

UNIVERSITAT
JAUME·I

MÁSTER DE PROFESOR/A DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN
PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Aprendizaje de los conceptos de fracción y
proporcionalidad según Brousseau y su lugar
en el sistema educativo español

Autora:
Lucía MASERO BRAVO

Tutor académico:
Pablo GREGORI HUERTA

Fecha de lectura: Julio de 2021
Curso académico 2020/2021

Me gustaría dedicar este trabajo a aquellas personas que han estado presentes durante este año.

En primer lugar a Pablo Gregori por su dedicación y apoyo brindado tanto en la realización de este trabajo como en la tesis doctoral. A Vicente Martínez por su ayuda y dedicación proporcionada en la tesis doctoral. Gracias Pablo y Vicente por ser un ejemplo a seguir.

También me gustaría dedicar este trabajo a Sofia y Andrea, quienes conocí el día de inicio del Máster y han demostrado ser unas verdaderas amigas.

Finalmente, me gustaría dedicar este trabajo a mis padres y a Alberto por estar a mi lado siempre que los necesito. Gracias por creer siempre en mí.

Resumen

El presente Trabajo de Final de Máster (TFM) consta de una investigación realizada sobre el aprendizaje de los distintos significados de los conceptos de fracción y proporción. Para tal fin, se estudiarán los antecedentes de la etapa educativa obligatoria secundaria (ESO), centrándose en los primeros cursos de la ESO del sistema educativo español. Además, se han investigado los métodos que se emplearon en la escuela francesa Jules Michelet, así como el desempeño de los alumnos del curso CM2 de las tareas propuestas por el profesorado e investigadores adscritos al Centre d'Observation pour la Recherche sur l'Enseignement del Mathématiques (COREM).

Palabras clave

Matemáticas, Fracción, Proporcionalidad, Investigación educativa, Brousseau

Abstract

The current Master's Thesis (TFM) consists of a research focused on the learning of the different meanings of the concepts of fraction and proportion. For this purpose, the antecedents of the compulsory secondary educational stage (ESO) will be studied, with special emphasis on the first years of ESO in the Spanish educational system. In addition, the methods used in the French school Jules Michelet have been investigated as well as the performance of scholars in CM2 year for the tasks proposed by the teachers and researchers attached to the Center d'Observation pour la Recherche sur l'Enseignement del Mathématiques (COREM).

Keywords

Mathematics, Fraction, Proportionality, Educational research, Brousseau

Índice general

1. Introducción	1
2. Estado de la cuestión	3
3. Conceptos previos	5
3.1. Definición de fracción	5
3.2. Significados que puede adquirir la fracción [31, 11, p. 143 -145,]	6
3.2.1. Fracción como concepto de compartir o como parte de la unidad	6
3.2.2. Fracción como concepto de cociente de dos números	6
3.2.3. Fracción de una cantidad o como operador de un número	7
3.2.4. Fracciones en términos de aplicaciones lineales	8
3.3. Definición de proporcionalidad [40, 32, Definición técnica,p.11-14]	10
4. Metodología	13
4.1. Análisis del sistema educativo español	13
4.2. Análisis del procedimiento planteado por Guy Brousseau	14
4.3. El Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas CRDM-Guy Brousseau (CRDM-GB) [8, 3, ,p. 4-7]	14
5. Resultados	17
5.1. Aprendizaje de las fracciones en el sistema educativo español	17
5.2. Aprendizaje de los distintos significados de fracción	17
5.3. Aprendizaje de proporcionalidad	19
5.4. Aprendizaje del concepto de fracción en términos de aplicación lineal según Brousseau [21, p.230-231]	21
5.5. Investigación de la caja 412-1993/1994 - CM2B del CRDM-GB	22
5.5.1. Organización del curso	22
5.5.2. Iniciación al concepto de fracción en el nivel CM2	25
5.5.3. Iniciación al concepto de proporcionalidad en el nivel CM2	32
6. Conclusiones	39

6.1.	Conclusiones del análisis realizado de los libros del sistema educativo español actual	39
6.1.1.	Aprendizaje de los distintos significados que adquiere una fracción	39
6.1.2.	Aprendizaje del concepto de proporcionalidad	40
6.2.	Conclusiones del análisis realizado del grupo CM2B del curso 1993-1994	40
6.2.1.	Aprendizaje de los distintos significados que adquiere una fracción	40
6.2.2.	Aprendizaje del concepto de proporcionalidad	42
6.3.	Recursos del CRDM-GB	44
6.4.	Discusión	45
6.5.	Valoración personal	46
A.	Resolución de los problemas referentes al concepto de proporcionalidad	I
A.1.	Resolución del problema 1 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteado en la página 32	I
A.2.	Resolución del problema 2 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteado en la página 32	VI
A.3.	Resolución de los problemas 3 y 4 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteados en la página 32	VIII
A.4.	Resolución de los problemas 5 y 6 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteados en la página 36 y 36 respectivamente	XI
A.5.	Respuestas a los problemas planteados en el examen por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteados en la página 37 y 37 respectivamente . . .	XIV

Capítulo 1

Introducción

El concepto de fracción permite expresar la cantidad que tomamos de un cierto elemento. Por otra parte, la proporcionalidad expresa una relación constante que se cumple entre dos magnitudes. Debido a que estos dos conceptos nos acompañan durante toda nuestra trayectoria académica, además de estar presente en muchas situaciones cotidianas, será de gran importancia profundizar en ellos.

Dada su importancia, tanto las fracciones como las razones de proporcionalidad han estado presentes a lo largo de la historia. Las primeras apariciones de estos dos conceptos se remontan a la época de los Egipcios donde se tiene constancia del uso de fracciones [14, p. 651-656] y proporcionalidad [30, p.64-67] en el Papiro de Rhind. En dicho papiro se deja constancia que los egipcios consideraban que las fracciones venían definidas por números enteros y se consideraba siempre como numerador la unidad.

Los babilonios también utilizaban en su día a día las fracciones. Estos definían la parte no entera de una cantidad utilizando como denominador siempre el número 60.

Posteriormente, las fracciones y las razones de proporcionalidad fueron utilizadas en el siglo II a.C. por los griegos haciendo avances en el desarrollo y uso de estos conceptos. Uno de los avances más conocidos y utilizados por los alumnos de secundaria, que se desarrolló en la antigua Grecia, fue el Teorema de Tales que se remonta a Mileto en el año 600 a.C. Los griegos definían las fracciones marcando con un acento el numerador, y con dos acentos el denominador.

Los objetivos que se persiguen en este trabajo son realizar un análisis acerca del aprendizaje de los distintos significados que adquieren las fracciones, así como analizar el aprendizaje del concepto de proporcionalidad. Para tal fin se han estudiado los libros de los últimos cursos de primaria hasta los primeros cursos de la ESO. Además, se han estudiado los documentos de

la caja 412-1993/1994 - CM2B del CRDM-Guy Brousseau que se encuentra almacenada en el Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau (CRDM-GB), fondos documentales del Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón (IMAC) de la Universitat Jaume I de Castellón.

El presente documento está dividido en los diferentes capítulos que se detallan a continuación:

- Capítulo 2: se exponen investigaciones y trabajos previos sobre la enseñanza de distintos significados que adquieren las fracciones y concepto de proporcionalidad.
- Capítulo 3: detalla todos los conceptos previos necesarios para realizar el análisis. Estos son la definición de fracción y los distintos significados que puede adquirir las fracciones, así como el concepto de proporcionalidad.
- Capítulo 4: detalla en qué cursos y qué conceptos se aprenden sobre fracciones y proporcionalidad en el sistema educativo español.
- Capítulo 5: se expone como se aprende el concepto de fracción según Brousseau.
- Capítulo 6: se expone información sobre el Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau (CRDM-GB) de la Universitat Jaume I de Castellón.
- Capítulo 7: se presentan los datos obtenidos tanto en los libros de texto utilizados en el sistema educativo español como en el CRDM-GB.
- Capítulos 8 y 9: se presentan los resultados y conclusiones obtenidos del estudio realizado.

Capítulo 2

Estado de la cuestión

La comprensión de los conceptos de fracción y proporción desde edades tempranas es crucial para el rendimiento matemático en cursos superiores. Según las investigaciones de Siegler et. al. [34, p.13] el dominio de todos los tipos de magnitudes numéricas está asociado a una mejor competencia aritmética y un mejor rendimiento en matemáticas, encontrando una correlación significativa entre el aprendizaje de fracciones a las edades de 11 y 13 años y su rendimiento matemático en general. Por su parte, Lesh et. al. [24] manifiestan que la proporción es clave en el aprendizaje de números y operaciones, considerando este concepto una base primordial para aprender álgebra.

En los años 70, Kieren [23, p.127-128] vio de gran importancia que en el proceso de aprendizaje se tuviesen claras las diferencias y relaciones entre los distintos significados de fracción. Numerosos investigadores se han dedicado al estudio de las diferentes interpretaciones del concepto de fracción. Charalambous et. al. [7, p.295-296], Castro y Torrealbo [6, p.286] y Llinares y Sánchez [25, p.51-78] concluyeron que hay cinco interpretaciones del concepto de fracción, estas son: interpretación de fracción como parte de un todo, como operador, como concepto de razón, como cociente y como medida. Además, en la misma publicación Kieren [23, p.26] se concluye que el significado de fracción como parte de un todo es una base para aprender los otros subconjuntos de los números racionales.

Çalisici [5, p.1851-1853] analiza las dificultades que los estudiantes presentan a la hora de resolver problemas que impliquen utilizar conceptos de proporcionalidad, concluyendo que hay técnicas de aprendizaje que mejoran la comprensión de estos conceptos. Esto implica que los alumnos cometan menos errores al resolver ejercicios donde se utilicen nociones de proporcionalidad. Muchos otros investigadores han identificado múltiples dificultades que pueden aparecer a la hora de estudiar el concepto de proporcionalidad. Entre ellas se encuentra el uso excesivo de problemas que se basan en obtener una incógnita, estudiado por Dooren et. al. [10, p.27-30], o el

contexto en el que se plantean las proporciones y el conocimiento que tiene el alumno de este concepto, investigada por Tourniaire [36, p.407-409].

Algunos estudios, como el de Olfos [2, p.10], muestran que hay dificultades comunes entre los alumnos de los últimos cursos de primaria a la hora de comprender las fracciones. Por ello, se ha estudiado cuáles son los mejores métodos para aprender el concepto de fracción. Entre ellos se encuentra el artículo publicado por Thompson y Saldanha [35, p.13-15] donde se ve que aprender este concepto mediante figuras e imágenes aporta claridad y coherencia. Asimismo, muchas investigaciones proponen nuevas metodologías para comprender y construir el concepto de proporcionalidad, como son los estudios de Jaramillo Bravo [22, p.29-35], Siegler [33], Martín et. al. [26, p.165-168] y Burgos et. al. [4, p.8-10].

Capítulo 3

Conceptos previos

A lo largo de este capítulo se introducirán todos los términos necesarios para una mejor comprensión del presente trabajo, además de conocer más de cerca algunos conceptos propios del campo de como se introducen y aprenden las fracciones.

Primeramente, hay que tener presente que las fracciones son una base que todo estudiante ha de comprender. Por ello, este concepto se estudia desde diferentes perspectivas (o significados) las cuales veremos definidas a continuación. Además, según las investigaciones de G. Brousseau [21, p.227-242] las fracciones pueden ser denotadas como aplicaciones lineales, por ello también será incluido esto como concepto previo.

Posteriormente se definirán los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, muy presentes en las clases de matemáticas entre los cursos de 6.º de primaria al 2.º curso de la ESO.

3.1. Definición de fracción

La fracción de un número se entiende como las cantidades que se toman de una cantidad dividida en partes iguales. Es decir, consideramos la fracción

$$\frac{a}{b}$$

donde a es el numerador y b es el denominador con $a, b \in \mathbb{N}$.

3.2. Significados que puede adquirir la fracción [31, 11, p. 143 -145,]

3.2.1. Fracción como concepto de compartir o como parte de la unidad

El significado de fracción como parte de un todo se entiende como dividir una unidad en una cantidad de partes iguales indicadas por el denominador y tomar tantas partes como nos indique el numerador.

Este concepto se introduce para anclar una fracción en el campo de las magnitudes y sus medidas. Es decir, se pretende construir numeración decimal posicional a partir de fracciones decimales y ayudar a dar sentido a los cálculos realizados con la escritura por comas.

Por tanto, la fracción $\frac{a}{b}$ significará que cogemos a partes de la unidad que es dividida en b trozos iguales.

En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de representar la fracción $\frac{1}{6}$ como parte de la unidad. En este caso se divide un pastel en 6 partes y se escoge una.



Figura 3.1: Representación de la fracción $\frac{1}{6}$ como parte de la unidad.

3.2.2. Fracción como concepto de cociente de dos números

La noción de fracción como cociente se refiere a repartir alguna cosa o cosas entre distintas partes de forma equitativa, siendo el numerador la cantidad de unidades que se quieren repartir y en denominador la cantidad de partes en las que se desea repartir el numerador. Este concepto solo será aplicable a situaciones donde el numerador sea divisible por el denominador.

La idea en la que se basa este significado es en arrastrar a veces lo que se desea repartir y dividimos el resultado en un número b de partes iguales.

El estudio de las fracciones mediante este significado tiene como objetivo desvincular la fracción en el campo de las magnitudes y sus medidas.

Por tanto, la fracción $\frac{a}{b}$ significará que cogemos $\frac{1}{b}$ de a unidades.

En la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de representar la fracción $\frac{10}{5}$ como cociente de dos números. En este caso se dividen 10 manzanas entre 5 amigos.

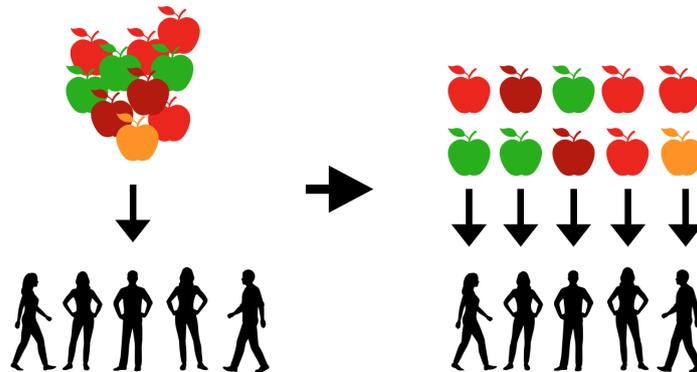


Figura 3.2: Representación de la fracción $\frac{10}{5}$ como cociente de dos números.

3.2.3. Fracción de una cantidad o como operador de un número

El significado de una fracción como operador se entiende como ejecutar una operación de división y otra de multiplicación sobre una cantidad discreta.

Entender las fracciones como operador de un número tiene como objetivo introducir y ayudar a comprender los cálculos de porcentajes.

Si queremos determinar $\frac{a}{b}$ de c hay dos formas de proceder a la hora de calcular la fracción de una cantidad.

- En un caso primeramente realizamos la operación de multiplicación y posteriormente de división, como se muestra en la Figura 3.3.

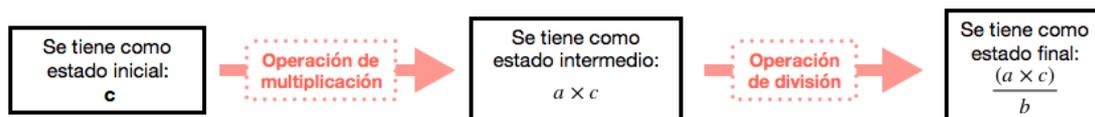


Figura 3.3: Representación de la operación $\frac{a}{b}$ de c operando primero la multiplicación y después la división.

- En otro caso primeramente realizamos la operación de división y posteriormente de multiplicación, como se muestra en la Figura 3.4.

Por tanto, la operación $\frac{a}{b}$ de c significará que disponemos de una cantidad c cogemos $\frac{a}{b}$ partes.

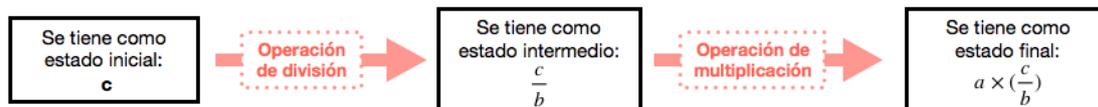


Figura 3.4: Representación de la operación $\frac{a}{b}$ de c operando primero la división y después la multiplicación.

3.2.4. Fracciones en términos de aplicaciones lineales

Las fracciones en términos de aplicación lineal se dan cuando las fracciones representan una razón entre dos cantidades.

Definición (aplicación lineal): [20, p.1] Sean V y W dos espacios vectoriales que se encuentran en el mismo cuerpo K entonces la aplicación $T : V \rightarrow W$ es lineal si se cumple que:

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \\ T(av) &= aT(v) \quad \forall a \in K \text{ y } v \in V \end{aligned}$$

Cabe destacar que la definición previa los alumnos la aprenden de forma intuitiva reduciendo a la unidad la cantidad del espacio V y obteniendo la cantidad que corresponde en el espacio W . Una vez hecha la reducción a la unidad los alumnos operarán mediante operaciones de adición o multiplicación para obtener el resultado deseado.

Estudiar las fracciones desde edades tempranas con este significado tendrá un gran valor a la hora de realizar resolución de problemas, dado que los estudiantes se familiarizan con las aplicaciones lineales utilizando el vocabulario de fracciones.

Hay dos situaciones en las que se pueden utilizar las aplicaciones lineales cuando se operan las fracciones:

- Problemas en los que los datos no corresponden a una aplicación lineal, es decir, que no hay una ley tal que una situación no se cumpla en otro caso.
- Problemas correspondientes a "leyes", convenciones o necesidades lógicas, proporcionarán ejemplos de aplicaciones lineales.

Un ejemplo (ver Figura 3.5) sería el que se muestra en la imagen, el problema plantea que al cocinar un 2 kilogramos de pescado crudo si lo cocinamos obtenemos $\frac{6}{4}$ kilogramos de pescado cocinado. Se debe obtener cuantos kilogramos serán necesarios para tener 3 kilogramos de pescado cocinado.

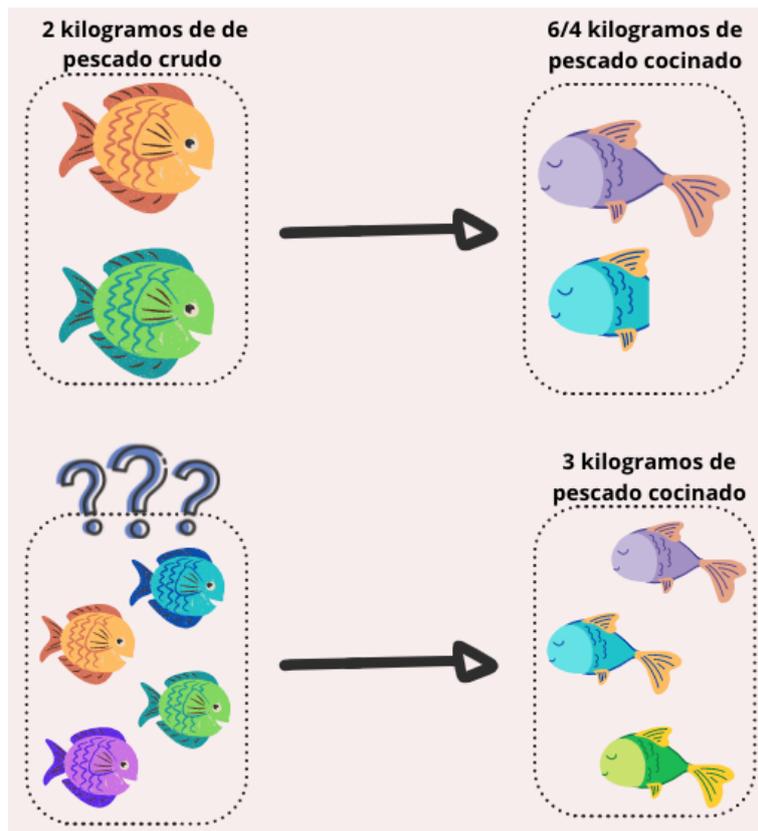


Figura 3.5: Representación de un ejemplo de fracción entendida como aplicación lineal.

3.3. Definición de proporcionalidad [40, 32, Definición técnica,p.11-14]

Dos magnitudes A y B serán proporcionales siempre que un cambio en la cantidad de A corresponderá a una variación conforme al producido en A a la cantidad de magnitud de tipo B . Las cantidades de las magnitudes A y B mantendrán siempre un cociente constante o razón.

A continuación se definen los conceptos de proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa.

Definición (relación de proporcionalidad directa)[40, Tipos de proporcionalidades]: Sean A y B dos magnitudes, estas serán directamente proporcionales si vienen definidas por la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) = k \times a \end{aligned}$$

con a y b las cantidades que se tienen de la magnitud A y B respectivamente y k la constante de proporcionalidad.

Es decir, las magnitudes A y B serán directamente proporcionales siempre que un aumento (o disminución) en la cantidad de A corresponderá a un aumento (o disminución) proporcional a la cantidad de B .

En la Figura 3.6 se presenta un ejemplo donde se hace uso de las relaciones de proporcionalidad directa. En este ejemplo, se tiene que realizar una mermelada para la cual se tiene las cantidades para 4 raciones y se quiere extrapolar a 10 comensales. Para ello, en un principio se verá la relación de proporcionalidad que se cumple entre el número de comensales y después se aplicará la relación obtenida a las cantidades de los ingredientes.

Definición (relación de proporcionalidad inversa) [40, Tipos de proporcionalidades]: Sean A y B dos magnitudes, estas serán inversamente proporcionales si vienen definidas por la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) = \frac{k}{a} \end{aligned}$$

con a y b las cantidades que se tienen de la magnitud A y B respectivamente y k la constante de proporcionalidad.

Por tanto, en magnitudes A y B inversamente proporcionales, un aumento en una magnitud

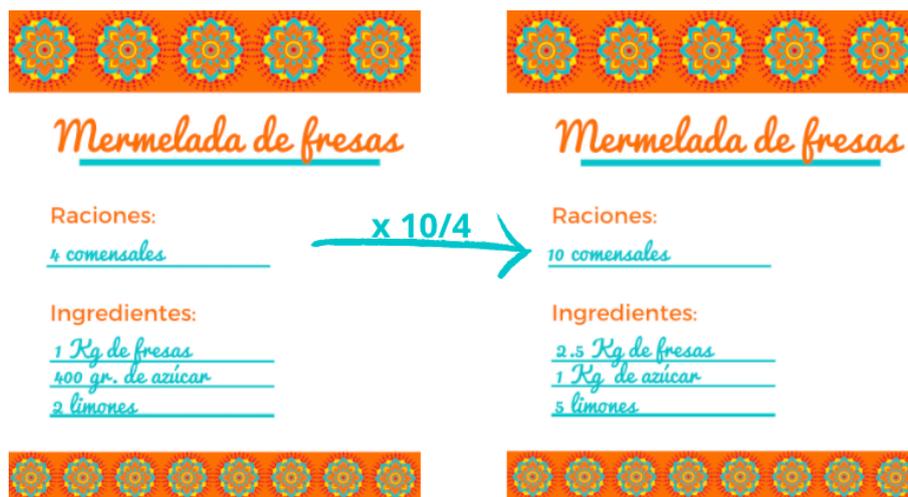


Figura 3.6: Un ejemplo del uso de proporcionalidad directa.

provoca una disminución en la otra y viceversa.

En la Figura 3.7 se presenta un ejemplo donde se hace uso de las relaciones de proporcionalidad inversa. En este ejemplo, se tiene que calcular en cuánto tiempo se podrá pintar un edificio si se dispone de 5 trabajadores y se sabe que con 4 trabajadores se tardarían 4 días.

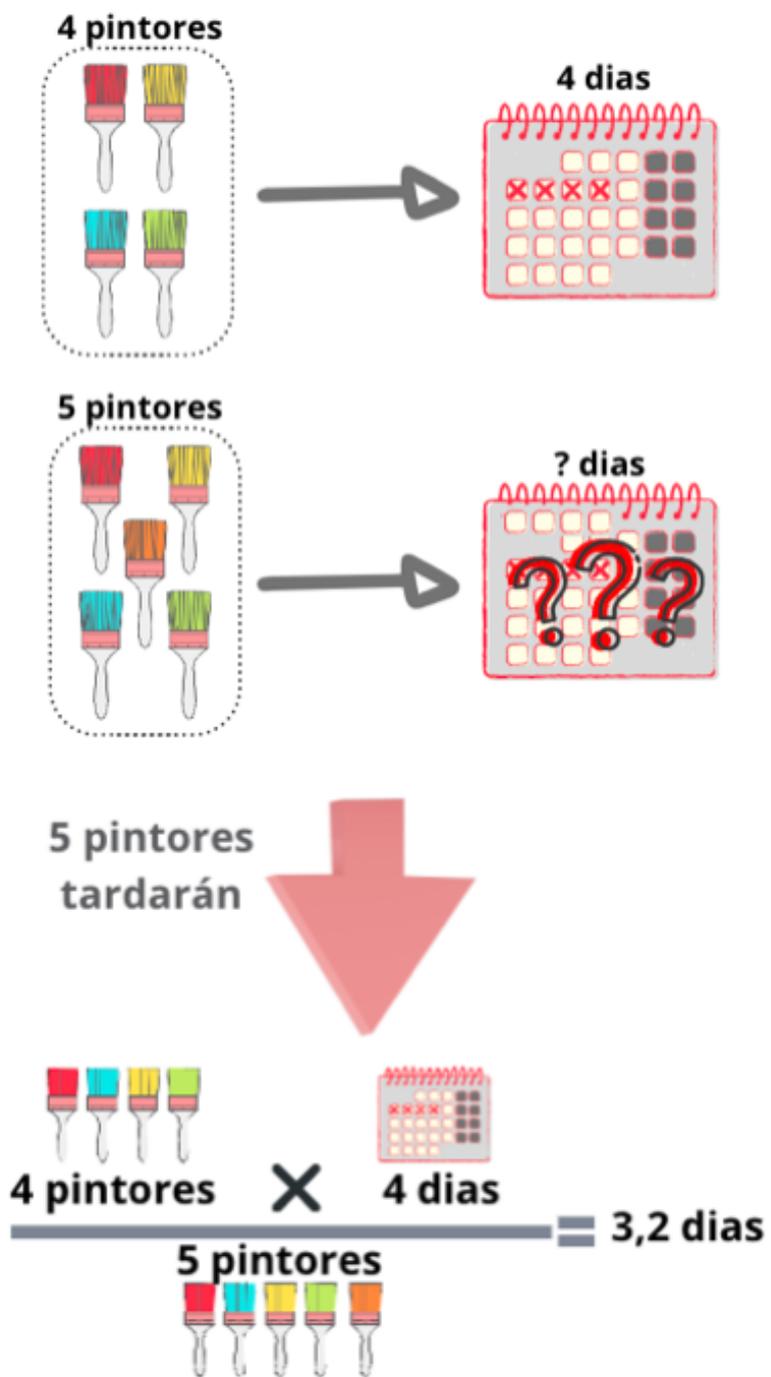


Figura 3.7: Un ejemplo del uso de proporcionalidad inversa.

Capítulo 4

Metodología

4.1. Análisis del sistema educativo español

Con el fin de analizar los conceptos de fracción que los estudiantes españoles adquieren, y más en concreto los estudiantes de la Comunidad Valenciana, se ha analizado en primer lugar el curriculum de todas las asignaturas de matemáticas que se imparten tanto en la Educación Secundaria Obligatoria [15, 18, 19, Continguts i criteris d'avaluació de l'assignatura Matemàtiques, Continguts i criteris d'avaluació de l'assignatura Matemàtiques Orientades a les Ensenyances Acadèmiques, Continguts i criteris d'avaluació de l'àrea Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades] como el Bachillerato [16, 17, Continguts i criteris d'avaluació de l'assignatura Matemàtiques I, Continguts i criteris d'avaluació de l'assignatura Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials I].

Por otra parte, se han analizado libros de los cursos de matemáticas entre 5.º de primaria y 1.º de la ESO de las principales editoriales utilizadas en el territorio español. Estos son:

- Los libros de la editorial Anaya de 5.º de primaria [12], 6.º de primaria [13, p.90-103 y p.118-131] y 1.º de la ESO [9, p.91-102 y p.74-81].
- Los libros de la editorial Santillana de 5.º de primaria [37, p. 48-61], 6.º de primaria [38, p. 46-59 y 152-163] y 1.º de la ESO [39, p. 72-91 y 154-173].
- Los libros de la editorial SM de 5.º de primaria [27], 6.º de primaria [29, p. 56-79 y 102-119] y 1.º de la ESO [28, p. 66-87 y 110-127].

4.2. Análisis del procedimiento planteado por Guy Brousseau

En primer lugar, para comprender los distintos tipos de significados del concepto de fracción que se entienden según las teorías de Guy y Nadine Brousseau, se ha leído en el capítulo 11 del libro [21, p.227-242], dedicado a este concepto.

Por otra parte, se ha visto una implementación de la teoría de Brousseau sobre el aprendizaje del concepto de fracción recogido en cuadernos de los estudiantes durante el curso 1993 - 1994. Además, se ha visto una implementación del aprendizaje del concepto de proporcionalidad aplicado a los mismos estudiantes durante dicho curso. Estos documentos se encuentran almacenados en el Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas CRDM-Guy Brousseau (CRDM-GB) [8] ubicado en la Universitat Jaume I.

4.3. El Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas CRDM-Guy Brousseau (CRDM-GB) [8, 3, ,p. 4-7]

Este centro de recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau (CRDM-GB) nace el 1 de Diciembre de 2010 siendo dependiente del *Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones de Castellón* (IMAC) de la Universitat Jaume I. Cabe destacar que el IMAC se dedica a resolver los retos de carácter matemático, tanto para empresas como instituciones públicas donde se precise realizar un tratamiento multidisciplinar de la información.

El CRDM-GB tiene la finalidad de albergar material, como son notas del profesorado, cuadernos de alumnos, informes, tesis y artículos, exámenes y preparación de las clases, todo este material contribuye a desarrollar la investigación en el área de didáctica de las Matemáticas debido a que nos proporciona información sobre cómo se enseñan, aprenden, estudian y evalúan los conceptos básicos de las matemáticas.

Los materiales que alberga el CRDM-GB son principalmente de carácter bibliográfico y documental desarrollados por el *Centre d'Observation pour la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (COREM), el cual surge de la colaboración entre el *Instituto de Investigación en Enseñanza de la Matemática* (IREM) de la Universidad de Bordeaux y la escuela pública Jules Michelet de la ciudad francesa de Talence, donde se encuentra el laboratorio dedicado a diseñar y poner en práctica nuevos métodos de enseñanza.

Cabe destacar que la escuela pública Jules Michelet impartía clases a tres cursos de infantil y cinco cursos de educación primaria (teniendo 2 grupos por curso). Además, el laboratorio del COREM tenía un aula para poder tanto visualizar las clases por investigadores como dejar registradas las sesiones mediante videos para poder analizar las interacciones producidas durante las lecciones sin influir en el correcto funcionamiento de las clases.

El COREM fue dirigido por su creador, el profesor Guy Brousseau, entre los años 1972 y 1999 el

cual también da nombre a los fondos por su gran dedicación al centro de recursos ubicado en la Universitat Jaume I.

Acceso al material del CRDM-GB [8, 3, ,p. 4-7]

El acceso a los recursos del CRDM-GB puede ser mediante consulta online (aquellos documentos que hayan sido digitalizados) o presencialmente en una sala de consulta localizada en la biblioteca de la Universitat Jaume I. Además, el archivo dispone de un total de 450 grabaciones en video de las clases impartidas en el laboratorio del colegio Jules Michelet.

Funcionamiento de las clases impartidas en el laboratorio del COREM [8, 3, ,p. 4-7]

En las clases impartidas en el laboratorio de investigación de didáctica de las matemáticas del Jules Michelet, como se ha mencionado anteriormente, se dedicaba a incorporar metodologías y actividades novedosas en el ámbito de las enseñanzas matemáticas. Los alumnos que participaban en este proyecto recibían lecciones en este laboratorio un mínimo de una vez por semana, además las clases eran impartidas por un profesor habitual del centro.

El profesorado que participaba en los proyectos de investigación tenía una carga lectiva menor, para que pudiesen aportar sus experiencias y conocimientos a las investigaciones en curso. Este profesorado se dedicaba a preparar las clases conjuntamente con investigadores expertos en la materia y pertenecientes al COREM en las horas no lectivas. Otra actividad a la que dedicaba tiempo el profesorado colaborador era a observar las clases. Esta tarea se realizaba al menos una vez por semana comentando las grabaciones vistas con miembros del COREM. Finalmente, este profesorado redactaba las tareas semanales que se realizarían tanto en las clases como en la investigación, además de redactar los informes pertinentes referentes a las acciones que se realizaban durante el curso.

Capítulo 5

Resultados

5.1. Aprendizaje de las fracciones en el sistema educativo español

En el sistema educativo español el significado de fracción se empieza a estudiar en el 5.º curso de primaria y su aprendizaje se alarga hasta el primer curso de la ESO. Por otra parte, el concepto de proporcionalidad se aprende entre los cursos de 6.º de primaria y 1.º de la ESO.

A continuación se muestran dos tablas donde se recoge el análisis sobre el aprendizaje de los distintos significados de fracción en los libros de tres editoriales (Tabla 5.1) y el aprendizaje del concepto de proporcionalidad (Tabla 5.2).

5.2. Aprendizaje de los distintos significados de fracción

Curso	Editorial	Tema y trimestre donde se estudia	Se estudia el significado de fracción de una cantidad	Se estudia el significado de fracción como cociente de dos números	Se estudia el significado de fracción como parte de la unidad	Notas
Quinto de primaria	Anaya	No se estudia	No	No	No	

Curso	Editorial	Tema y trimestre donde se estudia	Se estudia el significado de fracción de una cantidad	Se estudia el significado de fracción como cociente de dos números	Se estudia el significado de fracción como parte de la unidad	Notas
Quinto de primaria	SM	Tema 3 - 1.º trimestre	Si	Si	No	Se estudian los componentes de la fracción: numerador y denominador. Se dan las definiciones y se estudia mediante ejemplos y/o representaciones gráficas.
	Santillana	Tema 4 - 1.º trimestre	Si	No	No	Se estudian los componentes de la fracción: numerador y denominador. Fracciones propias e impropias. Se da la definición de fracción de una cantidad y se estudia mediante ejemplos y representaciones gráficas.
Sexto de primaria	Anaya	Tema 7 - 2.º trimestre	Si	Si	No	Se aprende mediante ejemplos y representaciones gráficas.
	SM	Tema 4 - 1.º trimestre	Si	No	No	Se introduce el concepto de fracción. Los componentes de la fracción: numerador y denominador. Fracciones propias e impropias. Se aprende mediante ejemplos y representaciones gráficas.
	Santillana	Tema 6 - 2.º trimestre	No	No	No	Se da por sabido el concepto de fracción. Se centra en operaciones con fracciones, fracciones equivalentes y comparación de fracciones.
Primero de la ESO	Anaya	Tema 7 - 2.º trimestre	Si	No	Si	Las explicaciones se realizan mediante representación gráfica.

Curso	Editorial	Tema y trimestre donde se estudia	Se estudia el significado de fracción de una cantidad	Se estudia el significado de fracción como cociente de dos números	Se estudia el significado de fracción como parte de la unidad	Notas
Primero de la ESO	SM	Tema 4 - 1.º trimestre	Si	Si	Si	En el primer apartado del tema se estudian los términos de numerador y denominador. Se aportan representaciones gráficas de cada significado de fracción para la mejor comprensión de cada uno de ellos (no se incluye una explicación teórica).
	Santillana	Tema 4 - 1.º trimestre	Si	Si	Si	En el primer apartado del tema se estudian los términos de numerador y denominador. Se dan ejemplos de cada significado de fracción para la mejor comprensión de cada uno de ellos.

Tabla 5.1: Análisis del aprendizaje de los distintos significados de fracción.

5.3. Aprendizaje de proporcionalidad

Curso	Editorial	Tema y trimestre donde se estudia	¿Se aprende proporcionalidad?	Notas
Quinto de primaria	Anaya		No	
	SM		No	
	Santillana		No	

Curso	Editorial	Tema y trimestre donde se estudia	¿Se aprende proporcionalidad?	Notas
Sexto de primaria	Anaya	Tema 9 - 2º trimestre	Sí	Se introducen las magnitudes directamente proporcionales (mediante tablas de proporcionalidad). Además, se estudia la resolución de problemas donde se tiene que hacer reducción a la unidad y utilizar las reglas de 3.
	SM	Tema 6 - 2º trimestre	Sí	Se introducen las magnitudes directamente proporcionales (mediante tablas de proporcionalidad). Además, se estudia la resolución de problemas donde se tiene que hacer uso de las tablas de proporcionalidad.
	Santillana	Tema 11 - 3º trimestre	Sí	Se introducen las magnitudes directamente proporcionales (mediante tablas de proporcionalidad). Además se ven las reglas de 3.
Primero de la ESO	Anaya	Tema 9 - 2º trimestre	Sí	Se estudian las relaciones de proporcionalidad tanto directa e inversa (incluyendo representaciones gráficas y ejemplos). Además se incluye un apartado de resolución de problemas sobre proporcionalidad.
	SM	Tema 6 - 2º trimestre	Sí	En el primer apartado del tema se estudian los términos de razón y proporción numérica. Además, se estudian las propiedades de las proporciones. También, se estudian las relaciones de proporcionalidad directa (incluyendo un apartado de reducción a la unidad y cálculo de reglas de 3).
	Santillana	Tema 8 - 2º trimestre	Sí	En el primer apartado del tema se estudian los términos de razón entre dos números y proporción. Además se estudian las relaciones de proporcionalidad tanto directa e inversa, incluyendo un apartado de resolución de problemas de proporcionalidad.

Tabla 5.2: Análisis del aprendizaje del significado de proporcionalidad.

5.4. Aprendizaje del concepto de fracción en términos de aplicación lineal según Brousseau [21, p.230-231]

Brousseau plantea un método para aprender el concepto de fracción mediante el significado de aplicación lineal.

Para tal fin, el primer paso será **plantear la situación del problema**, es decir, se plantearán distintas razones para los mismos componentes.

A continuación los alumnos **comprueban la definición de aplicación lineal** intuitivamente y se concluye que la aplicación es lineal.

Finalmente, se resumirá la operación a realizar en una oración que explicará el procedimiento de la aplicación, para ello, se precisarán varios pasos.

1. Se resumirá la operación en una frase que explicará el procedimiento de la aplicación, la operación no estará definida por fracciones sino por decimales. La oración será del tipo: “Hay que multiplicar ...”.
2. El profesor transforma el decimal en una fracción.
3. Los estudiantes simplifican la fracción.
4. En la oración anterior se cambiará el número en decimal por el número en fracción.
5. Se cambiará la frase para definir la aplicación. Es decir, tendremos una oración del siguiente tipo: “Debemos aplicar $x(\frac{a}{b})$ a ...”.

Un ejemplo de este procedimiento (ver Figura 5.2) sería el que se muestra en la imagen, el problema planteado es el mismo del ejemplo expuesto cuando se define la fracción en términos de aplicación lineal.

Problema: En la Figura 5.1 se muestra el peso del pescado crudo y el peso de ese mismo pescado después de ser cocinado. Resume la tabla en una oración.



Figura 5.1: Representación de un ejemplo del aprendizaje fracción entendida como aplicación lineal.

Los alumnos realizarían el procedimiento que se muestra en la Figura 5.2 para obtener la respuesta.

5.5. Investigación de la caja 412-1993/1994 - CM2B del CRDM-GB

5.5.1. Organización del curso

En la caja 412-1993/1994 - CM2B se recogen las actividades realizadas en el laboratorio de didáctica de las matemáticas de la escuela francesa Jules Michelet al grupo B del nivel CM2 (en la educación española sería el curso de 5^o de primaria) durante el curso 1993/94.

En este estudio se impartían 4 horas semanales de clase en el laboratorio del COREM divididas en 4 sesiones de 1 hora cada una, e impartidas los lunes, martes, jueves y viernes. Además, se tiene constancia de que el curso se inicia el día 2 de septiembre de 1993 y finaliza el 7 de julio de 1994.

Durante dicho curso escolar está presente la introducción de los conceptos de proporcionalidad y los distintos significados de fracciones entre otros. La temporización de las clases dedicadas al objeto de enseñanza de los significados de fracción y proporcionalidad se muestran en la Tabla 5.3.

Fecha	Nombre de la/s actividad/es	Objetivo de la actividad
Martes 2 de noviembre de 1993	Proporcionalidad: Situación de la sal marina (organización de los datos)	Saber reconocer, organizar y afrontar situaciones referentes a la proporcionalidad
Jueves 4 de noviembre de 1993	Continuación de la corrección de los ejercicios referentes a los conceptos de proporcionalidad aprendidos el día previo	
Viernes 5 de noviembre de 1993	Problemas de proporcionalidad (temática de jardinería)	Modelización
Lunes 8 de noviembre de 1993	Problemas de proporcionalidad (temática de un partido de futbol)	Resolución de problemas utilizando los conceptos de proporcionalidad
Martes 9 de noviembre de 1993	Problemas de proporcionalidad (temática de un partido de futbol) (continuación y corrección)	
Miércoles 10 de noviembre de 1993	Problemas de proporcionalidad (temática de bombones)	
Viernes 12 de noviembre de 1993	Problemas de proporcionalidad (temática de automóviles e hilo de cuero)	

Fecha	Nombre de la/s actividad/es	Objetivo de la actividad
Lunes 15 de noviembre de 1993	Clasificación de problemas	Reconocer situaciones donde se pueda aplicar los conceptos de proporcionalidad e interpretar los datos mediante gráficos, tablas, etc.
Martes 16 de noviembre de 1993	Clasificación de problemas (continuación)	
Jueves 18 de noviembre de 1993	Problemas con temática de un bizcocho (resolución por los alumnos y corrección). Resolución y corrección de pequeñas cuestiones de proporcionalidad	
Jueves 25 de noviembre de 1993	Las fracciones: medida del grosor de una hoja (escritura y decodificación de mensajes)	Introducción de nuevos números escritos en forma de fracción
Viernes 26 de noviembre de 1993	Análisis de mensajes (continuación)	
Lunes 29 de noviembre de 1993	Escritura del grosor de una hoja (uso de conceptos de fracciones)	
Martes 30 de noviembre de 1993	Control de los conceptos de proporcionalidad (temática de pasteles y tazas de café)	
Martes 7 de diciembre de 1993	Corrección del control de los conceptos de proporcionalidad realizado el día 30 de noviembre	
Martes 4 de enero de 1994	Construcción de longitudes fraccionarias: juego de comunicación (mensajes)	
Viernes 7 de enero de 1994	Longitudes fraccionarias: comparación de estrategias	Exploración de los distintos significados de una fracción: proporcionalidad y fraccionamiento
Lunes 10 de enero de 1994	Continuación de la clase previa	
Martes 5 de abril de 1994	Imagen de una fracción	Aplicaciones lineales
Martes 24 de mayo de 1994	ordenar problemas de competencia + tomar una fracción de un número	
Jueves 26 de mayo de 1994	Calcular la fracción de un número: formulación y problemas	

Tabla 5.3: Temporalización de las clases del curso CM2 del año 1993/94.

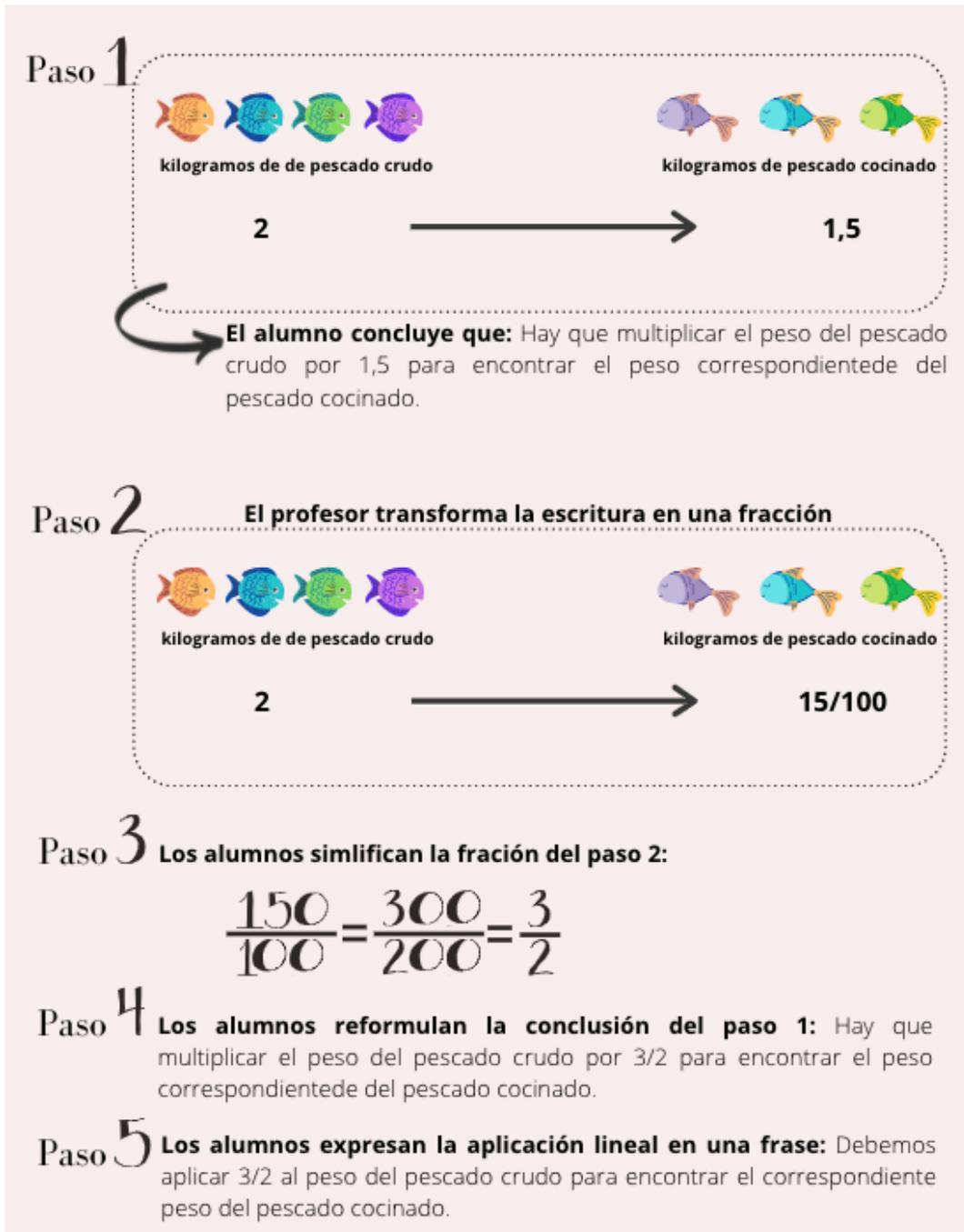


Figura 5.2: Representación de un ejemplo del aprendizaje fracción entendida como aplicación lineal.

Como se muestra en la Tabla 5.3, los alumnos adquieren primeramente los conceptos de proporcionalidad y fracción. Posteriormente, se aprende a operar con fracciones y finalmente los alumnos aprenderán distintos conceptos que pueden adquirir las fracciones.

Finalmente, cabe destacar que los alumnos resolverán siempre los ejercicios en bolígrafo azul, realizarán ellos mismos las correcciones en bolígrafo verde y la profesora corregirá las libretas con bolígrafo rojo.

Características particulares del grupo de estudio [1, p.1-4]

El grupo de estudio ha sido el CM2B el cual se componía de 5 chicas y 11 chicos. El CM2B estaba constituido por 7 alumnos muy buenos, 4 buenos, 3 estudiantes que se encuentran en la media y 2 estudiantes por debajo del nivel promedio.

Características de las clases [1]

En este grupo la docencia que se impartía era por ámbitos, por ello, el grupo solo tenía dos profesoras (Isabel Vincent y Nicole Boulounaud). Este equipo docente estaba en contacto con Alain Duval con el fin de preparar las lecciones de Matemáticas.

Boulounaud impartía las asignaturas de Biología, Historia, Educación Cívica y Vincent daba lecciones de Tecnología y Geografía. Además, las docentes se iban turnando en las clases de Educación Física y Artes Plásticas.

Cabe destacar que, en los dos primeros meses de curso, Vincent se encargaba de impartir Matemáticas y Francés en el nivel de CM2 mientras que Boulounaud impartía estas materias en el nivel CM1. A partir de principios del mes de noviembre, con el fin de seguir mejor la evolución de los alumnos, la profesora Vincent se encargó de enseñar Matemáticas y Lectura a CM2 y Francés a CM1. Por otra parte, Boulounaud se encargó de impartir Francés a CM2 y Matemáticas y Lectura a CM1.

5.5.2. Iniciación al concepto de fracción en el nivel CM2

Fracción como concepto de compartir o como parte de la unidad

Este concepto junto con los demás significados que se le atribuyen a las fracciones se estudiarán durante una clase de debate al inicio del mes de enero. Al tratarse de una clase oral no se tiene constancia de los ejercicios que se plantearon por el profesorado para abordar estos conceptos.

Cabe destacar que los alumnos han adquirido previamente a esta clase, durante noviembre y diciembre, los conceptos de adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones. Siendo la clase anterior al debate el examen referente a los conceptos de fracciones en el cual los alumnos debían resolver ejercicios donde se planteaban operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Fracción como concepto de cociente de dos números

Este concepto se estudia de forma general en una lección donde se les presenta a los alumnos un problema en el que tienen que medir el grosor de distintos tipos de hojas y representarlos mediante una fracción siendo éste el cociente entre el número de folios y los milímetros que tienen esos folios de grosor juntos.

En la Figura 5.3 se muestra la resolución de uno de los alumnos del grupo B:

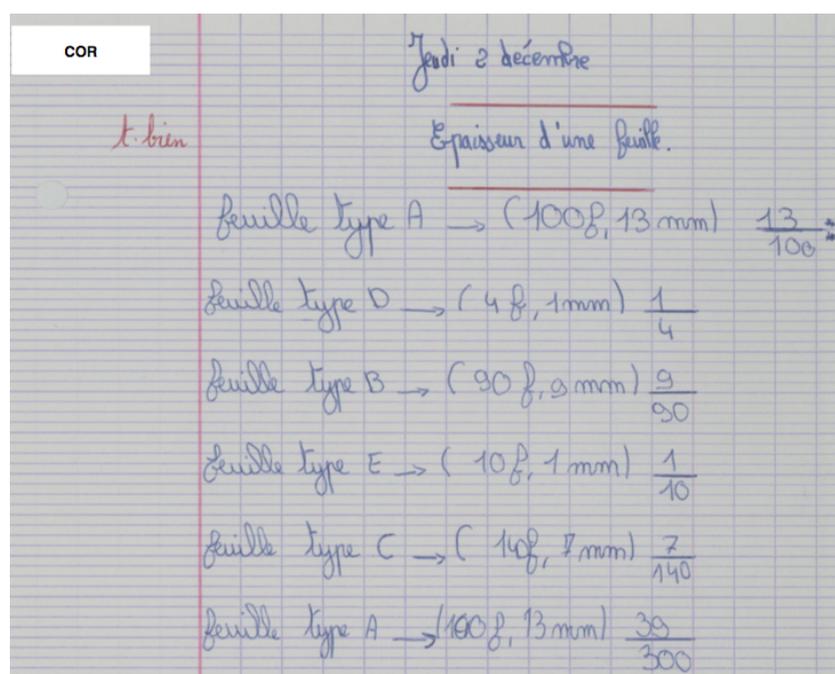


Figura 5.3: Ejercicio realizado para la introducción del concepto de fracción como concepto de cociente de dos números. El alumno está codificado con tres letras que preservan su identidad.

Fracciones en términos de aplicaciones lineales

Durante el mes de abril los alumnos aprenderán a comprender tanto los números enteros, las fracciones y los números decimales en términos de aplicaciones lineales.

Para el aprendizaje del significado de fracción en términos de aplicación lineal los alumnos dedicarán una lección a comprender este concepto y resolverán un ejercicio para practicar lo aprendido. Este será el Ejercicio 1, que se muestra más adelante.

Además, al finalizar el tema de aplicaciones lineales, los alumnos resolverán distintos ejercicios entre los que se encuentra uno que practica la comprensión de las fracciones en términos de aplicaciones lineales. Este ejercicio será el Ejercicio 2.

A continuación, se muestran los enunciados de los dos ejercicios que se plantean a los alumnos para la práctica de este concepto:

- **Ejercicio 1:** El 4 corresponde al 7. Entonces cuál será el conjunto de llegada de $\frac{8}{3}$.
- **Ejercicio 2:** El $\frac{9}{5}$ corresponde a $\frac{63}{5}$. Encuentra la imagen de:
 - $1 \rightarrow$
 - $\frac{27}{7} \rightarrow$
 - $\frac{7}{2} \rightarrow$

En la Figuras 5.4-5.6 se muestran las resoluciones de ambos ejercicios por 6 alumnos del grupo CM2B.

Fracción de una cantidad o como operador de un número

A final del mes de mayo se dedican dos sesiones para aprender el concepto de fracción de una cantidad. Para tal fin se plantean los ejercicios que se muestran a continuación.

Durante la sesión 1 los ejercicios que se plantean son para recordar el concepto de aplicación lineal. Esto es debido a que los alumnos entenderán el significado de fracción de una cantidad como una relación entre dos magnitudes explorada en forma de aplicación lineal (que será la operación de división) aplicada a una cantidad concreta (que será la operación de multiplicación).

Los ejercicios planteados para la lección 1 se engloban dentro de un mismo enunciado, como se ve a continuación:

- **Ejercicio:** Plantea una aplicación lineal para cada una de las situaciones que se plantean a continuación:
 - **Situación 1:** Un comerciante quiere que su beneficio sea $\frac{2}{5}$ del precio de compra.
 - **Situación 2:** El trigo da $\frac{4}{5}$ de su peso en harina.
 - **Situación 3:** Dibuja un rectángulo cuyo ancho sea $\frac{2}{3}$ del largo.
 - **Situación 4:** Para comprar a crédito en una tienda, debes pagar $\frac{3}{8}$ del precio de venta durante la compra.

Este ejercicio se realizó durante la sesión con ayuda de la profesora, por tanto, todos los alumnos tienen las mismas respuestas. En las Figuras 5.7 y 5.8 se muestran las respuestas de un alumno.

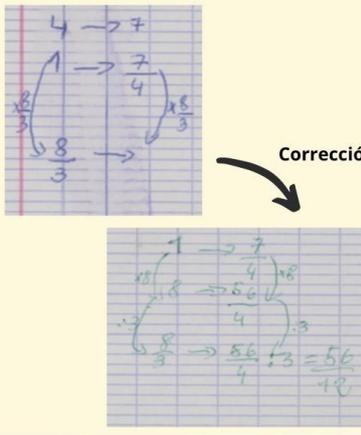
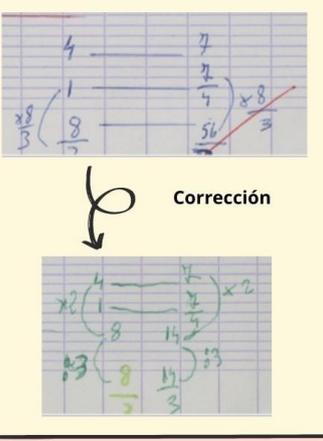
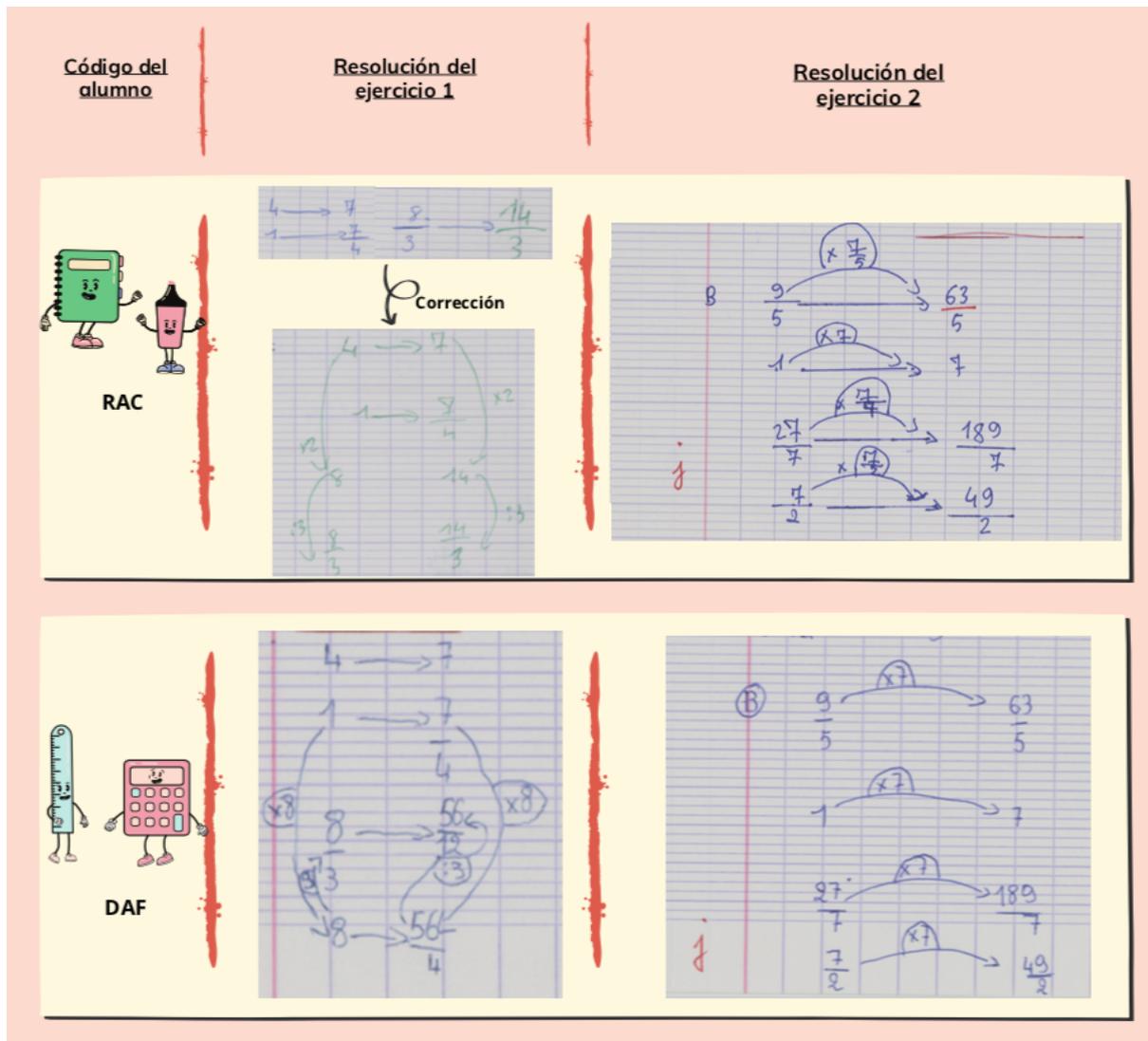
Código del alumno	Resolución del ejercicio 1	Resolución del ejercicio 2
 <p>REM</p>	 <p>Corrección</p>	<p>to terminer $\frac{9}{5} \rightarrow \frac{63}{5}$</p> <p>$1 \rightarrow 7$</p> <p>Comment as tu trouvé en faisant quelles opérations $\frac{27}{7} \rightarrow \frac{189}{7}$</p> <p>$\frac{7}{2} \rightarrow \frac{49}{2}$</p>
 <p>EJM</p>	 <p>Corrección</p>	<p>to terminer B $\frac{9}{5} \rightarrow \frac{63}{5}$</p> <p>il faut travailler vite plus $1 \rightarrow 7$</p> <p>$\frac{27}{7} \rightarrow \frac{189}{7}$</p> <p>$\frac{7}{2} \rightarrow \frac{49}{2}$</p> <p>$\frac{9}{5} \times 7 = \frac{63}{5}$</p>

Figura 5.4: Resolución de los ejercicios 1 y 2 por los alumnos REM y EJM.



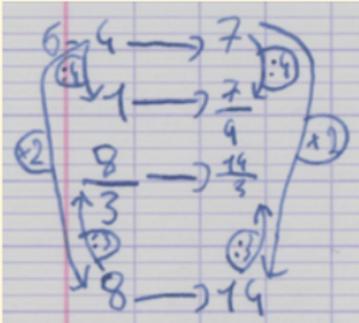
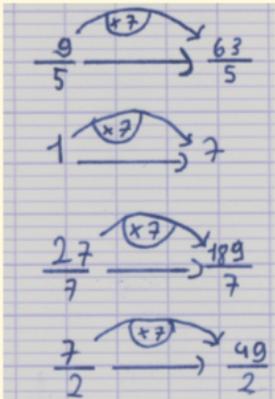
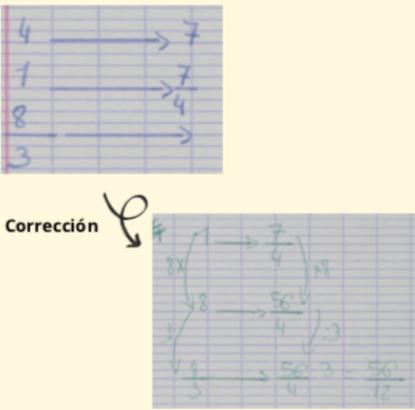
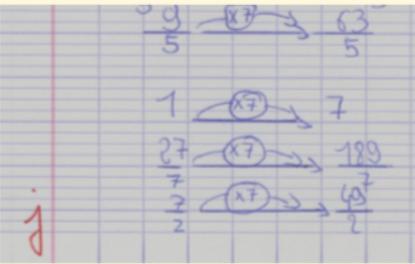
Código del alumno	Resolución del ejercicio 1	Resolución del ejercicio 2
 <p>FRC</p>		
 <p>COR</p>	<p>Corrección</p> 	

Figura 5.6: Resolución de los ejercicios 1 y 2 por los alumnos FRC y COR.

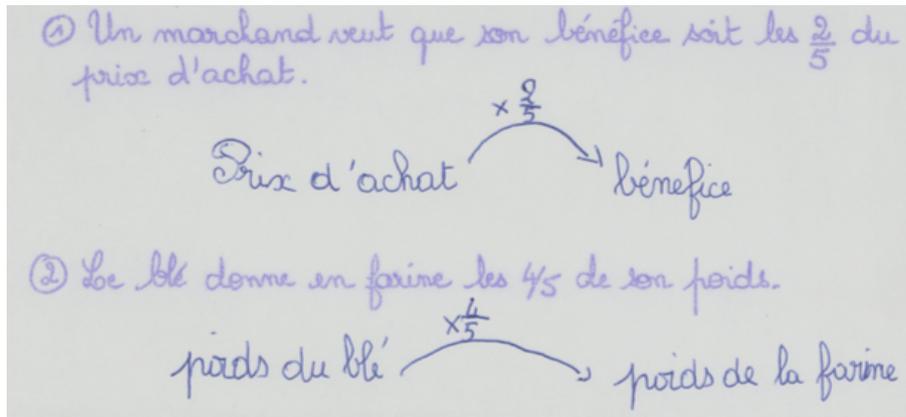


Figura 5.7: Respuestas del alumno con código DAF a las situaciones 1 y 2 planteadas en la sesión 1 referentes al aprendizaje del concepto de fracción de una cantidad.

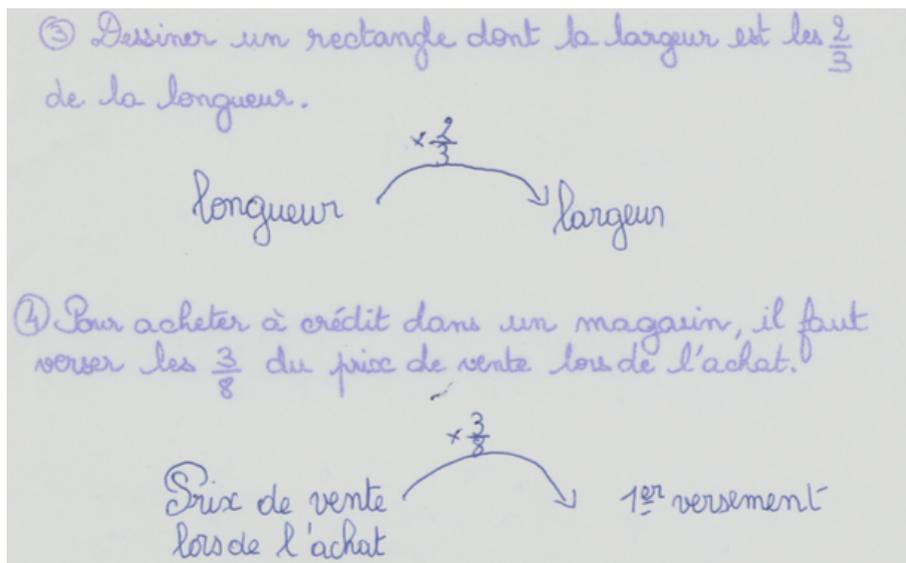


Figura 5.8: Respuestas del alumno con código DAF a las situaciones 3 y 4 planteados en la sesión 1 referentes al aprendizaje del concepto de fracción de una cantidad.

Durante la sesión 2 los alumnos resolverán tres problemas referentes al concepto de fracción como una cantidad. Estos problemas son los que se muestran a continuación.

- **Problema 1:** Compramos 6 kg de fruta para hacer mermelada. Las frutas dan $\frac{2}{3}$ de su peso en zumo. Agrega la misma cantidad de azúcar. ¿Cuánta azúcar debemos agregar?
- **Problema 2:** El algodón se encoge al lavarlo: pierde $\frac{2}{9}$ de su longitud. Si una pieza de esta tela mide 6,75 m, ¿cuál será su longitud después del lavado?
- **Problema 3:** La leche da $\frac{4}{25}$ de su peso en crema. ¿Qué peso de crema obtenemos con $\frac{3}{4}$ de un litro de leche?

En las Figuras 5.9–5.11 se muestran, para cada uno de los problemas, la resolución de 5 de los alumnos de la clase CM2B.

5.5.3. Iniciación al concepto de proporcionalidad en el nivel CM2

Durante el mes de noviembre se dedicarán 6 sesiones para adquirir, practicar y asimilar los conceptos de proporcionalidad, además, se dedicará una sesión posterior al examen referente a este concepto donde se resolverán los ejercicios planteados en la prueba. Cabe destacar que, al ser un concepto nuevo para los alumnos, aprenden solamente la proporcionalidad directa, profundizando bastante en este.

Los problemas que se plantean para aprender el concepto de proporcionalidad son los siguientes:

- **Problema 1:** Para obtener 10 kg de sal marina, se deben evaporar 310 kg de agua de mar.
 - ¿Cuánta agua de mar hay que evaporar para obtener 15 kg de sal? ¿Y 250 kg de sal?
 - ¿Cuánta sal marina se puede obtener dejando que se evaporen 62 kg de agua de mar? ¿7.235 kg de agua de mar?

- **Problema 2:** Un poco de jardinería ...

Para adornar 8 jardineras, se necesitan 40 kg de tierra de cultivo y 16 palos de fertilizante.

- ¿Qué se necesita para adornar 10 jardineras idénticas, 15 jardineras, 3 jardineras?
 - Tenemos 785 kg de tierra, ¿cuántas jardineras podremos llenar y cuántas barras de fertilizante se necesitarán?
- **Problema 3:** Para llenar 7 cajas de dulces, se tienen que hacer 133 bombones de chocolate y 224 bombones de frutas. ¿Cuántos bombones de chocolate y bombones de fruta se

Código del alumno



Resolución del problema 1

Bien ①

Poids de fruits (kg)	Poids de jus (kg)	Poids en sucre (kg)
6	12	12

$6 \times \frac{2}{3} \rightarrow 12$
 $12 - 8 = 4$

Réponse : On obtient $\frac{12}{3}$ de jus. $\frac{12}{3} = 4$

①

kg de fruits	poids du jus, du sucre (kg)
6	12 = 4

$6 \times \frac{2}{3} \rightarrow 12 = 4$

Réponse : On doit ajouter 4 kg de sucre

①

poids de fruits (kg)	poids de jus (kg)
6	12 = 4

$6 \times \frac{2}{3} \rightarrow \frac{12}{3} = 4$

Réponse : Le poids de sucre à ajouter est de 4 kg.

Bien ①

poids de fruits	p. sucre
6	12 = 4

$6 \times \frac{2}{3} \rightarrow 12 = 4$

Réponse : On doit ajouter 12 au poids de sucre. $\frac{12}{3} = 4$ kg

①

$$6 \times \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Réponse : On a ajouté $\frac{12}{3}$ de sucre. $\frac{12}{3} = 4$ kg

Figura 5.9: Resolución del problema 1 por 5 de los alumnos de la clase CM2B.

Código del alumno



Resolución del problema 2

②

longueur du tissu avant lavage	longueur du tissu après lavage
--------------------------------	--------------------------------

$$6,75 = \frac{675}{100} \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{1350}{300} = 4,5$$

Réponse: on obtient après le lavage la longueur du tissu après le lavage est de $\frac{1350}{300}$ m.

② (m) longueur du tissu | longueur après le lavage

$$6,75 = \frac{675}{100} \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{1350}{300} = 4,5$$

Réponse: La longueur sera de 4,5.

②

longueur de coton (m)	longueur après le lavage (m)
-----------------------	------------------------------

$$\frac{675}{100} = 6,75 \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{1350}{300} = 4,5$$

Réponse: La longueur après le lavage sera de 4,5 m.

②

tissu (longueur)	longueur après le lavage
------------------	--------------------------

$$6,75 = \frac{675}{100} \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{1350}{300} = 4,5$$

Réponse: La longueur sera de 4,5.

②

$$6,75 \times \frac{2}{3} = \frac{675}{100} \times \frac{2}{3} = \frac{1350}{300} = 4,5 = \frac{45}{10} = 4,5$$

Réponse: après le lavage on obtient 4,5 de coton.

Figura 5.10: Resolución del problema 2 por 5 de los alumnos de la clase CM2B.

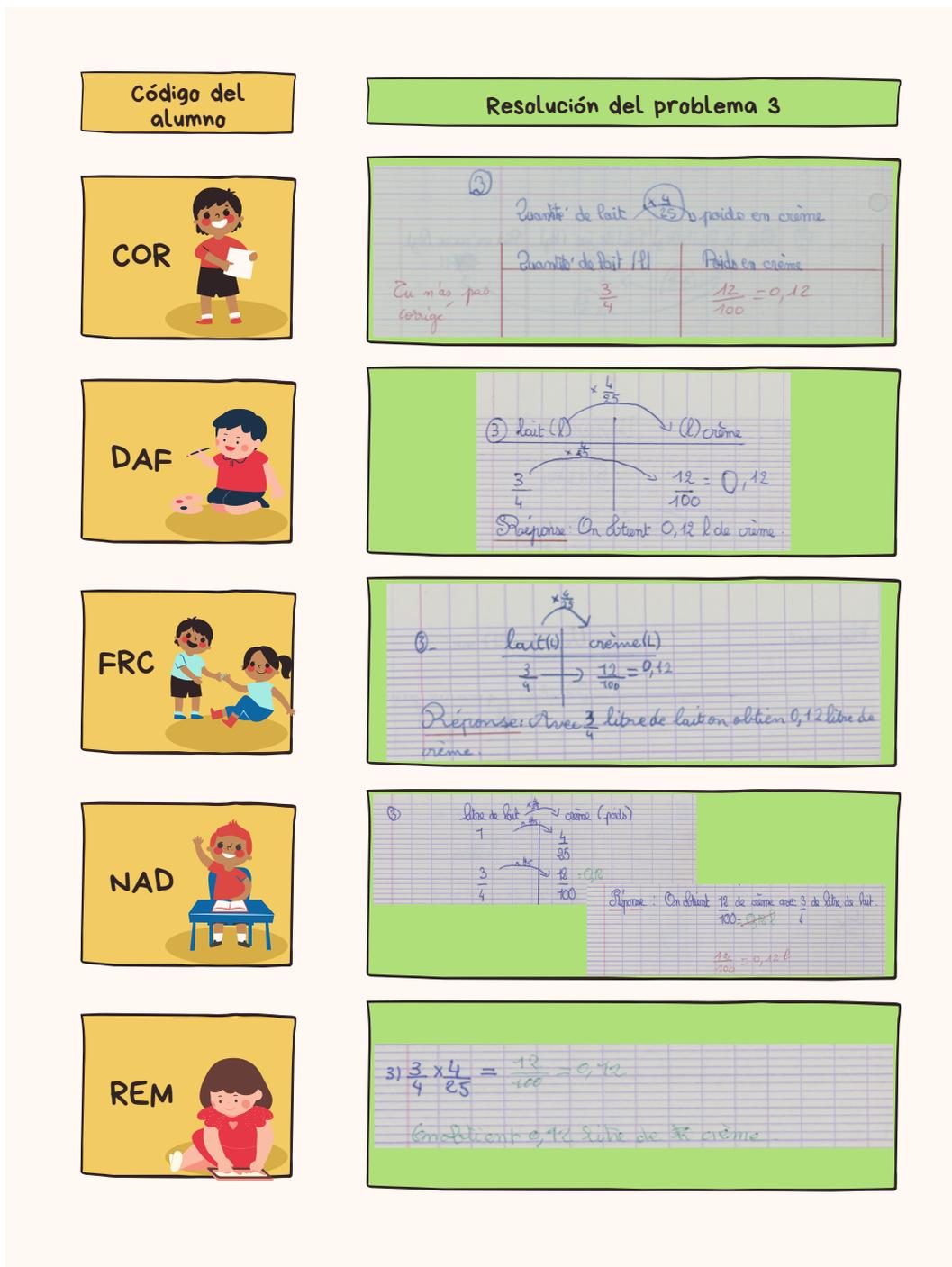


Figura 5.11: Resolución del problema 3 por 5 de los alumnos de la clase CM2B.

necesitan para llenar 11 cajas?

- **Problema 4:** Un automóvil consume una media de 8 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuál será su consumo para 300 km, 500 km, 350 km, 25 km, 375 km?
- **Problema 5:** Cinco metros de alambre de cobre presentan 390 gramos.
 - ¿Qué longitud tendría un hilo de la misma calidad que pesara 1170 gramos?
 - ¿Cuál sería el peso de 2 metros de alambre de cobre?
- **Problema 6:** La receta del bizcocho:
 - 4 huevos.
 - 120 gramos de azúcar.
 - 100 gramos de harina.
 - 80 gramos de mantequilla.

Mientras se hornea el pastel, ayúdame a calcular la cantidad de otros ingredientes necesarios.

- a) Si tenemos 10 huevos.
- b) Si usamos 300 gramos de harina.
- c) Si tomamos 120 gramos de mantequilla.

Las 6 sesiones dedicadas al aprendizaje del concepto de proporcionalidad se dividieron de la siguiente manera:

- Las dos primeras sesiones se dedicaron a resolver el problema 1 donde los alumnos lo resolvieron en su libreta y posteriormente trasladaron su resolución a un folio tamaño A3.
- En la sesión 3 los alumnos resolvieron el problema 2.
- La cuarta sesión fue dedicada para resolver los problemas 3 y 4.
- La sesión 5 se dedicó íntegramente a la resolución del problema 5.
- En la sesión previa al examen los alumnos resolvieron el problema 6.

Por otra parte, los ejercicios planteados en el examen de proporcionalidad fueron los siguientes:

- **Problema 1:** Para hacer 8 tazas de café se necesitan 120 gramos de café molido.

¿Cuánto café molido se necesita para preparar 5 tazas?

¿Y para preparar 6 tazas?

- **Problema 2:** Para preparar un bizcocho, hace falta:

- 200 gramos de harina.
- 180 gramos de azúcar granulada.
- 8 huevos.
- 50 cl. de leche.
- 2 kg de manzanas.

¿Qué cantidades se necesitan si disponemos de 90 g de azúcar?

¿Y si disponemos de 75 cl de leche?

En el anexo A (ver página1) se encuentra la resolución de los 6 ejercicios planteados para el aprendizaje de este concepto además de las respuestas dadas al examen de proporcionalidad por 6 de los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994.

- El problema 1 se encuentra en la sección A.1.
- El problema 2 se encuentra en la sección A.2.
- Los problemas 3 y 4 se encuentra en la sección A.3.
- Los problemas 5 y 6 se encuentra en la sección A.4.
- Los problemas planteados en el examen se encuentran en la sección A.5.

Capítulo 6

Conclusiones

A continuación se muestran las conclusiones obtenidas después del estudio de los libros de texto utilizados en el sistema español y las conclusiones obtenidas después de la revisión del desempeño en las distintas actividades destinadas al aprendizaje de los distintos significados de fracción y el concepto de proporcionalidad en el grupo CM2B del curso 1993-1994.

6.1. Conclusiones del análisis realizado de los libros del sistema educativo español actual

6.1.1. Aprendizaje de los distintos significados que adquiere una fracción

En la Tabla 5.1 se puede ver que las editoriales SM y Santillana editoriales revisadas comienzan el estudio de los significados de fracción que se imparten en España (fracción como parte de la unidad, fracción de una cantidad y como cociente de dos números) en quinto de primaria, a pesar de ello, ninguna editorial llega en este curso a enseñar el significado de fracción como parte de la unidad.

En el curso posterior (sexto de primaria) vemos que Anaya introduce los significados de fracción de una cantidad y fracción como cociente de dos números. Además SM repasa el concepto de fracción de una cantidad.

En el primer curso de la ESO tanto SM como Santillana estudian todos los significados que adquieren las fracciones y Anaya estudia fracción como parte de la unidad y fracción de una cantidad.

Finalmente, cabe destacar que todas las editoriales durante estos tres cursos apuestan por incluir gran cantidad de ejemplos y representaciones gráficas.

6.1.2. Aprendizaje del concepto de proporcionalidad

En la Tabla 5.2 se aprecia que ninguna editorial de las estudiadas incluye el concepto de proporcionalidad en el curso de quinto de primaria.

En el curso de sexto de primaria tanto Anaya, SM como Santillana estudian solamente las magnitudes directamente proporcionales.

Finalmente, en primero de la ESO todas las editoriales incorporan en el tema referente a la proporcionalidad tanto la proporcionalidad directa como inversa.

6.2. Conclusiones del análisis realizado del grupo CM2B del curso 1993-1994

6.2.1. Aprendizaje de los distintos significados que adquiere una fracción

Primeramente, para el concepto de fracción como parte de la unidad no se tiene constancia de las actividades concretas que se realizaron, pero sí que se tiene constancia del uso de este concepto al realizar algunos cálculos debido a que muchas veces en los ejercicios referentes al significado de fracción en términos de aplicaciones lineales, los alumnos calculan en primer momento la fracción que corresponde a la unidad (ver Figuras 5.4, 5.5 y 5.6).

Por otra parte, los alumnos saben obtener la fracción correcta cuando realizan ejercicios del concepto de fracción como cociente de dos números (ver Figura 5.3).

La tercera manera de comprender una fracción es en términos de aplicaciones lineales. En la Tabla 6.1 se muestra el desempeño de 6 de los alumnos del grupo de estudio en los ejercicios 1 (ejercicio de aprendizaje) y 2 (ejercicio de evaluación). En la Tabla 6.1 podemos ver que la mayoría de los alumnos no ha realizado el ejercicio de aprendizaje correctamente siendo el error más común no saber obtener el resultado final. A pesar de ello, se ha podido comprobar que los alumnos han aprendido el concepto de fracción en términos de aplicaciones lineales, dado que todos los alumnos han conseguido realizar el ejercicio de evaluación correctamente.

Código del alumno	Calificación del ejercicio 1	Comentarios sobre el ejercicio 1	Calificación del ejercicio 2	Comentarios sobre el ejercicio 2
REM	Mal	No ha sabido obtener el resultado final	Bien	El alumno resuelve bien el ejercicio, pero no indica qué operaciones ha realizado para obtener los resultados.

Código del alumno	Calificación del ejercicio 1	Comentarios sobre el ejercicio 1	Calificación del ejercicio 2	Comentarios sobre el ejercicio 2
EJM	Mal	El alumno ha intentado resolver el ejercicio en un paso y ha cometido una equivocación	Bien	Los resultados obtenidos son buenos, pero se ha equivocado al explicar la operación que se realiza para obtener la imagen.
RAC	Mal	No ha sabido obtener el resultado final	Bien	
DAF	Bien		Bien	
FRC	Bien		Bien	
COR	Mal	No ha sabido obtener el resultado final	Bien	

Tabla 6.1: Notas sobre el desempeño de los ejercicios 1 (ejercicio de aprendizaje) y 2 (ejercicio de evaluación).

Finalmente, el último concepto estudiado, es decir, el significado de fracción de una cantidad. Para ello, los estudiantes resolvieron 3 problemas. En la Tabla 6.2 se resume la resolución de estos problemas por 5 de los alumnos. Como se puede ver en la tabla, dos alumnos han resuelto los tres ejercicios correctamente, dos alumnos han resuelto dos de los tres ejercicios correctamente, y un alumno ha resuelto correctamente un ejercicio.

Código del alumno	Comentarios sobre la resolución del problema 1	Comentarios sobre la resolución del problema 2	Comentarios sobre la resolución del problema 3
COR	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente	No ha sabido cómo resolver el ejercicio
DAF	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
FRC	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
NAD	Ha sabido resolver el problema correctamente	No ha definido correctamente la aplicación lineal	Ha sabido resolver el problema correctamente
REM	Ha sabido resolver el problema correctamente	No ha sabido cómo resolver el ejercicio	No ha acabado de resolver el ejercicio

Tabla 6.2: Comentarios sobre el desempeño de los problemas 1, 2 y 3.

6.2.2. Aprendizaje del concepto de proporcionalidad

Para el aprendizaje de proporcionalidad, la profesora planteó a los alumnos 6 ejercicios. Todos ellos eran problemas que se podrían encontrar en la vida cotidiana, como es la adaptación de los ingredientes de un pastel, teniendo en cuenta solamente la cantidad que se dispone de uno de ellos, o calcular el consumo de un automóvil al recorrer una serie de kilómetros sabiendo los litros consumidos cada 100 km. En las Tablas 6.3 y 6.4 se resume el desempeño que realizaron los alumnos para cada uno de los problemas.

Código del alumno	Comentarios sobre la resolución del problema 1	Comentarios sobre la resolución del problema 2	Comentarios sobre la resolución del problema 3
COR	Ha sabido resolver la primera parte del problema correctamente, pero la segunda el alumno la ha corregido cuando se ha hecho la corrección del problema en la pizarra	Ha sabido resolver el problema correctamente	El alumno no ha sabido que cálculos tenía que realizar
DAF	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
EJM	Ha sabido resolver la primera parte del problema correctamente, pero la segunda el alumno la ha corregido cuando se ha hecho la corrección del problema en la pizarra	No ha sabido resolver el problema correctamente	El alumno no ha sabido como proceder en la resolución del problema
NAD	Ha sabido resolver la primera parte del problema correctamente, pero la segunda el alumno la ha corregido cuando se ha hecho la corrección del problema en la pizarra	Ha sabido resolver el problema correctamente	El alumno no ha sabido como proceder en la resolución del problema
RAC	No ha sabido como proceder en la resolución del problema, por tanto, ha corregido el ejercicio de la corrección del problema en la pizarra	El profesor le indica que vuelva a resolver el ejercicio, ya que, el alumno no ha sabido proceder en la resolución del ejercicio, pero ha obtenido el resultado final correcto	El alumno no ha sabido como proceder en la resolución del problema
REM	Ha sabido resolver todo el problema excepto una pregunta correctamente, la pregunta que el alumno no ha sabido resolver la ha corregido cuando se ha hecho la corrección del problema en la pizarra	No ha sabido resolver el problema correctamente y la corrección que ha hecho el alumno no está clara	Ha sabido resolver el problema correctamente

Código del alumno	Comentarios sobre la resolución del problema 1	Comentarios sobre la resolución del problema 2	Comentarios sobre la resolución del problema 3
-------------------	--	--	--

Tabla 6.3: Comentarios sobre el desempeño de los problemas 1, 2 y 3.

Código del alumno	Comentarios sobre la resolución del problema 4	Comentarios sobre la resolución del problema 5	Comentarios sobre la resolución del problema 6
COR	El alumno ha necesitado realizar algunos cambios durante la corrección	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
DAF	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente	El alumno no ha realizado el problema
EJM	El alumno ha tenido que rehacer el ejercicio porque en un principio no ha entendido que las dos magnitudes (litros y quilómetros) mantienen una proporcionalidad directa	El alumno no ha realizado el problema	Ha sabido resolver el problema correctamente
NAD	El alumno ha realizado algunos cambios en la corrección	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
RAC	La resolución planteada por el alumno ha precisado bastantes modificaciones durante la corrección	El alumno no ha sabido acabar el ejercicio y la corrección que ha realizado no está completa	La resolución planteada por el alumno ha precisado modificaciones durante la corrección
REM	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente excepto por un error pequeño

Tabla 6.4: Comentarios sobre el desempeño de los problemas 4, 5 y 6.

Después de que los alumnos resolvieron y corrigieron los 6 problemas de proporcionalidad mencionados con anterioridad, estos realizaron un examen. El análisis del desarrollo de los alumnos de los ejercicios planteados en esta prueba se encuentra en la Tabla 6.5.

Código del alumno	Comentarios sobre la resolución del problema 1 del examen	Comentarios sobre la resolución del problema 1 del examen
COR	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
DAF	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
EJM	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente
NAD	Se ha equivocado al multiplicar, pero el procedimiento es correcto	Ha sabido resolver el problema correctamente
RAC	No ha obtenido el resultado correcto porque el alumno no conoce bien las tablas de multiplicar	En general el ejercicio está bien, pero se ha equivocado al dividir dos veces
REM	Ha sabido resolver el problema correctamente	Ha sabido resolver el problema correctamente

Tabla 6.5: Comentarios sobre el desempeño de los problemas 1 y 2 del examen de proporcionalidad.

Como vemos en las Tablas 6.3 y 6.4, todos los alumnos, excepto uno, han cometido errores en la resolución de 1 o más ejercicios. En cambio, en la Tabla 6.5 se aprecia que todos los alumnos han logrado resolver los ejercicios del examen correctamente y los errores que han cometido los alumnos son debido a errores en operaciones de división o multiplicación.

6.3. Recursos del CRDM-GB

Primeramente, para el análisis de las metodologías utilizadas en el COREM se han hecho uso de los recursos del CRDM-GB, donde se ha dispuesto, para el curso CM2 del año 1993-1994, de cinco cajas con recursos, tanto del grupo CM2A como del grupo CM2B.

Cabe destacar que, las cajas incluyen un *Bilan* donde se incluyen las metodologías empleadas en la clase, descripción detallada de los alumnos que componen los grupos, presentación del equipo pedagógico, su funcionamiento y descripción de las clases que imparte cada docente. Además, se incluyen las fechas y motivos de las reuniones con los padres de los alumnos. Asimismo, se incluyen las excursiones que realiza el grupo durante todo el año escolar. Finalmente, se incorpora una tabla compuesta por tres columnas las cuales referían a la fecha de realización de cada actividad, el nombre de la actividad y el objetivo que se persigue con ella.

Además, las cajas contienen las libretas de los alumnos encuadernadas. Estas incluyen todos los ejercicios realizados y corregidos durante las clases de matemáticas, y los exámenes que se

realizaron de cada tema y sus correcciones.

También se incluyen los trabajos realizados por los alumnos y dosieres con los exámenes que realizaron, para evaluar el grado de aprendizaje en general de matemáticas, durante todo el curso.

Finalmente, cabe acentuar que el centro de recursos CRDM-GB dispone de una gran variedad de recursos relevantes para el investigador de didáctica de las matemáticas que permiten estudiar y evaluar metodologías novedosas en este campo.

6.4. Discusión

Aprender los distintos significados de fracción y el concepto de proporcionalidad de forma bien diferenciada será primordial para resolver problemas de mayor dificultad que precisen el uso de fracciones en cursos posteriores.

Entender las razones de proporcionalidad es primordial debido a que se encuentra presente en gran parte de los cursos de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria, además de ser una herramienta que nos permite describir y entender gran parte de los fenómenos naturales, físicos y financieros, entre otros.

Por otra parte, el paso que se da entre el concepto de los números enteros y las fracciones es grande, pero para aprender estos conocimientos es fundamental realizar una diferenciación clara entre los distintos significados que las fracciones pueden adquirir. En un primer momento, las fracciones y sus distintos significados pueden parecer abstractas para el alumnado, pero con la práctica necesaria estos podrán avanzar en el aprendizaje de conocimientos de niveles superiores y de áreas del conocimiento muy diversas.

Dada la importancia de las fracciones y la proporcionalidad, tanto el sistema educativo español como el sistema educativo francés dedican diversas unidades entre las edades de 10 y 13 años con el fin de aprender y afianzar estos conceptos y aprender los diversos significados que puedan adquirir. Cabe destacar que en el sistema educativo español no se ha visto constancia del aprendizaje de fracción en términos de aplicación lineal.

Finalmente, en los libros de texto españoles analizados se ha visto que, antes de la práctica de ambos conceptos, estos se exponen de forma teórica. En contraposición, el método utilizado en las clases del laboratorio ubicado en la escuela Jules Michelet, para el aprendizaje de los distintos significados de fracción y el concepto de proporcionalidad, hace que los alumnos, mediante la práctica de ejercicios, problemas y clases de debate, vayan adquiriendo los conceptos con éxito sin necesidad de clases de carácter teórico. El método utilizado en esta escuela francesa fue muy novedoso y permitía que los alumnos pudieran entender este concepto de forma significativa brindando a los alumnos la oportunidad de aplicar el concepto a más situaciones y de forma más eficaz que en el caso de estudiar un procedimiento para resolver unos ejercicios. Además,

todos los problemas que se plantean a los alumnos se acercan a situaciones cotidianas de su entorno. Esto hará que ellos puedan realizar una relación entre el entorno y la competencia matemática haciendo que se incremente la capacidad y atención del alumno en el aprendizaje de las matemáticas.

6.5. Valoración personal

La realización de este trabajo me ha parecido muy interesante debido a que he podido estudiar las teorías de uno de los pioneros en el desarrollo de la didáctica de las matemáticas, Guy Brousseau. Además, pienso que aprender el concepto de fracción diferenciando de forma clara entre los distintos significados y aprender el concepto de proporción desde edades tempranas otorga los alumnos una buena base desde la cual estos pueden partir para adquirir conceptos más complejos.

Además, como Hilbert decía, "Las matemáticas no conocen razas o límites geográficos. Para las matemáticas, el mundo cultural es un país". Esto lo he podido experimentar durante la recogida de datos pues las libretas de los alumnos que albergaba el CRDM-GB y la teoría de Brousseau sobre el aprendizaje de los distintos significados que pueden adquirir las fracciones estaban escritos en francés, cosa que no supuso problema alguno.

Por otra parte, la realización de este trabajo ha sido muy positiva porque me ha servido como experiencia de primera mano trabajar diversas formas de estudiar un mismo concepto, en este caso, el significado que puede adquirir una fracción. Por otra parte, en el laboratorio del COREM, si existía un error en la resolución de un alumno no se le indicaba dónde se encontraba dicho error, sino que la docente les decía como podían mejorar. Ésto me parece muy positivo porque los alumnos estaban más motivados por mejorar.

Finalmente, haber utilizado los recursos del CRDM-Guy Brousseau me ha permitido conocer el COREM, el dispositivo que diseñó Guy Brousseau para desarrollar toda su investigación en el área de didáctica de las matemáticas. Los docentes e investigadores del COREM dedicaron gran cantidad de tiempo en generar métodos novedosos, ponerlos en práctica y posteriormente evaluarlos. Las instalaciones donde se impartían las sesiones estaban acondicionadas especialmente para que los investigadores pudiesen realizar sus estudios sin que influyesen negativamente en el desarrollo de las clases. Todo este proceso ha generado un gran volumen de recursos que se encuentra recopilado en las cajas que se localizan en el CRDM-GB. Estos fondos se van digitalizando progresivamente, y el presente TFM ha servido para incorporar a esa digitalización las imágenes obtenidas que se muestran en el mismo. Actualmente, el CRDM-GB sigue siendo un recurso para investigadores cuyos trabajos citan o se basan en las investigaciones de Guy Brousseau y sus colaboradores.

Referencias

- [1] Amare, C. y Vincent, I. (1994). Cours Moyen 2ème Année. Bilan 1993-1994. École Élémentaire Jules Michelet, Talence.
- [2] Ayarza, R. O. Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- [3] Brousseau, G., Orús, P., Fregona, D. y Gregori, P. (2012). Los recursos del “Centre pour l’observation et la recherche en didactique des mathématique” (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: La enseñanza de la división en la Escuela Primaria.
- [4] Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Prospective primary school teachers’ competence for analysing the difficulties in solving proportionality problem. *Mathematics Education Research Journal*, 1-23.
- [5] Çalisici, H. (2018). Middle School Students’ Learning Difficulties in the Ratio-Proportion Topic and a Suggested Solution: “Envelope Technique”. *Universal Journal of Educational Research*, 6(8), 1848-1855.
- [6] Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, 285-314. Madrid: Síntesis.
- [7] Charalambous, C. Y. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students’ understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, 64(3), 293-316.
- [8] CRDM-Guy Brousseau. (s. f.). Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló. IMAC. Recuperado de <http://www.imac.uji.es/CRDM/index.php>
- [9] Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I. y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas 1. (Aprender*

es crecer en conexión). ANAYA EDUCACIÓN.

- [10] Dooren, W. V., Bock, D. D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360-381.
- [11] Fandiño, I. (2009). *Las Fracciones: Aspectos Conceptuales y Didácticos Cooperativa*. Editorial Magisterio Bogotá, Colombia.
- [12] Ferrero de Pablo, L., Gaztelu Albero, I. y Martín Martín, P. (2009). *Matemáticas 5. (Abre la puerta)*. ANAYA EDUCACIÓN.
- [13] Ferrero de Pablo, L., Gaztelu Albero, I. y Martín Martín, P. (2009). *Matemáticas 6. (Abre la puerta)*. ANAYA EDUCACIÓN.
- [14] Gairin, J. M. (2001). Una interpretación de las fracciones Egipcias desde el recto del Papiro Rhind. *Universidad de Zaragoza. LLULL*. vol. 24, 649-684.
- [15] Generalitat Valenciana. (s. f.). Currículum. MATEMÀTIQUES 1R I 2N ESO. Recuperado de <https://ceice.gva.es/documents/162640733/162655319/Matem%C3%A0tiques+%28ES0%29/8b5c100b-b44f-4cf9-9da5-97feb9ef1ff5>
- [16] Generalitat Valenciana. (s. f.). Currículum. MATEMÀTIQUES BATXILLERAT. Recuperado de <https://ceice.gva.es/documents/162640733/162655319/Matem%C3%A0tiques+%28Batxillerat%29/360b5ef7-8334-4282-8894-102510183c01>
- [17] Generalitat Valenciana. (s. f.). Currículum. MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS BATXILLERAT. Recuperado de <https://ceice.gva.es/documents/162640733/162655319/Matem%C3%A0tiques+aplicades+a+les+Ci%C3%A8ncies+Socials/dc5d698e-2088-4734-a4b6-5fb309bfe391>
- [18] Generalitat Valenciana. (s. f.). Currículum. MATEMÀTIQUES ORIENTADES A LES ENSENYANCES ACADÈMIQUES 3E I 4T ESO. Recuperado de <https://ceice.gva.es/documents/162640733/162655319/Matem%C3%A0tiques+acad%C3%A8miques/21f9e954-7c3b-4803-a6a0-d10f6d1a4de7>
- [19] Generalitat Valenciana. (s. f.). Currículum. MATEMÀTIQUES ORIENTADES A LES ENSENYANCES APLICADES 3r I 4t ESO. Recuperado de <https://ceice.gva.es/documents/162640733/162655319/Matem%C3%A0tiques+aplicades/16c8ebc2-d72e-4d56-a8e8-25a0f623915f>
- [20] Gómez, P. L. (2016). Tema 5: Aplicaciones lineales. Teoría de la asignatura Matemáticas

I de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Cartagena. Recuperado de <https://www.dmae.upct.es/~plgomez/archivos%20docencia/teoria16-17/tema5-aplic-lineales-a.pdf>

- [21] Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. IREM de Bordeaux. IREM de Bordeaux, pp.535, Jean Colmez. (hal-00610769)
- [22] Jaramillo Bravo, J. (2019). El aprendizaje basado en proyectos como estrategia para la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Manuel José Caicedo del municipio de Barbosa.
- [23] Kieren, T. E. (1976, April). On the mathematical, cognitive and instructional. In Number and measurement. Papers from a research workshop (Vol. 7418491, p. 101).
- [24] Lesh, R., Post, T. R. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In Number concepts and operations in the middle grades (pp. 93-118). National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.
- [25] Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). Fracciones La relación parte todo. Madrid: Síntesis.
- [26] Martin, E. T. y Piquet, J. D. (2020). The knowledge of the mathematics teacher in practice: teaching of proportionality. REDIMAT, 9(2), 147-172.
- [27] Navarro Elbal, A., Navarro Simón, A., Morales, F., Medina Magdalena, G., Bernabeu Ruiz, J., Pérez Francisco, M.N., Macías Gil, C., Garín Muñoz, M., Peña Romano, M., Ramírez Uclés, R., González Sánchez, Y., Oro Pradera, B., Vidal González, J.M. y de Armas, Z. (2014). Matemáticas 5 Primaria. Savia (SM).
- [28] Nieto, M., Moreno A., Pérez A., Alberto N. y Blanco M. (2015). Matemáticas. 1 ESO. Savia (SM).
- [29] Pérez, B., Vidal González, J.M., Hidalgo García, J.M., Bernabeu Ruiz, J., Pérez Francisco, M.N., Ramírez Uclés, R., Morales, F., Moratalla de la Hoz, V., González Sánchez, Y., Nieto M. y Garín Muñoz, M. (2015). Matemáticas 6 Primaria. Savia (SM).
- [30] Pulpón Zarco, A. (S.f.) Historia del Papiro de Rhind y similares. Departamento de Matemática Aplicada en la Escuela de Ingeniería Técnica Agrícola. Universitat de Castilla-La Mancha. Recuperado de https://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf
- [31] Ríos, Yaneth (2019). Diversas interpretaciones de las fracciones. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 141-150). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática

Educativa.

- [32] Sánchez Ordoñez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. *Revista Sigma*, 11(1), 10-25. ISO 690
- [33] Siegler, R. S. y Vago, S. (1978). The development of a proportionality concept: Judging relative fullness. *Journal of Experimental Child Psychology*, 25(3), 371-395.
- [34] Siegler, R. S. y Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, 8, 144-150. doi: 10.1111/cdep.12077
- [35] Thompson, P. W. y Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. Research companion to the principles and standards for school mathematics. En Kilpatrick, J., Martin, G. & Schifter, D. (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (págs. 95-114).
- [36] Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 401-412.
- [37] Vv, Aa. (2009). *Matemáticas 5 primaria SABER HACER*. Santillana.
- [38] Vv, Aa. (2015). *Matemáticas 6 primaria SABER HACER*. Santillana.
- [39] Vv, Aa. (2015). *Matemáticas 1 ESO SABER HACER*. Santillana.
- [40] Westreicher, G. (2021). Proporcionalidad. *Economipedia*. Recuperado de <https://economipedia.com/definiciones/proporcionalidad.html>

Anexo A

Resolución de los problemas referentes al concepto de proporcionalidad

En este anexo se incluyen la resolución de los problemas referentes al concepto de proporcionalidad que se muestran en la sección 5.5.3.

A.1. Resolución del problema 1 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteado en la página 32

The image shows a student's handwritten work for problem 1, organized into three numbered steps. Step 1 shows two columns of calculations for 'Cantidad de masa de arena' and 'Cantidad de vol de arena'. Step 2 shows a list of values: 20 kg, 15 kg, and 7.5 kg. Step 3 shows two columns of calculations with arrows indicating relationships between values, including a final result of 17.5 kg.

Figura A.1: Resolución del problema 1 por el alumno COR.

Código del alumno
DAF

Resolución del problema 1

1 *Inicio*

Sistema

$310 \cdot 2 = 155 \quad 10 \cdot 2 = 5$
 Juan obtiene 5 kg de sal al frotar 155 kg de lana de merino
 de merino

kg de lana de merino	kg de sal
310	10
155	5
465	15
775	25
1090	35

$310 + 155 = 465 \quad 10 + 5 = 15$

2

cantidad de lana de merino (kg)	cantidad de sal (kg)
310	10
+ 465	+ 15
775	25
1090	35

$310 : 5 = 62$
 $10 : 2 = 5$

$62 \cdot 775 = 48050$
 $62 \cdot 35 = 2170$
 $48050 + 2170 = 50220$

3

cantidad de lana de merino (kg)	cantidad de sal (kg)
310	10
$\times 3$ 155	$\times 2$ 5
465	15
$\times 5$ 775	$\times 5$ 25
1090	35

$310 \cdot 2 = 620$
 $10 \cdot 2 = 20$
 $620 - 310 = 310$
 $20 - 10 = 10$
 $310 : 10 = 31$
 $10 : 1 = 10$

$31 \cdot 775 = 24025$
 $1 \cdot 35 = 35$
 $24025 + 35 = 24060$

Figura A.2: Resolución del problema 1 por el alumno DAF.

Código del alumno
EJM

Resolución del problema 1

1

calcule

kg de lana de merino	kg de sal
310	10
155	5
465	15
775	25
1090	35

2

kg de lana de merino	kg de sal
310	10
$\times 2$ 620	$\times 2$ 20
620	20
$\times 100$ 62000	$\times 100$ 2000

3

cantidad de lana de merino (kg)	cantidad de sal (kg)
310	10
$\times 3$ 155	$\times 2$ 5
465	15
$\times 5$ 775	$\times 5$ 25
1090	35

$310 \cdot 2 = 620$
 $10 \cdot 2 = 20$
 $620 - 310 = 310$
 $20 - 10 = 10$
 $310 : 10 = 31$
 $10 : 1 = 10$

$31 \cdot 775 = 24025$
 $1 \cdot 35 = 35$
 $24025 + 35 = 24060$

Figura A.3: Resolución del problema 1 por el alumno EJM.

Código del alumno NAD

Resolución del problema 1

1 a.bien

eau de mer	sel
310 kg	10 kg
155 kg	5 kg
465 kg	15 kg

2

eau de mer	sel
310 kg	10 kg
155 kg	5 kg
465 kg	15 kg

3

quantité d'eau de mer (kg)	quantité de sel (kg)
310	10
155	5
465	15
775	20
1550	100
31	1
62	2
124	4
248	8

Figura A.4: Resolución del problema 1 por el alumno NAD.

Código del alumno RAC

Resolución del problema 1

1

quantité d'eau	sel
310	10
465	15
775	20

2

quantité d'eau de mer (kg)	quantité de sel (kg)
310	10
465	15
775	20
1550	100
31	1
62	2
124	4
248	8

Figura A.5: Resolución del problema 1 por el alumno RAC.

Código del alumno



REM

Resolución del problema 1

1

opérations	eau de mer	sel
$310 \div 2 = 155$	310 kg	10 kg/kg
765		
310		

$310 \div 2 = 155$
"Il faut ajouter 155 kg d'eau pour 10 kg de sel"
Réponse: 5

2

eau de mer	sel
310 kg	10 kg
$\times 2$ 7750 kg	5 kg $\times 2$
155 kg	10 kg
$\times 25$ 7750 kg	250 kg $\times 25$
310 kg	10 kg
$\times 2$ 620 kg	5 kg $\times 2$
162	20 $\div 2$

3

Quantité d'eau de mer (kg)	Quantité de sel (kg)
310	10
155	5
465	15
45	2.5
750	25
310	10
620	20
7285	235

Figura A.6: Resolución del problema 1 por el alumno REM.

En la siguiente figura se muestran las respuestas dadas por al problema 1 por 6 de los alumnos de la clase CM2B.

Código del alumno	Respuesta del problema 1	
 <p>COR</p>	<p>1) Pour obtenir 15 kg de sel il faut faire évaporer 165 kg d'eau de mer.</p> <p>2) Pour obtenir 250 kg de sel il faut faire évaporer 7750 kg d'eau de mer.</p>	<p>3) En laissant évaporer 62 kg d'eau de mer, on peut obtenir 2 kg de sel.</p> <p>4) En laissant évaporer 7285 kg d'eau de mer, on peut obtenir 235 kg de sel.</p>
 <p>DAF</p>	<p>1) Pour obtenir 15 kg de sel il faut faire évaporer 165 kg d'eau de mer.</p> <p>2) Pour obtenir 250 kg de sel il faut faire évaporer 7750 kg d'eau de mer.</p>	<p>3) En laissant évaporer 62 kg d'eau de mer, on peut obtenir 2 kg de sel.</p> <p>4) En laissant évaporer 7285 kg d'eau de mer, on obtiendra 235 kg de sel.</p>
 <p>EJM</p>	<p>1) Pour obtenir 15 kg de sel il faut faire évaporer 165 kg d'eau de mer.</p> <p>2) Pour obtenir 250 kg de sel il faut faire évaporer 7750 kg de la mer.</p>	<p>3) En laissant évaporer 62 kg d'eau de mer, on peut obtenir 2 kg de sel.</p> <p>4) En laissant évaporer 7285 kg d'eau de mer, on obtiendra 235 kg de sel.</p>
 <p>NAD</p>	<p>1) Pour obtenir 15 kg de sel, il faut faire évaporer 165 kg d'eau de mer.</p> <p>2) Pour obtenir 250 kg de sel, il faut faire évaporer 7750 kg d'eau de mer.</p>	<p>3) Pour obtenir 2 kg de sel, il faut faire évaporer 62 kg d'eau de mer.</p> <p>4) Pour obtenir 235 kg de sel, il faut faire évaporer 7285 kg d'eau de mer.</p>
 <p>RAC</p>	<p>1) Pour obtenir 15 kg de sel il faut faire évaporer 165 kg d'eau de mer.</p> <p>2) Pour obtenir 250 kg de sel il faut faire évaporer 7750 kg d'eau de mer.</p>	<p>3) En laissant évaporer 62 kg d'eau de mer, on peut obtenir 2 kg de sel.</p> <p>4) En laissant évaporer 7285 kg d'eau de mer, on obtiendra 235 kg de sel.</p>
 <p>REM</p>	<p>1) Pour obtenir 15 kg de sel il faut faire évaporer 165 kg d'eau de mer.</p> <p>2) Pour obtenir 250 kg de sel il faut faire évaporer 7750 kg d'eau de mer.</p>	<p>3) En laissant évaporer 62 kg d'eau de mer, on peut obtenir 2 kg de sel.</p> <p>4) En laissant évaporer 7285 kg d'eau de mer, on peut obtenir 235 kg de sel.</p>

Figura A.7: Respuestas al problema 1 dadas por 6 de los alumnos de la clase CM2B del año 1993-1994.

A.2. Resolución del problema 2 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteado en la página 32

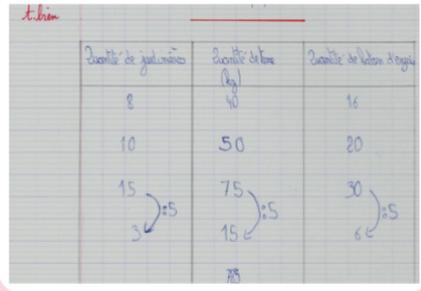
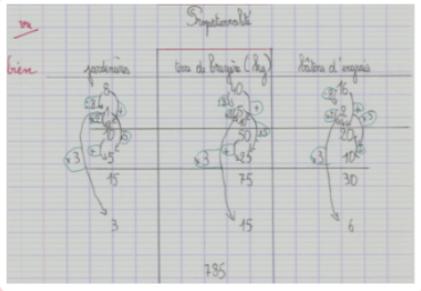
Código del alumno	 COR	 DAF
Resolución del problema 2		

Figura A.8: Resolución del problema 2 por los alumnos COR y DAF.

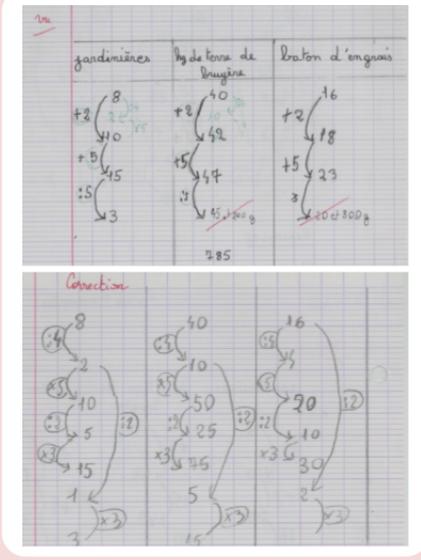
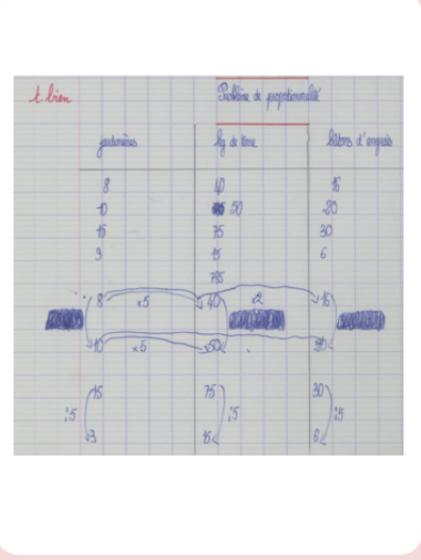
Código del alumno	 EJM	 NAD
Resolución del problema 2		

Figura A.9: Resolución del problema 2 por los alumnos EJM y NAD.

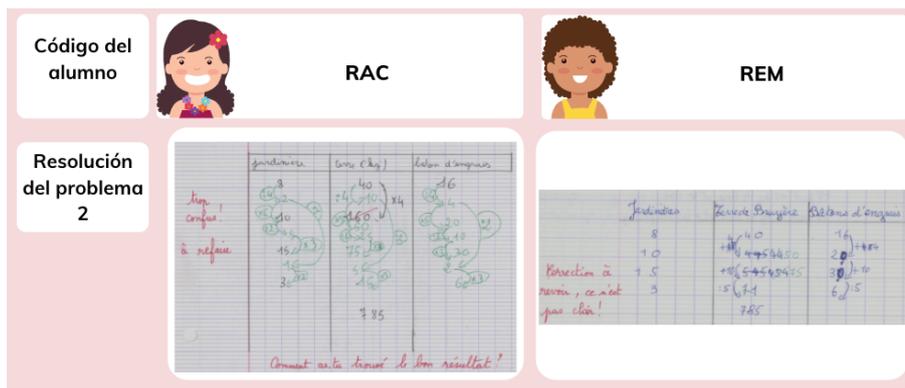


Figura A.10: Resolución del problema 2 por los alumnos RAC y REM.

En la siguiente figura se muestran las respuestas dadas por al problema 2 por 6 de los alumnos de la clase CM2B.

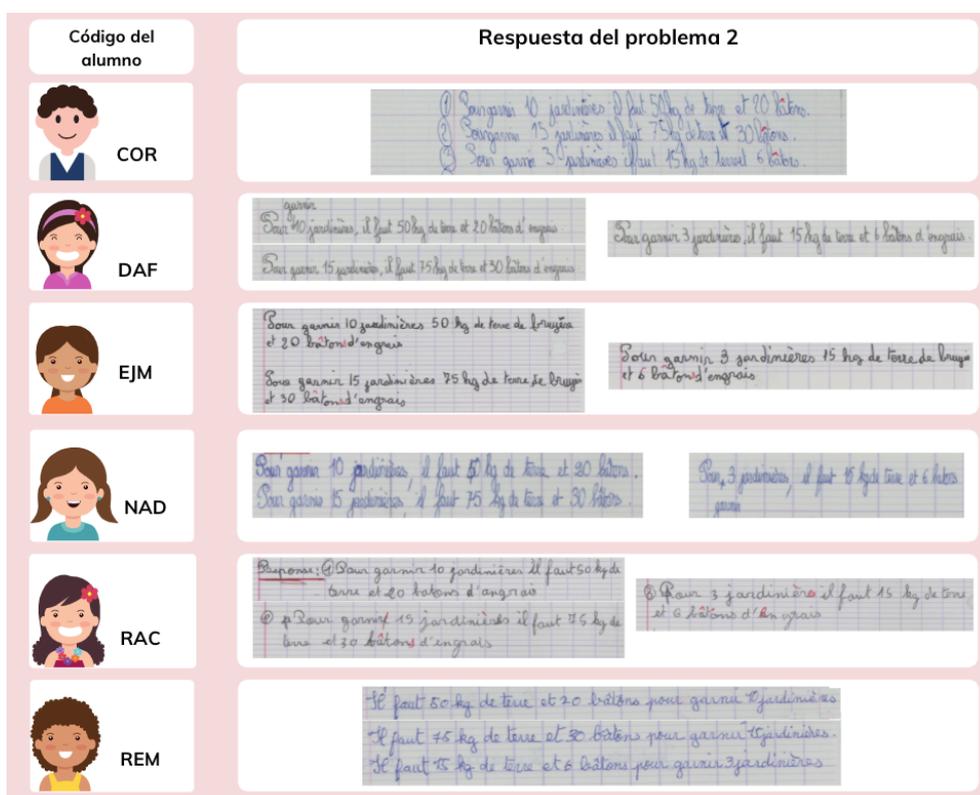


Figura A.11: Respuestas al problema 2 dadas por 6 de los alumnos de la clase CM2B del año 1993-1994.

A.3. Resolución de los problemas 3 y 4 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteados en la página 32

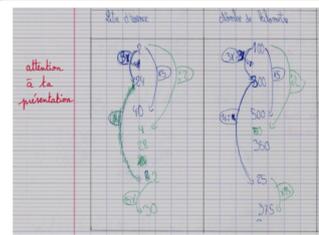
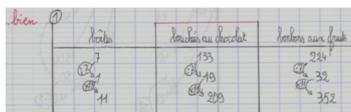
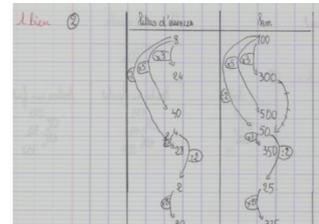
Código del alumno	Resolución del problema 3	Resolución del problema 4
 COR		
 DAF		

Figura A.12: Resolución de los problemas 3 y 4 por los alumnos COR y DAF.

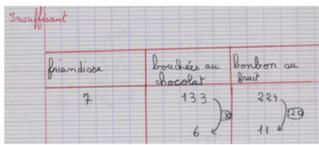
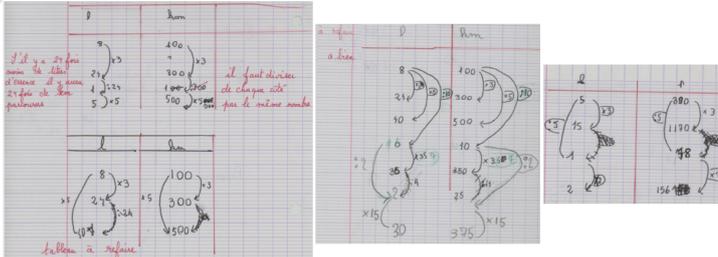
Código del alumno	 EJM
Resolución del problema 3	
Resolución del problema 4	

Figura A.13: Resolución de los problemas 3 y 4 por el alumno EJM.

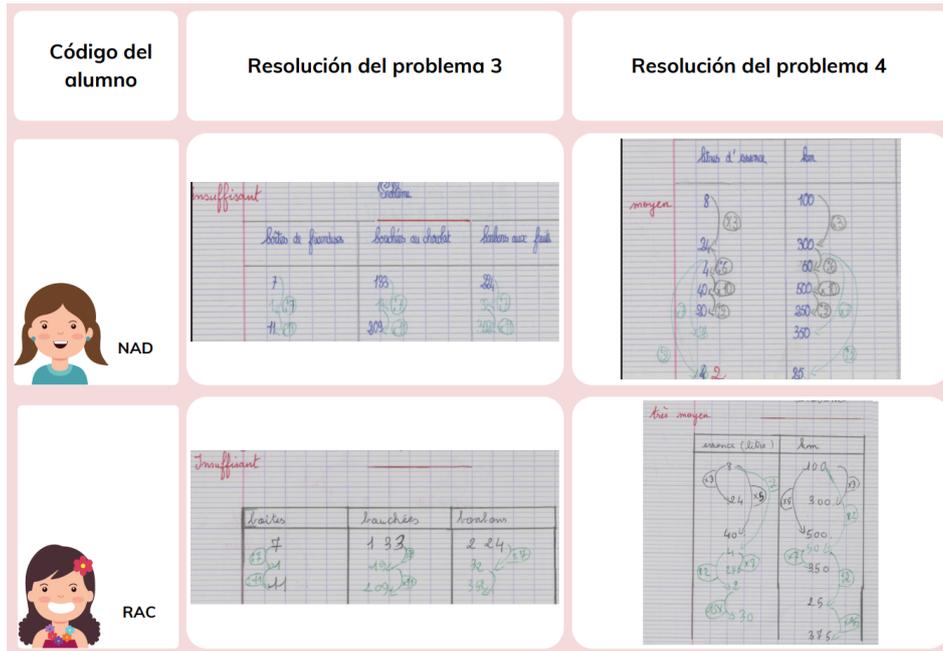


Figura A.14: Resolución de los problemas 3 y 4 por los alumnos NAD y RAC.

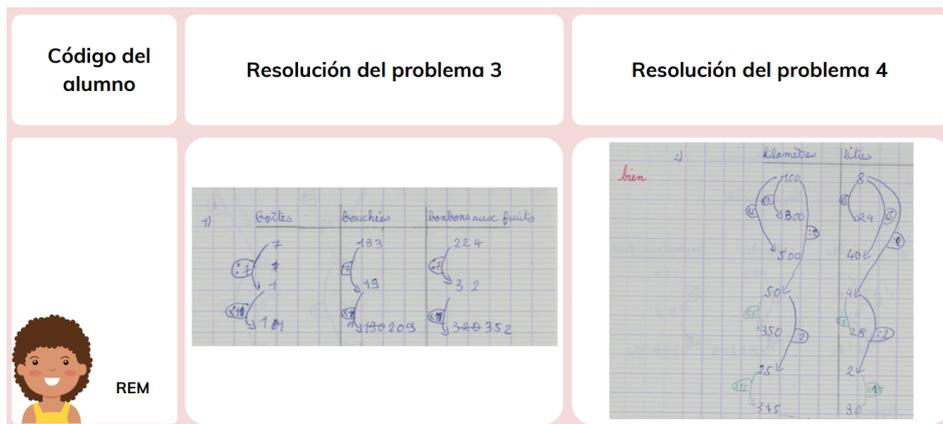


Figura A.15: Resolución de los problemas 3 y 4 por el alumno REM.

En la siguiente figura se muestran las respuestas dadas por a los problemas 3 y 4 por 6 de los alumnos de la clase CM2B.

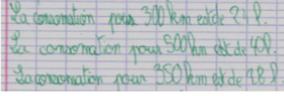
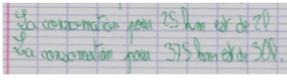
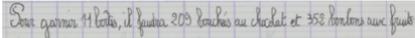
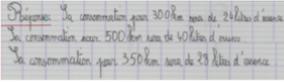
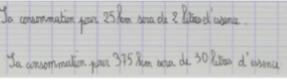
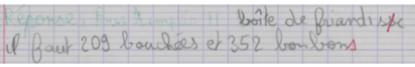
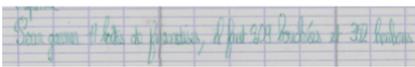
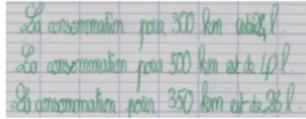
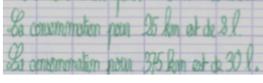
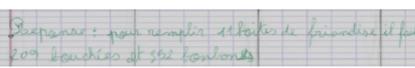
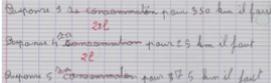
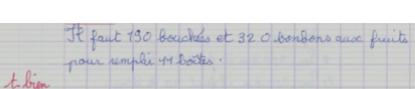
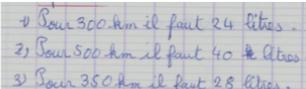
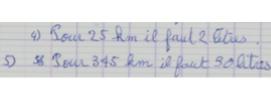
Código del alumno	Respuesta del problema 3	Respuesta del problema 4
 <p>COR</p>		 
 <p>DAF</p>		 
 <p>EJM</p>		<p>El alumno no ha redactado la respuesta</p>
 <p>NAD</p>		 
 <p>RAC</p>		 
 <p>REM</p>		 

Figura A.16: Respuestas a los problemas 3 y 4 dadas por 6 de los alumnos de la clase CM2B del año 1993-1994.

A.4. Resolución de los problemas 5 y 6 por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteados en la página 36 y 36 respectivamente

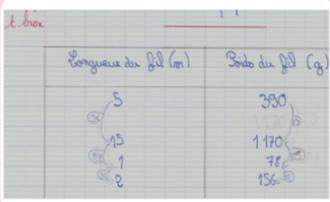
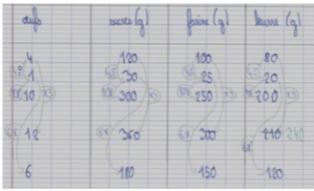
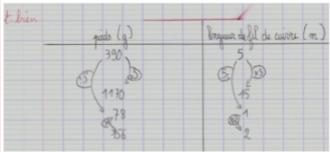
Código del alumno	Resolución del problema 5	Resolución del problema 6
 COR		
 DAF		

Figura A.17: Resolución de los problemas 5 y 6 por los alumnos COR y DAF.

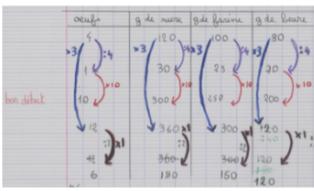
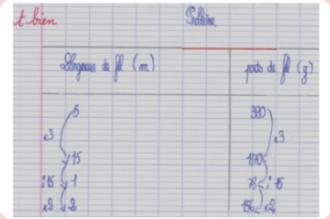
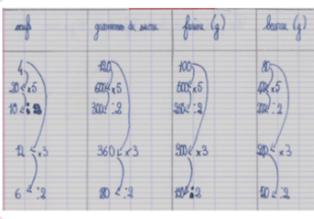
Código del alumno	Resolución del problema 5	Resolución del problema 6
 EJM		
 NAD		

Figura A.18: Resolución de los problemas 5 y 6 por los alumnos EJM y NAD.

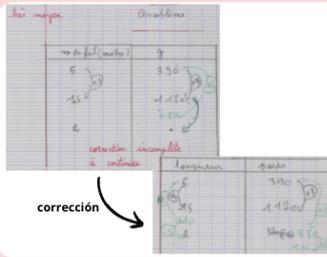
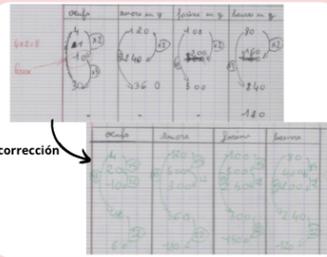
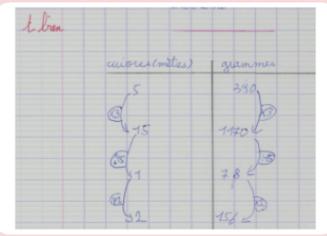
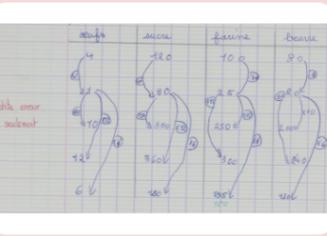
Código del alumno	Resolución del problema 3	Resolución del problema 4
 <p>RAC</p>		
 <p>REM</p>		

Figura A.19: Resolución de los problemas 5 y 6 por los alumnos RAC y REM.

En la siguiente figura se muestran las respuestas dadas a los problemas 5 y 6 por 6 de los alumnos de la clase CM2B.

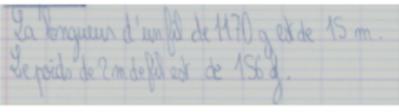
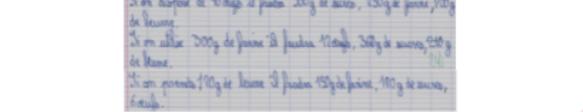
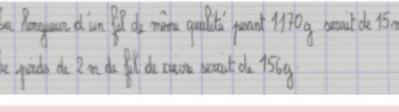
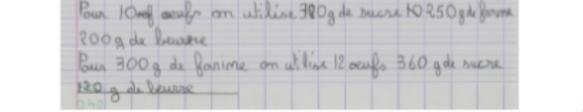
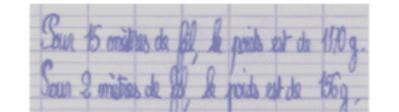
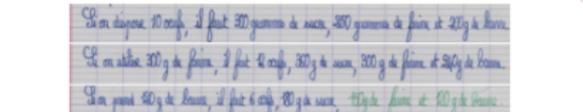
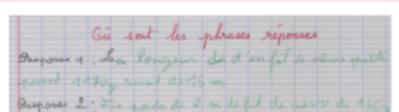
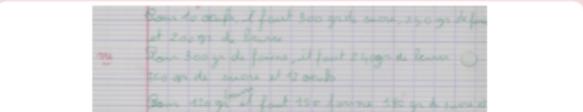
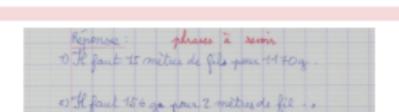
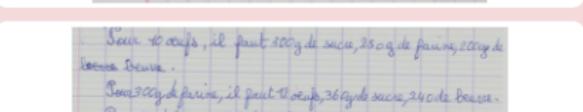
Código del alumno	Respuesta del problema 5	Respuesta del problema 6
 COR		
 DAF		El alumno no ha realizado el ejercicio o no se encuentra incluido en la libreta
 EJM	El alumno no ha realizado el ejercicio o no se encuentra incluido en la libreta	
 NAD		
 RAC		
 REM		

Figura A.20: Respuestas a los problemas 5 y 6 dadas por 6 de los alumnos de la clase CM2B del año 1993-1994.

A.5. Respuestas a los problemas planteados en el examen por los alumnos del grupo CM2B del curso 1993-1994 planteados en la página 37 y 37 respectivamente

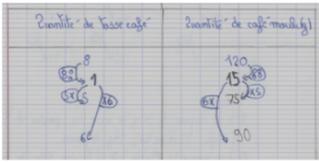
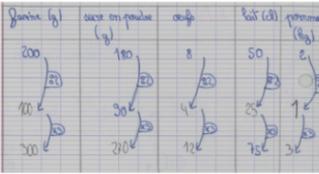
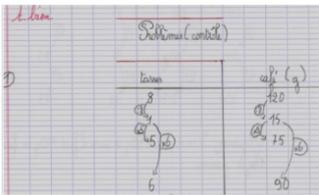
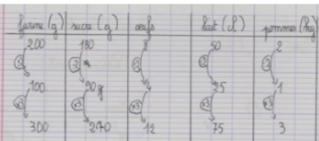
Código del alumno	Resolución del ejercicio 1	Resolución del ejercicio 2
 COR		
 DAF		

Figura A.21: Resolución del examen del tema de proporcionalidad por los alumnos COR y DAF.

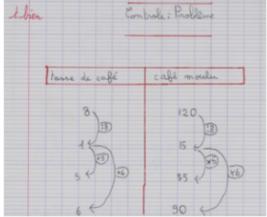
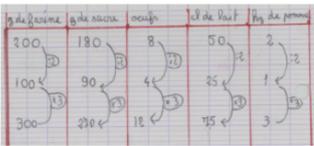
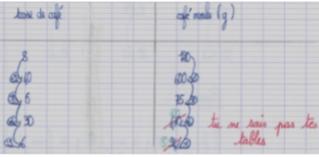
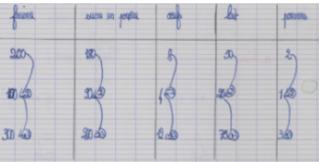
Código del alumno	Resolución del ejercicio 1	Resolución del ejercicio 2
 EJM		
 NAD		

Figura A.22: Resolución del examen del tema de proporcionalidad por los alumnos EJM y NAD.

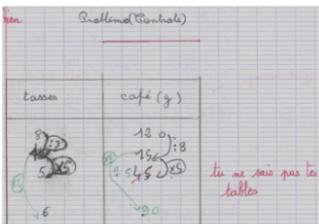
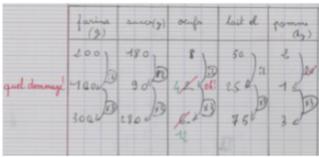
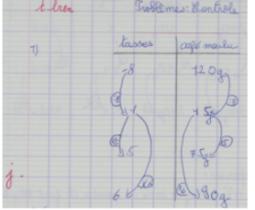
Código del alumno	Resolución del ejercicio 1	Resolución del ejercicio 2
 RAC		
 REM		

Figura A.23: Resolución del examen del tema de proporcionalidad por los alumnos RAC y REM.

En la figura se muestran las respuestas dadas por los alumnos de la clase CM2B a los dos ejercicios del examen.

Código del alumno	Resolución del ejercicio 1	Resolución del ejercicio 2
 COR	<p>1) Pour préparer 5 tasses il faut 75g de café moulu.</p> <p>2) Pour préparer 6 tasses il faut 90g de café moulu.</p>	<p>1) Si on dispose de 90g de sucre en poudre il faudra 100g de farine, 4 œufs, 25 cl de lait, 1kg de pomme.</p> <p>2) Si on dispose de 75 cl de lait il faudra 300g de farine, 270g de sucre en poudre, 12 œufs, 3kg de pommes.</p>
 DAF	<p>Préparer 5 tasses il faut 75g pour préparer 5 tasses</p> <p>Il faut 90g pour préparer 6 tasses.</p> <p>de café moulu</p>	<p>Préparer: Si on dispose de 90g de sucre il faut 100g de farine, 4 œufs, 25 cl de lait, 1kg de pomme.</p> <p>Si on dispose de 75 cl de lait il faut 300g de farine, 12 œufs, 270g de sucre et 3kg de pomme.</p>
 EJM	<p>Pour 5 tasses de café il faudra 75 café moulu.</p> <p>Pour 6 tasses de café il faudra 90 café moulu.</p>	<p>Pour 90 g de sucre en poudre il faudra 100 g de farine, 4 œufs, 25 cl de lait et 1 kg de pomme.</p> <p>Pour 75 cl de lait il faudra 300g de farine, 270g de sucre en poudre, 12 œufs et 3kg de pomme.</p>
 NAD	<p>Il faut 75 g de café moulu pour préparer 5 tasses.</p> <p>Il faut 90 g de café moulu pour préparer 6 tasses.</p>	<p>Il faut pour 90 g de sucre, 100 g de farine, 4 œufs, 25 cl de lait, 1 kg de pomme.</p> <p>Il faut pour 75 cl de lait, 300 g de farine, 270 g de sucre, 12 œufs, 3kg de lait et 3kg de pomme.</p>
 RAC	<p>Il faut 45 g pour 5 tasses</p> <p>Pour 6 tasses il faut 90g de café</p>	<p>Si on dispose 90g de sucre il faut 100 g de farine, 2 œufs et 25 cl de lait et 1 kg de pomme.</p> <p>Si on dispose 75 cl de lait il faut 300g de farine, et 270g de sucre, 6 œufs et 3 kg de pomme.</p>
 REM	<p>Si on a 5 tasses il faut 75g de café moulu.</p> <p>Si on a 6 tasses il faut 90g de café moulu.</p>	<p>Si on a 90g de sucre en poudre il faut 100g de farine, 4 œufs, 25 cl de lait et 1kg de pomme.</p> <p>Si on a 75 cl de lait il faut 300g de farine, 270g de sucre en poudre, 12 œufs, 3 kg de pommes.</p>

Figura A.24: Respuestas a los ejercicios del examen del tema de proporcionalidad por 6 de los alumnos de la clase CM2B del año 1993-1994.