end* utilizado para desarrollar aplicaciones web y sitios móviles. Se basa en filas y columnas para separar las distintas secciones de la página web y aunque únicamente lo utilicé durante mi proyecto en *Docentespublica* me sirvió para ver cómo funcionaba la división de una página web en filas y columnas, además de aprender a hacer que una página web sea *responsive*. Gracias a esto, fue más sencillo aprender a utilizar Visual Composer.

Esta división funciona en que la página web esta dividida en filas donde cada fila representaría una sección de la página y luego cada fila se divide en columnas dependiendo de los elementos que queramos añadir en cada fila.

En la imagen a continuación se puede ver como funciona esta división de filas y columnas.

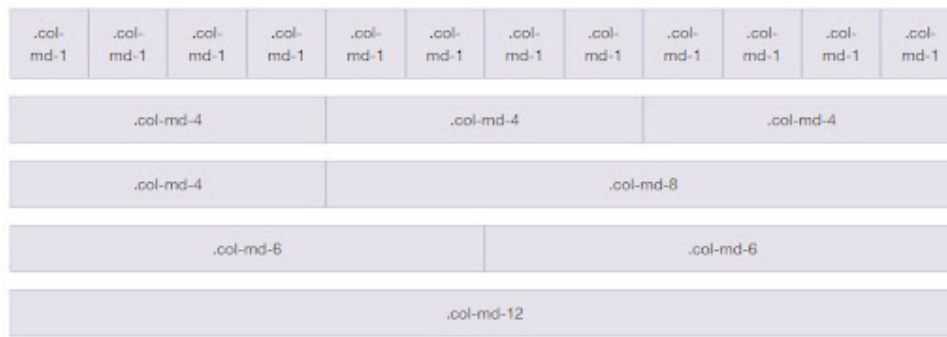


Figura 1.6: Bootstrap)

## Wordpress

WordPress es un sistema utilizado para la gestión de contenidos web, es un sistema para publicar contenido en la web de forma sencilla. Para ello, Wordpress se compone de distintas plantillas, simplificando así la creación de contenidos de la página. Una vez utilizada una plantilla como base de la página web, uno puede usar sus conocimientos para modificarla.

## Visual Composer

Visual Composer es un *plugin* que ha cambiado por completo el modo de diseñar con WordPress. Visual Composer permite la creación de plantillas y tener acceso a plantillas creadas por

otros programadores. Nosotros hemos utilizado la plantilla *Arosa* en los dos últimos proyectos en los que participé durante mi estancia.

A continuación se muestra una foto de como funciona Visual Composer, a la izquierda tenemos un menú desde el cual podemos crear las distintas páginas, subir las imágenes que necesitemos, acceder a herramientas, crear o modificar usuarios, entre otras cosas. Este menú puede tener más opciones dependiendo de los *plugins* que le añadamos, como por ejemplo uno para crear *revolution sliders*.

La parte central de la foto es donde creamos la página web a base de crear filas y columnas de una forma gráfica, pero que también podemos traducirlo a HTML si es necesario.

Y por último, la columna de la derecha es principalmente para configurar las características de cada una de las páginas.

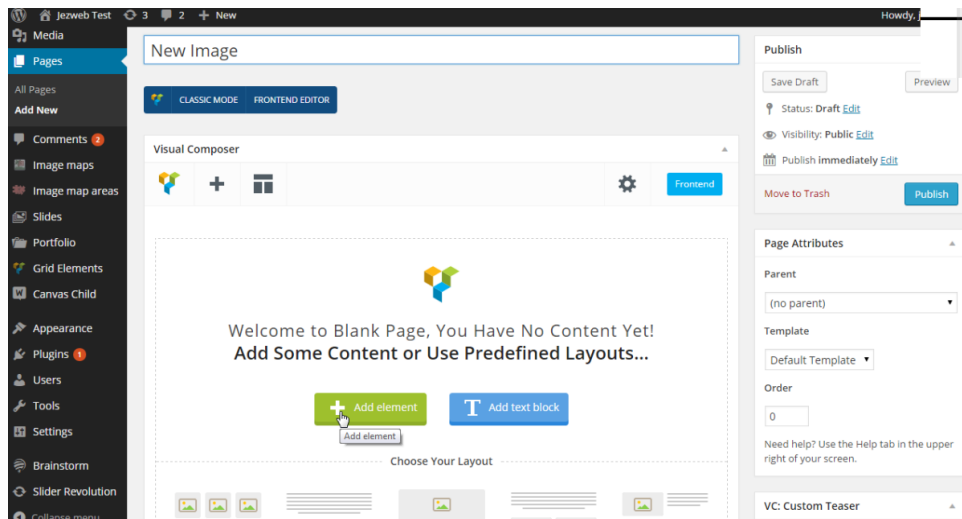


Figura 1.7: Visual Composer

## HTML

HTML (HyperText Markup Language) es el componente más básico de la Web. Es un lenguaje utilizado para definir la estructura y el significado de tu página web, acompañado normalmente de otros lenguajes de programación como, por ejemplo, Javascript. Ejemplo del código programado en la empresa en el Anexo A.1.



## JavaScript

JavaScript (js) es un lenguaje utilizado en la programación web para implementar funciones complejas, ya que JavaScript funciona de manera nativa en los navegadores. Es un complemento de HTML y CSS para la implementación de páginas web. Dentro de este lenguaje hemos utilizado las funciones *ajax* y las *jquery*.

## SQL

SQL (Structured Query Language) es un lenguaje diseñado para manipular información de sistemas de bases de datos. SQL permite hacer operaciones algebraicas y cálculos avanzados, hoy en día sigue siendo el lenguaje por excelencia en bases de datos relacionales.

## PHP

PHP (Hypertext Processor) es un lenguaje de programación de código abierto destinado al desarrollo web y que podemos incrustar en HTML. Es un lenguaje simple para los no iniciados y a la vez, permite características avanzadas a los profesionales. La mayor parte de nuestro *back-end* está programado mediante este lenguaje de programación, un ejemplo de esto lo podemos ver en el Anexo A.2.

## CSS

CSS (cascading style sheets) es un lenguaje utilizado para modificar la visualización y estilizar elementos programados en HTML. Con este lenguaje definimos los estilos de las páginas web y su apariencia. Se muestra un ejemplo de código CSS en el Anexo A.3.

### **1.3.3. Grado de consecución de los objetivos en los diversos proyectos**

En este apartado valoraré por separado cual ha sido el grado de consecución en cada uno de los proyectos:

#### **PrestaShop**

En este caso, fui capaz de completar lo que se me pidió de forma rápida y eficaz. Me resultó el trabajo más rápido durante mi estancia en prácticas.

#### **Bisel (Tienda de cuadros)**

En Tiendas de cuadros, se me pedía arreglar visualmente la página de contacto, que se arreglara el formulario y que funcionara el contacto con la empresa, además se me pidió añadir un reCAPTCHA no invasivo.

Conseguí cumplir todos los objetivos de este proyecto. Durante su realización, al ser el primero donde tuve que modificar una página web, tuve ciertas dificultades que conseguí solucionar invirtiendo un más tiempo del estimado y asignado inicialmente, concretamente un día más. Los mayores problemas se derivaron de la implementación del reCAPTCHA v3.

#### **Aplicación para una ONG siria**

Durante este proyecto, tuve que realizar muchas y diversas tareas. Fui capaz de completarlas todas por lo que el trabajo fue completamente satisfactorio. Sin embargo, no todas las tareas fueron iguales, algunas me costaron más tiempo, entre ellas la comunicación de la aplicación con Amazon fue de las más complicadas que había hecho hasta el momento.

La parte buena es que el proyecto no era urgente, por ello que me retrasara un poco en algunos aspectos de este no repercutieron de manera negativa en la empresa y, al tener que aprender a hacerlas por mi cuenta durante este proyecto, aprendí mucho.

## **Blog ANPE**

Es el único proyecto de los que participé en la empresa que no conseguí finalizar, debido al hecho de haber tenido que rehacer la página web dos veces a medida que aprendía *bootstrap* y a tener que hacer las páginas web *responsive*, hizo que me llevara más tiempo del necesario.

Aunque acabé mis prácticas antes de que el proyecto estuviese finalizado, trabajar en él me enseñó mucho sobre programación en HTML, que no había podido ver hasta la fecha.

## **BTI Training Center**

Resultó complicado llevar dos proyectos a la vez -BTI Training Center e Informa Consulting-. A pesar de terminar mi estancia en prácticas antes de que el proyecto finalizara, estoy satisfecho de haber podido cumplir con la carga de trabajo que me encomendó mi supervisor y cumplir con las fechas fijadas para las entregas parciales.

Tanto este como Informa Consulting fueron mis primeros proyectos con Visual Composer, fue la aplicación en la que más me gustó trabajar y a la que más rápido me habitué durante mi estancia y estoy muy satisfecho con mi rendimiento en este proyecto.

## **Informa Consulting**

Este proyecto fue el más estresante ya que al compartir el tiempo con el proyecto de BTI y de tener una mayor carga de trabajo que el proyecto anterior, los plazos fueron más apremiantes; a pesar de lo cual fui capaz de llegar a ellos con todo el trabajo realizado.

Esto me ayudó a habituarme a un ritmo de trabajo más alto y esmerado sin tener que gastar tiempo revisándolo una vez acabado. Por lo que mi satisfacción al acabar las prácticas con este proyecto fue muy alta.

#### 1.3.4. Conclusiones

Aunque la programación web no sea un tema que se toca en Matemática computacional, siempre es un tema que a mi personalmente me ha llamado la atención y ahora por fin he podido experimentarlo a nivel profesional. He de decir que me ha gustado el trabajo que he realizado y aunque no haya sido algo que he cursado durante la carrera, los conocimientos adquiridos durante esta me han ayudado a poder valirme con otros lenguajes de programación de manera rápida y eficaz, haciendo así que el tiempo que he necesitado para aprender a usarlos sea mínimo.

Por tanto, considero que mi capacidad de programación ha mejorado al tener que aprender lenguajes y programas nuevos. Personalmente estoy satisfecho con los resultados que he obtenido en los distintos proyectos durante las prácticas. Considero que en la empresa también están satisfechos con mi trabajo ya que hemos llegado al acuerdo de continuar allí el año que viene.

Durante las prácticas he trabajado de forma independiente cosa que agradezco a mi supervisor don Luis Miguel Chulvi ya que esto ha hecho que sea capaz de valirme por mi mismo y que me habitúe al ritmo de trabajo propio de una empresa.

## Capítulo 2

# Memoria TFG

### 2.1. Introducción

### 2.2. Motivación y Objetivos

Durante la carrera hemos estudiado el ámbito de la geometría en distintas asignaturas. Sin embargo, me sorprendió que en geometría diferencial no llegáramos a ver el teorema *egregium* de Gauss.

Gauss es llamado el príncipe de las matemáticas por sus grandes aportaciones a muchos y distintos campos de las matemáticas. Aún así, resulta sorprendente que no llegásemos a estudiar la aportación más importante de esta gran figura en el ámbito de la geometría diferencial; y en concreto el teorema que el mismo Gauss decidió bautizar como "destacable". Así pues nos preguntamos qué tiene este teorema para que su autor lo considerara tan importante.<sup>[10]</sup>

El hecho de que un matemático tan sobresaliente como Gauss decidiera nombrar así a un teorema despertó en mí la curiosidad por investigar qué expone en dicho teorema y qué usos prácticos puede llegar a tener.

El siguiente trabajo de final de grado consta, en primer lugar, de la presentación de los conocimientos necesarios para poder afrontar este teorema. A continuación se aborda el estudio del teorema en cuestión y su demostración; y finalmente se exponen las utilidades que se derivan de este teorema.

## 2.3. Introducción

Este proyecto de fin de grado consiste en el estudio de la geometría intrínseca de superficies, centrándonos principalmente en la curvatura y el teorema *egregium* de Gauss.

Las aportaciones de Gauss son muy valiosas en las diferentes áreas de conocimiento de abarcan sus investigaciones: teoría de números, astronomía, magnetismo, geometría y análisis. Cualquier gran descubrimiento matemático a lo largo de este siglo encuentra detrás la alargada sombra de Gauss.



Figura 2.1: Karl Friedich Gauss

Probablemente, la obra más importante publicada por Gauss en el campo de la geometría sea *Disquisitiones generales circa superficies curva*. En esta obra realiza la demostración del teorema *egregium*. Podríamos enunciar este importante teorema como *la curvatura de Gauss es invariante bajo isométrias locales*.

Durante este proyecto, explicaremos qué quiere decir este teorema y cuáles son sus usos y aplicaciones actuales. Para esto dividiremos el TFG en una estructura con cuatro secciones:

Primeramente, se presenta una sección los con conocimientos previos de superficies necesarios para desarrollar posteriormente el teorema que nos atañe, prestando una atención especial a la *primera forma fundamental*, la cual nos permite hacer mediciones y cálculos sobre la superficie tales como longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones, etc.

A continuación, entramos en la parte central del proyecto donde introducimos las superficies isométricas y llevamos a cabo la enunciación y demostración del teorema *egregium* de Gauss.

Finalmente, hablaremos de las distintas utilidades que tiene este importante teorema, analizando desde aplicaciones de una gran relevancia, como puede ser la creación de un mapa mundial hasta cuestiones más cotidianas como el modo idóneo de comerse una pizza.

## 2.4. Desarrollo del TFG

### 2.4.1. Conceptos previos

#### SUPERFICIES

##### Superficies parametrizadas

Nuestro primer objetivo es definir el concepto de superficie, para esto iremos introduciendo conceptos los cuales nos ayudarán a llegar a la definición definitiva de superficie.

**Definición 1.** Una superficie parametrizada es una aplicación diferenciable:

$$\vec{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.** Una superficie parametrizada  $\vec{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es regular en un punto  $(u_0, v_0)$  si su diferencial en dicho punto,  $(d\vec{x})_{(u_0, v_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es inyectiva.

Una superficie parametrizada es regular si lo es en todos sus puntos.

Supongamos  $\vec{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . La matriz diferencial de  $\vec{x}$  es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u, v)}$$

Por tanto  $(d\vec{x})_{(u_0, v_0)}$  es inyectiva si y solo si el rango de la matriz anterior es dos.

Denotaremos las derivadas parciales de  $\vec{x}$  como  $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ , son:

$$\vec{x}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \vec{x}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Las cuales coinciden con las dos columnas de la matriz diferencial de  $\vec{x}$ .

## Superficie regular

Con la definición anterior de superficie parametrizada regular nos aseguramos el poder definir el plano tangente, sin embargo no podemos incluir conjuntos tan importantes como la esfera como superficie parametrizada regular si a la vez pedimos que la parametrización sea un homeomorfismo.

Para conseguir estos objetivos, definiremos la noción de superficie regular. Cabe destacar la diferencia entre superficie regular, que es un conjunto que verifica unas propiedades y superficie parametrizada regular, que es una aplicación.

**Definición 3.** *Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si para todo punto  $p \in S$  existe un entorno  $V \subset \mathbb{R}^3$  y una aplicación  $\vec{x} : U \rightarrow V \cap S$  de un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:*

1.  *$\vec{x}$  es diferenciable. Esto quiere decir que si  $\vec{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , las funciones coordenadas  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  tienen derivadas parciales continuas de todos los ordenes en  $U$ .*
2.  *$\vec{x}$  es un homeomorfismo. Como  $\vec{x}$  es continua, admite una inversa  $\vec{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que es continua.*
3. *para cada  $q \in U$ , la diferencial  $(d\vec{x})_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es inyectiva.*

Por tanto, una superficie regular es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que para todo punto de esta superficie podemos encontrar una superficie parametrizada regular e inyectiva de manera que su traza sea un entorno en el punto de la superficie  $S$ .

**Definición 4.** *Cada una de las superficies parametrizadas que usan la definición de superficie regular se llaman carta de la superficie. El conjunto de cartas necesarias para cubrir toda la superficie regular se llama atlas de la superficie.*

Para incluir en la definición de superficies regulares superficies tan importantes como la esfera, hay que trabajar con diversas cartas. Además, la segunda propiedad que tienen que cumplir las cartas implica la no existencia de auto intersección.

**Propiedad 1.** *Sean  $\vec{x} : U \rightarrow S$  y  $\vec{y} : V \rightarrow S$  dos cartas de una superficie regular  $S$  y supongamos que  $W = \vec{x}(U) \cap \vec{y}(V) \neq \emptyset$ . Entonces, el "cambio de coordenadas", es decir, la aplicación  $h = \vec{x}^{-1} \circ \vec{y} : \vec{y}^{-1}(W) \rightarrow \vec{x}^{-1}(W)$  es un difeomorfismo, es decir, es una aplicación biyectiva, diferenciable y cuya inversa también es diferenciable.*



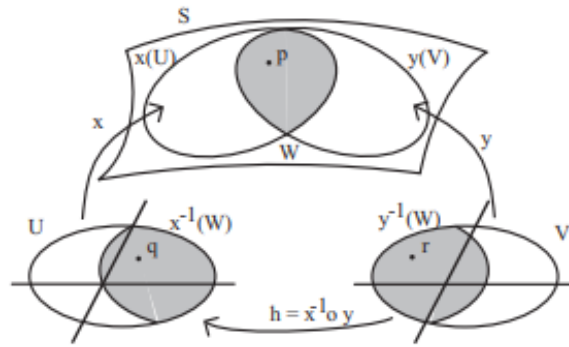


Figura 2.2: Aplicación cambio de coordenadas

**Ejemplo 1.** Para este ejemplo, utilizaremos la esfera, que ya sabemos es una superficie regular y por tanto existe un atlas para este conjunto en  $\mathbb{R}^3$ .

La esfera centrada en el origen de radio 1 es el subconjunto;

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

consideramos las cartas definidas en  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 = 1\}$ ,

$$\vec{x}_1^+ : U \rightarrow V_1^+ \cap S^2$$

$$(u, v) \rightarrow (u, v, +\sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

y

$$\vec{x}_2^+ : U \rightarrow V_2^+ \cap S^2$$

$$(u, v) \rightarrow (u, +\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$$

se solapan. Concretamente

$$W = \vec{x}_1^+(U) \cap \vec{x}_2^+(V) = \{(x, y, z) \in S^2 / y > 0, z > 0\}.$$

Podemos comprobar que:

$$\vec{x}_1^+(W) = \vec{x}_2^+(W) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1, v > 0\}.$$

De manera que

$$h(u, v) = (\vec{x}_1^+)^{-1} \circ (\vec{x}_2^+(u, v)) = (\vec{x}_1^+)^{-1}(u, +\sqrt{1-u^2-v^2}, v) = (u, +\sqrt{1-u^2-v^2}).$$

Como dice la propiedad anterior, la aplicación de cambio de coordenadas es una biyección y es diferenciable. Además, su inversa es la misma  $h$  y, por tanto,  $h$  es un difeomorfismo.

Con lo que podemos comprobar que

$$(\vec{x}_1^+ \circ h)(u, v) = (u, +\sqrt{1-u^2-v^2}, +\sqrt{1-u^2-1+u^2+v^2}) = \vec{x}_2^+(u, v).$$

### Aplicaciones diferenciables entre superficies

**Definición 5.** Sean  $S$  y  $S'$  superficies regulares y  $\phi : S \rightarrow S'$  una aplicación. Diremos que  $\phi$  es diferenciable en  $p$  si existe una carta en  $S$ ,  $\vec{x}; U \rightarrow S$  tal que  $p \in \vec{x}(U)$  y otra carta en  $S'$ ,  $\vec{y} : V \rightarrow S'$ , tal que  $\phi(p) \in \vec{y}(V)$  tal que la aplicación

$$\vec{y}^{-1} \circ \phi \circ \vec{x} : U \rightarrow \vec{y}^{-1}(\phi(\vec{x}(U)) \cap \vec{y}(V))$$

es diferenciable en  $(\vec{x})^{-1}(p)$ . Diremos que  $\phi$  es diferenciable si lo es en todos los puntos de  $S$ .

Diremos que  $\phi$  es un difeomorfismo entre  $S$  y  $S'$  si es diferenciable, biyectiva y si su inversa  $\phi^{-1} : S' \rightarrow S$  es también diferenciable.

La definición de diferenciability no depende de las cartas escogidas. Comprobémoslo para el caso de las funciones diferenciables.

Supongamos que existe una carta  $\vec{x} : U \rightarrow S$  tal que  $p \in \vec{x}(U)$  y la aplicación  $f \circ \vec{x} : (\vec{x})^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $\vec{x}^{-1}(p)$ .

Supongamos que tenemos otra una carta  $\vec{y} : U_1 \rightarrow S$  tal que  $p \in \vec{y}(U_1)$ . Tenemos que demostrar que la aplicación  $f \circ \vec{y} : (\vec{y})^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $\vec{y}^{-1}(p)$ .

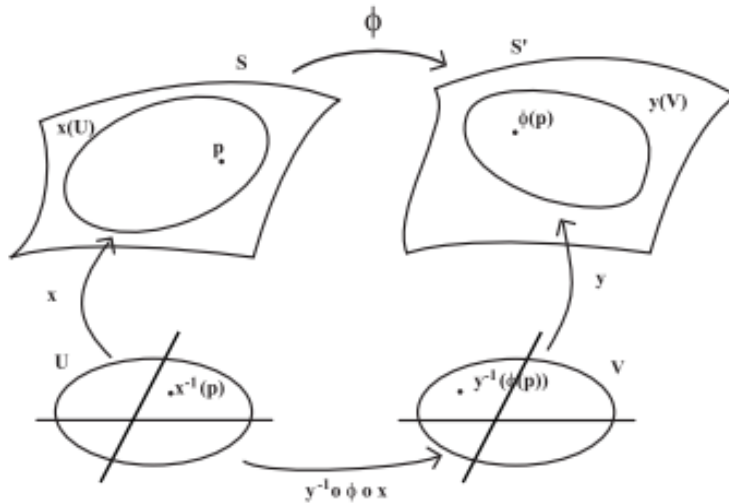


Figura 2.3: Aplicación diferenciable entre superficies

Con las cartas  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  tenemos asociado un cambio de coordenadas  $h = \vec{x}^{-1} \circ \vec{y}$  y que  $\vec{y} = \vec{x} \circ h$ .

Por tanto,  $f \circ \vec{y} = f \circ \vec{x} \circ h$  al menos en un entorno de  $\vec{y}^{-1}(p)$ . Esto quiere decir que  $f \circ \vec{y}$  es la composición de dos aplicaciones diferenciables,  $f \circ \vec{x}$  por hipótesis, y  $h$  por la propiedad anterior que afirma que los cambios de coordenadas son difeomorfismos. Por tanto,  $f \circ \vec{y}$  es diferenciable en  $\vec{y}^{-1}(p)$ .

De una forma similar se demuestra que la definición de la aplicación diferenciable entre superficies es independiente de las cartas elegidas.

Según la definición de aplicación diferenciable, para comprobar si una aplicación es diferenciable primero tenemos que escoger un atlas,  $A$ , de la primera superficie y otro  $A'$  de la segunda. Como la unión de las imágenes de las cartas del primer atlas es toda la primera superficie y para el segundo pasa lo mismo entonces tenemos que comprobar las composiciones:

$$\vec{x}^{-1} \circ \phi \circ \vec{y}$$

Para toda la carta  $\vec{x} \in A$  y para toda la carta  $\vec{y} \in A'$

**Ejemplo 2.** Sea  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $h(x, y, z) = z$ , es decir, la proyección de la esfera  $\pi_z$ , o también, la función altura.

Esta función es diferenciable, para demostrarlo tenemos que comprobar que las composiciones

$h \circ \vec{x}$  son diferenciables para cualquier carta  $\vec{x}$  de un atlas de la esfera.

Únicamente lo comprobaremos para la carta de las coordenadas geográficas.

$$\vec{x} : ]0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow S^2$$

definida por

$$\vec{x}(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

La composición es diferenciable ya que  $(h \circ \vec{x})(u, v) = \sin v$

**Ejemplo 3.** Sea  $\phi : C \rightarrow S^2$ , donde  $C$  es el cilindro  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ . Dado un punto  $p \in C$  consideramos la recta que pasa por el origen y por  $p$ . Esta recta corta a la esfera en dos puntos. Si definimos  $\phi(p)$  como el punto de intersección más próximo a  $p$ . La expresión explícita de  $\phi$  es  $\phi(p) = \frac{p}{\|p\|}$  o

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}(x, y, z), \quad \text{con } (x, y, z) \in C.$$

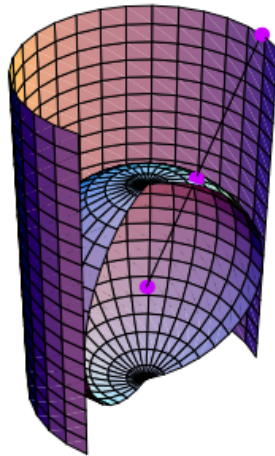


Figura 2.4: Recta que corta la esfera en un cilindro

Esta aplicación es diferenciable. Para poder demostrarlo habría que comprobar que las composiciones  $\vec{y}^{-1} \circ \phi \circ \vec{x}$  son diferenciables para cualquier par de cartas  $\vec{x}$  de un atlas del cilindro y  $\vec{y}$  de un atlas de la esfera.

Solo lo comprobaremos para las cartas

$$\begin{aligned}\vec{x} &: ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow C, \\ \vec{y} &: ]0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow S^2\end{aligned}$$

definidas por

$$\begin{aligned}\vec{x}(u, v) &= (\cos(u), \sin(u), v), \\ \vec{y}(\bar{u}, \bar{v}) &= (\cos(\bar{u})\cos(\bar{v}), \sin(\bar{u})\cos(\bar{v}), \sin(\bar{v})),\end{aligned}$$

con lo que

$$(\vec{y}^{-1} \circ \phi \circ \vec{x})(u, v) = (u, \arcsin(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}})).$$

Esta aplicación es diferenciable porque lo son sus funciones coordenadas.

## PLANO TANGENTE

En la teoría de curvas se exige el poder definir una recta tangente en todos los puntos, o lo que es lo mismo, se exige que la curva sea regular. Para el caso que nos atañe, las superficies, para estudiar su comportamiento local tendremos que exigir que se pueda construir una noción equivalente, el plano tangente.

Como la recta tangente está definida para la primera derivada de la curva parametrizada, el plano tangente estará definido para las primeras derivadas de la superficie parametrizada con respecto a sus parámetros (derivadas parciales). Además, habrá que exigir no solo que estas derivadas sean no nulas, sino que a su vez sean independientes ya que en caso contrario, el subespacio no será bidimensional y por tanto en vez de un plano sería una recta.

**Definición 6.** Sea  $S$  una superficie regular y sea  $p \in S$ . Definimos el espacio tangente de la superficie  $S$  en el punto  $p$  como el conjunto de los vectores velocidad en el punto  $p$  de todas las

curvas parametrizadas en la superficie que pasan por  $p$ . Es decir:

$$T_p S := \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \text{tal que existe } \alpha : I \rightarrow S \text{ curva parametrizada diferenciable}$$

$$\text{donde } 0 \in I, \alpha(0) = p, \alpha'(0) = \vec{w} \}.$$

En la definición anterior no utilizamos cartas. Esta definición geométrica tiene la ventaja de que no hay que demostrar la independencia respecto a la carta escogida y su inconveniente es que hay que demostrar que realmente es un subespacio afín de dimensión 2.

**Propiedad 2.** Si  $\vec{x}$  es una carta de  $S$  tal que  $p = \vec{x}(q)$ , entonces:  $T_p S = d\vec{x}_q(\mathbb{R}^2)$

De esta forma, se tiene  $T_p S$  es un subespacio afín en  $\mathbb{R}^3$  de dimensión 2, que denominamos plano tangente a  $S$  en  $p$ .

### Diferencial de una aplicación entre superficies

**Definición 7.** Sea  $\phi : S \rightarrow S'$  aplicación diferenciable entre dos superficies regulares y sea  $p$  un punto de  $S$ . La diferencial de  $\phi$  en  $p$ , también llamada aplicación tangente, es la aplicación

$$d\phi_p : T_p S \rightarrow T_{\phi(p)} S',$$

definida de la siguiente forma, dado un vector  $\vec{v} \in T_p S$ , sabemos que existe alguna curva  $\alpha : I \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \vec{v}$ . Por tanto, el vector  $d\phi_p(\vec{v})$  es el vector tangente a  $S'$  en el punto  $\phi(p)$  definido por la curva  $\phi \circ \alpha$ , es decir, el vector  $(\phi \circ \alpha)'(0)$ .

Se comprueba que esta definición no depende de la curva escogida, y además que la diferencial es una aplicación lineal.

## PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

En este apartado definiremos un objeto que será central en el estudio de las superficies. Se trata de estudiar como la superficie hereda el producto escalar de  $\mathbb{R}^3$ , lo cual nos permitirá calcular longitudes de curvas y áreas de regiones en la superficie.

**Definición 8.** Sea  $S$  una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $p \in S$ . La primera forma fundamental en  $p$  ( $IFF_p$ ), es la restricción al plano tangente,  $T_p S$ , del producto escalar en  $\mathbb{R}^3$ , es decir:

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por:

$$I_p(\vec{v}, \vec{w}) := \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Como consecuencia del producto escalar, la IFF es una forma bilineal simétrica, no degenerada y definida positiva.

En definitiva, la IFF es simplemente la expresión de cómo la superficie  $S$  hereda el producto escalar de  $\mathbb{R}^3$ . Como veremos más adelante, la IFF nos permite hacer mediciones sobre la superficie sin referirnos al espacio donde se halla dicha superficie.

### Expresión matricial respecto de una carta

Sabemos que si  $\vec{x} : U \rightarrow S$  es una carta de la superficie regular  $S$  tal que  $p = \vec{x}(q)$  para algún punto  $q \in U$ , entonces, los vectores  $\vec{x}_u(q), \vec{x}_v(q)$  son una base de  $T_p S$ .

$$\begin{cases} \vec{v} = a_1 \vec{x}_u(q) + b_1 \vec{x}_v(q), \\ \vec{w} = a_2 \vec{x}_u(q) + b_2 \vec{x}_v(q), \end{cases}$$

con  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} I_p(\vec{v}, \vec{w}) &= a_1 a_2 \langle \vec{x}_u(q), \vec{x}_u(q) \rangle + a_1 b_2 \langle \vec{x}_u(q), \vec{x}_v(q) \rangle \\ &\quad + b_1 a_2 \langle \vec{x}_v(q), \vec{x}_u(q) \rangle + b_1 b_2 \langle \vec{x}_v(q), \vec{x}_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Denominamos los producto de los vectores de la base como sigue:

$$\begin{cases} E(q) = \langle \vec{x}_u(q), \vec{x}_u(q) \rangle, \\ F(q) = \langle \vec{x}_u(q), \vec{x}_v(q) \rangle = \langle \vec{x}_v(q), \vec{x}_u(q) \rangle, \\ G(q) = \langle \vec{x}_v(q), \vec{x}_v(q) \rangle \end{cases}$$

Usando estas notaciones,

$$I_p(\vec{v}, \vec{w}) = a_1 a_2 E(q) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) F(q) + b_1 b_2 G(q).$$

Podemos escribir esta expresión de la siguiente forma matricial:

$$I(\vec{v}, \vec{w}) = (a_1 b_1) \begin{pmatrix} E(q)F(q) \\ F(q)G(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Notar que por su propia definición E y G son siempre positivos ya que

$$E = \|\vec{x}_u\|^2, \quad G = \|\vec{x}_v\|^2$$

ya que ambos vectores,  $\vec{x}_u, \vec{x}_v$  son no nulos.

Por otra parte, el determinante de la matriz de los coeficientes es también positivo:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= EG - F^2 \\ &= \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle - \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle \langle \vec{x}_v, \vec{x}_u \rangle \\ &= \langle \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v, \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \rangle \\ &= \|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|^2 > 0 \end{aligned}$$

ya que  $\vec{x}$  es una carta y la condición de regularidad es equivalente a  $\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \neq 0$ .

Las condiciones  $E > 0$  y  $EG - F^2 > 0$  aseguran que la forma bilineal  $I_p$ , además de ser una forma bilineal simétrica, sea también no degenerada y definida positiva.

**Ejemplo 4.** El cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = r^2\}$  parametrizado por  $\vec{x}(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v)$ .

Entonces  $\vec{x}_u = (-r \sin(u), r \cos(u), 0)$  y  $\vec{x}_v = (0, 0, 1)$ . Luego los coeficientes de su IFF respecto a  $\vec{x}$  son  $E = r^2$ ,  $F = 0$  y  $G = 1$ :

**Ejemplo 5.** El helicoides. Consideremos la hélice parametrizada mediante  $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), au)$ , con  $a > 0$ . Observemos que esta curva se va enrollando alrededor del eje  $z$ , por lo que tiene sentido, para cada punto  $\alpha(u)$ , tomar la recta determinada por este y el punto del eje  $z$  con coordenadas  $(0, 0, au)$ . La unión de dichas rectas es una superficie regular que se denomina el helicoides.

Una parametrización para esta superficie es



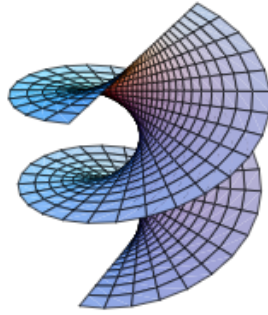


Figura 2.5: Helicoide

$$\vec{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad \text{con } u, v \in \mathbb{R}$$

Puesto que  $\vec{x}_u = (-v \sin(u), v \cos(u), a)$  y  $\vec{x}_v = (\cos u, \sin u, 0)$ , se tiene que los coeficientes de la IFF son  $E = a^2 + v^2$ ,  $F = 0$  y  $G = 1$ .

## LA APLICACIÓN DE GAUSS Y LA APLICACIÓN DE WEINGARTEN

Al igual que estudiamos las propiedades geométricas de las curvas a partir de la variación de su recta tangente, en el caso de las superficies podemos seguir la misma estrategia sustituyendo la recta tangente por el plano tangente, o equivalentemente el vector normal al plano tangente. El primer matemático que concibió el estudio de las superficies sin la ayuda de curvas fue Gauss. Su interés no se limitaba únicamente al estudio de las superficies sino que también intuyó como la aplicación que a cada punto de la superficie le hace corresponder su vector normal, permite deducir propiedades geométricas, topológicas e incluso físicas en cualquier situación donde aparezcan superficies.

**Definición 9.** La aplicación de Gauss de una superficie regular orientable es la aplicación

$$\hat{N} : S \rightarrow S^2$$

que a cada punto  $p \in S$  le asigna el vector normal unitario a la superficie en  $p$ ,  $\hat{N}(p)$ .

**Definición 10.** Dada una parametrización  $\vec{x} : U \rightarrow S$ , el campo vectorial definido por:

$$N^{\vec{x}} = \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|}$$

se llama normal unitario ya que es un vector unitario y en cada punto  $p \in U$  tenemos que  $N^{\vec{x}}(p) \perp T_p S$ , donde  $p = \vec{x}(q)$ .

**Propiedad 3.** Una superficie regular  $S$  es orientable si y solo si existe en ella un campo continuo de normales unitarias, es decir, una aplicación continua  $\hat{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que para todo  $p \in S$ ,  $\hat{N}(p) \perp T_p S$ .

### La aplicación de Weingarten

Hemos definido la aplicación de Gauss como una aplicación diferenciable entre las superficies  $S$  y  $S^2$ ,  $\hat{N} : S \rightarrow S^2$ . La diferencial de esta aplicación (esto es, su primera variación), cambiada de signo, es la aplicación de Weingarten. Sea  $S$  una superficie orientable con su aplicación de Gauss, podemos estudiar la variación de la aplicación de Gauss considerando su diferencial en un punto  $p \in S$ :

$$W_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2 = T_p S$$

que es un endomorfismo autoadjunto del plano tangente.

### CURVATURA NORMAL Y TEOREMA DE MEUSNIER

Antes de que Gauss escribiera su tratado sobre superficies, se estudiaba la curvatura de estas mediante el estudio de la curvaturas de curvas de la propia superficie.

Sea  $p$  un punto de la superficie regular y sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva parametrizada por longitud de arco donde  $\alpha(0) = p$ . Si consideramos la curva  $\alpha$  como una curva de  $\mathbb{R}^3$ , el vector curvatura se define como la derivada del vector tangente,

$$\vec{t}'(s) = \kappa(s)\vec{n}(s).$$

Podemos descomponer este vector en dos partes: una parte que es tangente a la superficie y otra que es ortogonal. Para hacer esto, en cada punto de la curva  $\alpha(s)$ , los vectores

$$\{\vec{t}(s), N(\alpha(s)), \vec{t}(s) \wedge N(\alpha(s))\}$$

forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  y a la vez es una base adaptada a la superficie ya que:

$$\{\vec{t}(s), \vec{t}(s) \wedge N(\alpha(s))\}$$

es una base de  $T_{\alpha(s)}S$ .

Dado que el vector curvatura siempre es ortogonal al propio vector tangente, tenemos que la expresión del vector curvatura respecto a la base anterior es:

$$\vec{\tau}(s) = \langle \vec{t}'(s), N(\alpha(s)) \rangle N(\alpha(s)) + \langle \vec{t}'(s), \vec{t}(s) \wedge N(\alpha(s)) \rangle \vec{t}(s) \wedge N(\alpha(s)).$$

**Definición 11.** El primer término es ortogonal a la superficie y se llama vector de curvatura normal. El factor  $\langle \vec{t}'(s), N(\alpha(s)) \rangle$  se llama curvatura normal de la curva  $\alpha$  y se denota por  $k_n$ . El segundo, es un vector tangente y se llama vector curvatura geodésica. El factor  $\langle \vec{t}'(s), \vec{t}(s) \wedge N(\alpha(s)) \rangle$  se llama curvatura geodésica de la curva  $\alpha$  y se denota por  $k_g$ .

El siguiente teorema, pertenece a los pocos resultados sobre curvatura de superficies demostrados antes de la obra de Gauss y permite hablar de curvaturas normales en una dirección dada, sin hacer referencia a curvas en la superficie.

**Teorema 1. Teorema de Meusnier**

Si dos curvas regulares en una superficie regular  $S$  pasan por un punto  $p$  de dicha superficie y tienen la misma recta tangente en  $p$ , entonces tienen el mismo vector curvatura normal en ese punto.

*Demostración:* Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva regular parametrizada por longitud de arco tal que  $\alpha(0) = p$ . Entonces, el vector curvatura normal es:

$$\begin{aligned} k_n(0)N(p) &= \langle \vec{t}'(0), N(\alpha(0)) \rangle N(\alpha(0)) \\ &= \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \langle \vec{t}(s), N(\alpha(s)) \rangle \right) - \langle \vec{t}(0), \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} N(\alpha(0)) \rangle N(p) \\ &= \langle \vec{t}(0), W_p(\vec{t}(0)) \rangle N(p) \end{aligned}$$

Con esto demostramos que el vector curvatura normal de la curva  $\alpha$  en  $p$  únicamente depende del vector tangente a la curva  $p$ . Además como  $\vec{t}(0)$  aparece dos veces, el resultado será el mismo independientemente del sentido en el que recorramos la curva.  $\square$

## SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

La curvatura normal de una curva, parametrizada por su longitud de arco,  $\alpha$  en una superficie donde  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \vec{v}$  viene dada por:

$$k_n(\vec{v}) = \langle \vec{v}, W_p(\vec{v}) \rangle .$$

Entonces,

**Definición 12.** Definimos la segunda forma fundamental (IIF) de una superficie regular  $S$  en un punto  $p$  como la aplicación:

$$II_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por  $II_p(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{u}, W_p(\vec{v}) \rangle$ .

Como la aplicación de Weingarten es lineal y autoadjunta, es fácil comprobar que la IIF es una forma bilineal simétrica.

Y la forma cuadrática asociada es:

$$II_p(\vec{u}) = \langle \vec{u}, W_p(\vec{u}) \rangle .$$

Gracias a esta definición, podemos expresar la curvatura normal de una curva parametrizada por su longitud de arco como  $k_n(0) = II_p(\vec{t}(0))$  y el vector curvatura normal como  $\vec{k}_n(0) = II_p(\vec{t}(0))N(\alpha(0))$

### Expresión matricial

Si la carta  $\vec{x} : U \rightarrow S$  pertenece a la superficie regular  $S$  tal que  $p = \vec{x}(q)$  para algún  $q \in U$ , entonces los vectores  $\vec{x}_u(q), \vec{x}_v(q)$  son una base de  $T_p S$ .

$$\vec{v} = a_1 \vec{x}_u(q) + b_1 \vec{x}_v(q),$$

$$\vec{w} = a_2 \vec{x}_u(q) + b_2 \vec{x}_v(q),$$

con  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$II_p(\vec{v}, \vec{w}) = a_1 a_2 \langle \vec{x}_u(q), W_p(\vec{x}_u(q)) \rangle$$

$$+ a_1 b_2 \langle \vec{x}_u(q), W_p(\vec{x}_v(q)) \rangle$$

$$+ b_1 a_2 \langle \vec{x}_v(q), W_p(\vec{x}_u(q)) \rangle$$

$$+ b_1 b_2 \langle \vec{x}_v(q), W_p(\vec{x}_v(q)) \rangle$$

Los productos escalares los definimos:

$$e(q) = \langle \vec{x}_u(q), W_p(\vec{x}_u(q)) \rangle,$$

$$f(q) = \langle \vec{x}_u(q), W_p(\vec{x}_v(q)) \rangle = \langle \vec{x}_v(q), W_p(\vec{x}_u(q)) \rangle$$

$$g(q) = \langle \vec{x}_v(q), W_p(\vec{x}_v(q)) \rangle,$$

Con estas notaciones,

$$II_p(\vec{v}, \vec{w}) = a_1 a_2 e(q) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) f(q) + b_1 b_2 g(q)$$

Esta expresión también la podemos escribir de forma matricial:

$$II_p(\vec{v}, \vec{w}) = (a_1 b_1) \begin{pmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Donde las funciones  $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  se llaman coeficientes de la segunda forma fundamental

## CURVATURAS

Recordemos que para resolver un problema geométrico (definir la curvatura de una superficie), queremos estudiar la primera variación de la aplicación de Gauss (la aplicación que a cada punto de la superficie le asocia su vector normal), esto es, calcular su diferencial, la aplicación de Weingarten. Al tratarse de una aplicación lineal autoadjunta, existe una base ortogonal que diagonaliza este endomorfismo del plano tangente.

Es más, los valores propios de la aplicación de Weingarten son el máximo y mínimo de la función  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(\vec{u}) = \langle \vec{u}, W_p(\vec{u}) \rangle = k_n(\vec{u})$

Por tanto podemos afirmar que en cada punto  $p$  de una superficie regular, existe una base ortonormal  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  del plano tangente en  $p$  que diagonaliza la aplicación de Weingarten, y cuyos valores propios son el máximo y el mínimo de la curvatura normal en  $p$ .

**Definición 13.** *Se llaman curvaturas principales de  $S$  en  $p$  a los valores máximo  $k_1(p)$  y mínimo  $k_2(p)$  de la curvatura normal  $k_n$  en  $p$ .*

*Las direcciones principales son los vectores propios  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ .*

Puesto que la diferencial de la aplicación de Gauss (aplicación de Weingarten) es una aplicación lineal, es posible asociar dos funciones que son invariantes algebraicos de la misma (independientes de la base escogida): la traza y el determinante. Así surge la definición de las dos curvaturas esenciales para superficies:

**Definición 14.** *Definimos la curvatura de Gauss de una superficie regular  $S$  en un punto  $p$  como el determinante de la diferencial de la aplicación de Gauss en  $p$ :*

$$K(p) = \det W_p = k_1 k_2.$$

*Análogamente, definimos la curvatura media de una superficie regular  $S$  en un punto  $p$  como un medio de la traza de la diferencial de la aplicación de Gauss en  $p$ :*

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr} W_p = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

## Curvatura de Gauss y media en la base asociada a una carta

Calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media de la anterior forma puede ser muy laborioso, así que a continuación veremos como calcularlas a partir de la primera y la segunda forma fundamental.

Sea  $\vec{x} : U \rightarrow S$  una carta tal que  $\vec{x}(q) = p$  con  $q \in U$ . Para calcular ambas curvaturas en el punto  $p$ , calcularemos primero la matriz  $W_p$  en la base  $\{\vec{x}_u(q), \vec{x}_v(q)\}$  asociada a la carta.

Supongamos que la matriz es:

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{cases} W_p(\vec{x}_u(q)) = W_{11}\vec{x}_u(q) + W_{21}\vec{x}_v(q) \\ W_p(\vec{x}_v(q)) = W_{12}\vec{x}_u(q) + W_{22}\vec{x}_v(q) \end{cases}$$

Si multiplicamos cada una de estas ecuaciones por  $\vec{x}_u(q), \vec{x}_v(q)$  resultará, recordando la definición de los coeficientes de la segunda forma fundamental,

$$\begin{cases} e = \langle \vec{x}_u, W_p(\vec{x}_u) \rangle = W_{11}E + W_{21}F \\ f = \langle \vec{x}_v, W_p(\vec{x}_u) \rangle = W_{11}F + W_{21}G \\ f = \langle \vec{x}_u, W_p(\vec{x}_v) \rangle = W_{12}E + W_{22}F \\ g = \langle \vec{x}_v, W_p(\vec{x}_v) \rangle = W_{12}F + W_{22}G \end{cases}$$

Con estas igualdades, podemos escribir matricialmente:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}.$$

Como la matriz de los coeficientes de la primera forma fundamental es no singular, su determinante es  $EG - F^2 \neq 0$ , podemos aislar la matriz asociada a la aplicación de Weingarten:

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$W_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \quad W_{12} = \frac{fG - gF}{EG - F^2}$$

$$W_{21} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}, \quad W_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2}.$$

Con lo que deducimos directamente que:

$$K(p) = \det(W_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

y

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(W_p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$



## 2.4.2. Geometría intrínseca de superficies: Teorema *egregium* de Gauss

La primera forma fundamental de una superficie nos permite calcular conceptos métricos simples de dicha superficie (longitudes, áreas, ángulos, etc). El aspecto más importante es que tales cálculos pueden efectuarse desde dentro de la propia superficie (sin 'salir' de la superficie) una vez conocida la primera forma fundamental. Por esta razón, se dice que estos conceptos son intrínsecos de la superficie. [sec:Referencias]<sub>[11]</sub>

*Como veremos a continuación, muchas propiedades locales importantes pueden expresarse solamente en términos de la primera forma fundamental. El estudio de estas propiedades se denomina geometría intrínseca de la superficie.*

*En este capítulo empezaremos definiendo la noción de isometría, la cual confiere precisión a la idea de que dos superficies tengan la misma forma fundamental. Así podemos considerar que dos superficies regulares son equivalentes si son isométricas, esto es si existe un difeomorfismo entre ellas que además deberá respetar su estructura de espacio métrico (conservar la distancia entre puntos). A continuación, demostraremos la expresión de la curvatura de Gauss en función, exclusivamente, de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas. Esto significa que la curvatura de Gauss es un concepto intrínseco, en contra de lo que cabría pensar si consideramos que ha sido definida usando la segunda forma fundamental.*

### SUPERFICIES ISOMÉTRICAS

**Definición 15.** Sean dos superficies regulares  $S_1$  y  $S_2$  y  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  una aplicación diferenciable. Diremos que  $\phi$  es una isometría local si su diferencial satisface:

$$(d\phi)_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$$

$$\|(d\phi)_p(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$$

para todo  $p \in S_1$  y todo  $\vec{v} \in T_p S_1$ . Entonces diremos que las superficies  $S_1$  y  $S_2$  son localmente isométricas.

**Nota 1.** Una isometría es una isometría local que además es un difeomorfismo, en este caso, las superficies se dice que son isométricas.

**Lema 1.** Toda isometría local es un difeomorfismo local, esto quiere decir, que para todo  $p \in S_1$  existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $S_1$  tal que  $\phi|_U : U \rightarrow \phi(U)$  es un difeomorfismo.

*Demostración:*

Sea  $\phi$  una isometría local. Por definición tenemos que en todo punto  $p \in S_1$  la diferencial de la isometría local es una aplicación inyectiva. Por el teorema de la función inversa,  $\phi$  es un difeomorfismo local.  $\square$

**Lema 2.** Sea  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  aplicación diferenciable. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1.  $\phi$  es una isometría local, esto es  $d\phi$  conserva la norma.
2. Para todo  $p \in S_1$  y todo  $\vec{v}, \vec{w}$  par de vectores de  $T_p S_1$  se verifica que:

$$\langle (d\phi)_p(\vec{v}), (d\phi)_p(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

es decir  $d\phi$  mantiene el producto escalar.

3. Para todo  $p \in S_1$  existe una base  $\{\vec{v}, \vec{w}\}$  de  $T_p S_1$  que verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle (d\phi)_p(\vec{v}), (d\phi)_p(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle, \\ \langle (d\phi)_p(\vec{v}), (d\phi)_p(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \\ \langle (d\phi)_p(\vec{w}), (d\phi)_p(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \end{array} \right.$$

*Demostración:*

La equivalencia entre las dos primeras condiciones se basa en aplicar la identidad que relaciona una forma bilineal con la forma cuadrática asociada:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2).$$

Y la equivalencia entre la segunda y la tercera condición se consigue aplicando linealidad.

**Lema 3.** Sea  $\vec{x} : U \rightarrow S_1$ , carta de  $S_1$  y sea  $\vec{y} : V \rightarrow S_2$  carta de  $S_2$ , la aplicación:

$$\phi = \vec{y} \circ \vec{x}^{-1} : \vec{x}(U \cap V) \rightarrow \vec{y}(U \cap V)$$

es una isometría únicamente si:

$$E^{\vec{x}} = E^{\vec{y}}, \quad F^{\vec{x}} = F^{\vec{y}}, \quad G^{\vec{x}} = G^{\vec{y}}.$$

*Demostración:*

Como  $\phi$  es un difeomorfismo, entonces, es lo mismo decir que es una isometría que una isometría local. Notemos que:

$$(d\phi)_p(\vec{x}_u(q)) = \vec{y}_u(q), \quad (d\phi)_p(\vec{x}_v(q)) = \vec{y}_v(q).$$

para  $q \in U \cap V$  y  $\vec{x}(q) = p \in \vec{x}(U)$ .

Por tanto si  $\phi$  es una isometría local, entonces:

$$E^{\vec{y}} = \|\vec{y}_u\|^2 = \|(d\phi)_p(\vec{x}_u)\|^2 = \|\vec{x}_u\|^2 = E^{\vec{x}}$$

De manera análoga obtenemos  $F^{\vec{x}} = F^{\vec{y}}, G^{\vec{x}} = G^{\vec{y}}$ . □

El recíproco es consecuencia del lema anterior.

**Ejemplo 6.** Consideremos las superficies  $S_1 = \{(x, 0, z)/x, z \in \mathbb{R}\}$  y  $S_2$  el cilindro definido por  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  con las cartas:

$$\vec{x}(u, v) = (u, 0, v),$$

$$\vec{y}(u, v) = (\sin(u), 1 - \cos(u), v).$$

Ambas definidas en  $U = ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}$ .

Por el lema anterior, la aplicación  $\vec{y} \circ \vec{x}^{-1}$  es una isometría.

Esta aplicación  $\vec{y} \circ \vec{x}^{-1} : \vec{x}(U) \rightarrow \vec{y}(U)$  es la aplicación:

$$(x, 0, z) \rightarrow (\sin(x), 1 - \cos(x), z),$$

pero restringida a los puntos del plano con la primera coordenada  $x \in ]-\pi, \pi[$ .

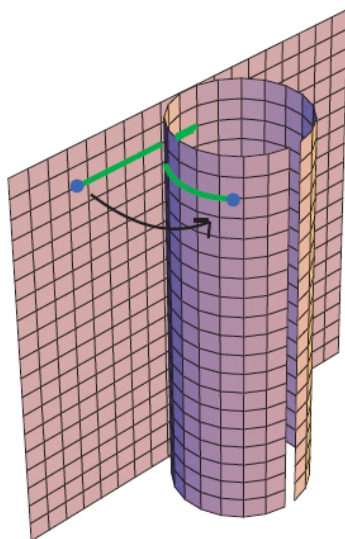


Figura 2.6: Plano a cilindro

Si consideramos la extensión de la aplicación anterior a todo el plano, la aplicación  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  definida por  $\phi(x, 0, z) = (\sin(x), 1 - \cos(x), z)$ , donde es fácil comprobar que  $\phi$  es una isometría local pero al no ser una biyección no es una isometría.

Para acabar con el ejemplo. remarcar que tanto el plano y el cilindro tienen la misma curvatura de Gauss, es nula. Mientras que la curvatura media es distinta. La curvatura media del plano es de cero, pero la del cilindro es  $\frac{1}{2}$ .

**Ejemplo 7.** El catenoide y la helicoides son superficies localmente isométricas.

Consideremos el catenoide como la superficie de revolución generada por la curva catenaria. Y el helicoides la superficie reglada a partir de una hélice circular recta. Estas dos superficies son localmente isométricas, es decir, existe una isometría local entre ellas.

Para esto, calcularemos la primera forma fundamental para estas superficies empezando por la catenoide:

**Catenoide:** Una parametrización viene dada por  $\vec{x}(u, v) = (\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), av)$  con  $0 < u < 2\pi$  y  $v \in ]-1, 1[$ ,

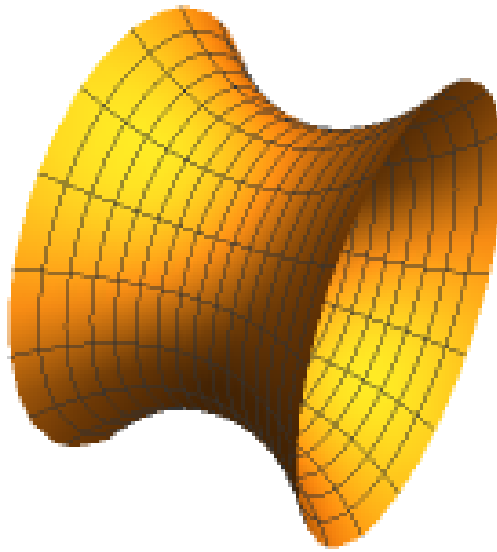


Figura 2.7: Catenoide

*Puesto que:*

$$\vec{x}_u = (-a \cosh(v) \sin(u), a \cosh(v) \cos(u), 0), \quad \vec{x}_v = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), a),$$

*Los coeficientes de la IFF del catenoide son:*

$$E = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle = a^2 \cosh^2(v)$$

$$F = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle = 0$$

$$G = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle = a^2 \cosh^2(v)$$

*Por tanto,*

$$E = a^2 \cosh^2(v) = G, \quad F = 0$$

**Helicoide:** Una parametrización viene dada por  $\vec{x}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u})$  con  $0 < \bar{u} < 2\pi$  y  $\bar{v} \in ]-1, 1[$ .

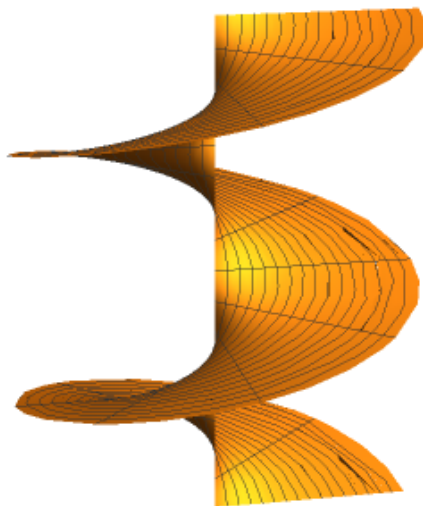


Figura 2.8: Helicoide

*Efectuamos el siguiente cambio de parámetros:*

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \sinh(v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -1 < v < 1,$$

*este cambio de parámetros, es posible debido a que la aplicación es claramente inyectiva y el jacobiano*

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = a \cosh(v)$$

*nunca se anula. Por tanto tenemos una nueva parametrización de la helicoide:*

$$\vec{x}(u, v) = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), au),$$

con respecto a la cual, los coeficientes de la IFF son:

$$\vec{x}_u = (-a \sinh(v) \sin(u), a \sinh(v) \cos(u), a), \quad \vec{x}_v = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), 0),$$

$$\bar{E} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle = a^2 \cosh^2(v)$$

$$\bar{F} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle = 0$$

$$\bar{G} = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle = a^2 \cosh^2(v)$$

Por tanto,

$$\bar{E} = a^2 \cosh^2(v), \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = a^2 \cosh^2(v).$$

Como  $\bar{E} = E$ ,  $\bar{F} = F$ ,  $\bar{G} = G$ , concluimos que el catenoide y la helicoides son localmente isométricas.

Por tanto tendremos una transformación isométrica entre una porción del catenoide en otra del helicoides. Para esta deformación isométrica y continua entre el catenoide y helicoides, una parametrización viene dada por estas ecuaciones:

$$x(u, v) = \cos \theta \sinh v \sin u + \sin \theta \cosh v \cos u$$

$$y(u, v) = -\cos \theta \sinh v \cos u + \sin \theta \cosh v \sin u$$

$$z(u, v) = u \cos \theta + v \sin \theta$$

donde la figura resultante depende de la deformación del ángulo  $\theta$ , este varia entre  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

A continuación se muestra una imagen formada por un conjunto de otras sesenta imágenes, la cual muestra como se transforma la catenoide en helicoides. para poder ver esta transformación se necesita el lector de PDF Adobe Acrobat Reader DC.

Figura 2.9: Catenoide-Helicoide



Dado que en la imagen anterior solo se puede observar la transformación con un lector específico, mostramos un conjunto de imágenes hechas en Wolfram Mathematica de la deformación de la catenoide en la helicoide.

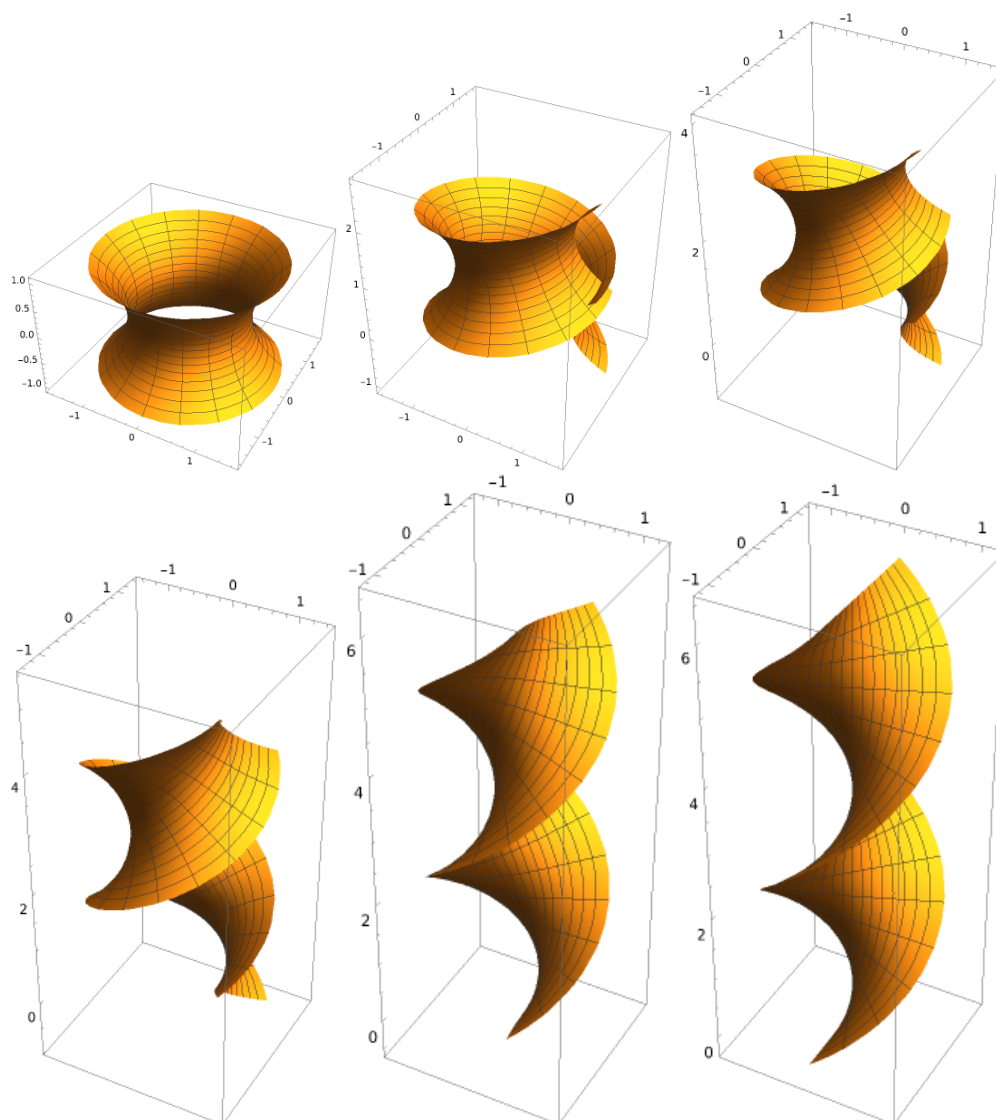


Figura 2.10: Catenoide-Helicoide conjunto de imágenes

Como hemos visto el catenoide y el helicoide son localmente isométricos, pero no son isométricos, es decir, no existe un difeomorfismo de todo el catenoide en todo el helicoide. De hecho, ambas superficies ni siquiera son homeomorfas.

## TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

*El teorema egregium de Gauss es uno de los resultados más importantes sobre superficies y es un resultado fundamental de la geometría diferencial el cual fue demostrado por Carl Friedrich Gauss y lo expuso, por primera vez, en sus Disquisitiones generales circa superficies curvas de 1828. Dice simplemente que la función curvatura de Gauss es una noción intrínseca. Es decir, que el producto de las curvaturas principales, que están definidas a partir del vector normal de la superficie, depende únicamente de la primera forma fundamental, de como se miden las curvas sobre la superficie.*<sup>[9]</sup>

# DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA

## SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. 8. OCTOB. 1827

---

COMMENTATIONES SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARUM  
GOTTINGENSIS RECENTIORES. VOL. VI. GOTTINGAE MDCCCXXVIII

---

GOTTINGAE  
TYPIS DIETERICHIANIS  
MDCCCXXVIII

Figura 2.11: *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*

A continuación, muestro un pequeño fragmento del artículo *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas de Gauss*, donde Gauss enuncia por primera vez el teorema egregium en el capítulo 12 página 38.

C. F. GAUSS

*Disquisitiones Generales  
circa  
Superficies Curvas*

tas  $x, y, z$  tamquam functiones indeterminatarum  $p, q$  exhibeant, sed sufficere expressionem generalem pro magnitudine cuiusvis elementi linearis. Progrediamur ad aliquot applicationes huius gravissimi theorematis.

Supponamus, superficiem nostram curvam explicari posse in aliam superficiem, curvam seu planam, ita ut cuivis puncto prioris superficiei per coordinatas  $x, y, z$  determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint  $x', y', z'$ . Manifesto itaque  $x', y', z'$  quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum  $p, q$ , unde pro elemento  $\sqrt{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}$  prodibit expressio talis

$$\sqrt{(E'dp^2 + 2F'dp \cdot dq + G'dq^2)}$$

denotantibus etiam  $E', F', G'$  functiones ipsarum  $p, q$ . At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in utraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

**THEOREMA.** *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Manifesto quoque *quaevis pars finita superficiei curvae post explicationem in aliam superficiem eandem curvaturam integram retinebit.*

Casum specialem, ad quem geometrae hactenus investigationes suas restrinxerunt, sistunt superficies in planum explicabiles. Theoria nostra sponte docet, talium superficierum mensuram curvaturae in quovis puncto fieri  $= 0$ , quocirca, si earum indoles secundum modum tertium exprimitur, ubique erit

$$\frac{ddz}{dx^2} \cdot \frac{ddz}{dy^2} - \left( \frac{ddz}{dx \cdot dy} \right)^2 = 0$$

quod criterium, dudum quidem notum, plerumque nostro saltem iudicio haud eo rigore qui desiderari posset demonstratur.

Figura 2.12: Fragmento de *Disquisitiones*

**"THEOREMA.** Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet. Manifesto quoque quaevis pars finita superficiei curvae post explicationem in aliam superficiem eandem curvaturam integram retinebit."

La demostración del teorema egregium de Gauss se puede llevar a cabo de distintas maneras, en nuestro caso necesitamos de unos cálculos previos por lo que primero introduciremos los símbolos de Christoffel.

### Símbolos de Christoffel

Dado  $\vec{x} : U \rightarrow S$  y un punto  $p \in S$  de forma que  $\vec{x}(q) = p$  con  $q \in U$  y sabiendo que la base formada por las parciales, es una base de  $T_pS$ , y a esto le añadimos el vector normal, obtendremos una base orientada de  $\mathbb{R}^3$ . Esto significa para cada  $p = \vec{x}(q)$  tenemos la base  $\{\vec{x}_u(q), \vec{x}_v(q), N(q)\}$ .

Veamos la expresión de sus derivadas respecto de la misma base:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_{uu}(q) = \Gamma_{uu}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{uu}^v \vec{x}_v(q) + e(q)N(q), \\ \vec{x}_{uv}(q) = \Gamma_{uv}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{uv}^v \vec{x}_v(q) + f(q)N(q), \\ \vec{x}_{vu}(q) = \Gamma_{vu}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{vu}^v \vec{x}_v(q) + f(q)N(q), \\ \vec{x}_{vv}(q) = \Gamma_{vv}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{vv}^v \vec{x}_v(q) + e(q)N(q), \\ N_u(q) = A\vec{x}_u(q) + B\vec{x}_v(q), \\ N_v(q) = C\vec{x}_u(q) + D\vec{x}_v(q). \end{array} \right.$$

A continuación, hemos de calcular los coeficientes  $\Gamma$  que son realmente nuevos

Para esto, empezamos multiplicando escalarmente la primera ecuación por la derivada parcial  $\vec{x}_u(q)$ ,

$$\langle \vec{x}_{uu}(q), \vec{x}_u(q) \rangle = \Gamma_{uu}^u E(q) + \Gamma_{uu}^v F(q)$$

Entonces,

$$\langle \vec{x}_{uu}(q), \vec{x}_u(q) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (\langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle)(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}(q) = \frac{1}{2} E_u(q)$$

Con lo que obtenemos:

$$\frac{1}{2} E_u(q) = \Gamma_{uu}^u E(q) + \Gamma_{uu}^v F(q) \quad (2.1)$$

Si ahora, multiplicamos la primera ecuación por la otra derivada parcial:

$$\langle \vec{x}_{uu}(q), \vec{x}_v(q) \rangle = \Gamma_{uu}^u F(q) + \Gamma_{uu}^v G(q)$$

Entonces,

$$\langle \vec{x}_{uu}(q), \vec{x}_v(q) \rangle = \frac{\partial}{\partial u} (\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle)(q) - \langle \vec{x}_u, \vec{x}_{uv} \rangle = F_u(q) - \frac{1}{2} E_v(q)$$

Con lo que obtenemos:

$$F_u(q) - \frac{1}{2} E_v(q) = \Gamma_{uu}^u F(q) + \Gamma_{uu}^v G(q) \quad (2.2)$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) forman un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, los símbolos de Christoffel. Es un sistema con una única solución, ya que su discriminante  $(EG - F^2)$  es distinto de cero, y la solución solo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas.

Haciendo lo mismo con el resto de ecuaciones podemos obtener el resto de símbolos de Christoffel, y los tres sistemas de ecuaciones son:

$$\begin{cases} \Gamma_{uu}^u E(q) + \Gamma_{uu}^v F(q) = \frac{1}{2} E_u(q) \\ \Gamma_{uu}^u F(q) + \Gamma_{uu}^v G(q) = F_u(q) - \frac{1}{2} E_v(q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{uv}^u E(q) + \Gamma_{uv}^v F(q) = \frac{1}{2} E_v(q) \\ \Gamma_{uv}^u F(q) + \Gamma_{uv}^v G(q) = \frac{1}{2} G_u(q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{vv}^u E(q) + \Gamma_{vv}^v F(q) = F_v(q) - \frac{1}{2} G_u(q) \\ \Gamma_{vv}^u F(q) + \Gamma_{vv}^v G(q) = \frac{1}{2} G_v(q) \end{cases}$$

**Ejemplo 8.** Consideremos el paraboloido hiperbólico  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ .

Usando la carta:

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

Los coeficientes de la IFF son:

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2,$$

con lo que tenemos los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} \Gamma_{uu}^u (1 + v^2) + \Gamma_{uu}^v uv = 0 \\ \Gamma_{uu}^u uv + \Gamma_{uu}^v (1 + u^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{uv}^u (1 + v^2) + \Gamma_{uv}^v uv = v \\ \Gamma_{uv}^u uv + \Gamma_{uv}^v (1 + u^2) = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{vv}^u (1 + v^2) + \Gamma_{vv}^v uv = 0 \\ \Gamma_{vv}^u uv + \Gamma_{vv}^v (1 + u^2) = 0 \end{cases}$$

Por tanto los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uu}^v = 0; \quad \Gamma_{uv}^u = \frac{v}{1 + u^2 + v^2}; \quad \Gamma_{uv}^v = \frac{u}{1 + u^2 + v^2}; \quad \Gamma_{vv}^u = \Gamma_{vv}^v = 0.$$

### Teorema egregium de Gauss

Antes de enunciar el teorema y su teorema , podemos reescribir las ecuaciones *iniciales* con los coeficientes ya calculados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_{uu}(q) = \Gamma_{uu}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{uu}^v \vec{x}_v(q) + e(q)N(q), \\ \vec{x}_{uv}(q) = \Gamma_{uv}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{uv}^v \vec{x}_v(q) + f(q)N(q), \\ \vec{x}_{vu}(q) = \Gamma_{vu}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{vu}^v \vec{x}_v(q) + f(q)N(q), \\ \vec{x}_{vv}(q) = \Gamma_{vv}^u \vec{x}_u(q) + \Gamma_{vv}^v \vec{x}_v(q) + e(q)N(q), \\ N_u(q) = -W_{11}\vec{x}_u(q) - W_{21}\vec{x}_v(q), \\ N_v(q) = -W_{12}\vec{x}_u(q) - w_{22}\vec{x}_v(q). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

### Teorema 2. Teorema egregium de Gauss

La curvatura de Gauss de una superficie regular es invariante por isometrías locales. Es decir, si  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  es una isometría local, entonces  $K_1(p) = K_2(\phi(p))$ , para todo  $p \in S_1$ , donde  $K_1$  y  $K_2$  representan las curvaturas de Gauss de  $S_1$  y  $S_2$ .

*Demostración:*

Si dos superficies son isométricas, para cada punto  $p$  de la primera superficie, encontramos una carta,  $\vec{x}$ , tal que la composición  $\vec{y} = \phi \circ \vec{x}$  sea un carta de la segunda superficie en un entorno de  $\phi(p)$ , dado que  $\phi$  es una isometría local.

El lema 6 nos asegura que los coeficientes de la primera forma fundamental son los mismos en ambas cartas en el abierto donde están definidos. Por lo tanto si ahora demostramos que la curvatura de Gauss se puede calcular a partir de la IFF y de las derivadas de esta, entonces tendremos que la curvatura de Gauss es la misma en  $\phi(p)$  y en  $p$ .

Para la demostración, calcularemos  $(\vec{x}_{uu})_v - (\vec{x}_{uv})_u$  gracias a las ecuaciones (2.3). Esta es nula por el teorema de las derivadas cruzadas, operamos y obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = (\vec{x}_{uu})_v - (\vec{x}_{uv})_u &= (\Gamma_{uu}^u \vec{x}_u + \Gamma_{uu}^v \vec{x}_v + eN)_v - (\Gamma_{uv}^u \vec{x}_u + \Gamma_{uv}^v \vec{x}_v + fN)_v = \\ &= \Gamma_{uu}^u \vec{x}_{uv} + \Gamma_{uu}^v \vec{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{uu}^u)_v \vec{x}_u + (\Gamma_{uu}^v)_v \vec{x}_v + e_v N - \\ &= \Gamma_{uv}^u \vec{x}_{uu} + \Gamma_{uv}^v \vec{x}_{uv} - fN_u - (\Gamma_{uv}^u)_u \vec{x}_u + (\Gamma_{uv}^v)_u \vec{x}_v - f_u N \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los vectores por sus expresiones en la base  $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v, N\}$ , y de este resultado solo consideramos aquellos con el coeficiente  $\vec{x}_v$  con lo que obtenemos:

$$\Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - eW_{22} + (\Gamma_{uu}^v)_v = \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v - fW_{21} + (\Gamma_{uv}^v)_u$$

Ya solo queda cambiar  $W_{22}$  y  $W_{21}$  por sus valores correspondientes en funcion de la IFF y la 2FF, de manera que:

$$(\Gamma_{uv}^v)_u - (\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Por tanto como sabemos que  $E \neq 0$ , tenemos:

$$K = -\frac{1}{E} ((\Gamma_{uv}^v)_u - (\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v), \quad (2.4)$$

es decir, la curvatura de Gauss, solo depende de la IFF y sus derivadas. □

**Ejemplo 9.** Continuamos a partir ejemplo 11 del paraboloides hiperbólico.

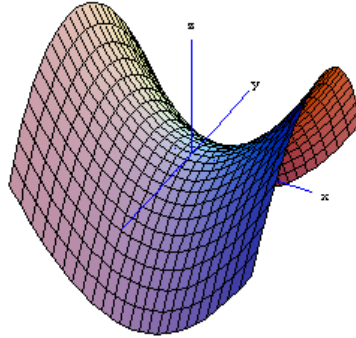


Figura 2.13: Paraboloides hiperbólico

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = xy\}.$$

Los simbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uu}^v = 0; \quad \Gamma_{uv}^u = \frac{v}{1 + u^2 + v^2}; \quad \Gamma_{uv}^v = \frac{u}{1 + u^2 + v^2}; \quad \Gamma_{vv}^u = \Gamma_{vv}^v = 0.$$



Calculamos la curvatura de Gauss con la fórmula 2.4.

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{1+v^2} \left( \left( \frac{u}{1+u^2+v^2} \right)_u + \left( \frac{u}{1+u^2+v^2} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{1+v^2} \left( \frac{1}{1+u^2+v^2} - \frac{2u^2}{(1+u^2+v^2)^2} + \frac{u^2}{(1+u^2+v^2)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{1+v^2} \frac{1+u^2+v^2-2u^2+u^2}{(1+u^2+v^2)^2} = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \end{aligned}$$

**Ejemplo 10.** Como ejemplo de aplicación de este teorema, tenemos que la esfera y el plano no son superficies localmente isométricas. En efecto, la esfera tiene curvatura de Gauss positiva mientras que la del plano es nula. Por tanto no puede existir ninguna aplicación entre estas superficies que conserve la curvatura de Gauss.

Este ejemplo tiene una consecuencia muy importante la cual parece ser que llevo a Gauss a dirigir un equipo de científicos a cartografiar el reino alemán de Hannover. Esto le llevo a plantearse el problema de como representar la superficie terrestre en un mapa.

A continuación veremos con el siguiente ejemplo que el recíproco del teorema egregium de Gauss no es cierto en general.

**Ejemplo 11.** Dadas dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ , con curvaturas de Gauss  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente. Si tenemos una función:

$$\begin{aligned} f : S_1 &\rightarrow S_2 \\ K_2(f(p)) &= K_1(p) \quad \forall p \in S_1 \end{aligned}$$

entonces no se sigue que  $f$  sea una isometría. Para ilustrarlo utilizaremos el siguiente ejemplo:

Consideremos las superficies con estas parametrizaciones:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, \log u) \\ \bar{x}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, v) \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de  $x(u, v)$  son:

$$x_u = (\cos v, \sin v, \frac{1}{u})$$

$$x_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

Y, por tanto los coeficientes de la IFF serán:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle = 0, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle = u^2$$

Calculemos a continuación, la normal y los coeficientes de la segunda forma fundamental,

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos v, \sin v, u)$$

$$e = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Por lo que obtenemos que:

$$K_1 = \frac{eg - f^2}{EG - G^2} = \frac{1}{(1+u^2)^3}$$

Ahora calculamos lo mismo para  $\bar{x}(u, v)$

$$\bar{x}_u = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$\bar{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

Los coeficientes de la IFF son:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + 1$$

Calculemos ahora la normal y los coeficientes de la segunda forma fundamental,

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v, -\cos v, u)$$

$$e = 0, \quad f = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}, \quad g = 0$$

Por lo que obtenemos que:

$$K_2 = \frac{eg - f^2}{EG - G^2} = \frac{1}{(1+u^2)^3}$$

Con esto, vemos que tanto  $S_1$  como  $S_2$  tienen la misma curvatura de Gauss, sin embargo, los coeficientes de la primera forma fundamental no son iguales, por tanto no pueden ser isométricas entre ellas.

### 2.4.3. Consecuencias y aplicaciones

Hasta este momento en este proyecto hemos estudiado algunos conceptos de la geometría de superficies antes de profundizar en el teorema egregium de Gauss. Carl Friedrich Gauss decidió llamarlo de esta forma (egregium) porque la definición de la curvatura de Gauss usa directamente la posición de la superficie en  $\mathbb{R}^3$  y es sorprendente que dicho resultado no dependa de cómo la superficie esté introducida en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

Algunas superficies como el plano tienen curvatura cero, mientras que otras como la esfera tienen dos curvaturas positivas por tanto, al multiplicarlas, la curvatura total es positiva. Sin embargo, si vemos la curvatura de un toro, la parte exterior es positiva al igual que en la esfera, pero la parte interior tiene curvatura negativa.

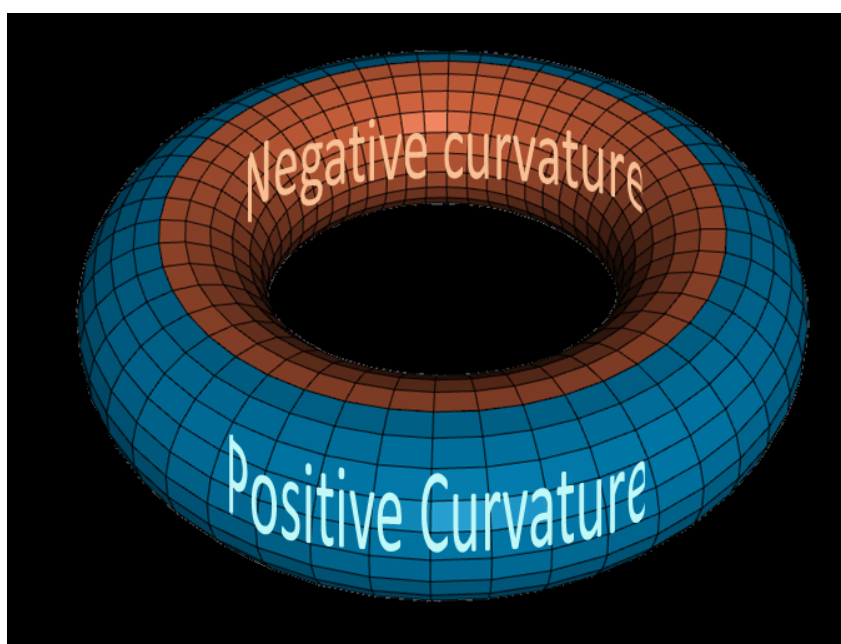


Figura 2.14: Curvatura del toro

Así pues, lo que Gauss nos dice con su teorema, es que estas curvaturas son intrínsecas a la superficie. Esto quiere decir que si tengo una superficie con cierta curvatura gaussiana, no importa como lo estire, gire o mueva, la curvatura permanecerá igual.

Si ahora pusiéramos una hormiga en el cilindro, los dos caminos extremos disponibles para ella son el camino curvo en forma de círculo y el camino plano en línea recta. Pero como la trayectoria plana tiene curvatura cero, cuando se multiplican ambas curvaturas se obtiene cero, por tanto se podría decir que un cilindro es plano pues tiene curvatura gaussiana cero.

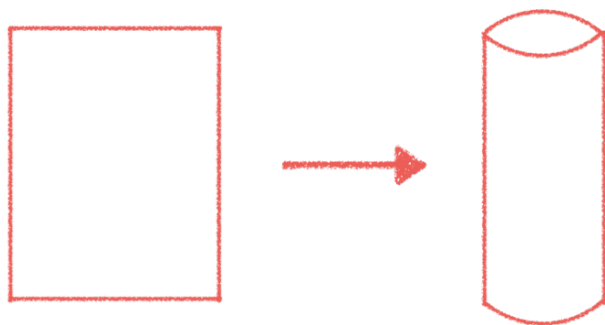


Figura 2.15: Plano a cilindro

*En cambio, si la hormiga viviera en una bola, no habría caminos planos disponibles, cada camino se curva en la misma cantidad por lo que la curvatura gaussiana es positiva. Entonces las esferas son curvas mientras los cilindros son planos.*

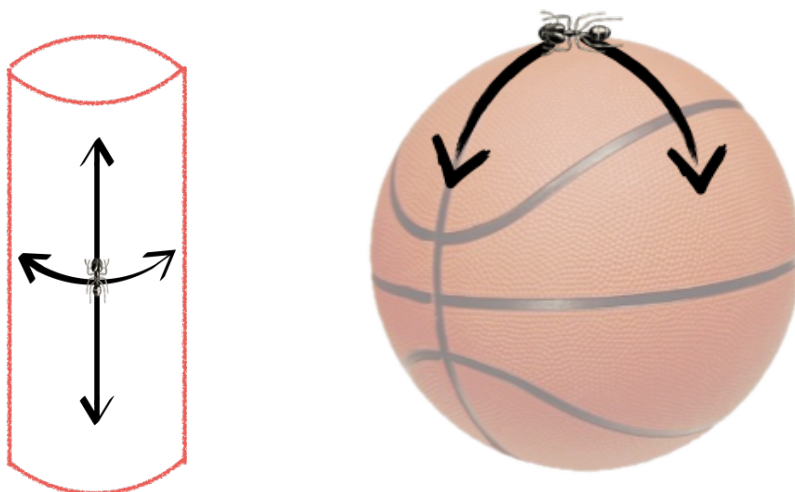


Figura 2.16: Hormiga en cilindro y esfera

*El teorema egregium, nos dice que la hormiga viviendo en la superficie puede determinar la curvatura sin poner un pie fuera de la superficie, únicamente midiendo distancias y haciendo algunos cálculos. Esto es lo que nos permite determinar si nuestro universo es curvo sin tener que dar un paso fuera del universo (por lo que sabemos, es plano).*

*A continuación, veremos aplicaciones y consecuencias que ha tenido el teorema de Gauss.*

### ***Teorema egregium en mapas***

*Gracias al teorema egregium de Gauss, obtenemos una condición necesaria para la existencia de una isometría entre superficies. La curvatura de Gauss tiene que ser la misma para los puntos correspondientes en ambas superficies si existe dicha isometría.*

**Proposición 1.** *Todo mapa de cualquier región de la Tierra, debe distorsionar las distancias.*

#### *Demostración*

*Si confeccionamos un mapa de una parte de la superficie de la Tierra en el que no se distorsionen las distancias, sería un difeomorfismo de una esfera (la Tierra) en un plano (el mapa) donde todas las distancias serían multiplicadas por un mismo valor constante ( $C$ ).*

*Por tanto, podremos asumir que dicho plano pasa por el origen. Entonces, si hacemos una composición de este mapa con el mapa del plano en sí mismo, donde se toma un punto con vector posición  $r$  a otro punto con vector posición  $C^{-1}r$ , obtendríamos una isometría entre esta región de la esfera y alguna región del plano. El teorema egregium implica que ambas regiones tendrían la misma curvatura de Gauss.*

*Como hemos visto anteriormente, el plano y la esfera no comparten la misma curvatura de Gauss, por tanto no puede existir dicha isometría implicando así que todo mapa de cualquier región de la tierra debe distorsionar las distancias.*

*Al observar un globo terráqueo, se pueden observar diferencias entre la forma de dibujar los continentes y los océanos en el globo y en un planisferio. Para poder dibujar un mapa, los cartógrafos deben transformar una esfera en un plano y como hemos visto anteriormente, esto no es posible. Para poder hacerlo posible, deben deformar ciertas porciones de la superficie. Por ejemplo, en los planisferios, las tierras más alejadas al ecuador se ven agrandadas. Para poder solucionar este tema, se creó un sistema de proyecciones cartográficas. Según qué sector de la Tierra se quiera representar, se usa la proyección más apropiada.*

*Para los planisferios se usa la proyección cilíndrica, ya que mediante un cilindro se envuelve a la Tierra manteniendo contacto con el ecuador.<sup>[12]</sup>*

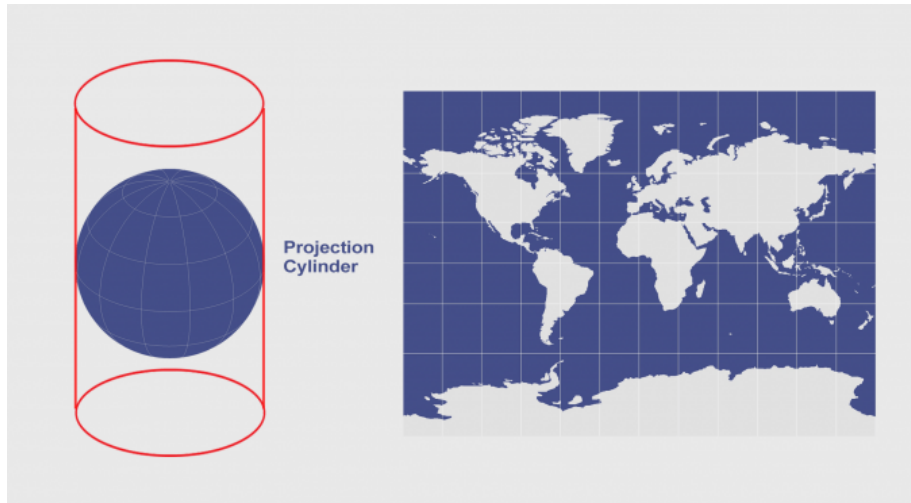


Figura 2.17: *Proyección cilíndrica*

*Para dibujar países que se encuentran cercanos a los polos, como es el caso de Argentina, se usa la proyección cónica.*

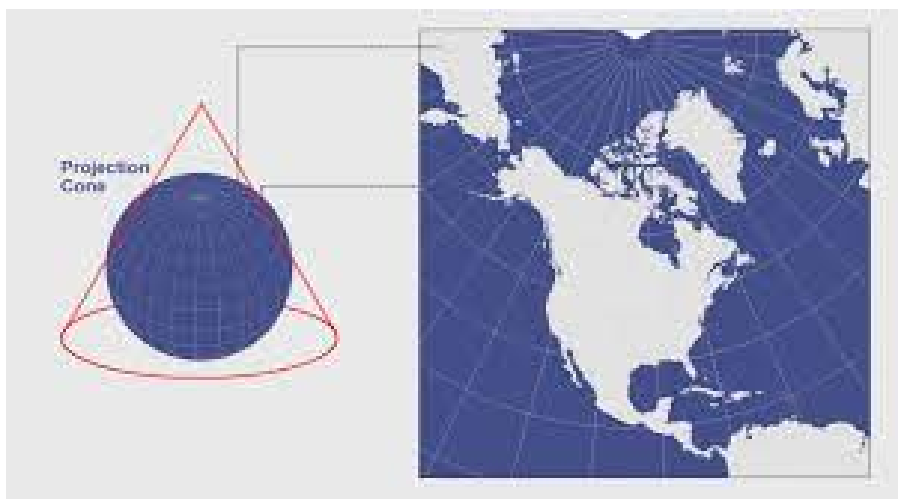


Figura 2.18: *Proyección cónica*

*Cuando se quiere dibujar un país pequeño, se usa la proyección plana, mediante la cual se coloca un plano en forma tangencial.*

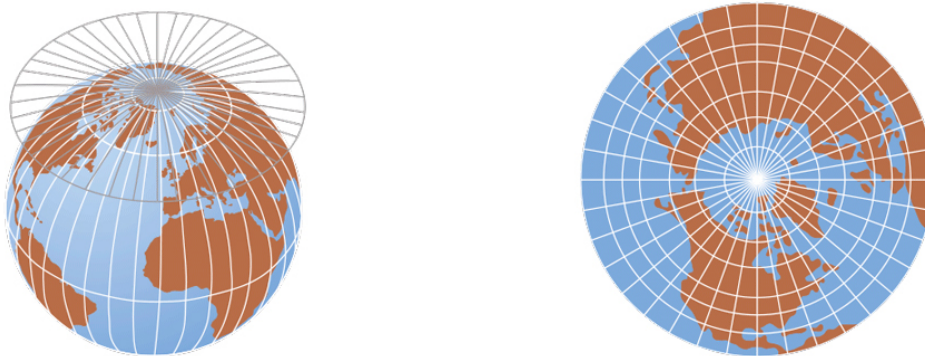


Figura 2.19: *Proyección plana*

*Las proyecciones que son más utilizadas hoy en día son la proyección de Mercator, la de Peters y la de Gauss-Krüger.*

*La proyección Mercator es muy usada en planisferios. En ella se observan los meridianos como líneas rectas y paralelas entre sí. Los paralelos se van separando a medida que se acercan a los polos. Las tierras ecuatoriales se encuentran bien representadas. En cambio, las tierras de mayor latitud se expanden mucho. Por ejemplo, Groenlandia se ve tan grande como América del Sur.*

*La proyección Peters o proyección de mayo, mejora la distorsión de las superficies de las tierras polares, ya que los meridianos conservan su forma curva. Sin embargo, la forma de los continentes no es fiel.*

*La proyección Gauss-Krüger es empleada por el Instituto Geográfico Nacional para la confección de todos los mapas de Argentina y divide al país en 7 franjas meridianas numeradas de Oeste a Este. Cada franja de la grilla Gauss-Krüger mide 3 grados de ancho (longitud) por 34 grados de largo (latitud) y tiene como propio origen la intersección del Polo Sur con el meridiano central de cada franja.*

*El mapa comúnmente utilizado hoy en día es el creado en 1569 por Gerardus Mercator, el cual fue creado mediante una proyección cartográfica llamada la proyección de Mercator. Esta es un tipo de proyección cilíndrica de forma tangente al ecuador deformando así las distancias entre los distintos meridianos de forma que aumenta el ancho cuanto más nos acercamos a los polos.*



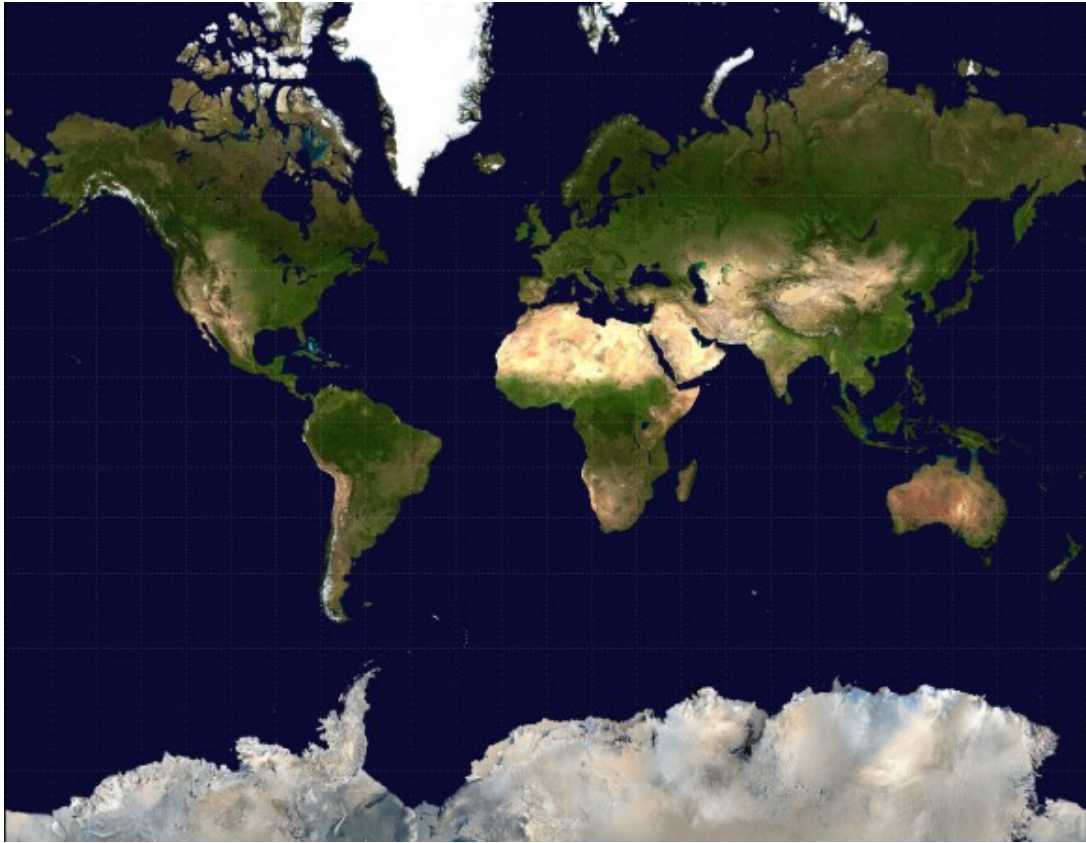


Figura 2.20: Mapa de Mercator

*Acabamos de explicar que el mapa de Mercator no respeta la distancia entre los meridianos, pero tampoco la respeta entre los paralelos. La proyección de Mercator representa una imagen distorsionada de la realidad que tampoco en el caso de los paralelos reproduce fielmente las distancias reales, que se incrementan a medida que nos acercamos a los polos.*

*El fin último de Mercator al presentar su mapa era la utilización de este para la navegación marítima. Como ya hemos comentado se trata de una proyección cilíndrica de una superficie esférica; y para que el mapa pudiera ser útil en la navegación, Mercator tuvo que realizar ciertos cálculos.*

*El primer paso fue tomar la proyección cilíndrica equidistante con paralelos y meridianos perpendiculares creando cuadrículas de  $15^\circ \times 15^\circ$ .*

*Esto conllevó una inevitable deformación, ya que la línea del ecuador mide 40000 km mientras que los polos son un punto y Mercator los representó con la misma longitud. La solución que presentó Mercator para mantener la forma de los continentes es un estiramiento en vertical*

mayor a medida que nos alejamos del ecuador. De forma que lo que antes eran cuadrados ahora se convierten en rectángulos.

*Pero Mercator llevo esto a cabo de manera que además de mantener la forma de los continentes, también se mantienen las direcciones correctamente para poder así trazar los rumbos de navegación.*

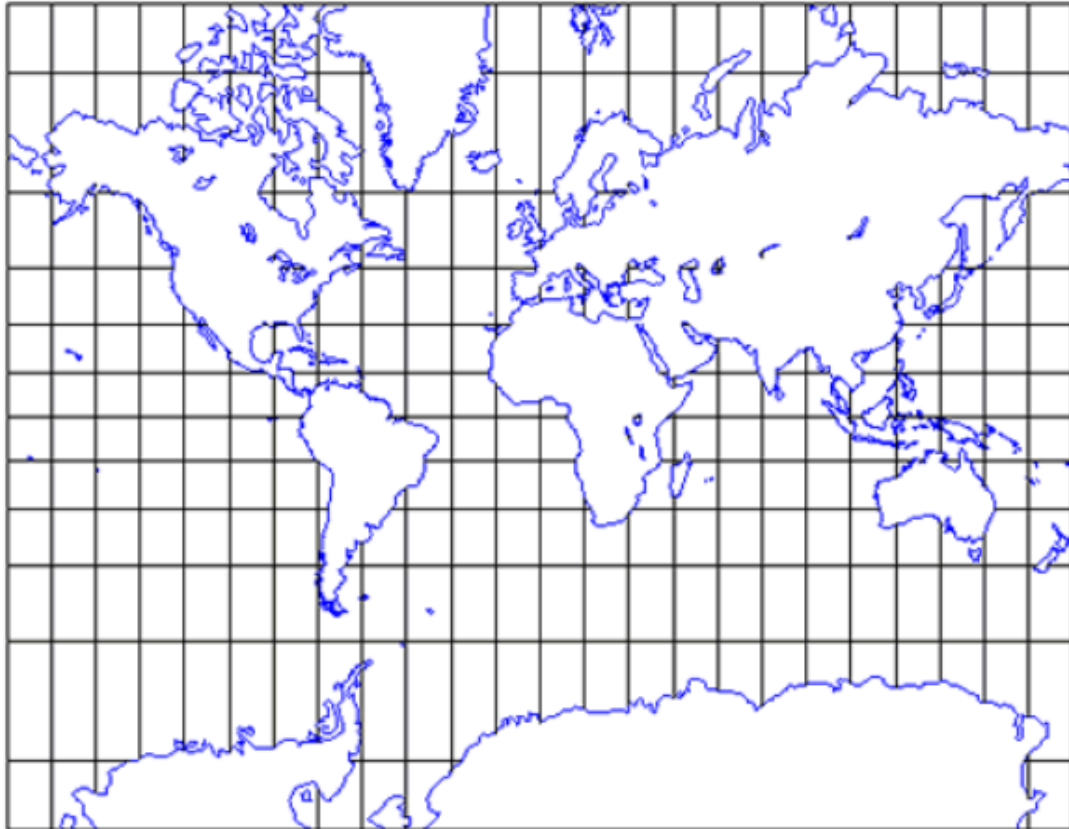


Figura 2.21: Mapa de Mercator, rectángulos

*Es decir, la principal ventaja de la proyección de Mercator es que las líneas de rumbo constante son representadas con segmentos rectos, cosa que no sucede sobre una superficie esférica.*

*El mapa Gall-Peters muestra el tamaño y proporción de los países, continentes y océanos de manera mas precisa.*



Figura 2.22: Mapa de Peters

*El punto de partida de este mapa es la proyección cilíndrica, al igual que el de Mercator. La diferencia es que Peters tiene el objetivo de mantener las proporciones en las áreas, para esto Peters aumentó la escala vertical de las regiones cercanas al ecuador para compensar el estiramiento en horizontal de las regiones templadas. Esto lleva a grandes deformaciones en África y Sudamérica.*

*Es verdad que en este mapa cada continente mantiene su área, pero prácticamente todos los países sufren una deformación con respecto a su aspecto real.*

*Este mapa también conocido como el “mapa solidario” es usado por muchas ONG’s ya que si reducimos el mapa al 60% se mantienen las áreas y se recuperan las formas. El único problema es que se aplastan ligeramente Europa y Norteamérica, sobresaliendo aún más África y Sudamérica, de ahí que se le considere el “mapa solidario”.*



Figura 2.23: Mapa de Peters, modificado

En 2016 Hajime Narukawa creó el “mapa perfecto”. Para crear dicho mapa Hajime Narukawa se inspiró en el funcionamiento del origami (técnica de doblado de papel japonesa). Este mapa recibe el nombre de AutoGraph. A continuación se muestra una imagen de este mapa:

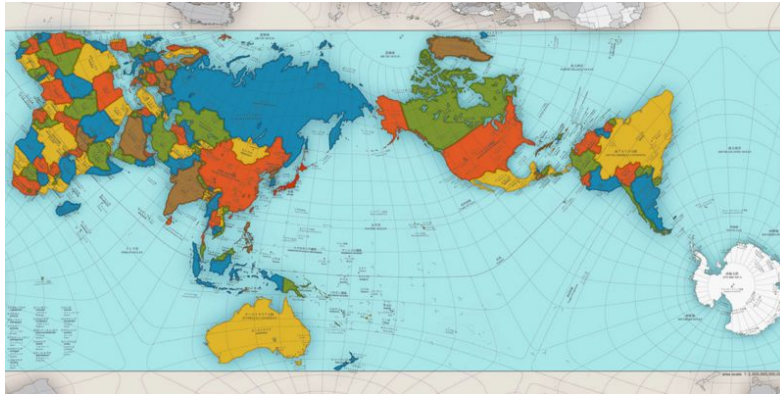


Figura 2.24: Mapa de Hajime Narukawa (AutoGraph)

Para confeccionar este mapa, Narukawa llevo a cabo una división de 96 regiones en el globo terrestre, todas de igual área proyectadas sobre un tetraedro, una vez proyectadas al abrir esta figura y colocada de forma rectangular origina el mapa.

Narukawa uso un método original, la proyección AuthaGraphic, para mantener las proporciones de las áreas se llama "mapeo de isoáreas". Y es un proceso de mapeo original que combina diferentes métodos de proyección a través de objetos intermedios se llama "mapeo multicapa". Estas ideas para el mapeo tienen como objetivo reducir los errores durante la proyección de una esfera en un tetraedro, porque una simple proyección óptica de una esfera a un tetraedro provoca enormes distorsiones.[14]

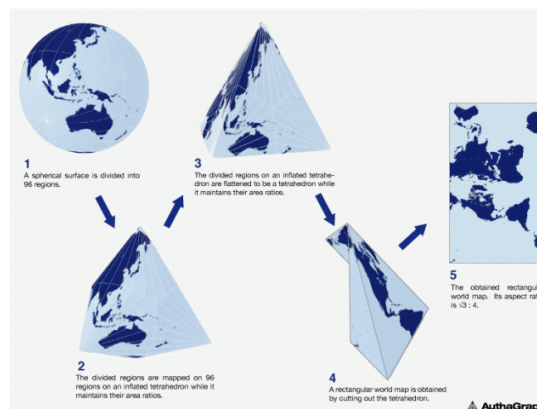


Figura 2.25: Proyección AuthaGraph



Narukawa fue capaz de colocar en mosaico el mapa del mundo AuthaGraphic sin espacios ni superposiciones, los seis continentes nunca están fragmentados y los cinco océanos mantienen sus redes continuas. Se pensaba que el mundo estaba en un plano infinito ya que las geometrías de una esfera y de un plano infinito son similares. Caminando sobre ambas superficies, no llegamos a un final. Una red geográfica en el mapa puede expandirse a cualquier dirección en los mapas teselados.

Si nos fijamos, la última figura de la imagen anterior coincide con el área morada de la siguiente imagen.

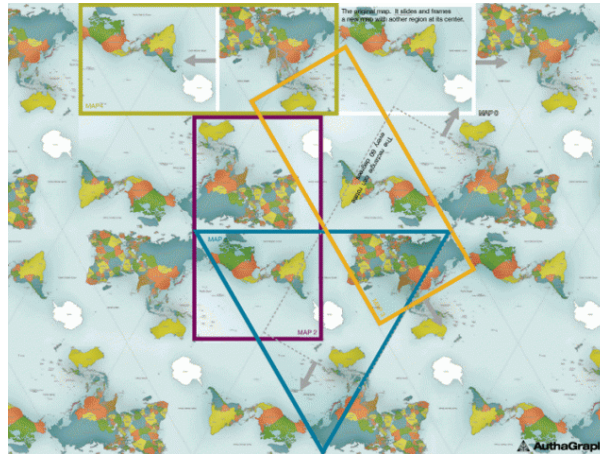


Figura 2.26: Mapa infinito

Gracias a este mapa Narukawa fue galardonado con el “Good Design Award” de Japón, en 2016. Sin embargo como se señaló en su momento, el mapa podría ser aún más detallado, aunque para afinar más la precisión habría que aumentar el número de subdivisiones.

Como ya se mencionó anteriormente, el teorema egregium de Gauss contradice la existencia de un “mapa perfecto”. Esto se debe principalmente a las curvaturas. De manera instintiva diremos que una superficie está “curvada” si al desplegarla no puede ser puesta sobre un plano, por ejemplo un cono o un cilindro no están curvados ya que si los abrimos adecuadamente estos pueden ser extendidos sobre un plano. En el caso de la esfera esto no es así, no puede ser puesta sobre un plano. Sin embargo, nuestro planeta es “casi plano” esto se debe al gran tamaño que tiene la Tierra ya que la curvatura en cualquier punto de una esfera es igual al inverso del cuadrado de su radio, y esto hace que cuanto mayor sea la esfera menos curvada sea.

En conclusión, el teorema egregium de Gauss, nos asegura que el mapa perfecto de la Tierra no existe.

### ***El trozo de pizza y otros usos***

*Una curiosidad destacable que se deduce de este teorema es que nos enseña la forma ideal de comerse un trozo de pizza. Pero que tiene que ver la curvatura intrínseca de la superficie con una porción de pizza.[13]*

*Veámoslo primero con un trozo de papel, este tiene curvatura cero, si yo ahora trazo una línea en medio del papel y lo doble por esta, los dos lados del papel tienen curvatura negativa, pero la zona central, la línea, tiene curvatura cero, si las multiplicamos claramente el resultado es cero. Si giramos el papel tenemos lo mismo pero con curvatura positiva en los laterales pero sigue siendo cero en el centro. Por lo que la curvatura se mantiene.*

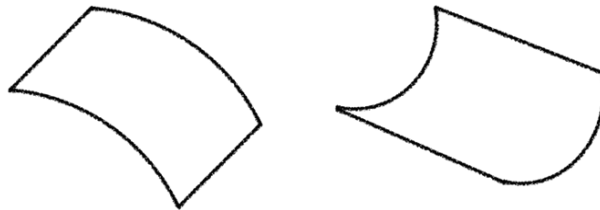


Figura 2.27: Papel doblado en U

*Hemos visto que la curvatura se mantiene en una hoja de papel, ¿pero que tiene que ver todo esto con un trozo de pizza?*

*Todos hemos estado en la misma situación, cogemos una porción de pizza (tiene cierta profundidad pero la ignoraremos). Una porción es básicamente una pequeña parte de un plano (pizza) y, por lo tanto, tiene una curvatura cero constante. Al levantarla, esta se dobla por la punta y todo el contenido se cae. Esto se debe a que las curvaturas son las siguientes.*

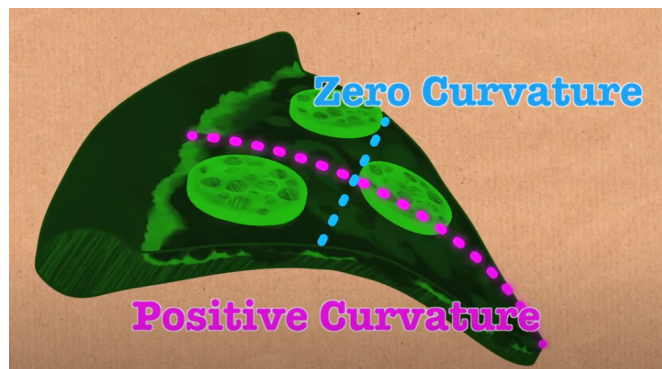


Figura 2.28: Porción de pizza fallida

*Esto se debe a que la corteza de la pizza no es lo suficiente rígida para suportar el peso de todos los ingredientes. Entonces ¿deberíamos poner menos ingredientes? La respuesta es un rotundo no. El teorema egregium nos asegura que una dirección de la porción siempre debe permanecer plana; no importa como la doble, la pizza debe conservar un rastro de su planitud original, por tanto el truco para poder comernos la porción de pizza sin que se venza y caiga su contenido consiste en doblar la porción de pizza en forma de U.*

*Ahora, aquí está el truco: si doblamos la corteza por la mitad, forzamos la dirección de la corteza para que tenga una curvatura negativa, pero la línea que va desde la corteza a la punta tendrá curvatura cero. Esto significa que la pizza no se caerá y sus ingredientes permanecerán en la pizza.*<sup>[13]</sup>



Figura 2.29: Porción de pizza

*Una vez visto esto, podemos observar esta aplicación en muchos lugares. Uno de estos lugares es la naturaleza, miremos de cerca una brizna de hierba. A menudo se dobla a lo largo de su vena central, lo que agrega rigidez evitando así que se caiga.*

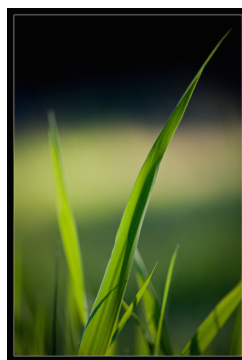


Figura 2.30: Brizna de hierba

*También podemos observar este recurso en la ingeniería, a menudo se utiliza la curvatura*

*para agregar resistencia a las estructuras como por ejemplo, en el hipódromo de la Zarzuela de Madrid, el ingeniero estructural español Eduardo Torroja diseñó una innovadora cubierta de hormigón que se extiende desde el edificio del estadio cubriendo una gran superficie sin dejar de tener unos centímetros de grosor. En definitiva, podemos observar aquí otra aplicación del teorema egregium de Gauss, o si lo preferimos, el truco de la pizza disfrazado.*



Figura 2.31: Hipódromo de la Zarzuela

*Si una persona se sitúa sobre una lata de refresco vacía, la lata puede soportar su peso independientemente del grosor de la pared de esta lata. El secreto de esta rigidez viene de su curvatura, esto se puede ver fácilmente ya que si la pared de la lata tiene una pequeña abolladura se doblará en cuanto alguien se sitúe encima.*



Figura 2.32: Persona sobre lata



*Si bien las latas de refresco entre otras cosas son bastante resistentes, hay una manera de hacer que los materiales sean aún mas fuertes. Esto podemos observarlo en los huevos, si nos lo ponemos en la mano lo envolvemos y apretamos, nos podemos sorprender de la fuerza de este.*



Figura 2.33: Huevo

*Mientras que las latas están curvadas en una dirección y esto les da cierta rigidez, las cáscaras de huevo se curvan en ambas direcciones. Esta es la clave de la resistencia de un huevo. En términos matemáticos, estas superficies doblemente curvadas tienen una curvatura gaussiana distinta de cero, el teorema de Gauss nos asegura este hecho. Para abrir el huevo, primero debemos abollarlo, cuando el huevo pierde su curvatura, pierde su resistencia.*

*Esto, también se puede observar en las torres de enfriamiento de una planta de energía nuclear, la forma icónica de estas también incorpora la curvatura en ambas direcciones. Está forma llamada hiperboloide minimiza la cantidad de material necesario para construirla. Al usar esta forma, la hiperboloide, corregimos un fallo de las chimeneas normales las cuales se doblan fácilmente, sin embargo esta al tener curvatura en ambas direcciones le otorga una rigidez adicional.*



Figura 2.34: Torre de enfriamiento

*Otra forma que obtiene su fuerza de la doble curvatura son las patatas fritas con forma de paraboloides hiperbólicos.*

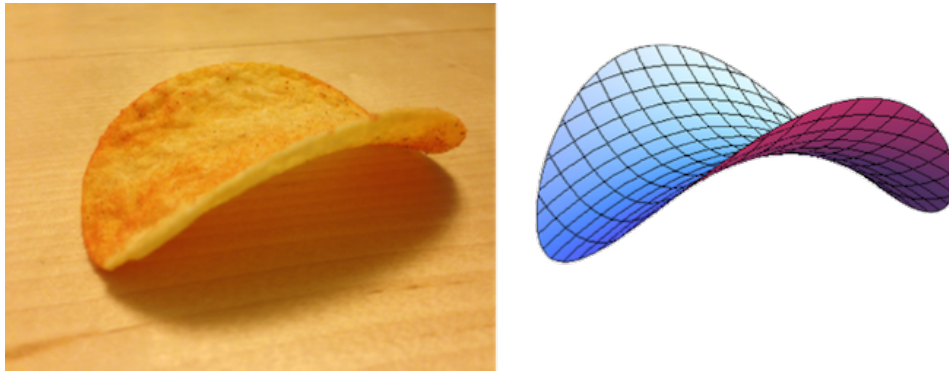


Figura 2.35: Patata, paraboloides hiperbólicos

*Esta forma de paraboloides hiperbólicos también es explotada por la naturaleza, por ejemplo el camarón mantis tiene uno de los golpes más rápidos del reino animal y esto se debe a que utiliza un resorte de esta forma que le permite almacenar la energía y liberarla de un solo golpe.*

*La fuerza que tiene esta forma de patatas es utilizada también en arquitectura.*



Figura 2.36: Ciudad de las Artes y las Ciencias

*Esta forma es tan resistente porque equilibra los empujes y los tirones, todas las estructuras tienen que soportar peso y transferirlo al suelo. Esto se puede hacer de dos formas, mediante*

la compresión, donde el peso aparenta un objeto empujando hacia adentro como por ejemplo un arco. O mediante la tensión, donde el peso tira de los extremos de un objeto y lo separa. El paraboloides hiperbólico combina lo mejor de ambos mundos. La parte cóncava en forma de U se estira en tensión mientras que la parte convexa en forma de arco se aprieta en compresión.

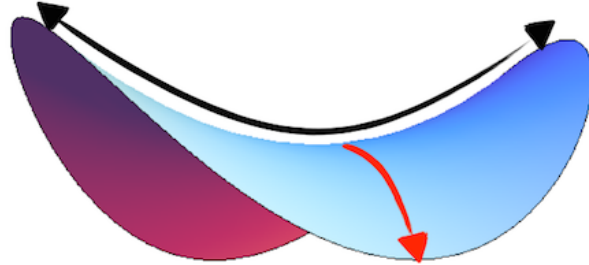


Figura 2.37: Fuerza de la curvatura

*La fuerza a través de la curvatura es una idea que da forma a nuestro mundo y tiene sus raíces en la geometría.*

## 2.5. Conclusiones

*Fue el mismo Gauss el que bautizó como egregium al teorema que no ocupa, debido a sus excepcionales propiedades geométricas. Según Berger, no existen demostraciones geométricas sencillas del teorema egregium. A lo largo de la historia se han dado muchas entre las que cabe destacar las de Hilbert y Cohn-Vossen, Chern, Do Carmo, O'Neill, Stoker, Sternberg, Klingenberg y Boothby, entre otros.*

*Este teorema es un resultado muy importante dentro de la geometría diferencial. Su trascendencia procede del hecho de que la definición de la curvatura de Gauss hace uso directo de la posición de la superficie en el espacio; y, por tanto, el resultado no depende de la manera en que la superficie está inmersa en el espacio.*

*Después de estudiar este teorema, hemos podido observar que sus usos son muchos y variados. El teorema lo vemos reflejado de forma inconsciente en distintos ámbitos de nuestra vida, abarcando desde una simple brisa de hierba hasta una gran construcción, sin olvidarnos del placer de comernos una porción de pizza.*

*Aun así, desde mi punto de vista, la aplicación más importante de este teorema es la prueba de que no se puede crear un mapa perfecto de la Tierra. Bien es cierto que todo el mundo, o al menos la mayoría, sabe que los mapas que usamos de nuestro planeta no son perfectos. Sin embargo, un gran porcentaje de estos no conoce el porqué de esto, ni el porqué de la gran cantidad de mapas distintos que existen. Todo depende del uso que queramos dar al mapa en cuestión, pudiendo así crear mapas muy útiles aunque no representen perfectamente todas las distancias o proporciones. Además, gracias a este teorema queda demostrado que la creación de un mapa perfecto en un plano es imposible; si bien siguen habiendo intentos de crear mapas lo más preciso posible.*

*Otra aplicación de este teorema la encontramos en una de las fórmulas más profundas y difíciles de la geometría diferencial y la topología algebraica, el teorema de Gauss-Bonnet para superficies. Aunque no se haya abordado este teorema a lo largo del proyecto, me parece necesario nombrarlo ya que es un resultado muy importante obtenido en parte gracias al teorema egregium.*

*En definitiva, me gustaría subrayar que, aunque al principio de este proyecto no entendía el porqué del nombre de este teorema, incluso me parecía un poco presuntuoso, a medida que fui investigando empecé a descubrir las diferentes aplicaciones de este, llegando a la conclusión de que su denominación -egregium- es un nombre muy apropiado para subrayar la relevancia de este teorema en el campo de la geometría diferencial.*

# Bibliografía

## [1] **Principal**

[2] J. Monterde (2008) *Geometría diferencial clásica*, Dpt. Geometría i Topologia Universitat de València.

[3] M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall (1976)

[4] Anthony Barile, Philip (2009) *An introduction to the curvature of surfaces*, tesis para la Graduate School-Cambden Rutgers.

[5] Lafuente López, Javier (2014) *Cuarenta y cinco sesiones de GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES*.

[6] A. Pérez, Marco (2013) *Geometría diferencial de curvas y superficies*, universidad central de Venezuela.

[7] W. Tu, Loring (2017) *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*, Springer.

## [8] **Complementaria**

[9] GAUSS, Carl Friedrich (1827) *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Calcuta, Saraswati Press, 2012

[10] Martínez Naveira, Antonio (2005) *La curvatura de Riemann a través de la Historia*, Madrid.

[11] Urbano, Francisco (2010) *Geometría de curvas y superficies*

[12] Ruiz Vera, Carlos (2013) *Castografía*, Murcia, Trabajo final de grado. Proyecciones

[13] Numberphile (2016) *La forma notable en que comemos pizza*, Youtube.[https://www.youtube.com/watch?v=gi-TBlh44gYt=25sab\\_channel=Numberphile](https://www.youtube.com/watch?v=gi-TBlh44gYt=25sab_channel=Numberphile)

[14] AuthaGraph CO., Ltd, AuthaGraph, acceso: agosto 2021, <http://www.authagraph.com/top/?lang=en>

[15] *How a 19th Century Math Genius Taught Us the Best Way to Hold a Pizza Slice*  
<https://aatishb.com/2014/09/05/curvature-and-strength>

# Anexos





# Anexo A

## Código prácticas

### A.1. Sección HTML

*Recod HTML*

*Index.html.twig*

```
{# templates/record/index.html.twig #}
{% extends 'shared/base.html.twig' %}

{% block title %}<title>{{ 'RecordList'|trans }} |
{{ 'AppTitle'|trans }}</title>{% endblock %}

{% block stylesheet %}
<!-- STYLES -->
{% include "shared/cssTables.html.twig" %}
<!-- END STYLES -->
{% endblock %}

{% block body %}
<!-- BEGIN PAGE HEADER-->
<h3 class="page-title">
{{ 'RecordList'|trans }} <small>{{ 'Intranet'|trans }}</small>
</h3>
<div class="page-bar">
<ul class="page-breadcrumb">
<li>
<i class="fa fa-home"></i>
```

```

<a href="#" title="Home">{{ 'Home' | trans }}</a>
<i class="fa fa-angle-right"></i>
</li>
<li>
<a href="#">{{ 'Intranet' | trans }}</a>
<i class="fa fa-angle-right"></i>
</li>
<li>
<a href="{_path('recordIndex')_}" title="{_ 'RecordList' | trans_}">
{{ 'RecordList' | trans }}</a>
</li>
</ul>
</div>
<!-- END PAGE HEADER -->
<!-- BEGIN PAGE CONTENT -->
<div class="row">
<div class="col-md-12">
<!-- BEGIN TABLE PORTLET -->
<div class="portlet_box_grey-cascade">
<div class="portlet-title">
<div class="caption">
<i class="fa fa-users"></i> {{ 'RecordList' | trans }}
</div>
<div class="tools">
<a href="javascript:;" class="collapse">
</a>
</div>
</div>
<div class="portlet-body">
<div class="table-toolbar">
<div class="row">
<div class="col-md-6">
<div class="btn-group">
<a href="{_path('recordEdit',_{'id':_0})_}" title="{_ 'AddNew' | trans_}"
class="btn_blue">{{ 'AddNew' | trans }} <i class="fa fa-plus"></i></a>
<button type="button" id="btnCleanData" class="btn_default_yellow-casablanca"
style="margin-left:5px;">{{ 'Refresh' | trans }} <i class="fa fa-refresh"></i>
</button>
</div>
</div>
</div>
<div class="col-md-6">

</div>
</div>
</div>
<table class="table table-striped table-bordered table-hover" id="tblTable">
<thead>
<tr>

```

```

<th class="text-center">Id</th>
<th class="text-center">{{ 'Num'|trans }}</th>
<th class="text-center">{{ 'RecordDate'|trans }}</th>
<th class="text-center">{{ 'UserEdit'|trans }}</th>
<th class="text-center">{{ 'Actions'|trans }}</th>
</tr>
</thead>
</table>
</div>
</div>
<!-- END TABLE PORTLET-->
</div>
</div>
<!-- END PAGE CONTENT-->
{% endblock %}
{% block scripts %}
<!-- SCRIPTS -->

<!-- PAGE LEVEL PLUGINS -->
{% include "shared/scriptTables.html.twig" %}
<!-- END PAGE LEVEL PLUGINS -->

<!-- BEGIN PAGE LEVEL SCRIPTS -->
<script type="text/javascript"
src="{{ asset('theme/js/dataTablesGenericInit.js') }}"></script>
<script>
$(document).ready(function ()
{
//Datatable
var buildSearchData = function () {
return {}
}

var createdRowFunction = function (row, data, index ) {
var api = this.api();
$('td', row).eq(0).html((api.page.info().page *
api.page.info().length) + index + 1);
}

var colsTable =
[
{
"data": "id",
'orderable': false,
"searchable": false,
"visible": false
},
{

```

```

    "data": "row",
    "orderable": false,
    "searchable": false,
    "width": "40"
  },
  {
    "data": "date",
    "width": "100",
    "className": "text-center",
  },
  {
    "data": "user"
  },
  {
    "data": "id",
    "searchable": false,
    "sortable": false,
    'orderable': false,
    "width": "80",
    "className": "text-center",
    "render": function (data, type, full, meta) {
var url = "{{_path('recordEdit',_id:_id')}}";

url = url.replace(':id', data);
return '<a href="' + url + '"
title="{{_Edit'|trans}}"_class="btn btn-xs blue"><i class="fa fa-pencil"></i></a>
'
}
}
];

var dataTable = DataTableGenericApi.init(
  "tblTable",
  colsTable,
  "{{_path('recordList')}}",
  [0, "desc"],
  createdRowFunction,
  buildSearchData
);

//Clear datatable state
$("#relTblTable").on("click", function (e) {
  dataTable.state.clear();
  dataTable.order([0, 'desc']).search("").page.len(25).page(0).draw();
});

//Clean table state
$("#btnCleanData").on("click", function (e) {
  dataTable.state.clear();
});

```

```

window.location.reload();
});
});
</script>
<!-- END PAGE LEVEL SCRIPTS -->
<!-- END SCRIPTS -->
{% endblock %}

```

### *edit.html.twig*

```

{# templates/record/edit.html.twig #}
{% extends 'shared/base.html.twig' %}

{% if app.request.get('idTab') == '' %}
{% set idTab = 0 %}
{% else %}
{% set idTab = app.request.get('idTab') %}
{% endif %}

{% block title %}<title>{{ 'RecordEdit'|trans }} |
{{ 'AppTitle'|trans }}</title>{% endblock %}

{% block stylesheet %}
<!-- STYLES -->
{% include "shared/cssForms.html.twig" %}
{% include "shared/cssTables.html.twig" %}
<!-- END STYLES -->
{% endblock %}

{% block body %}

<!-- BEGIN PAGE HEADER-->
<h3 class="page-title">
{{ 'RecordEdit'|trans }} <small>{{ 'Intranet'|trans }}</small>
</h3>
<div class="page-bar">
<ul class="page-breadcrumb">
<li>
<i class="fa fa-home"></i>
<a asp-controller="Dashboard" asp-action="Index">{{ 'Home'|trans }}</a>
<i class="fa fa-angle-right"></i>
</li>
<li>
<a href="#">{{ 'Intranet'|trans }}</a>
<i class="fa fa-angle-right"></i>
</li>
<li>

```

```

<a href="{_path('recordIndex')_}" title="{_ 'RecordList' |trans_}">
{{ 'RecordList' |trans }}</a>
<i class="fa_fa-angle-right"></i>
</li>
<li>
<a href="{_path('recordEdit',_{'id':_0}_)}"
title="{_ 'RecordEdit' |trans_}">{{ 'RecordEdit' |trans }}</a>
</li>
</ul>
</div>
<!-- END PAGE HEADER-->
<!-- BEGIN PAGE CONTENT-->
<div class="row">
<div class="col-md-12">
<!-- BEGIN FORM PORTLET-->
<div class="portlet_box_grey-cascade">
<div class="portlet-title">
<div class="caption">
<i class="fa_fa-users"></i>{{ 'RecordEdit' |trans }}
</div>
<div class="tools">
<a href="javascript:;" class="collapse"></a>
</div>
</div>
<div class="portlet-body_form" id="divContainer">
<div class="tabbable-line">
<ul class="nav_nav-tabs">
<li class="{_if_idTab_==_0_}%active{%_endif_}">
<a href="#tabGeneral" data-toggle="tab">
{{ 'General' |trans }}
</a>
</li>
<li class="{_if_idTab_==_1_}%active{%_endif_}">
<a href="#tabRecordImages" data-toggle="tab">
{{ 'RecordImages' |trans }}
</a>
</li>
</ul>
<div class="tab-content">
<!-- BEGIN TAB -->
<div class="tab-pane{_%if_idTab_==_0_}%_active{%_endif_}" id="tabGeneral">
<!-- BEGIN FORM-->
<form id="frmRecord" method="POST" class="form-horizontal">
<input type="hidden" name="id" id="id"
value="{_recordVM.id_==_null_?_0_:_recordVM.id_}" data-value-type="number" />
<input type="hidden" name="token" value="{_csrf_token('recordStore')_}" />
<div id="divError" class="text-danger"></div>
{% if error %}

```

```

<div class="alert alert-danger">
  {{ 'ErrorSave' | trans }}
</div>
{% endif %}
<div class="form-body">
<h3 class="form-section">{{ 'Information' | trans }}</h3>

<!--row-->
<div class="row">
<!--span-->
<div class="col-md-6">
<div class="form-group">
<label for="date" class="control-label col-md-3">{{ 'RecordDate' | trans }}</label>
<div class="col-md-4">
<input type="text" name="date" id="date"
value="{{ recordVM.date == "" ? "" : recordVM.date | date("d/m/Y") }}"
class="form-control dateButton inputFecha"
placeholder="{{ 'RecordDate' | trans }}" />
<span class="input-group-btn">
  <button class="btn default" type="button">
    <i class="fa fa-calendar"></i>
  </button>
</span>
<span class="help-block hidden">{{ 'ObligatoryField' | trans }}</span>
</div>
</div>
</div>
<!--/span-->
{% if is_granted('ROLE_ADMIN') %}
<!--span-->
<div class="col-md-6">
<div class="form-group">
<label for="user" class="control-label col-md-3">{{ 'UserEdit' | trans }}</label>
<div class="col-md-9">
  <select name="user"
id="user" class="form-control input-xlarge select2me"
data-value-type="number">
    <option value="-1">---</option>
    {% for userVM in usersVM %}
      <option value="{{ userVM.id }}"
        {{ userVM.id == recordVM.user ? 'selected' : '' }}>
        {{ userVM.name }}
      </option>
    {% endfor %}
  </select>
  <span class="help-block hidden">{{ 'ObligatoryField' | trans }}</span>
</div>
</div>

```

```

</div>
<!--/span-->
{% endif %}
</div>
<!--/row-->
</div>
<div class="form-actions">
<div class="row">
<div class="col-md-6">
<div class="row">
<div class="col-md-offset-3 col-md-9">
<button type="submit" class="btn_green">{{ 'Save' | trans }}
<i class="fa fa-floppy-o"></i></button>
{% if recordVM.id > 0 %}
  <a id="btnDelete" class="btn_red">{{ 'Delete' | trans }}
  <i class="fa fa-times"></i></a>
{% endif %}
<a href="{{ path('recordIndex') }}"
title="{{ 'Back' | trans }}"
class="btn_default">{{ 'Back' | trans }}
<i class="fa fa-arrow-left"></i></a>
</div>
</div>
</div>
</div>
<div class="col-md-6">
</div>
</div>
</div>
</form>
<!-- END FORM-->
</div>
<!-- END BEGIN TAB -->
<!-- BEGIN TAB -->
<div class="tab-pane{% if idTab == 1 %}_active{% endif %}" id="tabRecordImages">
<div class="form-body">
<div class="table-toolbar">
<div class="row">
<div class="col-md-6">
<div class="btn-group">
{% if recordVM.id != null %}
<a href="{{ path('recordImageEdit', {'recordId': recordVM.id, 'id': 0}) }}"
title="{{ 'AddNew' | trans }}"
class="btn_blue" style="width:130px;">{{ 'AddNew' | trans }}
<i class="fa fa-plus"></i></a>
<button type="button" id="btnCleanDataRecordImage"
class="btn_default_yellow-casablanca"
style="margin-left:5px; width:130px;">{{ 'Refresh' | trans }}
<i class="fa fa-refresh"></i></button>

```



```

{% endif %}
</div>
</div>
<div class="col-md-6">

</div>
</div>
</div>
{% if (recordVM.id > 0) %}
<table class="table table-striped table-bordered table-hover"
id="tblTableRecordImage">
<thead>
<tr>
<th class="text-center">Id</th>
<th class="text-center">{{ 'Num'|trans }}</th>
<th class="text-center">{{ 'Name'|trans }}</th>
<th class="text-center">{{ 'RecordImageIdentified'|trans }}</th>
<th class="text-center">{{ 'Actions'|trans }}</th>
</tr>
</thead>
</table>
{% endif %}
</div>
</div>
<!-- END TAB -->
</div>
</div>
</div>
</div>
<!-- END FORM PORTLET-->
</div>
</div>
<!-- END PAGE CONTENT-->
{% endblock %}
{% block scripts %}
<!-- SCRIPTS -->

<!-- PAGE LEVEL PLUGINS -->
{% include "shared/scriptForms.html.twig" %}
{% include "shared/scriptTables.html.twig" %}
<!-- END PAGE LEVEL PLUGINS -->

<!-- BEGIN PAGE LEVEL SCRIPTS -->
<script src="{{ asset('theme/js/formGenericInit.js') }}"
type="text/javascript"></script>
<script src="{{ asset('theme/js/dataTableGenericInit.js') }}"
type="text/javascript"></script>
<script src="{{ asset('theme/js/dateGenericInit.js') }}"

```

```

type="text/javascript"></script>
<script type="text/javascript">
$(document).ready(function () {

//Date
DateGenericApi.init(
"date",
"{{_app.request.locale_}}"
);

//Records form
FormGenericApi.init(
"tabGeneral",
"frmRecord",
"id",
"{{_path('recordCreate')_}}",
"{{_path('recordUpdate',_{'id':_recordVM.id==_null?_0:_recordVM.id})_}}",
"{{_path('recordDelete',_{'id':_recordVM.id==_null?_0:_recordVM.id})_}}",
"{{_path('recordEdit',_{'id':_':id'_})_}}",
"{{_path('recordIndex')_}}",
"{{_ 'ErrorSave'|trans_}}",
"{{_ 'ErrorSave'|trans_}}",
"btnDelete",
"{{_ 'Delete'|trans_}}_{{_ 'RecordEdit'|trans_}}",
"{{_ 'RecordSureDelete'|trans_}}",
"divError",
"",
null,
null,
null,
{
date: {
required: true
},
user: {
required: function(element) {
return {% if is_granted('ROLE_ADMIN') %} true {% else %} false {% endif %}
},
number: true,
min: 1
},
},
"{{_csrf_token('recordStore')_}}"
);

// IMGES
{% if (recordVM.id > 0) %}

```

```

//Datatable
var buildSearchData = function () {
return {}
}

var createdRowFunction = function (row, data, index ) {
var api = this.api();
$('td', row).eq(0).html((api.page.info().page *
api.page.info().length) + index + 1);
}

var colsTable =
[
{
"data": "id",
'orderable': false,
"searchable": false,
"visible": false
},
{
"data": "row",
"orderable": false,
"searchable": false,
"width": "40"
},
{
"data": "name",
},
{
"data": "identified",
"className": "text-center",
"width": "150",
"render": function (data, type, full, meta) {
return checkBool(data);
}
},
{
"data": "id",
"searchable": false,
"sortable": false,
'orderable': false,
"width": "80",
"className": "text-center",
"render": function (data, type, full, meta) {
var url = "{{_path('recordImageEdit',
{'recordId':_recordVM.id_==
null?_0:_recordVM.id,_'id':_':id'})_}}";

```

```

url = url.replace('/:id', data);
return '<a href="' + url + '"
title="{_path('Edit'|trans_)}"
class = "btn btn-xs blue">
<i class="fa fa-pencil"></i></a>';
}
}
];

var dataTableRecordImage = DataTableGenericApi.init(
"tblTableRecordImage",
colsTable,
"{{_path('recordImageList',
{recordId:_recordVM.id_==_null_?_0_:_recordVM.id})_}}",
[0, "desc"],
createdRowFunction,
buildSearchData,
{
"record": $('#id').val()
}
);

//Clear datatable state
$("#tblTableRecordImage_#relTblTable").on("click", function (e) {
dataTableRecordImage.state.clear();
dataTableRecordImage.order([0, 'desc']).search("").page.len(25).page(0).draw();
});

//Clean table state
$("#btnCleanDataRecordImage").on("click", function (e) {
dataTableRecordImage.state.clear();
location.href = "{{_path('recordEdit',_{'id':_recordVM.id_})_}}?idTab=1"
});

{% endif %}
});
</script>
<!-- END PAGE LEVEL SCRIPTS -->
<!-- END SCRIPTS -->
{% endblock %}

```

## A.2. Sección PHP

*Record.php*

```

<?php

namespace App\Entity;

use App\Repository\RecordRepository;
use Doctrine\ORM\Mapping as ORM;

/**
 * @ORM\Entity(repositoryClass=RecordRepository::class)
 */
class Record
{
    /**
     * @ORM\Id
     * @ORM\GeneratedValue
     * @ORM\Column(type="integer")
     */
    private $id;

    /**
     * @ORM\ManyToOne(targetEntity=User::class)
     * @ORM\JoinColumn(nullable=false)
     */
    private $user;

    /**
     * @ORM\Column(type="date")
     */
    private $date;

    public function getId(): ?int
    {
        return $this->id;
    }

    public function getUser(): ?User
    {
        return $this->user;
    }

    public function setUser(?User $user): self
    {
        $this->user = $user;

        return $this;
    }
}

```

```

public function getDate(): ?\DateTimeInterface
{
    return $this->date;
}

public function setDate(\DateTimeInterface $date): self
{
    $this->date = $date;

    return $this;
}
}

```

### **RecordController.php**

```

<?php
namespace App\Controller;

// Dependencies
use Symfony\Bundle\FrameworkBundle\Controller\AbstractController;
use Symfony\Component\HttpFoundation\Request;
use Symfony\Component\HttpFoundation\Response;
use Symfony\Component\HttpFoundation\JsonResponse;
use Symfony\Component\Routing\Annotation\Route;
use AutoMapperPlus\AutoMapperInterface;
use Symfony\Contracts\Translation\TranslatorInterface;
use Sensio\Bundle\FrameworkExtraBundle\Configuration\Security;

// Helpers
use App\Helpers\ErrorCodes;

// Listener
use App\Listener\ApiProblem;
use App\Listener\ApiProblemException;

// Services
use App\Service\RecordImageServiceInterface;
use App\Service\RecordServiceInterface;
use App\Service\UserServiceInterface;

// Validators
use Symfony\Component\Validator\Validation;
use Symfony\Component\Validator\Constraints\NotBlank;
use Symfony\Component\Validator\Constraints\Optional;
use Symfony\Component\Validator\Constraints\Collection;
use Symfony\Component\Validator\Constraints\Type;
use Symfony\Component\Validator\Constraints\DateTime;

```

```

// ViewModels
use App\ViewModel\Helpers\PaginationViewModel;

class RecordController extends AbstractController
{
    private $autoMapperI;
    private $translatorI;

    //Services
    private $recordImageServiceI;
    private $recordServiceI;
    private $userServiceI;

    public function __construct(AutoMapperInterface $autoMapperI,
        TranslatorInterface $translatorI,
        RecordImageServiceInterface $recordImageServiceI,
        RecordServiceInterface $recordServiceI,
        UserServiceInterface $userServiceI)
    {
        $this->autoMapperI = $autoMapperI;
        $this->translatorI = $translatorI;

        // Services
        $this->recordServiceI = $recordServiceI;
        $this->recordImageServiceI = $recordImageServiceI;
        $this->userServiceI = $userServiceI;
    }

    // VIEWS

    // Record list
    /**
     * @Route("/{_locale<%app.supported_locales%>}/records/", methods="GET",
     name="recordIndex")
     * @Security("is_granted('ROLE_ADMIN') or is_granted('ROLE_USER')")
     */
    public function index()
    {
        return $this->render('record/index.html.twig', [
            'activePage' => 'record.index'
        ]);
    }

    // Edit Record
    /**
     * @Route("/{_locale<%app.supported_locales%>}/record/{id}", methods="GET",
     name="recordEdit")

```

```

    * @Security("is_granted('ROLE_ADMIN') or is_granted('ROLE_USER')")
    */
public function edit(int $id)
{
    $paginationVM = new PaginationViewModel();

    $recordVM = $this->recordServiceI->find($id);
    $usersVM = $this->userServiceI->combo($paginationVM);

    return $this->render('record/edit.html.twig', [
        'activePage' => 'record.edit',
        'error' => false,
        'recordVM' => $recordVM,
        'usersVM' => $usersVM
    ]);
}

// API

// Get all Record
/**
 * @Route("/{_locale<%app.supported_locales%>}/records/", methods="POST",
 name="recordList")
 * @Security("is_granted('ROLE_ADMIN') or is_granted('ROLE_USER')")
 */
public function getAll(Request $request): JsonResponse
{
    $data = json_decode($request->getContent(), true);

    $paginationVM = $this->autoMapperI->
map($data, PaginationViewModel::class);
    $recordsVM = $this->recordServiceI->list($paginationVM);

    return new JsonResponse([
        'draw' => $paginationVM->draw,
        'recordsFiltered' => count($recordsVM),
        'data' => $recordsVM,
    ],
        Response::HTTP_OK
    );
}

// Get Record
/**
 * @Route("/{_locale<%app.supported_locales%>}/record/{id}", methods="GET",
 name="recordFind")
 * @Security("is_granted('ROLE_ADMIN') or is_granted('ROLE_USER')")
 */

```



```

public function find(Request $request, int $id): JsonResponse
{
    $recordVM = $this->recordServiceI->find($id);

    return new JsonResponse(['data' => $recordVM], Response::HTTP_OK);
}

// Create Record
/**
 * @Route("/{_locale<%app.supported_locales%>}/record/", methods="POST",
 name="recordCreate")
 * @Security("is_granted('ROLE_ADMIN') or is_granted('ROLE_USER')")
 */
public function create(Request $request): JsonResponse
{
    $data = json_decode($request->getContent(), true);

    $this->validate($data);
    $res = $this->recordServiceI->create($data);

    return new JsonResponse([ 'success' => true, 'id' => $res ],
 Response::HTTP_CREATED);
}

// Update Record
/**
 * @Route("/{_locale<%app.supported_locales%>}/record/{id}",
 methods="PUT", name="recordUpdate")
 * @Security("is_granted('ROLE_ADMIN') or is_granted('ROLE_USER')")
 */
public function update(Request $request, int $id): JsonResponse
{
    $data = json_decode($request->getContent(), true);

    $this->validate($data);
    $res = $this->recordServiceI->update($data, $id);

    return new JsonResponse([ 'success' => true, 'id' => $res ],
 Response::HTTP_OK);
}

// Delete Record
/**
 * @Route("/{_locale<%app.supported_locales%>}/record/{id}",
 methods="DELETE", name="recordDelete")
 * @Security("is_granted('ROLE_ADMIN') or is_granted('ROLE_USER')")
 */
public function delete(Request $request, $id): JsonResponse

```

```

{
    $data = json_decode($request->getContent(), true);

    $this->validateToken($data);
    $res = $this->recordServiceI->delete($id);

    return new JsonResponse([ 'success' => $res ], Response::HTTP_OK);
}

// VALIDATIONS

// Token validation
private function validateToken($data)
{
    if (!$this->isCsrftokenValid('recordStore', $data['token']))
        throw new ApiProblemException(new ApiProblem(['error' =>
            'Token validation', 'message' =>
            $this->translatorI->trans('ErrorPermissions'),
            'appErrorCode' => ErrorCodes::permissions],
            Response::HTTP_BAD_REQUEST));
}

// Record validation
private function validate($data)
{
    // Field validations
    $errors = [];
    $validator = Validation::createValidator();

    $constraint = new Collection([
        'id' => new Optional(),
        'token' => new NotBlank(null,
            sprintf($this->translatorI->trans('ErrorField'),
                $this->translatorI->trans('Token'))),
        'date' => new DateTime("d/m/Y",
            sprintf($this->translatorI->trans('ErrorValidField'),
                $this->translatorI->trans('RecordDate'))),
        'user' => [
            new Optional(),
            new Type("int", sprintf($this->translatorI->
                trans('ErrorValidField'),
                $this->translatorI->trans('UserEdit')))
        ],
    ]);

    $violations = $validator->validate($data, $constraint);

    if (0 !== count($violations))

```

```

    {
        foreach ($violations as $violation) {
            $errors = ['error' => $violation->getPropertyPath(),
                'message' => $violation->getMessage(),
                'appErrorCode' => ErrorCodes::parameterValidation];

            $apiProblem = new ApiProblem($errors,
                Response::HTTP_BAD_REQUEST);
            throw new ApiProblemException($apiProblem);
        }

        $this->validateToken($data);
    }
}
?>

```

### A.3. Sección CSS

#### *Diseño CSS*

```

/*-----
   [TRANSITION]
-----*/
/* Cubic Bezier Transition */
@media print {
    body {
        background-color: #fff !important;
    }

    .page-bar {
        display: none;
    }

    .page-sidebar-wrapper {
        display: none;
    }

    .page-quick-sidebar-wrapper {
        display: none;
    }

    .theme-panel {

```

```

    display: none;
}

.hidden-print {
    display: none;
}

.page-footer {
    display: none;
}

.no-page-break {
    page-break-after: avoid;
}

.page-container {
    margin: 0px !important;
    padding: 0px !important;
}

.page-content {
    padding: 0 !important;
    min-height: 300px !important;
    padding: 0px 20px 20px !important;
    margin: 0 !important;
}
}
}
/**
Page Header
***/
.page-header.navbar {
    width: 100%;
    padding: 0 20px 0 20px;
    margin: 0;
    border: 0px;
    padding: 0px;
    box-shadow: none;
    height: 46px;
    min-height: 46px;
    filter: none;
    background-image: none;
    /* Fixed header */
    /* Header logo */
    /* Search box */
    /* Menu Toggler */
    /* Top menu */
}
.page-header.navbar.navbar-fixed-top {

```

```

    z-index: 9995;
}
.page-header.navbar.navbar-static-top {
    z-index: 9995;
}
.page-header.navbar .page-logo {
    float: left;
    display: block;
    width: 235px;
    height: 46px;
    padding-left: 20px;
    padding-right: 20px;
}
.page-sidebar-closed.page-sidebar-closed-hide-logo
.page-header.navbar .page-logo {
    padding: 0;
}
.page-header.navbar .page-logo > .logo-image,
.page-header.navbar .page-logo > a {
    display: inline-block;
    float: left;
}
.page-header.navbar .page-logo .logo-default {
    margin: 16px 0 0 0;
}
.page-header.navbar .page-logo .logo-mini {
    display: none;
    margin-left: 5px;
}
.page-header.navbar .page-logo .text-logo {
    padding-left: 20px;
    padding-top: 12px;
}
.page-header.navbar .search-form {
    display: inline-block;
    width: 46px;
    position: relative;
    float: left;
    transition: all 0.6s;
}
.page-header.navbar .search-form .input-group .form-control {
    height: 46px;
    border: 0;
    background: transparent !important;
    font-size: 13px;
    padding-left: 0;
    margin-left: 12px;
    text-indent: -150000px;
}

```

```

}
.page-header.navbar .search-form .input-group .form-control:hover {
  cursor: pointer;
}
.page-header.navbar .search-form .input-group .input-group-btn {
  height: 46px;
}
.page-header.navbar .search-form .input-group .input-group-btn .btn.submit {
  margin-left: -24px;
  padding: 0;
  width: 46px;
  background: none;
  margin-top: 4px;
  display: block;
}
.page-header.navbar .search-form .input-group .input-group-btn .btn.submit > i {
  font-size: 15px;
}
.page-header.navbar .search-form.open {
  transition: all 0.6s;
  width: 300px !important;
}
.page-header.navbar .search-form.open .input-group .form-control {
  text-indent: 0;
}
.page-header.navbar .search-form.open .input-group .form-control:hover {
  cursor: text;
}
.page-header.navbar .search-form.open .input-group .input-group-btn .btn.submit {
  margin-left: 0;
}
.page-header.navbar .menu-toggler {
  display: block;
  cursor: pointer;
  opacity: 0.7;
  filter: alpha(opacity=70);
  width: 24px;
  height: 24px;
  background-repeat: no-repeat;
  background-position: center center;
}
.page-header.navbar .menu-toggler:hover {
  filter: alpha(opacity=100);
  opacity: 1;
}
.page-header.navbar .menu-toggler.sidebar-toggler {
  float: right;
  margin: 11px 0 0 0;
}

```

```

}
.page-sidebar-closed.page-sidebar-closed-hide-logo .page-header.navbar
.menu-toggler.sidebar-toggler {
  margin-right: 10.5px;
}
.page-header.navbar .menu-toggler.responsive-toggler {
  display: none;
  float: right;
  margin: 11px 6px 0 6px;
}
.page-header.navbar .top-menu {
  margin: 0;
  padding: 0;
  float: right;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav {
  padding: 0;
  margin-right: 20px;
  display: block;
  /* Extended Dropdowns */
  /* Notification */
  /* Inbox */
  /* Tasks */
  /* User */
  /* Language */
  /* Dark version */
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown {
  margin: 0px;
  padding: 0px 4px;
  height: 46px;
  display: inline-block;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown:last-child {
  padding-right: 0px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown > .dropdown-toggle {
  margin: 0px;
  padding: 17px 10px 9px 10px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown >
.dropdown-toggle:last-child {
  padding-right: 0;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown >
.dropdown-toggle > i {
  font-size: 17px;
}
}

```

```

.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown >
.dropdown-toggle > i.glyphicon {
  font-size: 16px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown >
.dropdown-toggle > .badge {
  font-family: "Open_Sans", sans-serif;
  position: absolute;
  top: 10px;
  right: 20px;
  font-weight: 300;
  padding: 3px 6px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown >
.dropdown-toggle:focus {
  background: none;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown .dropdown-menu {
  margin-top: 3px;
  -webkit-border-radius: 4px;
  -moz-border-radius: 4px;
  -ms-border-radius: 4px;
  -o-border-radius: 4px;
  border-radius: 4px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown
.dropdown-menu:before {
  position: absolute;
  top: -7px;
  right: 9px;
  display: inline-block !important;
  border-right: 7px solid transparent;
  border-bottom: 7px solid #eee;
  border-left: 7px solid transparent;
  border-bottom-color: rgba(0, 0, 0, 0.2);
  content: '';
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown .dropdown-menu:after {
  position: absolute;
  top: -6px;
  right: 10px;
  display: inline-block !important;
  border-right: 6px solid transparent;
  border-bottom: 6px solid #fff;
  border-left: 6px solid transparent;
  content: '';
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown .dropdown-menu > li > a {

```



```

    color: #555;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li.dropdown-extended .dropdown-menu {
    min-width: 160px;
    max-width: 275px;
    width: 275px;
    z-index: 9995;
    /* header notifications dropdowns */
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu > li.external {
    display: block;
    overflow: hidden;
    padding: 15px 15px;
    letter-spacing: 0.5px;
    -webkit-border-radius: 4px 4px 0 0;
    -moz-border-radius: 4px 4px 0 0;
    -ms-border-radius: 4px 4px 0 0;
    -o-border-radius: 4px 4px 0 0;
    border-radius: 4px 4px 0 0;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu > li.external > h3 {
    margin: 0;
    padding: 0;
    float: left;
    font-size: 13px;
    display: inline-block;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu > li.external > a {
    display: inline-block;
    padding: 0;
    background: none;
    clear: inherit;
    font-size: 13px;
    font-weight: 300;
    position: absolute;
    right: 10px;
    border: 0;
    margin-top: -1px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu > li.external > a:hover {
    text-decoration: underline;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu .dropdown-menu-list {

```

```

padding-right: 0 !important;
padding-left: 0;
list-style: none;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li > a {
display: block;
clear: both;
font-weight: 300;
line-height: 20px;
white-space: normal;
font-size: 13px;
padding: 16px 15px 18px;
text-shadow: none;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li > a:hover {
opacity: 1 ;
filter: alpha(opacity=100) ;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-extended .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li:first-child a {
border-top: none;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-notification .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li a .details {
overflow: hidden;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-notification .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li a .details .label-icon {
margin-right: 10px;
-webkit-border-radius: 50%;
-moz-border-radius: 50%;
-ms-border-radius: 50%;
-o-border-radius: 50%;
border-radius: 50%;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-notification .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li a .details .label-icon i {
margin-right: 2px;
margin-left: 1px;
}

```

```

.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-notification .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li a .details .label-icon .badge {
  right: 15px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-notification .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li a .time {
  float: right;
  max-width: 75px;
  font-size: 11px;
  font-weight: 400;
  opacity: 0.7 ;
  filter: alpha(opacity=70) ;
  text-align: right;
  padding: 1px 5px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-inbox > .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .photo {
  float: left;
  margin: 0 6px 6px 0;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-inbox > .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .photo img {
  height: 40px;
  width: 40px;
  -webkit-border-radius: 50% !important;
  -moz-border-radius: 50% !important;
  -ms-border-radius: 50% !important;
  -o-border-radius: 50% !important;
  border-radius: 50% !important;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-inbox > .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .subject {
  display: block;
  margin-left: 46px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-inbox > .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .subject .from {
  font-size: 13px;
  font-weight: 600;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-inbox > .dropdown-menu .dropdown-menu-list >

```

```

li .subject .time {
  font-size: 12px;
  font-weight: 400;
  opacity: 0.5 ;
  filter: alpha(opacity=50) ;
  float: right;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-inbox > .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .message {
  display: block !important;
  font-size: 12px;
  line-height: 1.3;
  margin-left: 46px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-tasks .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .task {
  margin-bottom: 5px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-tasks .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .task .desc {
  font-size: 13px;
  font-weight: 300;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-tasks .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .task .percent {
  float: right;
  font-weight: 600;
  display: inline-block;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-tasks .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .progress {
  display: block;
  height: 8px;
  margin: 8px 0 2px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-tasks .dropdown-menu .dropdown-menu-list >
li .progress .progress-bar {
  box-shadow: none;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-toggle {
  padding: 14px 6px 12px 8px;
}

```

```

}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-toggle > .username {
  display: inline-block;
  font-size: 13px;
  font-weight: 300;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-toggle > img {
  float: left;
  margin-top: -5px;
  margin-right: 5px;
  height: 29px;
  display: inline-block;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-toggle > i {
  display: inline-block;
  margin-top: 5px;
  margin: 0;
  font-size: 13px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-menu {
  width: 175px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-menu > li > a {
  font-size: 14px;
  font-weight: 300;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-menu > li > a i {
  width: 15px;
  display: inline-block;
  margin-right: 9px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-user .dropdown-menu > li > a .badge {
  margin-right: 10px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-language {
  padding-left: 0;
  padding-right: 0;
  margin: 0;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >

```

```

li.dropdown-language > .dropdown-toggle {
  padding: 14px 3px 12px 7px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-language > .dropdown-toggle > img {
  margin-bottom: 2px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-language > .dropdown-toggle > i {
  font-size: 14px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-language > .dropdown-menu > li > a {
  font-size: 13px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
li.dropdown-language > .dropdown-menu > li > a > img {
  margin-bottom: 2px;
  margin-right: 5px;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav li.dropdown-dark
.dropdown-menu:before {
  border-left: none;
  border-right: none;
}
.page-header.navbar .top-menu .navbar-nav li.dropdown-dark
.dropdown-menu .dropdown-menu-list > li.external a {
  background: none !important;
  border: none !important;
}
/* Allow expanded search for above 768px */
@media (min-width: 768px) {
  /* 768px */
  .page-header.navbar {
    /* Search box */
  }
  .page-header.navbar .search-form.search-form-expanded {
    width: 200px;
  }
  .page-header.navbar .search-form.search-form-expanded
  .input-group .form-control {
    text-indent: 0;
  }
  .page-header.navbar .search-form.search-form-expanded
  .input-group .form-control:hover {
    cursor: text;
  }
}

```

```

    .page-header.navbar .search-form.search-form-expanded
    .input-group .input-group-btn .btn.submit {
        margin-left: 0;
    }
}
/**
Horizontal Menu
***/
.page-header.navbar {
    /* Header container */
    /* Mega menu */
}
.page-header.navbar .container {
    position: relative;
}
.page-header.navbar .hor-menu {
    margin: 0 0 0 -17px;
    margin: 0;
    float: left;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav {
    position: static;
    /* Mega menu */
    /* Mega Menu Dropdown */
    /* Classic menu */
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav.navbar-right
.dropdown-menu {
    left: auto;
    right: 0;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown {
    position: static;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu {
    left: auto;
    width: auto;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content {
    font-family: "OpenSans", sans-serif;
    padding: 15px;
    margin: 0;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content

```

```

.mega-menu-responsive-content {
  padding: 10px 18px 10px 45px;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu {
  padding: 0;
  margin: 0;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu:last-child {
  border-right: 0;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu li {
  padding: 1px !important;
  margin: 0 !important;
  list-style: none;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu li > h3 {
  margin-top: 5px;
  padding-left: 6px;
  font-size: 15px;
  font-weight: 400;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu li > a {
  white-space: normal;
  font-family: "OpenSans", sans-serif;
  padding: 7px;
  margin: 0;
  font-size: 14px;
  font-weight: 300;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu li > a.iconify {
  padding: 7px 7px 7px 30px;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu li > a.iconify > i {
  position: absolute;
}

```



```

    top: auto !important;
    margin-left: -24px;
    font-size: 15px;
    margin-top: 3px !important;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu li > a .badge,
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown > .dropdown-menu .mega-menu-content
.mega-menu-submenu li > a .label {
    margin-left: 5px;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.mega-menu-dropdown.mega-menu-full .dropdown-menu {
    left: 20px;
    right: 20px;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.menu-dropdown .dropdown-menu:after, .page-header.navbar
.hor-menu .navbar-nav > li.menu-dropdown .dropdown-menu:before {
    display: none !important;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav > li > a {
    font-size: 14px;
    font-weight: 400;
    padding: 13px 13px;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav > li > a:focus {
    background: none !important;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.current.selected, .page-header.navbar
.hor-menu .navbar-nav > li.active.selected {
    left: 50%;
    bottom: 0;
    position: absolute;
    border-left: 6px solid transparent;
    border-right: 6px solid transparent;
    border-top: 6px solid transparent;
    display: inline-block;
    margin: 0;
    width: 0;
    height: 0px;
    margin-left: -7px;
    margin-bottom: -6px;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >

```

```

li .dropdown-menu {
  margin-top: 0;
  border: none;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li .dropdown-menu li > a {
  font-family: "Open_Sans", sans-serif;
  font-size: 14px;
  font-weight: 300;
  padding: 9px 10px;
  white-space: normal;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li .dropdown-menu li > a .label,
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li .dropdown-menu li > a .badge {
  font-weight: 300;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li.classic-menu-dropdown .dropdown-menu {
  min-width: 195px;
  max-width: 235px;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li .dropdown-submenu > .dropdown-menu {
  top: 0;
}
.page-header.navbar .hor-menu .navbar-nav >
li .dropdown-submenu > a:after {
  top: 9px;
  right: 10px;
}

/* Form medium devices upto large devices */
@media (min-width: 992px) and (max-width: 1200px) {
  /* 992px 1200px */
  /* Boxed layout */
  .page-boxed .page-header.navbar {
    /* Top menu */
  }
  .page-boxed .page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
  li.dropdown-user .dropdown-toggle
  .username.username-hide-on-mobile {
    display: none;
  }
  .page-boxed .page-header.navbar .top-menu .navbar-nav >
  li.dropdown-language .dropdown-toggle
  .langname {

```

```

        display: none;
    }
}
@media (min-width: 992px) {
    /* 992px */
    /* Page header */
    .page-header.navbar {
        /* Header logo */
    }
    .page-sidebar-closed.page-sidebar-closed-hide-logo
    .page-header.navbar .page-logo {
        padding: 0;
    }
    .page-sidebar-closed.page-sidebar-closed-hide-logo
    .page-header.navbar .page-logo {
        width: 45px;
    }
    .page-sidebar-closed.page-sidebar-closed-hide-logo
    .page-header.navbar .page-logo .logo-default {
        display: none;
    }
}

/* Boxed Layout */
.page-boxed .page-header.navbar {
    /* Page logo */
    /* Top menu */
}
.page-boxed .page-header.navbar .page-logo {
    width: 236px;
}
.page-boxed .page-header.navbar .top-menu .navbar-nav {
    margin-right: 0px;
}

/* Sidebar closed & logo hidden */
.page-sidebar-closed.page-sidebar-closed-hide-logo
.page-boxed .page-header.navbar {
    /* Page logo */
}
.page-sidebar-closed.page-sidebar-closed-hide-logo
.page-boxed .page-header.navbar .page-logo {
    width: 46px;
}

/* Boxed layout & page sidebar fixed layout */
.page-boxed.page-sidebar-fixed .page-header.navbar {
    /* Page logo */
}

```

```

.page-boxed.page-sidebar-fixed .page-header.navbar
.page-logo {
    width: 235px;
}
}
@media (max-width: 991px) {
    /* 991px */
    /* Page header */
    .page-header.navbar {
        padding: 0 20px 0 20px;
        position: relative;
        clear: both;
        /* Page logo */
        /* Menu Toggler */
        /* Top Menu */
    }
    .page-header.navbar .page-logo {
        width: auto;
        padding: 0;
        margin-right: 10px;
        margin-left: 0px !important;
        padding-left: 0px !important;
    }
    .page-header.navbar .page-logo img {
        margin-left: 4px !important;
    }
    .page-header.navbar .menu-toggler.sidebar-toggler {
        display: none !important;
    }
    .page-header.navbar .menu-toggler.responsive-toggler {
        display: inline-block;
    }
    .page-header.navbar .top-menu .navbar-nav {
        display: inline-block;
        margin: 0 10px 0 0;
    }
    .page-header.navbar .top-menu .navbar-nav > li {
        float: left;
    }
    .page-header.navbar .top-menu .navbar-nav .nav li.dropdown i {
        display: inline-block;
        position: relative;
        top: 1px;
        right: 0px;
    }
    .page-header.navbar .top-menu .navbar-nav .open .dropdown-menu {
        position: absolute;
    }
}

```

```

/* Fixed header for mobile */
.page-header-fixed.page-header-fixed-mobile .navbar-fixed-top {
  position: fixed;
}

/* Boxed Layout */
.page-boxed .page-header.navbar > .container {
  max-width: none !important;
  margin: 0 !important;
  padding: 0 !important;
}
}
@media (min-width: 768px) and (max-width: 991px) {
  /* 768px & 991px */
  /* Boxed Layout */
  .page-boxed .page-header.navbar {
    margin: auto !important;
    padding: 0;
  }
  .page-boxed .page-header.navbar > .container {
    margin: auto !important;
  }
}
@media (max-width: 767px) {
  /* 767px */
  /* Page header */
  .page-header.navbar {
    padding: 0 10px 0 10px;
    /* Header logo */
    /* Search box */
    /* Top navigation menu*/
  }
  .page-header.navbar .page-logo {
    width: auto;
  }
}

```

*El código continua por muchas más páginas.*



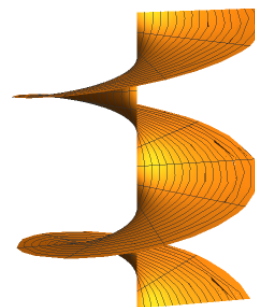
## Anexo B

# Wolfram Mathematica

*Las siguientes figuras han sido generadas mediante Wolfram Mathematica. El lenguaje de programación que utiliza esta aplicación y el cual será mostrado a continuación se llama Wolfram Language, tanto la aplicación como el lenguaje que se usa en esta han sido desarrollados por la misma empresa Wolfram Research.*

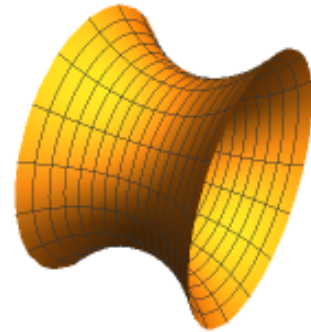
### B.1. Código figuras

*Figura 1 (Helicoide)*



```
ParametricPlot3D [{ucos[v], usin[v], v}, {u, 0, 5}, {v, 0, 4π}, Boxed → False, Axes → False]
```

**Figura 2** (Catenoide)



`ParametricPlot3D[{u, cosh[u]cos[v], cosh[u]sin[v]}, {v, 0, 2π}, {u, -1, 1}, Boxed → False, Axes → False, ImageSize → Small]`

Ahora explicaré que hacen los dos códigos de Wolfram Mathematica anteriores:

La orden `ParametricPlot3D` sigue la estructura:

`ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {u, umin, umax}, {v, vmin, vmax}]`

Esto produce una superficie de tres dimensiones con las ecuaciones  $\{f_x, f_y, f_z\}$  parametrizadas por dos variables  $u, v$  las cuales son definidas con  $\{u, u_{min}, u_{max}\}$  y  $\{v, v_{min}, v_{max}\}$  respectivamente donde se indica el valor máximo y mínimo de cada variable, en ambos casos he usado los valores del ejemplo 4. Luego añado ciertas modificaciones a los dibujos en este caso he quitado la caja y los ejes mediante `Boxed → False, Axes → False`, para finalizar, en la catenoide he modificado el tamaño del dibujo haciéndolo más pequeño con `ImageSize → Small`.



**Figura 3** (Transformación catenoide-helicoide)

```
Manipulate [ParametricPlot3D[
{cos[b]sinh[v]sin[u] + sin[b]cosh[v]cos[u], -cos[b]sinh[v]cos[u] + sen[b]cosh[v]sin[u], cos[b]u + sin[v]},
{u, 0, 2π}, {v, -1, 1}], {b, 0, π/2}]
```

Donde la orden *Manipulate* tiene la estructura:

```
Manipulate[expr, {u, umin, umax}]
```

Esto produce una versión de la expresión (*expr*) a la cual añade elementos para poder manipularla de forma interactiva modificando el valor de *u*, en este caso hemos añadido todos los elementos de control los cuales de izquierda a derecha son: primera imagen, imagen anterior, inicio/pausa, imagen posterior, última imagen, controles de velocidad para frames.

{*u*, *u<sub>min</sub>*, *u<sub>max</sub>*} se utiliza para modificar el valor de *u* en este caso varía entre 0 y  $2\pi$ .

En este caso *expr* es igual a:

```
[ParametricPlot3D [
{cos[b]sinh[v]sin[u] + sin[b]cosh[v]cos[u], -cos[b]sinh[v]cos[u] + sen[b]cosh[v]sin[u], cos[b]u + sin[v]},
{u, 0, 2π}, {v, -1, 1}]]
```

Y ya he explicado para las figuras anteriores como funcionaba esta orden, en este caso, se utilizan las ecuaciones de la parametrización para la transformación de catenoide a elipsoide.