

# **LA MULTIPLICATION AU CE<sub>1</sub>**

**\*\*\***

**– Quelques apports des recherches en didactique aux leçons de tous les jours**

GRUPE DE RECHERCHE  
SUR L'ENSEIGNEMENT ELEMENTAIRE

LA MULTIPLICATION AU C.E.1.

\* \* \*

I.R.E.M. DE BORDEAUX

---

## SOMMAIRE

\* \* \*  
\*

PARTIE 0 : INTRODUCTION.....	p. 4
0-0 Introduction générale.....	p. 6
0-1 Caractères des apprentissages scolaires....	p.12
0-2 La théorie des situations : résumé de quelques concepts de la théorie.....	p.16
0-3 Processus d'apprentissage dans la théorie des situations didactiques.....	p.19
0-4 Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire.....	p.28
PARTIE I : INTRODUCTION DE LA SITUATION DE BASE ET DU SIGNE "X"	
1-0 Présentation.....	p.39
1-2 Suite des leçons (6 séances).....	p.42
PARTIE II : ELABORATION D'UNE NOUVELLE METHODE DE DENOM- BREMEN"	
2-0 Présentation.....	p.71
2-1 Suite des leçons (4 séances).....	p.74
PARTIE III : CALCUL AVEC LE REPERTOIRE	
3-0 Présentation.....	p.88
3-1 Suite des leçons (8 à 11 séances).....	p.90
PARTIE IV : MISE AU POINT D'UN ALGORITHME	
4-0 Présentation.....	p.98
4-1 Suite des leçons (4 à 7 séances).....	p.104

.../...

CALCUL MENTAL SUR LA MULTIPLICATION AU CE1.....p.	112
PROBLEMES SUR LA MULTIPLICATION AU CE1.....p.	114
CONTROLE DE FIN D'ANNEE AU CE1 (Multiplication).....p.	126

PARTIE V : SUITE POUR LE CE2, L'ALGORITHME "A LA GRECQUE"

5-0 Présentation.....p.	128
5-1 Dénombrément d'une collection.....p.	130
5-2 Problèmes.....p.	137
5.3 Algorithme à la grecque.....p.	139

BIBLIOGRAPHIE DES OUVRAGES I.R.E.M.

* Les publications pour les maîtres.....p.	141
* Etudes en didactiques des mathématiques.....p.	141

ANNEXE

* Extrait de : "Actes du Congrès International des Sciences de l'Education - Paris - 1973" "Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?" G.BROUSSEAU, Département de Mathématiques, Université de Bordeaux I..p.	142
---	-----



Depuis sa création, l'I.R.E.M. de Bordeaux a publié un certain nombre d'ouvrages destinés aux maîtres des écoles primaires et maternelles.

A travers ces publications, on peut suivre différentes étapes de l'évolution des connaissances didactiques développées en particulier autour de l'Ecole Jules Michelet dans le cadre de la formation du 3<sup>o</sup> cycle de Didactique des Mathématiques.

C'est ainsi que la multiplication au C.E. a déjà fait l'objet de nombreuses communications à l'intérieur des cahiers de l'I.R.E.M. puis d'une publication spécifique rédigée par G.DERAMECOURT à partir des travaux menés à l'Ecole Jules Michelet qu'il a repris à Périgueux. Cette publication a connu et connaît encore un grand succès. Les études qui l'ont fondée ont fourni aux chercheurs les moyens de repenser (notamment) l'apprentissage de la multiplication, aux responsables de l'élaboration des programmes et les moyens de proposer une nouvelle approche de l'ensemble des maîtres. La rédaction de G.DERAMECOURT a fourni aux maîtres intéressés les moyens de mettre en pratique cet enseignement rénové dans leur classe de tous les jours.

L'utilisation de cette brochure dans les classes a permis de mettre en évidence un certain nombre de difficultés que les maîtres rencontrent.

Pendant ce temps, les recherches en Didactique menées à l'Ecole Jules Michelet faisaient progresser la connaissance de nombreux phénomènes d'enseignement, bien que l'amputation progressive des moyens nécessaires à la recherche (notamment en disponibilité des enseignants de l'Université et des professeurs d'Ecoles Normales) ait limité les possibilités de cette recherche.

Ce sont ces recherches qui ont permis aux rédacteurs de ce document de porter leurs efforts sur l'explicitation des raisons qui commandent les choix (progression de situations, consignes, conduite de classe...), qui engagent pour les élèves le sens de leur activité.

.../...

Nous espérons que ce travail permettra aux maîtres de promouvoir l'enseignement des mathématiques comme une éducation scientifique, ouverte et créative :

. Adaptée aux programmes et aux possibilités des enfants.

. Qui améliore le fonctionnement des connaissances acquises.

Et qui développe leurs activités à en acquérir de nouvelles.

Le Directeur de l'I.R.E.M.

Nous remercions par avance toutes les personnes qui voudront bien nous aider en nous communiquant leurs observations sur la rédaction de ce document et l'utilisation qu'ils en ont faite.

Nous remercions particulièrement l'équipe de nos collègues, G.DERAMECOURT, A.DUVAL, S.GAIRIN-CALVO, M.H.SALIN, qui nous ont aidé de leurs critiques et suggestions / A.BERENQUER, N.BOULOUNAUD, M.T.DUVAL, C.GIL, P.LAVEAU, B.TRESSOL, qui nous ont aidé à construire et adapter les séances de classes / ainsi sur M.DELIS pour la documentation, N.BERGEROT et F.DEL MORAL qui ont assuré la dactylographie de cet ouvrage, en acceptant avec beaucoup de gentillesse les tâtonnements des rédacteurs. Nous remercions aussi le personnel de l'imprimerie de l'I.R.E.M. pour sa compétence.

Les rédacteurs

M.F. GRESILLIER

R. BERTHELOT

# INTRODUCTION

## I/ LES RECHERCHES MENEES A L'I.R.E.M. DE BORDEAUX <sup>(1)</sup>

"Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?", telle était la question posée dès 1973 par G.BROUSSEAU. <sup>(2)</sup>

Nous reprenons ci-après quelques éléments de cette intervention.

### 1. Analyse de l'apprentissage classique

a) Il est fondé sur l'idée que le calcul est un mécanisme, qu'on connaît un moyen d'enseigner les mécanismes, et donc que l'on peut appliquer l'un à l'autre.

b) Il est décomposé en étapes selon les conceptions suivantes :

- Le calcul d'un produit de naturels est un algorithme complexe. Il ne peut donc être inventé par l'enfant. Il doit être appris précocement de façon à pouvoir être utilisé mécaniquement, sans faute, plus tard.

- Pour enseigner un mécanisme, il faut enseigner l'organigramme par emploi répété, sous la forme où il sera utilisé finalement et mettre en mémoire les formules du répertoire (par apprentissage sériel). Le "sens" de l'opération, c'est-à-dire la reconnaissance des occasions d'utiliser le calcul, ne peut pas dans ces conditions découler de sa "compréhension" et doit faire l'objet d'un apprentissage séparé. .../...

---

(1) L'IREM associe autour de l'école Jules Michelet ses recherches théoriques à la mise en place de processus d'apprentissage.

(2) Communication au Congrès International des Sciences de l'Education (voir texte en annexe).

c) On peut lui faire un certain nombre de reproches :

- Le manque d'intérêt et de retombées mathématiques de la méthode, elle même basée sur des processus de mise en mémoire et d'exécution étrangers au contenu mathématique. Ces connaissances acquises sont mécaniques et se prêtent mal à l'analyse et à l'adaptation.

- La difficulté à motiver chacune des étapes de l'apprentissage ; seule motivation : il faut savoir calculer, donc il faut apprendre à le faire. La méthode demande coercition et volonté de réussir, attention soutenue.

- Les résultats de l'apprentissage ne sont pas aussi bons qu'on le voudrait : des nombreux enfants ont des difficultés avec le sens de l'opération ; d'autres sont bloqués dans un refus des mathématiques ; la fiabilité n'est pas très grande.

## 2. Propositions pour un nouvel apprentissage

Nous travaillons dans deux directions à la fois : nous essayons de réaliser concrètement des processus<sup>(3)</sup> qui échappent au schéma critiqué ci-dessus, et nous essayons pour cela de nous donner une théorie appropriée (4)

Nous étudions depuis 3 ans un processus où l'enfant fabrique son algorithme. On veut qu'il conçoive le problème "calculer le produit" avant d'en étudier la solution. Ainsi le produit n'est plus "ce que l'on trouve en effectuant une multiplication". Par exemple, l'enfant sait que " $a \times b$ " désigne le cardinal d'un ensemble comportant  $a$  lignes et  $b$  objets. Pour "calculer"  $a \times b$ , il invente d'abord un découpage de cet ensemble en morceaux dont il peut compter les éléments, puis fait la somme des nombres obtenus. Il améliore son découpage et le choix des morceaux de façon à rendre son algorithme plus rapide, plus sûr, plus efficace, plus général. Il ne sait pas encore qu'il existe une unique méthode de calcul. Chaque activité est une démonstration de la formule basée sur des

.../...

---

(3) Succession de séances permettant la réalisation de l'apprentissage

(4) Le rôle de la théorie (voir plus loin un aperçu de la théorie des situations) et aussi de contrôler que le nouvel apprentissage permet d'échapper au schéma critiqué.

propriétés de la théorie mathématique (distributivité, produits de partitions.....) connues explicitement ou non.

## II/ LES PUBLICATIONS A L'USAGE DES MAITRES

1. Un premier document a été rédigé en 1973 par G.DERAMECOURT, qui s'appuyait sur les travaux menés à l'école Jules Michelet dans le cadre des recherches de l'I.R.E.M. et sur l'exploitation qu'il en avait réalisé dans des classes à Périgueux.

Ce document avait pour objectif de communiquer ce nouveaux processus aux enseignants intéressés, grâce à la rédaction détaillée des fiches de leçons, assortie d'un minimum de commentaires. Il a permis à la pratique pédagogique de nombreux maîtres de s'enrichir de nouveaux aspects ; les textes officiels de 1978 ainsi que les nombreux ouvrages destinés aux maîtres et aux élèves de C.E. en témoignent.

Cependant certains éléments de l'objectif visé se sont révélés difficiles à atteindre : la mise en place des leçons par les maîtres a montré que la dynamique de l'apprentissage qui les soustend échappe souvent à ceux qui n'ont pas eu accès aux éléments théoriques développés à l'occasion de ces recherches. Ainsi l'apprentissage peut-il être en partie vidé de son sens primitif ; les élèves redeviennent alors passifs ; le nouvel apprentissage devient relevable des reproches que l'on adressait à l'ancien.

2. Le document présent vise donc à communiquer en plus quelques éléments théoriques qui ont été dégagés par les travaux de didactique conduits au cours de ces dernières années ; il s'agit notamment d'un certain nombre de conditions que les situations d'apprentissage doivent satisfaire pour favoriser la construction du savoir mathématique par les élèves. Parmi ces conditions nous relèverons :

a) le choix et l'enchaînement pertinent des situations problèmes posées. Celui que nous présentons diffère peu de celui de G.DERAMECOURT.

En effet, malgré l'élaboration explicite de nouveaux outils, la détérioration des moyens de recherche lors de ces cinq dernières années ne nous a pas permis de reconsidérer ces choix ; nous nous sommes contentés, en introduction aux différentes phases de la progression, d'explicitier la spécificité de chacune et de leur articulation.

Nous avons placé en première partie du document (partie 0), avant la description des leçons, quelques caractéristiques générales des situations problèmes favorisant une construction du savoir par les élèves (5)

b) Une organisation convenable de l'exploitation de chaque situation problème est aussi nécessaire.

Nous avons rassemblé dans 0-2 la présentation détaillée<sup>(6) (7)</sup> de l'organisation des différentes phases du processus de mathématisation mis au point par G.BROUSSEAU (action, formulation, validation, institutionnalisation.) L'exploitation des situations présentées dans ce document s'entend selon cette organisation.

Nous présentons aussi en complément dans 0-3 quelques éléments qui s'en déduisent sur l'importance du traitement des erreurs des élèves<sup>(8)</sup>

c) Pour ce qui est enfin de la gestion des rapports entre maître, élève, situation, et connaissance, nous avons tenté de formuler séance après séance des commentaires à leur propos, en regard de la fiche de leçon.

Nous avons aussi tenté de dégager plus explicitement l'idée centrale des travaux de l'IREM sur le calcul numérique : les désignations de nombres, qu'elles soient élémentaires (comme "9") ou complexes (additives, multiplicatives) ou tout simplement celles de la numération décimale, sont d'abord

.../...

---

(5) Extraits de Math-C.P. 1984 (G.DERAMECOURT-E.OLEJNICZACK F.MARTIN pp.23-26).

(6) Etudes de questions d'enseignement - Colloque de Trente (Italie) 1984.

(7) Extraits de la thèse de J.PERES (Bordeaux II-1984) pp.10-18.

(8) Extraits du mémoire de D.E.A. de Didactique des Mathématiques de M.H.SALIN - 1976.

des moyens pour l'élève de contrôler les nombres d'objets des collections ; c'est-à-dire d'exercer des prévisions et des vérifications, sous sa propre responsabilité, sur le nombre d'éléments de collections (identification de ce nombre, comparaison avec d'autres, et évaluation des différences...).

Les problèmes de calcul comprennent ainsi des anticipations soumises à des vérifications que les élèves doivent assumer. Nous avons de bonnes raisons de penser que cette responsabilité à assumer par les élèves est la clef de la compréhension de la multiplication, tant au niveau de ses conditions d'emploi (sens), que d'une appropriation.

### 3. Limites du document

Outre celles inhérentes au support utilisé (le livre, à l'ère de la vidéo et de l'informatique les contraintes liées à sa production) nous ne prétendons pas traiter ici de tout ce qui concerne l'enseignement de la multiplication même au C.E.1. Le document se limite à la charpente de l'élaboration de la technique de la multiplication au C.E.1. et à ses prolongements immédiats au C.E.2. Nous signalerons dans l'introduction de chaque module les branchements sur d'autres aspects comme la numération et les problèmes qui leur sont liés. L'étude de la multiplication comporte encore bien des aspects complémentaires au dénombrement de collections disposées en tableau, qui seront développées jusqu'au C.M. voire plus tard encore : opérateurs multiplicatifs, produits de plus de deux nombres, dénombrements de produits d'ensembles, mesures de produits (surfaces, volumes, ... entre autres<sup>(9)</sup>).

Enfin, notre effort s'est surtout porté sur la signification des nombres : les nombres servent d'abord à compter des objets (puis à mesurer d'autres quantités). Le calcul, la numération sont d'abord des moyens pour organiser efficacement le dénombrement de collections constituées

.../...

---

(9) Consulter les travaux de J. ROGALSKI et de son équipe sur les mesures de surface et de volume in Recherche en Didactique des Mathématiques 3.3. et 4.1.

ou en projet de constitution ; ils doivent assurer au dénombrement ses deux qualités essentielles : fiabilité et économie.

De plus, "Savoir" ce n'est pas seulement résoudre des problèmes, c'est aussi savoir en poser, savoir se poser des questions et de "bonnes" questions. La place importante des collections dans le travail proposé ne se justifie que si ces collections sont l'occasion pour les élèves d'apprendre à se poser des questions, des défis sur les nombres et leurs écritures.

Il existe par ailleurs des exercices qui peuvent être posés par le maître pour le plus grand profit des élèves, qui ont pour objet de les provoquer à réinvestir, mobiliser, éprouver, élargir les connaissances élaborées. Nous en repoussons une présentation, d'ailleurs très succincte, au chapitre "Problèmes sur la multiplication" ; nous avons en effet constaté que posés trop tôt par le maître, elles produisaient chez les élèves plutôt faibles des effets pervers importants : abandon de tout contrôle par le sens sur la démarche de résolution, au profit de la recherche et de l'emploi de "trucs de calcul" sur lesquels ils n'ont plus aucun contrôle. Il nous semble que la place de tels exercices est dans un atelier mathématique, sous forme de fiches par exemple, auxquelles les élèves accèdent librement et qu'ils peuvent enrichir autant de propositions de solutions que de propositions de problèmes pour les camarades.



0-1 CARACTÈRES DES APPRENTISSAGES SCOLAIRES(\*)

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE SCOLAIRE

Les caractères que nous envisageons de dégager concernent essentiellement les situations d'apprentissage scolaire (dites aussi situations didactiques) et leur enchaînement. Il nous semble nécessaire de distinguer les situations d'apprentissage scolaire dont nous allons parler des "situations" ou "situations-problèmes" évoquées plusieurs fois dans le programme : une situation-problème n'est qu'un élément d'une situation d'apprentissage scolaire.

Une situation d'apprentissage scolaire met en présence les éléments suivants :

- les élèves
- le concept visé
- la situation-problème
- le maître

Pour décrire une telle situation afin de l'analyser, de l'interpréter, de la reproduire, de prévoir son déroulement et ses prolongements, il est nécessaire de considérer :

- chacun des éléments et leur signification, par exemple : l'élève avec ce qu'il sait, sa façon d'agir, ses modèles d'appropriation...., la situation-problème conçue pour permettre l'acquisition du concept, qui peut être un énoncé avec questions ou un ensemble d'objets avec un problème...

- les relations entre les éléments, par exemple : les interactions entre l'élève et le concept où l'élève est amené, à l'aide de ses structures antérieures, à appréhender un nouveau modèle en fonction d'anciens qui se trouvent ainsi améliorés ou rejetés...

.../...

---

(\*) Extrait de Math-C.P. 84 pp.23-26 I.R.E.M. de Bordeaux

- les images que se font le maître et l'élève de chacun des éléments et des relations ci-dessus, exemples : ce qu'attend le maître de chacun des élèves, de la situation ; ce qu'espère le maître quant aux actions de l'élève sur la situation quant aux acquisitions de l'élève à propos du concept visé.....

CARACTERES NECESSAIRES DES SITUATIONS D'APPRENTIS-  
SAGE SCOLAIRE :

A notre point de vue, les situations didactiques doivent présenter les trois caractères suivants :

a) Les situations proposées doivent permettre de modifier l'état de connaissance de l'élève, elle doivent donc lui donner l'occasion :

- d'engager des connaissances antérieures, de les soumettre à révision
- de les modifier, de les compléter
- éventuellement de les rejeter pour construire des conceptions nouvelles pouvant être éprouvées par application à la situation et/ou par le raisonnement pour en définitive conduire à une conception correcte.

b) Les situations doivent provoquer un désir d'investissement de l'élève, ce qui nécessite pour l'élève, à propos des situations :

- la possibilité d'engager des connaissances antérieures
- la perception d'une difficulté qu'il a envie de surmonter, la possibilité de faire des anticipations, des projets
- la présence d'un champ adapté à ses possibilités d'investigations (ni trop étroit, ni trop large).

.../...

c) Les situations doivent permettre une évolution des interactions élève-situation :

- l'élève doit pouvoir établir des échanges constants avec la situation qui fait problème pour lui ; la situation-problème doit être modifiée de façon compréhensible par les tentatives qui ne conviennent pas. C'est-à-dire que l'élève doit pouvoir mesurer l'écart entre la prévision et l'échec et ceci sans nécessiter l'interprétation du maître pour l'inviter à d'autres tentatives.

- l'élève doit pouvoir éprouver toutes ses ressources et répéter son action s'il le juge indispensable.

- la motivation doit naître de l'investissement de l'élève et s'entretenir par un jeu de sanctions dépendant uniquement de la situation et non de sanctions arbitraires provenant de finalités du maître.

Ainsi, les relations que l'enfant découvre, le projet qu'il manifeste, les actions qu'il entreprend ne sont pas nécessairement ceux que le maître a prévus. Ce qui demeure important dans cette situation, ce n'est donc pas seulement la structure mathématique que le maître perçoit mais les connaissances mathématiques, les intentions et les actions de l'enfant. Ainsi, ces situations ne sont pas l'occasion de simples interactions de hasard, mais de véritables dialogues :

- Entre l'élève et la situation : les prévisions de l'enfant guidées par sa connaissance au moment de l'action, sont confirmées par les réponses de la situation

- Entre l'élève et les autres élèves lors des discussions, des échanges.

La connaissance se met alors en place en s'opposant à une autre sur laquelle elle s'appuie pour la compléter ou pour la remplacer. Ainsi, l'activité de l'enfant guidée par les résultats qu'il prévoit donne aux interactions un caractère dialectique

.../...

- dialectique de la connaissance et de l'action
- dialectique de l'abstrait et du concret
- dialectique du moi et des autres
- dialectique de l'a priori et l'a posteriori
- ...

.../...

0-2 LA THÉORIE DES SITUATIONS (\*)

1. Résumé de quelques concepts de la théorie

i/ Il s'agit toujours de savoir à quel jeu l'élève doit jouer pour que les stratégies les plus efficaces impliquent l'usage du savoir qu'on veut lui enseigner ; il s'agit aussi que le jeu puisse lui être communiqué, et pour qu'il le comprenne, il faut en général qu'il puisse immédiatement mettre en oeuvre une stratégie "de base", qui même si elle ne permet pas de gagner, permet de jouer et d'espérer gagner.

ii/ La fonction première du savoir sera donc de fournir des décisions, de permettre des choix au cours de l'action. Pour cela, il n'est pas toujours nécessaire que le savoir s'exprime, se prouve, ni même soit formulable. Toute situation d'enseignement pourra être analysée du seul point de vue des actions que l'élève doit entreprendre, de leurs motivations, de rétroactions auxquelles elles sont soumises, des possibilités d'évolution des stratégies de l'élève et des représentations ainsi obtenues.

iii/ La seconde fonction du savoir est de permettre la description des situations, c'est-à-dire la formulation des représentations. Et la composante des situations d'apprentissage qui justifie cette formulation, c'est la communication éventuellement l'autocommunication.

Les adaptations de l'élève et de son langage à ces situations sont très importantes. Elles se font assez mal dans les situations classiques en géométrie, ainsi que l'a

.../...

---

(\*) G.BROUSSEAU : Extrait "Etudes des questions d'Enseignement" 1984.

montré C.LABORDE en utilisant la situation fondamentale que j'avais étudiée comme dispositif expérimental.

iv/ La troisième fonction du savoir est d'appuyer la conviction du sujet par des preuves éventuellement organisées en théories. La composante de la situation qui justifie cette activité c'est le débat de la preuve, de la validation de ce qui a été avancé, elle doit être rapporté à un égal, également informé. Cette situation qui fait surgir les problèmes et les questions aussi bien que les réponses, est assez différente de la situation de communication comme nous l'avons exprimé plus haut.

v/ La quatrième fonction du savoir est la référence culturelle, à l'échelon d'un petit groupe, d'une classe, d'un milieu de chercheurs ou d'enseignants ou de la société tout entière, les rapports sociaux utilisant des savoirs reposent sur un tissu de conventions. La composante des situations d'enseignement qui règle cet aspect de la connaissance est l'institutionnalisation par laquelle un groupe donne un statut à ce qu'il a produit le plus souvent par rapport à ce qui est pratiqué dans la société : (mon attention a été attirée sur le dernier point alors que j'étudiais l'institutionnalisation interne à la classe, par P. Boero et son équipe, si justement soucieuses de ces questions de référence historique, sociale et professionnelle).

Canonisation d'une procédure en algorithme, conventions et langage, références théoriques...

vi/ En précisant le jeu des acteurs en présence, cette modélisation permet d'essayer de prévoir l'évolution des situations et des élèves et de décrire les conditions qui commandent cette évolution ; je ne fais que citer au passage à ce sujet, nos travaux sur les sauts informationnels et sur les obstacles épistémologiques.

.../...

vii/ Les paragraphes qui précèdent supposent un fonctionnement quasi isolé du ou des élèves en interactions ; le maître fait aux élèves la dévolution d'un problème, et la situation les change ! En fait, il s'instaure entre le maître et les élèves la négociation d'un contrat didactique dont l'étude se poursuit actuellement...

0-3 LE PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DANS LA THÉORIE(\*)  
DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Nous allons revenir plus longuement sur ce processus d'apprentissage en trois phases (action, formulation, validation) qui, selon G.BROUSSEAU, pourrait permettre à l'élève d'exercer une activité créatrice dont les caractéristiques seraient celles d'une pensée mathématiques vraie.

Il nous paraît nécessaire de développer l'exposé de ce schéma théorique dans la mesure où d'une part toute l'activité didactique que nous avons fait réaliser est conçue sur ce modèle et où d'autre part, l'analyse que nous avons menée après coup avait pour but d'approfondir les phénomènes que peut produire un tel processus d'apprentissage.

Le modèle élaboré par BROUSSEAU reprend d'abord un point de vue bien connu des mathématiciens concernant le processus de création mathématique. Ainsi BETH<sup>(1)</sup> décrivant l'ensemble des activités mentales conduisant à la solution raisonnée d'un problème distingue trois phases :

- 1/ Une phase de recherche où le sujet utilise toutes ses connaissances du moment dans une activité spontanée, originale, tous les moyens étant bons pourvu qu'ils rapprochent du but.
- 2/ Une phase d'aménagement durant laquelle la solution trouvée (souvent par surprise en terme d'un chemin que ce sujet serait bien en peine de retracer, les différentes stratégies restant implicites) doit prendre la forme d'un raisonnement correcte (cette conceptualisation, consistant à donner une

.../...

---

(1) [BETH 1961 p.24]

(\*) Extrait de J.PERES Thèse p.10-18 IREM de Bordeaux



forme communicable au modèle utilisé durant la phase précédente est toujours en retard par rapport à l'action de réussir et, comme l'a montré PIAGET<sup>(1)</sup> suppose une reconstruction).

3/ Une phase de vérification consistant à repenser le raisonnement pour vérifier s'il est correct et s'il conduit vraiment à une solution du problème posé. Il s'agit alors de fonder en raison la solution proposée (de lui donner son statut scientifique).

Le problème est alors de transposer dans le domaine de l'apprentissage scolaire ces différentes phases s'articulant les unes aux autres jusqu'à la production finale du concept mathématique. Dans ce but, BROUSSEAU va approfondir la spécificité de ces trois types d'activités et déterminer les caractéristiques des situations pouvant les favoriser<sup>(2)</sup>.

### 1.1. Les situations d'action

Elles ont pour but d'aménager un certain type d'interactions entre le sujet et le milieu. Il s'agit d'abord de faire en sorte que le problème posé puisse entraîner la mise en oeuvre d'une première tentative. Alors interviennent les schèmes habituels, le savoir disponible du moment. C'est à partir d'eux que l'élève donne une première représentation des rapports à l'objet. Ensuite, il est nécessaire que la situation permette au sujet de recevoir directement des informations sur les effets de son action. Tout doit alors être

.../...

---

(1) [1 PIAGET 1974a, p.261-282]

(2) On trouvera l'exposé le plus complet de ces situations didactiques dans [BROUSSEAU 1972]

Voir aussi l'application du processus à une activité d'apprentissage [BROUSSEAU 1978b]

conçu de façon à ce que face à l'échec il puisse à volonté modifier ses tentatives, risquer d'autres solutions. Il faut donc tâtonner, recommencer et chaque fois être informé par des feedbacks. La réussite peut être locale, imparfaite, fragile, cette phase ne vise pas l'apparition d'un savoir définitif, l'important est le travail durant lequel le sujet ça peu à peu modifier sa représentation de la situation et se construire un modèle implicite d'action au cours des multiples interactions avec le milieu (BROUSSEAU parle à ce sujet de "Dialectique de l'action").

Mais le milieu scolaire n'est pas réductible à la relation d'un sujet avec un objet problématique. Cette situation d'action doit rendre possibles les relations au sein du groupe d'enfants et en particulier les communications informelles, spontanées qui peuvent d'emblée s'établir entre les élèves confrontés au même problème. L'expérience doit s'enrichir aussi des résultats des essais des autres, la réussite et l'échec, les moyens employés, etc....

Enfin, se pose la question du contrat didactique, qui en dernier lieu donne à l'enfant le sens de ce qui se joue

.../...

dans cette situation. C'est en effet à travers ce que les élèves perçoivent des intentions de l'enseignant qu'ils vont réagir de telle ou telle façon<sup>(1)</sup>. En effet, si l'on veut que s'établisse ce rapport à la connaissance très particulier dans lequel la recherche est valorisée où l'erreur, loin d'apparaître comme une faute est porteuse d'information et en tant que telle précieuse, où, enfin, ce qui est vécu par l'enfant à travers cette démarche tâtonnante est le plaisir de s'approcher de la solution et non le dépit de ne pas avoir trouvé, alors la position du maître est primordiale. Ce qui va alors agir, ce ne sont pas seulement les stratégies didactiques volontairement choisies par l'enseignant (ce qu'il maîtrise de ce qu'il fait), mais aussi, et surtout, son attitude profonde face aux comportements cognitifs des élèves. Ainsi il est nécessaire que ce statut de l'erreur dont nous venons de parler soit réellement accepté par le maître, qu'il soit persuadé qu'à travers tâtonnement, échecs, regressions parfois, les remaniements internes sont à l'oeuvre et que finalement ce processus constructif est essentiel quant à l'appropriation de la connaissance<sup>(2)</sup>. Or ceci suppose une conception épistémologique très précise (et qui se situe le plus souvent bien loin des conceptions épistémologiques courantes où l'empirisme a encore force de loi). Il ne suffit pas en effet que l'enseignant reste neutre quant au contenu ou n'influence pas plus ou moins directement le choix des enfants pour que cette démarche de recherche que suppose la dialectique de l'action ait un sens, encore faut-il qu'il

.../...

---

(1) Cet accent mis sur la nature du contrat implicite comme caractérisant et déterminant pour une grande part la situation didactique est apparu assez récemment dans la théorie [BROUSSEAU 1980c][BROUSSEAU-PERES 1981][BROUSSEAU 1983].

(2) Il faut citer les recherches de M.H.SALIN [1979] sur les jugements des maîtres concernant les erreurs et de N.MILHAUD [1980] qui reprend la même problématique dans l'étude des comportements magistraux.

soit persuadé de la valeur d'une telle attitude. C'est sa confiance motivée dans ce type d'apprentissage qui dynamise la situation et la rend en définitive efficace<sup>(1)</sup>.

Mais pour BROUSSEAU, les situations d'action ne peuvent suffire à produire des savoirs utilisables culturellement. Ceux-ci supposent une conceptualisation, ou plus précisément une prise de conscience des moyens utilisés à travers une explicitation. Ce qui sépare un modèle implicite spontanément utilisé et sa formulation, renvoie à la différence mise en relief par PIAGET entre réussir et comprendre : "comprendre consiste à dégager la raison des choses, tandis que réussir ne revient qu'à les utiliser avec succès, ce qui est certes une condition préalable de la compréhension, mais que celle-ci dépasse puisqu'elle en arrive à un savoir qui précède l'action et peut se passer d'elle"<sup>(2)</sup>

Or il ne suffit pas d'interroger un enfant au terme d'une situation d'action pour qu'il puisse expliciter le modèle implicite qui lui a permis d'agir et de réussir. Cette explicitation suppose un travail parfois long de compréhension où tout doit être de nouveau construit sur un autre plan. Il est alors nécessaire de créer une autre dialectique entre le sujet et le milieu, c'est ce que vise la situation de formulation qui est proposée à l'enfant.

.../...

---

(1) Dans un travail très récent, G.BROUSSEAU caractérise un certain nombre de stratégies didactiques qui toutes apparaissent en dernier lieu déterminées par les conceptions épistémologiques du professeur [BROUSSEAU-1983].

Dans sa recherche sur l'enseignement de la numération Me.EL BOUAZZAOUI analyse dans la même perspective les différentes méthodes proposées aux enseignants. Me.H.EL BOUAZZAOUI [1981].

(2) PIAGET [1974b, p. 242]

### 1.2. Les situations de formulation

La création du modèle implicite était déterminée par la nécessité pour l'enfant d'obtenir un résultat dans une situation très précise. Nul besoin alors d'explicitation. En utilisant le même schéma pédagogique de base (la situation seule donnant un sens à telle ou telle utilisation de la connaissance), BROUSSEAU élabore alors les caractéristiques d'une situation de formulation. Au cours de cette dernière il devient nécessaire à l'élève non plus seulement d'agir en modifiant son modèle mais de construire une description ou une représentation de ce modèle : "l'enfant peut obtenir sur la situation certaines informations mais il ne parvient pas, par la seule action, à obtenir le résultat attendu, soit parce que les informations sont incomplètes, soit parce que ses moyens d'action sont insuffisants. S'il se rend compte alors qu'une autre personne est susceptible d'agir d'une façon favorable, il cherche à obtenir son concours puis échange avec elle des informations ou des ordres : ce sont des messages échangés entre un émetteur et un récepteur<sup>(1)</sup> .

S'instaure alors une "dialectique de la formulation" ; l'émetteur veut obtenir un résultat, il utilise un langage qui doit permettre au récepteur de maîtriser la situation (des symboles, une écriture formalisée ou non, le langage naturel etc....). Le récepteur agit en fonction du message. Si le résultat est négatif (le problème n'est pas résolu ou le message n'est tout simplement pas compris), alors l'émetteur peut corriger sa formulation en envoyant d'autres messages. Il est ainsi amené à mettre à l'épreuve et à contrôler le vocabulaire qu'il emploie (cette nécessité de l'explicitation, et les feedback sur les carences du message ont aussi pour effet de faire prendre conscience de certains aspects du modèle utilisé).

.../...

---

(1) BROUSSEAU [1972, p.431-432]

Mais selon nous, une caractéristique très importante de cette situation, c'est le changement de rôle ; l'émetteur devenant à son tour récepteur. Il est alors à même de prendre une certaine distance avec la formulation (le langage utilisé devient objet d'analyse et non simple instrument non détaché de l'action même) et lorsque de nouveau il redevient émetteur, ses stratégies de formulation peuvent s'en trouver modifiées d'une manière heureuse.

Selon G.BROUSSEAU, une telle dialectique de la formulation consisterait à "mettre au point progressivement un langage que tout le monde comprend et prend en compte pour décrire les objets et les relations pertinentes de la situation de façon adéquate (c'est-à-dire en permettant les raisonnements utilisés et les actions). A chaque instant, ce langage construit serait éprouvé du point de vue de l'intelligibilité, de la facilité de construction, de la longueur des messages qu'il permet d'échanger"<sup>(1)</sup>.

### 1.3. Les structures de validation

Mais la connaissance mathématique ne consiste pas seulement à expliciter des savoir-faire à travers des messages appropriés, encore faut-il pouvoir affirmer que ce que l'on dit est vrai. Or ce dernier point suppose une rupture radicale avec des démarches purement adaptatives. On entre en effet dans le domaine de la nécessité, c'est-à-dire la soumission aux principes logiques et aux contraintes que suppose toute pensée rationnelle. Il ne s'agit plus de décrire mais de prouver.

..../....

---

(1) G.BROUSSEAU (1978, p. 16)

Or cette attitude de preuve est encore moins spontanée que celle consistant à conceptualiser un savoir-faire. Si l'on veut donc qu'elle prenne du sens au cours de l'activité, il faut de nouveau modifier la situation de façon que le but à atteindre dépende non plus d'une action ou d'un message mais d'une possibilité de convaincre l'autre de la justesse de ses affirmations. Il ne s'agit plus alors de transmettre des informations mais de justifier ce que l'on croit être la vérité de son modèle ; les élèves ne sont plus en position d'émetteur ou de récepteur, mais de "proposant" ou "d'opposant"<sup>(1)</sup>.

A partir de ce schéma on peut envisager plusieurs types de situations en fonction des phases précédentes. L'une d'elles que nous avons souvent vu fonctionner succède à une activité où plusieurs groupes dans la classe ont utilisé dans leurs échanges des messages, des formulations différentes (plus ou moins symbolisées, plus ou moins claires, plus ou moins redondantes etc...) ; les messages sont alors affichés, il s'agit de se mettre d'accord sur le meilleur moyen (la formulation la plus pertinente ou la plus économique etc...). Chacun peut alors défendre son point de vue, argumenter mais aussi s'opposer à telle proposition, la critiquer, en présenter les défauts.

Ce que vise une telle dialectique de la validation est pour BROUSSEAU l'apparition "d'une explicitation du répertoire logique et mathématique dont se servent les élèves pour établir leur conviction" et ainsi d'élaborer et d'expliciter "une ou des théories mathématiques axiomatisées de façon différente selon leur âge et les situations auxquelles ils ont été confrontés"<sup>(2)</sup>.

.../...

---

(1) On trouvera dans BROUSSEAU [1978b] Cf. BROUSSEAU [1981 p.61] des exemples d'une telle situation.

(2) BROUSSEAU [1972a, p.434].

Des trois situations, celle-ci paraît la plus complexe et la plus malaisée à réaliser dans la mesure où les stratégies du maître y sont déterminantes.

Celui-ci ne peut être partie prenante dans la discussion. Si l'on veut en effet voir apparaître des conduites de preuves, il faut que la relation soit symétrique entre proposant et opposant, aussi la discussion maître-élève est-elle défavorable car, remarque BROUSSEAU, dans ce cas, la conviction de l'élève peut être plus d'ordre moral (soumission au "savoir adulte") qu'intellectuel.

Mais la relation entre les enfants ne prendra pas d'emblée les caractères d'un débat "scientifique". Il est évident que prouver ce que l'on avance, motiver le choix que l'on fait, argumenter ses rejets sont des attitudes très secondarisées que nul n'adopte spontanément. C'est donc l'enseignant qui doit introduire ces contraintes, exiger que l'on prouve, écarter des attitudes de soumission ou des arguments d'autorité en renvoyant au problème posé et aux exigences de la raison.



0-4 LE RÔLE DE L'ERREUR DANS  
L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES  
A L'ÉCOLE PRIMAIRE

Il existe un assez grand nombre de travaux sur l'échec en mathématiques<sup>(1)</sup>, mais paradoxalement, assez peu sur l'étude de l'erreur en mathématiques, sujet qui paraît pourtant fondamental pour la compréhension de l'échec. Précisons ce que nous entendons par "erreur" et par "échec".

La définition du mot "erreur" dans le dictionnaire l'oppose à "vérité". L'erreur est "une opinion, un jugement contraire à la vérité", alors que "échec" est opposé à "succès", lui-même défini par "heureux résultat". Dans ce sens, on parlera aussi de l'échec à tel exercice ponctuel, échec manifesté par un certain nombre d'erreurs décelées par le maître. Prenons un exemple pour préciser la différence que nous faisons entre erreur et échec.

On dit qu'il y a échec lorsque le résultat d'une action n'est pas conforme au but fixé : un enfant de 3 ans projette de faire une tour de cubes, haute comme lui. Il ne réussit pas, c'est-à-dire que la tour s'effondre avant d'être suffisamment haute : c'est un échec de son action dont il a conscience. L'adulte, qui le voit mal placer les cubes peut analyser cet échec en termes d'erreurs, en l'occurrence le non-respect des contraintes dues à la gravité, parce qu'il

.../...

---

(1) A. BIGARD, dans "l'échec en mathématiques" brochure de l'IREM de CAEN, fait le point de manière assez complète sur les divers travaux sur ce sujet.

dispose d'un système de validation de l'action supérieur à celui de l'enfant pour lequel, à cet âge, le seul système est celui de la réussite ou de l'échec. Il n'y a donc pas, pour celui-ci, d'erreurs dans son action. Par contre, vers 8 ans, un enfant pourra éprouver des difficultés pour arriver à son but, mais saura interpréter son échec en terme d'erreurs et modifier son action de manière adéquate. De même dans une situation scolaire, devant une production d'enfant, non conforme à l'objectif, soit qu'il s'est lui-même fixé, soit qui lui a été fixé par le maître, on peut parler d'échec. Mais l'analyse en terme d'erreurs suppose de distinguer le point de vue du maître et le point de vue de l'enfant. Si tout échec renvoie à une ou des erreurs pour le maître, il n'en est pas de même, comme nous l'avons vu, pour l'enfant, A la limite, celui-ci peut même ne pas avoir conscience de son échec.

Nous essaierons donc, ici, de faire le point ou de poser des questions, sur le fonctionnement de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques. Pour cela, nous nous placerons d'abord du point de vue du maître ou de l'observateur, celui qui est le plus facile à développer. Puis, nous tâcherons de proposer quelques pistes pour l'analyse de l'erreur du point de vue de l'enfant, en considérant son fonctionnement dans les relations sujet-situation et sujet-maître.

## I/ L'ERREUR, DU POINT DE VUE DU MAITRE

### A - Comment les maîtres caractérisent-ils les erreurs de leurs élèves ?

Dans une discussion entre enseignants de mathématiques sur les erreurs, on peut dégager, il me semble, plusieurs niveaux d'analyse.

1/ Le premier, le plus courant, et donc beaucoup d'enseignant se contentent, fait référence exclusivement au contenu de l'enseignement, c'est-à-dire aux mathématiques telles

.../...

qu'ils les connaissent et les enseignent : devant une tâche donnée, l'élève est supposé disposer d'un certain nombre d'outils dont le maître lui a enseigné le fonctionnement, pour arriver à un résultat. Le maître compare la démarche de l'enfant à celle d'un "automate" qui saurait convenablement faire fonctionner ces outils et appelle erreurs ce qui, dans la démarche de l'enfant, est en contradiction avec celles possibles de l'automate. Très souvent, la reconnaissance de l'erreur est associée à la reconnaissance du chapitre ou de la notion de mathématiques concernés... (\*)

2/ Certains maîtres essayent de préciser leur analyse en ne se contentant pas de rapporter chaque erreur au chapitre de mathématique concerné, mais, à partir d'une conception des différents types d'activités mis en jeu dans la tâche mathématique à effectuer, en situant l'erreur par rapport à cette typologie... (\*\*)

*Ce type d'analyse n'est pas toujours facile, car toute erreur met en cause le rapport du sujet à la situation, et une méconnaissance de ce rapport peut conduire à un diagnostic faux, qui ne permette pas aux maîtres d'aider les enfants à surmonter les erreurs.*

#### B - L'attitude du maître face aux erreurs de l'élève

Les attitudes des maîtres face aux erreurs de leurs élèves sont diverses et très rarement explicitées par eux. Il me semble qu'une étude sur ce sujet devrait faire ressortir les éléments suivants :

1/ L'attitude du maître n'est pas la même s'il a l'impression que l'erreur de l'enfant est aléatoire ou bien reproductible.

Le maître considère que l'erreur est aléatoire s'il pense que, devant une même situation, l'enfant a de grandes chances de ne pas faire d'erreur ; qu'elle est

.../...

---

(\*) exemple : "numération"

(\*\*) exemple : "inattention"

reproductible, si, au contraire, il a de grandes chances de faire une erreur. Dans le premier cas, le maître ne remet pas en cause sa pédagogie, il attribue l'erreur à la fatigue, au défaut de soin, à l'inattention de l'enfant. Dans le deuxième cas, les réactions peuvent être très différentes suivant les personnes...

2/ L'attitude du maître peut dépendre de l'impression qu'il a que l'erreur de l'enfant est isolée ou bien liée<sup>(\*)</sup>. L'erreur peut être considérée comme l'indice d'une incompréhension profonde d'un secteur assez vaste de connaissances (erreur liée) ou considérée seulement comme isolée. Cette distinction est en rapport avec la notion d'obstacle épistémologique, notion à laquelle il est fait allusion à la fin de ce travail....*et qui est développée dans un texte de G. BROUSSEAU.*

### 3/ Quelques exemples d'attitudes de maîtres

Les remarques suivantes sont très générales, elles s'appuient sur des impressions dégagées lors de discussions informelles avec des maîtres et non sur un travail objectif qu'il serait nécessaire de faire :

a) Il semble que jusqu'à une époque assez récente, les erreurs étaient systématiquement refusées par les maîtres qui ne voulaient pas le voir. Ainsi, récemment, au cours d'une discussion à propos du calcul mental, un maître de CM a expliqué qu'il ne faisait expliciter leurs calculs qu'aux enfants qui avaient obtenu le bon résultat, ne voyant pas l'utilité de montrer aux autres enfants des démarches qui n'avaient pas abouti. C'est-à-dire qu'à aucun moment, les élèves de ce maître n'ont la possibilité d'analyser en terme d'erreurs leurs échecs. Dans ce type de pédagogie, faire une erreur c'est ne pas reconnaître une structure ou un objet déjà présenté. L'enfant n'a pas le moyen de savoir s'il est trompé sauf s'il maîtrise absolument la structure. Le maître ne revient pas sur les erreurs, mais si leur nombre est assez

.. / ...

---

(\*) A d'autres

élevé pour l'inquiéter, il recommence son enseignement en pensant que la répétition va permettre l'apprentissage. L'analyse et la critique de cette pédagogie ont été faites par AEBLI dans "Didactique psychologique" au chapitre 1. La psychologie empiriste sur laquelle elle s'appuie, n'accorde aucune place à l'erreur, qui n'a pas de fonction dans l'apprentissage. L'erreur est donc annulée, elle n'existe pas, elle est seulement l'indice de l'échec.

b) Actuellement, une tendance différente se dessine, à la faveur du développement des méthodes actives.

*H. AEBLI, dans "Didactique psychologique" les décrit en montrant en quoi elles peuvent s'appuyer sur les travaux de PIAGET...*

Un nombre assez important de maîtres essayent de mettre en oeuvre ces méthodes dans leur classe. Chaque groupe, ou chaque enfant qui a trouvé une solution différente de celles déjà exposées, vient expliquer ce qu'il a fait, sa solution est discutée et critiquée par les camarades ou le maître ; il est possible que, dans la majorité des cas, les enfants ayant fait des erreurs les comprennent et sachent pourquoi leur solution ne convient pas ; mais ni AEBLI, ni les maîtres qui pratiquent cette forme de pédagogie, n'explicitent comment l'enfant peut surmonter son erreur. Il semble que, de manière quasi-magique, il lui suffit de voir comment d'autres ont travaillé ou ce qu'ils disent sur son propre travail, pour être convaincu que l'échec, qu'il constate par son rapport aux autres, est attribuable à telle ou telle erreur qu'il sait circonscrire.

Toutefois, H. AEBLI a bien conscience de l'insuffisance de ce travail de recherche pour un apprentissage effectif, par tous les enfants, de la notion envisagée. Aussi il propose "de faire succéder à la recherche ou à l'élaboration collective d'une nouvelle notion ou opération, des leçons

..../

au cours desquelles l'acte intellectuel qui vient d'être introduit est repensé sous une forme encore significative et ne permettant à aucun de se tirer d'affaire par un procédé mécanique..."

Il appelle exercice opératoire ce genre de situations. Il semble bien que dans sa pensée, ce soit à ce moment-là, que les enfants aient l'occasion de corriger leurs erreurs, non par référence à une règle découverte précédemment, mais dans leur activité même. Or, l'observation d'un certain nombre de classes, dont les maîtres affirment pratiquer une pédagogie active, me conduit à penser que les découvertes faites par quelques enfants sont rarement remises en oeuvre dans les activités opératoires, comme le propose AEBLI, mais "appliquées" par l'ensemble des enfants, qui n'ont pas ainsi l'occasion de s'approprier la démarche des "découvreurs".

c) Les recherches menées depuis un certain nombre d'années à l'IREM de Bordeaux ont abouti à la constitution d'une démarche pédagogique qui, pour l'instant, s'applique à une partie seulement de l'apprentissage mathématique proposé à l'école primaire ; cette démarche a été exposée par G.BROUSSEAU dans "le processus de mathématisation" et illustrée et étudiée par de nombreuses recherches, en particulier sur l'apprentissage du calcul numérique.

Elle est basée sur l'utilisation, dans la construction par le maître des situations pédagogiques, de trois types de processus dialectiques (dialectique de l'action, dialectique de la formulation et dialectique de la validation), processus dans lesquels l'échec joue un rôle essentiel comme moteur de l'action et de la réflexion : c'est en affrontant l'échec que l'enfant va être conduit à modifier ses moyens d'approche de la situation, à "créer et éprouver un comportement, un modèle mental, un langage ou une théorie".

.../...

L'erreur surmontée a alors un rôle fondamental dans l'apprentissage et la connaissance, que nous analyserons plus en détail dans "l'erreur du point de vue de l'enfant"

Nous ne sommes pas encore parvenus à définir convenablement l'attitude du maître, face aux erreurs de ses élèves, dans ce genre de situations. Si le modèle théorique proposé par G.BROUSSEAU fonctionne convenablement dans quelques cas (la course à vingt...) le maître étant seulement l'organisateur de la situation pédagogique, d'autres facteurs qui portent en particulier sur le partage par les enfants du projet pédagogique du maître, le degré d'investissement des enfants et du maître au cours de la situation, le fonctionnement des équipes, c'est-à-dire, en fin de compte, sur la façon dont chacun se sent concerné par le travail de la classe, font que les maîtres doivent souvent recourir à la "correction" traditionnelle du travail pour s'assurer que tous les enfants ont bien reconnu leurs erreurs...

## II/ L'ERREUR, DU POINT DE VUE DE L'ENFANT

*Dégager le rôle de l'erreur dans l'apprentissage, c'est tenter de réfléchir sur ce que seront les comportements de l'enfant face à son échec.*

Toutefois, nous ne pouvons étudier cette question sans faire allusion à la relation qui existe entre la manière dont le maître sanctionne l'erreur, et celle dont l'enfant la vit et peut la surmonter. Dans une classe où toute erreur est considérée comme quelque chose d'anormal ou comme une faute, où le maître ridiculise celui qui s'est trompé, une telle angoisse peut se développer chez certains enfants. Alors que le rôle positif de l'échec serait un retour sur l'action pour comprendre pourquoi elle n'a pas "marché", devient la recherche de recettes sécurisantes et ceci même si le maître a comme projet explicite d'utiliser les erreurs de ses élèves pour une amélioration de son enseignement.

.../...

Il nous faut d'abord faire une remarque : l'enfant appréhende la réalité avec un certain modèle, complexe, dans lequel interviennent aussi bien les données "objectives" de la situation que les données "subjectives" comme les raisons qu'il a des'intéresser à ce travail, l'image qu'il se fait de ce qu'attend le maître, en particulier, à propos des erreurs qu'il peut faire, son histoire antérieure vis-à-vis des mathématiques, les outils dont il dispose à ce moment, etc... Le rôle que jouent les erreurs pour lui est donc fonction de tous ces facteurs, qu'il faudrait pouvoir étudier de plus près pour pouvoir dire quelque chose de chaque enfant. Mais on peut penser qu'il existe des façons de réagir à l'erreur, d'une part communes à un assez grand nombre de personnes, d'autre part suffisamment différenciées, et qu'il doit être possible de les repérer et de cerner les conditions qui correspondent à ces divers comportements.

Nous allons essayer d'en dégager quelques-uns, en les reliant aux diverses attitudes pédagogiques des maîtres relevées précédemment.

1) Un premier comportement, beaucoup plus fréquent qu'on ne le pense et souvent négligé, est la non-réponse. L'enfant est en situation d'échec, mais l'analyse en terme d'erreurs n'est pas possible, ni par le maître, ni moins encore, par lui-même.

2) Un deuxième comportement est le "n'importe quoi". Il peut y avoir au moins deux sortes de "n'importe quoi" :

. ou bien une réponse de l'enfant proche de la non-réponse ; en faisant n'importe quoi, il n'affronte pas l'échec, mais l'esquive.

. ou bien une réponse qui, significative pour l'enfant, n'entre pas dans les possibilités d'interprétation de l'observateur. Il semble qu'un dialogue confiant avec l'enfant qui a ce type de comportement permette de distinguer ces deux cas.

.../...



Il serait intéressant de chercher si ces attitudes sont seulement le fait d'une certaine catégorie d'enfants, ou si des conditions didactiques particulières, comme le degré d'incertitude du sujet, l'absence de motivations réelles, la favorisent. Il serait particulièrement intéressant d'étudier comment le maître réagit à ces comportements, et comment l'enfant arrive à les dépasser...

3) Quelle que soit la pédagogie du maître, un problème fondamental doit être élucidé : en quoi la connaissance par l'enfant de son échec le conduit-il à une modification du modèle qu'il utilise face à une certaine situation ?

La réponse à cette question, elle, dépend fortement, je crois, du type de pédagogie dans laquelle est situé l'enfant. Mais il faudrait une étude très précise pour l'établir.

a) H. AEBLI examine dans le chapitre "l'habitude et l'opération" de "didactique psychologique", le genre d'erreurs faites par les enfants en situation didactiques "traditionnelles". La non-compréhension par l'enfant de ce qu'il fait, l'impossibilité d'une attitude réflexive sur son activité le conduisent à l'élaboration "d'habitudes", qui fonctionnent comme des réflexes conditionnés et où il n'a pas le moyen de repérer ses erreurs...

b) L'utilisation de situations pédagogiques où des processus dialectiques sont mis en jeu, permet d'observer des apprentissages dans lesquels l'échec peut être analysé en termes d'erreurs par les enfants, puis les erreurs surmontées et oubliées en fin de processus (la course à vingt en est l'exemple le plus frappant. Mais il y en a d'autres comme le jeu de Kim, le jeu du petit cheval, les probabilités, etc...) Pour que cette démarche fonctionne convenablement, plusieurs conditions sont nécessaires (la liste qui suit n'est pas exhaustive).

- Chaque enfant se sent concerné par le projet du maître.

- Le problème posé est bien élucidé par tous, sa résolution ne peut se faire, comme le demande AEBLI, sans une activité réelle des enfants.

.../...

- La situation permet aux enfants de se rendre compte de leur échec, dans un premier temps tout au moins (dialectique de l'action, et dialectique de la formulation où l'échec apparaît dans l'inefficacité de la communication). En effet, la rareté d'occasions d'erreurs corrigibles conduit l'enfant à une mauvaise interprétation du sens de son action.

- La pertinence de la validation peut être expérimentée par l'action. Ainsi, dans la course à vingt, l'enfant qui dit "si je dis 15, je gagne" peut expérimenter l'échec de cette conduite, donc remettre en cause ce qui la justifiait à ses yeux (il a plusieurs fois gagné en jouant 16, ou il compte sur l'erreur de l'adversaire) et découvrir l'erreur de son raisonnement.

Des analyses menées à l'IREM ces dernières années, ont permis de mettre en relief certains aspects du fonctionnement de l'erreur dans les processus d'apprentissage répondant aux conditions précédentes : ainsi:- dans "l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication au CE1" (cahier de l'IREM n°16), l'analyse a montré que devant la complexité et le nombre important d'occasions d'erreurs engendré par un découpage irrégulier, les enfants évoluaient peu à peu vers un découpage régulier, contenant le plus possible de morceaux du type 10x10.

- Dans "Construction de formules au CP dans  $N^+$ " (cahier de l'IREM n°13), les analyses, tendant à montrer que les enfants qui échouent en employant une certaine stratégie en changent plus facilement que ceux qui réussissent, n'ont pas abouti faute d'un nombre suffisant d'enfants. Mais cette tendance se dégage, surtout de la première leçon.

- Dans "Etudes sur l'apprentissage du calcul numérique au CE" (cahier de l'IREM n°13), l'analyse qui porte sur l'influence de la correction sur les résultats aux exercices de mathématiques", peut montrer a contrario, qu'une découverte de leurs erreurs par les enfants, a posteriori, découverte qui ne conditionne pas directement leur travail, n'est pas décisive pour l'amélioration de l'apprentissage...

.../..

Il faudrait une étude centrée directement sur la différence de traitement des erreurs dans des situations où leur régulation est possible et dans d'autres où elle ne l'est pas, pour pouvoir aller un peu plus loin dans l'analyse du rôle des erreurs dans l'apprentissage, du point de vue de l'enfant...

c) Dans cette perspective, aussi bien pour comprendre le rôle de l'erreur dans l'apprentissage que pour l'utiliser à des fins didactiques, la notion d'obstacle épistémologique est fondamentale : l'erreur prend une signification particulièrement intéressante quand elle est prise par l'élève comme l'indice d'une contradiction dont la solution l'oblige à rejeter une connaissance antérieure. Dans ce cas, l'erreur est la manifestation d'un obstacle particulier dans la constitution des connaissances de l'élève, que nous appellerons obstacle épistémologique, en référence avec l'idée de BACHELARD que ce phénomène se présente de façon comparable "dans le développement historique de la pensée scientifique et dans la pratique de l'éducation". Chaque obstacle épistémologique va déterminer tout un ensemble d'erreurs liées au modèle à rejeter...

En conclusion, nous voyons que la distinction échec-erreur faite au départ peut être féconde pour caractériser :

. L'utilisation que le maître fait de ce qu'il appelle les erreurs de ses élèves : un symptôme de leur échec ou une étape dans l'apprentissage.

. La façon dont les enfants sont capables, au cours de processus appropriés, de transformer leurs échecs en erreurs, c'est-à-dire de passer de l'utilisation de modèles inadéquats à ceux qui leur donnent prise sur la situation et ainsi de construire les outils mathématiques essentiels.

Marie-Hélène SALIN

Septembre 1978

.../...

INTRODUCTION A LA PARTIE I

ACTIVITES PRELIMINAIRE ?

Faut-il prévoir au C.E.1, des activités préliminaires à l'étude de la multiplication ?

Les études théoriques sur les "situations fondamentales" nous amènent à décomposer cette question comme suit :

- de quelles connaissances l'élève doit-il disposer pour entrer dans le problème posé, pour envisager des tentatives de solutions ?
- de quelles connaissances doit-il disposer pour transformer l'échec de ses tentatives en informations utilisables pour en concevoir d'autres plus appropriées ?

La réponse apportée à ces questions est niée à la compréhension par les élèves des problèmes qui vont leur être posés.

Les élèves vont être confrontés au difficile problème du dénombrement de grandes collections (de 200 à 800 objets); il faudra qu'ils puissent contrôler le nombre d'éléments de collections à l'aide des techniques de désignation de nombres dont ils disposent déjà (sommes, numération décimale). Or<sup>(1)</sup> il a été montré que seuls 40 % des élèves de C.E.1. sachant compter et utilisant le comptage comme méthode de dénombrement, réussissent à constituer une collection de 37 jetons (équipotente à une collection témoin de 37 jetons d'une autre couleur) en puisant dans une boîte qui en contient 45 !

...../...

---

(1) Bessot-Comiti-Pariselle (1980) Recherches en Didactique des Mathématiques Vol.1.2.

On peut donc penser que ceux qui ne sont pas capables d'associer dénombrement effectif et désignation des nombres vont être les premiers à "décrocher" de ce processus d'apprentissage qui va durer plusieurs mois. Incapables de se poser le problème, ils vont se réfugier dans la recherche de procédés mécaniques, pour eux coupés de la connaissance des conditions de leur emploi et dont par conséquent, ils ne pourront maîtriser l'évolution. Comme procédures intermédiaires, le travail de ces élèves va être à la fois considérable et peu efficace : ils n'auront pas le temps de rentabiliser leurs apprentissages ; ils vont donc se décourager, alourdir progressivement la conduite de la classe, répondre "n'importe quoi", tout en restant imperméables aux explications du maître basée sur un rapport de prise en charge de la situation.

Le maître risque alors d'être conduit malgré lui à indiquer d'une façon ou d'une autre les procédures efficaces....et l'ensemble des élèves à attendre qu'il les indique !

On aura ainsi vidé la progression de son sens ; et si on n'y prend garde, la classe peut devenir un théâtre où un simulacre d'activité intellectuelle qui se substitue progressivement à la confrontation avec la situation-problème !

Les activités préliminaires les plus essentielles seront donc celles que l'on consacra à résoudre des situations de dénombrement, conduisant les élèves à choisir le procédé (correspondance terme à terme, comptage, sommes, groupements par 10) le plus approprié à contrôler le nombre d'objets selon la situation. Le document Maths-C.P. fournit un certain nombre d'exemples de ces situations.

#### PRESENTATION DES ACTIVITES

La leçon I-1 met en scène le problème du contrôle du nombre d'objets d'une collection disposée en tableau, dans une situation de communication.

A la fin de cette leçon, les élèves peuvent prendre en charge le problème posé, et envisager différentes solutions.

La leçon I-2 amène les élèves à choisir une solution adaptée, rapide et fiable au nombre d'objets dans le problème posé à la séance précédente.

Il s'agit de désignation par le nombre de lignes et le nombre d'éléments par ligne (ou nombre de colonnes).

La leçon I-3 institutionnalise ce choix, c'est-à-dire établit un premier point entre le vécu et le savoir culturel, introduit le signe mathématique et de la multiplication, pour désigner les "nombres rectangulaires". "axb" va donc se substituer à "a lignes de b" et aux autres formulations semblables.

La signification attachée au signe "x" dans la classe n'est cependant qu'une partie de la signification culturelle de ce signe :

- elle correspond à une énumération de "lignes équipotentes"

- sa pertinence n'est attachée pour l'instant qu'à des situations de communication, sans aucun calcul. Ce n'est qu'au niveau de la partie V que la multiplication constituera un outil de calcul dont la mise en oeuvre va être dégagée du contrôle utilisant la situation de dénombrement particulière dans laquelle cet outil est élaboré.

Les deux dernières leçons ont pour objectif d'explorer les possibilités qu'apporte la nouvelle écriture pour désigner des nombres bien connus parce qu'inférieurs à 50. On donne ainsi à chacun le temps de se familiariser avec cette nouvelle méthode de désignation de nombres.

En partie I-4, nous proposons un contrôle individuel, qui permet au maître (et à l'élève) de faire le point sur les connaissances indispensables à la poursuite de la progression : incapacité de distinguer "a+b" de "axb" dans les activités de désignation de nombres (codage et décodage).

C'est pourquoi il est vain, et non cohérent avec les séances qui précèdent, d'espérer dès maintenant obtenir l'usage des désignations multiplicatives dans les "problèmes usuels" qui sont des problèmes de calcul ! Les situations de calculs ne pouvant appeler que des outils de calcul.

I-1 DÉSIGNATION DU NOMBRE D'OBJETS  
D'UNE COLLECTION DISPOSÉE EN  
TABLEAU

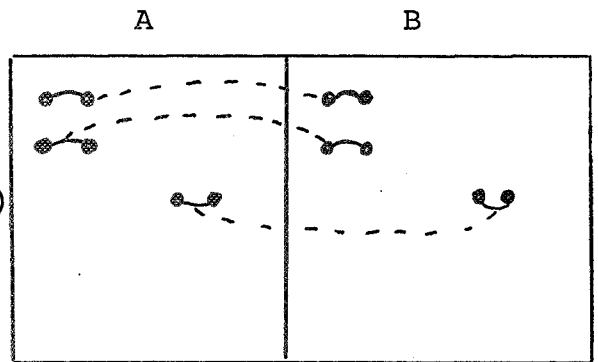
1 à 2 séances

Comportement attendu :

Etre capable de constituer une collection équipotente<sup>(1)</sup> à une collection donnée d'une centaine d'éléments, disposée en tableau, en utilisant un message intermédiaire.

• Organisation de la classe (Voir variante en fin de fiche)

Le maître partage la classe en deux groupes de même effectif A et B ; dans chaque groupe, les élèves sont en équipe de deux (2) chaque équipe va être appariée par le maître à une équipe de l'autre groupe.



Matériel :

Pour chaque équipe et chaque "jeu" :

- une collection d'étoiles disposée en tableau (8x14 pour le groupe A et 9x13 pour le groupe B)
- une bande de papier pour écrire un message
- une feuille de papier blanc pour produire une collection équipotente à celle des émetteurs.

.../...

(1) Deux collections sont équipotentes quand elles ont le même nombre d'objets.

Etre capable de constituer une collection équipotente à une collection implique évidemment le souci de s'assurer qu'aucun objet n'a été oublié. Ceci n'est pas une nouveauté pour les élèves (du moins si les activités "préliminaires ont été conduites). Ce qui est nouveau c'est que les moyens connus de s'en assurer, efficaces dans les situations rencontrées jusque là, ne vont plus l'être.

(2) Les tâches qui vont être confiées aux élèves pour provoquer le besoin d'un nouveau savoir, sont d'une certaine complexité. C'est pour cela qu'ils seront par deux. La responsabilité de la réalisation d'une tâche même complexe, doit cependant pouvoir être assurée par les élèves auxquels elle incombe.

Pour assumer une telle responsabilité, il est nécessaire que les élèves puissent exercer un certain contrôle sur la réalisation de leur tâche.



Déroulement (Cf. Variante possible fin de fiche)

Le maître organise sa classe en deux groupes ; dans chaque groupe, il distribue à chaque équipe le matériel du premier jeu et présente l'activité.

1ère phase : Constitution et envoi des messages (3)

Consigne :

*."Vous avez reçu une collection d'étoiles; vos camarades de l'autre groupe aussi, mais le nombre d'étoiles n'est pas le même dans un groupe et dans l'autre.*

*. Il faut maintenant que chaque équipe dessine rapidement une collection qui ait le même nombre d'étoiles que les camarades de l'autre groupe".*

*."Vous croyez que c'est possible ?..."*

*."Pour pouvoir le faire, chaque équipe de deux va écrire sur la bande un message (sans dessin) et l'envoyer à une équipe de l'autre groupe".*

Quand les messages sont écrits, et avant l'échange, le maître fait ranger les collections dans le casier (jusqu'à la vérification).

Il organise l'échange en appariant les équipes.

2ème phase : Constitution des collections

Consigne :

*"Vous vous servez du message pour dessiner autant d'objets que votre correspondant en a sur son dessin".*

Si le récepteur ne comprend pas le message, il le retourne à l'émetteur, avec commentaire et/ou demande de renseignements.

.../...

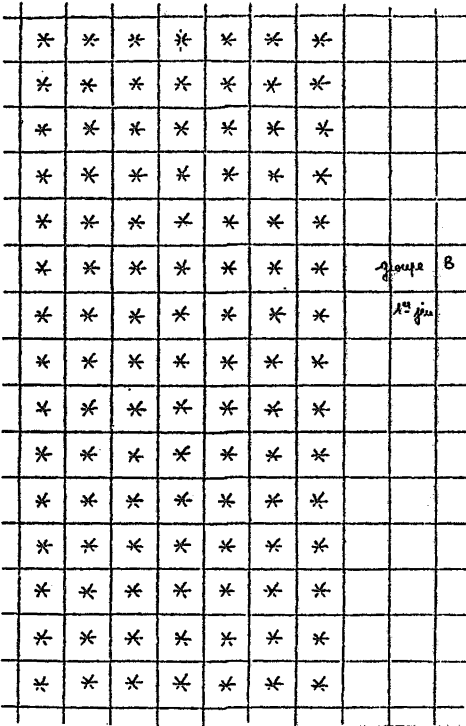
(3) Pendant la réalisation du message, l'activité du maître consiste à s'assurer que le problème est efficacement pris en charge par chaque équipe, que chacun sait à quoi va être utilisé le message produit (correct ou non, le maître n'a pas à prendre position là dessus).

Ceci sera rendu plus facile si la consigne a été quelque peu "mise en scène" pour faire sentir la nécessité d'un message.

.../...

---

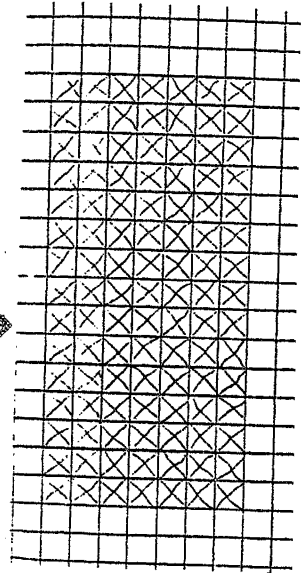




Nom : a  
 Groupe B B  
 jeu n° 1

une ligne de sept  
 15 lignes de sept

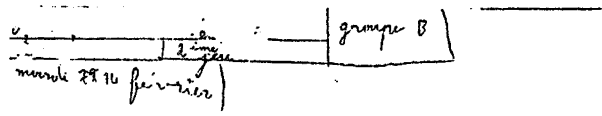
message de  
 l'émetteur



réalisation  
 du récepteur

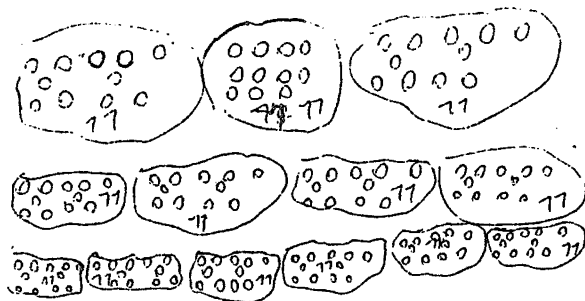
collection fournie  
 par le maître

Un message qui donne une réalisation différente



veut ~~transmettre~~ 11 croix en ligne 13 en colonne.

v. et m. envoyée c. de



3ème phase : Vérification

Consigne :

"La collection initiale et la collection dessinée par vos camarades ont-elles autant d'objets ?" (4)

Le maître organise l'échange des dessins (accompagnés du message) et surveille la vérification par rapport à la collection initiale.

4ème phase : Echange collectif (5)

Le maître prend acte collectivement des réussites et des échecs. Il organise ensuite un échange sur la constitution des messages : NOUS ALLONS RECOMMENCER A LA PROCHAINE SEANCE? IL FAUDRA ALLER PLUS VITE ET SANS SE TROMPER !

- QUI PENSE GARDER LE MEME GENRE DE MESSAGE ?

*Pourquoi ?*

- QUI PENSE CHANGER DE GENRE DE MESSAGE ?

*Pourquoi ?*

Au cours de ces échanges, le maître aide à l'expression des avis, sans perdre parti.

.../...

(4) Le rôle du maître est ici de s'assurer que cette vérification a été bien faite, c'est-à-dire que l'accord ou le désaccord ne sont pas déclarés sur d'autres critères que la validité de l'équipotence entre collections de départ et d'arrivée. Ceci est à différencier de la vérification du bon accomplissement de la tâche de chacun des groupes (inutile en cas de succès).

Cela lui sera d'autant plus facile qu'il aura mis en scène la consigne, et qu'il aura repéré les erreurs au cours des précédentes phases.

Il faut séparer l'accord sur la constatation de la non équipotence des deux collections, d'un éventuel désaccord au niveau de l'imputation à l'une ou l'autre équipe de la responsabilité de l'échec. Si un tel désaccord ne peut se résoudre au sein des deux équipes appariées, il sera porté devant la classe lors de la phase suivante.

(5) Cette phase a pour objet de permettre à chacun de faire le point et d'assumer intelligemment les responsabilités que le maître lui a déléguées sur le choix des méthodes.

Si le maître donne son avis sur les raisons de l'échec, sur la forme des messages qu'il attend, les élèves risquent de ne plus s'impliquer à ce niveau. Le contrat didactique aura été modifié par la signification des séances suivantes (cf. page 10 C et page 16).

Résultats :

Certains élèves comptent les objets 1 à 1.

Exemple de message : "90". D'autres écrivent des messages du type : "8 lignes de 13 dessins" D'autres messages additifs. L'écriture usuelle est reconnue plus longue à produire et à utiliser, et aussi moins sûre.

VARIANTES DU DÉROULEMENT

1. Il importe que les enfants travaillent sur les nombres et non sur les dispositions. Pour certaines classes, il sera utile de remplacer le dessin par la constitution de collections de jetons.

2. Les échanges simultanés peuvent être difficiles à mener ; ils permettent de multiplier les confrontations de chaque élève à la situation. On peut cependant organiser la classe autrement : pendant le 1er jeu, A est émetteur et B est récepteur ; au 2ème jeu, on inverse les rôles ; le maître prévoit d'occuper les élèves qui attendent.

Ce n'est que lorsque chacun se sera confronté aux rôles d'émetteur et de récepteur qu'un échange collectif sera fructueux (6).

(6) Si l'échange est réalisé avant que chacun soit passé dans les deux rôles (émetteur et récepteur), certains n'auront pas la capacité de se représenter mentalement les problèmes posés par l'activité qu'ils n'ont pas réalisée ; ils ne pourront exercer aucun contrôle sur les propositions émises, ne pourront que soit les ignorer, soit les accepter par argument d'autorité.

.../...



I-2 DÉSIGNATION DE PRODUITS

Durée : 1 séance

Comportements attendus

Savoir choisir (1) et utiliser le nombre de lignes et le nombre d'éléments par lignes (ou le nombre de colonnes) pour communiquer le nombre d'éléments d'une collection disposée au tableau.

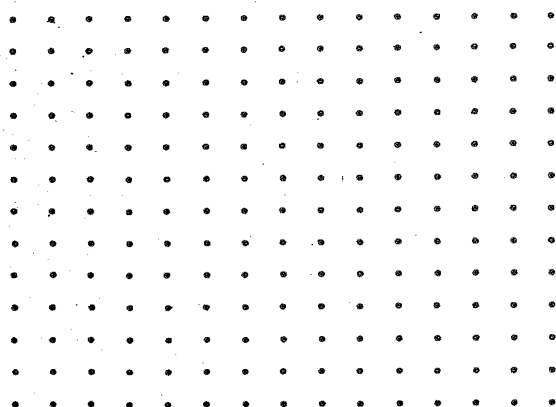
MATERIEL :

Emetteurs et récepteurs disposeront de feuilles de papier quadrillé de même trame (pour permettre une vérification rapide).

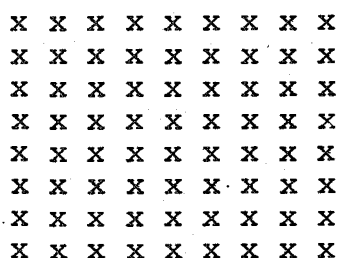
. Les 17 récepteurs disposeront de feuilles ayant plus de 15 x 17 objets dessinés (ces feuilles sont disposées sur leurs tables).

. Les émetteurs disposeront chacun d'une pile de feuille ayant chacune respectivement 7 x 9 ; 13 x 15 ; 11 x 9 ; 7 x 13 ; 11 x 13. Les piles seront constituées dans des ordres différents pour chaque émetteur afin d'être sûr qu'ils n'auront pas le même message à envoyer en même temps.

Exemple de feuille récepteur



Exemple de feuille émetteur



(1) Choisir implique pouvoir envisager plusieurs possibilités ; ces possibilités ont été pour la plupart explicitées dans la séance précédente.

Cela implique aussi de décider de l'une d'elles parce qu'elle va permettre de mieux atteindre l'objectif visé.

Apprendre à choisir, cela implique aussi de pouvoir se tromper, pouvoir se rendre compte de ses erreurs, avoir l'occasion et les moyens de corriger son choix.

Déroulement :

La classe est partagée en équipes. Le maître rappelle : "aujourd'hui nous allons faire une course entre équipes, mais il ne sert à rien d'aller vite si on se trompe" (2).

Le tableau est partagé en autant de bandes verticales que d'équipes ; chaque équipe s'en voit attribuer une et envoie un émetteur au tableau (3).

Consigne :

*"L'émetteur de votre équipe va recevoir une collection de croix dessinées. Le reste de l'équipe devra lui envoyer juste autant de ronds que l'émetteur a de croix dans sa collection. La collection de ronds sera découpée dans les feuilles que vous avez sur les tables. L'émetteur peut seulement renvoyer un message à son équipe en écrivant au tableau".*

Au signal, chaque émetteur retourne la première collection qui est sur sa pile et la course commence. Au bout de 5 minutes maximum, le maître arrête l'activité, renvoie les émetteurs et dirige la vérification collective des réalisations de chaque équipe (mise en garde sur les lignes et sur les colonnes de la collection de l'émetteur et de celle envoyée par son équipe ou superposition) ; en cas d'erreur recherche de la cause de cette erreur, ceux qui ont réussi gagnent un point ; le premier parmi eux gagne un point de plus.

Le maître organise 2 minutes d'échanges à l'intérieur des équipes pour que chacun donne son avis sur la meilleure façon de gagner.

Chaque équipe désigne un nouvel émetteur et le jeu reprend sur le même modèle au moins jusqu'à ce que chacun soit passé dans ce rôle.

(2) Pourquoi une course ? Parce qu'elle réalise des conditions stimulantes, et dans lesquelles le savoir visé par le maître se dégage comme le mieux adapté (tant pour la réalisation que pour le contrôle exercé sur sa réalisation)

Pourquoi une course par équipes ? Pour permettre à chacun de se sentir, solidaire des autres, sans être démis de ses responsabilités individuelles, d'avoir l'occasion d'être interpellé légitimement par eux sur des bases rationnelles ; si les arguments ne convainquent pas, chacun peut éprouver expérimentalement le bien fondé des arguments.

(3) En organisant la communication à l'aide du tableau, on favorise la circulation des idées d'une équipe à l'autre.

A la fin de la séance, s'il reste 5 minutes et suffisamment de disponibilité aux élèves, le maître lancera la question : "Qui sait comment les adultes écrivent ces nombres ?"

Il récoltera les réponses et apportera bien entendu la bonne à moins qu'il ne renvoie les élèves à une enquête "à la maison".

Résultats :

Les messages se réduisent, vite, le comptage disparaît. On trouve par exemple :

9 de 7
--------

↓ → 11 7
-------------

7 lignes de 9
---------------

   (4)

- . Tous savent interpréter les différents types de message relatifs au nombre et
- . Tous savent écrire et interpréter les messages réduits du type "7 lignes de 9"

.../...

(4) En 1982, nous avons voulu pousser les enfants à abandonner dans leurs messages tout autre indication que les deux nombres (écrire seulement "7,9"). Cette exigence qui n'était plus justifiée par la situation a fait perdre à certains enfants le sens des écritures qu'ils manipulaient.

.../...

I-3 DÉSIGNATION DE PRODUITS  
SOUS LA FORME A X B

Durée : 4 séances

Comportement attendu

Savoir désigner le nombre d'objets d'une collection disposée en tableau par une écriture multiplicative de type "a x b". Savoir la distinguer de "a+b" (1)

Matériel :

. 1ère phase : quelques unes des collections utilisées dans les dernières courses et les désignations numériques disposées au tableau de façon à pouvoir ajouter d'autres désignations pour chaque nombre.

. 2ème phase : même matériel qu'à la séance précédente pour les récepteurs. Pour les émetteurs des collections disposées en rectangle, d'autres en tas équipotents, d'autres en 2 tas (pour éprouver la distinction a+b/axb). (2)

Déroulement :

1ère séance : phase 1 et début phase 2

2ème séance : fin de la phase 2 puis phase 3

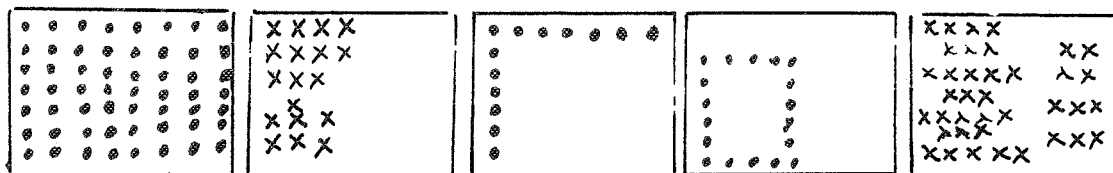
"Au cours des dernières séances, vous avez fabriqué des écritures très courtes pour de grands nombres. Les adultes écrivent des nombres presque comme vous, mais pas tout à fait : aujourd'hui, nous allons apprendre à utiliser à la place de vos écritures, celles des adultes"

.../...

(1) Il va tout de suite s'introduire une confusion avec le signe d'addition qui ne diffère du signe x que par son orientation dans l'espace.

S'il est indispensable de bien distinguer le signe par son orientation, il ne l'est pas moins de distinguer le type de dénombrement qui permet d'exprimer et de contrôler le nombre d'éléments d'une collection à l'aide d'un produit de celui (partition) qui permet d'exprimer et de contrôler le nombre par une somme.

(2) Exemple de matériel pour le groupe émetteur en phase 2



↑  
en plusieurs exemplaires, avec des nombres différents



Le maître écrit alors le premier nombre sous la forme multiplicative (exemple :  $7 \times 13$ ) et utilise les remarques des enfants pour dégager la différence d'écriture (avec  $7 + 13$ ) ainsi que la différence de sens (par exemple en faisant constituer au tableau une collection de  $7 + 13$  objets).

Le maître fait proposer par les enfants, sur leurs ardoises, l'écriture "adulte" des autres nombres, et corrige leur productions. (3)

2ème phase : Utilisation de l'écriture multiplicative " $axb$ " distinction de " $a + b$ " (4)

Le maître organise à nouveau le jeu de la séance précédente, avec une nouvelle règle

*"On écrit le nombre avec le signe  $x$  ou avec le signe  $+$  mais sans mots ni lettres"*

Durant le déroulement du jeu, le maître garde trace :

- . des erreurs de correspondance messages-collections,
- . des confusions entre les signes  $+$  et  $x$  et
- . des écritures du type  $7+7+7+7+7+7+7$ .

3ème phase : Synthèse

Le maître fait classer les collections selon qu'on en désigne et en contrôle le nombre par une somme ou par un produit.

Le cas des collections "en tas équipotents" qui relèvent des deux catégories permet d'introduire le problème de la séance suivante :

*"Pourrait-on écrire le nombre de toutes les collections sous forme d'un produit ?"*

(3) Résultat de la première séance :

La totalité des élèves désigne correctement le produit par son écriture "a x b"

Ceci ne signifie nullement, la 2ème phase va le montrer, que cette écriture est maîtrisée.

(4) On pourrait penser gagner du temps en poursuivant sur le mode d'exercice de la phase précédente : cela dépendra peut-être de la classe.

Il s'agit d'amener les élèves à décider eux-mêmes de choisir parmi les désignations additives ou multiplicatives celle qui convient au dénombrement la collection proposée, à concevoir l'importance des erreurs produites par une confusion.

**3ème séance**

Désignation de nombres (bien connus) par

des écritures de type "a x b "

. Le maître rappelle le problème posé à la fin de la séance précédente :

Certaines dispositions de collections rendent facile l'écriture et le contrôle de leur nombre par une écriture du genre  $7 \times 9$  , d'autres seulement par une écriture avec le signe + (le maître montre les dispositions correspondantes au fur et à mesure).

Nous allons chercher aujourd'hui, si en disposant bien des collections dont nous connaissons le nombre, on pourrait désigner ce nombre par des écritures du genre  $a \times b$  .

Le maître envoie un élève au tableau constituer une collection de 16 objets visible de tous.

Consigne : Vous savez bien comment vérifier qu'une collection a 16 objets en vous servant des écritures additives ? Le maître fait dire quelques décompositions :  $10+6$  ;  $8+8$  ;  $9+7$  ; ... qu'il écrit au tableau, et fait vérifier qu'il y en a bien 16, à partir d'une de ces écritures.

Maintenant, qui peut nous dire si on peut trouver une écriture multiplicative pour 16 ?

Le maître envoie au tableau les élèves qui pensent savoir, leur fait disposer la collection et écrire le produit correspondant sous le contrôle des autres. Si seul  $2 \times 8$  est trouvé, il proposera  $4 \times 4$  pour enrichir la recherche suivante.

Consigne :

"Vous pouvez désigner le nombre 12 (le maître écrit "12" au tableau) par des écritures multiplicatives ? Lesquelles ? Vous travaillez par quatre<sup>(1)</sup> ; lorsque vous serez d'accord, vous écrirez vos réponses sur la feuille. Si vous en avez besoin, vous pouvez prendre votre cahier de brouillon ou des jetons sur le bureau".

.../...

(1) Travailler par 4 a pour objet ici de permettre aux élèves de :

- manipuler mentalement car il n'y a pas assez d'objets pour que tous manipulent à la fois
- proposer le plus d'écritures multiplicatives possibles afin de se valoriser
- pouvoir accéder au matériel dans un temps raisonnable si besoin est (un groupe de deux permet de se satisfaire de  $6 \times 2$  et  $2 \times 6$ ).

.../...

Au bout de quelques minutes, tous les groupes ont trouvé un produit ; le maître encourage la recherche d'autres écritures de 12, puis organise la mise en commun.

Mise en commun :

Le maître collecte les différentes écritures au tableau, puis provoque la vérification collective par calcul mental (2).

Il accepte les écritures "inversées" (comme  $3 \times 4$  et  $4 \times 3$ ), ainsi que les écritures "banales" du type " $1 \times 12$ " (3) (4).

Le maître relance le travail de groupe sur d'autres nombres. Il peut par exemple proposer de diviser la classe en deux groupes, l'un travaillant sur 18, l'autre sur 20.

Le maître fait vérifier les propositions de chaque groupe comme ci-dessus (par calcul mental).

(2) La quatrième situation conduit les élèves, pour faire connaître leur apport à considérer les écritures telles que  $3 \times 4$  comme de  $4 \times 3$ , tout en explicitant qu'elles correspondent à la même disposition, mais en "tournant la collection"

(3) Le fait de trouver ces écritures ne justifie pas le développement particulier. La propriété mathématique qu'à "1" d'être élément neutre de la multiplication n'a aucun intérêt à l'école primaire ; la commutativité va être intéressante en calcul mental, notamment pour calculer des nombres comme 10 ou 20 fois 7. C'est quand les élèves se poseront de tels problèmes que l'explicitation de cette propriété prendra un sens.

(4) Il n'est pas question à ce niveau de prouver qu'on a toutes les décompositions. La quatrième séance permettra de faire avancer cette question.

4ème séance

Elle se déroule sur le modèle de la séance précédente, mais le maître va créer un problème nouveau en proposant de désigner 17 par exemple.

Avant d'intervenir et de lancer l'échange collectif le maître incite chaque groupe à s'assurer qu'ils ont "tout" essayé.

L'incapacité générale (et pour cause) à trouver une écriture multiplicative de 17 est le moteur d'un échange sur "comment être sûr qu'il n'y a pas de solution"

Cet échange débouche sur l'explicitation d'une méthode :

- on essaie avec deux lignes; si on en met 8 par ligne, il en reste 1; si on en met 9, il en manque 1.

Le maître peut proposer d'écrire  $17 = (2 \times 8) + 1$

- on essaie avec 3 lignes.... (5)

Le maître peut alors proposer à chaque groupe de choisir un nombre entre 20 et 40, et de chercher comment on pourrait disposer une collection qui aurait ce nombre d'objets pour le contrôler par des écritures multiplicatives, en laissant la possibilité d'écritures mixtes.

La vérification collective est l'occasion d'un bon exercice de calcul mental pour tous.

Résultats :

Certains élèves réinvestissent la méthode de recherche systématique. Tous sont capables de vérifier la validité d'une proposition.

La plupart est capable de trouver une écriture non banale lorsque le nombre proposé est pair. .... / ....

(5) On pourrait trouver là une occasion d'utiliser la commutativité en demandant de chercher par calcul mental ; il y a deux méthodes : \* essai de résolution de  $17=2 \times ?$  l'on essaie de substituer des nombres à "?", \* ou compter 2 par 2 pour savoir si c'est possible etc..! Mais peu d'enfants suivraient en C.E.1. Aussi, c'est au C.E.2. que nous proposerons ce travail en calcul mental.



I-4 CONTRÔLE

Comportements attendus

① Evaluer les compétences de chacun quant au décodage et encodage d'un nombre sous la forme " $a \times b$ "<sup>(1)</sup>. Le contrôle ne vise que ce qui est strictement indispensable à la suite, et non les compétences à résoudre des équations comme en I-4. C'est ce qui explique que certains comportements obtenus soient seulement observés et non suivis de décisions de "soutien".

Les activités I-4 avaient pour objet essentiel de permettre aux plus lents de rattrapper les autres sur ces compétences de base, et de provoquer les plus agiles à aller plus loin.

② Déterminer avec quels élèves le maître reprendra en "soutien" des activités du type I-3<sup>(2)</sup>.

Le maître proposera aux élèves des activités du type I-3 : 3ème et 4ème séance. Il organisera avec eux une synthèse critique des procédés utilisés.

.../...



Exploitation

- 1 : La réponse essentielle explicitée est 6 x 6 ; entourer 11 x 6 manifeste un besoin de "soutien"
- 2 : Entourer 5 x 5 et surtout 7 + 5 manifeste un besoin de "soutien"
- 3 : Entourer 8 x 8 manifeste un besoin de "soutien"
- 4 : Colorier un nombre égal à (ou proche de) 13, 14, 26, ou tous les carreaux ou le pourtour du carré manifeste un besoin de "soutien".

Les erreurs de quelques unités dans les exercices 4 et 5 renvoient à une nouvelle réalisation plus soignée d'exercices du même type.

Lorsque plus personne n'échoue, au sens précisé ci-dessus (1,2,3,4,5), le maître peut aborder la partie n°II.

INTRODUCTION A LA PARTIE II  
(ÉLABORATION D'UNE NOUVELLE MÉTHODE DE DÉNOMBREMENT)

La séance II-1 a pour objet d'introduire les nombres relativement grands (voisins de 250 par exemple) connus par une écriture multiplicative dans un problème de comparaison qui ne pourra être complètement résolu qu'à l'aide de l'écriture usuelle.

Les 3 séances (1) II-2 ont pour objet de munir les élèves de C.E.1. d'une stratégie de base pour aborder la situation-problème posée en partie III.

1) L'objectif de la première séance est de II.2 est en fait de convenir de ce qu'est un découpage d'une collection selon un répertoire pour en calculer le nombre.

En effet, on ne peut attendre des élèves de C.E.1. qu'ils retiennent et mettent en oeuvre convenablement en une séance tous les élèves nouveaux suivants :

- La concentration sur l'écriture usuelle, plus ou moins dévalorisée jusqu'ici (la phase 3 de la leçon précédente a pour objet d'atténuer cette rupture).
- La consigne qui porte aussi sur la méthode, ce qui n'est pas coutumier dans notre travail et traduit un compromis correspondant à l'état actuel de la recherche.
- Une méthode nouvelle : découpage en référence à un répertoire; certes une telle pratique a été introduite au début de l'addition mais l'éloignement dans le temps et la différence de contexte rendent très aléatoire tout "transfert" à ce niveau.

.../...

1) Cette séance a donc pour objet la mise en scène de ces éléments comme base du "contrat", l'illustration de la consigne : il faut qu'à la fin de cette séance, on ait rendu les élèves capables de mettre en oeuvre sans problème cette consigne à la séance suivante.

2) L'objectif spécifique de la deuxième séance de II-2 est de rendre les élèves non seulement responsables du découpage d'une collection mais aussi de la construction de cette collection dont le nombre est désigné par l'écriture multiplicative à calculer (2).

3) La 3ème séance permet à chacun de corriger ses erreurs au niveau de l'organisation du pavage : on ne doit plus trouver de points "oubliés" entre deux parts constituées à l'aide du répertoire.

Il s'agit de s'assurer que chacun est capable d'utiliser la méthode du découpage selon un répertoire.

Cette méthode a été apportée par le maître sans que les élèves puissent mesurer véritablement l'intérêt : on parvient à calculer avec autant de fiabilité et d'économie par des méthodes plus élémentaires de calcul ; par exemple, en calculant par lignes ou par dizaines comme le font déjà certains élèves.

Ce n'est qu'en partie III que l'on saisira l'intérêt du découpage selon un répertoire par rapport aux autres démarches.

C'est pourquoi il convient de ne pas faire durer cette étape II-2 plus de 3 séances.

(1) Il s'agit en fait de moins de séances que de tâches : la réalisation des 2ème et 3ème tâches étant individuelles, leur complexité nécessite en fait plus de  $3/4$  d'heure chacune, entre la réalisation et la correction.

Chacune peut donc s'étaler sur 2 "temps de travail".

(2) Il n'y a aucune connaissance nouvelle en jeu : seule la complexité de la tâche augmente un peu, on délimite la collection à calculer en se servant des facteurs du produit mais dans le calcul, on ne se servira plus de ces nombres.

Ce ne sera qu'en partie III, que les élèves seront obligés de contrôler effectivement les étapes de leur calcul par la connaissance qu'ils ont des facteurs du produit (utilisation implicite de la distributivité).

II-1 COMPARAISON DE NOMBRES ÉCRITS  
SOUS LA FORME "AXB"

Durée : 1 séance

Comportement attendu

Savoir contrôler, par la représentation rectangulaire, la comparaison de nombres écrit sous la forme "axb".

Matériel

Phase\_1 : \* Par groupe de deux élèves

Deux collections constituées sur la même trame, une de 19 x 13 et l'autre de 19 x 15.

Une paire de ciseaux

Une bande (6 x 29 cm par exemple) pour écrire le rangement des nombres.

Phase\_2 : \* Collectif : pour chacun des produits suivants, une collection de points rangées en tableau : 12 x 15 ; 14 x 15.

Les points de deux collections différentes ne sont pas de même couleur ; la qualité du papier et la disposition des points permettent la comparaison de leurs nombres par superposition ; les collections sont découpées de façon à pouvoir permettre cette comparaison par juxtaposition.

Agrahée à chacune des collections, une étiquette lisible à distance indique l'écriture multiplicative du nombre de ses points.

\* Individuel

Une ardoise

.../...

## Déroulement

### Phase 1

Explicitation rapide de démarches de comparaison de 2 collections (1)

Le maître distribue à chaque groupe de deux un exemplaire de chacune des collections (19x15 et 19x13)

### Consigne

*"Comment peut-on comparer rapidement les nombres de ces deux collections ?" (2)*

Après une recherche de quelques minutes, et avoir constaté que différentes méthodes sont agies par les élèves (3), le maître organise leur mise en commun, la validation de chacun par référence aux savoirs connus, la correspondance terme à terme ou connaissance de l'écriture usuelle; cette dernière ne permet évidemment pas une comparaison rapide.

### Phase 2

Le maître affiche les quatre collections à comparer, une sur chaque mur de la classe ; munie de son étiquette-nombre.

### Consigne

*"Dans 10 minutes, nous allons ranger ces collections de celle qui a le moins de points à celle qui en a le plus. Qui peut prévoir comment elles vont être rangées ? Si vous avez besoin de "points", demandez moi des feuilles de papier".*

Quand la plupart des élèves ont terminé, le maître organise la mise en commun des propositions en les écrivant au tableau (5)

.../...



(1) Il s'agit de s'assurer rapidement que chacun dispose d'une stratégie de base pour les phases suivantes, qui soit fondée sur la correspondance terme à terme.

(2) Les différentes démarches qui pourraient être utilisées sont :

- la compréhension terme à terme par superposition
- la comparaison terme à terme par comparaison des nombres de lignes, et comparaison des nombres en colonnes en juxtaposant les tableaux successivement selon les deux dimensions.

Ces deux méthodes nécessitent soit un découpage, soit un pliage de la feuille pour être réalisées matériellement. Elles peuvent être réalisées mentalement par le dénombrement du nombre de lignes et du nombre de points par ligne (ou du nombre de colonnes).

- La recherche des écritures multiplicatives, et la comparaison d'après les écritures.
- La recherche de l'écriture usuelle des deux nombres
- ....Ainsi que des démarches mixtes, et aussi des démarches incorrectes.

(3) Il n'est pas question de laisser mener à terme la recherche des écritures usuelles des nombres ; par contre, il faudra laisser mener à terme les comparaisons "physiques" et celles qui s'y référeraient par représentation mentale.

Avant de vérifier, il organise un échange collectif :

- Si il y a désaccord au niveau du rangement de deux collections, il fait défendre les propositions de façon à bien faire dégager les arguments de chacun, que l'on mettra aussi à l'épreuve lors de la vérification.

- Si il y a accord sur tout, le maître fait expliciter les raisons avancées pour soutenir la comparaison de  $12 \times 15$  et  $14 \times 12$  par exemple (6).

La vérification se fait par comparaison directe des collections deux à deux.

Le maître termine la séance en posant la question : "vous savez maintenant ranger ces nombres, mais qui saurait finalement les comparer à 50 ? à 100 ? à 200 ? à 500 ? à 900 ?"

Comment départager les avis ?....en calculant l'écriture usuelle ; c'est ce que nous allons faire à la prochaine séance.

(5) Certains auront changé tous les nombres, d'autres ne seront parvenus qu'à ordonner quelques paires de ces nombres. L'essentiel, pour s'être posé le problème, est d'en avoir quelques unes.

(6) Il peut y avoir accord sur les résultats à partir de démarches très différentes dont certaines sont erronées (par exemple :  $a \times b < c \times d$  dès que  $a + b < c + d$  !)

Nous avons pris le parti de ne pas centrer le travail sur les techniques de comparaison qui ne débouchent pas sur un savoir à ce niveau. Ceci pourra être repris au C.M.1. par exemple : débattre de la validité de la règle ci-dessus, trouver une technique de comparaison "qui simplifie les calculs (pour comparer  $27 \times 35$  à  $23 \times 37$  on compare  $4 \times 35$  à  $23 \times 2$ ,  $23 \times 35$  étant "commun").

.../...

II-2 PREMIÈRES MÉTHODES DE CALCUL  
DE A x B

Durée : 3 séances

Comportement attendu

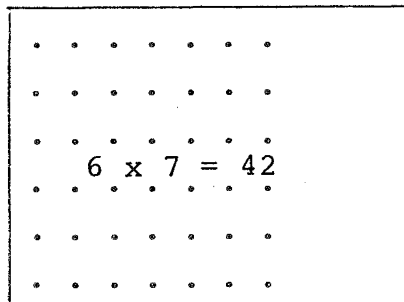
Savoir utiliser des produits connus, pour dénombrer une collection importante, disposée en tableau et calculer l'écriture usuelle de nombre.

Matériel : Pour les premières séances : 1-2

Collectif :

- Un "tableau de points" (1) ou un quadrillage correspondant aux nombres à calculer : 17 x 19 pour la 1ère séance, pour la 3ème séance, trame : 2 x 2 (cm).

- Des "tableaux de points", découpés sur la même trame que les précédents et correspondant aux égalités suivantes :  $7 \times 6 = 42$  ;  $8 \times 5 = 40$  ;  $5 \times 10 = 50$  ;  $8 \times 7 = 56$  (2). L'égalité est écrite au feutre bien visible sur chaque tableau de points correspondant. Exemple :



- Un répertoire collectif comprenant les égalités abordées ci-dessus (3).

- Par groupe (4) : Même matériel, mais l'espacement des objet est de 1cm ou 0,8 cm (seyes) ce qui correspond aux dimensions du tableau individuel (de la 3ème séance).

.../...

(1) Le tableau d'objet se prête mieux que le quadrillage au découpage et surtout à l'opération "entourer où figure ce découpage"

(2) Nous avons introduit cette matérialisation du répertoire pour faciliter le "découpage" en fournissant ainsi des espèces de gabarits qu'il suffit d'entourer et de reporter.

(3) Le répertoire constitue une des points-clés de l'étude. Il va s'enrichir au fur et à mesure des calculs, se complexifier. Cette complexification va nécessiter des économies (exemple : " $6 \times 7 = 42$  donc ce n'est pas la peine d'écrire  $7 \times 6 = 42$ "). L'évolution du répertoire est ainsi liée aux acquisitions des élèves quant aux propriétés du calcul. La forme définitive du répertoire sera la table de multiplication (présentée sous forme de table à double entrée : table de Pythagore).

(4) Le matériel de groupe peut être constitué à partir d'un polycopié, par découpage ; le nombre d'éléments peut être vérifié par chacun.

Déroulement

Les enfants travaillent par tables de 4. Le maître distribue le matériel.

Consigne

"Je veux vous donner un rectangle de 17 x 19 points.  
Aujourd'hui, nous allons nous exercer à chercher l'écriture usuelle de ce nombre en utilisant un répertoire : Vous vous servirez chaque fois que vous le pourrez des calculs déjà faits qui sont inscrits au tableau."

Le maître fait dire comment on peut se servir des petits rectangles pour calculer le grand et constituer ainsi des paquets vite comptés. Ensuite, il lance le travail.

Quand chaque groupe a terminé, le maître affiche les différentes productions au tableau, de façon à garder pour la fin celles qui n'ont pas d'erreur. Il fait remarquer le cas échéant que certains n'ont pas utilisé le répertoire.

Il prend appui sur les différences constatées au niveau des résultats du calcul pour lancer l'échange entre élèves : il fait émettre des hypothèses sur les raisons qui peuvent expliquer ces différences pour retenir.

- 1- On a peut être oublié des points
- 2- On a peut être fait des erreurs de calcul.

Le maître dirige alors l'examen de chaque proposition. A la première erreur repérée et identifiée, on passe au travail du groupe suivant (4).

.../...

Les méthodes utilisées se ramènent à

- un "découpage" irrégulier
- un "découpage" régulier utilisant, autant qu'il a paru possible aux enfants, un élément du répertoire.
- un calcul par ligne, ou par groupement de lignes
- un calcul 10 par 10

À l'issue de cette correction, le maître provoque un échange sur : "à quoi sert le répertoire ?" et aide éventuellement à dégager.

- faire moins d'additions
- si on choisit bien, faire des calculs faciles

Résultats :(CEI A - 1983)

- \* 2 groupes obtiennent le résultat juste
  - 1 groupe a utilisé le répertoire
  - 1 groupe a découpé en lignes
  
- \* 5 groupes ont un résultat faux
  - 1 groupe a oublié des points en utilisant le répertoire
  - 1 groupe a fait une erreur dans l'addition
  - 3 groupes ont fait des erreurs dans l'additions sans utiliser le répertoire.

.../...

---

(4) Il s'agit d'examiner chaque travail avec pour motivation de déterminer si la réponse fournie est la bonne et sinon, de renvoyer au groupe l'identification d'au moins une erreur. Cette correction doit rester au maximum sous le contrôle des élèves, et donc répondre le plus possible à ces deux attentes.

Le rôle du maître est d'animer l'échange en relançant la vigilance de chacun.

---

2ème séance

Matériel individuel en plus du matériel de la séance précédente :

- Une feuille de points dans laquelle chacun pourra

découper 21x14

- Ciseaux

Déroulement

Le maître fait rappeler le travail de la veille

(calculer un grand nombre de points) et les difficultés

rencontrées :

- ne pas oublier de points
- ne pas faire d'erreurs dans les calculs
- utiliser astucieusement le répertoire

Consigne

"En utilisant le répertoire à chaque fois que vous le pourrez. Aujourd'hui, vous allez calculer un nouveau nombre de points : 21 x 14, mais je ne les ai pas découpés" (Le maître inscrit au tableau, le nombre 21 x 14). "Chacun va essayer de faire mieux qu'hier. Pour vous aider, vous avez le même répertoire..."

Le maître organise d'abord la découpe de la collection, insistant sur le contrôle nécessaire du nombre des objets, mais sans signaler les erreurs.

De même, il aide à l'organisation du travail individuel, laissant libres les échanges par tables.

Pour la correction, le maître affiche une production par type de ce travail ou d'erreur. Il assure le contrôle du nombre (5), puis mène cette correction comme la veille.

.../...



(5) Lors de cette partie de la correction, le maître valorise le contrôle du découpage par d'autres méthodes que le comptage un à un : cela fait partie du calcul mental ; par exemple, on peut compter 5 par 5 en se servant comme gabarit du répertoire.

Le maître s'assure que chacun a pu déterminer s'il a calculé juste ou non, et quelles erreurs il a faites.

A l'issue de ce travail, le maître organise un échange sur l'utilisation du répertoire :

- comment choisir son découpage pour faire moins d'erreurs ?

- certains ont-ils d'autres égalités à proposer pour diminuer les erreurs .

Le répertoire est augmenté des égalités dont l'utilisé est reconnue.

Résultats :

- très peu de résultats exacts
- de nombreuses erreurs dans l'addition : calcul et oubli de terme
- erreurs de pavage : les découpages irréguliers laissent des vides non repérés.

3ème séance

Travail individuel par table de deux

MATERIEL

Répertoire affiché

Papier quadrillé en quantité, à disposition.

DEROULEMENT

Le maître fournit à chacun du papier quadrillé et signale qu'on peut découper des collections associées aux besoins si on en a besoin.

Le nombre à calculer est  $25 \times 18$ . Le temps sera mesuré de façon à permettre à chacun de terminer avec soin son travail.

La correction permet à chacun de repérer ses erreurs (6).

(6) Les échanges collectifs tirent souvent en longueur, et sont parfois transformés en moments de théâtre où chacun vient "racontrer" son activité.

Ceci vient souvent du fait que ces échanges sont insuffisamment finalisés par le maître sur les attentes (légitimes) des élèves :

- dire ce qu'il a trouvé, savoir s'il a réussi ou non

- se faire aider et aider les autres à réussir

- .....

Il appartient au maître de gérer l'occupation de la scène (dégageant l'enjeu des débats et y ramenant les interventions, aidant à l'explicitation claire, facilitant l'intervention des élèves réservés.....) dans l'intérêt commun ; l'échange n'a plus d'objet dès que tous on pu tirer l'information attendue.

.../...

Elle permet d'illustrer les conséquences des choix de découpages différents sur :

- La facilité du découpage et de son contrôle
- La fiabilité du calcul additif

Résultats :

- . Tous ont pavé correctement (sans laisser de trou)
- . Tous ont utilisé le répertoire
- . Moins d'erreurs d'oubli de report
- . Des erreurs dans l'addition
- . Quelques résultats justes (3 ou 4)

.../...

### INTRODUCTION À LA PARTIE III

Il s'agit de la partie centrale de la progression : sa nouveauté, c'est de placer les élèves pour la première fois devant une situation de calcul qu'ils devront complètement contrôler à l'aide de l'écriture multiplicative.

Il faudra dénombrer de sa place une collection d'objets disposés en tableau, avec pour seuls outils : la connaissance de l'écriture multiplicative, le répertoire connu et du papier blanc.

Jusqu'ici,  $24 \times 28$  n'a fonctionné que comme désignation mais jamais comme moyen de calcul : cela permettait de déterminer ou de contrôler directement une quantité d'objets dans une collection ; une fois la collection constituée, la connaissance de son nombre par  $24 \times 28$  n'intervenait plus dans les calculs ; Pour calculer, les élèves plaçaient les uns après les autres, des rectangles du répertoire jusqu'à recouvrir au maximum la collection à dénombrer ; le reste est compté un à un. Le calcul s'effectuait donc directement sur la collection et c'est la disposition de cette collection qui était le moyen de contrôle exclusif.

On a appris à dénombrer de plus en plus vite la collection, et maintenant, tout d'un coup, il faut se passer de ce support et de tout ce qu'il permettait comme ajustements progressifs, comme erreurs et corrections intermédiaires.

L'usage même du répertoire reposait jusqu'ici sur le contrat didactique : on pouvait (et on a vu certains élèves) compter 40 et puis seulement après, entourer  $5 \times 8$  objets...

ou  $2 \times 20$  ! Il devient maintenant indispensable : on ne peut plus compter les objets, il faudrait les dessiner, et ça devient tout d'un coup très cher ! Même les petits produits deviennent intéressants à connaître ; les apprendre va devenir beaucoup plus utile ; il sera alors justifié de les faire réciter ; c'est une aide à la maîtrise de la situation !

Il y a donc rupture, et il va falloir l'aménager.

L'activité va donc être menée principalement selon la logique d'une dialectique de l'action : interaction entre l'élève qui construit une représentation du découpage de la collection à dénombrer, et le découpage "effectif" de la collection par dessus le plastique transparent".

Le principe de ce découpage (distributivité de  $x$  sur  $+$ ) va rester implicite au C.E.1. Son explicitation pourra être obtenue C.E.2. dans des situations appropriées mais serait ici prématurée.

#### ORGANISATION DES SEANCES

Le premier groupe de séances va être consacré à la prise en charge par les élèves du nouveau problème à la compréhension de la consigne en quelque sorte !

Le deuxième groupe de séances est l'occasion de mettre progressivement au point une solution qui permette de représenter entièrement un découpage calculable.

A la fin de ce groupe de séances le maître partage sa classe en deux groupes :

- un groupe qui maîtrise la représentation du découpage à partir de la décomposition en somme (et particulièrement autant que faire se peut avec des 10) des facteurs du produit, et il va leur permettre de s'entraîner entre eux à faire moins d'erreurs de calcul.

- un autre groupe qu'il va prendre en soutien.

Quand toute la classe sera parvenue à la réalisation courante d'un calcul, par découpage à partir de la connaissance de décompositions de chacun des facteurs, on passera à l'étape suivante.

**PARTIE III ABANDON DES QUADRILLAGES**

Comportements attendus

Savoir calculer par utilisation d'une représentation symbolique du type ci-contre (où l'aire de chaque rectangle n'est pas nécessairement proportionnelle au nombre qui le concerne).

	10	10	4	
				10
				10
				7

Matériel

Individuel : du papier blanc 21x29

- Collectif : - des collections dessinées (de 24x28 et 26x23 pour les premières séances) sur une trame de 2cmx2cm
- une feuille plastique qui recouvrira la collection étudiée et sur laquelle on pourra dessiner les découpages. Un feutre effaçable.
  - un rectangle contenant  $8 \times 2 = 16$  ;  $8 \times 4 = 32$  en plus des égalités des séances précédentes.

A) Premières séances (2 à 3 séances)

Le maître affiche au tableau la collection de 24x28. (1)

Consigne :

. Sauriez-vous trouver rapidement l'écriture usuelle du nombre de carreaux dans ce quadrillage, si je vous donnais la collection ? (2).

. Comment, par exemple ?

. Et bien, aujourd'hui, il va falloir le faire de votre place, avec seulement du papier blanc et le répertoire (3)

. Je vous dis combien il y en a :  $24 \times 28$

. Si vous ne pouvez pas trouver le nombre, vous essayez de compter le plus possible de carreaux (4).

. Nous vérifierons ensuite, en montrant sur la collection ce que vous avez calculé ; nous verrons ainsi si vous avez tout calculé ou non, si vous avez calculé sans erreur (5).

.../...

(1) L'importance de la passation de la consigne est d'autant plus grande que le problème est nouveau et difficile. Il faut donner à chacun le désir et les moyens de faire sien le problème que nous lui posons.

Pour évoquer ce désir, c'est une espèce de défi que nous proposons au maître de lancer aux élèves ; mais selon que le maître sait ou non communiquer son désir et sa confiance de voir chacun en triompher, son plaisir de leur proposer une nouvelle étape de la connaissance à franchir la prise en charge de chacun variera dans de grandes proportions.

(2) La tâche va être définie en référence avec le savoir faire de l'étape précédente. Ce savoir faire fournit aux élève ce que l'on entend par une "stratégie de base". La compréhension d'une consigne dépend de la capacité que l'on a à envisager une façon de réaliser la tâche, même si cette façon se révèle ensuite inadaptée. Le maître fait ici rapidement formuler ce savoir faire.

(3) C'est ici que le maître annonce le défi, la rupture avec les activités précédentes. C'est la partie essentielle de la consigne, sans laquelle la suite est incompréhensible.

(4) Voilà une nouveauté ! On peut ne pas trouver le nombre exactement, on s'en approche du mieux que l'on peut. Ceci aura sans doute beaucoup plus d'effet au deuxième calcul.

(5) Le maître indique la façon dont seront évaluées les productions, ceci afin de permettre aux élèves d'évaluer eux-mêmes leur démarche en fin de calcul, et de faire ainsi plusieurs essais ; s'il s'agissait seulement de donner un nombre, on attendrait la correction du premier "résultat" trouvé.

.../...



## RECHERCHE INDIVIDUELLE

Le maître inscrit au tableau le nombre 24x28.

Chaque élève reçoit une feuille de papier blanc (6)

Le maître permet de travailler à plusieurs afin que ceux qui seraient bloqués puissent envisager quelques façons de faire et participer à l'échange.

### Mise en commun des résultats

Quand les calculs sont terminés ou abandonnés (7) le maître collecte les résultats des calculs, qu'ils soient ou non menés à terme.

Le maître relève la variété des résultats obtenus, pour motiver la vérification.

### Vérification

Le maître fait passer en premier ceux qui sont surs de leur résultat (8).

La règle du jeu est :

- pour celui qui présente son résultat, de montrer (par dessus le plastique) sur la collection affichée, le découpage qui correspond au calcul effectué sur le papier blanc (pour contrôler son calcul)

- pour les autres, de vérifier le travail présenté  
Les méthodes sont comparées quant à la facilité de leur mise en oeuvre : représentation et calcul.

Le maître fait passer ensuite quelques élèves qui n'ont pas mené leurs calculs à terme, faisant dégager sur la collection ce qu'ils ont calculé et ce qu'ils n'ont pas pris en compte (9)

Le maître reformule alors la consigne en soulignant les acquis de cette première séance, et relance le travail sur le calcul de 26x23.

.../...

(6) La feuille individuelle est ici du fait que le contrat de travail est individuel, et que la collaboration (qui sera entreprise si possible seulement après au moins 5 minutes d'essais) est bien finalisée vers la capacité de chacun.

(7) L'activité de recherche dure de façon profitable entre 15 et 25 minutes ; au-delà, les enfants ne s'investissent plus efficacement.

Si trop d'élèves demeureraient bloqués au bout de 5 à 10 minutes, le maître pourrait organiser un bref échange, pour permettre la communication des quelques idées mises en oeuvre. Cet échange n'a pas pour but de développer la solution, (ce qui modifierait complètement le sens de l'activité, déposant les élèves de leurs responsabilités) aussi doit-il être très bref.

(8) Du moins ceux qui sont prêts à défendre leurs calculs. Il est inutile d'occuper le temps avec des erreurs dont les auteurs sont les premiers convaincus (cas de ceux qui ont écrit par peur de ne pas laisser la feuille blanche), le faire, modifie complètement le contrat : les interventions ne seraient plus astreintes à répondre aux attentes des élèves sous leur responsabilité, mais à celles imprévisibles du maître ; on peut prévoir que ceci influencerait sur les sens et le contenu des interventions.

(9) La séance permet aux élèves de mieux comprendre la consigne, et particulièrement la partie soulignée en note (4). Ceux qui auraient fait un calcul formel du type  $24 \times 28 = 432$  ; ( $2 \times 2 = 4$  ;  $4 \times 8 = 32$ ) peuvent voir leur démarche reconnue, et recevoir des indications sur la nécessité et les moyens de contrôler leurs inductions.

Ceux dont les inductions sont trop fantaisistes, apprendront qu'il faut les contrôler et comment le faire.

.../...

Résultats des premières séances

- Chaque élève sait vérifier un découpage représenté sur papier blanc
- Chaque élève sait dire l'intérêt des découpages par 10
- Certains savent calculer la partie du découpage constitué de blocs de 10x10

On rencontre régulièrement les démarches suivantes :

- addition de 24 fois 28 ou de 28x24
- cadre dessiné avec objets représentés sur le pourtour et découpage au moins amorcé
- essai de dessins de tous les objets

B) 2ème groupe de séances (3 à 4 séances)

Mise au point progressive d'une solution complète.

Matériel : même type que pour les premières séances. Exemples de nombres : 27 x 19 ; 33 x 15 ; 26 x 23....

Déroulement :

. Le maître affiche la collection et écrit le produit correspondant. Il demande si quelqu'un veut de nouvelles égalités au répertoire ; il les fait calculer mentalement.

- . Travail individuel des élèves (15 à 25 minutes)
- . Vérification collective (10 minutes).

Résultats :

- Tous les enfants utilisent des découpages par 10
- au moins 2/3 de la classe sait mener à terme (avec des erreurs bénignes : addition, terme oublié) le calcul. Ils formeront le groupe A
- moins de 1/3 de la classe ne parviennent pas à mener à terme le calcul et ont besoin d'interaction personnelle intensive avec la collection. Ils forment le groupe B.

.../...

(10) C'est la vérification qui est l'occasion de l'interaction avec la "réalité". Aussi le maître enverra-t-il pour commencer le calcul, ceux qui en ont le plus besoin ; les autres viendront le terminer.

Dernier groupe de séances (3 à 4)

Matériel : Papier blanc, papier quadrillé, répertoire.

Le maître organise le travail du groupe A en leur fournissant des produits à calculer ; le maître peut leur suggérer de se lancer des défis. Le groupe pourra disposer de papier quadrillé, mais seulement s'il en a besoin pour se mettre d'accord, lors de la vérification. Ils pourront augmenter le répertoire.

Quant au groupe B, le maître va s'en occuper particulièrement : il propose un produit et intervient lorsqu'ils sont bloqués : il ne leur fournit pas de quadrillage (11), mais il leur permet d'ajuster en plusieurs essais leur découpage et leur calcul sur la feuille blanche au découpage qu'ils savent faire sur la collection(12) à l'issue de chaque essai, ils reportent sur la collection (par dessus le plastique) le découpage réalisé ; cela révèle ce qui reste à dénombrer (12).

Quand toute la classe est parvenue à la réalisation courante d'un calcul correct (13) on peut passer à l'étape suivante.

Résultats

- Presque tous savent calculer sur papier blanc, sans erreur de détermination des dimensions de chaque partie du découpage
- Il reste des erreurs d'oublis, et dans le calcul additif.
- Tous les élèves utilisent les égalités du type  $7 \times 10 = 70$  et  $10 \times 10 = 100$
- Quelques égalités de la table sont connues de tous.

.../...

(11) Si l'on n'y prend pas garde, on peut perdre ici, pour ces élèves, tout le bénéfice des deux séances précédentes en leur permettant de recourir à une activité sur un quadrillage déjà constitué, comme lors de la phase précédente. Certes sécurisés, ils escamoteraient ainsi la véritable difficulté sur laquelle ils butent : ils basent leur découpage sur le partage d'une étendue connue et délimitée qui ne nécessite aucun travail (d'anticipation) sur les nombres de lignes ou de colonnes ; en effet jusqu'à ces dernières séances, pour résoudre le problème, il a suffi de constituer des pavés selon le répertoire tant que cela était possible ; quand cela ne l'était plus, on comptait un à un ce qui restait.

Il faut donc les pousser à anticiper, à se représenter progressivement la constitution complète du découpage ; d'abord la partie constituée de blocs de 10x10 puis progressivement les autres ; le maître peut leur proposer avant de commencer le calcul de parier sur le nombre d'essais, (de voyages) qu'ils feront avant d'achever ce calcul (pour vérifier leurs esquisses successives et envisager ce qui reste à faire). Chacun peut alors se mesurer à un défi à sa portée, et progresser en réduisant son nombre d'essais.

(12) La présence du maître au moment de cette vérification est essentielle pour encourager et relancer l'effort d'anticipation.

(13) Ceci est apprécié selon les élèves, leurs capacités à mobiliser leur attention et les conditions de travail pour les plus faibles, il faut souvent aménager un temps plus long sinon, on obtient des erreurs inévitables que l'on peut alors qualifier d'inattention.

.../...

INTRODUCTION A LA PARTIE IV : MISE  
AU POINT D'UN ALGORITHME

I/ POURQUOI CET ALGORITHME AU C.E.1.

Un algorithme doit pouvoir être exécuté sans recours au sens.

Pour être efficace, il doit être constitué d'une succession de tâches bien maîtrisées par les élèves à l'aide de leurs connaissances et suffisamment simples pour être exécutées et contrôlées sans difficulté.

Les travaux théoriques qui ont été conduits sur les techniques de la multiplication (1) ont abouti au choix de la technique "à la grecque" comme technique enseignée au CE. Elle permet en effet :

- de s'appuyer sur des procédures construites par les élèves,
- de renforcer la connaissance des "tables"
- de faciliter le contrôle du déroulement de l'exécution de l'algorithme.

	3	5	4	X	
2	1 8	3 0	2 4		6
4	2 4	4 0	3 2		8
	0	7	2		

"technique CE<sub>2</sub>"

$$354 \times 68 = 24072$$

Au CM, la technique usuelle viendra alléger la présentation des calculs simples au prix d'efforts supplémentaires de calcul mental (combinant en chaque étape entre autres opérations mentales : la mémorisation d'une retenue, la recherche d'une valeur dans la table, l'exécution de

..../...

---

(1) G. BROUSSEAU. Peut-on améliorer le calcul de nombres naturels ?

de l'addition de cette valeur et de cette retenue...). Cette technique usuelle restera toutefois trop coûteuse pour la plupart des élèves dans les "gros calculs" (coût de contrôle pour lesquels la technique "grecque" restera la plus rapide à même exigence de fiabilité. Par ailleurs, dès le CE, pour le calcul du produit d'un nombre par un nombre d'un seul chiffre, on peut pousser les élèves à un calcul mental qui prépare la technique usuelle (disposition "en ligne").

Toutes les techniques de la multiplication sont basées sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, sur des propriétés de la numération la "règle des zéros" et la connaissance d'un répertoire élémentaire (les "tables").

Les techniques connues, substituent aux règles des zéros, des règles de disposition, pour des raisons d'économie.

Mais nous considérons que ceci se ferait au C.E.1. aux dépens de la compréhension et de la connaissance de ces règles "des zéros" qui commandent une bonne compréhension de la numération dans la pratique de la multiplication et de la division. Par exemple, les élèves ne savent pas utiliser cette propriété pour contrôler des calculs mentaux, manuels ou à la machine ; on "pose" multiplication ou division par 10, ou 100 ou 1000, malgré tout un travail d'entraînement ; lorsque l'on pratique la résolution d'une équation par calcul approché, il vient spontanément à l'idée de peu d'élèves d'utiliser des produits par 10, etc.....

C'est une des raisons qui nous poussent à ne viser une forme évoluée d'un algorithme qu'en C.E.2. En C.E.1., nous gardons la forme suivante qui fait intervenir explicitement ces règles des "zéros".

.../...



30	7	X
$30 \times 40 = 1200$	$7 \times 40 = 280$	40
$30 \times 6 = 180$	$7 \times 6 = 35$	6

"Technique C.E.1."

En fin de CE1 (ou en début de CE2) cet algorithme s'étendra facilement aux produits de nombres de 3 chiffres par des nombres de 2 chiffres : par exemple,  $215 = (21 \times 10) + 5$

Ceci pourra alors provoquer l'intérêt à considérer les "1000" comme une nouvelle unité du système de numération ( $10 \times 100$ ) bien utile lorsque l'on doit dénombrer une quantité importante de centaines.... (voir IV-1 phase d'institutionnalisation).

On voit comment l'élaboration de ces outils va accompagner (voire stimuler) l'extension de la connaissance et de la compréhension du système de numération.

II/ MISE EN PLACE PROGRESSIVE

Voilà mis en scène les piliers de la nouvelle étape au CE1 : règle des zéros, produits des nombres de 1 chiffre (tables), organisation et disposition des calculs qui vont venir s'articuler avec la distributivité abordée à l'étape précédente. Reste à déterminer comment négocier avec les élèves leur prise en charge de la mise au point d'un algorithme.

La démarche dont les élèves disposent s'appuie sur la décomposition additive de chaque facteur en autant de termes qu'il y a de dizaines et d'un terme pour les unités. " $57 = 10 + 10 + 10 + 10 + 7$ " . C'est la compréhension de la numération limitée au premier ordre (dont on s'accorde pour situer la maîtrise en fin de C.P., début CE1) qui supporte cette décomposition.

Ils utilisent pour répertoire  $10 \times 10 = 100$ , et un certain nombre de produits de nombres d'un chiffre.

Les sources d'erreur sont nombreuses et relèvent de la trop grande quantité d'informations à traiter ; erreurs de désignation du nombre correspondant à une case, oublis d'un de ces nombres dans l'addition, erreur dans cette addition.

Cette première technique de multiplication est assez simple et proche de l'expérience. Nous allons proposer aux élèves de l'améliorer, notamment parce qu'elle devient ridiculement lourde à manier dès que les facteurs du produit dépassent cinquante.

Cette technique de multiplication, basée sur le découpage par 10 des deux facteurs, a été amenée par une dialectique de l'action. Il s'agit maintenant de travailler cette stratégie, d'en trouver les formes qui seront reconnues par les élèves comme logiquement équivalentes, mais plus adaptées au gros calculs (quand on dispose d'un répertoire approprié). C'est pourquoi nous situons cette activité dans la logique d'une dialectique de la validation (Cf. Partie Ø). Prouver sera l'occasion d'un premier réinvestissement de la multiplication ; en effet il s'agira d'utiliser un produit et le répertoire des produits non plus pour le nombre d'objets d'une collection matérielle fournie, mais pour dénombrer un nombre de centaines ou de dizaines (de ces objets). Il s'agit donc bien d'un nouveau statut du savoir sur la multiplication.

### III/ ORGANISATION DES SEANCES

La fiche IV-1 comprend 3 phases dont la réalisation va occuper 4 à 7 séances.

La phase A a pour objectif de poser le problème de la réduction du calcul des produits du type  $20 \times 30$  en "un coup" ; il n'est pas question d'institutionnaliser une règle, mais de provoquer son utilisation implicite sous le contrôle de la "compréhension".

La phase B vise l'utilisation implicite d'une règle qui permette de calculer en un coup les produits du type  $7 \times 80$  (les bords).

.../...

La phase C a pour premier objectif de faire passer "les règles des zéros" du statut des connaissances implicites au statut d'objets de savoir ou du moins de savoir faire (à utiliser en calcul écrit comme en calcul mental). Son deuxième objectif est de désigner la phase ultime pour le CEI de l'évolution de la technique de la multiplication.

La fiche IV-2 a pour objectif de compléter et de mettre en ordre le répertoire des produits des nombres de 1 chiffre : les tables de multiplication.

Il reste maintenant à étendre le champ des situations où il est pertinent d'utiliser la multiplication et sa technique de calcul. Au CE, tous les problèmes multiplicatifs peuvent être résolus par l'addition.

Il paraît raisonnable de penser que le choix de l'opération doit être effectué par l'élève, sous sa propre responsabilité. Ceci amène à présenter aux élèves des situations où la désignation multiplicative conduira à une réelle économie par rapport à la désignation additive (grands nombres).

Un certain nombre de séances seront consacrées à l'entraînement au calcul de produits, à la réduction du nombre d'erreurs pour chacun (3 à 4 séances non consécutives).

.../...

IV-1 - RÉDUCTION DE LA DÉCOMPOSITION

Durée : 3 à 6 séances

Comportements attendus

Savoir exploiter un répertoire pour utiliser la "règle des zéros" et calculer "d'un coup" les produits du type "ax10b et 10ax10b".

Savoir disposer les calculs du produit d'un nombre de deux chiffres par un nombre de deux chiffres en 4 cases.

Matériel :

Collectif

- Une feuille d'un calcul (assez complexe) effectué à la séance précédente, avec le tableau correspondant pour affichage.

- Le répertoire construit à la partie III, comprenant entre autres les résultats, les produits des nombres de un chiffre déjà rencontrés dans les calculs, et  $8 \times 6$ ,  $5 \times 7$ ,  $5 \times 6$ ,  $8 \times 7$ .

- Une collection de points ou de carreaux correspondant à chacun des produits suivants :  $85 \times 67$ ;  $76 \times 51$ ;  $49 \times 95$ ;  $9 \times 236$ ;  $57 \times 73$ .

- Une feuille de matière plastique transparente pouvant recouvrir chacune des collections.

- Un feutre effaçable

Individuel :

- Du papier ordinaire, une ardoise.

.../...

Déroulement

Phase A Durée : 2 à 3 séances

Le maître fait rapidement reconstituer de mémoire le répertoire des précédentes séances, puis l'affiche.

Il écrit au tableau le produit qu'il a choisi parmi les calculs de la séance précédente.

Consigne :

*"Tout le monde sait maintenant trouver l'écriture usuelle d'un nombre comme  $27 \times 35$ . A partir d'aujourd'hui, nous entamons la dernière étape de notre travail de l'année sur la multiplication : en nous servant astucieusement du répertoire nous allons améliorer (1) la méthode pour calculer sans erreur des nombres de plus en plus grands par exemple  $85 \times 67$  ! et de plus grands encore !"*

Le maître affiche la collection du jour qui a justement  $85 \times 67$  objets (et il écrit au tableau ce nombre. Une fois le travail de tous bien lancé, quand les élèves ont pris conscience du nombre des cases qu'il leur faut prendre en compte, il organise un bref échange : il fait expliciter la difficulté nouvelle, et relance l'activité en demandant "êtes-vous sûrs que vous avez besoin de dessiner toutes les cases pour compter combien cela va faire ?"

Après cet échange de suggestions, sans prendre parti, il remet chacun au travail sur l'exécution du calcul.

Mise en commun

Les résultats collectés, le maître organise la correction ; il fait comparer les démarches de calcul, suscitant et animant un débat (sans prendre parti au niveau du vrai et du faux) entre ceux qui ont essayé de calculer le nombre de centaines sans tracer toutes les cases correspondantes, et les autres (2).

Les calculs sont prouvés vrais ou faux selon les critères usuels : la référence au découpage complet, la recherche par dessus le plastique de ce qui a été calculé dans la collection initiale (3).

.../...

(1) La consigne ne porte plus comme lors des séances précédentes sur la recherche d'une écriture, mais sur une méthode. Le calcul constitue le niveau de l'action. La méthode de calcul est du niveau de la stratégie de l'action. Cette action est devenue suffisamment familière pour que l'on passe avec les enfants au niveau des stratégies. Il va s'agir de découvrir d'autres stratégies, de discuter de la validité de ces découvertes, de les valider en les reliant logiquement aux connaissances acquises. La prise en charge par les élèves de ce niveau d'activité suppose donc la mise en place et l'animation par le maître des conditions de fonctionnement d'une dialectique de la validation (Cf. Partie 0-2).

(2) Si personne n'a induit une règle de calcul pour les centaines, le maître organise la correction selon le découpage complètement réalisé. Il relance la consigne qui sera mieux comprise cette fois-ci : ne peut-on pas prévoir, sans tracer toutes les cases, le nombre des centaines ? Il fait exprimer les idées, et remarquer (si cela ne l'a pas été) que  $6 \times 8 = 48$  et  $60 \times 80 = 4800$  ; on retrouve le déroulement ci-contre.

Il peut se faire qu'une bonne méthode se solde par un résultat faux parce que les élèves n'auront pas utilisé le répertoire ou se seront trompés dans l'addition.

(3)  $80 \times 60 = 4800$  peut être validée selon 2 démarches :

- en calculant par lignes  $8 \times 600$  ou  $6 \times 800$  et en comptant les centaines par  $8 \times 600 = 600 + 600 + \dots = 4800$

- en calculant le nombre de paquets de  $10 \times 10$  :

8x6

	10	10	10	10	10	10	10	10	10	
800										10
800										10
800										10
800										10
800										10
800										10

## Synthèse

Le maître fait alors le bilan de l'activité par rapport au problème posé : "qui pense que l'on a amélioré la méthode de calcul ?, comment ?"

Il fait par là, dégager le principe de l'amélioration proposée (et visée) : l'utilisation du répertoire pour calcul d'un coup (sans tracer toutes les cases) le nombre de centaines (4).

Phase B

Durée : 2 à 3 séances

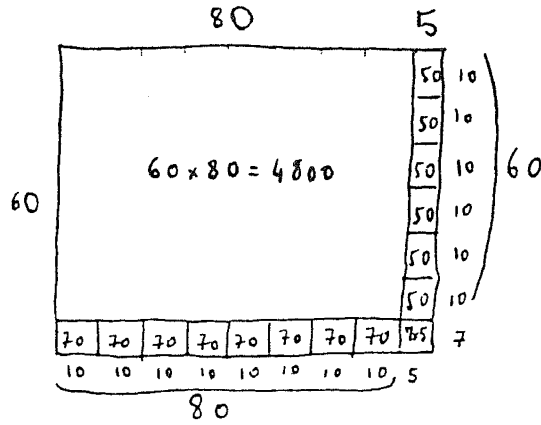
Le maître rappelle le résultat de la phase précédente : "en utilisant le répertoire, certains on réussi à calculer d'un coup le nombre des centaines, sans tracer toutes les cases (5). Il reste à vérifier que c'est possible pour d'autres calculs. Il reste aussi à chercher si on ne peut pas utiliser le répertoire pour calculer d'un coup d'autres parties du tableau...comme les dizaines", à moins que des propositions d'élèves à ce sujet n'aient déjà été faites au cours la phase A.

Le maître propose un autre calcul :  $57 \times 73$ , en s'assurant que  $5 \times 7$ ,  $5 \times 3$ ,  $7 \times 3$ , et  $7 \times 7$  font partie du répertoire, sinon il les adjoint.

Le déroulement se poursuit ensuite comme pour la phase A et est repris sur les autres nombres jusqu'à ce que les règles des zéros aient été introduites et utilisées par tous sous contrôle du découpage (5).

.../...

(4) Par exemple :



(5) La règle formelle "80x60=4800" est plus ou moins présente aux esprits et peut être plus ou moins utilisée par les élèves pour proposer le résultat du calcul ; elle peut donc être formulée, mais il est un peu tôt pour centrer le travail sur elle ; ce sera fait dans la phase d'institutionnalisation. Le souci principal doit être ici de permettre à chacun de priver les moyens de contrôler la validité de cette réponse.

.../...



Phase C

INSTITUTIONNALISATION (6) : Durée : 1 séance

Le maître fait rappeler les découvertes qui ont permis de réduire les calculs en se servant du répertoire : les "règles des zéros" explicitées sous forme de calcul mental...

40x90 = ???

3x400 = ???

Pour les premières, il fait expliciter les validations.

Le maître profite de l'expression orale des résultats (7) pour annoncer un travail sur la numération : quand on compte de grands nombres, on trouve beaucoup de dizaines ; dix dizaines, c'est une centaine, on peut les compter par centaines ; mais quand on a beaucoup de centaines, on se sert de milliers (10 fois 100) pour compter : 36 centaines, c'est 30 centaines et six centaines ; 30 centaines c'est trois dizaines de centaines, c'est-à-dire trois milliers et six centaines ; ce qui explique la lecture de ces nombres.

Sans s'attarder trop sur ce problème de numération qu'il va reprendre dans d'autres leçons, le maître reprend la disposition obtenue pour les calculs :

- le partage des nombres à multiplier en centaines, dizaines et unités, des deux côtés du tableau, le découpage et le calcul en une fois de chacune des cases (8).

- l'addition à côté.

	40	9		
	90			
40x90 = 3600	9x90=810			
5x40=200	45	5		

3600	810	200	45
4655			

.../...

(6) C'est une institutionnalisation : le maître va indiquer les limites de l'apprentissage de l'année (convenues, comme l'indiquent les textes officiels avec le collègue du CE2) et situe ceci par rapport aux démarches connues des adultes avec qui les élèves auraient à faire. Il est évident que le maître aura explicité ces précisions aux parents d'élèves assez tôt dans l'année pour que les parents ne s'inquiètent pas, qu'ils comprennent l'intérêt pour leurs enfants de bien là le calcul écrit comme le calcul mental.

(7) La lecture des nombres obtenus, non nécessaire dans les calculs jusqu'ici, a déjà posé (sans que cela ait été repris dans un apprentissage) la question des milliers.

(8) Ceci ne sera pas fait facilement par tous les enfants. On peut l'expliquer en remarquant que cela correspond à une utilisation nouvelle du répertoire et de la multiplication : ce n'est plus compter directement des cases, mais c'est se servir de la multiplication pour calculer des sommes de termes égaux (10 ou 100) en dénombrant le nombre de leurs termes par une somme. On travaille donc en même temps sur l'enrichissement du SENS de la multiplication.

.../...

IV - 2 TABLES DE MULTIPLICATION

Durée : 1 séance

Comportements attendus

Savoir retrouver rapidement les égalités utiles au calcul de grands produits.

MATERIEL

- \* La liste des égalités établies précédemment est affichée
- \* Une grande feuille de papier par équipe.

DEROULEMENT

1. Calcul mental

La liste des produits est affichée au tableau. Le maître demande aux élèves de proposer des égalités qui ne figurent pas dans la liste et que certains connaissent. Les autres vérifient par calcul mental, puis on les ajoute au répertoire.

2. Examen de ce répertoire

Le maître amène les élèves à faire des remarques sur la liste établie. Tout est mélangé ; on n'est pas sûr que tous les renseignements dont on pourrait avoir besoin y soient ; il faut y mettre de l'ordre et compléter si on en a besoin. Le maître propose alors de rechercher en commun une méthode de classement.

Remarque :

Généralement, les enfants proposent de mettre ensemble tous les "fois 2" puis tous les "fois 3" etc....

.../...

### 3. Travail par équipe.

Pour travailler plus facilement le maître répartit les élèves en équipes et l'un se chargera de x2, l'autre de x3, etc...

Il s'agit pour chaque équipe de mettre de l'ordre puis de compléter par calcul mental.

Au bout de dix minutes, on arrête. Ce qui n'est pas terminé par un groupe le sera collectivement.

4. Affichage. Vérification par calcul mental et remarques sur les nombres d'une colonne, d'une ligne. On peut aussi remarquer des répétitions comme 24, 36 etc...

### 5. Travail individuel.

Table de Pythagore à remplir individuellement les égalités précédentes étant cachées : les élèves inscrivent ce dont ils se souviennent.

-----

Suggestion pour une utilisation ultérieure de la table de Pythagore.

Chaque élève possède une table vierge dans laquelle il inscrit au crayon ce dont il est sûr de se rappeler, au fur et à mesure de ses apprentissages. Le maître peut ainsi interroger les élèves d'après ces tables. Si on ne sait pas un produit qui est inscrit ou si on hésite trop, on l'efface et on l'inscrira plus tard quand on le saura avec certitude.

De même pour la classe : le maître affiche une grande table de Pythagore vierge. On n'inscrit les produits dans les cases que quand tous les élèves les savent. Si un jour, l'un d'entre eux a oublié le résultat, on l'efface. On le remettra lors d'une prochaine interrogation collective.

.../...

## CALCUL MENTAL SUR LA MULTIPLICATION AU CE 1

Les fonctions du calcul mental sont multiples et complexes

- s'entraîner à mobiliser l'ensemble de ses connaissances numériques (type le compte est bon).
- aider à la mémorisation des "tables" dont la connaissance conditionne l'autonomie des élèves dans les situations de calcul écrit, mental, ou avec calculatrice.
- pratiquer tel ou tel groupe de propriétés numériques (opérations, ordre et numération).

Il prend la forme de calcul "exact" ou "approché", ce dernier étant rendu indispensable au contrôle de calculs qui s'effectuent de plus en plus souvent sur une calculatrice électronique (\*)

### LES CONTRAINTES DE LA PROGRESSION

- 1) Une fois l'introduction de l'écriture multiplicative réalisée, en partie II, on peut proposer de calculer de petits produits par addition répétée.
  - 2) A partir de la partie III, en s'appuyant sur la disposition en tableau, s'exercer à utiliser des résultats connus pour en calculer de nouveaux enrichit les possibilités précédentes; par exemple, on pourra calculer  $7 \times 8$  à partir de  $7 \times 3$  et  $7 \times 5$  ou de  $7 \times 4$  (2 fois) ou de  $7 \times 7$  ou de  $8 \times 8$ ...
  - 3) Mémoriser les tables est un objectif qui ne prend son sens qu'à partir de la partie IV. En effet, les élèves perçoivent l'avantage de cette connaissance et celle-ci est alors désignée comme objet d'apprentissage.
- Un certain nombre de résultats sont déjà mémorisés, et les élèves connaissent différentes méthodes pour retrouver un résultat non su à partir de ceux qui lui sont connus.

.../...

---

(\*) La calculatrice peut être motivation pour le calcul mental : il y a des opérations qui se font plus vite de tête qu'en les frappant sur clavier ; d'où des matches qui peuvent être passionnants avec la machine !

4) La partie IV vient enrichir aussi les résultats calculables de tête, comme  $30 \times 40$ ,  $7 \times 500$  etc..; ces nouveaux calculs seront des exercices de numération, et renouvelleront l'intérêt de la connaissance des tables ; ils sont par ailleurs la base du contrôle des opérations sur calculatrice par les ordres de grandeur.

PROBLÈMES SUR LA MULTIPLICATION AU CE 1

La progression proposée est une progression de situation-problèmes et non de problèmes au sens "traditionnel" du terme (pour des parents d'élèves, par exemple). Ces situations problèmes sont conçues pour permettre l'élaboration de l'outil de calcul, tout en exploitant, en adaptant et en développant leurs connaissances et représentations mentales des élèves. La différence essentielle tient au fait que dans nos situations-problèmes, l'élève peut interagir avec la situation, corriger, grâce à l'expérience, des conceptions partielles ou erronées sur le savoir mathématique.

L'activité traditionnelle de résolution de problèmes est une activité qui n'en reste pas moins fondamentale. La confrontation avec la situation n'est plus matériellement possible, et ne peut donc se faire qu'à travers des représentations mentales déjà établies.

Nous allons développer à la fois l'importance et les limites de ces activités scolaires.

- Importance, du développement d'activités impliquant une organisation plus ou moins complexes de connaissances liées aux représentations mentales : aucune information ne peut plus provenir des sens, tout passe par le contrôle intellectuel. La recherche de solution ne peut se faire qu'à travers les simulations mentales de la situation, et un effort d'organisation logique des connaissances.

Le contrôle de la validité de cette solution conduit donc les élèves à investir tout leur système de connaissances pour formuler, organiser, et traiter les éléments de la situation qu'ils considèrent comme pertinents, par rapport à la question, dans leurs représentations mentales.

C'est pourquoi ce type d'activité est si souvent utilisé comme moyen d'entraînement à réinvestir les connaissances et surtout comme moyen de contrôle de ces connaissances.

.../...

- Limites, car tout repose sur deux conditions aussi essentielles l'une que l'autre :

1. L'existence de représentations mentales satisfaisantes de la situation, ce qui suppose la construction préalable de ces représentations par la résolution de problème du même ordre, en prise effective avec les éléments "concrets" de ces situations ou de situations que l'élève considère de lui-même comme assimilables.
2. La capacité à accéder à ces situations (et aux représentations mentales associées) par le canal exclusif du texte, ce qui met en jeu les capacités de lecture des élèves, et d'un type particulier de lecture mêlant l'évocation d'un certain contexte, à la densité d'informations d'un texte scientifique. La diversité et la richesse dans notre monde actuel des contextes vécus par chacun des élèves rend donc cet aspect encore plus essentiel aujourd'hui.

Ces deux aspects spécifiques de la résolution de problèmes "traditionnels" et leurs interactions sont à l'heure actuelle objets de nombreuses recherches.

Sans la réalisation de ces deux conditions : existence de représentations mentales et capacité de lecture, un élève ne peut effectuer d'activités mathématiques à partir d'un problème.

La réalisation de ces conditions permet à l'élève de proposer des réponses (voire des questions), dont il peut prendre la responsabilité, dans sa recherche personnelle comme dans les débats avec les autres. Il pourra donc tirer profit d'une réussite, comme d'un échec.

L'état actuel des recherches consacrées à ces questions, ne nous permet pas d'avancer des propositions concernant l'apprentissage de et par la résolution de problèmes.

Les propositions suivantes ne sont donc que le produit de réflexions encore naïves qui ont pour objet d'aider les maîtres à insérer les problèmes de leur choix dans la suite de situations-problèmes sans modifier l'attitude des élèves par rapport à ces situations-problèmes (autonomie et prise de responsabilité vis-à-vis de ses propres productions, comme vis-à-vis de celles des autres).



### PLACE DANS LA PROGRESSION

1. Si la solution d'un problème implique la recherche de l'écriture usuelle d'un nombre, l'introduction de problèmes mettant en jeu la multiplication ne peut être faite que lorsque les méthodes de calcul spécifiques à la multiplication permettront effectivement d'obtenir cette écriture usuelle plus efficacement que celles de l'addition : grands nombres, et pas avant la partie III, voire la partie IV.

2. Si la solution d'un problème est essentiellement le choix d'une écriture convenable d'un nombre, sans rechercher l'écriture usuelle de ce nombre, on peut introduire de tels problèmes dès la fin de la partie I. On trouvera après des exemples de tels problèmes.

### CONDUITE DE CLASSE SPECIFIQUE

L'objectif est de permettre à chaque élève de progresser dans sa capacité à investir ses connaissances pour :

- trouver une réponse
- en contrôler la validité

### Phase de recherche

Chaque élève doit pouvoir :

- mobiliser ses propres connaissances par une recherche personnelle à partir du texte ; ceci implique une attitude active par rapport au texte (dirigée par la question), la possibilité de poser des questions, d'obtenir des réponses...

- proposer une réponse claire à la question
- mettre en oeuvre (et de plus en plus formuler) ses moyens de contrôle de la validité de sa réponse, car c'est à partir de là que va se constituer l'essentiel de l'activité mathématique.

.../...

Phase de correction

Nous voulons :

- que chacun puisse savoir ce que ses moyens de contrôle lui permettent effectivement de contrôler
- que chacun puisse enrichir ses capacités de contrôle par la confrontation avec d'autres démarches.

Ce travail s'effectue dans les meilleures conditions lorsque le maître organise un véritable débat entre les élèves. Le rôle du maître est alors de :

- mettre en scène le débat (en utilisant la diversité des résultats obtenus et/ou des démarches).
- fournir une aide stimulante aux formulations de preuves, sans prendre parti sur leur validité
- assurer que les différentes propositions sont prises en compte, et aider à l'organisation de cette prise en compte
- ne prendre parti que lorsque le débat entre les élèves a permis à chacun d'éprouver son système de preuve en ce qu'il entraîne l'accord des autres
- garantir ce qui a été établi comme prouvé
- organiser une synthèse pertinente débouchant sur la rédaction de solution (s) à ce problème.

L'élève ne peut assurer la responsabilité intellectuelle du contenu de la rédaction de la solution au cours de la phase de recherche que si cette rédaction est réalisée comme une préparation, voire une simulation de ce débat.

.../...

Exemple de problème posé dans la partie I

NOM :.....PRENOM :.....DATE :.....

Entoure les réponses justes et barre les réponses fausses

On installe des carreaux au-dessus du lavabo. On les achète dans des caisses de 10. L'ouvrier pose sur le mur, 5 rangées avec 6 carreaux à chaque rangée. Il a donc placé :

$$10 + 5 + 6$$

$$5 \times 6$$

$$5 + 6$$

$$10 + 6$$

$$10 \times 5$$

Pour transporter les élèves, on demande aux parents de venir avec les voitures. Il y a 7 voitures et chaque voitures a 5 places. On met 4 élèves dans chaque voiture et on part.

Le nombre d'élèves que l'on transporte est donc :

$$7 \times 4$$

$$7 + 5 + 4$$

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$5 \times 4$$

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$5 + 4$$

.../...

Exemple de "Séance de problèmes" situées en partie II

INTENTIONS PEDAGOGIQUES

- \* Introduire un travail multiplicatif sur un texte écrit
- \* Elargir le champ d'application de l'écriture  $axb$
- \* Renforcer la distinction entre  $axb$  et  $a+b$

TEXTES DES PROBLEMES

Un jardinier a planté beaucoup de légumes. Il y a 7 rangées de 13 salades et 19 choux. Je voudrais connaître le nombre de salades. Prépare les calculs comme pour les faire avec la calculatrice.

Un jardinier a cueilli 7 choux verts, 18 choux fleurs et 19 poires. Je voudrais connaître le nombre de légumes qu'il a cueillis. Prépare les calculs comme pour les faire avec la calculatrice.

Un petit train est composé de 9 wagons. Chaque wagon a 18 places et 4 roues. Je voudrais savoir combien d'enfants peuvent s'asseoir dans ce train. Prépare les calculs comme pour les faire avec la calculatrice.

Nous avons préparé un goûter avec 9 pains aux raisins et 7 chocolatinnes. On les a posées sur 4 tables. Je voudrais savoir combien d'enfants vont pouvoir goûter. Prépare les calculs comme pour les faire avec la calculatrice.

Remarque :

On peut proposer ces problèmes sous une autre forme : un choix multiple de réponses, du type de la fiche précédente.

.../...

PROJET DE DEROULEMENT

Les enfants travaillent par groupes de 4. Le maître distribue un exemplaire de chaque problème à chaque groupe.

Phase 1

a) Résolution individuelle

Chaque élève prend un des problèmes et le résoud

Le maître ne lit pas les problèmes et n'intervient pas durant le temps de résolution.

Ceux qui vont plus lentement, se font aider par les camarades du groupes qui ont fini plus vite.

b) Mise en commun des résultats

	①	②	③	④
Equipe A				
Equipe B				
Equipe C				
Equipe D				
Equipe E				

Le maître a préparé un tableau à double entrée du type ci-dessus. Il lit chaque problème et inscrit les diverses écritures trouvées dans le tableau préparé.

.../...

On repère les résultats où il y a désaccord entre élèves et, éventuellement, ceux où il ya désaccord entre maître et élèves (ceci, quand il y a une même écriture fausse et que tous les élèves de la classe l'acceptent)

Remarque :

Le maître ne prend pas parti sur les désaccords entre élèves. Il les met en valeur, et renvoie la discussion au sein des groupes.

c) Retour au travail en groupes

Une discussion s'organise au sein de chaque groupe pour savoir quel est le bon résultat

Le maître s'assure qu'une discussion réelle a bien lieu dans chaque groupe.

d) Mise en commun des nouveaux résultats adapatés dans les divers groupes. On élimine les résultats faux en argumentant.

Le maître s'attachera à dégager les raisons du choix de chaque désignation, et particulièrement, le motif du rejet des réponses erronées.

Phase 2

Chaque groupe invente un problème, avec un nombre à chercher qui pourra s'écrire avec le signe "multiplier" On change d'histoire, on ne veut plus de jardinier, ni de goûter ni de train.

.../...

Les enfants discutent, inventent et se mettent d'accord pendant 3 minutes environ. Ils prennent ensuite 5 minutes pour écrire ce qu'ils ont décidé.

Cette écriture est interne au groupe.  
Elle est un aide-mémoire. Le maître ne soulèvera pas de problèmes de français et d'orthographe à ce moment.

Enfin, chaque groupe, à son tour, propose son problème à la classe, et les autres doivent dire si on peut répondre avec une écriture multiplicative ou non.

EXEMPLES D'EXERCICES COMPLÉMENTAIRES PLUS OU MOINS ORIGINAUX

---

- on a un rectangle de (4 x 5) points, on l'entoure d'une bordure de points. Combien de points a le nouveau rectangle
- on rétière.....
- on retire une bordure sur les 4 côtés.....
- on accroche trois rectangles de chacun 5 x 8 points pour faire un nouveau rectangle. Combien de points a le nouveau rectangle.
- on découpe un rectangle de 6 x 12 points en 3 rectangles de même nombre. Combien de points dans chaque rectangle.
- écrire très vite le nombre d'objets d'un assemblage non rectangulaire de tableaux en utilisant les signes +, x, - et les parenthèses
- écrire 385 avec les nombres que l'on entend lorsqu'on les dits, les signes +, x, et les parenthèses
- qui en a le plus et combien en plus ?  
A = 312 x 54                      B = 56 x 312
- qui est plus grand que 350 x 48 en étant plus petit que 350 x 49 ?
- qui se cache sous
  - \* 6 x  $\square$  = 30                      ?
  - \* 80 x  $\square$  = 4800                      ?
  - \*  $\square$  x 60 + 15 = 1815                      ?
  - \* (4 x 5) x 6                      ?
  - \* (3 x 5) x (4 + 6)                      ?

.../...



C.A.S.

C.E.1 CONTRÔLE DE FIN D'ANNÉE

NOM : ..... DATE : 11-6-83

PRENOM : Annelle

La fleuriste veut faire 38 bouquets.  
Dans chaque bouquet, il y a 15 fleurs.

Combien de fleurs va-t-elle utiliser ? 570

✱

	30	8	
10	10 x 30 300	8 x 10 80	10
5	5 x 30 150	5 x 8 40	5
	30	8	

300
80
150
40
<hr/>
570

C.E.1 CONTRÔLE DE FIN D'ANNÉE

NOM : ..... DATE : 14 - 6 - 83

PRENOM : Armelle

Tu trouves l'écriture usuelle :

125 x 4 = 500

$$\begin{array}{r}
 125 \\
 125 \\
 125 \\
 125 \\
 \hline
 500
 \end{array}$$

67 x 52 = 3484

	60	<del>50</del> 7	
50	50 x 60 3000	7 x 50 350	50
2	2 x 60 120	2 x 7 14	
	60	7	

$$\begin{array}{r}
 3000 \\
 + 350 \\
 + 120 \\
 + 14 \\
 \hline
 3484
 \end{array}$$

2

RESULTATS DE CONTROLES DE FIN D'ANNEE

Voici les résultats obtenus lors de contrôles de fin d'année en Juin 1984 et Juin 1985. Les mêmes épreuves ont été proposées aux enfants. Les acquisitions sur la multiplication dataient de deux mois environ avant ces contrôles. D'autres apprentissages ont été effectués entre temps, la soustraction notamment. Les résultats portent en 1984 sur 42 élèves et en 1985 sur 48 élèves. Dans les cases du tableau portant les résultats apparaissent les pourcentages de réussite à chaque question.

Problème

La fleuriste veut faire 38 bouquets. Dans chaque bouquet, il y a 15 fleurs. Combien de fleurs va-t-elle utiliser ?

e) avoir posé une opération qui permette de trouver la bonne réponse : soit  $38 \times 15$  soit  $38 + 38 + 38 \dots$  ou  $15 + 15 + 15 \dots$

f) donner le résultat exact dans une phrase réponse

	Juin 1984	Juin 1985	
125 x 4	a	83	90
	b	81	90
	c	71	86
	d	71	84
67 x 52	a	86	94
	b	71	88
	c	83	63
	d	74	59
Problème	e	76	72
	f	31	49

.../...

Codage des comportements :

$125 \times 4 =$
------------------

et  $67 \times 52$

- a) Savoir décomposer chacun des 2 facteurs du produit et les disposer autour d'un tableau.
- b) Savoir écrire les produits partiels dans les cases du tableau en se servant correctement de ce qui est écrit sur les bords de ce tableau.
- c) Savoir calculer les résultats des produits écrits dans chaque case du tableau en utilisant le répertoire multiplicatif qui doit être mémorisé et la "règle des zéros".
- d) Résultat final de l'opération. Savoir faire l'addition des résultats par écrits dans chaque case.

INTRODUCTION A LA PARTIE V : ALGORITHME  
"A LA GRECQUE" CE.2-CM

Les activités présentées dans cette partie prennent la suite des activités du CE1 présentées ci-dessus en parties I et IV, elles concernent le CE.2. et le CM.

La première série concerne les leçons de "remise en selle" destinées à homogénéiser la classe sur les compétences de la fin du CE1, y compris pour les quelques élèves qui n'auraient pas suivi la même progression. Ces compétences concernent tant l'écriture multiplicative associée au dénombrement d'une collection disposée en tableau, que les règles des zéros, et leur usage pour découper les collection en morceaux calculables à l'aide des tables. Elle se termine par une séance de travail\* sur des problèmes choisis pour présenter d'autres situations de dénombrement.

La deuxième série a pour objet de mener les élèves à l'algorithme à la grecque. Elle sera complétée en classe par des séances d'exercices.

Le travail sur l'algorithme se poursuit au CM, où l'on introduit le technique courante pour les produits dont les termes n'ont pas plus de 4 chiffres à partir de la technique grecque :

.../...

---

(\*) On perd beaucoup sur la pratique des propriétés des nombres au profit d'un mécanisme facile à exécuter qui ne fait plus intervenir que les tables. Mais c'est là le rôle spécifique d'une technique : libérer au maximum de la réflexion dans l'exécution de tâche pour permettre à l'élève de consacrer son effort sur les nouvelles questions auxquelles il va s'affronter.

L'entretien des connaissances sur les "règles de zéros" ne se fera plus désormais que par le calcul mental, elles seront réinvesties dans l'élaboration d'une technique de division.

- 129 -  
TECHNIQUES C.E.1.

354 x 68  
 300

50

4

300x60= 18000	60x50= 3000	4 x 60= 240
300x8=2400	50x8=400	8x4= 32

60

18000

3000

2400

8

400

32

---

24072

EXEMPLE D'ETAPE INTERMEDIAIRE

300	50	4
18000 m	3000 mc	240 cd
2400 mc	400 cd	32 du

60

27072

8

TECHNIQUE C.E.2

	3	5	4
1	1 8	3 0	2 4
4	2 4	4 0	3 2
	0	7	2

V - 1 : DÉNOMBREMENT D'UNE COLLECTION

C.E.2.

Durée : 4 séances

Comportements attendus

Tous les élèves, y compris le petit nombre qui n'a pas suivi la progression au CE1, ont trouvé les acquis de fin de CE1.

Séance 1

MATERIEL

\* collectif

Un quadrillage (carreaux 1cmx1cm) affiché au tableau :  
39x56

\* par groupe

Du papier blanc  
Du papier quadrillé (carreaux 1/2 x 1/2 cm) la  
feuille est de dimension supérieure à 39x56  
Un feutre

DEROULEMENT

Le maître affiche au tableau le quadrillage  
collectif.

Consigne

"Je voudrais que vous écriviez le nombre de  
carreaux de ce quadrillage".

.../...

Le maître laisse un très bref temps de réflexion aux élèves puis leur dit qu'ils vont travailler par groupes de deux. Ils ont à leur disposition du papier blanc, du papier quadrillé. Ils se mettent d'accord sur ce qu'ils vont demander au maître pour travailler (soit du papier blanc, soit du papier quadrillé).

Remarque :

Très rapidement, les enfants se rendent compte qu'ils ont besoin d'autres renseignements : le nombre de carreaux par ligne et le nombre de ligne. Le maître envoie alors 2 élèves compter et on inscrit ces renseignements au tableau.

Les enfants travaillent par groupes de deux.

Mise en commun

Lorsque la plupart des groupes ont terminé, on arrête le travail et le maître expose au tableau quelques exemples de travaux.

On vérifie en commun que le nombre trouvé est bien celui demandé.

Un ou deux élèves de chaque groupe explique le pourquoi du choix de leur méthode de calcul.

Séance 2 et suivantes

MATERIEL

Une grande feuille quadrillée (quadrillage 1cmx1cm) de 47x38 affichée au tableau. Une autre de 48x37.

Pour chaque élève : soit une feuille blanche, soit une feuille quadrillée (une page de grand cahier, 21x29,5 à petits carreaux par exemple). Chacun prend le matériel qui lui convient.



## DEROULEMENT

### Organisation

Le maître sépare la classe en deux groupes : ceux qui ont suivi la progression correspondante au CE2. Pour ceux-ci, il organise le travail de façon à donner à deux voisins un nombre différent à calculer, ce qui leur permettra de faire les deux calculs pour vérifier mutuellement leurs résultats.

Pour le 2<sup>o</sup> groupe (ceux qui n'ont pas abordé au CE1, la multiplication de cette façon et ceux qui semblent avoir perdu tout contrôle des règles de calcul), le maître donne à tous le même produit à calculer. Il peut proposer le découpage de la collection en 10x10 et s'en servir pour expliquer les règles de calcul, auxquelles la classe est arrivée en fin de CE1.

### Consigne

*"Trouvez le nombre de carreaux qu'il y a sur les feuilles qui sont affichées"*

### Remarque :

Comme la veille, à la demande des élèves, le maître envoie deux élèves pour compter le nombre de carreaux dans les lignes et les colonnes afin que tous possèdent les renseignements minima permettant de répondre.

### Mise en commun

A l'issue de ce travail, on affiche quelques productions typiques qui vont servir de base à une discussion sur les erreurs que l'on rencontre : répertoire, règle de calcul des produits, disposition de l'addition.

.../...

Le maître relève ces erreurs et les enfants sont amenés à se fixer comme objectif : résoudre les difficultés qui sont la source d'erreurs.

Exemples :

40	8	
30	$30 \times 40 =$ 1200	30
7	$7 \times 40 =$ 280	7
40	8	

1	2	0	0
2	4	0	0
2	8	0	0
0	4	9	6
1	6	8	5
3	2	0	0

2012488  
x 56

7) 14 7) 14 7) 14 7) 14 28  
28 56

oubli d'un zéro (120)

$47 \times 38 = 1786$  W

40	8	
30	$30 \times 40 =$ 1200	30
7	$7 \times 40 =$ 280	7
40	8	

30	$30 \times 7 =$ 210	30
7	$7 \times 7 =$ 49	7

1	2	0	0
2	4	0	0
2	8	0	0
0	4	9	6
1	6	8	5
3	2	0	0

2012488  
x 56

7) 14 7) 14 7) 14 7) 14 28  
28 56

erreur de répertoire  
( $3 \times 7 = 37$ )

40	8	
30	$40 \times 30 =$ 1200	30
7	$7 \times 30 =$ 210	7
40	8	

1	2	0	0
2	4	0	0
2	8	0	0
0	4	9	6
1	6	8	5
3	2	0	0

2012488  
x 56

il y a 445 car...

~~il y a de car 445~~

erreur de: répertoire ( $4 \times 7 = 29$ ), règle des zéros  
et addition mal posée

.../...

Quelques résultats

Sur 2 classes le pourcentage de réussite est de 51 %

Les enfants travaillent principalement avec du papier blanc. Très peu prennent du papier quadrillé.

74 % découpe en 4 morceaux,

30 % découpe avec des morceaux de 10x10

(certains ont essayé les deux méthodes)

Parmi ceux qui ont réussi, 90 % d'entre eux avaient découpé en 4 morceaux.

Les erreurs portent sur :

. le répertoire 65 % de ceux qui ont fait des erreurs

. la règle des zéros 22% de ceux qui ont fait des erreurs

. l'addition 13 % de ceux qui ont fait des erreurs

(2 élèves lents, un dans chaque classe n'avaient par terminé leur travail).

Remarques :

A l'école Jules Michelet, ce travail a du être mené durant 4 séances. Les nombres proposés à calculer ont été :  $43 \times 31$  ;  $46 \times 32$  ;  $56 \times 37$  ;  $234 \times 526$  ;  $471 \times 35$ . A ce moment là, les maîtres ont estimé que les enfants qui se trouvaient en difficulté dès le départ avaient atteint le niveau convenable pour poursuivre au même rythme que l'ensemble de la classe.

.../...



C.E.2.B.

	4 morceaux justes	4 morceaux faux	10x10	erreur de répertoire	erreur au nombre de zéro	addition mal posée	addition mal comptée			
BAF	X									
BOU	X									
CAA	X									
DEF		X			X					
DUA			X							
FEG	X									
ABA										
GAT	X									
GEF	X									
GRU		X		X						
ILL		X		X	X					
KOU			X							
LAE		X		X						
MAC		X								
MOD			X	X						
PEY										
POI		X			X					
RIC		X		X						
TEX	X									
UIJ										
VIJ		X		X	X	X				
VIA	X									
CEO										
CEQ										
CER										
CES										

Classe :

Date : 8 Novembre

Titre du pavé : résultats leçon 2

N°des exercices :

1ère séance 48x37

47x38

- Traitement demandé :

- Essaim Sur les exercices

Sur les élèves

- Marges

- avec CHI2

- nombre de colonnes des histogrammes

(1 < nb ≤ 16)

V-2 PROBLÈMES

C.E.2.

MATERIEL

Le texte photocopie de 2 problèmes (un texte pour la moitié des élèves, l'autre texte pour l'autre moitié.

Une feuille blanche

Un stylo

DEROULEMENT

Les élèves travaillent par groupe de 4 mais ce groupe éclate par moment et ils travaillent alors individuellement.

Le maître distribue 2 textes de chaque problème par groupe (voir les textes en annexe) les enfants les lisent puis choisissent celui qu'ils veulent résoudre.

Quand le choix est fait chaque enfant résout le problème individuellement. Pendant ce temps, le maître prépare au tableau 2 colonnes, une pour chaque problème. Quand les enfants ont terminé le maître collecte les diverses réponses existantes et ne fait aucun commentaire (à savoir: il ne décide pas de ce qui est juste ou faux).

Il s'agit maintenant de savoir qui a raison. La question est alors posée aux groupes qui doivent examiner le travail de leurs camarades et dire leur point de vue sur les réponses.

Au bout d'un temps de recherche des erreurs et de concertation, on inscrit les nouvelles réponses.

\* S'il y a de nouveaux litiges, on corrige collectivement pour que la classe entière tranche.

\* S'il y a entente on vérifie alors collectivement l'exactitude de la réponse.

**A** 1 Un train est formé de 17 wagons. Dans chaque wagon il y a 45 places assises et 10 places debout.

**B** 2 Combien de voyageurs peuvent monter dans ce train ?

Dans une école on a acheté 24 dictionnaires ainsi qu'une couverture pour chaque dictionnaire.

Chaque dictionnaire coûte 56 F et chaque couverture coûte 1 F.

Combien a-t-on dépensé d'argent dans cette école ?

Résultats

		$45 \times 17$	$45 \times 17$ $10 \times 17$	$17 + 45 + 10$	$45 + 10$	$(24 \times 56) + 1$	$24 \times 56$	$(24 \times 56) + 1$	$24 + 56 + 1$		
BAF		X				XX					
BOU	X										
CAA		X						X			
DEF	X						X				
DUA											
FEG	X					X					
ABA				XX							X
GAT				XX							X
GEF								X			
GRU		X				X					
ILL			X								
KOU								X			
LAE	X										
MAC	X						X				
MOD	X								X		
PEY			X								
POI											
RIC		X						X			
TEX											
UTJ											
VLJ											
VIA					X						
CEO											
CEQ											
CER											
CES											

Classe : CE2B

Titre du pavé : stratégies sur les problèmes

Date : 22 Novembre 83

N° des exercices

- Traitement demandé
  - Essaim Sur les exercices
  - Sur les élèves
- Marges
  - avec CHI2
  - nombre de colonnes des histogrammes ( $1 < nb \leq 16$ )

V - 3 : ALGORITHME À LA GRECQUE

C.E.2.

Durée : 3 à 4 séances

Comportements attendus

Savoir faire directement l'addition sur les nombres du tableau, dans la disposition "grecque".

MATERIEL

Feuilles blanches ; feuille de plastique transparent (et feutre effaçable) pour exposer successivement les méthodes de calcul sans recopier le calcul de base.

Séance 1

Déroulement :

Calcul mental : retrouver facilement  $4 \times 7$  (à partir de  $2 \times 7$ ) ;  $8 \times 5$  ;  $3 \times 8$  ;  $6 \times 3$ .

Consigne :

Chacun sait calculer de grands produits ; cette année, nous devons apprendre à le faire sans poser l'addition à côté, en la faisant directement sur les nombres des cases du tableau.

Le nombre à calculer est  $372 \times 54$ . Vous pouvez travailler seul ou à deux.

Le maître mène la correction en deux temps : après la collecte des résultats, il organise d'abord le calcul de chacune des cases du découpage ; puis il pose le problème des moyens employés pour faire l'addition et collecte les suggestions. Il fait ensuite présenter au tableau chacune des suggestions (en utilisant la feuille plastique s'il y en a). Les différentes démarches sont commentées selon les risques d'erreur constatés. Le maître ne prend pas position, mais aide à expliciter les démarches utilisées voire de nouvelles, pendant la correction.



Il est alors <sup>(1)</sup> convenu de ne plus porter les écritures multiplicatives dans les cases.

Remarque : Les méthodes proposées sont :  
- repérer en cochant sous les chiffres des unités, dizaines, centaines, ou en entourant les chiffres à additionner.

Séances 2 et 3
----------------

MATERIEL

Celui de la séance précédente, et en plus la table de multiplication.

DEROULEMENT

La séance se déroule comme la précédente, avec de nouveaux nombres (ils sont choisis au début en faisant en sorte que les produits de chiffres fournissent tous des nombres à deux chiffres).

Lors de la correction, le maître organise l'échange sur la recherche d'une disposition qui simplifie le calcul direct de l'addition. La proposition d'abandonner l'écriture des zéros vient plus ou moins vite avec la remarque de l'addition "en diagonale". Le maître laisse essayer les propositions sans prendre position, à condition qu'elles simplifient le calcul en maintenant la fiabilité : chacun doit pouvoir vérifier que l'on ne s'est pas trompé.

Séance 4 : L'Institutionnalisation

MATERIEL

Tables de multiplication, dispositions du dernier calcul de la séance précédente.

DEROULEMENT

Sur le dernier calcul de la séance précédente, le maître présente la disposition à la grecque du découpage en regard des dispositions utilisées par les élèves.

Il organise l'explication de l'abandon des zéros dans les cases et montre comment on dispose les chiffres du résultat.

.../...

---

(1) C'est au maître de donner le feu vert à une modification de ce qui est établi, institutionnalisé.

B I B L I O G R A P H I E

\*  
\* \*

PUBLICATIONS POUR LES MAITRES

G.DERAMECOURT

. *La multiplication au C.E.*

G.DERAMECOURT, F.MARTIN, E. OLEJNITZCHACK

. *Maths-C.P.*

G.DERAMECOURT, F.MARTIN

. *Ateliers Mathématiques*

J.BRIAND, G.VINRICH, P.TEULE-SENSACQ

. *La division (sous presse)*

ETUDES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

M.H.SALIN

. *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire.*

D.COQUIN-VIENNOT

. *Algorithmes et sous algorithmes. Etude du calcul d'un produit.*

G.BROUSSEAU

. *Etude des phénomènes d'enseignement.*

J.PERES

. *Utilisation d'une théorie des situations...Construction d'un code de désignation d'objets à l'Ecole Maternelle.*

.../...

EXTRAIT DE :

Actes du Congrès International des Sciences de l'Education  
Paris - 1973.

COMMUNICATIONS

PEUT-ON AMELIORER LE CALCUL DES PRODUITS  
DE NOMBRES NATURELS ?

Guy Brousseau  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

Nous nous préoccupons, dans cette commission, de reconnaître, à travers des observations ou des expériences sur l'éducation, les différents statuts qui peuvent être attribués à des objets mathématiques et leurs relations avec les objectifs de l'enseignement.

J'ai pensé qu'il pourrait être utile de rapporter ici des résultats très simples d'une expérience que j'ai faite à l'I.R.E.M. de Bordeaux dans le cadre d'une recherche sur les conditions d'apprentissage des algorithmes et du raisonnement.

Pour des raisons de temps je me limiterai volontairement à l'étude sommaire d'un seul phénomène. Si cela ne satisfait notre goût commun pour les représentations fidèles de l'activité de l'enfant, j'espère que la manière dont les mathématiques interviennent dans cette étude n'en sera pas modifiée.

1 — L'EXPERIENCE

1.1 — CADRE DE L'EXPERIENCE

Il s'agissait de trouver une méthode pédagogique qui permettrait aux enfants de se constituer progressivement une méthode de calcul du produit de deux naturels, sans qu'aucune technique ne leur soit communiquée ni qu'aucun entraînement formel au calcul ne soit exigé d'eux. Nous pensions qu'après, en appliquant cette méthode nous pourrions étudier, à travers l'évolution des algorithmes découverts et utilisés par les enfants, quelques unes des lois des processus naturels de mathématisation dont nous soupçonnons l'existence.

Avant de concevoir cette méthode nous avons examiné tous les algorithmes qui pourraient apparaître et tenté de les caractériser afin de prévoir, à travers les comportements observés, la manifestation de paramètres intéressants : nombre d'erreurs, vitesse d'exécution, vitesse d'apprentissage... etc.

Au cours de cette analyse il nous a paru possible de vérifier la pertinence de

.../...

certains modèles de comportement des enfants en organisant la courte expérience suivante.

1.2 — PRINCIPE DE L'EXPÉRIENCE

Nous avons préparé une épreuve comportant un certain nombre de multiplications que nous avons présentées à 600 enfants (dont 150 du niveau CM2 : 9 à 11 ans). Nous contrôlions à peu près un certain nombre de variables : effet d'apprentissage et de fatigue, QI, valeur des maîtres, origine socioculturelle des élèves... et nous en étudions d'autres : taille de l'opération, présence de retenues, fréquence relative des produits élémentaires, niveau scolaire... etc.

Tous les enfants ont calculé avec la méthode à l'italienne (voir figure 1) qu'on leur avait apprise.

Nous avons alors enseigné à certains d'entre eux la méthode « per gélosia » (voir figure 1) (une heure d'apprentissage). Nous avons contrôlé qu'il y avait un progrès très net (très significatif) dans les résultats (beaucoup moins d'erreurs) sans différence apparente dans les temps d'exécution.

1.3. REALISATION

Il n'est pas nécessaire de décrire ici les précautions délicates mais classiques que nous avons prises lors de cette expérience. *Le but des deux paragraphes suivants de cette étude est d'expliquer le progrès observé et de le prévoir.*

2 - INTERPRETATION : DESCRIPTION SIMPLIFIÉE DU COMPORTEMENT D'UN ENFANT QUI CALCULE LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES

2.1. DESCRIPTION DU COMPORTEMENT OBSERVÉ

2.1.1. - *L'activité* : Nous n'observons — de façon très grossière — que les comportements

— qui concrétisent l'objectif éducation suivant : « l'enfant est capable de trouver le produit de deux naturels quelconques. »

— qui se manifestent par une séquence d'activités observables (écrire un résultat partiel par exemple...) ou décelables très directement (lire tels chiffres...)

— et où il est fait appel à certaines formules (d'une table d'addition, ou d'une table de multiplication par exemple) supposées connues à l'avance.

Par exemple nous ne décrivons pas ici l'activité d'un sujet dont toutes les formules figurent dans une mémoire extérieure et qui cherche le produit dans une table, ou à l'aide d'une table (de logarithmes par exemple)..

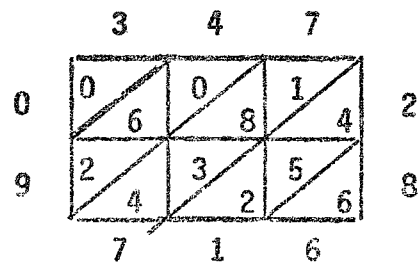
2.1.2. - *Première décomposition de cette activité* : Dans ces conditions, l'articulation de cette séquence d'activités est observable — elle peut être représentée par un ordinogramme, c'est-à-dire par un schéma du programme de calcul —

Voici par exemple (fig. 1) le calcul du produit  $347 \times 28$

Par la méthode à l'italienne

Par la méthode per gélosia

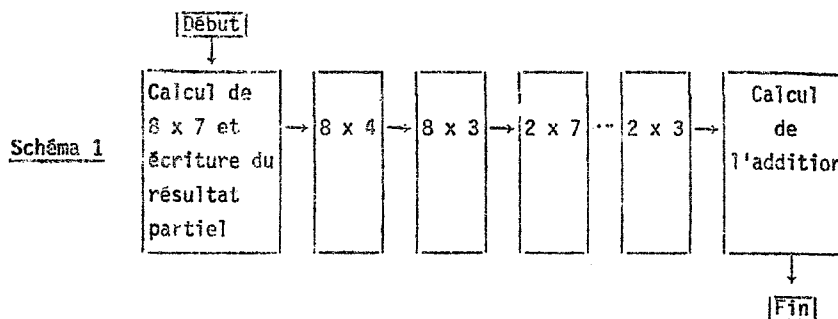
$$\begin{array}{r}
 347 \\
 \times 28 \\
 \hline
 2776 \\
 694 \\
 \hline
 9716
 \end{array}$$



.../...

Dans les deux cas, il a fallu calculer successivement tous les produits partiels :  
 (8 × 7 ; 8 × 4 ; 8 × 3 ; 2 × 7 ; 2 × 4 ; 2 × 3)  
 dans cet ordre avec la première méthode, dans un ordre quelconque pour la seconde.

Le schéma 1 représente un ordinogramme pouvant correspondre aux deux méthodes



On peut en observant le sujet décider si chaque action a été effectuée, dans cet ordre.

Note : Plus généralement si on calcule le produit de deux naturels a comportant p chiffres et b comportant q chiffres

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad i=p-1 \quad \quad \quad j=q-1 \\
 a \times b &= \sum_{i=0} a_i 10^i \times \sum_{j=0} b_j 10^j \\
 & \quad \quad \quad k=(p-1) + (q-1) \\
 &= \sum_{k=0} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j 10^{i+j} \right)
 \end{aligned}$$

il faut calculer  $p \times q$  produits partiels et l'organigramme comporte  $p \times q$  calculs de résultats partiels avant le calcul de l'addition. Nous dirons que l'opération est de taille  $p \times q$ . Exemple : l'opération de la figure 1 est de taille 6.

2.13. - *Décomposition plus fine de l'activité* : Nous pouvons aussi décomposer le calcul d'un produit partiel en activités plus élémentaires. Les deux méthodes de calcul ne relèvent plus d'un même ordinogramme ; mais on s'aperçoit que le calcul de chaque résultat partiel fait appel à une même séquence d'actions ou de décisions. Nous appellerons « boucle » une telle séquence répétitive. Les schémas 2 et 3 représentent une boucle de chaque méthode (les ordinogrammes complets pour l'exemple de la figure 1 comporteraient 6 boucles). La taille de l'opération donne le nombre de boucles. Bien sûr il est fait alors appel à des aptitudes dont il faudra vérifier que le sujet les possède.

2.14 - *Vérification de ce modèle de comportement* : Il est plus difficile de vérifier directement que ces ordinogrammes détaillés représentent bien l'activité effective de l'enfant. On peut néanmoins mettre en évidence l'existence de certaines parties du programme en montrant que certains paramètres y sont attachés : temps d'exécution, probabilités d'erreurs etc... Montrer que l'articulation prévue par l'organigramme est correcte en montrant qu'elle permet de calculer le temps d'exécution total et la probabilité d'erreur dans chaque boucle.

Dans l'exemple présent nous ne chercherons pas à analyser une boucle. Nous étudierons seulement la séquence représentée par le schéma 1. Nous nous servirons seulement du fait que la boucle de la méthode à l'italienne (schéma 2) est beaucoup plus complexe que celle de la méthode per gélosia (schéma 3) après avoir vérifié expérimentalement que cette complexité entraîne bien une différence dans les temps d'exécution ou la fiabilité.

Pour simplifier nous n'étudierons que la fiabilité. Mais il est clair que la conviction que l'ordinogramme est un bon modèle de comportement doit être étayée par des vérifications indépendantes et convergentes.

## 2.2 — DESCRIPTION DES MODÈLES SIMPLIFIÉS DU SUJET

2.2.1 - Chaque ordinogramme est réalisé en supposant que le sujet est capable d'accomplir une certaine liste d'activités (celles qui figurent dans les cases). On associe arbitrairement souvent à ces activités certaines capacités du sujet : par exemple « le sujet est doué d'une mémoire où il loge le répertoire des formules de la « table » ».

Les systèmes comportant les différentes mémoires évoquées dans l'ordinogramme et doués de la capacité d'effectuer les calculs qu'il décrit constituent des modèles simplifiés du sujet<sup>1</sup>.

2.2.2 - Valeur de ces modèles : Ces modèles ne sont intéressants que dans la mesure où ils permettent de simuler le comportement de l'élève ou des élèves de façon satisfaisante. Ils représentent néanmoins le système d'objets et de règles sur lequel on est en train de raisonner et facilitent de ce fait le jugement que le chercheur peut porter sur la valeur de ses réflexions.

2.2.3 - *Modèle* : Dans le cas présent nous nous contenterons d'un modèle grossier et nous supposerons que le sujet accomplit successivement  $p \times q$  fois une même tâche (boucle) — sans erreur sur l'ordre ou la nature de ces tâches successives.

— qu'au cours de chaque boucle  $k$ , le calcul (nous dirons l'actualisation) d'une formule élémentaire est l'occasion d'erreurs qui se manifestent avec une certaine fréquence  $x_k$

— que  $x_k$  est la manifestation aléatoire d'une probabilité d'erreur  $e_k$  : probabilité que l'élève se trompe à la  $k$ ème « boucle » (à distribution gaussienne)

— que les épreuves (les boucles) successives sont indépendantes (l'erreur au rang  $k$  ne dépend pas des résultats aux rangs précédents).

— que toutes les probabilités sont égales à  $e$  que nous appellerons « erreur locale »

2.2.4 - *Discussion du modèle* : Chaque condition limite le modèle et ne peut être acceptée que si les résultats expérimentaux le permettent : par exemple la dernière condition implique que l'on néglige les différences de fréquences d'erreurs entre les produits difficiles comme  $7 \times 8$  et les produits faciles comme  $2 \times 2$ . Nos observations montrent que ces différences sont significatives et même importantes. On peut toutefois conserver le modèle en supposant qu'on l'applique à des enfants réalisant des opérations où ce facteur serait maîtrisé convenablement.

La condition précédente néglige les effets de fatigue. Nous ne serons fondés à l'accepter que si la fidélité du modèle obtenu est suffisante pour l'usage que nous en faisons.

2.2.5 - *Ajustement* : Pour ajuster cette fidélité nous pouvons après analyse des résultats introduire dans le modèle de base certains paramètres que nous pouvons faire varier pour simuler les observations. Par exemple : A chaque produit  $i \times j$  de la table est attribuée une probabilité  $e_{ij}$  de l'actualiser de façon erronée, ou encore, à chaque rang  $k$  de la boucle est attribuée une fonction croissante de  $k$ ,  $k(e_{ij})$ , qui modifie  $e_{ij}$  et représente la fatigue ; etc...

Nous pourrions être amenés à faire appel à un modèle plus fin et à distinguer les boucles comportant une retenue et celles qui n'en comportent pas dans l'algorithme à l'italienne ou le nombre des mémoires de travail mobilisées à un instant donné ; ou lorsque nous nous intéressons à l'apprentissage, la dimension des mémoires permanentes — c'est-à-dire le nombre des formules à retenir — ou le nombre d'opérations élémentaires à effectuer.

1. Human problem solving. Newell et Simon : 1971.

Les précautions, les choix et les vérifications nécessaires ont fait l'objet de travaux que je ne rapporterais pas ici. Acceptons que le sujet fait  $p \times q$  boucles et qu'à chacune il a une probabilité de se tromper.

2.3 — VALEURS DES PARAMÈTRES

2.3.1 - Pour fixer les idées voici quelques pourcentages d'erreurs dans des boucles, mesurés, dans différents cas, au cours d'opérations à l'italienne

$m + c/\sqrt{N}$ (N)	Sans retenue	Avec retenue
Produits seuls Taille 1 x 1	3,73 ± 0,56 (98)	
Taille 2 x 1	1,20 ± 0,55 (17)	7,46 ± 1,08 (19)
Taille 3 x 1	2,40 ± 1,32 (13)	11,47 ± 1,47 (17)

Tableau I

établi sur 141 enfants de 9 à 11 ans

2.3.2 - La taille des opérations proposées aux enfants de cet âge est assez généralement comprise entre 8 et 16.

3 — INTERPRETATION : ANALYSE DU MODELE

Nous avons maintenant un modèle mathématique assez simple pour traiter certaines données retenues.

3.1 — PROBABILITÉ D'ERREUR DANS LA SUITE ENTIÈRE D'ACTIVITÉS

A chaque boucle un sujet donné a une probabilité (1-e) de ne pas se tromper (fiabilité). Si l'opération comporte  $p \times q$  boucles la probabilité de ne se tromper à aucune est  $(1 - e)^{p \times q} = 1 - e_g = F$  eg probabilité d'erreur « globale » F fiabilité.

Note : Dans le cas où les probabilités locales sont différenciées suivant divers facteurs, la formule devient :

$$1 - e_g = \prod_{k=1}^{k=p \times q} (1 - e_k)$$

$e_k$  : probabilité d'erreur à la kième boucle  
on peut tenir compte aussi des erreurs dans l'addition : probabilité e +  
exemple :  $F = 1 - e_g = (1 - e)^{p \times q} \times (1 - e)$

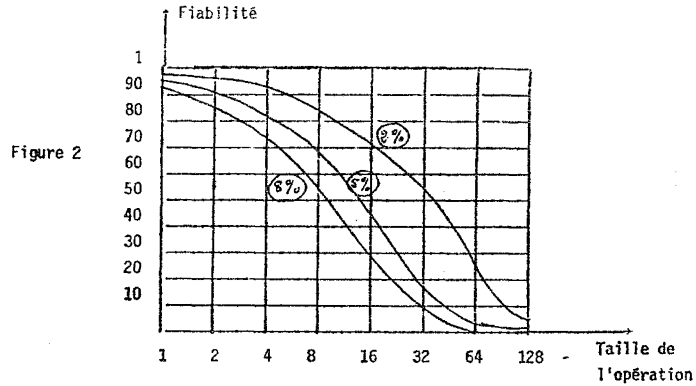
3.2 — VÉRIFICATION

La vérification du modèle peut se faire par exemple à l'aide d'un autre « modèle mathématique » très classique (test du  $\chi^2$ ) qui permet de tester l'écart entre la valeur prévue par notre jeu d'hypothèses et la valeur observée.

3.3 — CONSÉQUENCES

Le modèle est peu précis mais fidèle et assez satisfaisant (admettons le ici en tout cas)

La figure 2 montre des courbes représentatives de F en fonction de la taille t de l'opération pour 3 valeurs voisines de la probabilité d'erreur eg dans une boucle.



3.3.1 — On peut y vérifier que la fiabilité devient très vite négligeable lorsque la taille de l'opération croît.

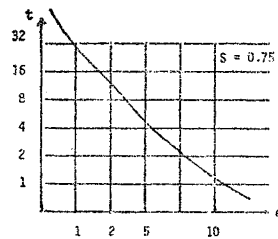
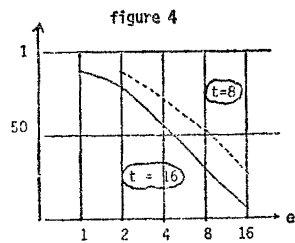
Supposons que nous fixions à 75 % de réussite le seuil inférieur de réussite admis par l'élève (ou l'institution). Il veut réussir ses opérations 3 fois sur quatre. La taille maximum des opérations qu'il peut entreprendre en fonction de sa probabilité d'erreur est donnée par la figure 3.

La relation que nous venons de mettre en évidence joue sans doute un grand rôle au cours de l'apprentissage.

Pour des fiabilités de 0,85 à 0,99

pour des tailles d'opérations « raisonnables » (entre 8 et 16) la sensibilité de F aux variations de fiabilité locale est assez grande.

En dehors des intervalles que nous signalons les progrès seront inappréciables quels que soient les efforts des enfants. (Fig. 4)



Un élève qui passe de 92 % à 96 % de fiabilité locale passe de 26 % à 50 % de réussite : résultat peu sensible. Lorsqu'il passe de 96 % à 98 % sa réussite globale passe de 50 % à 72 %. Le progrès apparaît plus nettement !



3.3.2 - Supposons que, par un moyen quelconque, nous puissions obtenir d'un seul coup un important gain de fiabilité locale. Si nous connaissons le nombre d'enfants, soumis à l'expérience, ayant une fiabilité locale donnée alors nous pourrions prévoir le nombre d'enfants qui vont passer de la zone des résultats médiocres (moins de 3 réussites sur 4) à celle des résultats acceptables (plus de 75 % de réussite). Voir l'exemple du § 3.4.2

3.3.3 - Remarquons à ce propos que nous pouvons alors étudier l'importance relative des facteurs du modèle (comparaison des  $\frac{dF}{dx}$  par exemple) ou comparer leur efficacité sur l'ensemble des élèves (accroissement du taux de réussite par rapport au temps d'apprentissage). Il s'agit moins d'optimiser directement l'action de l'éducateur que de détecter quel genre de facteurs commandent l'évolution du système de l'élève, par exemple par la recherche inconsciente de l'économie, ou de l'efficacité optimale.

3.4 — VÉRIFICATION DE L'INTERPRÉTATION — APPLICATIONS PÉDAGOGIQUES

3.4.1 - En nous appuyant sur la comparaison de nos deux méthodes (schéma 2 et 3) nous avons émis l'hypothèse que la fréquence des erreurs commises dans une boucle de l'algorithme per gélosia devait être dans tous les cas inférieure ou égale à celle de l'algorithme à l'italienne en l'absence de retenue.

3.4.2 - Cette hypothèse plausible nous a permis d'estimer le gain que l'on pourrait espérer du point de vue des résultats du remplacement d'un algorithme par un autre.

Exemple : Voici une classe ordinaire de 25 élèves répartis en 6 groupes dont les fiabilités locales moyennes eSR (sans retenue) et eAR (avec retenue) sont données dans les colonnes 2 et 3 du tableau II, avec les effectifs de chaque groupe (la colonne 1).

TABLEAU II

N	e <sub>SR</sub>	e <sub>AR</sub>	Taille 8		Amélioration de la fiabilité	Taille 16		Amélioration de la fiabilité
			$(1-e_{SR})^2(1-e_{AR})^6$	$(1-e_{SR})^6$		$(1-e_{SR})^4(1-e_{AR})^{12}$	$(1-e_{AR})^{16}$	
5	0,3	2	0,87	0,97	10 %	0,75	0,94	19 %
7	0,5	4	0,76	0,96	20 %	0,57	0,92	35 %
6	1	7	0,62	0,92	30 %	0,39	0,85	46 %
3	2	9	0,53	0,85	32 %	0,27	0,72	45 %
1	4	11	0,45	0,72	27 %	0,17	0,52	35 %
3	8	15	0,36	0,52	16 %	0,10	0,27	17 %
25 élèves	Moyenne 1,8	Moyenne 6,55						
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)

L'amélioration de la fiabilité est plus forte pour les élèves moyens

Nous supposons que les opérations proposées aux enfants comportent 25 % de produits partiels sans retenue et 75 % de produits partiels avec retenue. Pour chaque groupe d'enfants les fiabilités globales calculées pour l'algorithme à l'italienne et pour les tailles 8 et 16 colonnes 4 et 7 sont comparées aux fiabilités correspondantes prévisibles avec l'algorithme per gélosia (colonnes 5 et 8). Le gain en % de fiabilité : 100 (F Nouvelle — F Ancienne) est porté dans les colonnes 6 et pour la taille 8 et 9 pour la taille 16.

1<sup>re</sup> conclusion : Il est visible que l'amélioration de fiabilité est plus forte pour les élèves moyens et pour les tailles plus grandes.

2<sup>e</sup> conclusion : Au seuil de réussite acceptable de 70 %, pour la taille 8 ; la méthode classique permet 12 réussites sur 25 élèves, soit 48 % — l'autre permet d'espérer la réussite de 22 élèves soit 88 % — Nous pourrions dire que le gain pédagogique est de 40 %. Pour la taille 16 le gain serait de  $84 - 20 = 64$  %

3.4.3 - En fait cette hypothèse s'est trouvée à peu près confirmée mais nous étudions et vérifions un modèle plus complexe : l'amélioration obtenue a été meilleure que celle qui était espérée, d'autres facteurs ont joué.

3.4.4. - Nous nous garderons bien pour l'instant de tirer de ces réflexions des conclusions hâtives au sujet des méthodes d'enseignement mais il a été vérifié qu'après des élèves qui ne parviennent pas au CM ou en 6<sup>e</sup> à des résultats satisfaisants dans le calcul des produits, l'apprentissage rapide de la méthode « per gélosia » donne des résultats excellents.

#### 4 — CONJECTURES : MODELES D'APPRENTISSAGE

##### 4.1. — QUELQUES DEFINITIONS

##### 4.1.1. - Répertoire - Ordinogramme

a) - Pour calculer un produit quelconque suivant l'un de nos ordinogrammes il est fait appel à des formules de référence que l'on suppose stockées dans une mémoire interne (produit appris par cœur par exemple) ou externe (table consultée sur le champ).

L'ensemble R des formules de référence dont dispose un élève à un moment donné constitue son *répertoire*. La suite O d'activités qu'il est capable d'exécuter, et dont l'ordinogramme est un modèle, jointe à ce répertoire, lui permet de produire un certain ensemble de formules F.

b) - Par exemple : si R est l'ensemble des produits de naturels à la forme  $a \times b = c$ , où  $a \leq 5$ ,  $b < 10$  (R est « les tables de 1 à 5 ») et si O est l'algorithme à l'italienne,  $\langle R, O \rangle$  permet à l'élève de produire l'égalité :  $32 \times 5 = 160$  mais pas  $49 \times 8 = 392$

c) - Soit  $f_{a,b}$  la fiabilité du produit  $a \times b$ ,  $v$  la vitesse d'exécution d'une tâche élémentaire,  $r$  la fiabilité de la boucle de retenue...

A un instant donné les possibilités de l'élève peuvent se déduire — du couple  $\langle R, O \rangle$  qui caractérise en quelque sorte la compétence du sujet

— d'un n-uplet

$\langle f_{1,1}, \dots, f_{a,b}, \dots, f_{a \max, b \max}, r, v_1, \dots, v_n \dots \rangle$

qui caractérise la manière dont le sujet actualise  $\langle R, O \rangle$  et donc permet d'expliquer sa performance.

##### 4.1.2. - Processus et modèles d'apprentissage

a) - Au cours de l'apprentissage les composantes de ce n-uplet se modifient : Nous suggérons le vocabulaire suivant : La suite des n-uplets qui décrit les états successifs des possibilités du sujet — quand elle peut être décrite — constitue un « processus d'apprentissage »

Si un système de règles et d'hypothèses permet d'engendrer cette suite, à la manière d'un automate déterministe ou d'un processus stochastique, il constitue un modèle d'apprentissage.

La suite des activités didactiques à organiser pour obtenir les états successifs du sujet est un programme d'apprentissage.

b) - Exemple : Ne considérons que les couples  $\langle R, O \rangle$  composés d'un réper-

toire et d'un ordinogramme de calcul. Les méthodes classiques n'envisagent que les processus tels que  $Ri, CRi + 1$  : c'est à dire où le répertoire augmente d'une étape à l'autre (avec des mesures pédagogiques pour empêcher ou corriger des diminutions) et tels que  $Oi$  est un sous-ordinogramme de  $Oi + 1$ . Exemple : Dans l'apprentissage de l'algorithme à l'italienne, en France, les enfants de 7 à 8 ans disposent d'un répertoire réduit aux tables de 1, 2, 3 et d'un ordinogramme simplifié : produits sans retenues : multiplicateurs à un chiffre. Leur répertoire s'enrichira plus tard des tables suivantes et leur ordinogramme se complexifiera : produits de plus grands nombres ; retenues : produits de nombres à virgule... Les ensembles (Fi) de formules calculables sont emboîtés et croissants. Nous essaierons de montrer qu'il existe d'autres modèles.

c) - Comme pour les modèles de comportement il faut d'abord mettre en évidence les facteurs et les paramètres qui devront figurer dans le modèle d'apprentissage :

Nombre de formules du répertoire, fréquence d'emploi, seuil de fiabilité acceptable de l'élève, fiabilité de l'ordinogramme, nombre de mémoires de travail utilisées simultanément, ensemble des formules engendré par  $\langle Ri, Oi \rangle$ , incertitude liée au modèle sur un champ d'application donné, temps d'exécution, temps d'apprentissage fatigue du sujet... etc

On peut alors découvrir que certains processus d'apprentissage sont optimaux d'un certain point de vue et expliquer par exemple leur apparition spontanée ou en trouver les conditions. C'est la fidélité des modèles de comportement et d'apprentissage qui commande la valeur de ces points de vue et non pas seulement leur qualité mathématique.

#### 4.2. — OBJECTIFS DE LA RECHERCHE SUR L'APPRENTISSAGE DES ALGORITHMES

##### 4.2.1 - Difficultés avec les méthodes classiques

Les principaux reproches que l'on peut faire à l'apprentissage classique sont :

- le temps d'apprentissage démesuré (3 ans)
- le manque d'intérêt et de retombées mathématiques de la méthode, elle-même basée sur des processus de mise en mémoire et d'exécution étrangers au contenu mathématique. Ces connaissances acquises sont mécaniques et se prêtent mal à l'analyse et à l'adaptation.
- La difficulté à motiver chacune des étapes de l'apprentissage ; seule motivation : Il faut savoir calculer, donc il faut apprendre à le faire. La méthode demande coercition et volonté de réussir, attention soutenue.
- Les résultats de l'apprentissage ne sont pas aussi bons qu'on le voudrait : de nombreux enfants ont des difficultés avec le sens de l'opération ; d'autres sont bloqués dans un refus des mathématiques ; la fiabilité n'est pas très grande.

##### 4.2.2 - Causes

Divers travaux récents nous ont conduit à penser qu'une même cause pouvait être à l'origine de toutes ces difficultés : l'analyse qui a conduit au choix du modèle d'apprentissage.

Essentiellement cette analyse conclut ainsi :

- a) — Le calcul d'un produit de naturels est un algorithme complexe. Il ne peut être inventé par l'enfant. Il doit être appris précocement de façon à pouvoir être utilisé mécaniquement, sans faute, plus tard.
- b) — Pour enseigner un mécanisme, il faut enseigner l'organigramme par emploi répété, sous la forme où il sera utilisé finalement et mettre en mémoire les formules du répertoire (par apprentissage sériel). Le « sens » de l'opération, c'est-à-dire la reconnaissance des occasions d'utiliser le calcul, ne peut pas dans ces conditions découler de sa « compréhension » et doit faire l'objet d'un apprentissage séparé.

Il faut bien voir que ces conclusions sont fondées sur l'idée que le calcul est un mécanisme, qu'on connaît un moyen d'enseigner les mécanismes, et donc que l'on peut appliquer l'un à l'autre.

Le modèle d'apprentissage classique est d'ailleurs si bien accepté par les professeurs de mathématiques qu'ils ont essayé de transférer à l'apprentissage des théories mathématiques, voire même du raisonnement, en se servant de certaines analogies logiques (voir plus loin) ceci, le plus souvent, il est vrai, à l'intention des moins bons élèves.

C'est ainsi que, traitant un peu les théorèmes et les axiomes comme un répertoire, on cherche à expliciter auprès des élèves des procédures et des méthodes de résolution de problèmes qui permettraient d'utiliser le répertoire de la « bonne manière ». Evidemment, on ne connaît pas de classes de problèmes sur lesquelles ces méthodes de résolution donnent sûrement le résultat attendu ; il faut les essayer l'une après l'autre. Ces méthodes ne constituent pas des algorithmes (sauf si, par hasard, elles s'appuient sur un théorème ignoré de l'élève), mais on les enseigne pour jouer le même rôle. L'heuristique est issue de ce point de vue et a donné à ce jour en didactique des succès limités. On sait bien à quelles difficultés se heurtent ces méthodes pédagogiques consistant en une mécanisation basée sur une décomposition arbitraire des tâches.

#### 4.2.3 - Perspectives

Inversement, on peut remettre en cause l'apprentissage mécanique de la multiplication. Si une enfant construit lui-même un procédé pour établir l'exactitude d'une formule, c'est une manière de démonstration. Si ce procédé est réemployé, il sera appris et amélioré, jusqu'au moment où il sera reconnu comme algorithme et décrit.

Bien que la règle à inventer soit compliquée, ce point de vue n'est pas utopique : l'enfant acquiert plus tôt un système linguistique beaucoup plus complexe, qui fonctionne mécaniquement, sans qu'on soit amené à lui enseigner séparément :

- du vocabulaire par apprentissages sériels
- de la grammaire, comme ordinogramme de productions des phrases
- le sens de ces phrases (ou plutôt, la liste des occasions de les dire, comme des citations)

Cette contestation répondrait à des soucis pédagogiques énoncés depuis longtemps. Le problème est de lui trouver des fondements mathématiques, psychologiques, linguistiques et didactiques suffisants. Ce sont là les objectifs généraux de certaines recherches poursuivies à l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Dans un premier temps, en se gardant de croire trop tôt aux vertus d'un changement de modèle séduisant mais superficiel\* il s'agit toutefois de se donner un vocabulaire correct et qui permette d'échapper le plus possible aux « évidences » qui ne sont que des conséquences cachées, qu'un système classique.

#### 4.3. - PROPOSITION D'UN LANGAGE DIFFERENT

Nous travaillons dans deux directions à la fois : Nous essayons de réaliser concrètement des processus qui échappent au schéma critique et nous essayons de nous donner une théorie appropriée utilisant des termes différents.

##### 4.3.1. - Vers un nouveau processus d'apprentissage

Nous étudions depuis 3 ans un processus où l'enfant fabrique son algorithme. On veut qu'il conçoive le problème « calculer le produit » avant d'en étudier la solution. Ainsi le produit n'est plus « ce que l'on trouve en effectuant une multiplication ». Par exemple l'enfant sait que «  $a \times b$  » désigne le cardinal d'un ensemble comportant  $a$  lignes de  $b$  objets. Pour « calculer »  $a \times b$ , il invente de découper cet ensemble en morceaux qu'il peut déjà compter et de faire la somme. Il améliore son découpage et le choix des morceaux de façon à rendre son algorithme plus rapide, plus sûr, plus efficace, plus général. Il ne sait pas encore qu'il existe une unique méthode de calcul. Chaque activité est une démonstration de la formule basée sur des propriétés de la théorie mathématique (distributivité, produits de partitions...) connues explicitement ou non.

##### 4.3.2. - Systèmes d'axiomes - Règle de déduction

Nos expériences nous ont suggéré d'utiliser le vocabulaire suivant.

Considérons que l'ensemble des formules sans variables, de la forme «  $a \times b = c$  » où «  $a$  », «  $b$  » et «  $c$  » sont les écritures décimales des naturels, constitue les formules atomiques d'un langage mathématique  $L$ . Donnons à ces formules leur

\* Mme SINCLAIR de ZWART a montré combien il fallait être circonspect à ce sujet.

signification habituelle dans  $(N, +, \times)$  ; certaines sont vraies, d'autres sont fausses. L'ensemble des règles qui permet d'associer à tout couple d'écritures  $(a, b)$  une écriture  $c$  de  $L$  telle que «  $a \times b = c$  » soit vrai dans  $N$ , est une règle de production : le calcul du produit ou multiplication. Il est fait appel dans cette règle à une suite de formules de  $L$  : par exemple il est fait appel dans le calcul de  $347 \times 28$  à la formule : «  $8 \times 7 = 56$  », à la formule  $8 \times 4 = 32$ ... etc. Considérons la suite de ces formules figurant dans le calcul, comme les antécédents d'une règle de déduction  $D$  dont le conséquent serait «  $a \times b = c$  »\*.  $D$  s'appuie sur le procédé (ici métalinguistique) de la « multiplication », pour associer à un  $n$ -uplet de formules de  $L$  une autre formule de  $L$ . Evidemment  $D$  fournit un procédé de décision sur tout  $L$  et est donc aussi un algorithme. (la règle pourrait s'appliquer à des formules fausses. Elle donnerait alors d'autres formules généralement fausses dans  $N$ ).

L'ensemble des formules auxquelles il est envisageable de faire appel avec une certaine « règle »  $D$  sera comparable à un système d'axiomes ; on pourra vérifier si  $\langle A, D \rangle$  engendre bien les formules vraies de  $L$ , et rechercher d'autres systèmes formels équivalents ou non.

#### 4.3.3. - Intérêt de cette formulation

Ce point de vue nous a paru justifié entre autres par le fait que les élèves de l'école élémentaire manipulent les produits comme un langage à part. Il reste à prouver la fécondité de ce point de vue qui se heurte à des difficultés dans l'analyse de la sémantique du langage employé.

Cette formulation pourrait permettre d'unifier nos conceptions relatives à la manière dont une théorie mathématique intervient dans l'activité de l'enfant :

- de façon implicite, pour permettre de prendre des décisions
- comme langage
- comme système de validations [5]

Elle permettrait de comprendre l'économie et l'efficacité que donne à l'enfant l'emploi d'une théorie mathématique, dans les situations qu'il rencontre et de comprendre quand et pourquoi ces processus d'économie aboutissent naturellement à des mécanismes.

Nous pensons alors que ces notions pourraient être utiles pour isoler les facteurs didactiques importants pour l'organisation de l'enseignement.

## 5 — CONCLUSIONS

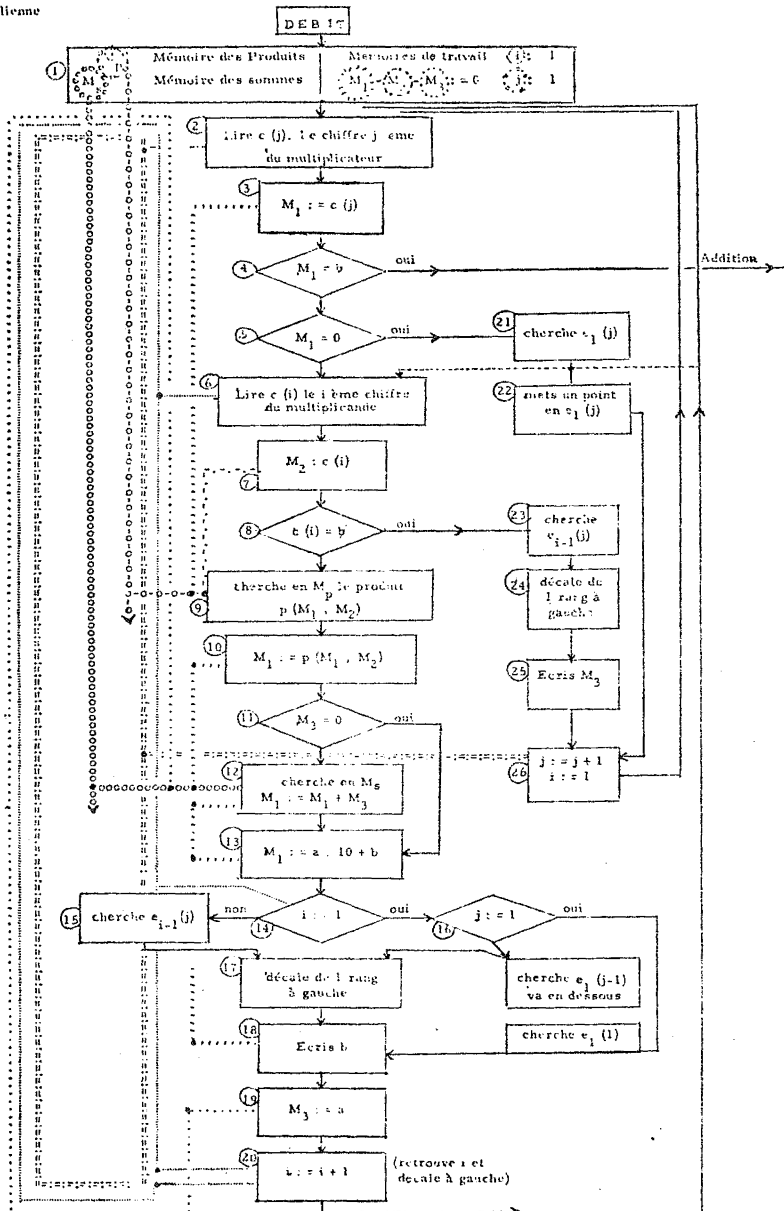
Les exemples que nous donnons ci-dessus, bien qu'un peu naïfs, ont le mérite de mettre en évidence les différentes manières dont les théories mathématiques peuvent être engagées dans l'analyse des phénomènes didactiques, qu'il s'agisse d'appréhender les facteurs pertinents de la situation présentée à l'élève, de construire des modèles du comportement de l'élève, ou des modèles d'apprentissage, ou de mettre en œuvre des méthodes de validations de ces modèles.

En général les modèles ne sont pas aussi simples, ni aussi sûrs, les conclusions aussi nettes, les écarts aussi importants. Il ne faudrait pas croire qu'une voie royale s'ouvre, qui va permettre de résoudre en termes mathématiques tous les problèmes de la didactique mathématique. Chaque observation soulève tous les problèmes à la fois et nous en sommes encore à accepter pour thèses des faisceaux convergents de conjectures empruntées à la psychologie, à la linguistique, à la sociologie, aux mathématiques. Cependant il se dégage de notre exemple une méthodologie scientifique de la recherche, valable encore dans des cas plus complexes, et qui commence à pouvoir servir l'enseignement sans l'asservir.

\* Cf. Lentin et Gross. Notions sur les grammaires formelles p. 30.

LA MULTIPLICATION  
dans N  
algorithmique à l'italienne

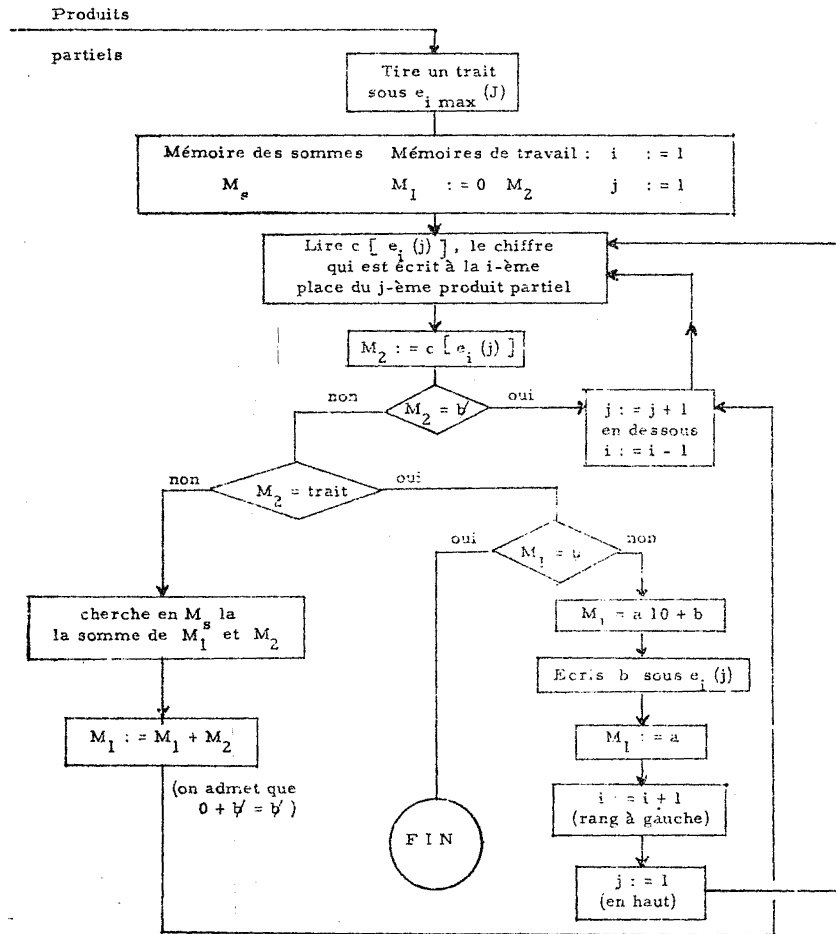
Ordinogramme 1. Produits Partiels

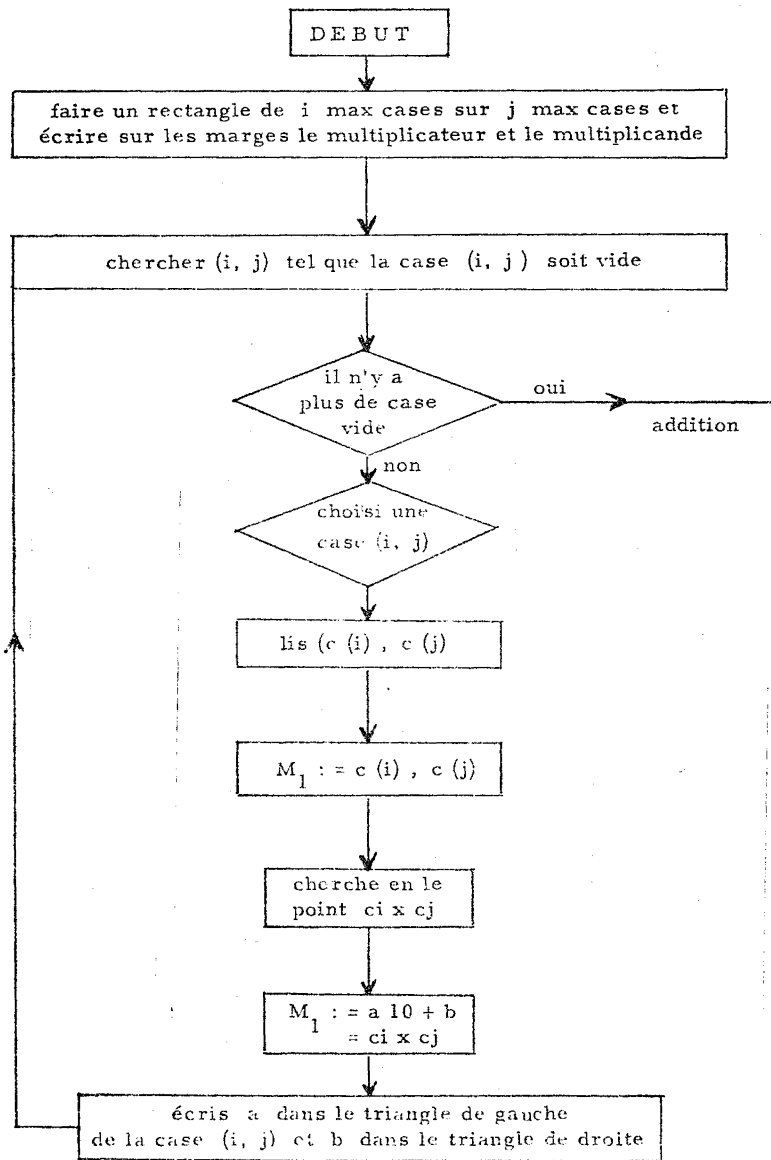


$e_1(j)$  : place du 1<sup>er</sup> chiffre du j<sup>ème</sup> produit partiel

LA MULTIPLICATION  
dans N

Ordinogramme 2 : Addition





B I B L I O G R A P H I E

\*  
\*\*

1. KREISEL-KRIVINE  
  . Logique mathématique - Dunod (1970) Paris
2. LENTIN-GROSS  
  . Notions sur les grammaires formelles - Gauthier Villars
3. H.SINCLAIR DE ZWART  
  . Acquisition du langage et développement de la pensée - Dunod (1970) Paris.
4. G.BRAMAUD du BOUCHERON, R. CHAMPAGNOL, P.COIRIER, S.et M.F.EHRLICH  
  . Le comportement verbal - Dunod
5. G.BROUSSEAU  
  . Processus de mathématisation - In la mathématique à l'école élémentaire - Publication A.P.M. Paris - 1972.