Grado en Matemática Computacional

Estancia en Prácticas y Proyecto Final de Grado

Semigrupos numéricos supersimétricos

Autor:
Adrián Fidalgo Díaz

Supervisor:
Jose Francisco Ramos Romero
Tutor académico:
Julio José Moyano Fernández

Fecha de lectura: __ de ________ de 20__
Curso académico 2020/2021

Resumen

Este trabajo está divido en dos partes marcadas por cada capítulo. En la primera se hace un resumen de las actividades realizadas durante la estancia en prácticas. En este período se desarrolló un modelo de Machine Learning para estimar la probabilidad de que un próximo partido de fútbol resultara en empate. Quedan recogidas en esta parte cómo fue el proceso a medida que iba avanzando el tiempo y qué metodologías y materiales se usaron. El segundo capítulo aborda un estudio matemático de los semigrupos numéricos en el que se sigue un camino que lleva desde las bases de esta teoría hasta la explicación de la simetría y la supersimetría. Se presentan pruebas y resultados rigurosos así como una interpretación de los mismos.

Palabras clave

Machine learning, semigrupos numéricos, simetría.

Keywords

Machine learning, numerical semigroups, symmetry.

Índice general

Capítulo 1

Estancia en prácticas

1.1. Introducción

El Instituto de Nuevas Tecnologías de la Imagen (en adelante INIT) es una empresa integrada en el tejido del Espaitec, dentro de la Universitat Jaume I. Su localización física se encuentra en el edificio del Espaitec 2, desde donde he recibido las órdenes de mi supervisor de prácticas de forma telemática. Las actividades desarrolladas en el INIT van desde proyectos relacionados con visión artificial y 3D hasta investigación y aplicación de Machine Learning para reconocimiento de patrones. Es en este último contexto en el que se enmarca mi estancia en prácticas, la cual ha consistido enteramente en formarme y explotar al máximo este tipo de tecnología para resolver de la mejor manera posible un problema dado.

Con respecto a las actividades realizadas durante el período de la estancia, todas ellas se han servido prácticamente del uso de las mismas herramientas. El lenguaje de programación en el que se han desarrollado todas las tareas del trabajo ha sido Python. Además se ha usado Google Colab, el servicio de cloud computing que ofrece Google, que tiene un enfoque muy favorable hacia proyectos de data science. Las bibliotecas más usadas han sido la de Scikit-learn, para lo referente a los modelos de machine learning y la valoración de estos, y la de Pandas, para facilitar la exploración de los datos y disponer de una buena estructura con la que almacenarlos a la hora de trabajar con ellos. En menor medida también se ha usado Lazy Predict y Seaborn, cuyo uso será justificado cuando nos refiramos a ellas durante la Planificación temporal de las tareas. Dentro de este ámbito se aplicarán los conocimientos adquiridos durante el grado, concretamente los relacionados con las asignaturas de la rama de lenguajes de programación y los de la rama de estadística, para hacer un uso lo más fructífero posible de los datos y desarrollar una buena herramienta que arroje resultados de calidad sobre el problema a tratar.

1.2. Objetivos del proyecto formativo

El trabajo desarrollado se engloba dentro de un proyecto de análisis de resultados de fútbol en el que primero una aplicación “scrapper” recopila información sobre los mismos y se genera una base de datos. A partir de ahí el objetivo de mi estancia ha consistido en elaborar un modelo de machine learning capaz de anticipar un resultado de 0-0 o también llamado “scoreless draw” ante un próximo partido basándose en algunos de los datos recogidos como “número promedio de goles marcados por el visitante” o “porcentaje de partidos de la liga que terminan en empate”. También se ha hecho el mismo el estudio pero en un marco algo más general, el de predecir la probabilidad de empates sin imposición de la condición de scoreless draw. Es esta segunda parte la que ha arrojado más resultados satisfactorios en términos de bondad del modelo de clasificación obtenido. El modelo de predicción de empates y probabilidad de ocurrencia de los mismos ha sido puesto a prueba mediante varias métricas así como mediante la comparación de su salida con las cuotas ofrecidas por las casas de apuestas.

1.3. Explicación detallada del proyecto realizado en la empresa

1.3.1. Metodología y definición de tareas

La primera parte de las prácticas ha sido formativa. La obtención de una base sólida de conocimiento es esencial para un buen desempeño del trabajo y así ha sido. Durante las primeras semanas me he dedicado a aprender la buena praxis del trabajo con cantidades considerables de datos y las fases de desarrollo de un proyecto de machine learning. Después de esta etapa, cada fase correspondiente al estudio de un problema concreto ha transcurrido siguiendo el mismo formato. El cómo proceder no ha variado mucho de una etapa a otra obviando las mejoras que la experiencia ha ido trayendo. El siguiente apartado contiene información más concisa en lo referente a lo realizado a lo largo de la estancia.

1.3.2. Planificación temporal de las tareas

Primera quincena

El inicio de las prácticas se ha dedicado al estudio y comprensión de la primera parte del libro *Hands-on Machine Learning with Scikit-Learn, Keras & TensorFlow* [3], excluyendo lo referente a aprendizaje no supervisado y reducción de dimensionalidad. Las competencias enseñadas en este libro son claras y directas, orientadas a saber llevar a cabo un proyecto de machine learning pero sin dejar de lado el funcionamiento de los algoritmos utilizados. Con la realización de los ejercicios propuestos por el libro he conseguido aumentar mis conocimientos en este campo considerablemente y en muy poco tiempo.

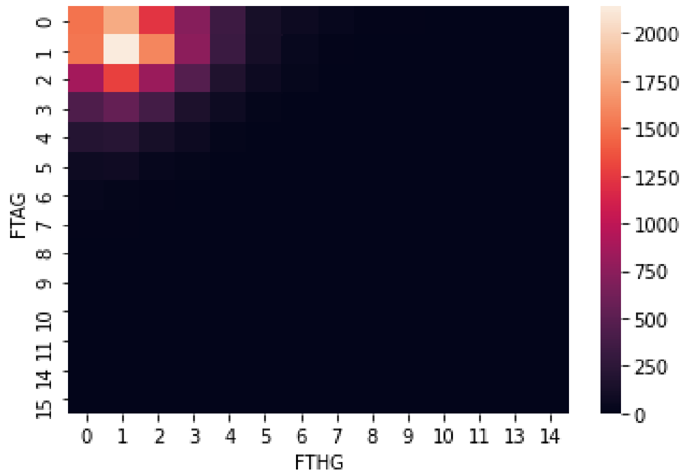
Segunda quincena

Tras terminar el período de formación, siguiendo las indicaciones de mi supervisor, he leído el paper *The Curse of Scoreless Draws in Soccer: The Relationship with a Team's Offensive, Defensive, and Overall Performance* [1], que trata sobre el problema de predecir cuántos empates 0-0 se van a producir en la temporada de un equipo de fútbol y qué variables considerar para maximizar el éxito del modelo. Pese a que podemos dar razones para argumentar que este problema dista del enfoque que tiene este proyecto, ya que la variable aleatoria "número de scoreless draws" que usa este paper es resultado de un sumatorio de la variable aleatoria que consideraremos nosotros ("ocurrencia de scoreless draw"), hay conclusiones que nos resultan muy útiles a la hora de empezar a trabajar. De la lectura de este artículo vemos que al parecer las variables "TGPG" y "PPG" (goles totales por partido y puntos por partido, respectivamente) tienen gran influencia a la hora de predecir este tipo de resultados. Con esto en mente empezamos el desarrollo del trabajo.

Al comienzo, con ayuda de mi supervisor, accedo a la base de datos creada por el scrapper y la almaceno en formato "pickle" desde Python para facilitar su uso por todos los programas que vaya creando. La organización que ha imperado desde el principio es la de separar las tres fases de limpieza de datos, entrenamiento y selección de un clasificador, y evaluación del modelo final. De esta manera un primer fichero se ocupa de explorar los datos y separarlos en los lotes de train y test set. Después los ficheros dedicados a la prueba de modelos cargan esos datos ya preparados y prueban cada uno su correspondiente modelo para después almacenarlo. De esta forma puedo aprovechar la pequeña concurrencia que ofrece Google Colab al permitir ejecutar más de un archivo al mismo tiempo. Por último, cuando se llegue a la fase de evaluación del clasificador elegido, un último fichero hace las pruebas pertinentes con la parte de los datos que estaba reservada para la evaluación. Esta fue la planificación que fijé con las herramientas disponibles para llevarla a cabo durante todo el proyecto siguiendo las recomendaciones del Apéndice B del libro de Hands on Machine Learning.

Con toda esta organización previa comienzo a trabajar. Durante esta quincena hago una primera limpieza de los datos e implemento los modelos referidos a árboles de decisión y máquinas de vectores de soporte. También escribo funciones para visualizar mejor los datos aprovechando Seaborn, un módulo de Python que permite expresar gran cantidad de información acerca de una muestra de datos mediante todo tipo de gráficas. Concluyo gracias a esto que la gran mayoría de los partidos (por encima del 98 %) presenta un marcador donde ningún equipo supera los 7 goles (véase Figura 1.1). Para mejorar el entrenamiento de los modelos decido eliminar durante la fase de entrenamiento los partidos en los que el marcador presenta números por encima de esta cifra. Esto me ayudará a mejorar sustancialmente la calidad de las predicciones.

Figura 1.1: Mapa de calor del número goles marcados en un partido.



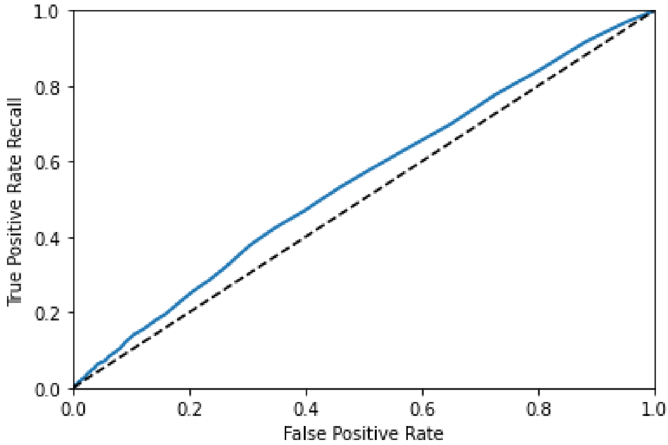
Además pienso nuevas formas de clasificar un partido como scoreless draw. La opción más inmediata que se me ocurre es atajar el resultado del partido con una predicción previa para después aproximar la probabilidad de empate 0-0. Implemento también funciones para guardar los modelos resultantes.

Tercera quincena

Continúo con la prueba de modelos y exploro la posibilidad de hacer la regresión intermedia a los goles. Después de implementarla, usando todos los algoritmos de machine learning de los que disponía, concluyo que lejos de presentar una ventaja frente a los modelos originales, produce peores resultados. Pruebo también otra regresión intermedia, esta vez, al resultado del partido. Los resultados son los mismo. Decido enfocar todos mis esfuerzos en conocer mejor los datos y buscar las features que mejor capaciten a los modelos para hacer una clasificación adecuada.

El modelo final obtiene malas calificaciones en la fase de evaluación y, siguiendo las directivas de mi supervisor, doy por terminada la predicción de empates 0-0 y continúo con la clasificación de empates en general.

Figura 1.2: Curva ROC del clasificador de scoreless draws durante la fase de cross validation.



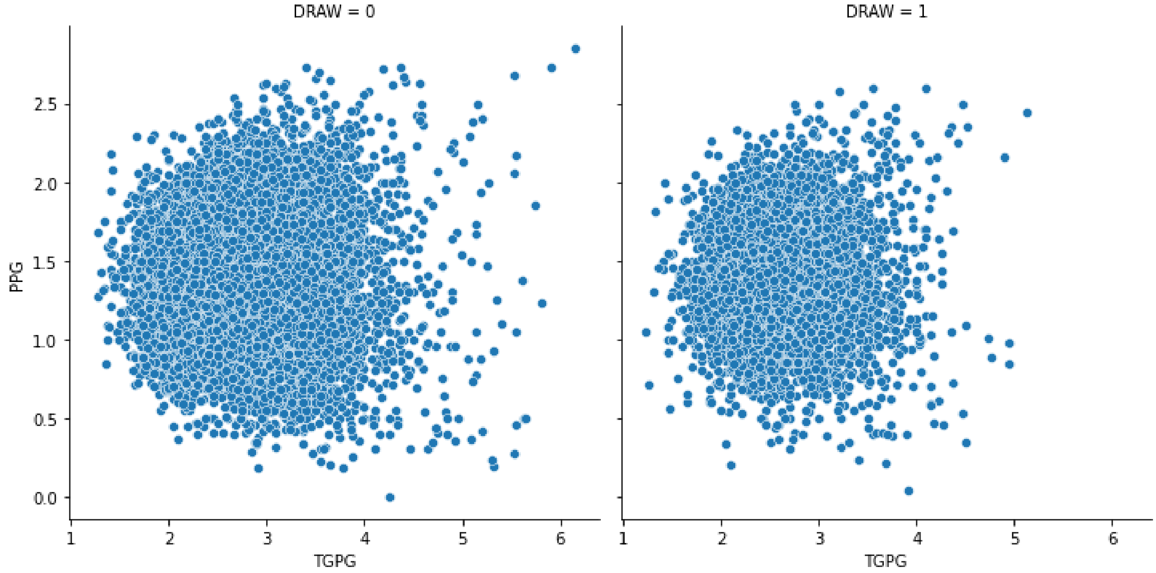
Cuarta quincena

Lo primero que hubo que hacer fue migrar toda la estructura organizativa del proyecto anterior al nuevo. Esto no llevó mucho tiempo dada la similar naturaleza de ambas tareas. Al probar los modelos considerados en la etapa anterior enseguida se pone de manifiesto que se trata de un problema ligeramente más sencillo. Pese a esto era necesario seguir avanzando porque ningún clasificador presentaba opciones de llegar a convertirse en un buen modelo. Por recomendación de mi supervisor de prácticas, decido investigar el combinar los datos ya existentes para obtener nuevas features que puedan ayudar a representar más la posibilidad de empate. La que parece mejorar más los clasificadores al añadirse es una que intenta mostrar la diferencia de goles entre los equipos local y visitante. Se construye como la distancia de Minkowsky de orden 3 entre los puntos del espacio ("goles marcados por partido", "goles encajados por partido") correspondientes al equipo visitante y local. También se ha probado todo tipo de tasas que expresen cuándo un equipo anota mucho en comparación a lo que recibe pero sin mucho éxito. Durante esta quincena comienzo a afianzar lo que ya venía pensando desde que empecé con el anterior proyecto: las features que mejor funcionan son "número total de goles por partido" y "empates por partido de la liga". Al contrario de lo que pasaba en el artículo, los goles y los puntos no son suficientes para expresar una cantidad de variabilidad notoria a la hora de predecir (véase Figura 1.3).

Quinta quincena

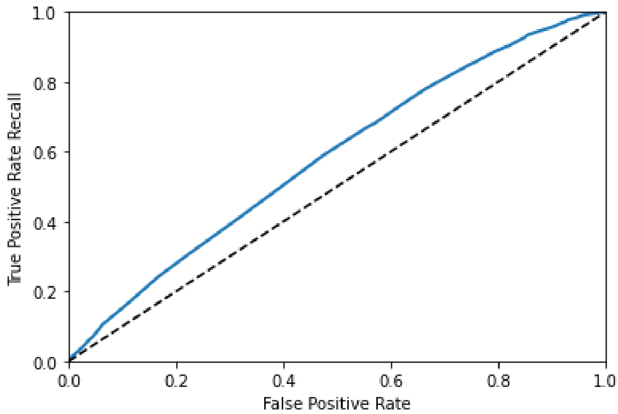
Con todos los recursos exprimidos casi al máximo, dedico la primera semana a construir varios modelos que implementen un ensemble method para aunar las predicciones realizadas por

Figura 1.3: Distribución de goles en un partido y puntos por partido.



cada candidato. Pruebo varios tipos de EnsembleClassifier pero el mejor resulta ser el Voting-Classifier. Aunque no con muy buenas puntuaciones en la fase de cross validation, decido pasar a la fase final de valoración del modelo. Elaboro un clasificador basado en dar una probabilidad de empate mediante el cálculo del inverso de las cuotas dadas por las casas de apuestas. Con esto tengo una referencia complementaria a la que aspirar y sobre la que puedo comparar mi modelo. Me llama la atención la forma de la curva ROC de este clasificador (véase Figura 1.4), ya que muestra un modelo bastante peor que el que podríamos imaginar que usan las casas de apuestas.

Figura 1.4: Curva ROC del clasificador basado en las cuotas de las casas de apuestas.



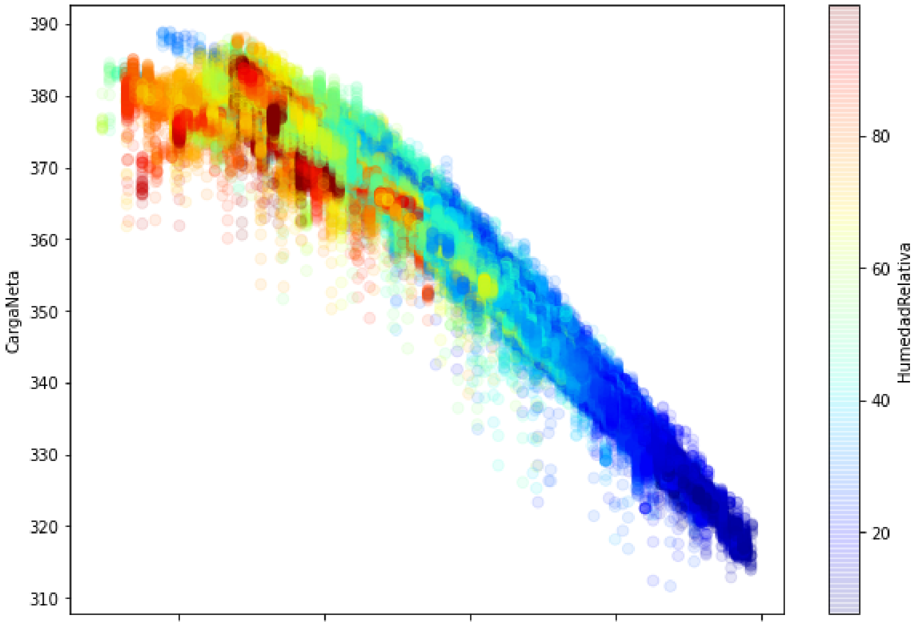
Tras aplicar todas las métricas y comparar el algoritmo con el obtenido de los casinos, la conclusión parece clara: el modelo no es lo suficientemente bueno pero se acerca tímidamente al de las casas de apuestas. Elaboro un informe de rentabilidad que muestra como se comporta el clasificador a largo plazo y qué beneficios produce en caso de apostar a aquellos partidos con una probabilidad favorable. Me pongo en contacto con mi supervisor para hacerle llegar los resultados. Este me sugiere ampliar mis fronteras y buscar y probar nuevos algoritmos. Me dice por donde empezar y así lo hago.

La biblioteca Lazy Classifier proporcionada por Francisco Ramos ha sido una herramienta muy útil a la hora de hacer evaluaciones rápidas de nuevos modelos. Hasta el momento los clasificadores que mejor funcionaban eran los basados en árboles de decisión como el RandomForestClassifier o el ExtraTreesClassifier. Pero luego de considerar y probar nuevos modelos gracias a Lazy Classifier se ha visto que modelos como el XGBoost podían ponerse a la par en la carrera por ver cuál es el mejor. Algunos algoritmos centrados en dar una regla de clasificación mediante algoritmos del tipo Naive Bayes también han resultado algo más satisfactorios. Con todo este fondo de armario se han vuelto a hacer cortas implementaciones de regresiones intermedias a los goles que no han llegado a buen puerto y quedan rechazadas definitivamente. Lo que sí ha tenido mayor éxito, en algunos casos, ha sido la aplicación de un preprocesado a las features de cada modelo para obtener combinaciones polinómicas de las mismas.

Sexta quincena

Durante la última quincena de prácticas se ha dedicado el tiempo a dos tareas. Primero se ha terminado de probar los nuevos modelos de predicción de empates y con ellos se ha seguido la misma metodología que recomienda el libro: usarlos para construir un ensemble method. Con el mejor modelo resultante se elabora el mismo informe de rentabilidad que en la quincena pasada. Los resultados mejoran considerablemente, llegando hasta superar a la casa de apuestas bajo algunas métricas, pero tras hacer la prueba de una batería de apuestas, el modelo sigue siendo incapaz de obtener un beneficio. Aún así las pérdidas que produce son bastante pequeñas lo que puede significar que este es el camino para construir un buen clasificador. La segunda tarea ha consistido en afrontar un problema distinto. Lejos del ámbito de los partidos de fútbol, dedico el tiempo sobrante de la estancia en prácticas a estudiar datos sobre unos almacenajes de gas. Se trata de un pequeño trabajo que realizo en apenas cuatro días en los que valoro métodos de compresión de modelos ya guardados y elaboro gráficas para explicar como influye el tamaño del dataset de entrenamiento en la bondad del método de machine learning. También estudio sobre cómo influye cada variable de las recogidas en la base de datos a la hora de predecir la carga neta de los almacenajes. Concluyo, entre otras cosas por la Figura 1.5, que la variable de Temperatura Ambiente es capaz de expresar casi en su totalidad la Carga Neta existente, algo de gran utilidad a la hora de realizar modelos y entrenarlos. Después de esta breve pero aprovechada exploración de los datos doy por terminada mi estancia.

Figura 1.5: Distribución de las variables del proyecto de Carga Neta frente la eje X dado por la Temperatura Ambiente.



1.3.3. Estimación de recursos del proyecto

Python

Python es un lenguaje de programación orientado a objetos en el cual se ha desarrollado toda la actividad contenida durante el período de estancia en prácticas. Su gran flexibilidad y versatilidad han sido claves para agilizar el proceso y poder realizar numerosas pruebas antes de dar con la solución final que resuelva las tareas planteadas por el tutor.

Google Colab

Es el entorno de programación de cloud computing ofrecido por Google de forma gratuita en el que se puede hacer uso de la ejecución por celdas de código, lo que resulta ideal para trabajos de programación de machine learning.

Scikit-learn

La biblioteca Scikit-learn ofrece una gran variedad de modelos de Machine Learning. También da la opción de combinarlos de las maneras más variopintas mediante sus clases Pipeline y FeatureUnion, entre otras. Además contiene métodos dedicados a la evaluación de los modelos donde el programador tiene un alto grado de control sobre la elección de los parámetros.

LazyClassifier y LazyRegressor

Son dos bibliotecas dedicadas a realizar pruebas previas a los modelos construidos con Scikit-learn para tener un idea de donde empezar a considerar opciones viables y qué algoritmos parece que son los más propensos a funcionar debidamente.

Matplotlib y Seaborn

Se trata de dos bibliotecas para representación de datos. Han sido convenientes a la hora de tener que representar el dataset en función de un número elevado de variables para estudiar a simple vista como expresan esas features la variabilidad del conjunto.

1.3.4. Grado de consecución de los objetivos propuestos

Como ya anticipaba mi supervisor al inicio de las prácticas, el trabajo realizado de predicción de empates no es una cosa trivial. Hay negocios montados en torno al resultado de los partidos y las casas de apuestas tienen muchos recursos trabajando para dar las mejores aproximaciones. Con estas perspectivas, el haber conseguido afinar un modelo hasta un punto en el que es superado solo ligeramente por el de los casinos ya es una victoria. Hay motivos para decir que la meta fijada al empezar el proyecto ha sido conseguida.

1.3.5. Conclusiones

El informe de análisis de rentabilidad obtenido al final de la estancia muestra como esta tarea que parecía imposible dada su magnitud es incluso atacable desde según qué flancos. La constancia ha sido clave para mejorar poco a poco cada modelo hasta dar con uno que tuviera un comportamiento lo mejor posible. En total se han llegado a probar más de 30 tipos de modelos a base de mezclarlos mediante las herramientas que ofrece la biblioteca Scikit-learn. El modelo resultante ha sido puesto a prueba simulando apostar a los partidos que se tenían registrados en la base de datos. Usando el criterio de Kelly [2], método para apostar que tiene en cuenta cómo de seguro está uno de realizar la apuesta y a cuánto se paga la apuesta para elegir la cantidad a invertir, las pérdidas obtenidas no superaban el 0,1 por unidad invertida si tomamos 1 como depósito inicial de cada apuesta. Todas las métricas apuntan a que el clasificador está por debajo del de las casas de apuestas pero solo ligeramente.

Por otra parte podemos deducir del lento aumento en las prestaciones de los modelos que el problema base radica en la falta de variables a considerar. Quizás un mayor conocimiento de los encuentros pueden llevar a perfeccionar una regla de clasificación que obtenga mejores resultados.

Capítulo 2

Memoria TFG

En esta parte vamos a estudiar un tipo concreto de submonoides de $\mathbb{N}$ que reciben el nombre de semigrupos numéricos. Empezaremos dando algunas definiciones y resultados basados en los contenidos del libro “Numerical Semigroups” [4] sobre los que edificaremos la teoría con la que poder analizar dichas estructuras. Haremos una vista general sobre qué caracteriza a un semigrupo, qué elementos “notables” presenta, su relación dentro de los posibles monoides de $\mathbb{N}$... Conforme vayamos avanzando profundizaremos más y más en aquellos semigrupos que presenten cualidades de interés siguiendo lo estudiado en el paper “On numerical semigroups” [5]. Pasaremos así a describir los semigrupos simétricos, una familia de semigrupos numéricos caracterizada por tener el mismo número de gaps que de elementos normales que además estarán relacionadas uno a uno por una simetría con eje en la mitad del número de Frobenius. Dentro de esta clase de semigrupos encontraremos los semigrupos supersimétricos, los cuales además de tener la propiedad de simetría poseen una estructura de sus Apéry muy concreta: los conjuntos de Apéry con respecto de un elemento del sistema generador minimal de un semigrupo supersimétrico no presentan sizígias. Además el sistema generador minimal de estos está compuesto por productos de números coprimos y consecuentemente veremos que existe una fórmula cerrada para calcular el número de Frobenius de cada semigrupo supersimétrico.

La tónica del TFG será entonces realizar este estudio radical de los semigrupos numéricos yendo desde las definiciones más clásicas que dan forma a este campo hasta una modesta introducción al mundo de la simetría y supersimetría.

2.1. Introducción a los semigrupos numéricos

En este capítulo se tratará de explicar los conceptos básicos para la familiarización con los semigrupos numéricos y algunas de sus propiedades más características. La intención es de servir como acercamiento para entender estas estructuras y mostrar algún resultado relacionado con los distintivos más fundamentales de cada semigrupo.

Definición 1. Sea M un conjunto no vacío y $+ : M \times M \to M$ una ley de composición interna en M. Diremos que el par $(M, +)$ es un *monoide* si cumple:

1. Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in M$.
2. Elemento neutro: $\exists e \in M : a + e = e + a = a \quad \forall a \in M$.

Diremos que $(M, +)$ es un *monoide conmutativo* o *abeliano* si satisface además la siguiente propiedad:

3. Propiedad conmutativa: $a + b = b + a \quad \forall a, b \in M$.

A menudo, para relajar la notación, podremos omitir nombrar la operación estructural $+$ del monoide $(M, +)$ así como denotar el elemento neutro por 0.

Definición 2. Sea $(M, +)$ un monoide y sea $N \neq \emptyset$ un subconjunto de M, entonces diremos que $(N, +)$ es un *submonoide* de M si N es cerrado bajo $+$ y se da que $0 \in N$.

Ejemplo 1. Veamos algunos ejemplos de monoides:

- El monoide trivial formado únicamente por el elemento neutro $(\{0\}, +)$.
- Los naturales con la suma usual $(\mathbb{N}, +)$.
- Sea G un conjunto no vacío, las aplicaciones $f : G \to G$ con la composición $(\mathrm{Apl}(G), \circ)$.

Además tanto $\mathbb{N}$ como $\{e\}$ son conmutativos y, si $e = 0 \in \mathbb{N}$, entonces $\{e\}$ es un submonoide de $\mathbb{N}$.

Definición 3. Dado un monoide M y un subconjunto $A \subseteq M$ no vacío, se define el *monoide generado por* A como

$$\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \in M : \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \}$$

El conjunto A se llama *sistema generador de* $\langle A\rangle$. Por como está definido $\langle A\rangle$ es inmediato ver que se trata de un submonoide de M, ya que $0 \in \langle A\rangle$ y la suma de dos elementos de $\langle A\rangle$ como $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ y $b = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_m b_m$ da como resultado $a + b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_m b_m$ que innegablemente es un elemento de $\langle A\rangle$.

Proposición 1. *Sea M un monoide y sea $A \subseteq M$, entonces $\langle A \rangle$ es la intersección de todos los monoides que contienen al conjunto A.*

Demostración. Sea $I = \{N \subseteq M : \; A \subseteq N \wedge N$ es un submonoide de M$\}$ vamos a probar que $\langle A \rangle = \bigcap_{N \in I} N$. Si tomamos un elemento $a \in \langle A \rangle$ será de la forma $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ con $\lambda_i \in \mathbb{N}$ y $a_i \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Pero por definición, si $N \in I$ entonces $a_i \in A \subseteq N$ y por ser N un monoide tenemos que cualquier combinación lineal de los elementos de a_i sobre $\mathbb{N}$ también está incluida en N, en particular, $a \in N$ y con esto demostramos que $\langle A \rangle \subseteq \bigcap_{N \in I} N$. Por otra parte como $\langle A \rangle$ es un submonoide de M y $A \subseteq \langle A \rangle$ entonces $\langle A \rangle \in I$ y se sigue que $\bigcap_{N \in I} N = (\bigcap_{N \in I} N) \cap \langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle$. □

Definición 4. Dados dos monoides M_1 y M_2, decimos que una aplicación $f : M_1 \to M_2$ es un *homomorfismo de monoides* si conserva la aplicación estructural, es decir, si

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in M_1$$

Diremos además que se trata de un *isomorfismo* si f es biyectiva y por lo tanto admite inversa, la cual será a su vez también un isomorfismo de monoides.

Definición 5. Dados dos monoides M_1 e M_2 decimos que son *isomorfos* si existe un isomorfismo que los conecte. Esto queda denotado por $M_1 \cong M_2$.

A continuación vamos a definir una clase especial de monomios la cuál será el objeto de estudio para el resto de este trabajo: los semigrupos numéricos.

Definición 6. Un *semigrupo numérico* es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ con complemento en $\mathbb{N}$ finito.

Nota 1. Dado A un subconjunto de $\mathbb{N}$ y sea $a \in A$, escribiremos "$\rightarrow$" como último elemento después de a para indicar que si $n \geq a$, entonces $n \in A$.

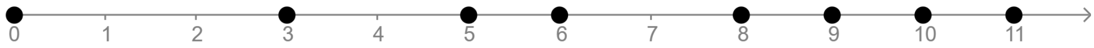
Ejemplo 2. Veamos algunos ejemplos de semigrupos numéricos:

- El semigrupo numérico más fácil que podemos encontrar es el propio $\mathbb{N}$.
- $\langle 2, 4, 7 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 7, \rightarrow\}$
- $\langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, \rightarrow\}$, representado en la Figura 2.1.

Veamos ahora un lema que caracteriza a los generadores de un semigrupo numérico con la siguiente propiedad:

Lema 1. *Sea $A \neq \emptyset$ con $A \subseteq \mathbb{N}$. Entonces $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico si y solo si* $\gcd(A) = 1$.

Figura 2.1: Semigrupo numérico $\langle 3, 5 \rangle$.



Demostración. Si $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico entonces por ser $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ finito podemos definir $n_0 = \text{máx}(\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle)$. Dado un $x > n_0$ tenemos que $x, x+1 \in \langle A \rangle$. Si denotamos por $d = \gcd(A)$ vemos fácilmente que tanto $d \mid x$ como $d \mid x+1$ por lo que d divide a $(x+1-x) = 1$ y concluimos que $d = 1$.

Supongamos ahora que $\gcd(A) = 1$. Si $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ se tiene por la identidad de Bézout que $\exists z_1 z_2, \ldots z_n \in \mathbb{Z}$ tal que $z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots + z_n a_n = 1$. Ahora bien, si $i_1, i_2, \ldots, i_k$ son los subíndices de los enteros no negativos y $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$, los de los negativos, tenemos $z_{i_1} a_{i_1} + z_{i_2} a_{i_2} + \ldots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - z_{j_2} a_{j_2} - \ldots - z_{j_{n-k}} a_{j_{n-k}}$. Esto quiere decir que $\exists s \in \langle A \rangle$ tal que $s+1 \in \langle A \rangle$. Veamos que si $n \geq (s-1)s + (s-1)$ entonces $n \in \langle A \rangle$. Sean $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $n = sq + r$ con $0 \leq r < s$. Por la construcción de n tenemos que $sq + r \geq (s-1)s + (s-1)$ y por la construcción de r, $(s-1) - r \geq 0$. De estas dos desigualdades deducimos que $sq - (s-1)s \geq 0$ para llegar a que $q \geq s-1$. Luego $n = (rs + r) + (q - r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle$ y por tanto la cardinalidad de $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es menor que $(s-1)s + (s-1)$ y $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico. $\square$

Proposición 2. *Sea M un submonoide de $\mathbb{N}$, exceptuando el monoide trivial $M = \{0\}$, existe un semigrupo numérico S tal que $S \cong M$.*

Demostración. Sea $d = \gcd(M)$, por el Lema 1 sabemos que $S = \langle \{ \frac{m}{d} \in \mathbb{N} : \ m \in M \} \rangle$ es un semigrupo numérico. Veamos pues que la aplicación $f : M \to S$ definida como $f(a) = \frac{a}{d} \quad \forall a \in M$ es un isomorfismo de monoides. Es fácil ver que f es inyectiva ya que sean $a, b \in M : \ f(a) = f(b)$ entonces $\frac{a}{d} = \frac{b}{d} \implies a = b$. También de forma sencilla vemos que es sobreyectiva. Sea $s \in S$ tenemos que $s = \frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{d} + \ldots + \frac{m_n}{d}$ con $m_i \in M$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Esto se puede reescribir como $s = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{d} = \frac{m}{d}$ con $m \in M$. Llegados a este punto comprobamos que $f(m) = \frac{m}{d} = s$. Por último para demostrar que se trata de un isomorfismo, sean $m_1, m_2 \in M$, se tiene que $f(m_1 + m_2) = \frac{m_1 + m_2}{d} = \frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{d} = f(m_1) + f(m_2)$. $\square$

Este resultado nos cerciora de que podemos estudiar todos los submonoides de $\mathbb{N}$ desde un punto de vista algebraico dedicándonos solo a los semigrupos numéricos. Echemos un vistazo ahora a los sistemas de generadores y a cómo se comportan bajo el isomorfismo definido en la prueba de la proposición 2.

Definición 7. Dados un monoide M y un sistema generador A, decimos que A es un *sistema generador minimal* si ningún subconjunto propio de A genera a M.

Ejemplo 3. Siguiendo la definición 7, sea S el semigrupo numérico, el cual más en general es un monoide, dado por

$$S = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, \rightarrow\}$$

Entonces:

- $\{4, 9, 13\}$ es un sistema generador de S no minimal.
- $\{4, 9\}$ es un sistema generador de S minimal.

Definición 8. Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S$ con $n \neq 0$, definimos el *conjunto de Apéry* de S con respecto a n como:

$$\mathrm{Ap}\,(S, n) = \{s \in S : \ s - n \notin S\}$$

A veces por simplicidad omitiremos el nombre del semigrupo S siempre que no haya lugar a dudas.

Ejemplo 4. Sea S el semigrupo numérico definido en el ejemplo 3, entonces

- $\mathrm{Ap}\,(S, 4) = \{0, 9, 18, 27\}$
- $\mathrm{Ap}\,(S, 8) = \{0, 4, 9, 13, 18, 22, 27, 31\}$

Lema 2. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S$ con $n \neq 0$. Entonces $\mathrm{Ap}\,(S, n) = \{w_0, w_1, \dots w_{n-1}\}$ donde w_i es el menor elemento de S que cumple $w_i \equiv i \mod n$ para $i = 0, 1, \dots n-1$.*

Demostración. En primer lugar $w_i - n$ no pertenece a S por como están definidos los w_i, lo que nos lleva directamente a afirmar que $w_i \in \mathrm{Ap}\,(S, n)$. Supongamos ahora que el conjunto de Apéry tiene más elementos que los dados por w_i. Si $\exists a \in \mathrm{Ap}\,(S, n) : \ a \notin \{w_0, w_1, \dots w_{n-1}\}$ entonces $\exists w_i$ tal que $w_i \equiv a \mod n$ para algún i. Llegamos así a que $a - w_i = kn$ con $k \in \mathbb{Z}$ y de nuevo por la definición de w_i, se tiene que $k > 0$. Por tanto $a = w_i + (k-1)n + n \in S$ (por ser todos los sumandos elementos de S), lo que implica que $a - n = w_i + (k-1)n \in S$. Pero esto contradice el supuesto de que a es un elemento de $\mathrm{Ap}\,(S, n)$. $\square$

El conjunto de Apéry junto con la definición equivalente dada por el lema 2 son herramientas indispensables a la de trabajar con semigrupos numéricos y de ahora en adelante aparecerán en multitud de resultados y sus demostraciones.

Nota 2. Dados $A, B \subseteq \mathbb{N}$ denotamos por $A^* = A \setminus \{0\}$ y el conjunto suma como $A + B = \{a + b \in \mathbb{N} : \ a \in A \quad b \in B\}$.

Lema 3. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$ entonces $\forall s \in S \;\; \exists!(k, w) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Ap}\,(S, n)$ tal que $s = kn + w$.*

Demostración. Sea $w_s \in \mathrm{Ap}\,(S, n) : \; w_s \equiv s \mod n$ tenemos que $s = w_s + kn$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pero por el lema 2, como $s \in S$ y es congruente con w_s, entonces $k \geq 0$ esto termina la prueba. □

Teorema 1. *Cada semigrupo numérico admite un único sistema generador minimal el cuál a su vez es finito.*

Demostración. Sea S un semigrupo numérico, veamos primero que el conjunto $E = S^* \backslash (S^* + S^*)$ es un sistema generador de S, es decir, sea $s \in S$ veamos que $s \in \langle E \rangle$. Si $s \in E$ entonces es claro que $s \in \langle E \rangle$. Si $s \notin E$ tenemos que $\exists x, y \in S^*$ tal que $s = x + y$. Si x o y no es un elemento de E, continuamos con este proceso de descomposición hasta obtener $s_1, s_2, \ldots, s_n \in E : \; s = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$. Veamos ahora que este sistema de generadores es minimal y único. Para probar ambas cosas supongamos que A es otro sistema generador de S y llegaremos a la conclusión de que $E \subseteq A$. Si $x \in E$ entonces por ser A sistema generador $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ para $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$. Pero como $x \notin (S^* + S^*)$ tenemos que $x = a_i$ para algún $1 \leq i \leq n$ y por tanto x es un elemento de A.

Para terminar comprobemos que este sistema generador es finito. Dado $n \in S^*$ consideremos el siguiente conjunto: $G = \mathrm{Ap}\,(S, n) \cup \{n\}$. Se tiene por el Lema 3 que cualquier $s \in S$ puede expresarse como suma de elementos de G, lo que concluye que G genera a S. Además, del Lema 2 se sigue que $|\mathrm{Ap}\,(S, n)| = n$ y con esto $|G| = n + 1$. Como hemos visto antes, existe un único sistema generador minimal el cual es, por definición, un subconjunto de G, y consecuentemente su cardinalidad será a lo sumo $n + 1$. □

Corolario 1. *Sea M un submonoide de $\mathbb{N}$, entonces M tiene un único sistema generador minimal que además es finito.*

Demostración. Sea $d = \gcd(M)$ entonces $S = \{\frac{m}{d} \in \mathbb{N} : \; m \in M\}$ es un semigrupo numérico por el Lema 1. Además $M \cong S$ bajo la aplicación f definida en la demostración de la Proposición 2. Para empezar veamos que si A es un sistema generador de M entonces $f(A)$ genera a S. Sea $s \in S$ y $m \in M$ tales que $f(m) = a$, entonces $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ para $n \in \mathbb{N}^*$ con $m = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ por ser A sistema generador. Calculando las imágenes y con el hecho de que f es un homomorfismo se deduce que $f(s) = f(\lambda_1) f(a_1) + f(\lambda_2) f(a_2) + \ldots + f(\lambda_n) f(a_n)$. Teniendo en cuenta que la aplicación f^{-1} también es un isomorfismo de monoides, se puede razonar recíprocamente para llegar al resultado análogo de que la antiimagen de un sistema generador de S es un sistema generador de M.

Veamos ahora que si E es el sistema generador minimal de S entonces $f^{-1}(E)$ es el sistema generador minimal y único que buscamos. Por lo probado anteriormente $f^{-1}(E)$ es generador de M. Sea H un sistema generador cualquiera de M, entonces $f(H)$ es sistema generador de S. Por lo demostrado en el Teorema 1, $E \subset f(H)$ y como f es biyectiva, $f^{-1}(E) \subset H$. De esta manera cualquier sistema generador de M contiene a f^{-1} y el corolario queda probado. □

Con esto terminamos lo referente a monoides en general y de ahora en adelante nos centraremos en los semigrupos numéricos en exclusiva. Pasaremos ahora a definir algunas propiedades características de cada semigrupo así como resultados relacionados con estas. Uno de los temas a tratar será la respuesta a la pregunta "¿cuál es el número más grande que no puede expresarse como combinación lineal entera positiva de dos números naturales?". Para todo esto el enfoque va a cambiar ligeramente, pues ya podemos identificar a los semigrupos numéricos en virtud del Lema 1 mediante su sistema generador minimal en vez de considerarlos solo como un submonoide de $\mathbb{N}$.

Definición 9. Sea S un semigrupo numérico y sea $E = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ su sistema generador minimal con $\text{mín}(E) = s_1$, entonces decimos que S tiene *multiplicidad* s_1, denotado por $m(S) = s_1$, y que su *dimensión de embebimiento* es el cardinal de E, escrito como $e(S) = |E| = n$.

Definición 10. Sea $\geq$ una relación binaria de orden sobre el conjunto de los elementos de un monoide $(M, +)$, decimos que $\geq$ es un orden monótono si cumple la siguiente propiedad:

- Sean $a, b \in A$ tal que $a \geq b$ entonces para cualquier elemento $c \in A$ se tiene que $a+c \geq b+c$.

Lema 4. *Sea $(M, +)$ un monoide y sea $\geq$ un orden monótono sobre $(M, +)$, entonces si A y B son dos subconjuntos de M se tiene que* $\text{mín}(A + B) = \text{mín}(A) + \text{mín}(B)$.

Demostración. Cada elemento del conjunto $A + B$ puede expresarse como suma de un $a \in A$ y otro $b \in B$. Ahora del hecho de que $a \geq \text{mín}(A)$ y de que $\geq$ es un orden monótono se tiene que $a + b \geq \text{mín}(A) + b$. A partir de esta desigualdad, con el mismo razonamiento sobre el conjunto B llegamos a que $a + b \geq \text{mín}(A) + \text{mín}(B)$. En particular el elemento mínimo de $A + B$, expresado como $\text{mín}(A + B) = a_m + b_m$ con a y b elementos de A y B respectivamente, también cumple $\text{mín}(A + B) = a_m + b_m \geq \text{mín}(A) + \text{mín}(B)$ y por ser el propio mínimo de $A + B$, $\text{mín}(A) + \text{mín}(B) \geq \text{mín}(A + B)$. Luego $\text{mín}(A) + \text{mín}(B) = \text{mín}(A + B)$ □

Proposición 3. *Sea S un semigrupo numérico, entonces:*

1. $m(S) = \text{mín}(S^*)$
2. $e(S) \leq m(S)$

Demostración.

1. Consideremos el sistema generador minimal de S. En el Teorema 1 vimos que se trataba del conjunto $S^* \setminus (S^* + S^*)$. Por definición tenemos que la multiplicidad de S es $m(S) = \min(S^* \setminus (S^* + S^*))$. Pero como el orden usual es monótono, por el Lema 4 tenemos que $\min(S^* + S^*) = \min(S^*) + \min(S^*)$ y por tanto $\min(S^*) < \min(S^* + S^*)$. Con esto podemos afirmar que el elemento mínimo del sistema generador minimal es $m(S) = \min(S^* \setminus (S^* + S^*)) = \min(S^*)$.

2. Por el Lema 3 el conjunto $A = \{m(S)\} \cup \mathrm{Ap}\,(S, m(S))$ es sistema generador. Pero este conjunto puede simplificarse sin perder representación de S como $A^* = \{m(S)\} \cup \mathrm{Ap}\,(S, m(S))^*$. De esta forma A^* es un sistema generador de $m(s)$ elementos (la cardinalidad del conjunto de Apéry viene dada en el lema 2) y entonces el sistema generador minimal de S será como máximo de este tamaño, esto es, $e(S) \leq |A| = m(S)$.

□

Nota 3. El resto del trabajo que contiene definiciones y resultados sobre un semigrupo numérico dado están sujetas a que este no se trate del semigrupo trivial $\mathbb{N}$.

Definición 11. Sea S un semigrupo numérico, llamaremos *número de Frobenius* de S al mayor número natural que no se encuentre en el semigrupo, es decir, $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$.

Definición 12. Sea S un semigrupo numérico, definimos $N(S) = \{s \in S : s < F(S)\}$. Denotamos el cardinal de este conjunto como $n(S)$.

Definición 13. Sea S un semigrupo numérico llamamos *conjunto de huecos* de S o simplemente *gaps* al conjunto $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$. Su cardinalidad viene dada por $g(S)$ y nos referiremos a ella como *género* de S.

El conjunto $N(S)$ o, alternativamente $G(S)$, ofrece una descripción completa del semigrupo al que corresponde. Los elementos de S que están en la "cola" del semigrupo, es decir, aquellos $s \in S$ tal que $s > F(S)$, pueden ser vistos como redundancia de información, ya que solo es necesario especificar cuál es $F(S)$ para nombrarlos a todos. Esto motiva la notación explicada en la Nota 1.

Ejemplo 5. Pasemos a ver cuáles son el número de Frobenius y los gaps de los semigrupos dados en el Ejemplo 2.

- El número de Frobenius de $\langle 2, 7\rangle$ es $F(\langle 2, 7\rangle) = 5$ y sus gaps, $G(\langle 2, 7\rangle) = \{1, 3, 5\}$.
- Para el semigrupo $\langle 3, 5\rangle$, $F(\langle 3, 5\rangle) = 7$ y $G(\langle 3, 5\rangle) = \{1, 2, 4, 7\}$.

Proposición 4. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \neq 0$ un elemento de S, entonces:*

1. $F(S) = (\max \mathrm{Ap}\,(S, n)) - n$

2. $g(S) = \frac{1}{n}\sum_{w\in \mathrm{Ap}\,(S,n)} w - \frac{n-1}{2}$

Demostración.

1. Por definición del número de Frobenius, $F(S) + n \in \mathrm{Ap}\,(S, n)$. Si $m = \max \mathrm{Ap}\,(S, n)$, entonces $m-n \notin S$ y por tanto $m-n \leq F(S)$. Pero por otra parte es claro que $F(S)+n \in \mathrm{Ap}\,(S, n)$ y, por el carácter máximo de m, $F(S) + n \leq m$. Usando ambas desigualdades tenemos que $F(S) = m - n$.

2. Por el Lema 2 tenemos que existen $k_1, k_2, \ldots k_{n-1} \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathrm{Ap}\,(S, n) = \{0, k_1n + 1, k_2n + 2, \ldots, k_{n-1}n + (n - 1)\}$. Además este mismo lema también nos dice que esos elementos $k_in + i$ son los más pequeños del semigrupo que son congruentes con i módulo n, es decir, los gaps son precisamente aquellos números que son menores que su respectivo elemento del conjunto de Apéry con el que son congruentes. Por la forma de estos, tenemos que por cada $k_in + i$ existen exactamente k_i gaps, esto es

$$g(S) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(k_in + i) - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{w\in \mathrm{Ap}\,(S,n)} w - \frac{n-1}{2}$$

□

La Proposición 4 nos da una caracterización tanto del número de Frobenius como del número de gaps de un semigrupo. Sin embargo no nos da una forma de calcular explícitamente ambos números sin tener que recurrir a averiguar el conjunto de Apéry del mismo. Si dirigimos nuestra atención a algunos conjunto más concretos de semigrupos numéricos podemos dar una expresión que cumple este requisito. Estudiemos la siguiente fórmula para semigrupos generados por 2 elementos.

Proposición 5. *Sean* $a, b \in \mathbb{N}^*$ *con* $\gcd(a, b) = 1$, *se tiene que*

1. $F(\langle a, b\rangle) = ab - a - b$

2. $g(\langle a, b\rangle) = \frac{ab-a-b+1}{2}$

Demostración. Para poder utilizar el resultado de la Proposición 4 vamos a calcular el conjunto de Apéry de a. Veamos que si w es un elemento del semigrupo tal que puede expresarse como $w = k_1a + k_2b$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ y $k_1 > 0$, entonces w no puede pertenecer a $\mathrm{Ap}\,(\langle a, b\rangle, a)$ porque $w-a = (k_1-1)a+k_2b \in \langle a, b\rangle$. Luego los únicos elementos que pueden formar parte del conjunto de Apéry de a son $0, b, 2b, \ldots, (a - 1)b$. Aplicando la Proposición 4 obtenemos

1. $F(\langle a, b\rangle) = (a - 1)b - a = ab - a - b$.

2. $g(\langle a,b\rangle) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a-1} ib - \frac{a-1}{2} = \frac{b}{a}\frac{a(a-1)}{2} - \frac{a-1}{2} = \frac{ab-a-b+1}{2}$

□

Para terminar la introducción a los semigrupos numéricos veamos un par de resultados que se desprenden también de la Proposición 4 y que continúan en la línea de estudiar el número de Frobenius y el género de un semigrupo.

Lema 5. *Sea S un semigrupo numérico generado por $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ y sea T el semigrupo $T = \langle \frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d} \ldots, \frac{n_{p-1}}{d}, n_p\rangle$ con $d = \gcd\{n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}\}$, entonces $\mathrm{Ap}\,(S, n_p) = d(\mathrm{Ap}\,(T, n_p))$.*

Demostración. Primero probemos la inclusión $\mathrm{Ap}\,(S, n_p) \subseteq d(\mathrm{Ap}\,(T, n_p))$. Si $w \in \mathrm{Ap}\,(S, n_p)$ con $w \neq 0$, veamos que $w \in \langle n_1, n_2, \ldots n_{p-1}\rangle \subset S$. Si $w = k_1n_1 + k_2n_2 + \ldots + k_pn_p$ con $k_i \in \mathbb{N}$ y $k_p > 0$, entonces $w - n_p \in S$ lo cuál entra en conflicto con la definición de w y se tiene que w ha de ser combinación lineal de los elementos $n_1, n_2, \ldots n_{p-1}$. De esto se deduce que $\frac{w}{d} \in \langle \frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \ldots \frac{n_{p-1}}{d}\rangle \subset T$. Si suponemos ahora que $\frac{w}{d} \notin \mathrm{Ap}\,(T, n_p)$ se llega a una contradicción ya que $\frac{w}{d} - n_p \in T \implies w - dn_p \in S \implies w \notin \mathrm{Ap}\,(S, n_p)$.

Veamos la inclusión contraria. Si $w \in \mathrm{Ap}\,(T, n_p)$, entonces por el mismo razonamiento de antes se tiene $w \in \langle \frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \ldots \frac{n_{p-1}}{d}\rangle \subset T$ y en consecuencia $dw \in \langle n_1, n_2, \ldots n_{p-1}\rangle \subset S$. El resto de la prueba se sigue por reducción al absurdo. Supongamos que $dw \notin \mathrm{Ap}\,(S, n)$ o, equivalentemente, $dw - n_p \in S$. Esto implica el poder escribir $dw - n_p = \lambda_1n_1 + \lambda_2n_2 + \ldots + \lambda_pn_p$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p \in \mathbb{N}$ y bajo unos pequeños arreglos se tiene $d(w - (\frac{\lambda_1n_1}{d} + \frac{\lambda_2n_2}{d} + \ldots + \frac{\lambda_{p-1}n_{p-1}}{d})) = (\lambda_p + 1)n_p$. Ahora bien, por el Lema 1, $\gcd(d, n_p) = 1$ y por (DIVISIBILIDAD REFERENCIAR), d divide a $\lambda_p + 1$. Tenemos así que $w - n_p = \frac{\lambda_1n_1}{d} + \frac{\lambda_2n_2}{d} + \ldots + \frac{\lambda_pn_p}{d} \in T$ pero esto es una contradicción ya que $w \in \mathrm{Ap}\,(T, n_p)$. □

Proposición 6. *Sea S un semigrupo numérico con $\{n_1, n_2, \ldots n_p\}$ su sistema generador minimal y sea $T = \langle\{\frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \ldots, \frac{n_{p-1}}{d}, n_p\}\rangle$, entonces:*

1. $F(S) = dF(T) + (d-1)n_p$
2. $g(S) = dg(T) + \frac{(d-1)(n_p-1)}{2}$

Demostración. Ambas pruebas se siguen de aplicar el Lema 5 y la Proposición 4:

1. $F(T) = \max(\mathrm{Ap}\,(T, n_p)) - n_p \implies \max(\mathrm{Ap}\,(T, n_p)) = F(T) + n_p$.

   $F(S) = \max(\mathrm{Ap}\,(S, n_p)) - n_p = \max(d\mathrm{Ap}\,(T, n_p)) - n_p = d(\max(\mathrm{Ap}\,(T, n_p))) - n_p = dF(T) + (d-1)n_p$.

2. $g(T) = \frac{1}{n_p}\sum_{v\in \mathrm{Ap}\,(T,n_p)} v - \frac{n_p-1}{2} \implies \frac{1}{n_p}\sum_{v\in \mathrm{Ap}\,(T,n_p)} v = g(T) + \frac{n_p-1}{2}$.

   $g(S) = \frac{1}{n_p}\sum_{w\in \mathrm{Ap}\,(S,n_p)} w - \frac{n_p-1}{2} = \frac{1}{n_p}\sum_{v\in \mathrm{Ap}\,(T,n_p)} dv - \frac{n_p-1}{2} = d(g(T) + \frac{n_p-1}{2}) + \frac{n_p-1}{2} = dg(T) + \frac{(d-1)(n_p-1)}{2}$.

□

2.2. El tipo y la simetría.

Al igual que el capítulo anterior se centraba en describir los semigrupos numéricos usando el sistema de generadores minimal, el número de Frobenius y el conjunto de gaps, en este se buscará principalmente estudiar cada semigrupo mediante un nuevo invariante: su tipo. Además este servirá para clasificar una familia concreta de semigrupos a la que prestaremos especial atención.

Definición 14. Sea S un semigrupo numérico, decimos que $x \in \mathbb{N} \setminus S$ es un *número de pseudofrobenius* si $\forall s \in S^* \quad x + s \in S$. Al conjunto de números de pseudofrobenius lo denotamos por $\mathrm{PF}(S)$ y su cardinalidad es llamada *tipo de S*, escrito como $t(S)$.

Lema 6. *Sea S un semigrupo numérico generado por $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, entonces $f \notin S$ es un número de pseudofrobenius si y solo si para cualquier $s_i \in P$ se tiene que $f + s_i \in S$.*

Demostración. La primera implicación es trivial ya que $f + s \in S^*$ para cualquier elemento s del semigrupo y, en particular, para $s \in P$. Veamos ahora que si $f + s_i \in P$ para todo $s_i \in P$, entonces f es un pseudofrobenius. Sea $s \in S^*$ podemos expresar $s = a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n$ con $a_i \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $s \neq 0$, ha de haber un elemento a_k que sea no nulo. Por hipótesis tenemos que $f + a_ks_k = (f + s_k) + (a_k - 1)a_k \in S$ y por tanto $f + s = (f + a_ks_k) + a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_{k-1}s_{k-1} + a_{k+1}s_{k+1} + \ldots + a_ns_n \in S$. □

Ejemplo 6. Sean los siguientes semigrupos numéricos y sus números de pseudofrobenius:

- $\langle 2, 3\rangle = \{0, 2, \rightarrow\}$ con $\mathrm{PF}(\langle 2, 3\rangle) = \{1\}$ y tipo $t(\langle 2, 3\rangle) = 1$.
- $\langle 4, 9, 11\rangle = \{0, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 15, \rightarrow\}$ con $\mathrm{PF}(\langle 4, 9, 11\rangle) = \{7, 14\}$ y tipo $t(\langle 4, 9, 11\rangle) = 2$.

El parecido en los nombres de número de Frobenius y números de pseudofrobenius se debe a una naturaleza también similar, ya que el número de Frobenius provoca que cualquier suma en la que intervenga resulte en un elemento del semigrupo y, de igual manera, los números de pseudofrobenius realizan la misma atracción pero solo desde números del semigrupo. En particular tenemos que el número de Frobenius es un también un número de pseudofrobenius, el más grande de todos.

Definición 15. Sea S un semigrupo numérico, decimos que $a \leq_S b$ si $b - a \in S$.

Lema 7. *Sea S un semigrupo numérico, entonces $\leq_S$ es una relación de orden en $\mathbb{N}$.*

Demostración. Para que una relación binaria sea un orden ha de ser reflexiva, antisimétrica y transitiva. Vamos a probar estas tres propiedades. Sean $s, r, t \in S$, entonces

1. Reflexiva: Tenemos que $s \leq_S s$ ya que $s - s = 0 \in S$ por ser 0 un elemento presente en todos los semigrupos.
2. Simétrica: Si $s \leq_S r$ y $s \neq r$, entonces $r - s \in S$. Así $s - r = -(r - s) \notin S$ y por tanto $r \nleq_S s$.
3. Antisimétrica: Si $s \leq_S r$ y $r \leq_S t$, se tiene que tanto $r - s \in S$ como $t - r \in S$. Por ser ambos elementos de S su suma también lo es: $(r - s) + (t - r) = t - s \in S$, y esto implica que $s \leq_S t$.

□

Esta relación de orden depende por definición del semigrupo en el que estemos trabajando. Además está fuertemente unida al conjunto de números de pseudofrobenius como dejan entrever las proposiciones 7 y 8 a continuación.

Proposición 7. *Sea S un semigrupo numérico, entonces:*

1. $\mathrm{PF}(S) = \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$

2. $x \in \mathbb{Z} \setminus S \iff \exists f \in \mathrm{PF}(S) : \ f - x \in S$

Demostración.

1. Cada inclusión se prueba mediante un razonamiento de reducción al absurdo. Para la primera parte, sea $x \in \mathrm{PF}(S)$ y supongamos que $\exists z \in \mathbb{Z} \setminus S : \ x \leq_S z \wedge z \neq x$. Entonces rápidamente vemos que $z - x \in S \implies (z - x) + x = z \in S$ por ser x un número de pseudofrobenius pero esto es imposible por la construcción de z . En segundo lugar, sea $z \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$. Asumamos esta vez que $\exists s \in S : \ z + s = a \notin S$, es decir, z no es un número de pseudofrobenius. Esto lleva a que $s = a - z \in S \implies z \leq_S s$ contradiciendo la maximalidad de z .
2. Veamos primero la implicación $x \in \mathbb{Z} \setminus S \implies \exists f \in \mathrm{PF}(S) : \ f - x \in S$. Sea $x \in \mathbb{Z} \setminus S$, el supuesto $x \in \mathrm{PF}(S)$ es trivial ya que $x - x = 0 \in S$, luego consideremos $x \notin \mathrm{PF}(S)$. Tendremos así que $\exists s \in S^* : \ x + s \notin S$. Definamos ahora el conjunto A como $A = \{s \in S :$

$x+s \notin S^*\}$. Este conjunto es no vacío como acabamos de ver por lo que podemos nombrar a su máximo como $t = \max(A)$. Por la construcción de t es inmediato que $x+t \in \mathrm{PF}(S)$ ya que si $r \in S^*$ entonces $(x+t)+r = x+(t+r) \in S$ por no ser $t+r$ un elemento de A. En consecuencia $(x+t)-x = t \in S$ probando la primera implicación. Para demostrar la segunda basta con fijarnos en que $(f-x)+x = f \in \mathbb{Z} \setminus S$, hecho que sería imposible si x fuera un elemento de S, ya que la suma de dos elementos del semigrupo resulta en otro elemento del semigrupo.

□

Proposición 8. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \neq 0$ un elemento de S, entonces*

$$\mathrm{PF}(S) = \{w - n : \ w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}\,(S,n))\}$$

Demostración. Vamos a probar la igualdad de conjuntos separándola en dos inclusiones. Primero veamos que $\mathrm{PF}(S) \subseteq \{w-n : \ w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}\,(S,n))\}$. Sea x un número de pseudofrobenius, entonces su suma con cualquier número del semigrupo da como resultado otro número del semigrupo, en particular como $n \in S$, se tiene $x+n \in S$ y por tanto $x+n\mathrm{Ap}\,(S,n)$. Veamos ahora que si t pertenece a $\mathrm{Ap}\,(S,n)$ y $x+n \leq_S t$ entonces t y $x+n$ son el mismo número. Sea $s = t-(x+n) = t-x-n$, por la definición de t sabemos que $s \in S$. De la construcción de s obtenemos que $t-n = x+s$, pero como $t-n \notin S$ y $x \in \mathrm{PF}(S)$, s ha de ser 0 porque en caso contrario $x+s \in S$ llevándonos a una contradicción. Luego queda probado que x es maximal dentro de $\mathrm{Ap}\,(S,n)$.

Para probar la inclusión recíproca sea ahora $t \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}\,(S,n))$. Tenemos así que $t-n \notin S$. Supongamos que existe un elemento $s \neq 0$ de S tal que $t-n+s \notin S$. Esto implicaría que $t+s$ perteneciera al conjunto de Apéry de n y tendríamos que $t \leq_S t+s$ ya que $(t+s)-t = s \in S$. Pero esto se contradice con el hecho de que t es maximal en $\mathrm{Ap}\,(S,n)$, de lo que se concluye que $t-n+s \in S \quad \forall s \in S^*$ y $t-n$ es un número de pseudofrobenius. □

Corolario 2. *Sea S un semigrupo numérico, entonces*

$$t(S) \leq m(S) - 1$$

Demostración. De la definición 14 (tipo de un semigrupo) y de la proposición 8 aplicada al conjunto de Apéry de $m(S)$ se deduce:

$$t(S) = |\mathrm{PF}(S)| = |\{w - m(S) : \ w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}\,(S,m(S)))\}| = |\mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}\,(S,m(S)))|$$

Pero como el número de elementos del conjunto de Apéry respecto de $m(S)$ es exactamente $m(S)$ por el lema 2 y entre ellos se encuentra el 0, el cuál nunca será maximal, podemos dar la siguiente cota superior de $t(S)$:

$$t(S) = |\mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}\,(S,m(S)))| \leq m(S) - 1$$

$\square$

Corolario 3. *Sea S un semigrupo numérico con $e(S) = 2$, entonces $t(S) = 1$.*

Demostración. Como ya vimos en la prueba de la Proposición 5, si $S = \langle a, b \rangle$, entonces $\mathrm{Ap}\,(S, a) = \{0, b, \ldots, (a-1)b\}$. Este conjunto solo tiene un maximal respecto del orden $\geq_S$ ya que cualquier elemento del conjunto se puede expresar como ib con $0 \leq i < a$ y en consecuencia $(a-1)b - ib = (a-1-i)b \in S$. Por la Proposición 8 tenemos que el número de maximales del conjunto de Apéry es el tipo del semigrupo y concluimos que $t(S) = 1$. $\square$

Definición 16. Sea S un semigrupo numérico minimalmente generado por $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, entonces escribimos $d_i = \gcd\{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, t$ y definimos el siguiente conjunto:

$$\overline{S} = \langle \{ \frac{s_i}{\prod_{j \neq i} d_j} \; : \; i = 1, 2, \ldots, t \} \rangle$$

Llamamos a $\overline{S}$ *semigrupo derivado* de S.

Proposición 9. *Sea S un semigrupo numérico, entonces $\overline{S}$ es un semigrupo numérico.*

Demostración. Primero veamos que el monoide $\overline{S}$ está bien definido. Tenemos que todos los d_j de la definición 16 son coprimos, ya que en caso de haber dos d_a, d_b que compartieran algún divisor k no trivial llegaríamos a que todos los elementos del sistema generador minimal $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ son divisibles entre k y eso no es posible por el Lema 1. Esto sumado al hecho de que cada d_j con $j \neq i$ divide a $s_i \in P$, resulta en que $\prod_{j \neq i} d_j$ divide a s_i.

Visto esto es fácil comprobar que se trata de un semigrupo numérico. Si S no es semigrupo numérico, entonces el Lema 1 nos asegura que $\gcd(\frac{s_1}{\prod_{j \neq 1} d_j}, \frac{s_2}{\prod_{j \neq 2} d_j}, \ldots, \frac{s_n}{\prod_{j \neq n} d_j}) \neq 1$. Pero esto no es posible porque entonces tendríamos que $\gcd(P) \neq 1$. El semigrupo derivado es efectivamente un semigrupo numérico. $\square$

Ejemplo 7. Sea S el semigrupo minimalmente generado por $\{4, 6, 7\}$, entonces tenemos:

- $S = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, 11, \rightarrow\}$, representado en la Figura 2.2.
- $\overline{S} = \{0, 2, 3, 4, \rightarrow\}$, representado en la Figura 2.3.

La definición de semigrupo derivado está orientada a construir un semigrupo numérico relacionado con el original del cuál se parte pero con una naturaleza más sencilla. Así cuando calculamos $\overline{S}$ obtenemos un semigrupo cuyo sistema generador minimal E' es más "simple" que el original E. La dimensión de embebimiento será menor o igual que la de S y cada uno de los elementos de E' son más pequeños que los respectivos elementos de E. La mayor utilidad de estos semigrupos radica en la siguiente proposición.

Figura 2.2: Semigrupo numérico $S = \langle 4, 6, 7 \rangle$.

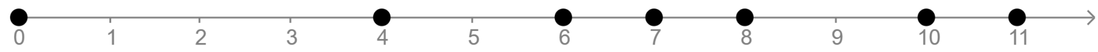
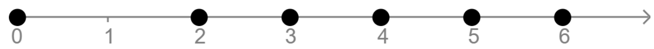


Figura 2.3: Semigrupo numérico $\overline{S} = \langle 2, 3 \rangle$.



Proposición 10. *Sea S un semigrupo numérico y $\overline{S}$ su semigrupo derivado, entonces el tipo de ambos semigrupos coincide, esto es*

$$t(S) = t(\overline{S})$$

Demostración. Sea $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un sistema generador de S, definimos cada uno de los d_i como $d_i = \gcd\{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}$ y vamos a construir una familia de semigrupos S_i de la siguiente forma:

1. $S_0 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

2. $S_i = \{\frac{s_1}{\prod_{j \neq 1}^{j \leq i} d_j}, \frac{s_2}{\prod_{j \neq 2}^{j \leq i} d_j}, \ldots, \frac{s_n}{\prod_{j \neq n}^{j \leq i} d_j}\}$

Esta construcción no es más que ir progresivamente añadiendo divisores a los elementos del sistema generador original para terminar con $S_n = \overline{S}$. Ahora por la Proposición 8 se tiene que el número de maximales de $\mathrm{Ap}\,(S_{i+1}, s_{i+1})$ es el mismo que el de $\mathrm{Ap}\,(S_i, s_i)$, ya que los apérys del primero son múltiplos de los del segundo. La iteración de este razonamiento en un número finito n de pasos nos lleva a que $t(S) = t(S_0) = t(S_n) = t(\overline{S})$. $\square$

Proposición 11. *Sea S un semigrupo numérico, entonces*

$$g(S) \leq t(S)n(S)$$

Demostración. Consideremos la aplicación dada por

$$\begin{aligned}\varphi : G(S) &\longrightarrow \mathrm{PF}(S) \times N(S)\\ x &\longmapsto \varphi(x) = (f_x, f_x - x)\end{aligned}$$

con $f_x = \min\{f \in \mathrm{PF}(S) : \ x \leq_S f\}$. Esta definición es correcta ya que la existencia de un f_x para cada $x \in G(S)$ está asegurada por el segundo resultado de la proposición 7. Veamos ahora que se trata de una aplicación inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in G(S) : \ \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, entonces $(f_1, f_1 - x_1) = (f_2, f_2 - x_2)$ lo que inmediatamente provoca que $x_1 = x_2$. De esta forma tenemos que $|G(S)| \leq |\mathrm{PF}(S) \times N(S)|$ y, equivalentemente, $g(S) \leq t(S)n(S)$. □

Corolario 4. *Sea S un semigrupo numérico, entonces*

$$F(S) + 1 \leq (t(S) + 1)n(S)$$

Demostración. Sabiendo que $g(S) + n(S) = F(S) + 1$, la desigualdad se obtiene de aplicar esto al resultado de la proposición 11. □

Nota 4. Uno de los problemas actuales es el de verificar si, siendo S un semigrupo numérico, entonces se cumple la siguiente relación entre sus invariantes:

$$F(S) + 1 \leq e(S)n(S)$$

Esta desigualdad es conocida como la conjetura de Wilf y es un problema que lleva abierto durante más de 50 años. Por el Corolario 4 sabemos inmediatamente que esta condición es cierta para aquellos semigrupos que verifican que $t(S < e(S)$.

Después de esta toma de contacto con el tipo y los números de pseudofrobenius, vamos a continuar estudiando la simetría de un semigrupo, una propiedad que guarda múltiples relaciones con lo visto hasta ahora en esta sección. El capítulo terminará con la obtención de algunas identidades y cotas referentes a los característicos que hasta ahora se han definido. Empecemos con algunas definiciones, entre ellas, la de semigrupo simétrico.

Definición 17. Sea S un semigrupo numérico y sea NG el conjunto $NG = N(S) \cup G(S)$ de los elementos de $\mathbb{N}$ más pequeños o iguales que $F(S)$, definimos la *aplicación simétrica* de S como

$$\begin{aligned}\phi : NG &\longrightarrow NG\\ x &\longmapsto \phi(x) = F(S) - x\end{aligned}$$

La imagen de x por la aplicación simétrica es llamada *simétrico* de x.

Lema 8. *Sea S un semigrupo numérico y ϕ su aplicación simétrica entonces*

1. *ϕ es inyectiva.*

2. *ϕ es involutiva, es decir, $\phi(\phi(x)) = x$ para $x \in NG$.*

3. *$\phi(N(S)) \subseteq G(S)$.*

4. *$N(S) \subseteq \phi(G(S))$*

5. *Sea $x, y \in NG$, entonces $x \geq y$ si y solo si $\phi(x) \leq \phi(y)$.*

6. *Sea $x, y \in NG$, entonces $x \geq_S y$ si y solo si $\phi(x) \leq_S \phi(y)$.*

Demostración.

1. Sean $x_1, x_2 \in NG$ tal que $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. De forma equivalente, $F(S) - x_1 = F(S) - x_2$, lo que directamente nos lleva a que $x_1 = x_2$.

2. Sea $x \in NG$, entonces $\phi(\phi(x)) = \phi(F(S) - x) = F(S) - (F(S) - x) = x$.

3. Consideremos la imagen de $N(S)$ por la aplicación simétrica de S y veamos que es subconjunto del conjunto de gaps. Si $s \in N(S)$ y su simétrico también es un elemento del semigrupo se llega a una contradicción ya que $\phi(s) = F(S) - s \implies \phi(s) + s = F(S) \in S$ pero el número de Frobenius no está en S por definición.

4. Se deduce inmediatamente de aplicar el apartado 2 al apartado 3.

5. Si $x \geq y$, entonces $F(S)+x \geq F(S)+y$ y se tiene que $\phi(x) = F(S)-x \geq F(S)-y = \phi(y)$. Un razonamiento análogo conduce a demostrar la otra implicación.

6. Si $x \geq_S y$, entonces $\phi(y)-\phi(x) = F(S)-y-F(S)+x = x-y$ y por hipótesis $x-y \in S$, con lo que $\phi(x) \leq_S \phi(y)$. Un razonamiento análogo conduce a demostrar la otra implicación.

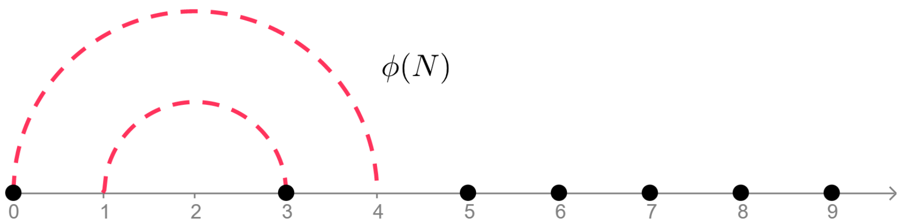
□

El nombre que se le da a ϕ no es aleatorio, ya que si representamos el conjunto NG y su imagen, vemos que la aplicación le hace corresponder a cada elemento el punto simétrico en la recta con respecto de $(F(S) + 1)/2$.

Ejemplo 8. Sea $S = \langle 3, 5 \rangle$ un semigrupo numérico, veamos cómo actúa la aplicación simétrica sobre NG mediante la Figura 2.4.

La idea que subyace en la definición de $\phi(x)$ es la de poder estudiar la relación que existe entre los gaps de un semigrupo y sus normales. El Lema 8 nos habla de las propiedades de dicha aplicación y el vínculo entre un elemento y su simétrico. Veamos algunos resultados que se desprenden inmediatamente de estudiar los semigrupos desde esta perspectiva.

Figura 2.4: Semigrupo numérico $\langle 3, 5, 7\rangle$ y $\phi(N)$.



Proposición 12. *Sea S un semigrupo numérico, entonces*

$$g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}.$$

Demostración. De los apartados 1 y 3 de la Proposición 8 se tiene que la cantidad de gaps es mayor o igual al número de normales. Por otro lado como los conjuntos $N(S)$ y $G(S)$ son una partición de $\{0, 1, \dots, F(S)\}$, entonces $|N(S)| + |G(S)| = F(S) + 1$. Uniendo ambos resultados concluimos

$$|G(S)| \geq \frac{F(S)+1}{2}$$

como queríamos. □

De la Proposición 12 también se desprende el hecho de que el número de normales sea menor o igual a $(F(S) + 1)/2$. La prueba es análoga a la de dicha proposición. Pasemos a centrarnos en un tipo especial de semigrupos, los semigrupos simétricos.

Definición 18. Sea S un semigrupo numérico y ϕ su aplicación simétrica, decimos que S es *simétrico* si $\phi(N(S)) = G(S)$.

La definición de simetría junto con el Lema 8, apartados 3 y 4, nos lleva a ver la equivalencia de esta con el hecho de que la función simétrica, restringida a $N(S)$, dé una biyección entre los normales y los gaps. No obstante, existen varias caracterizaciones de la simetría más útiles que pueden ayudarnos a la hora de discernir si un semigrupo es simétrico o no.

Lema 9. *Las siguientes proposiciones son equivalentes y sirven para caracterizar los semigrupos simétricos:*

1. *S es un semigrupo simétrico.*

2. *Para cualquier $x \in \mathbb{N}$ se tiene que $x \in S$ o $\phi(x) \in S$.*

3. *Existe $a \notin S$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{N}$ se cumple que o bien $x \in S$ ó $a - x \in S$.*

4. Si $x + y = F(S)$, entonces únicamente un elemento del par x e y está en S.

5. Existe $a \notin S$ tal que si $x + y = a$, solo un elemento del par x e y está en S.

6. Los conjuntos $N(S)$ y $G(S)$ tienen el mismo número de elementos.

Demostración. Veamos primero la equivalencia de la primera y la segunda proposición. Si S es simétrico y $x \notin S$ tenemos que $\phi(x) = y$ con $y \in N(S)$ por el Lema 8 apartado 4. Por otra parte si para cualquier $x \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \in S$ ó $\phi(x) \in S$, en particular, si x es un gap su simétrico está en S. Esto de nuevo junto al apartado 4 del Lema 8 produce que $N(S) = \phi(G(S))$ y por el apartado 2, $\phi(N(S)) = G(S)$.

La tercera proposición es consecuencia clara de la segunda. Si por otra parte asumimos que existe un $a \notin S$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \in S$ ó $a - x \in S$, entonces ese elemento a ha de ser $F(S)$ porque en caso contrario tanto $F(S)$ como $a - F(S) \leq 0$ no son elementos del semigrupo. Con lo que recordando la definición de la aplicación ϕ concluimos que se trata del mismo enunciado de la proposición segunda.

Si reformulamos el quinto apartado tenemos el siguiente enunciado: "Si $x = F(S) - y$, entonces únicamente un elemento del par x e y está en S". Este es equivalente al del apartado 2 y de forma similar obtenemos la misma equivalencia con la quinta y la tercera proposición.

El último apartado se sigue inmediatamente de la definición de semigrupo simétrico, y, de forma recíproca, si $n(S) = g(S)$, entonces del apartado 4 del Lema 8 y de la inyectividad de ϕ se tiene que $\phi(N(S)) = G(S)$. $\square$

Definición 19. Sea S un semigrupo numérico S no simétrico, definimos

$$h(S) = \text{máx}\{x \in \mathbb{N} : \ x \notin \phi(N(S)) \quad x \notin S\}$$

La condición de no simetría en la Definición 19 es necesaria para que esta tenga sentido. Si el semigrupo S ahí nombrado fuese simétrico, entonces $\phi(N(S)) = G(S)$ y el conjunto sobre el que se hubiese de hallar el máximo para obtener $h(S)$ sería vacío.

Lema 10. *Sea S un semigrupo numérico, entonces*

$$\phi(N(S)) \cap \mathrm{PF}(S) = \{F(S)\}$$

Demostración. La demostración se sigue de que si existe un $f \in \mathrm{PF}(S) \setminus \{F(S)\}$ tal que este f es el simétrico de algún $s \in N(S)$, entonces esto implicaría que $F(S) = f + s$, entrando en contradicción con la Proposición 8, donde tomando un n cualquiera, se tiene que f y $F(S)$ no han de estar relacionados mediante el orden $\geq_S$. Por otra parte la pertenencia de $F(S)$ a ambos conjuntos es obvia ya que $\phi(0) = F(S)$. $\square$

Proposición 13. *Sea S un semigrupo numérico no simétrico, entonces $h(S)$ es el segundo mayor elemento de* $\mathrm{PF}(S)$*.*

Demostración. Primero veamos como $h(S)$ es efectivamente un número de pseudofrobenius. Si por el contrario existe un $s \in S$ tal que $h(S) + s \notin S$ entonces en la definición de $h(S)$ su maximalidad implica que $h(S) + s \in \phi(N(S))$ y por tanto hay un elemento s_0 de $N(S)$ que cumple $h(S)+s = F(S)-s_0$, con lo que que $h(S) = F(S)-(s+s_0)$. Aquí hay dos opciones: o bien $s+s_0$ no es un normal o $h(S) \in \phi(N(S))$. Lo primero no es posible porque si $s+s_0 \geq F(S)+1$, entonces $h(S) \notin \mathbb{N}$, y lo segundo tampoco puede pasar porque entra en conflicto con la definición de $h(S)$ como elemento que no pertenece a los simétricos de los normales. Luego la hipótesis de que $h(S)$ no pertenece a $\mathrm{PF}(S)$ queda desmentida.

Para la segunda parte, si f es un número de pseudofrobenius distinto de $F(S)$, entonces $f \notin S$ y, por el Lema 10, $f \notin \phi(N(S))$. Luego $f \in \{x \in \mathbb{N} : \ x \notin \phi(N(S)) \quad x \notin S\}$ y por definición $h(S) \geq f$. □

Proposición 14. *Sea S un semigrupo numérico, entonces S es simétrico si y solo si $t(S) = 1$.*

Demostración. Si S es simétrico y $f \in \mathrm{PF}(S)$ entonces existe un elemento s normal tal que $\phi(s) = F(S) - s = f$. Pero este s ha de ser 0 porque en caso contrario tendríamos $F(S) \geq_S f$, algo imposible como ya se vio en la prueba del Lema 10. Por otro lado si S no es simétrico entonces $\mathrm{PF}(S) \subseteq \{h(S), F(S)\}$ y por tanto $t(S) = |\mathrm{PF}(S)| \geq 2$. □

En la Proposición 14 viene dada la caracterización más usada a la hora de probar la simetría. Y es que identificar que un semigrupo es simétrico solo con comprobar su tipo nos abre la puerta al uso de algunos resultados expuestos con anterioridad para estudiar la simetría, como fijarnos en los maximales del conjunto de Apéry (Proposición 8). A continuación tenemos la Definición 20, hablando de una familia de semigrupos muy parecida a la de los semigrupos simétricos.

Definición 20. Sea S un semigrupo numérico con $F(S)$ un número par, entonces decimos que S es *pseudosimétrico* si $\phi(N(S)) = G(S) \setminus \{F(S)/2\}$.

Lema 11. *Sea S un semigrupo numérico con $F(S)$ un número par, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *S es pseudosimétrico.*
2. *Para cualquier $x \in \mathbb{N}$ se tiene que x es un elemento de S, x es un elemento de $\phi(N(S))$ o x es $F(S)/2$, exclusivamente.*
3. $\mathrm{PF}(S) = \{F(S)/2, F(S)\}$.
4. *Los conjuntos $N(S)$ y $G(S) \setminus \{F(S)\}$ tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Las dos primeras proposiciones son equivalentes ya que la segunda, junto con las propiedades de la función simétrica, nos da la definición de pseudosimetría.

Partiendo de la segunda proposición tenemos que S no es simétrico, luego $h(S)$ está bien definido. Como solo existe un candidato que no está simultáneamente en S ni en $\phi(N(S))$, este candidato es $h(S)$, es decir, $h(S) = F(S)/2$. Además en caso de haber otro pseudofrobenius este habría de estar en $\phi(N(S))$ por la partición sobre $\mathbb{N}$ que establece el segundo apartado. Pero esto no es posible porque entonces este sería menor que $F(S)$ según el orden $\geq_S$ y eso de nuevo se contradice con la Proposición 8. Para la implicación recíproca, si $\mathrm{PF}(S) = \{F(S)/2, F(S)\}$ y si tenemos un número $x \in G(S)$ distinto de $h(S)$ entonces por la Proposición 4 apartado 2 sabemos que $F(S) \geq_S x$ ó $h(S) \geq_S x$. Si se da lo primero es obvio que $x \in \phi(N(S))$ ya que existe un elemento s_1 del semigrupo para el cual se cumple $x + s_1 = F(S) \implies x = F(S) - s_1 \in \phi(N(S))$. Si por el contrario x está relacionado con $h(S) = F(S)/2$, llegamos a lo mismo ya que entonces existe $s_2 \in S$ tal que $s_2 \neq 0$ y $x + s_2 = F(S)/2$, lo que implica que $x + F(S)/2 + s_2 = F(S) \implies x = F(S) - (F(S) + s_2) \in \phi(N(S))$. Esto último se deduce de que $h(S) = F(S)/2$ es un número de pseudofrobenius y por tanto $F(S) + s_2 \in S$.

La cuarta proposición se sigue de la definición de pseudosimetría al igual que pasaba con la segunda. □

Lema 12. *Sea S un semigrupo numérico, entonces $h(S) \geq F(S)/2$.*

Demostración. Si $h(S) < F(S)/2$ entonces $\phi(h(S)) > F(S)/2$. Además $h(S) \notin S$ y $h(S) \notin \phi(N(S))$ y, por la inyectividad de la aplicación simétrica demostrada en el Lema 8, $\phi(h(S)) \notin N(S)$ y $\phi(h(S)) \notin \phi(N(S))$. Pero esto contradice la maximalidad de $h(S)$ ya que $\phi(h) > h(S)$. □

Proposición 15. *Sea S un semigrupo numérico no simétrico y f un número de pseudofrobenius $f \neq F(S)$, entonces $\phi(h(S)) \leq f \leq h(S)$.*

Demostración. Si $f = h(S)$ entonces la proposición es cierta de manera trivial. Supongamos ahora que $t(S) > 2$ y sea $l \in \mathrm{PF}(S)$ un número de pseudofrobenius. Vamos a suponer que la proposición es falsa para llegar a una contradicción. Tenemos que l ha de ser menor que $h(S)$ por la definición de $h(S)$, luego asumimos que $l < \phi(h(S))$. Usando 10 y la propiedad involutiva de la aplicación simétrica vemos que $N(S) \cup \phi(\mathrm{PF}(S)) = \{\phi(F(S))\} = \{0\}$ con lo que el simétrico de l no puede ser un normal de S. Además por el Lema 8 también tenemos que $\phi(l) > h(S)$. Ya vimos con la Proposición 7 que todo gap está relacionado con algún número de pseudofrobenius mediante $\geq_S$, y como $F(S)$ es el único pseudofrobenius $f \in \mathrm{PF}(S)$ para el que se puede cumplir que $f \geq_S \phi(l)$ por ser el único $f > \phi(l)$ (recordemos que $\phi(l) > h(S)$), entonces tenemos que $F(S) - \phi(l) \in S$. Pero esto es imposible porque precisamente $l = \phi(\phi(l)) = F(S) - \phi(l)$ y l no es un elemento del semigrupo. Esta contradicción demuestra que no existe ningún pseudofrobenius distinto de $F(S)$ que no se encuentre entre $\phi(h(S))$ y $h(S)$. □

Para terminar el capítulo vamos a dar dos proposiciones también relacionadas con las propiedades de simetría pero enfocadas describir ya no cada semigrupo concreto, si no a estudiar la familia de semigrupos simétricos como conjunto y la de los semigrupos en general.

Definición 21. Sea S un semigrupo numérico y sea $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ su sistema generador minimal, entonces definimos el semigrupo $\langle S, a\rangle$ como $\langle S, a\rangle = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n, a\rangle$ donde a es un elemento de $\mathbb{N}$.

Proposición 16. *Sea S un semigrupo numérico y $g \in \mathbb{N}^*$. Consideremos el conjunto de todos los semigrupos que cuyo número de Frobenius es g, esto es,*

$$S_g = \{S \subset \mathbb{N} : \ S \text{ es un semigrupo numérico con } F(S) = g\}.$$

Sobre estas hipótesis el conjunto S_g es parcialmente ordenado respecto de la inclusión y si $S \in S_g$ se cumplen las siguientes proposiciones:

1. *Si g es impar, S es maximal respecto de la inclusión si y solo si S es simétrico.*

2. *Si g es par, S es maximal respecto de la inclusión si y solo si S es pseudosimétrico.*

Demostración.

1. Si S es simétrico y T es un semigrupo numérico distinto de S que contiene a S, entonces existe un elemento $a \notin S$ tal que $a \in T$ y tenemos que $S \subset \langle S, a\rangle \subseteq T$. Por otra parte, por la simetría de S sabemos que existe un normal $s \in N(S)$ tal que $s = \phi(a) = F(S) - a$. Como s y a son elementos de $\langle S, a\rangle$ se tiene que $F(S) = a + s \in \langle S, a\rangle$ con lo que $F(\langle S, a\rangle) < F(S) = g$ y por tanto T no es un elemento de S_g. Esto nos asegura la maximalidad de S simétrico dentro del conjunto S_g, veamos ahora la implicación opuesta. Si S es un semigrupo no simétrico entonces podemos definir $h(S)$ y observamos que $g = F(S) \notin \langle S, h(S)\rangle$ porque en caso contrario nos encontramos con que existe un $s \in N(S)$ tal que $F(S) = s + nh(S)$ para $n > 0$. Pero n ha de ser 1 por que en caso contrario tendríamos un sin sentido al ser $h(S) \geq F(S)/2$ por el Lema 12. Luego de todo esto obtendríamos que $F(S) = s + h(S)$ pero esto es imposible porque implicaría que $F(S) \geq_S h(S)$. Por tanto $\langle S, h(S)\rangle \in S_g$ y S no es maximal.

2. Si $\mathrm{PF}(S) \neq \{F(S)/2, F(S)\}$ entonces por el Lema 12 se tiene que $h(S) > F(S)/2$ y. con el mismo razonamiento que utilizamos para probar la segunda implicación anterior, deducimos que $F(S) \notin \langle S, h(S)\rangle$. Una vez más tenemos que $F(\langle S, h(S)\rangle) = F(S) = g$ y por tanto $F(\langle S, h(S)\rangle) \in S_g$ y S no es maximal. Para demostrar la proposición recíproca se sigue de la siguiente manera. Si $\mathrm{PF}(S) = \{F(S)/2, F(S)\}$, sea $a \notin S$ un gap del semigrupo S, consideramos un semigrupo T que cumpla $S \subset T$ tal que $a \in T$ y vemos que $S \subset \langle S, a\rangle \subset T$. Ahora por la primera caracterización que da el Lema 11 tenemos que o bien $a \in \phi(N(S))$ ó $a = h(S)/2$. Si se da lo primero entonces, al igual que pasaba en el primer apartado de esta proposición, existe un $s \in N(S)$ tal que $F(S) = s + a$, y si ocurre

la segunda opción, entonces $F(S) = a + a$. En ambos casos tenemos que $F(S) \in \langle S, a\rangle$ por lo que $\langle S, a\rangle$ y, más en general, T, no son elementos de S_g con lo que no existe ningún semigrupo en S_g que incluya S. Finalizando, S es maximal.

$\square$

Nota 5. Siguiendo con la conjetura de Wilf, una observación interesante de la Proposición 16 es el hecho de que si consideremos el diagrama de Hasse respecto de la inclusión dada sobre los posibles semigrupos numéricos que poseen un determinado número de Frobenius, entonces tanto los elementos maximales como el mínimo cumplen que $g + 1 = F(S) + 1 \leq e(S)n(S)$. Esto es así porque los maximales serán semigrupos simétricos o pseudosimétricos, dependiendo de la paridad de g, y como ya vimos en la Nota 4, el hecho de que estos semigrupos cumplan que $t(S) < e(S)$ hace que la conjetura de Wilf sea cierta para ellos. Por otra parte el elemento mínimo de la relación de orden dada por la inclusión es el semigrupo $T = \langle g+1, g+2, \ldots, 2g+1\rangle$ el cual tiene dimensión de embebimiento $e(T) = g + 1$ y la cantidad de normales es $n(S) = 1$, y por tanto $g + 1 = e(T)n(T)$. No deja de ser curioso que en los extremos del grafo que forma el diagrama de Hasse se verifique la conjetura de Wilf.

Proposición 17. *Sea g un número impar, el número de semigrupos numéricos simétricos S con $F(S) = g$ es como mínimo $2^{\lfloor g/8\rfloor}$.*

Demostración. Consideremos el semigrupo $T = \langle g + 1, g + 2, \ldots, 2g + 1\rangle$. Este pertenece a S_g, definido en la Proposición 16, y además es minimal en este conjunto respecto de la inclusión. Ahora definamos el siguiente conjunto:

$$U = \{x \in \mathbb{N} : \ \lfloor g/4\rfloor + 1 \leq x < \lfloor g/2\rfloor \text{ con } x \text{ un número par}\}$$

Vemos que si $A \subset U$, entonces el semigrupo $S_0 = \langle T, A\rangle$ tiene como número de Frobenius a g, esto es así porque en caso contrario existirían $u_1, u_2, \ldots, u_r \in F \subset E$ tal que para determinados $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tendríamos $g = F(T) = n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_ru_r$, pero esto nos llevaría directamente a que g es par, algo prohibido en el enunciado de la proposición. Vamos ahora a buscar un semigrupo simétrico que contenga a S_0. Lo construimos como sigue empezando con $i = 0$:

1. Si S_i es simétrico hemos terminado.
2. En caso contrario definimos $S_{i+1} = \langle S_i, h(S_i)\rangle$.
3. Repetimos el proceso sobre S_{i+1}.

Nombramos S al semigrupo simétrico resultante. Cada semigrupo $S_i + 1$ conserva el mismo número de Frobenius que su antecesor S_i, algo fácil de ver usando el mismo razonamiento que en la segunda implicación de la Proposición 16 apartado 1. Además como para cada una de las iteraciones se cumple que $h(S_i) \geq g/2$ por el Lema 12, si tenemos dos conjuntos distintos

$A, B \in U$ y S y S' son dos semigrupos simétricos cada uno formado a partir de la construcción sobre A, B (respectivamente) antes descrita, entonces S también son distintos por lo explicado referente a la adición de los números $h(S_i)$ y por el hecho de que si $x, y \in U$ se tiene que $x+y \notin U$. Concluimos con esto que como para cada subconjunto de U existe un único semigrupo simétrico y distinto del que se obtendría con otro subconjunto de U, entonces el número de semigrupos simétricos con número de Frobenius g es de al menos el número de subconjuntos de U. El cardinal de U es de al menos $\lfloor g/8 \rfloor$ y la cantidad de subconjuntos que podemos extraer viene dada por el cardinal del conjunto potencia, esto es, $|P(E)| = 2^{|E|}$. Luego existen al menos $2^{\lfloor g/8 \rfloor}$ semigrupos simétricos cuyo Frobenius es g. □

2.3. Las coordenadas de Apéry y la supersimetría.

En este último capítulo vamos a centrarnos en estudiar un tipo concreto de representaciones de los números del conjunto de Apéry. Usaremos un sistema de coordenadas basado en los elementos de un sistema generador del semigrupo y veremos qué resultados podemos obtener para familias de semigrupos con una dimensión de embebimiento pequeña. Además nos servirá también para caracterizar una propiedad más fuerte que la del concepto de simetría, estando ambas muy relacionadas entre sí.

Definición 22. Sea S un semigrupo numérico generado por $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ con $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$, definimos el *conjunto de coordenadas de Apéry* $L(S, s_t)$ con respecto de P como sigue:

$$L(s_t) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} : \ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_{n-1} s_{n-1} \in \mathrm{Ap}\,(S, s_t)\}$$

Decimos que un elemento $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \in L(s_t)$ es maximal si $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_{n-1} s_{n-1}$ es maximal en $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$ con respecto del orden $\geq_S$.

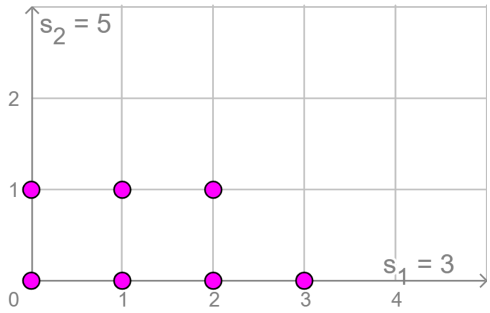
Ejemplo 9. Damos a continuación varios ejemplos distintos del conjunto de coordenadas de Apéry:

- Sea S_1 el semigrupo numérico generado por $P_1 = \{3, 5, 7\}$, sus coordenadas respecto de P_1 para el conjunto de Apéry de 7 vienen dadas en la Figura 2.5.
- Sea S_2 el semigrupo numérico generado por $P_2 = \{2, 4, 5, 7\}$, sus coordenadas respecto de P_2 para el conjunto de Apéry de 7 vienen dadas en la Figura 2.6.
- Consideremos de nuevo el semigrupo S_1 pero esta vez tomando como sistema generador $P_1' = \{3, 5, 6, 7\}$. Vemos las coordenadas $L(S_1, 7)$ respecto de P_1' en la Figura 2.7.

Lema 13. *Si $t \in \mathrm{Ap}\,(S, n)$ con $n \in S$ y $u \leq_S t$, entonces u es un elemento de $\mathrm{Ap}\,(S, n)$.*

Demostración. Supongamos que $u \notin \mathrm{Ap}\,(S, n)$. Entonces existe un $a \in S$ tal que $u - n = a$. Ahora tenemos que $t - n = t - u + a$, y como $t - u$ es un elemento del semigrupo por estar t

Figura 2.5: Coordenadas $L(S_2, 7)$ respecto de P_1.



relacionado con u mediante $\geq_S$, deducimos que $t - u + a \in S$, algo que no tiene sentido porque por hipótesis $t \in \mathrm{Ap}\,(S, n)$, es decir, $t - n \notin S$. □

La forma de "escalera" o "por capas" que parece tener el conjunto $L(s_t)$ queda confirmada por el Lema 13 que nos asegura que no habrán ni "tejados" ni "puntos flotantes" al representar las coordenadas de los elementos de Apéry. Empecemos pues a estudiar $L(s_t)$ para familias determinadas de semigrupos. Veamos primero como son las coordenadas para un semigrupo con dimensión de embebimiento menor o igual a 3.

Definición 23. Sea S un semigrupo numérico generado por $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, entonces para $s_t \in P$ definimos el *corner* de $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$ como el menor múltiplo de s_t que se encuentra en $\langle P \setminus \{s_t\} \rangle$.

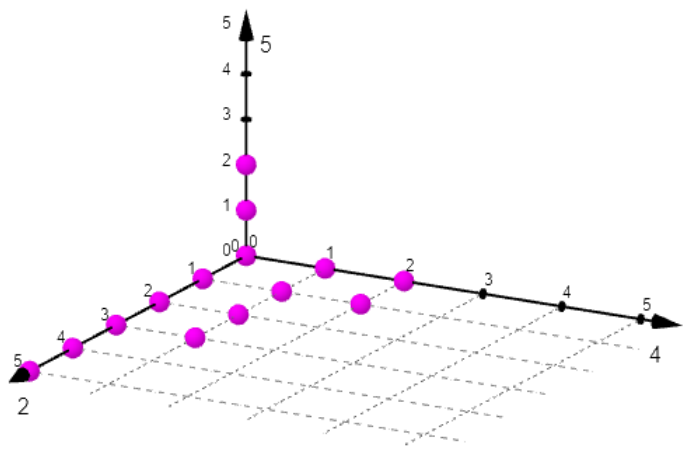
Proposición 18. *Sea S un semigrupo numérico generado por $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, entonces para un $s_t \in P$ las siguientes proposiciones son equivalentes sobre un elemento u de $P \setminus \{s_t\}$.*

1. *u es el corner de $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$.*

2. *$u \notin \mathrm{Ap}\,(S, s_t)$ pero si $u - v$ es un elemento de S con $v \in P \setminus \{s_t\}$, entonces $u - v \in \mathrm{Ap}\,(S, s_t)$.*

Demostración. Supongamos que u es el corner de $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$, es decir, $u = ps_t$ con $p \in \mathbb{N}^*$ es el menor múltiplo de s_t en $P \setminus \{s_t\}$. Para empezar como $p - 1 \geq 0$, entonces $u - s_t = (p-1)s_t \in S$ y se tiene que $u \notin \mathrm{Ap}\,(S, s_t)$. Por otro lado, si tenemos un $v \in P \setminus \{s_t\}$ tal que $u - v \in S$ veamos que $u - v \in \mathrm{Ap}\,(S, s_t)$. Consideremos el número r de manera que r sea el mayor natural para el que se cumple que $rs_t \leq_S u - v$. Tendremos así que $u - v - rs_t = (p-r)s_t - v \in S$. Más en particular deducimos que $(p-r)s_t - v \in \langle P \setminus \{s_t\} \rangle$ ya que en caso contrario existiría un $l > 0$ tal que $(p-r)s_t - v - ls_t \in \langle P \setminus \{s_t\} \rangle \subseteq S$, y esto nos llevaría a que $(r+l)s_t \leq_S u - v$ contradiciendo la maximalidad de r. Por tanto $((p-r)s_t - v) + v = (p-r)s_t \in \langle P \setminus \{s_t\} \rangle$ y por

Figura 2.6: Coordenadas $L(S_2, 7)$ respecto de P_1.



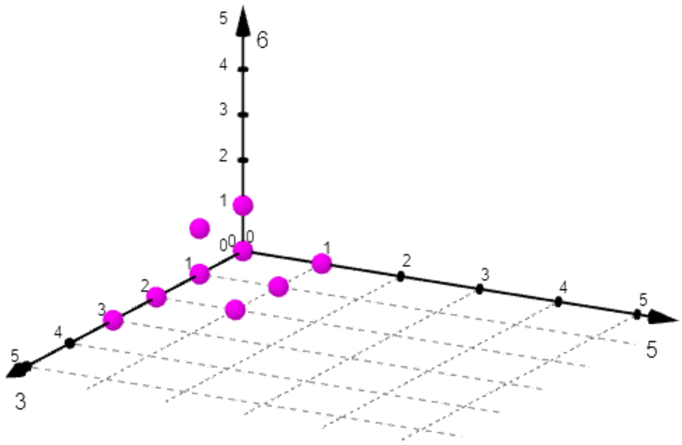
la definición de corner, r ha de ser 0. Por tanto, $u - v$ es un elemento de S pero $s_t \nleq_S u - v$, o equivalentemente, $u - v \in \mathrm{Ap}\,(S, s_t)$.

Partamos ahora de la segunda proposición por la cuál tenemos que si $u - v \in S$, entonces $u - v \notin \mathrm{Ap}\,(S, s_t)$. De este hecho deducimos que $u - v \in \langle P \setminus \{s_t\}\rangle$ ya que lo contrario implicaría que $u - v - s_t \in S$ y eso se contradice con la pertenencia al conjunto de Apéry. Así pues $(u - v) + v = u \in \langle P \setminus \{s_t\}\rangle$. Veamos ahora que se trata del menor múltiplo de s_t que satisface esto. Si existe un $m \neq 0$ tal que $ms_t \in \langle P \setminus \{s_t\}\rangle$ y que cumple que $m < k$, entonces existe un elemento w de $P \setminus \{s_t\}$ para el que se da que $ms_t - w \in S$. Pero esto lleva a otra contradicción ya que se sigue que $ms_t - w = ks_t - w - (k - m)s_t \in S$ y, por ser $k > m$, podemos afirmar $ks_t - w - (k - m)s_t + (k - m - 1)s_t = ks_t - w - s_t \in S$, algo imposible ya que, según la proposición que tomamos como hipótesis, $ks_t - w = u - w \in \mathrm{Ap}\,(S, s_t)$. Finalizamos así que no hay ningún múltiplo de s_t menor que u que se encuentre en $\langle P \setminus \{s_t\}\rangle$, luego u es el corner de $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$ tal y como buscábamos demostrar. □

Lema 14. *Sea S un semigrupo numérico y sea $\{s_1, s_2, s_3\}$ un sistema generador del mismo, si hay al menos tres elementos maximales en $L(s_3)$, entonces S es simétrico.*

Demostración. Sean $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{N}^2$ los maximales de $L(s_3)$, los nombramos de forma que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ y $\beta_1 > \beta_2 > \beta_k$. La existencia de esta ordenación se prueba de la siguiente forma. Supongamos primero que existen $(\alpha_a, \beta_a), (\alpha_b, \beta_b)$ elementos maximales distintos tal que $\alpha_a = \alpha_b$. Entonces, dado que no puede darse $\beta_a = \beta_b$ porque si no estaríamos hablando del mismo elemento, si $\beta_a < \beta_b$ tendríamos que $(\alpha_a, \beta_a) = (\alpha_b, \beta_b - (\beta_b - \beta_a))$ no es un elemento maximal de $L(s_3)$ porque el Apéry que representa está relacionado con el que represen-

Figura 2.7: Coordenadas $L(S_1, 7)$ respecto de P_1'.



ta la tupla (α_b, β_b). De la misma forma vemos que el supuesto $\beta_a > \beta_b$ no es posible. Deducimos así que todos los elementos α deben ser distintos. Razonando igual que antes obtenemos que la única opción lógica es la de que si $\alpha_a < \alpha_b$, entonces $\beta_a > \beta_b$.

Ahora vemos que para cada $i < k-1$ se tiene que el corner de $\operatorname{Ap}(S, s_3)$ se puede expresar como $u_i = (\alpha_i + 1)s_1 + (\beta_i + 1)s_2$. Esto es así porque el segundo apartado de la Proposición 18 se cumple para u. Como el corner es único, todos los (α_i, β_{i+1}) representan el mismo elemento de $L(s_3)$ y también lo hacen todos los $(\alpha_i, \beta_{i+1}) + (0, \beta_1 - \beta_2)$. Para el caso particular $i = 1$ tenemos que $(\alpha_1, \beta_2) + (0, \beta_1 - \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1)$, un elemento maximal, con lo que en general $(\alpha_i, \beta_{i+1}) + (0, \beta_1 - \beta_2)$ es maximal en $L(s_3)$. Como ya hemos visto antes, solo hay un elemento maximal cuya primera coordenada sea α_i, luego $(\alpha_i, \beta_{i+1}) + (0, \beta_1 - \beta_2) = (\alpha_i, \beta_i)$ y, como todos estos elementos representaban el mismo número, todos ellos señalan al mismo elemento maximal. La prueba termina aplicando la misma técnica pero en sentido opuesto para índices de los maximales $1 < i \geq k$ para acabar viendo que absolutamente todos los elementos maximales de $L(s_3)$ representan un único maximal en $\operatorname{Ap}(S, s_3)$ y, por la Proposición 8, el tipo de S es 1, o equivalentemente por la Proposición 14, S es simétrico. $\square$

Teorema 2. *Sea S un semigrupo y sea $\{s_1, s_2, s_3\}$ un sistema generador del mismo, entonces $t(S) \leq 2$.*

Demostración. Si $L(s_3)$ tiene al menos tres elementos maximales, entonces por el Lema 14 tenemos que su tipo es exactamente 1. En caso de haber dos o más maximales en $L(s_3)$, como cada uno de ellos se puede identificar con un maximal en $\operatorname{Ap}(S, s_3)$ (la aplicación que une $(\alpha, \beta) \in L(s_3)$ con $\alpha s_1 + \beta s_2 \in \operatorname{Ap}(S, s_3)$ está bien construida por como está definido $L(s_3)$), tenemos que el número de maximales en $\mathrm{Ap}(S, s_3)$, y consecuentemente el número de pseudo-frobenius, es a lo sumo 2. $\square$

Nota 6. Este último teorema, el Teorema 2 también está relacionado con la conjetura de Wilf, ya que junto con lo visto en la Nota 4 se nos asegura que la desigualdad $F(S) + 1 \leq e(S)n(S)$ se cumple para los semigrupos con dimensión de embebimiento menor o igual a 3.

Lema 15. *Sea S un semigrupo y sea $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un sistema generador del mismo, entonces los elementos de $\mathrm{Ap}(S, s)$ con $s_t \in P$ tienen una única representación en $L(s_t)$ si y solo si la tienen los maximales de $\mathrm{Ap}(S, s_t)$.*

Demostración. Si $L(s_t)$ representa de forma única a $\mathrm{Ap}(S, s_t)$, entonces esto se cumple en particular para sus maximales. Supongamos ahora que existen dos representaciones distintas $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) \in L(s_t)$ de un elemento de $a \in \mathrm{Ap}(S, s_t)$. El elemento a está relacionado con un maximal de $\mathrm{Ap}(S, s_t)$ de forma que existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1} \in \mathbb{N}$ tal que se cumple que $(\alpha_1 + \delta_1, \alpha_2 + \delta_2, \ldots, \alpha_{n-1} + \delta_{n-1})$ es maximal en $L(S, s_t)$ así como también lo es $(\beta_1 + \delta_1, \beta_2 + \delta_2, \ldots, \beta_{n-1} + \delta_{n-1})$. Ambos elementos son distintos y por tanto hay un maximal con dos representaciones en $L(s_t)$. $\square$

Proposición 19. *Sea S un semigrupo numérico y sea $\{s_1, s_2, s_3\}$ un sistema generador del mismo, si S no es simétrico, entonces los elementos de $\mathrm{Ap}(S, s_3)$ tienen una única representación en $L(s_3)$.*

Demostración. Si S no es un semigrupo simétrico, entonces $L(s_3)$ tiene al menos dos maximales (en caso contrario $t(S) = 1$ y el semigrupo sería simétrico). Ahora, como ya vimos en el Lema 14, si hay 3 o más elementos maximales en $L(S, s_3)$ tenemos que S es simétrico, algo imposible por la hipótesis del enunciado. Con lo que la única opción válida es que $L(s_3)$ solo tiene dos maximales, los cuales por ser S no simétrico han de representar elementos de $\mathrm{Ap}(S, s_3)$ distintos y, por el Lema 15, $L(s_3)$ es de representación única. $\square$

Lema 16. *Sea S un semigrupo numérico y sea $\{s_1, s_2, s_3\}$ un sistema generador del mismo con s_1 y s_2 coprimos por parejas y $s_3 < s_1$, entonces los elementos de $\mathrm{Ap}(S, s_3)$ tienen una única representación en $L(s_3)$.*

Demostración. Supongamos que (α_1, β_1) y (α_2, β_2) representan el mismo elemento de $\mathrm{Ap}(S, s_3)$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y, como vimos en la demostración del Lema 14, $\beta_1 \geq \beta_2$. Entonces como ambas tuplas son las coordenadas del mismo elemento de $\mathrm{Ap}(S, s_3)$ se tiene que $\alpha_1 s_1 + \beta_1 s_2 = \alpha_2 s_1 + \beta_2 s_2$ y se sigue que $(\alpha_2 - \alpha_1)s_1 = (\beta_1 - \beta_2)s_2$. Además este número está relacionado con $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 \in \mathrm{Ap}(S, s_3)$ de la siguiente forma: $(\alpha_2 - \alpha_1)s_1 \geq_S \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 \in \mathrm{Ap}(S, s_3)$, y del Lema 13 deducimos que $(\alpha_2 - \alpha_1)s_1 = (\beta_1 - \beta_2)s_2$ es también un elemento de $\mathrm{Ap}(S, s_3)$. Renombramos $a = \alpha_2 - \alpha_1$ y $b = \beta_1 - \beta_2$ para ver mejor que $b < s_3$, pues el caso contrario nos llevaría a que si $k = b - s_3 > 0$ entonces $bs_2 - s_3 =$

$(s_3+k)s_2 - s_3 = ks_2 + s_3(s_2-1) \in \mathrm{Ap}\,(S, s_3)$, algo imposible ya que hemos visto que bs_2 está en $\mathrm{Ap}\,(S, s_3)$. Por tanto partiendo de la hipótesis de enunciado tenemos la siguiente ordenación: $b < s_3 < s_1$. También vemos que como s_1 y s_2 son coprimos, el hecho de que $as_1 = bs_2$ nos conduce a que s_1 ha de dividir a b. Esto unido a que $b < s_1$ nos deja una única opción: $b = 0$. Llegados a este punto como $as_1 = bs_2$ se tiene que $a = 0$ y retrocediendo un poco vemos que $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ con lo que la representación de los Apéry en $L(s_3)$ es única. □

Teorema 3. *Sea S un semigrupo numérico generado minimalmente por $\{s_1, s_2, s_3\}$ con s_1, s_2 y s_3 coprimos por parejas, entonces S no es simétrico.*

Demostración. Asumamos para la prueba que s_3 se trata del menor elemento del sistema generador. Supongamos que el semigrupo es simétrico para llegar a una contradicción. Empecemos por ver que el corner u de $\mathrm{Ap}\,(S, s_3)$ es múltiplo de s_1 ó s_2. En caso contrario podemos escribirlo como combinación lineal de s_1, s_2 sobre $\mathbb{N}^*$, esto es, $u = (a_1+1)s_1 + (a_2+1)s_2$ para $a_1, a_2 \geq 0$. Por la Proposición 18 tenemos que $u - s_1 \in \mathrm{Ap}\,(S, s_3)$ y existe entonces un maximal del conjunto de Apéry representado en $L(s_3)$ como (a_1, b_2) con $b_2 > a_2$. Esto último viene probado en la primera parte del Lema 14. De forma análoga llegamos a que existe un maximal en $\mathrm{Ap}\,(S, s_3)$ representado en $L(s_3)$ como $(b1, a_2)$. Pero por el Lema 16 estos dos elementos han de representar maximales distintos con lo que el tipo de S no es 1 y por tanto no se trata de un semigrupo simétrico. Tenemos así comprobado que el corner u no se encuentra en $\langle s_1, s_2\rangle$ con lo que ha de ser múltiplo de s_1 o de s_2. Asumamos sin perder generalidad que se trata de un múltiplo de s_1, es decir, $u = ls_1$ para $l \in \mathbb{N}$. Por la definición de corner sabemos que u es el menor múltiplo de s_3 que puede expresarse como un múltiplo de s_1 (para este caso particular). Por tanto existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $u = ls_1 = ks_3$. De ser s_1 y s_3 coprimos se tiene que $s_3|l$ y por tanto $l = ps_3$ para $p \in \mathbb{N}$. Volviendo a la igualdad obtenemos $s_1ps_3 = ks_3$, desprendiéndose de la minimalidad de k el hecho de que $p = 1$ porque si no nos encontraríamos con que $p < k$ y $ps_3 = ks_3$, contradiciendo la definición de corner. Luego $l = ps_3 = s_3$ y de nuevo por la Proposición 18, $u - s_3 \in \mathrm{Ap}\,(S, s_3)$ y además se trata de un elemento maximal. En virtud ahora del Lema 13 todos los elementos de la forma $(s_3 - i)s_1$ para $1 \leq i \leq s_3$ son elementos de $\mathrm{Ap}\,(S, s_3)$, haciendo un total de s_3 elementos que, por el Lema 2, son exactamente todos los elementos de del conjunto de Apéry. Pero como $S = \langle \mathrm{Ap}\,(S, s_3), s_3\rangle = \langle s_1, s_3\rangle$ (última parte de la prueba del Teorema 1), s_2 no está en el sistema generador minimal contradiciendo el enunciado del teorema. La contradicción indica que S es no simétrico. □

Corolario 5. *Sea S un semigrupo numérico y sea $\{s_1, s_2, s_3\}$ un sistema generador del mismo, entonces S es simétrico si y solo si $e(\overline{S}) = 2$.*

Demostración. Si S es simétrico, entonces por el Teorema 3 S no está generado por elementos coprimos por parejas. Sin embargo, el semigrupo derivado sí que está generado minimalmente por números coprimos por parejas, por lo que si su dimensión de embebimiento fuese 3 entraría en contradicción con el Teorema 3. Por otra parte la implicación opuesta es trivial ya que si $\overline{S}$ está generado minimalmente por $P = \{\overline{s_1}, \overline{s_2}\}$, entonces todos los elementos de $\mathrm{Ap}\,(\overline{S}, \overline{s_1})$ son múltiplos de $\overline{s_2}$ y están relacionados mediante el orden $\geq_S$, asegurando así la Proposición 8 que solo puede haber un número de pseudofrobenius. El tipo de $\overline{S}$ es 1 y también el S, siendo este un semigrupo simétrico. $\square$

Fijándonos en el conjunto $L(s_t)$, vamos a definir una familia de semigrupos con unas propiedades muy concretas, de aspecto "puro" a la vista de la representación de sus apérys. Empecemos con la parte final del trabajo: la supersimetría.

Definición 24. Sea S un semigrupo numérico y sea $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un sistema generador del mismo, decimos que S es s_t-*supersimétrico* con respecto de P si para $s_t \in P$ se cumple que para $s_i \in P \setminus \{s_t\}$ dados $n_i \in \mathbb{N}$ que satisfacen que $-s_t + n_i s_i \notin S$ entonces se tiene que $-s_t + \sum_{i \neq t} n_i s_i \notin S$.

Lema 17. *Sea S un semigrupo numérico y sea $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un sistema generador del mismo, entonces S es s_t-supersimétrico si y solo si S es simétrico y todos los elementos de* $\mathrm{Ap}\,(S, s_3)$ *tienen una única representación en $L(s_3)$.*

Demostración. Supongamos primero que S es s_t-supersimétrico. Definimos los elementos m_i tal que son de la forma $m_i = \text{máx}\{n_i : -s_t + n_i s_i \notin S\}$ para cada elemento $s_i \in P \setminus \{s_t\}$. Entonces tenemos que $f = -s_t + \sum_{i \neq t} m_i s_i \notin S$ es un número de pseudofrobenius. Esto es así porque, usando el Lema 6, para cada $s_k \in P$ se tiene por la construcción de los m_i que $s_k + f = s_k - s_t + \sum_{i \neq t} m_i s_i = -s_t + (m_k + 1)s_k + \sum_{i \neq t,k} m_i s_i \in S$. Además este ha de ser el único ya que en caso de existir otro $f' \in \mathrm{PF}(S)$ este estaría relacionado con f. Esto es consecuencia de que si $f' + s_t$ es un maximal de $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$, este elemento está en $\langle P \setminus \{s_t\} \rangle$ y puede representarse como $f' + s_t = \sum_{i \neq t} m'_i s_i$ para unos $m'_i \in \mathbb{N}$. Entonces $f - f' = \sum_{i \neq t}(m_i - m'_i)s_i$ es un elemento de S por cómo están construidos los m_i, y se tiene $f = f'$. Vemos con esto que solo existe un número de pseudofrobenius, lo que hace a S un semigrupo simétrico. Para la parte de única representación en $L(s_t)$ basta con aplicar el Lema 15 para llegar a ver que si existen dos representaciones del maximal de $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$ en $L(s_t)$, entonces esto significa que los m_i no son únicos, algo imposible por como están definidos.

Partiendo ahora de que S es simétrico y $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$ está representado de forma única en $L(s_t)$, tenemos que si $F(S) + s_t$, el único maximal de $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$, viene dado por la tupla $(a_1, a_2, a_{n-1}) \in L(s_t)$, entonces el número de Frobenius se puede expresar como

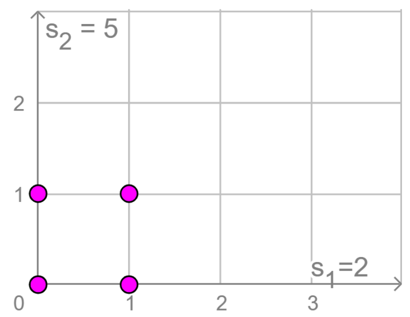
$$F(S) = -s_t + \sum_{i \neq t} a_i s_i$$

Por una parte como cada sumando $a_i s_i$ es un elemento del semigrupo se deduce que $-s_t + a_i s_i \notin S$ ya que el caso contrario implicaría que $F(S)$ estuviera también en S. Ahora supongamos que para algún índice i existe un $b_i > a_i$ tal que $f = -s_t + b_i s_i \notin S$. Se seguiría de esto que $f - F(S) = (b_i - a_i)s_i \in S$ con lo que $f \geq_S F(S)$ y $F(S)$ no sería maximal en $\mathrm{Ap}\,(S, s_t)$, llegando a una contradicción. Esto nos asegura que si tenemos $-s_t + r_i s_i \notin S$, entonces cada uno de los r_i ha de ser menor o igual a n_i, concluyendo que $-s_t + \sum_{i \neq t} r_i s_i \notin S$, ya que lo contrario a esto lleva a que $F(S) = -s_t + \sum_{i \neq t} a_i s_i = -s_t + \sum_{i \neq t} r_i s_i + \sum_{i \neq t} (a_i - r_i) s_i \in F(S)$. Pero esto no es posible por la definición del número de Frobenius, luego S satisface la condición necesaria para ser s_t-supersimétrico. $\square$

Apoyándonos en el Lema 17 podemos empezar a construir una idea de qué supone ser s_t-supersimétrico con respecto de un sistema generador P. Las puntos de $L(s_t)$ de los semigrupos s_t-supersimétricos se representan en un espacio p-dimensional (con $p = |P| - 1$) formando un hiperrectángulo o p-ortoedro que tiene uno de sus vértices en el origen de coordenadas y el opuesto en el único maximal de $L(s_t)$. Y es que los semigrupos s_t-supersimétricos son aquellos que, por definición, si eliges p coordenadas del espacio p-dimensional tal que cada uno de esos puntos se encuentre en uno de los ejes y sea elemento de $L(s_t)$, entonces la coordenada resultante de sumar dichos puntos también es un elemento de $L(s_t)$, algo que únicamente pasa cuando el hiperprisma que representa $L(s_t)$ es un hiperrectángulo.

Ejemplo 10. Sea S el semigrupo numérico generado por $P = \{2, 4, 5\}$, sus coordenadas $L(S, 4)$ vienen dadas en la Figura tal. Vemos así que se trata de un semigrupo 4-simétrico con respecto a P, ya que solo tiene un elemento maximal, el cuál está representado de forma única.

Figura 2.8: Coordenadas $L(S, 4)$ respecto de P.



Lema 18. *Sea S un semigrupo numérico y sea $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un sistema generador del mismo con $s_t \in P$ un elemento del sistema generador minimal de S, se tiene que si S es s_t-supersimétrico respecto de P, entonces también lo es respecto de su sistema generador minimal.*

Demostración. Sea E el sistema generador minimal de S. El conjunto $L(s_t)$ con respecto de P contiene al conjunto $L(s_t)$ con respecto de E por darse que $E \subseteq P$ (todas las representaciones que puedas dar de los elementos de $\mathrm{Ap}(S, s_t)$ con $E \setminus \{s_t\}$ las puedes dar con $P \setminus \{s_t\}$). Por tanto si las representaciones son únicas con P, entonces también lo serán con E. Esto sumado al hecho de que el semigrupo es simétrico dado por la s_t-supersimetría con respecto a P, hace ver por el Lema 17 que el semigrupo es s_t-supersimétrico respecto de E. □

La definición de s_t-supersimetría está ligada a la perspectiva de observar el el semigrupo a través del conjunto de Apéry de s_t. Sin embargo, podemos exigir que un semigrupo sea s_t-supersimétrico respecto de todos los elementos de su sistema generador para pasar de esta definición de supersimetría "parcial" a una más "total".

Definición 25. Sea S un semigrupo numérico y sea $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un sistema generador del mismo, entonces S es *supersimétrico* con respecto de P si es s_t-supersimétrico con respecto de P para todo elemento $s_t \in P$.

Esto no es más que la definición de un semigrupo que cumple que el dibujo de sus coordenadas forma un hiperrectángulo desde cualquier perspectiva que tomemos para dibujarlo, desde cualquier Apéry del sistema generador respecto del cual es supersimétrico. Aún así la propiedad de supersimetría va más allá y tendrá como colofón un resultado de lo más interesante.

Lema 19. *Sea S un semigrupo numérico y sean s_1, s_2, s_3 tres elementos del mismo, si suponemos que para determinados $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{N}$ tal que $i = 1, 2$ se tiene que $-s_1 + b_1 s_2 + c_1 s_3 \notin S$, $-s_2 + a_2 s_1 + c_2 s_3 \notin S$, $-s_1 + (b_1 + 1)s_2 \in S$, $-s_1 + (c_1 + 1)s_3 \in S$, $-s_2 + (a_2 + 1)s_1 \in S$ y que $-s_2 + (c_2 + 1)s_3 \in S$, entonces $c_1 = c_2$.*

Demostración. Tenemos por el enunciado que $-s_1+b_1s_2+c_1s_3 = -s_1+(b_1+1)s_2-s_2+c_1s_3 \notin S$. Supongamos primero que $c_1 > c_2$ para llegar a un absurdo. Si c_1 es el mayor de los c_i, entonces $-s_2+c_1s_3 = -s_2+(c_2+1)s_3+(c_1-c_2-1)s_3 \in S$ por la condición de que $-s_2+(c_2+1)s_3 \in S$. Y de la anterior igualdad llegamos a que $-s_1 + (b_1 + 1)s_2 - s_2 + c_1s_3 \in S$, una contradicción que señala que $c_1 \leq c_2$. Repitiendo el mismo razonamiento, esta vez suponiendo que $c_2 > c_1$, se obtiene que $c_2 \leq c_1$ y concluimos que, efectivamente, $c_1 = c_2$. □

Proposición 20. *Sea S un semigrupo numérico supersimétrico y sea $P = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un sistema generador del mismo, si $F(S) = -s_j + \sum_{i \neq j} a_{i,j} s_i$ es el número de Frobenius expresado en función del maximal de $\mathrm{Ap}\,(S, s_j)$, entonces $a_{i,1} = a_{i,2} = \ldots = a_{i,n}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demostración. Vamos a probar que dados dos índices $1 \leq u, v \leq n$ cualesquiera, los coeficientes $a_{p,u} = a_{p,v}$ son el mismo para $p \neq u, v$. Por una parte, como ya vimos en la prueba del Lema 17, las coordenadas de $F(S)+s_i$ son tales que son mayores que el resto de las de los demás elementos de $\mathrm{Ap}\,(S, s_i)$. En particular para $i = u$, como $F(S) = -s_u + \sum_{i \neq u} a_{i,u} s_i$ no es un elemento de S, tenemos que $-s_u + a_{v,u}s_v + a_{p,u}s_p \notin S$ y, de razonando igual para la representación de $F(S)+s_v$ como maximal de $\mathrm{Ap}\,(S, v)$, obtenemos que $-s_v + a_{u,v}s_u + a_{p,v}s_p \notin S$. El resto de las condiciones necesarias para aplicar el Lema 19 se siguen de la maximalidad de los $a_{i,j}$ explicada antes. La conclusión tras aplicar este resultado es que $a_{p,u} = a_{p,v}$, y en general esto se cumple para todos los coeficientes, probando la proposición. □

La Proposición 20 aporta mucha información y es la base de la proposición que cierra este trabajo y de su resultado previo. Para empezar la proposición nos permite renombrar cada uno de los $a_{i,j}$ como simplemente a_i, pudiendo así escribir la siguiente identidad matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & -1 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & -1 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = F(S) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Además a partir de aquí es fácil ver que la supersimetría de un semigrupo, en caso de darse, es una propiedad reservada casi en exclusiva al sistema generador minimal del semigrupo. En virtud del lema 18 sabemos que si un semigrupo es supersimétrico respecto de un sistema generador $P = \{s_1, s_2, \dots, s_n, r_1, r_2, \dots, r_m\}$ no minimal entonces lo es también respecto de su generador minimal $E = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Además como las coordenadas del maximal son las mismas cuando se considera P como cuando se considera E, entonces se tiene que la fila $n+m$ del sistema que corresponde a la ecuación

$$b_1 s_1 + b_2 s_2 + \dots + b_n s_n + b_{n+1} r_1 + \dots + b_{n+m-1} r_{m-1} - r_m = F(S)$$

Y como $b_1 s_1 + b_2 s_2 + \dots + b_n s_n = F(S) + (b_i + 1)s_i$ para cualquier $i \leq n$ (esto es por ser supersimétrico respecto de E), entonces el sistema solo tendrá solución cuando cada uno de los cumpla que $r_j = (b_i + 1)s_i$ para algún i y $b_{n+m-j} = 0$. Esto es, si un semigrupo numérico S es supersimétrico respecto de su sistema generador minimal, entonces existen exactamente tantos sistemas generadores respecto de los cuales S es supersimétrico como posibles sistemas generadores formados a partir de añadir los elementos r_j de la forma antes descritos.

Centrémonos en la supersimetría con respecto del sistema generador minimal para obtener la siguiente caracterización de los semigrupos supersimétricos.

Proposición 21. *Sea S un semigrupo numérico minimalmente generado por $E = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, entonces S es supersimétrico si y solo si existen n números coprimos por parejas $p_1, p_2, \dots, p_n$ tal que cada elemento $s_i \in E$ es expresado como $s_i = (\prod_{j=1}^{n} p_j)/p_i$.*

Demostración. Si S está generado por E, entonces tenemos que para cada $s_i \in E$ podemos representar el número de Frobenius como $F(S) = -s_i + \sum_{j \neq i} a_j s_i$ con los coeficientes a_j invariantes respecto de cada s_i, algo asegurado por la Proposición 20. Tenemos entonces que el maximal de $L(s_i)$ es $M = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ y por lo visto en el Lema 13, para todos los elementos de $L(s_i)$ cada una de sus coordenadas es menor o igual que la correspondiente en M. Esto unido al hecho de que cada elemento de $L(s_i)$ representa un único elemento de $\mathrm{Ap}(S, s_i)$, nos lleva a que $s_i = |\mathrm{Ap}(S, s_i)| = |L(s_i)| = (\prod_{j=1}^{n}(a_j + 1))/(a_i + 1)$. Tenemos así cada elemento del sistema generador expresado como un producto de números naturales. Para ver que estos $(a_i + 1)$ son coprimos razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $s_u, s_v \in E$ tal que sus respectivos $(a_u + 1)$ y $(a_v + 1)$ no son coprimos. Entonces comparten uno de sus divisores $l \neq 1$. Esto llevaría a que para cualquier $s_k \in E$ se tiene que o bien $(a_u + 1)$ divide a s_k o $(a_v + 1)$ divide a s_k, desembocando inevitablemente en que todos los s_k son divisibles entre l y por tanto, E no sería sistema generador.

Veamos ahora que el semigrupo S generado por los elementos $s_i = (\prod_{j=1}^{n} p_j)/p_i$ es minimalmente generado por estos y que además es supersimétrico. Supongamos que no está minimalmente generado, entonces existe un s_k tal que puede expresarse como combinación lineal entera positiva del resto de elementos del sistema generador. Esto es, si cada $a_i \in \mathbb{N}$,

$$s_k = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_{k-1} s_{k-1} + a_{k+1} s_{k+1} + \ldots + a_n s_n$$

Como cada elemento s_i, a excepción de s_k, es divisible entre p_k por como están construidos tenemos que el lado derecho de la igualdad es un múltiplo de p_k con lo que también lo es s_k. Pero esto contradice la definición de cada uno de los s_i ya que p_k es coprimo con todos los divisores de s_k, por serlo con todos demás los p_i, y por tanto S ha de estar minimalmente generado por este sistema generador para no caer en este imposible. En segundo lugar vamos a probar que se trata de un semigrupo supersimétrico comprobando para cada s_i las condiciones del Lema 17. Para empezar S es simétrico por serlo su semigrupo derivado. Si calculamos $\overline{S}$ vemos que este es el propio $\mathbb{N}$, el cual tiene un único maximal en $\mathrm{Ap}(\mathbb{N}, 1)$, luego su tipo es 1. Veamos ahora que $\mathrm{Ap}(S, s_t)$ tiene coordenadas únicas en $L(s_t)$ para cualquier s_t. Definamos f como el número

$$f = (p_1 - 1)s_1 + (p_2 - 1)s_2 + \ldots + (p_{t-1} - 1)s_{t-1} + (p_{t+1} - 1)s_{t+1} + \ldots + (p_n - 1)s_n - s_t.$$

Veamos que f es el número de Frobenius usando el Lema 6. Si sumamos a f un elemento $s_k \neq s_t$ del sistema generador minimal obtenemos

$$\begin{aligned} f + s_k =& (p_1 - 1)s_1 + (p_2 - 1)s_2 + \ldots + p_k s_k + \ldots + (p_{t-1} - 1)s_{t-1} + (p_{t+1} - 1)s_{t+1} + \ldots + \\ & (p_n - 1)s_n - s_t = (p_1 - 1)s_1 + (p_2 - 1)s_2 + \ldots + (p_k - 1)s_k + \ldots + (p_{t-1} - 1)s_{t-1} + \\ & (p_{t+1} - 1)s_{t+1} + \ldots + (p_n - 1)s_n. \end{aligned}$$

Como $f + s_k$ es una combinación de los elementos del semigrupo, entonces $f + s_k \in S$. El caso $f + s_t$ es trivial se llega a la misma conclusión. Tenemos así que f es un número de pseudofrobenius y, por se S simétrico, el único. En caso de existir otra representación en $L(s_t)$ de $F(S)$ distinta de la dada por los coeficientes con los que hemos construido f, veríamos que alguna de las coordenadas α_l que forman dicha tupla ha de ser mayor que su correspondiente en la representación dada por la definición de f. Pero esto es imposible porque entonces tendríamos por el mismo razonamiento del último paso, que $F(S)$ puede expresarse como combinación de elementos de S, contradiciendo la definición de número de Frobenius. Luego $L(s_t)$ representa a los maximales de $\mathrm{Ap}(S, s_t)$ de forma única y, por el Lema 15, también al resto de elementos. Concluimos que S es supersimétrico. □

De la Proposición 21 obtenemos dos cosas. Por una parte, tenemos el inmenso valor del poder dar una descripción tan precisa de los semigrupos supersimétricos, y además el poderlos construir de una forma directa explicitando los números p_i que se agruparán formando cada elemento del sistema generador minimal. Por otro lado, ahora ya podemos dar el número de sistemas generadores respecto de los cuales S será simétrico en caso de serlo respecto de su sistema generador minimal. Como todos los elementos que podemos definir de la forma $r = (b_i+1)s_i$ son independientes del s_i que escojamos (está en la prueba de la Proposición 21), entonces el número exacto de sistemas generadores respecto de los cuales S será supersimétrico es exactamente 2, su sistema generador minimal E y el sistema generador $E \cup \{\prod_{i=1}^n p_i\}$.

La conclusión más inmediata que se sucede de la Proposición 21 es la siguiente fórmula que nos permite calcular el número de Frobenius mediante una fórmula explícita dada a continuación:

Proposición 22. *Sea S un semigrupo numérico minimalmente generado por $E = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ tal que cada elemento $s_i \in E$ es expresado como $s_i = (\prod_{j=1}^n p_j)/p_i$ con $p_1, p_2, \ldots, p_n$ coprimos por parejas, entonces $F(S) = (n-1)\prod_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^n p_j)/p_i$.*

Demostración. La igualdad se sigue de forma inmediata de la prueba de la segunda implicación de la Proposición 21. En ella se explica como expresar el número de Frobenius de en función de los p_i de manera que para un $s_k \in E$ se tiene que

$$\begin{aligned}
F(S) =&(p_1-1)s_1 + (p_2-1)s_2 + \ldots + (p_{t-1}-1)s_{t-1} + (p_{t+1}-1)s_{t+1} + \ldots + (p_n-1)s_n - s_t \\
=&(p_1-1)(\prod_{j=1}^n p_j)/p_1 + (p_2-1)(\prod_{j=1}^n p_j)/p_2 + \ldots + (p_{t-1}-1)(\prod_{j=1}^n p_j)/p_{t-1} + \\
&(p_{t+1}-1)(\prod_{j=1}^n p_j)/p_{t+1} + \ldots + (p_n-1)(\prod_{j=1}^n p_j)/p_n - (\prod_{j=1}^n p_j)/p_t \\
=&(n-1)\prod_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^n p_j)/p_i.
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] Tim Smits y Sabine Van Huffel Ben Van Calster. The curse of scoreless draws in soccer: The relationship with a team's offensive, defensive, and overall performance, 2008.

[2] Dominic Cortis. How to use kelly criterion for betting. `https://www.pinnacle.com/en/betting-articles/Betting-Strategy/How-to-use-kelly-criterion-for-betting/2BT2LK6K2QWQ7QJ8`.

[3] Aurélien Géron. Hands-on machine learning with scikit-learn, keras & tensorflow, 2019. O'Reilly, 1-212.

[4] P. A. García-Sánchez J. C. Rosales. Numerical semigroups, 2009. Springer, 3-14.

[5] Christian Gottlieb y R. Häggkvist Ralf Froberg. On numerical semigroups, 1986. Research Gate, 63-85.