



MÁSTER EN PROFESOR/A DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN
PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

Especialidad en Matemáticas

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

**Mejora de unidad didáctica sobre funciones
elementales en 1.º Bachillerato a través de
un Puzzle de Aronson.**

Autor:

Nahuel OLIVERA RODRIGUEZ

Tutor:

Pablo GREGORI HUERTA

Fecha de lectura: junio de 2020

Curso académico 2019/2020

Resumen

El aprendizaje cooperativo es una aproximación didáctica que busca organizar las actividades de clase en experiencias de aprendizaje académicas y sociales. En este Trabajo de Final de Máster se presenta una mejora de la unidad didáctica sobre funciones elementales para un curso de 1.º Bachillerato a través de una metodología cooperativa. Se propone la utilización de la técnica del Puzzle de Aronson en el aula con varios objetivos entre los que se destaca la investigación, autonomía, compañerismo y un aprendizaje significativo.

A lo largo del trabajo se exponen posibles dificultades que se pueden encontrar en el aula al implementar las actividades que se proponen (como la atención a la diversidad entre otras) y, también, cómo solventarlas. También se comentan actividades complementarias o, incluso, las diferencias que existen de esta propuesta con respecto a llevarla a cabo de manera no presencial.

Finalmente, se anexa la memoria de prácticas, realizada por el autor, además de otros documentos y materiales que complementan la información de este trabajo.

Palabras clave

Matemáticas, Funciones elementales, Bachillerato, Metodología cooperativa, Puzzle de Aronson

Abstract

Cooperative learning is a didactic approach that seeks to organize class activities into academic and social learning experiences. In this Final Master's Project an improvement of the teaching unit on elementary functions for a 1st Baccalaureate course is presented through a cooperative methodology. The use of the Aronson's Jigsaw technique in the classroom is proposed with several objectives, among which research, autonomy, fellowship and significant learning stand out.

Throughout the work, possible difficulties that can be found in the classroom when implementing the proposed activities (such as attention to diversity among others) and, also, how to solve them are exposed. Complementary activities or even the differences that exist in this proposal with respect to carrying it out in distance education are also discussed.

Finally, the internship report, made by the author, is attached, in addition to other documents and materials that complement the information in this work.

Keywords

Mathematics, Elementary functions, Baccalaureate, Cooperative methodology, Aronson's Jigsaw

Índice general

1. Introducción	1
2. Justificación y motivación del TFM	3
3. Contextualización del TFM	5
3.1. Marco teórico	5
3.2. Estado de la cuestión	8
3.3. Objetivos	10
4. Metodología y diseño	13
5. Unidad didáctica	15
5.1. Dificultades previstas	26
5.2. Atención a la diversidad	28
5.3. Evaluación de la unidad didáctica	29
6. Actividades complementarias	31

7. Reflexión crítica	33
8. Conclusiones	35
9. Valoración personal	37
Referencias	39
Bibliografía y webgrafía	39
A. Puzzle de Aronson	I
B. Memoria de prácticas	III
B.1. Elementos del currículum	IV
B.2. Materiales y recursos	VII
B.3. Actividades de aprendizaje y temporalización	VII
B.4. Evaluación de la actividad	XXIII
C. Documento a elaborar	XXV
C.1. Definiciones	XXV
C.2. Analizar la función	XXVI
C.3. Modelización en el mundo real	XXVII
D. Funciones polinómicas	XXIX

D.1.	Definiciones	XXIX
D.2.	Analizar la función	XXXII
D.3.	Modelización en el mundo real	XXXVII
E.	Rúbrica de evaluación	XLI
F.	Seguimiento del trabajo diario	XLV

Introducción

El presente documento constituye el Trabajo de Final de Máster (TFM) para el curso de Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, cursado en la Universitat Jaume I de Castellón por su autor, en la especialidad de Matemáticas. Se trata de una **mejora de la unidad didáctica** sobre *funciones elementales* para la asignatura de Matemáticas en un curso de 1.º Bachillerato. Durante la estancia en prácticas se diseñó una actividad similar en el Instituto Florida Secundaria en Catarroja (Valencia) que se recoge en los Anexos.

En primer lugar, se presentan las **razones** por las cuales se ha decidido realizar este trabajo como mejora de unidad didáctica y enfocado a las funciones. Así como también una **motivación personal** por la que orientarlo a través de una metodología cooperativa.

A continuación, se contextualiza el trabajo a través de un **marco teórico** en el que se recoge gran parte de los conceptos que se utilizarán y de los que se hablará a lo largo del trabajo. Seguidamente, se encuentra el **estado de la cuestión** que busca concretar un paso más y mostrar cómo diferentes autores han puesto en práctica metodologías cooperativas, utilizando recursos similares y algunos resultados obtenidos.

En tercer lugar, dentro del contexto del TFM, encontramos los **objetivos** del trabajo. Como la finalidad de la unidad didáctica, así como las competencias, se encuentran en la memoria de prácticas, en este apartado se insiste más en la mejora desarrollada a lo largo de los siguientes puntos.

Expuestos los apartados anteriores, se presentan la **metodología** y el **diseño** de la mejora de la unidad didáctica. En ella se habla sobre la temporalización de las actividades y de las técnicas a utilizar, así como también del grupo de alumnos destinatarios.

Posteriormente, se comenta el desarrollo de la **unidad didáctica**. Para ello, en primer lugar, se expone una temporalización sobre cada una de las sesiones que se van a realizar de manera detallada. En segundo lugar, se enseñan las **dificultades previstas** o que pueden surgir en el desarrollo de las actividades.

También se habla sobre la **diversidad** en el aula y se sugieren puntos sobre cómo tratarla. En cuarto lugar, se indica el sistema de **evaluación** que se va a llevar a cabo en esta unidad y cómo está relacionada con el resto del curso escolar.

Por otra parte, se presentan **actividades complementarias** a las expuestas en el trabajo que pueden ser una alternativa posible aprovechando la estructura presentada anteriormente. Después, se hace una **reflexión crítica** sobre el desarrollo del trabajo y sobre cómo podría implementarse de forma no presencial.

Finalmente, se realiza una **conclusión** del mismo, así como también una **valoración personal** por parte del autor. Las **referencias** bibliográficas, webgráficas y las normativas utilizadas se pueden encontrar al final del documento antes de los anexos.

En los **anexos** se encuentran: una explicación de la técnica del Puzzle de Aronson, la unidad didáctica desarrollada en la memoria de prácticas, el documento a desarrollar en la unidad así como también un ejemplo hecho por el autor sobre el mismo y, finalmente, las rúbricas de evaluación que se utilizarán.

Justificación y motivación del TFM

La metodología de enseñanza tradicional desde hace muchos años ha sido a través de una *master class*, es decir, una clase donde el profesor explica y los alumnos solo escuchan. Muchas veces puede ser una buena, e incluso la mejor elección, pero debemos dejar de lado la premisa de que es la única y, sobre todo, que sea la dominante. Es por ello por lo que, a través de este trabajo, se busca una alternativa. Entre las diferentes metodologías que se han dado en el máster como la de participación activa, de comunicación persuasiva o de aprendizaje cooperativo, se ha escogido esta última para el trabajo.

A través de un aprendizaje cooperativo, como es la técnica del *Puzzle de Aronson*, se puede llegar a simular algunos problemas a los que el estudiante se puede enfrentar en su futuro profesional relacionados con el trabajo en equipo, la búsqueda de información por su propia cuenta y el trabajo autónomo. Esta es una de las razones por las que también se ha decidido enfocarse en el alumnado de 1.º Bachillerato aunque también podría haberse escogido cualquier otro curso (adaptando el temario a los requisitos ordenados por los decretos-ley).

Cuando a un alumno se le pregunta por qué son las funciones (o muchos conceptos matemáticos), no suele saber responder ya que no lo ha asimilado en sus etapas anteriores o bien, no ha entendido la idea. A través de un cambio de metodología, donde es el propio alumno quien debe trabajar estos conceptos y apoyarse en sus compañeros, se pretende solventar esta carencia en la educación.

Además, se trabaja a través de gráficos que son ejemplos más manipulables a través de herramientas como *Geogebra* ¹, lo que facilitará el aprendizaje y entendimiento de muchos conceptos como las transformaciones mediante translaciones ($f(x \pm c)$), reflexiones ($-f(x)$) o estiramientos ($k \cdot f(x)$) con $f(x)$ función y $k \in \mathbb{R}$. También se trabajarán funciones elementales: $\text{sen}(x), e^x, \log_n(x), \sqrt{x}, \dots, n, x \in \mathbb{R}$ con $n > 0$.

Así mismo, el estudio de las funciones también da una visión crítica y permite al alumno tomar conciencia de cómo un gráfico puede evolucionar con el tiempo. En el contexto actual (marzo - junio 2020) donde la curva de contagios, muertes y curados, causados por la pandemia de la COVID-19², va modificándose día tras día, da razones para “modelizar” estos fenómenos a través de funciones. De esta forma se puede saber cómo podría avanzar la curva y detectar posible información falsa a nivel muy básico, por ejemplo, que se diga que la enfermedad desciende de un día a otro o que el crecimiento sea lineal.

¹<https://www.geogebra.org>

²Enfermedad del coronavirus.

Contextualización del TFM

3.1. Marco teórico

En el Real Decreto del 26 de octubre de 1901 se decidió que la metodología idónea de enseñanza en las aulas españolas se reducía a las clases magistrales.

A partir de 1934, a través del Decreto relativo al Plan del Bachillerato de Segunda enseñanza, se empezó a sustentar la pedagogía del modelo inductivo (aprendizaje intuitivo). A los contenidos matemáticos se les dio un tratamiento cíclico, es decir, iban rememorando los conceptos que se habían ido aprendiendo a lo largo de los cursos anteriores.

Posteriormente, la Ley de Organización General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 respaldó la utilización de una metodología constructivista del conocimiento matemático. Con esta ley, se defendía el derecho del alumnado de aprender conceptos mediante la construcción de sus propios recursos o herramientas para la resolución de problemas.

Asimismo, se propició un sistema de enseñanza-aprendizaje activo y participativo de los estudiantes, añadiendo recursos tecnológicos y medios diversificados. Sin embargo, el temario era más extenso de lo que se podía explicar durante las horas lectivas de matemáticas, por lo que estas herramientas complementarias suponían un reto y una desventaja a la hora de planificar las clases.

Para poder llevar a cabo este nuevo sistema de enseñanza-aprendizaje, el profesorado ha de implicarse con sus alumnos, estar motivado y dispuesto a continuar su formación para desarrollar con éxito su labor. Según Davini (1905), “un profesor debe estar en continua formación para su crecimiento profesional y poder desempeñar correctamente su función como docente, a la vanguardia y demanda actual de la sociedad”. De esta forma, puede desarrollar los valores, capacidades, saberes y actitudes de su alumnado.

Con todo esto, se plantea cambiar la metodología didáctica demostrando que unas lecciones planificadas inicialmente a través de clases magistrales pueden ser abarcadas desde otra estrategia y poder, posteriormente, analizar los resultados.

Tras esta afirmación aparecen autores como Quinquer (2004), quien afirma que la utilización de una u otra estrategia didáctica depende de factores como: qué entiende el profesor sobre el proceso de aprendizaje, de sus finalidades educativas, la complejidad de la tarea, el número de estudiantes o el coste en el aula.

De aquí aparece la innovación en educación, donde el profesorado es el responsable de despertar el interés de su clase. De esta forma, Stenhouse (citado por Carbonell, 2008) dice que “un profesor innovador se refiere a la persona que es capaz de transformar el proceso de instrucción en la aventura de la educación”. Esto significa que el profesor ha de estar en constante formación, buscando recursos y metodologías que faciliten el aprendizaje en su aula, siendo este último de calidad.

Con el fin de mostrarse innovador, se recurrirá al uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TICs), las cuales según Castells (2002), en una sociedad como la nuestra, “han supuesto una revolución en el procesamiento de la información, la generación del conocimiento y las tecnologías de la información”. De esta forma, el aprendizaje se realizará de forma más interactiva y con un nuevo soporte del que el profesor tendrá que formarse también.

Guijarro y Fernández-Diego (2014) sostienen que elegir la metodología más adecuada para desarrollar competencias genéricas o transversales, a veces resulta difícil, ya que se desarrollan habilidades relacionadas más con el “saber hacer” (habilidades) y el “saber estar” (comportamiento) y no tanto con el “saber” (conocimiento) propiamente dicho.

En la misma línea, Johnson, Johnson y Holubec (1999) mencionan cinco claves del aprendizaje colaborativo relacionado con el desarrollo de competencias interpersonales:

- *Cooperación.* Al lograr todos sus objetivos individuales, conseguirán la meta final, por lo que se apoyarán para alcanzarlo.
- *Responsabilidad individual.* Complementa el concepto anterior ya que son responsables de finalizar la tarea que les toca.
- *Comunicación.* Intercambiar información y recursos, discutir, explicar, dar y recibir retroalimentación, etc. con sus compañeros.
- *Trabajo en equipo.* Resolver problemas de forma conjunta, desarrollar habilidades de liderazgo, de comunicación, confianza, tomar decisiones, etc.
- *Autoevaluación del grupo.* Analizar, como equipo, qué decisiones y acciones han sido útiles y cuáles no.

En relación a ello, Kagan (1994) define el aprendizaje cooperativo como “una serie de estrategias instruccionales que incluyen a la interacción cooperativa de estudiante a estudiante, sobre algún tema, como una parte integral del proceso de aprendizaje”. Así, serán los mismos alumnos quienes asuman el protagonismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Bisquerra, 2006) y el educador quedará en un segundo plano para asistirlos.

Desde otro punto de vista, Ferreiro (2012) denomina al aprendizaje cooperativo con las siglas del ABC. La A hace referencia a la actividad de la que aprende el alumno, la B de bidireccionalidad necesaria entre el docente y el aprendiz y la C alude a la cooperación entre las personas para aprender.

Por todo ello, en este trabajo se plantea un cambio en la metodología. La principal estrategia que se va a emplear para desarrollar y poner en práctica la mejora de la unidad didáctica es una técnica denominada Puzzle de Aronson, como se explica con mayor detalle en el Anexo A enfocado en la actividad para la mejora de la unidad.

Esta técnica consiste en dividir una actividad en diferentes partes, como si fuese un puzzle, para que se trabaje en grupo. Cada miembro del grupo se hace “experto” de una de esas piezas

y busca información acerca de ello. Al cabo de un tiempo, se vuelve al grupo inicial y se unen las explicaciones de todos los componentes. De este modo, todos los integrantes adquieren el mismo conocimiento sobre la actividad al completo.

Cabe mencionar que esta metodología busca un aprendizaje cooperativo y no colaborativo. Como destacan Dillenbourg y Schneider (1995), la diferencia entre ellos es que el aprendizaje cooperativo es “un protocolo en el que la tarea se divide en subtareas que los compañeros resuelven de forma independiente”, mientras que el aprendizaje colaborativo describe situaciones “en las que dos o más personas crean de forma simultánea e interactivamente una solución conjunta para algún problema”.

Además, en relación a las competencias TIC, también se propone el uso de recursos informáticos como tabletas y software libre como Geogebra. A través de este programa, se puede conectar la geometría con el álgebra (entre otras ramas de las matemáticas), también posee una interfaz fácil de utilizar y con él, se pretende comprender y asimilar nuevos conceptos de forma más visual e intuitiva.

3.2. Estado de la cuestión

En los últimos años, se ha ido aumentando el uso de las tecnologías y de otras metodologías didácticas. Autores como Alfonzo (2008) defienden el uso de ordenadores, calculadoras gráficas e internet para facilitar la educación a la hora de realizar gráficos y resolver ecuaciones, entre otras, ya que se ahorra tiempo a la hora de realizar estas representaciones y ofrece, además, una mayor precisión en los cálculos.

Un estudio realizado por esta misma autora menciona como posibles causas para no llevarse a cabo en escuelas y universidades (venezolanas): la incapacidad del docente para utilizarlo en un ambiente educativo, la falta de apoyo institucional o la falta de conocimientos sobre estos programas por parte del profesor (Alfonzo, 2012).

En cambio, en España, con la LOE (2006), una de las funciones del profesorado es “la investigación, la experimentación y la mejora continua de los procesos de enseñanza correspondiente”, por lo que, junto a la promoción por parte de las administraciones públicas, tal y como

dicta la LOMCE (2013), “potenciarán y promoverán la autonomía de los centros, de forma que sus recursos económicos, materiales y humanos puedan adecuarse a los planes de trabajo y organización que elaboren”. Una de las formas de llevar esto a cabo es a través de los cursos de formación para docentes que se van realizando (por ejemplo, CEFIRE¹ en la Comunitat Valenciana). Por lo que estos puntos anteriores no son razón (al menos, sobre el papel) para no poder llevarse a cabo una mejora educativa.

Además del uso de la tecnología, una metodología que se ha estado utilizando en algunas zonas es la colaborativa, tanto en clases online como presenciales. Una investigación hecha en un entorno virtual, afirma que “dar instrucciones claras y facilitar la participación en grupos pequeños de proyectos, aumenta la adquisición de habilidades y mejora los resultados de aprendizaje” (Brindley, Blaschke y Christine, 2009). Otros autores también apoyan la idea de que la interacción entre estudiantes contribuye de manera positiva al aprendizaje de los alumnos (Laurillard, 1993; Moore, 1993; Ramsden, 1992).

Una forma de contribuir estos puntos anteriores es a través del aprendizaje colaborativo. En la investigación hecha por Curtis y Lawson en 2001, se afirma que una de las diferencias entre las clases online y presenciales colaborativas es la sincronización de las respuestas, y es que las interacciones de manera no presencial hacen que estas sean menos efectivas. Además, el hecho de no verse aumenta también la importancia del mensaje aunque, como sabemos, también tiene sus desventajas (que está en la ausencia del lenguaje no verbal).

Autores como Verdejo (1996) hacen hincapié en el “paradigma del diálogo o la conversación” para el aprendizaje colaborativo. Henri y Rigault (1996) cree en una mayor autonomía del estudiante en el trabajo colaborativo y cooperativo. Además, a través de la enseñanza se consigue un trabajo colaborativo y hay evidencias que cuando el estudiante argumenta y comparte sus entendimientos hay una compartición potencial de la carga cognitiva en la tarea de aprendizaje (Dillenbourg y Shneider, 1995).

Así mismo, Moore (1993) afirma que existen tres claves para la interacción en el aprendizaje: los recursos, el profesor y los compañeros. Pero la diferencia de realizar un Puzzle de Aronson de forma online o presencial no es una diferencia significativa como puede ser las interacciones cara a cara (Curtis y Lawson, 2001). Sin embargo, este mismo estudio de Curtis y Lawson, afirma que el éxito colaborativo que se describe en situaciones presenciales es posible en entornos virtuales.

¹<http://cefire.edu.gva.es/>

La técnica del Puzzle de Aronson “no solo mejora la autoconfianza del alumno, sino también la competencia comunicativa y el rendimiento del trabajo en grupo mientras los estudiantes trabajan y evalúan conceptos importantes relacionados con el curso” (Babiloni y Cardós, 2016).

3.3. Objetivos

El **objetivo principal** del presente trabajo es la presentación y fundamentación de una mejora de la unidad didáctica sobre funciones elementales para el alumnado de 1.º Bachillerato basada en una metodología activa y cooperativa entre los estudiantes.

Las **competencias** que se desarrollan en la unidad didáctica de acuerdo a la normativa vigente, así como las siete básicas, se explican y desarrollan en el Anexo B.1. Del mismo modo, en este apartado también se encuentran los objetivos que se persiguen en el temario, que son los mismos que se encuentran en la memoria de prácticas ya que se trata de un contenido semejante.

Sin embargo, con la mejora se añaden nuevos **objetivos** por parte de la metodología a utilizar tal y como se cita en Ramón y Barba (2010):

- “Mejorar el aprendizaje cooperativo”.
- “Rentabilizar el uso de las tutorías individuales y grupales”. De manera que sean los mismos alumnos quienes se ayuden en primer lugar.
- “Fomentar una actitud positiva entre los miembros del grupo”. A través de la colaboración y la adquisición de roles de manera intrínseca.
- “Aumentar el rendimiento académico”. Apoyándose los unos a los otros y asegurándose de que todo el grupo ha adquirido los conocimientos necesarios.
- “Favorecer el aprendizaje significativo y autodirigido”. Indagarán sobre los conceptos y tendrán uso de herramientas con las cuales pueden aprender y descubrir por sí mismos.
- “Fomentar el estudio continuado de una materia, de forma que el alumnado no memoriza, sino que madura el conocimiento”.

- “Desarrollar la solidaridad y el compromiso cívico entre el alumnado”. El éxito individual depende también del grupo.
- “Desarrollar habilidades sociales para relacionarse con el grupo y exponer de forma asertiva el propio punto de vista”. Aprender a ser y estar.
- “Fomentar la autonomía en el aprendizaje”. Serán ellos mismos quienes busquen y amplíen la información a través de un trabajo cooperativo.
- “Atender la diversidad de intereses, valores, motivaciones y capacidades del alumnado”. A través del propio descubrimiento, con ayuda de materiales y software como Geogebra, pueden tener curiosidad sobre las aplicaciones del objeto de estudio.

Así mismo, en este trabajo, también **se pretende:**

- Modificar positivamente las actitudes hacia las matemáticas y su aprendizaje. Se puede lograr a través de la utilización de una metodología activa y participativa.
- Investigar y exponer las principales características y ventajas de la utilización del Puzzle de Aronson como metodología de trabajo para la unidad didáctica sobre funciones elementales.
- Indagar y explicar las principales dificultades que se enfrentan los alumnos relativas a la hora de estudiar funciones en 1.º Bachillerato.

Metodología y diseño

En el Punto 2 se habla sobre la dificultad del alumnado de entender el **concepto de función**, pero también está su representación; además se busca dar un enfoque más real a las aulas y llevar una metodología de cooperación (presente en muchos puestos de trabajo) también al alumnado. Es por esta razón por la que se ha escogido una **metodología de aprendizaje cooperativo** donde se busca que la labor del profesorado se reduzca a lo mínimo posible y sean los mismos estudiantes quienes se apoyen entre ellos.

La unidad didáctica a desarrollar es la de funciones elementales. Dentro de ella se darán las siguientes funciones: (1) polinómicas, (2) racionales, (3) irracionales, (4) exponenciales, (5) logarítmicas y (6) trigonométricas. Así mismo, se hará una actividad sobre las **transformaciones** de las funciones que también se mencionaron en el Punto 2 y recordatorios sobre cómo **representarlas gráficamente** tanto de manera digital (con un software como Geogebra) como a mano (a través de tablas de valores).

Para ello, considerando que el curso, **1.º Bachillerato**, por normativa, cuenta con cuatro horas semanales de matemáticas, se ha decidido distribuir las sesiones como se muestra en la Tabla 4.1. Así mismo, se considera que las sesiones tienen una duración de **entre 50 y 55 minutos**. Además, para la actividad, se asume que hay una cantidad de alumnos de **entre 20 y 30 personas** ya que se formarán grupos y estos deben estar bastante equilibrados pero las casuísticas se discuten más adelante en el Punto 5.1.

	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4
1. ^a semana	Presentación de la actividad	Funciones polinómicas	Geogebra y representación gráfica	Investigación en grupo (I)
2. ^a semana	Investigación en grupo (II)	Puesta en común		Conclusiones y dudas
3. ^a semana	Prueba individual			

Tabla 4.1: Distribución de las sesiones dentro de la programación de la asignatura.

El desarrollo de esta unidad didáctica cuenta con algunas sesiones donde se aplica una metodología clásica (clases magistrales), pero la gran mayoría de ellas cuenta con una metodología cooperativa ya que se va a emplear la técnica del **Puzzle de Aronson**. A lo largo de cuatro sesiones, el alumnado deberá de elaborar un documento donde se recojan las investigaciones realizadas así como la resolución de pequeñas actividades propuestas. Para ello, contará con un ejemplo práctico hecho en la segunda sesión con las funciones polinómicas. Dicho ejemplo se puede encontrar en el Anexo D.

Por último, se les hará una **prueba calificativa** de carácter individual donde se evalúen los conocimientos adquiridos por cada alumno. Además, se ha dejado una sesión para puesta en común y varias sesiones de explicaciones iniciales para recordar y desarrollar conceptos que se han dado en cursos anteriores (tanto en 3.º como en 4.º ESO) así como de nuevos propios de este nivel.

Gracias a la realización de estas sesiones iniciales, no es necesario hacer una prueba de conocimiento inicial específica para esta unidad didáctica. Además, generalmente, este temario se encuentra en el **último trimestre** del curso, por lo que el profesor ya conoce el nivel de su alumnado.

Unidad didáctica

SESIÓN 1 - PRESENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD

OBJETIVOS

- Recordar el concepto de función y discriminar qué es o no una función.
- Incentivar el interés de los alumnos y alumnas sobre la investigación.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar el concepto de función.
- **Procedimentales:** discriminar a partir de gráficos cuáles, de ellos, representan funciones.
- **Actitudinales:** interacción e interés por la materia a partir del contexto dado.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.

METODOLOGÍA

- Aproximación didáctica. A partir de los ejemplos gráficos propuestos, el profesor realizará una aproximación didáctica para recordar el concepto de función.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor/a y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador y proyector.
- **Recursos espaciales:** aula de clase.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. **(25 min.)** Se les introduce la unidad didáctica a través de una presentación (a la que tendrán acceso posteriormente en la plataforma virtual). También se les explicará cómo se van a desarrollar las siguientes sesiones.
 - En primer lugar, se les introduce el concepto de función y se les hace discriminar qué es o no una función a través de ejemplos gráficos.
 - A continuación, se les presenta el cronograma y programación de la actividad.
 - Finalmente, se les hace un breve recorrido por el material que pueden encontrar en la plataforma online.
2. **(20 min.)** Se les explica el funcionamiento de la técnica del Puzzle de Aronson y el sistema de evaluación que se hará sobre esta unidad didáctica.
3. **(10 min.)** Finalmente, se les invita a hacer grupos entre ellos. De no ser esto posible, será el mismo docente quien los realice. La cantidad de alumnos por grupo dependerá de la cantidad de personas en la clase y las funciones que se van a repartir para hacer.

También se les habilitará en la plataforma un documento detallado sobre la actividad que han de entregar al final de la unidad didáctica (Anexo C). Además encontrarán la rúbrica a través de la cual se les evaluará el trabajo que han de elaborar al final de todas las sesiones (Anexo E) y otra rúbrica de evaluación individual (Anexo F). Del mismo modo, se les habilitará

enlaces de interés donde poder trabajar y buscar información, así como también un ejemplo sobre los puntos que han de entregar en el trabajo (Anexo D).

EVALUACIÓN

Esta primera sesión no cuenta con ninguna evaluación numérica para la nota final del alumnado.

SESIÓN 2 - FUNCIONES POLINÓMICAS

OBJETIVOS

- Asimilar conceptos básicos relacionados con las funciones.
- Conocer algunas funciones elementales.
- Conocer algunas de las características básicas de las funciones.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** entender y asimilar las definiciones y conceptos presentados.
- **Procedimentales:** tomar apuntes.
- **Actitudinales:** escucha activa.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.

METODOLOGÍA

- Aproximación didáctica. A partir del ejemplo de actividad elaborada por el profesor (Anexo D), se realizará una aproximación didáctica para explicar todos los conceptos que se les pide a los alumnos.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor/a y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** pizarra; ordenador y proyector.
- **Recursos espaciales:** aula de clase.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se les presentará las funciones polinómicas a través de su expresión analítica y su correspondiente representación gráfica. Finalmente, se darán ejemplos de enunciados con problemas de la vida real donde se pueda encontrar este tipo de funciones elementales. En el gráfico, se les explicará cómo encontrar cada uno de los siguientes conceptos en una función polinómica:
 - Dominio.
 - Recorrido.
 - Puntos de corte con los ejes.
 - Máximos y mínimos relativos.
 - Curvatura y puntos de inflexión.
 - Monotonía.
 - Simetría.
 - Continuidad.
 - Asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas)

EVALUACIÓN

Solamente se considerará la asistencia del alumnado. El contenido de dicha sesión será evaluado en la última prueba de evaluación de la unidad didáctica.

OBJETIVOS

- Asociar la expresión analítica de las funciones elementales con sus representaciones gráficas.
- Reconocer transformaciones que se producen en las funciones elementales como consecuencia de alguna modificación en sus expresiones analíticas.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** entender y asimilar los conceptos presentados.
- **Procedimentales:** seguir los ejemplos y realizar los ejercicios propuestos.
- **Actitudinales:** escucha activa y trabajo individual.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.

METODOLOGÍA

- Aproximación didáctica. A partir de la sesión anterior, se le enseñará con ejemplos la representación de funciones. También se les propondrá ejercicios para que ellos mismos los resuelvan.
- Puesta en práctica a través de la representación gráfica.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor/a y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** pizarra; ordenador y proyector.
- **Recursos espaciales:** aula de informática.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); software para representar funciones (Geogebra).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Durante esta tercera sesión, se les enseñará cómo representar funciones (polinómicas) a través de tablas de valores y con Geogebra. Con esto último, se pretende enseñarles cómo afecta, de manera rápida y visual, cualquier variación que se haga sobre la expresión analítica en el gráfico y al revés.
2. Finalmente, también se les propondrá una serie de ejercicios para que prueben el programa y realicen ellos algunas transformaciones.

EVALUACIÓN

Solamente se considerará la asistencia del alumnado. El contenido de dicha sesión será evaluado a través del trabajo de especialista y la prueba final de la unidad didáctica.

SESIONES 4 Y 5 - INVESTIGACIÓN EN GRUPO

OBJETIVOS

- Encontrar la definición de cada una de las funciones elementales que les han sido asignadas.
- Proporcionar ejemplos reales donde aparezcan estas funciones elementales.
- Analizar este tipo de funciones (como se explicó en la segunda sesión).
- Explicar, si existe, cualquier peculiaridad que se pueda encontrar en estas funciones elementales.
- Elaborar un documento común para compartir, posteriormente, con sus respectivos grupos base. La estructura de este documento se encuentra en el Anexo C.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar los conceptos de las sesiones anteriores y buscar el de la función a estudiar.
- **Procedimentales:** elaborar un documento común con la información recopilada.
- **Actitudinales:** trabajo cooperativo, individual y colaborativo e interés por la materia.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Técnica de auto-aprendizaje mediante trabajo de lectura y audio-visual para representar funciones elementales gráficamente.
- Trabajo colaborativo con sus compañeros de grupo. Apoyándose entre ellos.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor/a y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador; cuaderno, bolígrafo y colores; y calculadora.
- **Recursos espaciales:** aula de informática.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word); y software para representar funciones (Geogebra).

TEMPORALIZACIÓN

2 sesiones de 55 minutos cada una.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se juntarán según los grupos de especialistas que fueron asignados previamente. Con el objetivo de asegurarse de que el trabajo que están realizando es correcto, el profesor revisará la documentación al finalizar la sesión 4 y les comentará a cada grupo, cómo van progresando y qué aspectos han de mejorar (si es necesario) al comienzo de la 5.^a sesión.

Los documentos que se vayan elaborando, se subirán a un repositorio común al que toda la clase tendrá acceso. Para ello, se creará una carpeta en Google Drive ¹.

EVALUACIÓN

Se evaluará con una rúbrica de evaluación de trabajo diario por parte de sus compañeros (Anexo F) y al finalizar la unidad didáctica también se tendrá en cuenta el trabajo entregado.

SESIONES 6 Y 7 - PUESTA EN COMÚN

OBJETIVOS

- Entender todas las funciones de los demás especialistas del grupo base.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar los conceptos de las sesiones anteriores y entender nuevos.
- **Procedimentales:** explicar a sus compañeros las funciones que han estudiado en los grupos de especialista.
- **Actitudinales:** trabajo cooperativo e individual e interés por la materia.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Serán los mismos alumnos quienes expliquen al resto de sus compañeros del grupo base lo que hayan descubierto de sus funciones.

¹<https://drive.google.com/>.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor/a y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador.
- **Recursos espaciales:** aula de informática.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word); y software para representar funciones (Geogebra).

TEMPORALIZACIÓN

2 sesiones de 55 minutos cada una.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se les proporcionará dos sesiones para volver al grupo base y compartir los conocimientos adquiridos al resto de compañeros. En estas sesiones, todo el alumnado tendrá que adquirir el mismo nivel de conocimiento que el resto de compañeros.

Para ello, compartirán entre todos, los documentos que han ido redactando en las sesiones anteriores. Se les propondrá realizar tres explicaciones el primer día y otras dos el siguiente.

EVALUACIÓN

Se evaluará con una rúbrica de evaluación de trabajo diario por parte de sus compañeros (Anexo F) y al finalizar la unidad didáctica también se tendrá en cuenta el trabajo entregado.

SESIÓN 8 - CONCLUSIONES Y DUDAS

OBJETIVOS

- Repasar y fortalecer todos los conceptos aprendidos.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** repaso de las sesiones anteriores.
- **Procedimentales:** planteamiento de dudas y su resolución.
- **Actitudinales:** trabajo individual, respeto del turno de palabra y a los compañeros/as.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.

METODOLOGÍA

- Participación activa. El alumnado presentará sus dudas de manera ordenada y se resolverá por parte del profesor u otro compañero o compañera.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor/a y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** pizarra; cuaderno, bolígrafo y colores; ordenador y proyector.
- **Recursos espaciales:** aula de clase.

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

- **(45 min.)** Se destina la sesión entera a resolver dudas por parte del alumnado sobre las actividades realizadas de manera individual, el trabajo a entregar y los conceptos estudiados hasta ahora.
- **(10 min.)** En caso de no haberse planteado, el profesor o profesora, explicará aquellos conceptos que más dudas han generado o aquellas actividades o puntos que menos gente ha completado a lo largo de las sesiones anteriores; dando pautas y explicaciones de cómo mejorarlos de cara al trabajo.

EVALUACIÓN

Solamente se considerará la asistencia del alumnado. El contenido de dicha sesión podrá ser evaluado en la última prueba de evaluación de la unidad didáctica.

SESIÓN 9 - PRUEBA INDIVIDUAL

OBJETIVOS

- Evaluar todos los conceptos trabajados y aprendidos en la unidad didáctica.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** todos los conceptos dados a lo largo de las sesiones anteriores.
- **Procedimentales:** realización de una prueba individual y resolución de sus problemas y cuestiones.
- **Actitudinales:** trabajo individual.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia aprender a aprender.

METODOLOGÍA

- Realización de una prueba escrita para evaluar los conocimientos asimilados.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor/a y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** examen; hojas, bolígrafo y colores; y calculadora.
- **Recursos espaciales:** aula de clase.

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Prueba de carácter individual cuya resolución se hará en silencio y siguiendo las normativas del centro.

EVALUACIÓN

La corrección y evaluación de esta prueba tendrá el peso asignado en el Punto 5.3.

5.1. Dificultades previstas

Al tratarse de una actividad en la que los principales protagonistas son los estudiantes, el docente se puede encontrar con diferentes tipos de dificultades.

En primer lugar, podemos toparnos con la no disposición del **aula de informática** o estar sin acceso a internet. En este caso, el profesor o profesora ha de asegurarse siempre de preparar las sesiones y el material necesario para ello (por ejemplo, reservando un espacio con ordenadores).

En el caso de que los alumnos no tengan **acceso a internet** para buscar la información, siempre se puede cambiar la metodología de la unidad y presentar el material a través de una clase magistral. Sin embargo, esto podría causar frustración en el estudiante por lo que otra alternativa, según las capacidades del alumnado, sería permutar el temario con el siguiente bloque didáctico. Todo ello, lo valorará el profesor de acuerdo al conocimiento que tenga sobre el grupo de clase y la organización con el resto del cuerpo docente.

En segundo lugar, podemos localizar dificultades para **encontrar la información** que se les solicita al estudiante. Por esta razón, el docente se asegurará previamente de realizar la actividad de manera individual y valorar el esfuerzo y tiempo que supone hallar dichos datos. De ser difícil o complicado, se les podría aportar documentación que de manera anticipada se haya buscado o elaborado de manera propia.

De hecho, la propuesta sobre **elaborar o preparar el material** solventa los problemas y dificultades mencionados anteriormente: la falta de acceso a internet, la no disposición del aula de informática o de ordenadores portátiles o el no encontrar recursos que se adecuen al nivel del

alumnado. Todo ello se puede reforzar a través de la utilización y disposición de libros de texto, ya sea de la misma editorial o de diferentes (que puedan, por ejemplo, estar disponibles en el centro de cursos anteriores).

En tercer lugar, también se pueden encontrar dificultades a la hora de **entender los conceptos**. Para ello, durante las sesiones, especialmente en la de investigación, el profesor o profesora se encargará de asistir al alumnado con las posibles dudas que les vayan surgiendo. Se les dará autonomía para trabajar pero estando bajo una supervisión mínima.

También es interesante añadir la complicación de que haya alumnos que no quieran **relacionarse** con determinadas personas del aula. En este caso, al tratarse de un grupo adolescente bastante más maduro se podría proponer la actividad para realizarse de manera individual, tal y como se planteó en la memoria de prácticas (Anexo B) debido a la situación del estado de alerta vivido en ese momento. Si fuese enfocado para alumnos más conflictivos, seguramente habría que replantearse la actividad para llevarla a cabo a través de una metodología distinta.

Sin embargo, al poder el docente elegir que sean los mismos estudiantes quienes hagan los grupos base, se puede solventar este problema e incluso aquel alumno con más dificultades para integrarse puede colaborar. Con la supervisión del docente, especialmente en ese grupo donde hayan personas con menor capacidad de relacionarse, se puede elaborar un **guion de trabajo** para que todos los integrantes se impliquen. Este guion se haría de forma personalizada en el que pueden existir tanto preguntas claves, para que todos participen, como pasos a seguir o, incluso, una tabla donde se recoja la opinión de todos los miembros y, de esta forma, asegurarse de que todos participan.

Así mismo, si el docente considera que un alumno puede tener problemas en la evaluación por parte de sus compañeros, por no ser objetivos con los demás, se puede seguir las sugerencias comentadas en el párrafo anterior o bien cambiar el **método de evaluación** para toda la clase, de manera que sea el mismo profesor quien se encargue de realizar la rúbrica individual y de supervisar cómo trabaja cada persona en el grupo.

Por otra parte, es interesante añadir la flexibilidad a la hora de realizar los **grupos de trabajo**. En caso de ser necesario, el docente podrá adaptar la cantidad de personas que forman cada uno de los grupos para ser coherentes con el número de alumnos en el aula y la dificultad que puedan tener. En caso de precisarse, se pueden buscar más funciones; o bien agruparlas y

dar alguna más a un grupo; o bien dar menos de las propuestas en este documento y explicar a través de una clase magistral aquellas que no hayan sido investigadas por los estudiantes.

Por último, puede haber alumnos que no hayan entendido todos los conceptos o bien que hayan surgido **dudas** generales. Es por ello, por lo que existe la última sesión, previa a la prueba individual, para asentar bien los conocimientos que se han de adquirir y resolver las preguntas que planteen.

5.2. Atención a la diversidad

De acuerdo al Real Decreto 1105/2014: “Los centros docentes (...) arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo”.

El conjunto de estudiantes se encuentra integrado a lo largo de toda la actividad con el resto de la clase. Al tratarse de una tarea de **trabajo cooperativo**, cada uno de los individuos tendrá acceso a la misma información. Por lo que la metodología didáctica escogida para esta unidad, cumple con el artículo 7.2 del capítulo I de la normativa citada.

A través de las actividades planteadas en este documento es el propio alumno quien desarrolla los conocimientos. Si un estudiante quiere ampliar estos saberes también **influirá en el resto**, esto es, la información estará compartida con todos los compañeros del aula. Esto significa que, de la voluntad de un alumno de querer aprender más, también se beneficiarán el resto de estudiantes; a pesar de que luego, en las competencias a evaluar en una prueba escrita (u oral), esa investigación ampliada no será tomada en cuenta. Sin embargo, sí que se valorará positivamente en la rúbrica de la actividad de investigación, ya que supone un esfuerzo extra; pero en ningún caso se penalizará al resto de la clase.

Una forma de lograr esta extensión de la actividad para algunos alumnos (y, por tanto, también a sus grupos), es **ampliando** la información sobre un tipo de función en concreto o bien, proporcionándole al grupo de especialistas donde se encuentre dicho alumno, **otra familia** de funciones que no se hayan mencionado en esta actividad.

No obstante, puede haber situaciones en las que un alumno en particular no sea capaz de llevar el ritmo del resto de sus compañeros, ya sea porque va más avanzado o no. En estos casos, se le puede proporcionar **diferentes** tipos de **materiales**.

Por una parte, en el caso de necesitar **refuerzos** para entenderlo, se puede hacer que busque la información más fácil de comprender y, de esta forma, también encontrarse dentro del grupo de investigación y aportando. Por otra parte, para los alumnos con más **facilidad** de interpretación, se les puede proponer retos como buscar funciones o inventarse ellos alguna para proponer a sus compañeros de grupo o de la misma clase en otras sesiones (como la de dudas antes del examen).

Por último, el alumnado que lo desee, podrá ponerse en contacto con el profesor de manera personalizada a lo largo de la actividad, aunque el objetivo es que sean los propios estudiantes quienes cooperen con él, pues formará parte de la evaluación. Esto significa que se propiciará la **autonomía** del grupo y del trabajo cooperativo, donde sean los mismos alumnos quienes resuelvan sus propios conflictos y dudas.

5.3. Evaluación de la unidad didáctica

Para realizar la evaluación de esta unidad didáctica, se utilizará una valoración **formativa** ya que se trata de conceptos que seguirán utilizando a lo largo del curso y en posteriores niveles e incluso asignaturas. Se espera que, a través de esta unidad didáctica, el alumnado vaya mejorando y beneficiándose de la retroalimentación obtenida para progresar.

Además, se considera que la unidad didáctica se encuentra dentro del temario del curso, por lo que formará parte de la **evaluación final** de la asignatura. El peso de dicha unidad estará recogido en la programación inicial que se presenta al comienzo del curso escolar.

Por la razón anterior, también se tratará de un sistema de evaluación **parcial**, ya que se valorará el temario de forma independiente a través de los criterios que se citan en la Tabla 5.1, la cual, además, cuenta con la ponderación de cada aspecto a evaluar. Se trata de una evaluación **interna** que corresponderá tanto a una **coevaluación** como a una **heteroevaluación**, es decir, será el propio alumnado quienes se evalúen entre ellos de acuerdo a cómo se han sentido para mejorar ese compañerismo pero también el profesor quien evalúe el trabajo realizado para

compararlo, de la forma más objetiva posible, con el resto de grupos y lo que se espera de ellos. Por tanto, hablamos también de una evaluación **heteroreferenciada**.

Para llevar esto a cabo, la principal técnica a utilizar serán las **rúbricas**, que serán explicadas al alumnado en la primera sesión. La utilización de estas tablas supone cumplir con la Orden 38/2017 de la Generalitat Valenciana en la que se menciona el “derecho del alumnado a una evaluación objetiva, que permita que su dedicación, esfuerzo y rendimiento sean valorados y reconocidos con rigor”.

En primer lugar, se tendrá en cuenta el **trabajo de especialistas** que será evaluado por el docente a través de una rúbrica que se puede encontrar en el Anexo E. Por otra parte, también se considerará una rúbrica de evaluación individual que puede encontrarse en el Anexo F, la cual llevará una **nota diaria**. Será esta última la que utilicen los estudiantes para analizar cómo han trabajado sus compañeros a lo largo de cada una de las sesiones. Por último, se les hará una **prueba individual** con el fin de valorar la adquisición de conocimientos.

Actividad	Peso
Evaluación diaria	20 %
Trabajo especialista	40 %
Prueba individual	40 %

Tabla 5.1: Evaluación final de la unidad didáctica.

Dentro de la evaluación de la asignatura, esta nota tendrá un peso del equitativo al resto de unidades didácticas sobre el **trimestre**. Y el trimestre contará con un peso dentro del curso, acordado por el departamento, generalmente de $\frac{1}{3}$ de la nota final.

Actividades complementarias

Se pueden plantear diferentes actividades complementarias después de la metodología cooperativa. Una posibilidad es utilizar una técnica de **Juego-Concurso de De Vries** (1973). Este procedimiento consiste en realizar grupos de estudiantes heterogéneos que, tras presentar una lección, se ayuden entre ellos asegurándose de que todos los miembros del grupo hayan entendido el temario. Posteriormente, deberán responder preguntas (ya sea a través de un representante o por turnos) en forma de concurso.

Es fácil notar que gran parte de esta técnica se comparte con la actividad planteada a través del Puzzle de Aronson. De esta forma, los grupos heterogéneos son los grupos bases que hemos formado anteriormente. Así mismo, el hecho de consolidar los conocimientos de todas las funciones elementales presentadas, se lleva a cabo en la última fase de la técnica anterior. Por tanto, solo restaría la parte del **concurso** cuya actividad puede ser incluso modificada para que sean los miembros de otros grupos quienes planteen las cuestiones. Además, para asegurarse de que todos los estudiantes participen, se podría proponer responder a un alumno distinto para cada pregunta realizada.

Como **premio**, se podría dar una puntuación extra en la nota final de la unidad didáctica en función de la cantidad de preguntas acertadas. De esta forma, por ejemplo, se podría dar un extra de 0,2 puntos al primer grupo, 0,15 al segundo, 0,1 al tercero y 0,05 al cuarto. Aunque podría variar en función del esfuerzo visto en la actividad pero la idea es motivarlos. Esta recompensa no debe suponer un objetivo para la actividad y convertirse en un obstáculo ya que podría crearse un clima negativo. Si ese fuese el caso, una alternativa podría ser un reconocimiento o

un premio no relacionado con la nota de la asignatura (como algún dulce o un aplauso por parte de la clase).

Reflexión crítica

En este TFM se ha propuesto realizar una mejora de unidad didáctica en el aula a través de una **metodología cooperativa**. Sin embargo, por circunstancias descritas en la memoria de prácticas (Anexo B), no se pudo implementar debido al estado de alerta decretado en España, a causa de la pandemia por la COVID-19, el 13 de marzo de 2020 (Real Decreto-ley 7/2020, de 12 de marzo).

Llegados a este punto, se valoró su implementación de manera **no presencial**, adaptando las sesiones descritas en el Punto 5 para realizarlas a través de videollamadas. En cambio, la situación inesperada y repentina provocó estrés e incertidumbre en el alumnado (y también en las instituciones).

Ante la incógnita de conocer cómo iba a avanzar esta situación, se decidió **readaptar la actividad** tal y como se expone en la memoria anexada. A pesar de que la primera intención era la implementación de esta mejora didáctica y, en segunda instancia, poder realizarla de manera virtual, se acabó modificando para realizarse a través de un trabajo individual. Estos cambios, reafirman que educar es una acción viva que depende también del contexto (al que hace falta adaptarse).

Esto último nos da pie a pensar que, por más que se proponga una unidad didáctica teórica para nuestros estudiantes, es el docente quien ha de valorar cómo implementarla ya que se ha de adaptar a todas las **circunstancias** (incluso a aquellas no previstas).

No obstante, se ha investigado sobre cómo podría haberse realizado ante una situación normal. Tal y como se describió en el Punto 3.2, autores como Curtis y Lawson (2001), probaron una metodología cooperativa y **compararon los resultados** de llevarla a cabo de manera física y virtual. Observaron que los resultados no cambiaban demasiado pero sí daban pie a realizar estudios más puntuales como la influencia del lenguaje no verbal (tanto de cara al docente para interpretar a los alumnos como al revés) o cómo se transmite el mismo mensaje sin el soporte habitual.

Por tanto, la **implementación** de esta mejora de manera no presencial podría haberse llevado a cabo en una fase más avanzada del estado de alerta (y no inmediatamente después de haberse declarado como estaba programada) o en una situación normalizada. Esto es, se ha reaccionado ante una dificultad no contemplada, tal y como se dijo anteriormente.

De haberse llevado a cabo esta unidad didáctica de manera online, toda la actividad hubiese sido ligeramente modificada. Sin embargo, una **dificultad** añadida sería la disposición del material personal (principalmente de ordenadores y conexión a internet) de todos los alumnos, además de contar con un espacio de trabajo propio. En lo que respecta a la planificación temporal, se podría haber llevado a cabo como estaba planteada.

Por otra parte, cabe mencionar que la **experiencia** de explicar online con respecto a hacerlo de manera física cambia (por experiencia propia). Así mismo, el no estar acostumbrado a realizar una docencia de forma no presencial no implica no plantearla y llevarla a cabo, pues es otra forma válida de explicar y difundir conocimiento.

Conclusiones

Se presenta una actividad **innovadora** y diferente a la que tanto el alumnado como profesorado español no están acostumbrados a realizar. Por ello, surge la necesidad de probar nuevas metodologías didácticas. En este Trabajo de Final de Máster se ha propuesto un aprendizaje **cooperativo** para el desarrollo de las funciones elementales en 1.º Bachillerato.

A través de la técnica del **Puzzle de Aronson**, no solamente se consiguen los objetivos didácticos previstos en la programación de la asignatura, sino también una cooperación y colaboración entre las personas de la clase. Esta es una razón para fomentar otros valores (cuya obligación se tiene como educadores) y reforzar la integración de todas las personas en el aula (y en la sociedad).

Como consecuencia, el alumnado aprende nuevas formas de **investigación y aprendizaje**, interioriza el concepto de función (tanto gráfica como analíticamente), aprende a asociarlo a situaciones de la vida real a través de problemas, distingue entre diferentes tipos de funciones elementales y aprende a sintetizar y buscar la información de forma **autónoma**.

Así, se cumplen **objetivos** marcados y mencionados a lo largo del documento (como favorecer el aprendizaje significativo y autodirigido, la maduración del conocimiento, etc.) de una forma innovadora para el estudiante y muy útil, no solamente para las **competencias** educativas (propias de la unidad didáctica), sino cívicas (solidaridad, habilidades sociales, etc.) y también para su **futuro** profesional, estudiantil y laboral (autonomía de aprendizaje, actitud positiva entre los miembros del grupo, etc.).

Además de los objetivos didácticos y los de la metodología cooperativa, así como las competencias, también se consiguen los tres **propósitos del trabajo**. Por una parte, haciendo que el alumno sea el principal protagonista de la unidad a través de la investigación y cooperación con sus compañeros, se logra una modificación de la actitud hacia las matemáticas y su aprendizaje. Además, se plantearon las principales características y ventajas de la técnica utilizada (Puzzle de Aronson) como las mencionadas en el párrafo anterior. Por último, las dificultades que se encuentra un alumno de 1.º Bachillerato y sobre este temario se han visto en la planificación de las sesiones (representaciones gráficas, análisis de conceptos, etc.).

Valoración personal

Tal y como se mencionó anteriormente, pienso que esta actividad es completamente **diferente** a lo que se está acostumbrado a hacer en Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y, principalmente, en Bachillerato pues en esta segunda etapa, se está más enfocado en la Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU), por lo que se tiene “miedo” a probar nuevas formas de explicar y abarcar un temario.

El **tema elegido** es idóneo para llevar a cabo la actividad en un grupo de 20 personas pues se puede dividir perfectamente la unidad didáctica a las necesidades de la clase. Repartiendo un tipo de función elemental a cada conjunto de personas.

Además, esta actividad **fomenta** el compañerismo, el trabajo en equipo y otra serie de cualidades que normalmente no se adquieren en la ESO pero sí se necesitan en el mundo laboral. Por lo que, además de cumplir con objetivos marcados por el Ministerio de Educación, también se les educa en valores y forma para su posterior desarrollo como trabajadores profesionales.

Creo que es una actividad muy **acertada** para poder realizar con personas con edades a las que se tienen en 1.º Bachillerato; del mismo modo, también da la oportunidad al profesor de **experimentar**, sin arriesgar demasiado, y probar nuevos métodos didácticos.

Las **dificultades** que hay detrás de esta actividad son sencillas de evitar. Por lo que animo a seguir innovando y creando nuevas metodologías para educar a las siguientes generaciones.

Bibliografía y webgrafía

- Alfonzo, Z. L. (2008). *Students' comfort when learning with a graphic calculator in rural and non rural high schools. Trabajo presentado en ICME11-11TH International Congress on Mathematical Education.*
- Alfonzo, Z. L. (2012). Didáctica de las funciones lineales y cuadráticas asistida con computadora. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación. ISSN 2224-2643*, 3(3), pp. 39–48.
- Babiloni, E., Guijarro, E., y Cardós, M. (2016). An Experience in Teaching Innovation Based on Collaborative Learning and the Aronson Jigsaw Technique. En *Education tools for entrepreneurship* (pp. 15–27). Springer.
- Bisquerra Alzina, R., y cols. (2008). *Modelos de orientación e intervención psicopedagógica*. Bilbao: Praxis.
- Brindley, J. E., Blaschke, L. M., y Walti, C. (2009). Creating effective collaborative learning groups in an online environment. *International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 10(3).
- Carbonell-Sebarroja, J. (2008). ¿Qué profesorado para el siglo XXI? Conocimiento, compromiso y cooperación. *¿Qué profesorado para el siglo XXI? Conocimiento, compromiso y cooperación*, pp. 1000–1013.
- Castells, M. (2002). La dimensión cultural de Internet.
- Curtis, D. D., y Lawson, M. J. (2001). Exploring collaborative online learning. *Journal of Asynchronous learning networks*, 5(1), 21–34.
- Davini, M. C. (1905). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía*. Paidós.
- Decreto relativo al Plan del Bachillerato de Segunda enseñanza. (1934, 30 de agosto). *Gaceta de Madrid*, 242, pp. 1.871–1.874. <https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1934/242/A01871-01874.pdf>.
- DeVries, D. L., y Edwards, K. J. (1973). Learning games and student teams: Their effects on classroom process. *American Educational Research Journal*, 10(4), pp. 307–318.
- Dillenbourg, P., y Schneider, D. (1995). Collaborative Learning and the Internet.
- Ferreiro, R. (2012). *Cómo ser mejor maestro: el método ELI*. México. Editorial Trillas.
- Guijarro, E., Babiloni, E., y Fernández-Diego, M. (2014). Aplicación del puzzle de Aronson para trabajar el aprendizaje colaborativo y el desarrollo de competencias genéricas de los estudiantes.
- Henri, F., y Rigault, C. R. (1996). Collaborative distance learning and computer conferencing. En *Advanced educational technology: Research issues and future potential* (pp. 45–76).

- Berlín: Springer-Verlag.
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula.
- Kagan, S., y Kagan, M. (1994). *Cooperative learning*. San clemente. CA: kagan Publishing.
- Laurillard, D. (1993). *Rethinking University Teaching: Rethinking University Teaching: a Framework for the Effective Use of Educational Technology*. London: Routledge.
- Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. (1990, 4 de octubre). *Boletín Oficial del Estado*, 238, pp. 28.927–28.942. <https://www.boe.es/eli/es/lo/1990/10/03/1/dof/spa/pdf>.
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (2006, 3 de mayo). *Boletín Oficial del Estado*, 106, pp. 17.158–17.207. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2006/05/03/2/dof/spa/pdf>.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. (2013, 10 de diciembre). *Boletín Oficial del Estado*, 295, pp. 97.858–97.921. <https://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>.
- Moore, M. (1993). Three types of interaction interaction. En *Distance education: new perspectives*. London: Routledge.
- ORDEN 38/2017, de 4 de octubre, de la Conselleria de Educació, Investigació, Cultura y Deporte, por la que se regula la evaluación en Educación Secundaria Obligatoria, en Bachillerato y en las enseñanzas de la Educación de las Personas Adultas en la Comunitat Valenciana. [2017/8755]. (2017, 10 de octubre). *Diari Oficial de la Generalitat Valenciana*, 8146, pp. 35.781–35.915. https://www.dogv.gva.es/datos/2017/10/10/pdf/2017_8755.pdf.
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. (2015, 29 de enero). *Boletín Oficial del Estado*, 25, pp. 6.986–7.003. <https://boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-738-consolidado.pdf>.
- Quinquer, D. (2004). Estrategias metodológicas para enseñar y aprender ciencias sociales: interacción, cooperación y participación. *Íber*, 40, pp. 7–22.
- Ramsden, P. (2003). *Learning to teach in higher education*. London: Routledge.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015a, 3 de enero). *Boletín Oficial del Estado*, 3, pp. 169–546. <https://boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015b, 3 de enero). *Boletín Oficial del Estado*, 3, pp. 169–546. <https://boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-37>

-consolidado.pdf.

Real Decreto autorizando al Ministro de Instrucción pública y Bellas Artes para que en los presupuestos generales de su departamento, a partir del que se forme para el año 1902, incluya las partidas necesarias, conforme a las disposiciones de este decreto, para el pago de las atenciones de personal y material de las Escuelas públicas de primera enseñanza. (1901, 30 de octubre). *Gaceta de Madrid*, 303, pp. 497–499. <https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1901/303/A00497-00499.pdf>.

Real Decreto-ley 7/2020, de 12 de marzo, por el que se adoptan medidas urgentes para responder al impacto económico del COVID-19. (2020, 13 de marzo). *Boletín Oficial del Estado*, 65, pp. 24996–25013. <https://www.boe.es/boe/dias/2020/03/18/pdfs/BOE-A-2020-3824.pdf>.

Verdejo, M. F. (1996). Interaction and collaboration in distance learning through computer mediated technologies. En *Advanced educational technology: Research issues and future potential* (pp. 77–88). Berlín: Springer-Verlag.

Puzzle de Aronson

La técnica del Puzzle de Aronson es una técnica de trabajo cooperativo pensada para ser utilizada, principalmente, a partir de la Educación Secundaria Obligatoria y en cursos superiores.

Es importante destacar que se trata de un trabajo en grupos **cooperativos** y no **colaborativos**. Una de las diferencias principales entre estos dos conceptos es que la cooperación busca que cada una de las partes sea importante, ya que sin ellas no se puede alcanzar el objetivo final, mientras que la colaboración es la suma de las aportaciones de los individuos para llegar a su fin, pero no todas las partes son imprescindibles.

Esta metodología se divide en 4 fases diferenciadas:

- **Fase 1 - preparación.** El profesor o el grupo de alumnos, selecciona los miembros del grupo base. Será el docente quien proponga el tema a trabajar y cómo se va a dividir el trabajo para que cada grupo lo trabaje de forma separada.
- **Fase 2 - creación de grupos base.** La clase se junta según las agrupaciones definidas anteriormente. Estos grupos de trabajo se denominan grupos base. Cada miembro se hará “experto” de una de las divisiones de la tareas a realizar. Ver Figura A.1.
- **Fase 3 - trabajo en grupos de expertos.** Posteriormente, se vuelve a hacer una división de los grupos y se agrupan en grupos de expertos. El objetivo es realizar una investigación sobre el trabajo y elaborar un documento común para todo el grupo. Esta fase también se denomina fase de investigación. Ver Figura A.2.

- **Fase 4 - trabajo en grupos base.** Finalmente, cada experto regresa a su grupo base y se hace una puesta en común con todo el material que cada uno de ellos ha elaborado. De manera que cada grupo adquiere los conocimientos del resto de expertos y todos adquieren el mismo nivel de información.

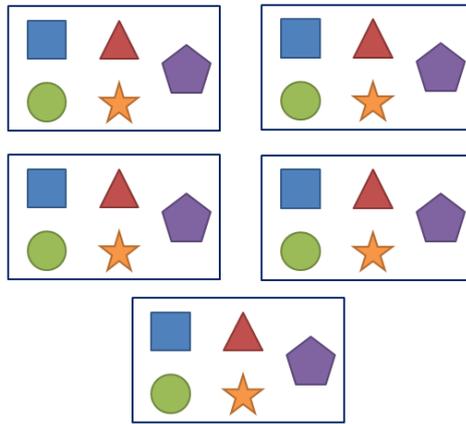


Figura A.1: Grupos base en el Puzzle de Aronson.

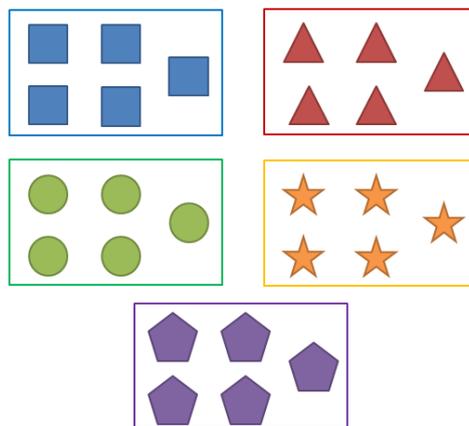


Figura A.2: Grupos de expertos en el Puzzle de Aronson.

Por último, una vez finalizada la explicación en los grupos base, se ha de realizar una puesta en común para valorar los conocimientos adquiridos sobre todas las partes del trabajo de investigación. Asegurándose de que se han comprendidos y logrado los objetivos.

Memoria de prácticas

La actividad desarrollada se enfoca en un curso de 1.º Bachillerato de 20 alumnos. Consiste en explicar la unidad didáctica sobre *funciones elementales* a lo largo 8 sesiones enfocadas en un tiempo de 55 minutos cada una, dentro del 3.ª trimestre del curso. En la Tabla B.1, se resumen estos datos.

Curso	1.º Bachillerato
Alumnos	20 alumnos
Unidad didáctica	Funciones elementales
Sesiones	8 sesiones
Trimestre	3.ª trimestre

Tabla B.1: Contexto e información general sobre la actividad.

A pesar de que los objetivos generales de la actividad se exponen con mayor detalle en el Punto B.1, para conocer de manera global de qué trata, se puede decir que la finalidad de la labor del estudiante es que, de la manera más autónoma posible, sea capaz de investigar sobre un tema en concreto.

Para lograr estos objetivos, se distribuye la actividad en ocho sesiones y se fijan las fechas concretas a través de un calendario basado en el curso y dentro de la programación de la asignatura, tal y como se recoge en la Tabla B.2.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1. ^a semana		24/03/2020 Presentación (funciones polinómicas) y test inicial	25/03/2020 Definiciones	26/03/2020 Representar funciones	27/03/2020 Analizar fun- ciones
2. ^a semana		31/03/2020 Proponer ejem- plos reales	01/04/2020 Plantear problemas	02/04/2020 Dudas	03/04/2020 Examen y test final

Tabla B.2: Distribución de las sesiones dentro de la programación de la asignatura.

Estas fechas coinciden con la vuelta de las vacaciones de la semana de Fallas y antes de iniciar las vacaciones de Pascua. Todos los detalles sobre lo que se va a realizar en cada una de las sesiones se encuentran explicados en los apartados siguientes.

Para conseguir los objetivos, se propone una serie de funciones elementales ya que la unidad didáctica o bloque de aprendizaje en la que se encuentra esta actividad es el análisis de funciones. Se puede encontrar más detalles sobre la actividad en el Punto B.3.

Los objetivos, planteamiento y desarrollo de este trabajo tuvieron que ser modificados debido a la situación vivida en el país por el estado de alerta declarado el 13 de marzo a causa de la COVID-19. Este contexto social ha hecho paralizar las clases de forma presencial y ha obligado a continuar la docencia a través de internet.

B.1. Elementos del currículum

Los contenidos, criterios de evaluación y competencias relacionadas con el currículum de 1.º Bachillerato en el bloque de Análisis, dentro de la unidad didáctica impartida, se recogen en la Tabla B.3, tal y como se recoge del Decreto 51/2018, de 27 de abril, del Consell:

Contenidos	Criterios de evaluación	CC ¹
<ul style="list-style-type: none"> ■ Funciones reales de variable real. ■ Funciones básicas: polinómicas, racionales, sencillas, valor absoluto, raíces, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos. ■ Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades. ■ Representación gráfica de funciones, después de un estudio completo de sus características por medio de las herramientas básicas del análisis. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ BL3.1. Analizar modelos funcionales (polinómicas, racionales, logarítmicas, exponenciales, etc.) expresando en forma algebraica, por medio de tablas o gráficamente, utilizando herramientas adecuadas (calculadoras gráficas, aplicaciones de escritorio, web o por dispositivos móviles), para describir fenómenos en contextos personales, sociales, profesionales y científicos. ■ BL3.3. Aplicar el cálculo de límites (en un punto y en el infinito) y derivadas (reglas de derivación) de funciones sencillas (polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales, etc.), para representarlas mediante el estudio de propiedades locales y globales (la continuidad, la tendencia, las asíntotas y la monotonía) en contextos académicos y científicos. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ BL3.1. CMCT, CD y CSC ■ BL3.3. CMCT

Tabla B.3: Extracto de los contenidos y criterios de evaluación en Matemáticas I.

¹CC: Competencias del currículum.

Estas competencias del currículum vienen recogida en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 y explicado en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero de 2015 y son:

- **CCLI: competencia comunicación lingüística.** Hace referencia a la comprensión del sentido de los textos (tanto orales como escritos), la utilización de elementos de comunicación no verbal, distintos registros y en diferentes situaciones comunicativas. Utilizar conocimientos sobre la lengua para buscar información y leer textos en cualquier situación.
- **CMCT: competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología.** Se aplica a la comprensión e interpretación de la información presentada a través de gráficos, expresión con propiedad en el lenguaje matemático y manejar conocimientos relacionados con la ciencia y la tecnología con el fin de resolver problemas.
- **CD: competencia digital.** Utilizar las nuevas tecnologías para mejorar el trabajo y facilitar también el día a día. Emplear diferentes canales de comunicación audiovisual para transmitir información diversa.
- **CAA: competencia aprender a aprender.** Evaluar la consecución de los objetivos de aprendizaje y desarrollar estrategias personales para favorecer la comprensión de los contenidos.
- **CSC: competencias sociales y cívicas.** Desarrollar capacidad de dialogar con los demás en contextos de trabajo y convivencia con el fin de resolver conflictos. Además, evidencia la preocupación y respeto a los diferentes ritmos y potencialidades.
- **SIEE: sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.** Capacidad para encontrar posibilidades en el entorno que otros individuos no aprecien.
- **CEC: conciencia y expresiones culturales.** Elaborar trabajos y presentaciones con sentido estético.

Los **objetivos generales** de esta actividad son los siguientes:

- Conocer el concepto de función.
- Conocer las características básicas de las funciones elementales.
- Asociar la expresión analítica de las funciones elementales con sus representaciones gráficas.
- Reconocer transformaciones que se producen en las funciones elementales como consecuencia de alguna modificación en sus expresiones analíticas.
- Modelización de fenómenos que se producen en la vida, a partir de las funciones.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

B.2. Materiales y recursos

Los recursos y materiales necesarios para el desarrollo de la unidad didáctica se recogen a continuación:

- **Recursos humanos:** profesor y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta; cuaderno, bolígrafo y colores; y calculadora.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word); programa para realizar videollamadas (como Zoom); y software para representar funciones (como Geogebra).

B.3. Actividades de aprendizaje y temporalización

Tal y como se presentó, esta actividad pretende enseñar aspectos básicos sobre las funciones elementales en un curso de 1.º Bachillerato. Debido a la situación del país, se tuvo que adaptar la actividad en el último momento y desarrollarla de manera online, siendo los propios alumnos quienes investigaran sobre las funciones.

Para ayudar a los estudiantes a realizar las tareas, se propone el uso de la plataforma online que disponen en el centro educativo para colgar material complementario y facilitarles las búsquedas. También se habilita un canal online con Zoom ² para plantear dudas que puedan resolverse entre todos, así como el uso del foro de la plataforma y el correo electrónico.

Las funciones elementales que se proponen estudiar son las siguientes: (1) polinómicas, (2) racionales, (3) irracionales, (4) exponenciales y (5) logarítmicas.

²<https://zoom.us/es-es/meetings.html>

El objetivo de la actividad es llegar a elaborar un documento donde se recoja el estudio de cuatro funciones y se entiendan los conceptos básicos. Para ello, durante cada sesión se abarca un punto del trabajo a entregar diferente que se debe ir haciendo de manera individual. Se considera la primera sesión de introducción y la última de evaluación. Así mismo, se deja una sesión para el planteamiento de dudas.

Todas las sesiones tienen una **duración** de 55 minutos y los **materiales** necesarios son los descritos en el Punto B.2. El **espacio de trabajo** es el del propio alumnado, ya sea una biblioteca o su propia habitación. Debido a la situación de alerta del país, la actividad se plantea desarrollarse en la propia vivienda de cada uno de los estudiantes.

La **evaluación** que se lleva a cabo en todas las sesiones es que completen y envíen el material diario. La razón se debe al contexto en el que se desarrolló la actividad. Por esta mismo motivo, la **metodología** a utilizar en todas las sesiones va a ser muy similar: lectura por parte del alumnado del material disponible en la plataforma virtual, búsqueda de información (que pueden complementar con la disponible en la plataforma) y desarrollo de las actividades.

A continuación se detalla cada una de las sesiones.

SESIÓN 1 - PRESENTACIÓN

OBJETIVOS

- Recordar el concepto de función y discriminar qué es o no una función.
- Incentivar el interés de los alumnos y alumnas sobre la investigación.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar el concepto de función.
- **Procedimentales:** discriminar a partir de gráficos cuáles representan funciones.
- **Actitudinales:** interacción e interés por la materia a partir del contexto dado.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.

METODOLOGÍA

- Realización de una prueba online para evaluar los conocimientos previos.
- Aproximación didáctica. A partir de los ejemplos gráficos propuestos, el profesor realizará una aproximación didáctica para recordar el concepto de función.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); programa para realizar videollamadas (como Zoom).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. **(30 min.)** Se les abre una actividad individual con tiempo máximo, en la plataforma online que consiste en una prueba de carácter inicial sobre los conocimientos que se tengan sobre las funciones elementales.
Estos ejercicios no serán evaluables y tienen el objetivo de saber, al final de la actividad, si el aprendizaje ha sido o no significativo. Previamente, se les habrá enviado un correo electrónico informándoles de ello.
2. **(25 min.)** Al finalizar, se les hace una presentación de la actividad a través de una presentación (a la que tendrán acceso posteriormente en la plataforma virtual) y conectados a través de videollamada:
 - En primer lugar, se les introduce el concepto de función y se les hace discriminar qué es o no una función a través de ejemplos gráficos.
 - A continuación, se les presenta el cronograma y programación de la actividad.

- Finalmente, se les hace un breve recorrido por el material que pueden encontrar en la plataforma online.

Además, en la plataforma también tendrán disponible un documento más explicativo sobre el funcionamiento y planificación de toda la actividad (se trata de una modificación del Anexo C donde en lugar de hacerlo para una función en concreto es para todas las propuestas en la actividad pero con menos ejemplos). Así mismo, encontrarán la rúbrica a través de la cual se evaluará el trabajo que han de elaborar al final de todas las sesiones (como consecuencia de lo anterior, también se trata de una modificación del Anexo E). Del mismo modo, se habilitarán enlaces de interés donde poder trabajar y buscar información, así como también un ejemplo sobre los puntos que han de entregar en el trabajo.

Funciones polinómicas

Existe a disposición del alumnado un ejemplo resuelto sobre la actividad que se debe realizar a través de una de las funciones elementales: las **funciones polinómicas**. Con este trabajo, se les pretende dar un soporte adicional sobre lo que se busca en la actividad.

En primer lugar, se les presentan estas funciones a través de su expresión analítica y su correspondiente representación gráfica. Además, se les enseña cómo representar estas funciones a través de tablas de valores. Finalmente, se dan ejemplos de enunciados con problemas de la vida real donde se pueda encontrar este tipo de funciones elementales.

En el gráfico, se les explica cómo encontrar cada uno de los siguientes conceptos en una función polinómica:

- Dominio.
- Recorrido.
- Puntos de corte con los ejes.
- Máximos y mínimos relativos.
- Curvatura y puntos de inflexión.
- Monotonía.
- Continuidad.

Además, en el caso del dominio, recorrido y puntos de corte con los ejes, también se les enseña a hacerlo a partir de la función analítica. Para ayudarnos de ello, se utilizará un software

libre llamado Geogebra, de forma que se podrá ver de manera rápida y visual cualquier variación que se haga sobre la expresión analítica y al revés.

EVALUACIÓN

Se evaluará (pero sin valor numérico) la actividad inicial e individual realizada antes de la presentación de la actividad para poder compararla con la actividad final (última sesión). Sin embargo, no formará parte de la nota del alumnado.

SESIÓN 2 - DEFINICIONES

OBJETIVOS

- Asimilar conceptos básicos relacionados con las funciones.
- Conocer algunas funciones elementales.
- Conocer algunas de las características básicas de las funciones.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** entender y asimilar las definiciones y conceptos presentados en la actividad.
- **Procedimentales:** búsqueda de conceptos a través de material de la plataforma o internet, investigación de las funciones y entendimiento de ellos.
- **Actitudinales:** trabajo individual y contraste de información.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Técnica de auto-aprendizaje mediante trabajo de investigación de conceptos sobre las funciones.

- Puesta en práctica a través de la redacción de los conceptos.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); y editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se deja trabajar al alumno y buscar la definición de los siguientes conceptos que han de presentar en un documento y subirlo a la plataforma virtual.
 - Concepto de función, variable dependiente y variable independiente.
 - Funciones elementales: racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas; a través de un ejemplo analítico y gráfico y presentando la fórmula analítica general de cada una de ellas.
 - Conceptos básicos de las funciones: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión, monotonía y continuidad.

En caso de necesitarlo, pueden apoyarse en la plataforma virtual o a través de un correo electrónico para resolver dudas.

EVALUACIÓN

Se tendrá en cuenta la entrega de la actividad con un mínimo de información decente y calidad al final del día. Solo se llevará a cabo un control de trabajo diario.

OBJETIVOS

- Asociar la expresión analítica de las funciones elementales con sus representaciones gráficas.
- Reconocer transformaciones que se producen en las funciones elementales como consecuencia de alguna modificación en sus expresiones analíticas.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar los conceptos de la sesión anterior.
- **Procedimentales:** representación gráfica de funciones a través de una tabla de valores. Uso de programas para la representación de funciones.
- **Actitudinales:** trabajo individual e interés por la materia.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Técnica de auto-aprendizaje mediante trabajo de lectura y audio-visual para representar funciones elementales gráficamente.
- Puesta en práctica a través de la representación gráfica.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta; cuaderno, bolígrafo y colores; y calculadora.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word); y software para representar funciones (como Geogebra).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se deja trabajar al alumno y representar gráficamente las funciones elementales que han de presentar en un documento y subirlo a la plataforma virtual.
 - Proponer, al menos, un ejemplo analítico de cada tipo de función elemental: racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas.
 - Representación gráfica de funciones elementales a través de tabla de valores.
 - Pueden apoyarse en software gráfico como Geogebra.

En caso de necesitarlo, pueden apoyarse en la plataforma virtual o a través de un correo electrónico para resolver dudas.

EVALUACIÓN

Se tendrá en cuenta la entrega de la actividad con un mínimo de información decente y calidad al final del día. Solo se llevará a cabo un control de trabajo diario.

OBJETIVOS

- Analizar algunos conceptos y características básicas de las funciones.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar los conceptos de las sesiones anteriores.
- **Procedimentales:** identificar los conceptos previos a partir del gráfico de una función.
- **Actitudinales:** trabajo individual e interés por la materia.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Técnica de auto-aprendizaje mediante trabajo de asimilación, lectura y audio-visual para identificar conceptos en los gráficos de las funciones.
- Puesta en práctica a través del análisis de funciones.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.

- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word); y software para representar funciones (como Geogebra).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se deja trabajar al alumno e identificar en las gráficas de las funciones elementales los conceptos trabajados anteriormente, que han de presentar en un documento y subirlo a la plataforma virtual.
 - Proponer, al menos, dos ejemplos gráficos de cada tipo de función elemental: racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas.
 - Analizar los siguientes puntos en cada una de ellas:
 - Calcular el **dominio** de la función.
 - Calcular el **recorrido** de la función.
 - Calcular los **puntos de corte con los ejes** de la función.
 - Estudiar los **máximos y mínimos relativos** a partir del gráfico de la función.
 - Estudiar la **concavidad, convexidad y puntos de inflexión** a partir del gráfico de la función.
 - Estudiar la **monotonía** a partir del gráfico de la función.
 - Estudiar la **continuidad** a partir del gráfico de la función.
 - Pueden apoyarse en software gráfico como Geogebra.

En caso de necesitarlo, pueden apoyarse en la plataforma virtual o a través de un correo electrónico para resolver dudas.

EVALUACIÓN

Se tendrá en cuenta la entrega de la actividad con un mínimo de información decente y calidad al final del día. Solo se llevará a cabo un control de trabajo diario.

OBJETIVOS

- Modelización de fenómenos que se producen en la vida, a partir de las funciones.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar los conceptos de las sesiones anteriores y asociarlos a fenómenos reales.
- **Procedimentales:** investigación de funciones y asociarlas a casos reales.
- **Actitudinales:** trabajo individual, contraste de información e interés por la materia.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Técnica de auto-aprendizaje mediante trabajo de investigación de fenómenos reales relacionados con las funciones.
- Puesta en práctica a través de la redacción de la investigación.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.

- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); y editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se deja trabajar al alumno e investigar fenómenos reales que se puedan modelizar a través de funciones elementales, han de presentarlo en un documento y subirlo a la plataforma virtual.
 - Proponer, al menos, dos ejemplos reales donde se pueda encontrar estas funciones en un entorno real o científico-académico (problemas de física, química, economía, etc.).

En caso de necesitarlo, pueden apoyarse en la plataforma virtual o a través de un correo electrónico para resolver dudas.

EVALUACIÓN

Se tendrá en cuenta la entrega de la actividad con un mínimo de información decente y calidad al final del día. Solo se llevará a cabo un control de trabajo diario.

SESIÓN 6 - PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

OBJETIVOS

- Planteamiento de problemas relacionados con las funciones.
- Resolución de problemas de funciones.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** recordar los conceptos de las sesiones anteriores y asociarlos a fenómenos reales.
- **Procedimentales:** investigación de funciones y asociarlas a casos reales.

- **Actitudinales:** trabajo individual, contraste de información e interés por la materia.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Técnica de auto-aprendizaje mediante trabajo de problemas reales relacionados con las funciones elementales estudiadas en las sesiones anteriores.
- Puesta en práctica a través del planteamiento y resolución de los problemas.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta; cuaderno, bolígrafo; y calculadora.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); y editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. Se deja trabajar al alumno y proponer problemas relacionados con las funciones elementales estudiadas, han de presentarlo en un documento y subirlo a la plataforma virtual.
 - Proponer, al menos, un problema para cada tipo de función elemental estudiada (pueden aparecer en un entorno real o científico-académico)
 - Resolver los problemas planteados.

En caso de necesitarlo, pueden apoyarse en la plataforma virtual o a través de un correo electrónico para resolver dudas.

EVALUACIÓN

Se tendrá en cuenta la entrega de la actividad con un mínimo de información decente y calidad al final del día. Solo se llevará a cabo un control de trabajo diario.

SESIÓN 7 - DUDAS

OBJETIVOS

- Repasar y fortalecer todos los conceptos aprendidos.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** repaso de las sesiones anteriores.
- **Procedimentales:** planteamiento de dudas y su resolución.
- **Actitudinales:** trabajo individual, respeto del turno de palabra y a los compañeros/as.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.

METODOLOGÍA

- Participación activa. El alumnado presentará sus dudas de manera ordenada y se resolverá por parte del profesor u otro compañero o compañera.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** profesor y alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.

- **Software (programas):** acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); y programa para realizar videollamadas (como Zoom).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

- **(45 min.)** Se destina la sesión entera a resolver dudas por parte del alumnado sobre las actividades realizadas de manera individual, el trabajo a entregar y los conceptos estudiados hasta ahora.
- **(10 min.)** En caso de no haberse planteado, el profesor explicará aquellos conceptos que más dudas han generado o aquellas actividades o puntos que menos gente ha completado a lo largo de las sesiones anteriores; dando pautas y explicaciones de cómo mejorarlos de cara al trabajo.

EVALUACIÓN

Se tendrá en cuenta la asistencia a la videollamada, es decir, solo se llevará a cabo un control de trabajo diario.

SESIÓN 8 - TRABAJO Y ACTIVIDAD INDIVIDUAL

OBJETIVOS

- Incentivar el interés del alumno sobre la materia.
- Propiciar el trabajo autónomo de los alumnos y alumnas.

CONTENIDO

- **Conceptuales:** repaso de las sesiones anteriores.
- **Procedimentales:** realización de una actividad individual y comienzo de la elaboración del trabajo.
- **Actitudinales:** trabajo individual.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Competencia aprender a aprender.
- Conciencia y expresión culturales.

METODOLOGÍA

- Realización de la misma prueba online de la sesión 1 para evaluar los conocimientos asimilados.
- Trabajo autónomo. Empezar a elaborar el documento final a entregar.

MATERIALES Y RECURSOS

- **Recursos humanos:** alumnos/as.
- **Recursos materiales:** ordenador portátil, de sobremesa o tableta.
- **Recursos espaciales:** espacio de trabajo propio.
- **Software (programas):** plataforma virtual donde se pueda colgar información (como Moodle); acceso a internet (a través de un navegador como Mozilla Firefox); y editor de texto con opciones de formulación matemáticas (como Microsoft Word).

TEMPORALIZACIÓN

1 sesión de 55 minutos.

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO

1. **(20 min.)** Se les hace la misma actividad individual de la sesión 1 con un menor tiempo máximo. Se comparará con la prueba inicial para conocer si el aprendizaje ha sido o no significativo.
2. **(35 min.)** Disponen del resto del tiempo para empezar a elaborar el documento final en el que deben de presentar todas las actividades realizadas durante las sesiones anteriores y, además, analizar si existen “peculiaridades” o características genéricas para cada una de las funciones elementales.

Se les proporcionará unos días más para elaborar el trabajo. La estructura de este documento es similar a la presentada en el Anexo C.

EVALUACIÓN

Se evaluará (pero sin valor numérico) la actividad final e individual realizada. La actividad presentada en el documento tendrá una valoración numérica que se detalla en el Punto B.4.

B.4. Evaluación de la actividad

Esta actividad entra dentro del temario del curso, por lo que formará parte de la evaluación final de la asignatura. El peso de dicho temario estará recogido en la programación inicial de la asignatura.

Para evaluar este tema, se rellenará una rúbrica muy similar a la que se puede encontrar en el Anexo E. La nota del temario será ponderada según la Tabla B.4.

Actividad	Peso
Entregas diarias	20 %
Trabajo final	80 %

Tabla B.4: Evaluación final de la asignatura.

Para poder aprobar esta unidad didáctica, es necesario aprobar cada una de las partes individuales. De lo contrario, se les haría una prueba de evaluación final extraordinaria con una ponderación del 100 %.

Dentro de la evaluación de la asignatura, esta nota tendrá un peso del 20 % sobre el trimestre. Las notas del 3.^{er} trimestre tienen el mismo peso que las demás evaluaciones del resto del curso.

Documento a elaborar

C.1. Definiciones

a) **Explicar conceptos básicos.** Dar la definición de:

- Función
- Variable dependiente
- Variable independiente

b) **Proporcionar la definición de la función elemental** a estudiar.

Para ello, se ha de presentar mediante un ejemplo analítico y gráfico. Además, también se ha proporcionar la fórmula analítica general de dicha función.

c) **Definición de conceptos.** Para ello, se ha de presentar la definición de:

- Dominio.
- Recorrido.
- Puntos de corte con los ejes.

- Máximos y mínimos relativos.
- Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
- Monotonía.
- Simetría.
- Continuidad.
- Asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas).

C.2. Analizar la función

a) **Proponer, al menos, dos ejemplos analíticos** de funciones de este tipo y representarlas gráficamente a través de tablas de valores.

b) **Proponer, al menos, dos ejemplos gráficos** de funciones de este tipo y analizar los siguientes puntos en cada uno de ellos:

- Calcular el **dominio** de la función.
- Calcular el **recorrido** de la función.
- Calcular los **puntos de corte con los ejes** de la función.
- Estudiar los **máximos y mínimos relativos** a partir del gráfico de la función.
- Estudiar la **concavidad, convexidad y puntos de inflexión** a partir del gráfico de la función.
- Estudiar la **monotonía** a partir del gráfico de la función.
- Estudiar la **simetría** a partir del gráfico de la función.
- Estudiar la **continuidad** a partir del gráfico de la función.
- Estudiar la **asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas)** a partir del gráfico de la función.

c) De los ejemplos anteriores, **¿se han encontrado peculiaridades?**

Analizar si existe el dominio para todos los valores que puede tomar la función; comentar si la función siempre está definida en el mismo cuadrante; estudiar si al cambiar ligeramente el argumento de la función esta se modifica bastante, es decir, si al hacer cambios sobre la variable independiente, $(f(x), f(x + 1), \dots)$, ¿se modifica la gráfica? ¿Cómo es esta modificación?; etc.

C.3. Modelización en el mundo real

a) **Proporcionar un mínimo de tres ejemplos reales** donde se pueda encontrar esta función elemental en un entorno real o en un entorno científico-académico (problemas de física, química, economía, etc.).

b) **Plantear, al menos, dos problemas** que puedan aparecer en un entorno real o científico-académico y resolverlos.

Funciones polinómicas

D.1. Definiciones

a) Conceptos básicos

Se deja al lector buscar las definiciones y explicaciones de cada uno de los conceptos.

b) Definición de la función elemental

Las **funciones polinómicas** son aquellas que vienen definidas por un polinomio de cualquier grado: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \dots, n$.

Las funciones polinómicas de primer grado ($n = 1$) también se llaman *funciones lineales* y pueden expresarse como cualquiera de las ecuaciones de la recta. La más común es la punto-pendiente: $y = mx + n$, es decir, aquella que pasa por el punto $(0, n)$ y que tiene como pendiente m .

Un ejemplo de esta función puede ser $f(x) = 2x$ (su expresión analítica) que al no tener ordenada en el origen ($n = 0$), pasa por el punto $(0, 0)$. Como se puede ver en la Figura D.1 (ejemplo gráfico).

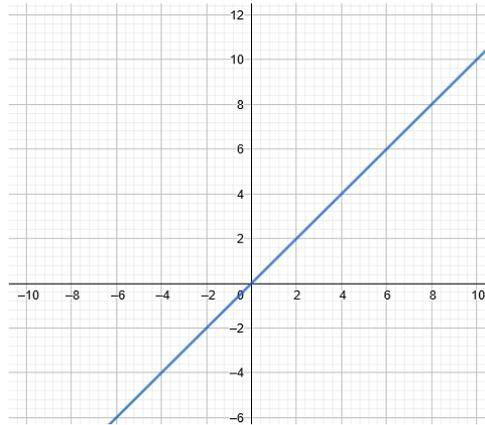
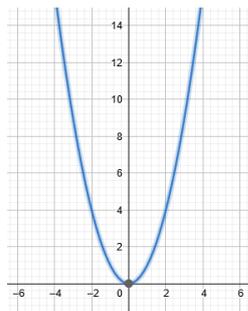
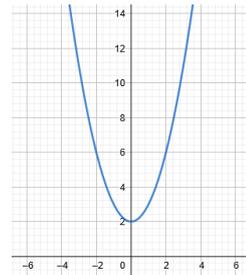


Figura D.1: Representación de $f(x) = 2x$.

Las funciones polinómicas de segundo grado ($n = 2$) también se llaman *funciones cuadráticas* y se representan mediante parábolas. Algunos ejemplos de funciones son las representadas en la Figura D.2.



(a) Representación de $f(x) = x^2$.



(b) Representación de $f(x) = x^2 + 2$.

Figura D.2: Representación de funciones cuadráticas.

Y de esta forma, se pueden encontrar más tipos de funciones polinómicas y construirlas.

c) Definir los conceptos

Se deja al lector buscar la definición y explicación de cada uno de los conceptos.

Sin embargo, se hace uso de la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + x^2 - 2$ que se representa en la Figura D.3 para analizar los conceptos. En esta figura ya se han marcado los puntos de corte con los ejes (en color verde: A, B, C y E), los extremos relativos (en rojo: D y E) y el punto de inflexión (de color naranja, el F).

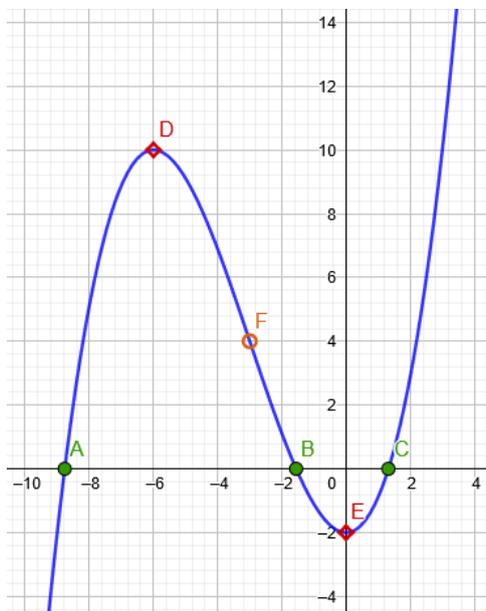


Figura D.3: Representación de $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + x^2 - 2$.

- **Dominio:** $Dom(f) = \mathbb{R}$, es decir, su dominio es $] - \infty, +\infty[$.
- **Recorrido:** $Re(f) = \mathbb{R}$, es decir, su recorrido es $] - \infty, +\infty[$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
Eje OX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9}x^3 + x^2 - 2 = 0$. Resolvemos la ecuación y nos queda que:
 $x_1 = -8,7657$, $x_2 = -1,5548$ y $x_3 = 1,3206$.
Eje OY: $f(0) = -2$.
Por lo tanto, los puntos de corte con los ejes son: $(-8,7657, 0)$, $(-1,5548, 0)$, $(1,3206, 0)$ y $(0, -2)$
- **Máximos y mínimos relativos:**
Máximo relativo: $(-6, 10)$.
Mínimo relativo: $(0, -2)$.

- **Concavidad, convexidad y puntos de inflexión:**

Convexidad: $] - 3, +\infty[$.

Concavidad: $] - \infty, -3[$.

Punto de inflexión: $(-3, 4)$.

- **Monotonía:**

Crecimiento: $] - \infty, -6[\cup] 0, +\infty[$.

Decrecimiento: $] - 6, 0[$.

- **Simetría:** la función presenta simetría impar respecto al punto $(-3, 4)$.

- **Continuidad:**

La función es continua en todo \mathbb{R} .

- **Asíntotas:**

Horizontales: no hay

Verticales: no hay

Oblicuas: no hay

D.2. Analizar la función

a) Ejemplos analíticos con tablas de valores

Una de las funciones que podemos utilizar es la del ejemplo anterior: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + x^2 - 2$ que se puede ver representada la Figura D.3. Para ello, utilizamos una tabla de valores. Ya que contamos con el análisis de la función anterior gracias a Geogebra, aprovecharemos que conocemos esos puntos para dibujarla. Estos valores se recogen en la Tabla D.1.

Lo que hemos hecho es sustituir el valor de x en la función y dibujar un punto. Una vez hayamos acabado, unimos los puntos en orden de izquierda a derecha.

x	$f(x)$
-10	-13, 11
-8	5, 11
-6	10
-4	6, 88
-2	1, 11
-1	-1, 11
0	-2
0, 5	-1, 73
1	-0, 88
2	2, 88
10	209, 11

Tabla D.1: Tabla de valores para representar $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + x^2 - 2$.

Para elegir estos valores de x , hemos empezado por $x = 0$ y yendo hacia atrás con $x = -1$ y $x = -2$. Como parece que va aumentando, hemos decidido probar con $x = -10$ pero el valor nos volvió a salir negativo, por lo que seguramente existe al menos, un punto máximo relativo, lo buscamos probando números que se encuentren en el intervalo $] - 10, -2[$. Hasta que vimos que está en -6 .

Para los valores positivos, hemos hecho un razonamiento similar. En este caso, solo aumenta, por lo que es probable que el mínimo esté entre $] - 2, 1[$. Al crecer muy poco entre $]0, 1[$ probamos otro número cerca de ahí: $0, 5$ pero sigue creciendo. Asumimos que el mínimo está en 0 . Dibujamos la gráfica y nos sale similar a la Figura D.3; pero no nos ha hecho falta conocer el gráfico con anterioridad para calcularlo.

Otro ejemplo que podemos encontrar de función y sin que sepamos nada de su representación gráfica puede ser el siguiente: $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Hacemos una tabla de valores (Tabla D.2).

En esta ocasión, volvemos a empezar con $x = 0$ y miramos los valores negativos. Vemos que van creciendo desde $x = -1$ hasta $x = -5$, por lo que al tratarse de una función polinómica de grado 2, debemos encontrar un extremo relativo que estará, por tanto, en el lado positivo.

Tomamos $x = 1$ y vemos que el valor decrece. Probamos con $x = 2$ y vuelve a crecer.

x	$f(x)$
-5	54
-2	18
-1	10
0	4
0,5	1,75
1	0
1,5	-1.25
2	2
5	4

Tabla D.2: Tabla de valores para representar $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

Por lo tanto, el extremo relativo que estamos buscando estará entre $]0, 2[$. Lo intentamos con $x = 0,5$ y sigue decreciendo. También miramos $x = 1,5$ y aquí encontramos un valor negativo. Luego estamos acotando donde está el mínimo (pues después los valores crecen). Como es una aproximación, podríamos decir que este mínimo se encuentra cerca del punto $(1'5, -1'25)$.

Unimos todos los puntos y nos sale el gráfico de la Figura D.4.

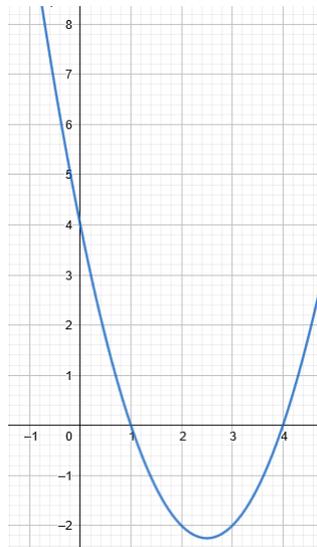
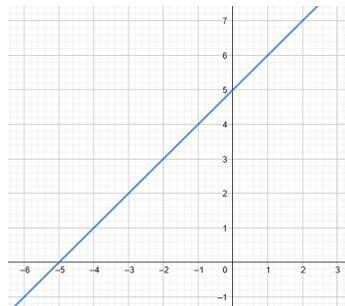
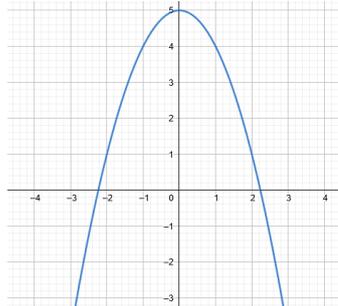


Figura D.4: Representación de $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

b) Ejemplos gráficos con los puntos anteriores



(a) Representación de $f(x) = x - 5$.



(b) Representación de $f(x) = -x^2 + 5$.

Figura D.5: Representación de funciones.

En primer lugar, vamos a analizar la Figura D.5 (a). Gráficamente vemos que se trata de una recta. Al desconocer la función analítica, los cálculos serán aproximados y a ojo.

- **Dominio:** $Dom(f) = \mathbb{R}$, es decir, su dominio es $] - \infty, +\infty[$.
- **Recorrido:** $Re(f) = \mathbb{R}$, es decir, su recorrido es $] - \infty, +\infty[$.
- **Puntos de corte con los ejes:** $(-5, 0)$ y $(0, 5)$
- **Máximos y mínimos relativos:** la función no presenta extremos relativos.
- **Concavidad, convexidad y puntos de inflexión:** la función no presenta curvas ni puntos de inflexión.
- **Monotonía:**
Crecimiento: $] - \infty, +\infty[$.
Decrecimiento: la función no presenta decrecimiento.
- **Simetría:** la función presenta simetría impar respecto al punto $(0, 5)$.
- **Continuidad:** la función es continua en \mathbb{R} .
- **Asíntotas:** la función no presenta ningún tipo de asíntotas.

Por otra parte, también analizaremos la Figura D.5 (b). Gráficamente, ya observamos que se trata de una función parabólica pero, en esta ocasión, tiene un punto máximo relativo.

- **Dominio:** $Dom(f) = \mathbb{R}$, es decir, su dominio es $] - \infty, +\infty[$.
- **Recorrido:** $Re(f) = \mathbb{R}$, es decir, su recorrido es $] - \infty, 5]$.
- **Puntos de corte con los ejes:** $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(2\sqrt{2}, 0)$ y $(0, 5)$
- **Máximos y mínimos relativos:**
Máximo relativo: $(5, 0)$.
Mínimos relativos: la función no presenta mínimos relativos.
- **Concavidad, convexidad y puntos de inflexión:**
Convexidad: la función no presenta puntos de convexidad.
Concavidad: $] - \infty, +\infty[$.
Puntos de inflexión: la función no presenta puntos de inflexión.
- **Monotonía:**
Crecimiento: $] - \infty, 5]$.
Decrecimiento: $]5, +\infty[$.
- **Simetría:** la función presenta simetría respecto al eje OY .
- **Continuidad:** la función es continua en \mathbb{R} .
- **Asíntotas:** la función no presenta ningún tipo de asíntotas.

c) Peculiaridades

Después de haber realizado los ejercicios, observamos una serie de peculiaridades y curiosidades.

En primer lugar, por lo general, el dominio se presenta en todo \mathbb{R} o bien en un intervalo finito y continuo. Lo mismo ocurre con el recorrido. Además, las funciones elementales básicas son simétricas.

Respecto a los extremos relativos y la curvatura (concavidad y convexidad), las funciones polinómicas de grado mayor o igual a 2, suelen presentar este tipo de datos.

En el caso particular de las funciones polinómicas de grado 2, si el signo del coeficiente líder es positivo, presenta una convexidad (con un mínimo relativo) y si es negativo, una concavidad con un máximo relativo. Estas afirmaciones se pueden extender y generalizar ya que siempre será así.

D.3. Modelización en el mundo real

a) Ejemplos reales

En primer lugar, se presenta un ejemplo de función lineal o polinómica de primer grado como es la presión a distintas profundidades en el mar: $\text{Presión} = 1 + 1,033 \cdot \text{Profundidad}$.

En segundo lugar, un ejemplo de función cuadrática como es la altura a (en metros) a la que se encuentra un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 180 km/h en función del tiempo t (en segundos). Esta altura viene representada por: $a = 50t - 5t^2$ con $0 \leq t \leq 10$.

Además de encontrar funciones polinómicas en el campo de las ciencias más puras, también las podemos encontrar en las sociales como en la economía. Un ejemplo de ello puede ser la tarifa que emplea una empresa de transporte según la distancia recorrida en el coche. Entonces, se puede expresar el precio $= 4 \cdot x$ donde x representa la distancia recorrida en km.

b) Problemas reales

1. Una empresa de mercancías cobra 40 euros por cada 100 km que recorre desde el almacén hasta el destinatario. Obtén la expresión analítica que representa cuánto cobra la empresa en función de los kilómetros que recorre el vehículo. ¿Puede asociarse a alguna función elemental?

La función que representa esto es: $f(x) = \frac{40}{100}x = \frac{4}{10}x = \frac{2}{5}x$ donde x representa los kilómetros recorridos. Esto tiene sentido pues las unidades que se emplean son: $f = \frac{\text{euros}}{\text{km}} \cdot \text{km} = \text{euros}$.

Se observa que se trata de una recta que pasa por el origen [punto $(0, 0)$] y es creciente.

Luego es una función polinómica de grado 1.

2. La distancia que recorre un vehículo desde que pisa el freno hasta que se detiene viene dada por: $d = \frac{1}{100}v^2 + \frac{1}{6}v$ donde d representa la distancia en metros y v la velocidad a la que va en km/h.

2.1. Representa la función en el intervalo $[0, 180]$.

Como nos pide representar la función en un intervalo concreto, como mínimo deberemos representar esos dos puntos. Además, como no es una recta, tendríamos que saber dónde está el punto de inflexión. Al desconocerlo, vamos a dar varios valores y observar si hay un cambio en el crecimiento o decrecimiento de la función. Si lo hubiese, daríamos más valores a esos puntos cercanos y en caso contrario no haría falta. En la Tabla D.3 se recoge esta tabla de valores que hemos ido dando de forma creciente.

v	d
0	0
25	10,4166
50	33,3333
100	116,6666
150	250
180	354

Tabla D.3: Tabla de valores para representar $d = \frac{1}{100}v^2 + \frac{1}{6}v$.

Una vez tenemos estos puntos, podemos hacer la representación gráfica de la función como se ve en la Figura D.6.

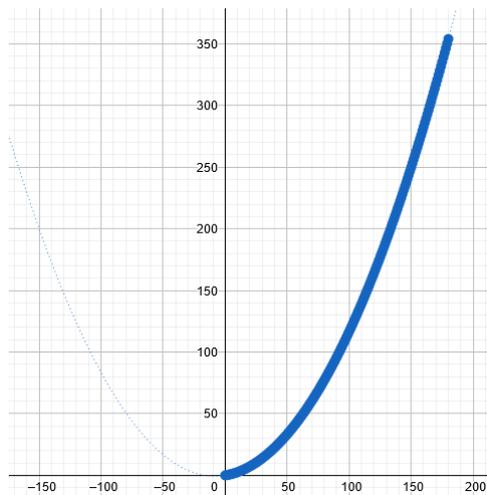


Figura D.6: Representación de $d = \frac{1}{100}v^2 + \frac{1}{6}v$.

2.2. Si hay un objeto a 0,05km de distancia, ¿cuál tiene que ser la velocidad a la que se mueva dicho vehículo para poder frenar a tiempo?

Se trata de sustituir en la ecuación el valor correspondiente y despejar la otra variable. En este caso, nos dan d y debemos aislar v . Además, debemos de tener cuidado con las unidades: nos dan la distancia en kilómetros y nuestra fórmula está en metros, por lo que debemos convertirla.

$$0,05 \cdot 1000 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{1}{6}v \leftrightarrow \frac{1}{100}v^2 + \frac{1}{6}v - 50 = 0$$

Resolvemos la ecuación con la fórmula de segundo grado y obtenemos que $v_1 = 62,867$ y $v_2 = -79,533$.

Por lo tanto, el vehículo ha de ir, como máximo, a 62,867 km/h. La otra respuesta no es posible porque se trata de un valor negativo. Si vemos nuestra gráfica (el eje de ordenadas representa la distancia y el de abscisas la velocidad), observamos que la respuesta es coherente (el valor que toma el eje de abscisas está justo después del 50 cuando $d = 50$).

Rúbrica de evaluación

0 - 4	4 - 8	8 - 10
Corrección (5%)		
El documento presenta muchas incorrecciones y faltas de ortografía.	El documento presenta algunas incorrecciones y faltas ortográficas. Se repiten palabras que pueden haberse sustituido por sinónimos, etc.	El documento se presenta correcto.
Cohesión (5%)		
El documento presenta párrafos no cohesionados, se utilizan siempre los mismos conectores o son inexistentes.	El documento presenta conectores pero se repiten muy seguidos.	El documento está bien cohesionado.

Definiciones (15 %), Apartado: <i>Definiciones.</i>		
<ul style="list-style-type: none"> ▪ No se definen los conceptos básicos que se piden. ▪ Se definen menos de 7 conceptos a estudiar. ▪ No se da una definición de la función a estudiar. ▪ No se proporciona ninguna ecuación genérica. ▪ No se presenta ningún ejemplo gráfico ni analítico. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se definen al menos 7 de los conceptos que se piden. ▪ Se proporciona una ecuación genérica de la función a estudiar. ▪ Un 25 % de los conceptos presentados no son correctos o no se entienden. ▪ Se presenta el ejemplo analítico de la función a estudiar pero no es claro o no ayuda a entender la función; o bien no se presenta dicho ejemplo. ▪ Se presenta el ejemplo gráfico de la función a estudiar pero no es claro o no ayuda a entender la función; o bien no se presenta dicho ejemplo. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se definen los conceptos básicos que se piden, son claros y correctos. ▪ Se definen todos los conceptos a estudiar. ▪ Todos los conceptos (o al menos 7 de ellos) son correctos y se entienden. ▪ Se da una definición de la función a estudiar que es correcta. ▪ Se proporciona una ecuación genérica de la función a estudiar que es correcta. ▪ El ejemplo analítico de la función a estudiar es claro y ayuda a entenderla. ▪ El ejemplo gráfico de la función a estudiar es claro y ayuda a entenderla.
Ejemplos reales con las funciones (10 %), Apartado: <i>Modelización en el mundo real.</i>		
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se proporciona 1 o ningún ejemplo real para la función. ▪ Los ejemplos no son claros o no se diferencia de otros. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se proporciona 1 o 2 ejemplos reales para la función. ▪ Los ejemplos son claros pero, uno de ellos no se diferencia de otros en al menos dos ocasiones. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se proporcionan 3 o más ejemplos reales para la función. ▪ Los ejemplos son claros y se diferencian unos de otros.

Planteamiento de problemas (10 %), Apartado: <i>Modelización en el mundo real.</i>		
<ul style="list-style-type: none"> ▪ No se plantea ningún problema real o son los mismos proporcionados en los ejemplos reales. ▪ No se resuelven los problemas o su solución es incorrecta, sin justificación, sin razonamiento ni redacción final. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se plantea mínimo un problema real. ▪ Se resuelven los problemas pero no se redacta la solución, no se justifica la respuesta o no se hace ningún razonamiento lógico. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se plantea, al menos, dos problemas reales. ▪ Se resuelven los problemas de manera clara y lógica.
Análisis gráfico de la función (25 %), Apartado: <i>Analizar la función.</i>		
<ul style="list-style-type: none"> ▪ No se presenta ningún ejemplo o bien todos los presentados son variaciones del mismo. ▪ No se analizan conceptos o no se hace de manera correcta. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se proporciona 1 o 2 ejemplos diferentes pero uno de ellos es una variación de la función elemental. ▪ Se analiza, al menos, de manera correcta los conceptos: dominio, puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Se proporciona 2 o más ejemplos analíticos diferentes (sin ser variantes de la función elemental). ▪ Se analizan todos los conceptos y son correctos y claros.

Representación de la función (15%), Apartado: <i>Analizar la función.</i>		
<ul style="list-style-type: none"> ■ No se presentan ejemplos o se hace con variaciones de las funciones elementales. ■ No se realizan tablas de valores. ■ La representación gráfica de los ejemplos no es correcta. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Se presenta 1 o 2 ejemplos pero uno de ellos es una variación de la función elemental. ■ No se realizan tablas de valores o las que se hacen no ayudan a representar la función. ■ La representación gráfica de los ejemplos presenta pequeños errores. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Se presentan 2 o más ejemplos diferentes (sin ser variantes de la función elemental). ■ Se realiza, en todos los casos, tablas de valores lógicas y justificadas. ■ La representación gráfica de todos los ejemplos es correcta.
Peculiaridades de las funciones (15%), Apartado: <i>Analizar la función.</i>		
<ul style="list-style-type: none"> ■ Se proporcionan menos de 3 características de este tipo de funciones. ■ Las características encontradas no son claras o bien no están explicadas o argumentadas. ■ No se ha encontrado ninguna peculiaridad de este tipo de función. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Se proporcionan, al menos, 3 o 4 características de este tipo de funciones. ■ Todas las características encontradas son claras aunque no se encuentran bien explicadas o argumentadas. ■ No se han encontrado las peculiaridades más obvias de este tipo de función. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Se proporcionan 5 o más características de este tipo de funciones. ■ Todas las características encontradas son claras y están bien explicadas y argumentadas. ■ Se han encontrado las peculiaridades más claras de este tipo de función.

Tabla E.1: Rúbrica de evaluación de la actividad final.

Seguimiento del trabajo diario

En la Tabla F.1, se presentan un listado para realizar un seguimiento diario de cada uno de los alumnos durante las sesiones de trabajo en el aula. Dicha tabla se ha de rellenar de acuerdo a la rúbrica que se presenta en la Tabla F.2.

Al finalizar las sesiones, se hará una media aritmética sobre las puntuaciones diarias obtenidas para sacar el porcentaje correspondiente a la nota. Se hará primero una media por cada ítem evaluado y luego entre el número total de ítems evaluados. El valor obtenido se multiplicará por el 0,2 ya que es el peso que tiene asignado para la evaluación continua del temario.

Alumno:				Grupo:	
Ítem a evaluar / Sesión	S. 4	S. 5	S. 6	S. 7	Media
Contribución a las metas					
Consideración hacia los demás					
Contribución al conocimiento					
Trabajo y habilidad para compartir con los demás					

Tabla F.1: Tabla de seguimiento diario del alumno durante las sesiones.

Item / Puntos	0 - 0,5	0,5 - 1	1 - 2
Contribución a las metas	No contribuye o lo hace puntualmente para lograr los objetivos.	Contribuye ocasionalmente al logro de los objetivos.	Trabaja activa y consistentemente para conseguir el objetivo del grupo.
Consideración hacia los demás	No muestra empatía hacia los sentimientos ajenos.	Necesita que se le recuerde la empatía hacia los demás.	Muestra empatía y además les alienta a participar.
Contribución al conocimiento	Contribuye con información solo cuando se le pide.	Contribuye con información ocasionalmente y cuando se le pide.	Contribuye con información y habilidades de manera autónoma.
Trabajo y habilidad para compartir con los demás	Ayuda a realizar cambios solo si se le pide.	Ayuda a realizar cambios y a veces necesita que se lo recuerden.	Ayuda y alienta a realizar el trabajo necesario sin que se lo recuerden.

Tabla F.2: Rúbrica de evaluación para completar la tabla de seguimiento diario del alumnado.