

Máster Universitario en Matemática Computacional.  
Trabajo fin de Máster.

# Modelización de Transitorios Hidráulicos. Resolución numérica del Golpe de Ariete.



Director: Vicente Martínez García.

Autor: Francisco Navarro Plana.

# Índice.

## ■ AGRADECIMIENTOS.

## ■ CAPÍTULO 1. TRANSITORIO HIDRÁULICO.

- 1.1 • Clasificación de los regímenes de flujo. Concepto y tipos de transitorio hidráulico.
  - \_1.1.1 Clasificación de los regímenes de flujo hidráulico. Concepto de transitorio. Golpe de Ariete.
  - \_1.1.2 Tipos de transitorios.
- 1.2 • Clasificación de los modelos de análisis físico-matemáticos y de los dinámicos de aproximación a los fenómenos de transición hidráulica.
  - \_1.2.1 Modelos de parámetros concentrados y de parámetros distribuidos.
  - \_1.2.2 Clasificación de los modelos de análisis de sistemas hidráulicos.
  - \_1.2.3 Clasificación de los modelos de análisis dinámicos de sistemas hidráulicos.
- 1.3 • Modelización del fenómeno físico.

## ■ CAPÍTULO 2. GOLPE DE ARIETE.

- 2.1 • Concepto y definición de Golpe de Ariete.
- 2.2 • Consecuencias perjudiciales del Golpe de Ariete.
- 2.3 • Resumen de la evolución histórica en el estudio del Golpe de Ariete.
- 2.4 • Paquetes informáticos disponibles en el mercado para el análisis del Golpe de Ariete.
- 2.5 • Elementos constitutivos colaterales al Golpe de Ariete pendientes de integración analítica en el modelo matemático.
  - \_2.5.1 - Cavitación.
  - \_2.5.2 - Interferencia inercial mutua entre el fluido trasegado y el ducto.
  - \_2.5.3 - Rozamiento y pérdida de carga hidráulica en régimen de subordinación transitoria.
  - \_2.5.4 - Análisis inverso de transitorios (ITA).
  - \_2.5.5 - Transición del régimen en lámina libre al de entrada en carga, con presencia de aire.

## ■ CAPÍTULO 3. ALGUNAS FÓRMULAS SIMPLIFICADAS DE APLICACIÓN DIRECTA PARA EL CÁLCULO DE LA MÁXIMA SOBREPRESIÓN GENERADA POR EL GOLPE DE ARIETE.

- 3.1 • Cálculo del Golpe de Ariete según Jouguet.
- 3.2 • Cálculo del Golpe de Ariete según Michaud.
- 3.3 • Formulación del fenómeno de Golpe de Ariete según Allievi-Joukowsky. Pulso de Joukowsky.

3.4 • Fórmula de Angus.

3.5 • Fórmula simplificada derivada de la teoría de la columna rígida.

3.6 • Fórmula de Mendiluce.

## ■ CAPÍTULO 4.

### ESQUEMAS SIMPLIFICADOS DEL PROCESO DE GOLPE DE ARIETE.

4.1 • Situación inicial.

4.2 • Cierre brusco de la válvula.

4.3 • Alcance del depósito.

4.4 • Retorno a la válvula.

4.5 • Alcance de la válvula.

4.6 • Retorno al depósito con contracción de la tubería.

4.7 • La contracción de la conducción alcanza el depósito.

4.8 • Retorno hacia la válvula con diámetro nominal recuperado.

4.9 • Alcance de la válvula con diámetro nominal.

4.10 • Resumen gráfico del proceso.

## ■ CAPÍTULO 5.

### ECUACIÓN CONSTITUTIVA MEDIANTE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD O DE CONSERVACIÓN DE LA MASA.

- VOLUMEN DE CONTROL.

- SUPERFICIE DE CONTROL.

- CARACTERÍSTICAS DE LA TUBERÍA.

## ■ CAPÍTULO 6.

### ECUACIÓN CONSTITUTIVA DERIVADA DE LA APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

## ■ CAPÍTULO 7.

### TEORÍAS ASUMIENDO SIMPLIFICACIONES EN EL SISTEMA. TEORÍA DE LA COLUMNA RÍGIDA.

7.1 • Teoría de la columna rígida de agua.

7.1 • Cota máxima de la sobrepresión según la teoría de la columna rígida de agua.

7.3 • Válvulas tipo asociadas al cierre de flujo.

## ■ CAPÍTULO 8. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.

- 8.1 • Ventajas de la aplicación del Método de las Características.
- 8.2 • Descripción del Método de las Características sin incluir el término de fricción.
- 8.3 • Método de las Características para tuberías sin pérdidas por fricción.
- 8.4 • Descripción del Método de las Características asumiendo el término de fricción.
- 8.5 • Método de Características considerando la velocidad del fluido frente a la celeridad de la onda.
- 8.6 • Criterio de convergencia.

## ■ CAPÍTULO 9. MODELIZACIÓN Y ESTUDIO DEL PROCESO Y DESARROLLO DEL GOLPE DE ARIETE.

- 9.1 • Descripción de los parámetros gráficos.
- 9.2 • Tiempo de maniobra de la válvula.
- 9.3 • Coeficiente de fricción agua-tubería.
- 9.4 • Variación del diámetro de la tubería.
- 9.5 • Evolución del caudal.

## ■ CAPÍTULO 10. FLUJO DEL PROGRAMA.

- 10.1 • Descripción del programa.
- 10.2 • Config.m
- 10.3 • Proyecto.m
- 10.4 • Simulación.m

## ■ CAPÍTULO 11. ADDENDA.

- Addendum nº 1.
  - Ecuación de continuidad.
- Addendum nº 2.
  - Ecuación de Bernoulli.
- Addendum nº 3.

- Celeridad de una onda de presión en un entorno lineal unidireccional para el binomio fluido-tubería.

- Addendum nº 4.

- Teorema o principio de Torricelli.

- Addendum nº 5.

- La gravedad.

## ■ BIBLIOGRAFÍA.



## AGRADECIMIENTOS.

Sirva la presente para dar explícito reconocimiento y merecido agradecimiento a quienes tuvieron a bien ayudar en este empeño, con especial mención al cuerpo de profesorado del Máster en Matemática Computacional, sin cuya dedicación y labor diaria este trabajo no hubiese visto la luz y mucho menos llegar a buen puerto.

Gracias a todos.

A riesgo de parecer redundante desde aquí una especial mención a Don Vicente Martínez García en su calidad de Director de este Proyecto Final de Máster por su infinita paciencia y comprensión.

Gracias por todo.





## ■ CAPÍTULO 1.

# TRANSITORIO HIDRÁULICO.

## 1.1 CLASIFICACIÓN DE LOS REGÍMENES DE FLUJO. CONCEPTO Y TIPOS DE TRANSITORIO HIDRÁULICO.

### 1.1.1 CLASIFICACIÓN DE LOS REGÍMENES DE FLUJO HIDRÁULICO. CONCEPTO DE TRANSITORIO. GOLPE DE ARIETE.

Tradicionalmente los flujos hidráulicos se clasifican en función del tiempo. El régimen hidráulico es **permanente**, también denominado **estacionario**, cuando sus variables definitorias, que suelen ser el caudal  $Q$ , la velocidad ( $V$ ) y la presión ( $P$ ), son constantes (no dependen del tiempo) en cada una de las secciones de la tubería y se describe como régimen hidráulico variable en caso contrario.

Un flujo variable se adjetiva de **periódico** si lo es en el tiempo. Los regímenes periódicos se dividen en:

- **oscilatorio** cuando se flujo medio es nulo como en el caso del fenómeno de oscilación en masa (caso **a** de la figura 1.1)
- **pulsátiles** como ocurre con el bombeo de la sangre, por parte del corazón (bomba).

El régimen hidráulico se denomina transitorio (caso **b** de la figura 1.1) cuando es no estacionario y ocurre entre dos regímenes permanentes, algunos autores lo denominan igualmente flujo de transición.

En resumen, tenemos:

- 1.- Flujo Permanente o Estacionario.
- 2.- Flujo Variable o No estacionario:
  - 2.1. Flujo periódico.
    - 2.1.1. Oscilatorio.
    - 2.1.2. Pulsátil.
  - 2.2. Flujo transitorio.

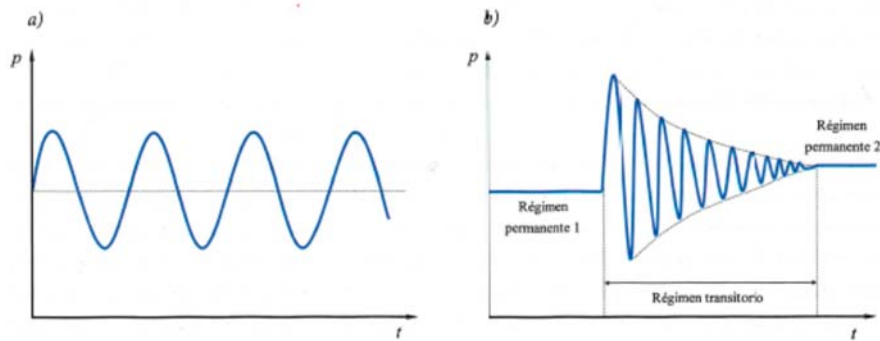


Figura 1.1. Flujo oscilatorio y flujo transitorio. Fuente: Abreu et alter.

Un fenómeno transitorio en mecánica de fluidos es una anomalía en el flujo (normalmente agua) al variar con el tiempo las condiciones definitorias y los parámetros del movimiento que son principalmente la **Presión (P)**, la **velocidad (V)** o el **Caudal (Q)**.

El caudal que es el producto de la velocidad por la sección y la ventaja de utilizar el caudal, frente a la velocidad radica en que este es constante en cualquier punto de la tubería a pesar de que varíe el área de la sección del conducto y/o la velocidad del fluido.

Cualquier variación brusca de caudal, y por ende de presión, en un flujo transitorio se denomina **Golpe de Ariete**.

Los sistemas hidráulicos, por complejos que estos sean, se dividen por una parte en las **tuberías** que son su elemento fundamental y por otra en las **condiciones de contorno** o **condiciones frontera**, que amalgaman toda suerte de elementos auxiliares con funciones de regulación, control, protección, medida, etc.

Tres factores gobiernan la respuesta dinámica de un sistema hidráulico, ante una situación brusca que lo aparta de su estado de equilibrio en flujo permanente que son:

- La **compresibilidad** de la dupla fluido-tubería que se refleja a través de sus respectivos módulos elásticos.
- Las fuerzas de **inercia**.
- La disipación energética propiciada por la **fricción**.

### 1.1.2 TIPOS DE TRANSITORIOS.

Según la velocidad de cambio en los parámetros definitorios del flujo se distinguen tres tipos de transitorios:

#### 1.-Transitorio cuasi-estático o lento.

En él, el cambio de las variables definitorias del flujo es lenta o muy lenta y se estudia mediante la aplicación repetida y sucesiva del **Modelo Estático** por escalones incrementales finitos.

## 2.-Transitorios rápidos.

Se denominan también de oscilación en masa, por ser este fenómeno su expresión física más representativa. En estos transitorios las variaciones de los parámetros que nos definen el flujo es rápida debiendo acudir a la aplicación del **Modelo Rígido** para abordar su estudio.

## 3.- Transitorios muy rápidos.

Se denominan igualmente Golpe de Ariete al ser este fenómeno su mejor exponente en el comportamiento físico del fenómeno. Las perturbaciones, fundamentalmente en cuanto a la presión, son violentas y afloran fenómenos asociados a la elasticidad de la conducción y la energía almacenada en el fluido. Para completar el análisis de este fenómeno se acude al **Modelo Elástico** que abarca tanto la compresibilidad del fluido como la respuesta elástica de la tubería.

# 1.2 CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE ANÁLISIS FÍSICO-MATEMÁTICOS Y DE LOS DINÁMICOS DE APROXIMACIÓN A LOS FENÓMENOS DE TRANSICIÓN HIDRÁULICA.

## 1.2.1 MODELOS DE PARÁMETROS CONCENTRADOS Y DE PARÁMETROS DISTRIBUIDOS.

Lo ideal sería disponer de un modelo en tres dimensiones ajustándose así a la dimensión real del problema y consiguiendo soluciones más exactas pero el alto coste computacional que supone adoptar modelos teóricos 3D decantan los esfuerzos hacia la aplicación generalizada de modelos unidimensionales (1D), que se obtienen integrando las ecuaciones de Navier-Stokes promediando las variables involucradas en las dos dimensiones no consideradas, perdiendo en esos dos ejes precisión e información acerca del fenómeno. Otra consecuencia "beneficiosa" del análisis mediante un modelo 1D frente a otro 3D, es que desaparecen las derivadas parciales de segundo orden, perdiéndose la información sobre las variables que involucran. Dicha pérdida debe ser compensada, en la medida de lo posible, introduciendo un término adicional que refleje su influencia en el desarrollo físico del fenómeno unidimensional.

Lo descrito ocurre con el término de fricción en tuberías debiendo forzarse la inclusión de un término fuente del parámetro de rozamiento agua-tubería, de ahí que los modelos análisis unidimensionales 1D reciban el apelativo de modelo de fricción concentrada frente a los de fricción distribuida.

En general alejándose del caso particular de la fricción y considerando otra característica que sufre la misma suerte se habla de modelos de parámetros concentrados o modelos de parámetros distribuidos.

Se aporta una figura ilustrativa que involucra el resultado arrojado por un modelo bidimensional 2D frente al unidimensional 1D, apreciándose la pérdida de exactitud, pero asumiendo mayor coste operacional informático, que a veces no compensa dada la escasa ganancia en precisión que ofrece respecto de la solución monoáxica 1D simplificada.

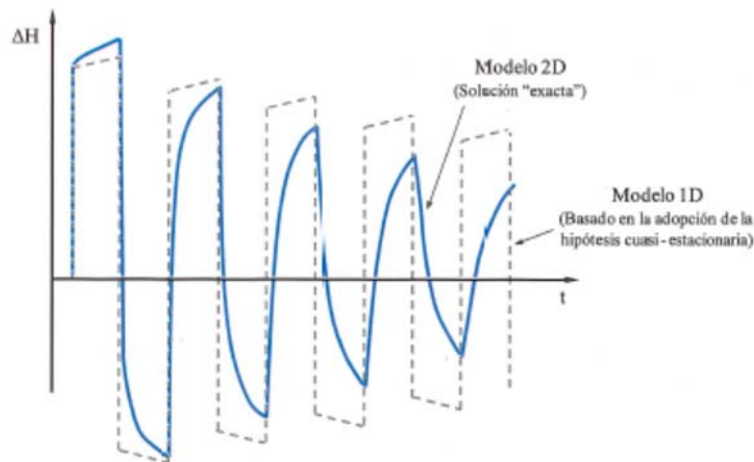


Figura 1.2. Gráfica comparativa entre el modelo 1D el 2D. Fuente: Abreu et alter.

## 1.2.2 CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE ANÁLISIS DE SISTEMAS HIDRÁULICOS.

Los modelos que intentan representar los sistemas hidráulicos físicos reales se pueden agrupar de la siguiente forma:

- 1.- **Modelos de Análisis Estático (MAE)** para el régimen permanente.
- 2.- **Modelos de Análisis Dinámicos (MAD)** para el régimen transitorio.
  - 2.1. **Modelo Cuasi-Estático (MCE)** para transitorios muy lentos o lentos.
  - 2.2. **Modelo Rápido (MR)** o **Modelo de Parámetros Concentrados (MPC)** para transitorios lentos o rápidos.
  - 2.3. **Modelo Elástico (ME)** o **Modelo de Parámetros Distribuidos (MPD)** para transitorios rápidos o muy rápidos.

El modelo Elástico es el más completo y complejo, obteniéndose los modelos Estático y Cuasi-Elástico conforme se van introduciendo hipótesis simplificadoras en el modelo Elástico.

### 1.2.3 CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE ANÁLISIS DINÁMICOS DE SISTEMAS HIDRÁULICOS.

Los Modelos de Análisis Dinámicos (MAD) se suelen clasificar según criterios físicos por su efecto más representativo en:

#### 1 - Modelo inercial (MI):

Contempla la inercia del sistema en su formulación y se puede subdividir en:

1.1 - **Modelo elástico (ME) o Modelo Tipo ``Golpe de Ariete (GA)``**. Asume los parámetros elásticos del fluido y de la tubería. Es un Modelo de Parámetros Distribuidos (MPD).

1.2 - **Modelo Rígido (MR) o Modelo Tipo ``Oscilación en Masa (OM)``**. Contempla el comportamiento plástico de la tubería. Es un Modelo de Parámetros Concentrados (MPC).

#### 2 - Modelo No Inercial (MNI) o Estático (ME) o Cuasi-Estático (MCE):

En él, las condiciones de contorno evolucionan lentamente por lo que se pueden desprestigiar las fuerzas debidas a la inercia del líquido. Permite el estudio del sistema a lo largo de periodos prolongados de tiempo.

### 1.3 MODELIZACIÓN DEL FENÓMENO FÍSICO.

El estudio aplicado de los fenómenos transitorios en hidráulica se sustenta en el planteamiento de dos principios básicos, el primero es el **equilibrio de masas** en el interior de un volumen de control diferencial, que se refleja en la **ecuación de continuidad**, el segundo es el **equilibrio de fuerzas** sobre un elemento de control cuya ecuación representativa es la **ley de conservación de la cantidad de movimiento**.

Mediante la aplicación teórica de los dos principios anteriores se llega a las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos transitorios, que se complementan con sus condiciones iniciales, aplicadas a cada caso concreto y sus condiciones de contorno asociadas.



## ■ CAPÍTULO 2.

# GOLPE DE ARIETE.

### 2.1 CONCEPTO Y DEFINICIÓN DE GOLPE DE ARIETE.

El Golpe de Ariete se denomina igualmente “water hammer” en inglés y “coup de bélier” en francés. También se le conoce como “pulso de agua” o “Pulso de Joukowski”. Es un fenómeno hidráulico ocasionado por rápidas fluctuaciones de flujo debido a su interrupción o inicio súbito en una tubería (bombeo) produciendo una variación de presión asociada a cambios bruscos en la velocidad del fluido, en definitiva, el Golpe de Ariete se produce como respuesta a la variación brusca de velocidad del fluido conducido.

Consiste en una transformación instantánea de energía cinética a energía de presión generando una onda de oscilación de la presión que se propaga por el tubo y se amortigua con el tiempo (fenómeno transitorio).

### 2.2 CONSECUENCIAS PERJUDICIALES DEL GOLPE DE ARIETE.

El Golpe de Ariete propicia que se produzcan los siguientes efectos perniciosos:

- 1º) **Ruido** intempestivo de gran magnitud con sus consecuencias asociadas.
- 2º) Fuertes **vibraciones** producidas en la conducción y sus elementos al absorber las ondas de presión generadas. Pueden llegar a colapsar el sistema.
- 3º) El Golpe de Ariete se suele producir en el arranque y parada de equipos de **bombeo**, así como en la apertura y cierre de **válvulas**, provocando frecuentemente rotura y averías en bombas, válvulas y accesorios en general, deteriorando y afectando gravemente a la viabilidad de la explotación del sistema.

## 2.3 RESUMEN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA EN EL ESTUDIO DEL GOLPE DE ARIETE.

Se aporta aquí un resumen esquematizado de la trayectoria histórica que acompaña el fenómeno de Golpe de Ariete, al único efecto de situar en el tiempo y asimismo contribuir con una modesta aportación, a la memoria de quienes tuvieron a bien dedicarle parte de su tiempo y conocimiento.

Siendo el Golpe de Ariete una onda de presión, su desarrollo teórico se basa en gran medida en la teoría de ondas y su desplazamiento a través del medio aéreo. La primera propuesta de una fórmula que proporcionase la velocidad de propagación de una onda acústica, nos viene de la mano de **Newton** en 1687 que asume para la velocidad del sonido en el aire la expresión:

$$c = \sqrt{\text{módulo elasticidad/densidad}} \quad [2.3.1]$$

Acerca de esta fórmula cabe hacer algún comentario:

- El módulo elástico se define en general como **Módulo Elástico = dp/(dp/ρ)** siendo:
  - dp Una variación de presión.
  - dρ Una variación de densidad consecuencia del cambio en la Presión.
  - ρ La densidad del aire.
  - dp/ρ Variación relativa unitaria de densidad asociada al cambio de presión dp.
- El Módulo de Elasticidad es una propiedad que podemos considerar casi intrínseca de cada líquido en función de su compresibilidad, pero en gases es función del proceso termodinámico seguido al comprimirlo.

**Newton** asume que termodinámicamente, al ser comprimido, el aire sigue un proceso isoterma en el que la presión se ajusta a la expresión de los gases perfectos: **p = ρ • R • T** siendo:

- p la presión.
- ρ la densidad del aire.
- R es la llamada constante de los gases perfectos, que concretamente, para el aire asume el valor de R= 287 Nw.metro/(kgr.°K) a una temperatura de T = 293 °K (20°C).
- T es la temperatura a la que se produce la variación de presión.

En un proceso isoterma la presión a la que se encuentra un gas perfecto coincide con su módulo de elasticidad. Sustituyendo en la expresión de la celeridad y teniendo en cuenta lo inmediatamente anterior tenemos:

$$c = \sqrt{\text{módulo elasticidad/densidad}} = \sqrt{\text{presión/densidad}} = \sqrt{\text{densidad} \cdot R \cdot T / \text{densidad}}$$

$$c = \sqrt{R \cdot T} \quad [2.3.2]$$



El cálculo de esta expresión para el aire, considerado este como un gas perfecto, arroja valores inferiores a los medidos en la realidad.

En 1759 **Euler** propone modernizar la propagación de una onda de presión a través de cualquier medio mediante la siguiente ecuación hiperbólica en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [2.3.3]$$

Donde, sin repetir el significado de c:

- **y** representa la ordenada en forma de amplitud de onda para cada valor de x.
- **x** es la abscisa correspondiente.
- **t** es el tiempo transcurrido desde la perturbación del medio.

En 1816 **Pierre Simon de Laplace** asume que la compresión de un gas como el aire sigue un proceso adiabático (no isoterma como lo había supuesto Newton) por lo que su módulo elástico ha de multiplicarse por el cociente entre el calor específico del gas a presión constante y dicho valor específico a volumen constante ( $C_p/C_v$ ). La relación entre los dos parámetros anteriores se sitúa en torno a 1,4 por lo que según Laplace la celeridad de la onda de presión en el aire es la hallada por Newton corregida en  $(40\%)^{1/2}$  que concuerda perfectamente con la totalidad de los ensayos realizados de forma empírica hasta la fecha.

$$c = \sqrt{1,4 \cdot R \cdot T} \quad [2.3.4]$$

Tanto **Webers** como **Helmholtz** estudian la propagación de las perturbaciones en medio acuático y llegan a la conclusión de que la propagación de una onda de presión en agua es más lenta en medio confinado debido a la elasticidad de las paredes del conducto.

En 1878 **Korteweg** halla la fórmula que gobierna la velocidad de propagación de una onda de presión en una tubería elástica. La ecuación de **Korteweg** es:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\text{Módulo elástico}}{\text{densidad}}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{D}{e}\right) \cdot \left(\frac{\text{Módulo elástico}}{\text{Módulo de Young}}\right)}} \quad [2.3.5]$$

Tanto el módulo elástico como la densidad se refieren al medio que, en este caso es agua, mientras que el diámetro **D**, el espesor **e** y el **Módulo de Young** son relativos a las características físicas de la tubería. El numerador de la expresión de c, proporcionada por **Korteweg** es, la propuesta por **Newton**, pero reducida por el factor radical del denominador, que siempre es mayor que la unidad y representa la contribución del conducto a la celeridad de la onda de presión. La expresión de **Korteweg** no tiene en cuenta la contribución elástica de la tubería a lo largo de su eje, que es función directa de las condiciones de anclado y del tipo de juntas entre tramos, constituyentes del conjunto de conducciones que conforman el sistema.

Como tal fenómeno de Golpe de Ariete, quien fue precursor en su estudio específico fuere **Menabrea** en 1858 y posteriormente, **Michaud** quien aborda el estudio del Golpe de Ariete en 1878 proponiendo la expresión a la que da nombre:

$$\Delta H = 2 \cdot \left(\frac{L}{g}\right) \cdot \left(\frac{V_0}{T_c}\right) \quad [2.3.6]$$

Siendo:

- $\Delta H$  sobrepresión debida al Golpe de Ariete, consecuencia del cerrar la válvula de alivio en punta.
- $L$  es la longitud del conducto estudiado, que discurre desde el depósito regulador (embalse) hasta la válvula de alivio, cuyo cierre ocasiona el fenómeno de Golpe de Ariete.
- $V_0$  es la velocidad a la que circula el agua antes del inicio de la maniobra de cierre de la válvula.
- $g$  es la aceleración de la gravedad ( $g \cong 10 \text{m/s}^2$ ).
- $T_c$  es el tiempo en que se realiza la maniobra de cierre de la válvula.

La ecuación de **Michaud** presenta el grave inconveniente de arrojar valores exageradamente elevados cuando el tiempo de maniobra es muy corto. Incluso sucede que con tiempos de cierre  $T_c$  tendiendo a cero la sobrepresión debida al Golpe de Ariete  $\Delta H$  se dispara a infinito.

En 1888 **Gariel**, imponiendo unas condiciones de contorno a la aplicabilidad de la fórmula de **Michaud**, consigue delimitar el campo de validez de dicha ecuación y revalidar su correcta aplicación. Las condiciones impuestas por **Gariel** son dos:

- 1º.- Que la variación de velocidad del agua sea lineal con el tiempo.
- 2º.- Que el cierre de la válvula se pueda considerar lento, es decir, que le dé tiempo a la onda de presión a viajar desde la válvula al depósito y volver a la válvula antes del cierre completo de dicha válvula.

En 1898 **Joukowsky** relaciona la variación de velocidad del fluido ( $\Delta V$ ) con el salto de presión debido al Golpe de Ariete ( $\Delta P$ ) sin descartar la contribución elástica tanto del agua como de la tubería al fenómeno, acuñando la conocida como ecuación de Joukowsky:

$$\Delta P = \rho \cdot c \cdot (\Delta V) \quad [2.3.7]$$

siendo:

- $\rho$  es la densidad del fluido.
- $c$  es la celeridad de la onda de presión contemplando la contribución de la tubería.

La ventaja de la fórmula de **Joukowsky** es que cubre el rango de aplicación que no estaba soportado por la fórmula de **Michaud**, al poderse aplicar perfectamente al fenómeno de Golpe de Ariete para tiempos de cierre de la válvula menores que el crítico dado por:

$$T_{critico} = 2 \cdot \left(\frac{L}{c}\right) \quad [2.3.7]$$

- $L$  es la longitud de la tubería desde el depósito hasta la válvula de cierre.
- $c$  representa la celeridad de la onda de presión al viajar a través del binomio agua-tubería.

Aunque esta última expresión se denomina ecuación de **Joukowsky** fue **Von Kries** quien la formula en primer lugar en el año 1883. Además, para ser honestos, debemos añadir que fue **Frizel**, quien de forma independiente también llega a la misma conclusión que **Joukowsky** en el mismo año (1898), por lo que sería justo un reconocimiento compartido entre ambos, aunque el protagonismo absoluto debería recaer sobre su autor primigenio **Von Kries**.

En 1902 **Lorenzo Allievi**, de forma independiente a todos sus predecesores establece la llamada **Ecuación de Joukowsky**, por lo que comúnmente se la denomina **Fórmula de Allievi-Joukowsky**.

En 1913 también **Allievi** profundiza en el estudio del fenómeno del Golpe de Ariete, estableciendo de forma casi definitiva las ecuaciones que lo gobiernan.

Más que un adelanto, per se, la formulación debida a **Allievi** alcanza notoriedad porque posibilita la aplicación directa de un método de resolución grafica desarrollado por **Schneider** en 1929. El método gráfico de Schneider se mejora gracias al trabajo de **Bergeron** en 1950, posibilitando hallar las características imperantes en cualquier punto del conducto.

Tratándose de trabajos complementarios en 1937, **Jeager** acuña la denominación del método gráfico de **Schneider** evolucionado como **Método Gráfico de Schneider-Bergeron** que fue ampliamente utilizado hasta el desarrollo de la informática cuya aplicación propicio la resolución rápida y más precisa de las ecuaciones constitutivas que describen el fenómeno de Golpe de Ariete.

Se aporta un esquema temporal de lo expuesto que introduce una visión más general de lo comentado.

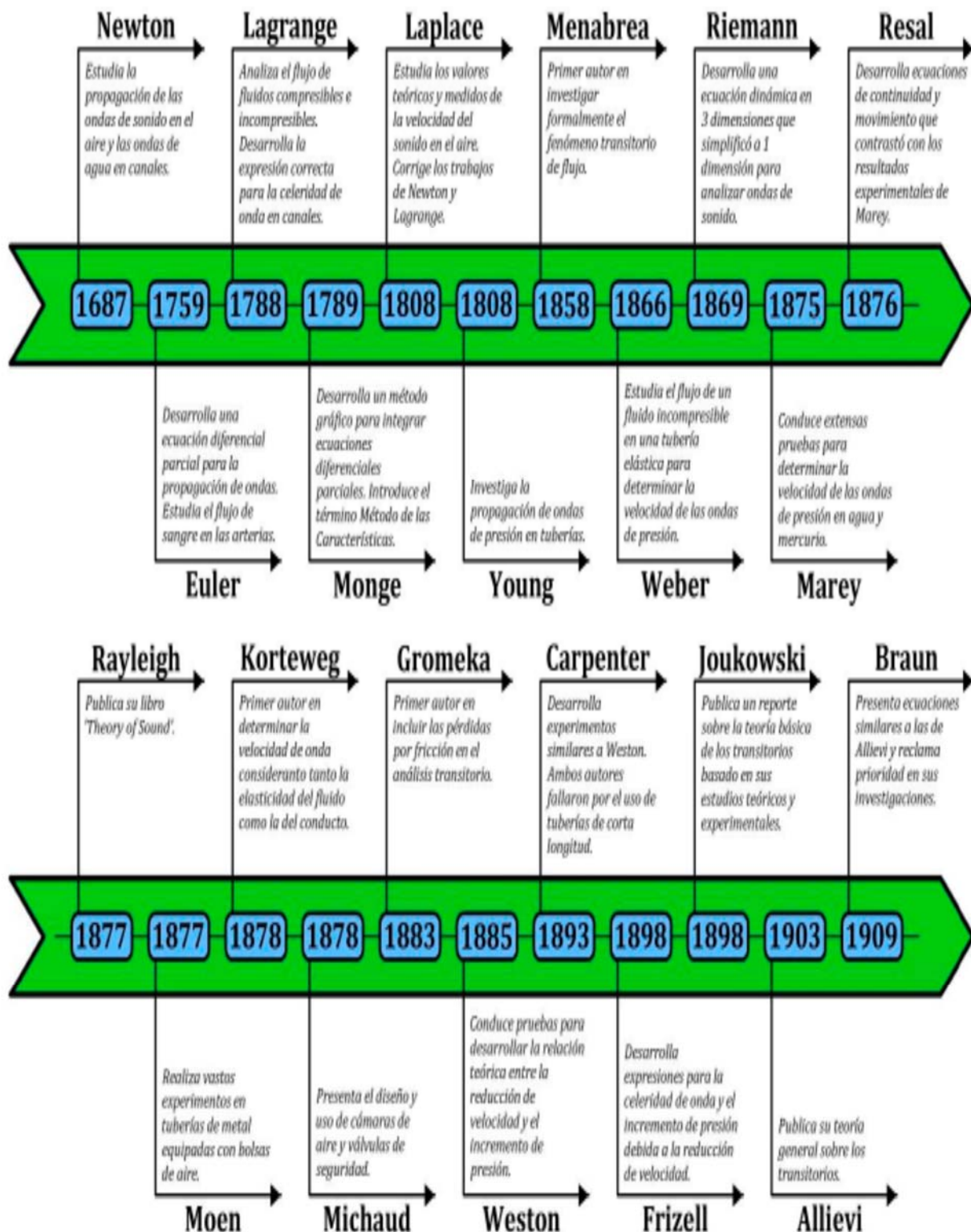


Figura 2.1. Resumen histórico del desarrollo del Golpe de Ariete. Fuente: Tesis de Edwin Fernando Zetina Robleda.

## 2.4 PAQUETES INFORMÁTICOS DISPONIBLES EN EL MERCADO PARA EL ANÁLISIS DEL GOLPE DE ARIETE.

La informática hace posible el análisis de sistemas complejos que incluyen, no solo la transmisión de la onda de presión, sino también de sus obligadas reflexiones, refracciones y difracciones sobre los elementos del sistema. Sin pretender ser exhaustivos, los paquetes informáticos disponibles y con mayor difusión en el mercado para el análisis del Golpe de Ariete se pueden enumerar de la siguiente forma:

- Programa **TRANSAM** de la Universidad de Toronto.
- El paquete **WATER HAMMER AND MASS OSCILLATION** (WHAMO) desarrollado por el Us Army Corps of Engineers, actualizado únicamente hasta el año 1998.
- **EPANET** es un paquete desarrollado por un conjunto de Agencias Federales de los Estados Unidos que ha gozado de merecida fama mundial, dejó de actualizar su adaptación a los nuevos sistemas operativos en el año 2010.

Al margen de los tres anteriores en **Estados Unidos** históricamente se han desarrollado los siguientes paquetes informáticos:

- **SURGE**, data de los años 70, desarrollado por la Universidad de Kentucky, que comparte plataforma y motor informático con el paquete H<sub>2</sub>OSURGE.
- **HAMMER** muy utilizado para instalaciones de grandes tuberías y equipos de bombeo de elevado calibre, disfrutó de enorme éxito en la época de construcción de grandes presas y redes de distribución, al admitir el cálculo de fluidos densos y pesados como ocurre con los oleoductos y otros como pueden ser grandes gasoductos.
- **AFT IMPULSE** utilizado sobre todo en bombeos industriales, plantas químicas y centrales nucleares para garantizar el enfriamiento de los núcleos de fisión de los reactores.

Por lo que respecta a **Europa**, también nos encontramos con otros paquetes no tan extendidos ni flexibles como EPANET, pero han cumplido sobradamente su propósito inicial que son:

- **WANDA** desarrollado en Holanda, concretamente en Delft.
- **FLOWMASTER** es un paquete de origen inglés muy adaptado a plantas industriales.

- **CIBELMAIL** es un soporte informático de origen francés de amplio espectro y gran adaptabilidad a multitud de situaciones, lo que lo ha llevado a ser muy utilizado en zonas geográficas de habla francesa.
- **PIPENET** es un desarrollo inglés que no ha conseguido implantarse a escala global, debido a la rigidez impuesta por sus condiciones de entrada de datos y el hecho de tener que ser un experto en la materia para utilizarlo óptimamente en condiciones de seguridad.

Fuera de la zona europea, encontramos en las antípodas dos programas dignos de mención explícita que son:

- **HYTRAN** neozelandés.
- **WATHAM** de Water-Hammer, de origen australiano.

Concretando a lo que se refiere a [España](#), se dispone del programa **ALLIEVI**, en claro reconocimiento a la labor desarrollada por este ingeniero italiano. Es un paquete reciente, comercializado desde 2011 y muy versátil, desarrollado por el Instituto Tecnológico del Agua, en colaboración con la Universidad Politécnica de Valencia. Calcula y simula transitorios hidráulicos tanto en sistemas a presión como en lamina libre. Lo más destacable es que consta de una versión simplificada, pero tremendamente útil y potente de uso GRATUITO para versiones de Windows 7 y posteriores, perfectamente actualizado a día de hoy.

## 2.5 ELEMENTOS CONSTITUTIVOS COLATERALES AL GOLPE DE ARIETE PENDIENTES DE INTEGRACIÓN ANALÍTICA EN EL MODELO MATEMÁTICO.

Son un conjunto de cinco campos de investigación abiertos para completar, en todos sus aspectos, el conocimiento del fenómeno del Golpe de Ariete y de sus efectos hidráulicos derivados.

Los enumeraremos y daremos una breve pincelada de cada uno de dichos temas.

- 1.- El fenómeno físico de cavitación.
- 2.- La relación interactiva entre el agua y el conducto que la trasiega.
- 3.- La disipación energética asociada al transitorio.
- 4.- El ITA (Inverse Transient Analysis) o análisis inverso de transitorios hidráulicos.
- 5.- Fase de transición desde el estado de flujo en lámina libre al de presión (entrada en carga) con aire ocluido en el sistema.

### 2.5.1 - CAVITACIÓN.

La cavitación es un fenómeno hidráulico que se produce cuando la presión del agua se encuentra por debajo de su tensión de vapor y el fluido pasa de forma instantánea de su estado líquido a su estado gaseoso, formándose micro burbujas de vapor de agua que implosionan erráticamente produciendo picos de subpresión, que pueden superar incluso la magnitud de las ondas de presión del Golpe de Ariete, y que además, sumadas a la fase de depresión producida del mismo arruinan irremediablemente la instalación. Dependiendo de la pendiente de la tubería, es decir de la variación de presión estática, con el avance a lo largo del conducto o de la magnitud del gradiente de velocidades, es decir de la rapidez de cambio de la velocidad del fluido (aceleración) se puede estudiar el fenómeno de cavitación bajo dos ópticas distintas:

**A.** Se produce rotura de la vena líquida en un punto concreto de la tubería.

**B.** El fenómeno de cavitación afecta a toda la masa líquida, lo que nos proporciona un fluido bifásico con inserciones aleatorias de vapor en su seno. Esta es la denominada cavitación distribuida o diseminada.

Del fenómeno físico de la cavitación hemos de huir como de la peste, pues se dispone de múltiples sistemas de prevención, pero ninguno de curación. Una vez iniciada la cavitación no existe, a día de hoy, remedio alguno al colapso del sistema. La dificultad inherente al estudio del fenómeno de cavitación reside en que el flujo se caracteriza por ser altamente turbulento, no siendo nulo ni el rotacional de vórtice ni la divergencia vectorial del campo de velocidades imperante en el seno del fluido.

No se conoce, a día de hoy, ningún modelo capaz de recrear con cierta garantía el flujo turbulento.

### 2.5.2 - INTERFERENCIA INERCIAL MUTUA ENTRE EL FLUIDO TRASEGADO Y EL DUCTO.

Hemos visto que la celeridad de la onda de presión asociada al Golpe de Ariete a través del agua se ve afectada por la presencia de la tubería, aportando un término radicando como denominador a la ecuación que describe la velocidad de paso de una onda de perturbación a través de un fluido, concretamente agua.

La corrección anterior no es ni de lejos suficiente, pues hemos despreciado por completo los efectos inerciales tanto del agua como de la tubería en los sentidos axial y radial. Si la tubería está fuertemente anclada, tanto longitudinalmente como transversalmente, las oscilaciones másicas inerciales no son excesivamente elevadas, pero por el contrario la junta rígida entre tramos de tubería agrava el problema de la sobrepresión del pulso de Joukowsky.

Para el estudio añadido de este fenómeno asociado, debido al posible movimiento de la tubería, tanto radialmente como en su dirección axial, se añaden a las ecuaciones diferenciales propias del fenómeno de Golpe de Ariete las correspondientes a la vinculación estructural de la tubería a sus anclajes, lo que complica en gran medida su resolución, incluso con la ayuda de medios informáticos.

### **2.5.3 - ROZAMIENTO Y PÉRDIDA DE CARGA HIDRÁULICA EN RÉGIMEN DE SUBORDINACIÓN TRANSITORIA.**

De forma implícita en el estudio del Golpe de Ariete se asume que el coeficiente de fricción ( $f$ ) es el mismo que el que impera en régimen permanente, anterior al inicio de cierre de la válvula y durante la perturbación transitoria, que es un régimen variable. Esta hipótesis equivale a asumir que, para cada terna de valores de posición-tiempo- velocidad, tanto las tensiones tangenciales entre tubería y agua, como la pérdida de energía (pérdida de carga) asociada se mantienen constantes, independientemente del régimen hidráulico, ya sea éste permanente o variable con el tiempo. La inversión en la velocidad de circulación del agua propicia que no sean iguales las características de fricción según el régimen establecido, y siendo que dicha fricción es el factor más influyente en el amortiguamiento del fenómeno del Golpe de Ariete no estamos frente a un aspecto baladí sin trascendencia. Las desviaciones observadas, debido al aspecto anterior, son más acusadas con velocidades bajas, sobre todo en zonas próximas a la capa límite de contacto agua-tubería, pero por suerte siempre nos dejan del lado de la seguridad, por lo que no es un aspecto que en principio nos pueda preocupar en exceso, salvo en lo que afecta a la precisión de los cálculos y el encarecimiento derivado de mayorar el efecto pernicioso del Golpe de Ariete.

### **2.5.4 - ANÁLISIS INVERSO DE TRANSITORIOS (ITA).**

Se trata de imponer nosotros una perturbación en el flujo de agua provocando un Golpe de Ariete y estudiar las desviaciones que ocurren entre su descripción teórica y los datos recogidos, pudiendo aportar información valiosa acerca del sistema, por ejemplo, la existencia de fugas, la rotura o deficiente funcionamiento de válvulas, bombas, etc.

### **2.5.5 - TRANSICIÓN DEL RÉGIMEN EN LÁMINA LIBRE AL DE ENTRADA EN CARGA CON PRESENCIA DE AIRE.**

La mayoría de los problemas físicos se producen en los bordes o fronteras en el que se pasa de un estado inicial a otro final. La mecánica de fluidos no iba a ser menos y presenta harta dificultad el estudio de la transformación de un flujo con régimen laminar permanente, a otro estado con entrada en carga con presión distinta de la atmosférica y confinado a presión en una tubería, a lo que debemos añadir la inevitable entrada de aire en el interfaz de régimen, por lo que el agua a presión ocluye bolsas de aire que alteran su comportamiento como tal fluido.



## ■ CAPÍTULO 3.

# ALGUNAS FORMULAS SIMPLIFICADAS DE APLICACIÓN DIRECTA PARA EL CÁLCULO DE LA MÁXIMA SOBREPRESIÓN GENERADA POR EL GOLPE DE ARIETE.

### 3.1 CÁLCULO DEL GOLPE DE ARIETE SEGÚN JOUGUET.

Supongamos que cerramos una válvula en una tubería por la que circula agua. Toda la energía cinética del agua contenida en la tubería, asociada a su velocidad, se transforma en energía elástica, ondulatoria y térmica. Jouguet considera el agua incompresible y la tubería absolutamente rígida, es decir que la conducción no absorbe energía en deformación elástica y supone que todo el impulso mecánico se emplea en la variación de la cantidad de movimiento.

El impulso mecánico es el producto de la fuerza (**F**) por el tiempo (**T**) durante el que actúa. La sobrepresión que sufre la válvula es el Golpe de Ariete y la denominamos **P<sub>ga</sub>**. Denominaremos **S** a la sección recta de la tubería por la que circula el líquido y  $\gamma$  al peso específico del agua. Sabemos que en general la presión se expresa como el cociente entre la fuerza actuante y la superficie sobre la que incide: **Presión=Fuerza/Superficie**. Sobre la válvula actúa entonces una presión dada por

$$P_{ga} = \text{Fuerza} / \text{Superficie de la válvula} \quad [3.1.1]$$

Despejando la fuerza y multiplicando por el tiempo en que se encuentra actuando la fuerza involucrada, podemos determinar el impulso mecánico como

$$\begin{aligned} \text{Fuerza} &= P_{ga} \cdot \text{Superficie de la válvula} \\ \text{Impulso mecánico} &= \text{Fuerza} \cdot \text{Tiempo} = P_{ga} \cdot \text{Superficie} \cdot \text{Tiempo} \end{aligned} \quad [3.1.2]$$

La cantidad de movimiento es el producto de la masa de agua involucrada por su velocidad. Antes del cierre de la válvula, el agua lleva una Velocidad **V** genérica, por lo que su cantidad de movimiento asociada es

$$\text{Cantidad de Movimiento} = \text{Masa} \cdot \text{Velocidad}$$

Tras el cierre total de la válvula, la velocidad del líquido (agua) es nula siendo entonces su correspondiente Cantidad de Movimiento

$$\text{Cantidad de Movimiento} = \text{Masa} \cdot 0 = 0 \quad [3.1.3]$$

La variación de la cantidad de movimiento viene dada por la diferencia entre la Cantidad de Movimiento inicial y la Cantidad de Movimiento final. Acabamos de ver que la Cantidad de Movimiento final es nula por lo que el incremento de Cantidad de Movimiento se resume a la Cantidad de Movimiento inicialmente aportada por el trasiego del agua debida a su velocidad inicial de circulación a través de la tubería.

$$\begin{aligned} \text{Cantidad Mov inicial} - \text{Cantidad Mov final} &= \text{Masa} \cdot \text{Velocidad} - 0 \\ \Delta(\text{Cantidad de Movimiento}) &= \text{Masa} \cdot \text{Velocidad} \end{aligned} \quad [3.1.4]$$

Sabemos que, para cualquier cuerpo, su peso es el producto de su masa multiplicada por la aceleración de la gravedad (g), con g= 9,81 metros/segundo<sup>2</sup>

$$\text{Peso} = \text{Masa} \cdot \text{gravedad} \quad \Delta(\text{Cantidad de Movimiento}) = \left(\frac{\text{Peso}}{g}\right) \cdot \text{Velocidad} \quad [3.1.5]$$

También sabemos que el peso se puede expresar como el producto del peso específico de un cuerpo multiplicado por el volumen que ocupa y dicho volumen a lo largo de toda la tubería es la longitud de dicha tubería multiplicada por su sección recta, quedando:

$$\begin{aligned} \text{Peso} &= \text{Peso Específico} \cdot \text{Volumen} \\ \text{Peso} &= \text{Peso Específico} \cdot \text{Longitud Tubería} \cdot \text{Sección Tubería} \end{aligned} \quad [3.1.6]$$

Substituimos esta última ecuación [3.1.6] en la de la variación de la cantidad de movimiento [3.1.4] resultando:

$$\begin{aligned} \Delta(\text{Cant. Mov}) &= \frac{\text{Peso}}{g} \text{Volumen} \\ \Delta(\text{Cant. Mov}) &= \frac{\text{Peso Específico}}{g} \text{Longitud} \cdot \text{Sección} \cdot \text{Velocidad} \end{aligned} \quad [3.1.7]$$

Tal y como se expuso al principio debemos igualar el impulso mecánico [3.1.2] hallado anteriormente a la variación de la cantidad de movimiento [3.1.7].

$$P_{ga} \cdot \text{Sección} \cdot \text{Tiempo} = \frac{\text{Peso Específico}}{g} \text{Longitud} \cdot \text{Sección} \cdot \text{Velocidad}$$

cancelando la sección en ambos miembros resulta la fórmula de **Jouguet**

$$P_{ga} \cdot \text{Tiempo} = \frac{\text{Peso Específico}}{g} \text{Longitud} \cdot \text{Velocidad}$$

$$P_{ga} \cdot T = \left(\frac{\gamma}{g}\right) \cdot L \cdot V$$

$$P_{ga} = \left(\frac{\gamma}{g}\right) \cdot \left(\frac{L \cdot V}{T}\right) \quad [3.1.8]$$

Donde

- **Pga** representa el Golpe de Ariete es decir la sobrepresión existente sobre la inicial de que disponía el líquido en la tubería antes del inicio de cierre de la válvula en kilopondios/metro<sup>2</sup>.
- $\gamma$  es el Peso específico del líquido agua que circula por la tubería cifrado aproximadamente en 1.000 kilopondios/metro<sup>3</sup>].
- **L** representa la longitud de la tubería en metros.
- **T** es el tiempo que dura el cierre de la válvula medido en segundos.
- **V** es la velocidad que lleva el agua inicialmente antes de iniciarse el cierre de la válvula

Nos interesa expresar el incremento de presión debido al Golpe de Ariete (**Pga**) en metros de columna de agua (m.c.a.) por lo que debemos dividir la expresión de **Pga** por el peso Específico del agua ( $\gamma$ ), quedando.

$$Pga(m.c.a.) = Hga = \frac{L \cdot V}{g \cdot T} \quad m.c.a. \quad [3.1.9]$$

Esta es la expresión de **Jouguet** para el Golpe de Ariete en metros de columna de agua en la que se está asumiendo que la fuerza o su consecuencia la sobrepresión **Pga** es constante, cosa que está lejos de ser cierta puesto que, la presión es nula antes de iniciarse la maniobra de cierre ( $Pga=0$ ) y se desarrolla conforme se va cerrando la válvula. Esto equivale a considerar un Valor Medio de **Pga** a lo largo del proceso que claramente nos deja del lado de la inseguridad por ser este **Valor Medio** inferior al Valor máximo real de la presión **Pga** instantánea.

### 3.2 CÁLCULO DEL GOLPE DE ARIETE SEGÚN MICHAUD.

Para solucionar la inseguridad que transmite la ley de Jouguet, al evaluar el fenómeno del Golpe de Ariete por defecto respecto de su valor real, **Michaud** asume una variación lineal de la presión del Golpe de Ariete (**P<sub>ga</sub>**) conforme al tiempo (**T**).

En la teoría de Jouguet, si tomamos como base el tiempo **T** y altura en metros de columna de agua **P<sub>ga</sub>** constante tenemos un rectángulo de área **T • P<sub>ga</sub>** proporcional a la velocidad (**V**) del fluido, puesto que tenemos con el cociente **L/g** la longitud de la tubería en metros dividida por la aceleración de la gravedad que no varía para un sistema dado como coeficiente de proporcionalidad

$$P_{ga} = \frac{L \cdot V}{g \cdot T} \qquad P_{ga} \cdot T = \left(\frac{L}{g}\right) \cdot V \qquad [3.2.1]$$

Según afirma **Michaud** asumimos una distribución triangular para la distribución de la presión **P<sub>ga</sub>** conforme al tiempo, así como el valor del Golpe de Ariete de **Michaud**. La sobrepresión del Golpe de Ariete arrojada por la fórmula de **Michaud** la denotaremos por **P<sub>M</sub>** para distinguirla del valor obtenido según Jouguet que denotaremos por **P<sub>J</sub>**. Para un mismo tiempo de accionamiento de la válvula (**T<sub>M</sub>=T<sub>J</sub>=T**), el área de ambas figuras, partiendo en ambos casos de una misma velocidad inicial de fluido (**V<sub>M</sub>=V<sub>J</sub>=V**), deben ser iguales puesto que se debe mantener constante el valor del impulso mecánico para un mismo tiempo de cierre.

- Área según Jouguet  $A_J = P_J \cdot T$
  - Área según Michaud  $A_M = 1/2 \cdot T \cdot P_M$
- Igualando ambas expresiones  $P_J \cdot T = 1/2 \cdot T \cdot P_M$

$$P_M = 2 \cdot P_J \qquad [3.2.2]$$

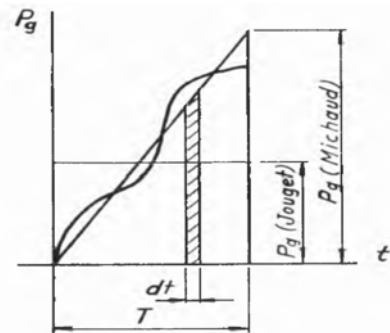


Figura 3.2.1.

Se aprecia a tenor del resultado anterior que el valor máximo del Golpe de Ariete según **Michaud** (**P<sub>M</sub>**) es del orden del doble del obtenido por **Jouguet**, dejando patente que **Jouguet** infravalora gravemente el fenómeno del Golpe de Ariete al considerar contante la sobrepresión. Según lo

anterior para **Michaud** el máximo Valor de la presión alcanzada por el Golpe de Ariete es en metros de columna de agua.

$$P_M = 2 \cdot P_J = 2 \cdot \frac{L \cdot V}{g \cdot T} \quad [3.2.3]$$

El valor del Golpe de Ariete en el inicio de la tubería (embalse) es nulo porque se disipa en la masa de agua del depósito en forma de oscilación en masa a presión atmosférica mientras que en la válvula adquiere su valor máximo dado por  $P_{ga}$  proporcionado por la ecuación de **Michaud**. En puntos intermedios entre el inicio de la tubería y la válvula se da un valor intermedio entre cero y  $P_M$  y evidentemente hay siempre un punto en el que se igualan las sobrepresiones calculadas según **Jouguet** y las halladas siguiendo lo prescrito por **Michaud** ( $P_M = P_J$ ).

Resumiendo, podemos afirmar que según **Michaud** los valores **máximos** de sobrepresión (Golpe de Ariete) siguen una ley lineal a lo largo de la tubería una vez cerrada la válvula por completo.

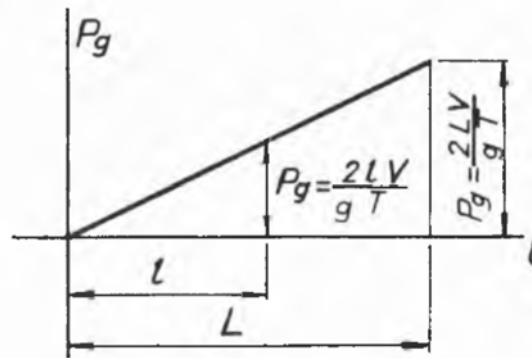


Figura 3.2.2. Valores máximos del Golpe de Ariete según Michaud a lo largo de la tubería. Fuente: Tuberías. José María Mayol Mallorquí.

Un planteamiento más general para la fórmula de Michaud supone que la máxima sobrepresión se alcanza en la válvula en un tiempo igual al crítico  $T_{crítico} = 2 \cdot L/c$  y asume una variación lineal de la velocidad de tal forma que cuando  $t=0$ , la velocidad vale  $V_0$  que representa la velocidad inicial del agua antes de iniciarse la maniobra de cierre y cuando  $t=T_{cierre}$  la velocidad  $V$  asume el valor nulo ( $V=0$ ). Esto se aprecia en la figura 3.2.3 adjunta

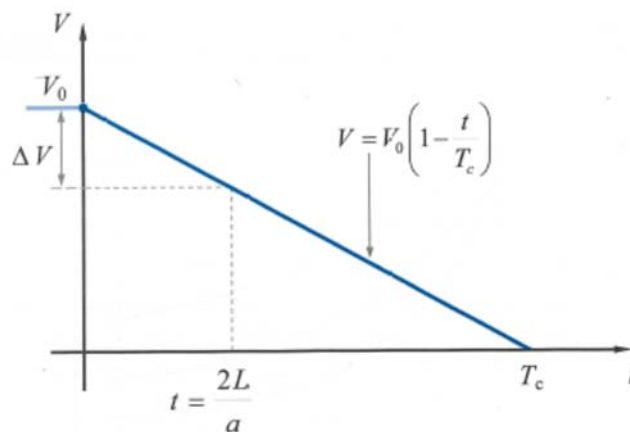


Figura 3.2.3. Recta descriptiva de la ley de cierre con velocidad lineal. Fuente: Transitorios hidráulicos. Abreu et Alter.

La ley de cierre para la velocidad viene representada por una recta que pasa por los puntos de coordenadas  $(t, v) = (0, V_0)$  y  $(t, V) = (t_{\text{cierre}}, 0)$ , veamos su ecuación, que será de la forma genérica  $V = m \cdot t + b$ .

- El primer punto  $(t, v) = (0, V_0)$  debe cumplir la ecuación de la recta:

$$V = m \cdot t + b \quad (t, v) = (0, V_0) \quad V_0 = m \cdot 0 + b \quad V_0 = b$$

- El segundo punto también se puede insertar en la ecuación genérica de la recta de velocidades:

$$V = m \cdot t + b \quad (t, V) = (t_{\text{cierre}}, 0) \quad 0 = m \cdot t_{\text{cierre}} + V_0 \quad m = -V_0/t_{\text{cierre}}$$

Substituyendo en la ecuación de la recta obtenemos:

$$v = \left(-\frac{V_0}{t_{\text{cierre}}}\right) \cdot t + V_0 \quad v = V_0 \cdot \left[1 - \frac{t}{t_{\text{cierre}}}\right]$$

El incremento que sufre la velocidad correspondiente al tiempo crítico es  $\Delta V = V_{t=t_{\text{crítico}}} - V_0$ .

Como  $t_{\text{crítico}} = 2 \cdot L/c$  substituyendo  $t_{\text{crítico}}$  en la ecuación de velocidades queda:

$$V_{\text{crítica}} = V_0 \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot L}{c \cdot t_{\text{cierre}}}\right]$$

Con esto, el incremento de velocidad  $\Delta V$  queda:

$$\Delta V = V_{\text{crítica}} - V_0 \quad \Delta V = V_0 \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot L}{c \cdot t_{\text{cierre}}}\right] - V_0 \quad \Delta V = -\frac{2 \cdot L \cdot V_0}{c \cdot t_{\text{cierre}}}$$

Para calcular la sobrepresión en la válvula recurrimos a la expresión del Pulso de Joukowski dado por la expresión:

$$\Delta H = -\frac{c \cdot \Delta V}{g}$$

Insertamos el incremento de velocidad hallado anteriormente:

$$\Delta H = \left(-\frac{c}{g}\right) \cdot \left(-\frac{2 \cdot L \cdot V_0}{c \cdot t_{\text{cierre}}}\right)$$

$$\Delta H = 2 \cdot \left(\frac{L \cdot V_0}{g \cdot t_{\text{cierre}}}\right)$$

Esta es la expresión del máximo incremento de presión producido por el Golpe de Ariete en la válvula para el caso de cierre lento ( $t > t_{\text{crítico}} = 2 \cdot L/c$ ) según **Michaud** en base al pulso de **Joukowski**.

De forma implícita hemos admitido una hipótesis que no se suele cumplir, pues a una disminución lineal del área de paso por la válvula conforme al tiempo no le viene asociada automáticamente una reducción lineal proporcional de la velocidad. Se denomina condición de contorno "Fuente de Caudal" la imposición de la variación lineal de la velocidad, y por ende del Caudal, al sistema.

Se suele imponer la ley de variación de caudal en válvula bajo la ecuación genérica:

$$Q = Q_0 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_{\text{cierre}}} \right)^M \right]$$

- **M** es un exponente positivo o nulo por definición denominado factor de forma.
- **Q<sub>0</sub>** representa el caudal circulante inicial anterior al movimiento de la válvula.

La fórmula de **Michaud** es totalmente compatible para los valores de **M=1** (Ley de variación lineal de caudal) y de **M=2** (Ley de variación parabólica del caudal), para valores intermedios se obtienen sobrepresiones inferiores a las arrojadas por la fórmula de **Michaud**, por lo que estamos del lado de la seguridad con la aplicación de dicha fórmula de **Michaud**. Para valores del factor de forma **M** mayores de 2 se obtienen sobrepresiones mayores a las arrojadas por la fórmula de **Michaud** pudiendo afirmar que para tiempos de cierre mayores que el crítico (cierre lento), no siempre la fórmula de Michaud representa la máxima sobrepresión que soporta la válvula con cierre lento.

Se aporta la figura 3.2.4 que ilustra perfectamente lo comentado.

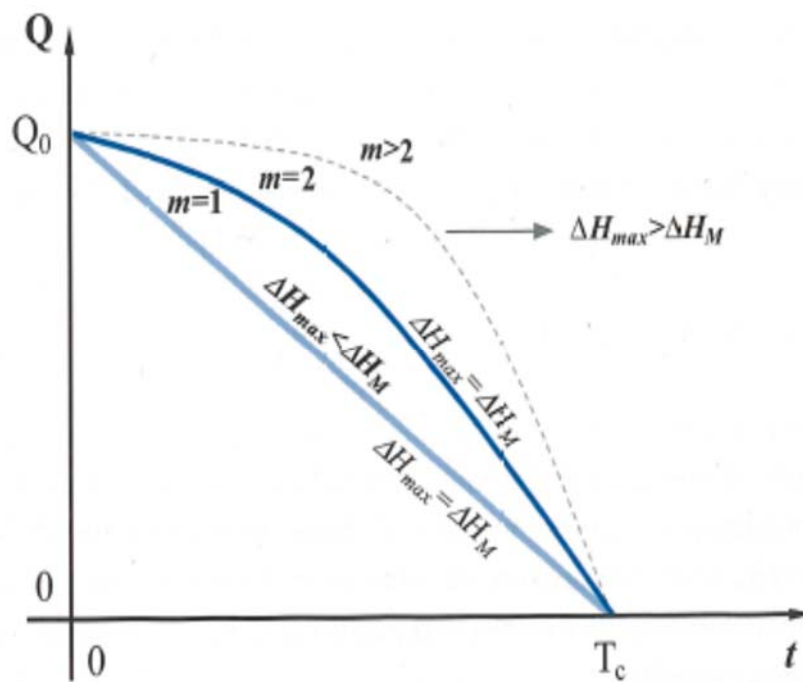


Figura 3.2.4. Ley de cierre con velocidad impuesta. Fuente: Transitorios hidráulicos. Abreu et Alter.

### 3.3 FORMULACIÓN DEL FENOMENO DE GOLPE DE ARIETE SEGÚN ALLIEVI-JOUKOWSKY. PULSO DE JOUKOWSKY.

Tanto Jouguet como Michaud parten del supuesto de que la sobrepresión debida al Golpe de Ariete  $P_{ga}$  se transmite de forma instantánea a lo largo de toda la tubería, cosa que físicamente no es cierta puesto que sabemos, que cualquier onda de presión se desplaza a una celeridad  $c$  a lo largo de la tubería y su líquido conducido.

La celeridad  $c$  depende del módulo de elasticidad tanto del líquido (agua) como del correspondiente módulo de elasticidad del material que conforma la tubería. También tiene influencia en la velocidad  $c$  el diámetro de la tubería y su espesor, así como el peso específico del líquido conducido. Completando la teoría de Michaud, Allievi considera la elasticidad de la tubería y la celeridad de una onda de presión a lo largo de una conducción, así como la compresibilidad del líquido. Lorenzo Allievi no considera el rozamiento existente entre el agua y las paredes del conducto (pérdidas de carga por fricción) por lo que, si no se produce ninguna perturbación en el sistema, el proceso se repite indefinidamente, cosa que evidentemente no ocurre tratándose de un fenómeno que se amortigua con el tiempo.

Allievi considera que al cerrar la válvula aparece un incremento brusco de presión que actúa sobre la sección transversal definida por el área interior de la conducción  $A$  y que va comprimiendo el líquido con una fuerza dada por la ecuación **Fuerza = Superficie •  $\Delta P$** . Como la onda de presión viaja a una velocidad  $c$ , en un lapso de tiempo  $t$  se habrá detenido el líquido en una longitud  $\Delta L$ , es decir:

$$\text{tiempo} = \Delta L / \text{celeridad.}$$

El impulso de la fuerza  $F$  a lo largo del tiempo  $t$  es la variación de la cantidad de movimiento que ha sufrido la masa  $M$  detenida en el tramo  $\Delta L$ , aunque se puede considerar que no esté detenida del todo sino solamente frenada si el cierre no es total sino únicamente parcial y entonces en este último caso la velocidad de la masa  $M$  no es nula sino menor que la velocidad inicial ( $V_0$ )

$$\text{Impulso} = \text{Fuerza} \cdot \text{tiempo} = \text{Sección} \cdot \Delta P \cdot \text{tiempo} = \text{Sección} \cdot \Delta P \cdot \left( \frac{\Delta \text{Longitud}}{c} \right) \quad [3.3.1]$$

La masa detenida o frenada en el caso de cierre parcial es:

$$\text{Masa} = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen} = \text{Densidad} \cdot \text{Sección} \cdot \text{Longitud} \quad [3.1.2]$$

La variación de la cantidad de movimiento se puede estimar mediante:

$$\Delta \text{Cantidad de Movimiento} = \text{Masa} \cdot \Delta \text{Velocidad} \quad [3.1.3]$$

El decremento de velocidad ( $\Delta \text{Velocidad}$ ) es mayor cuando el cierre es total, pues la velocidad de la masa de agua pasa de la velocidad inicial  $V_0$  a un valor cero. Denominaremos  $V$  a la velocidad que tenía el líquido antes del inicio del cierre de la válvula  $\Delta \text{Velocidad Máxima} = V$  queda.



$$\Delta \text{Cantidad de Movimiento} = \text{Masa} \cdot V = \rho \cdot A \cdot \Delta L \cdot V \quad [3.3.4]$$

Igualando el Impulso a la Variación de la Cantidad de Movimiento tenemos

$$A \cdot \Delta P \cdot \frac{\Delta L}{c} = \rho \cdot A \cdot \Delta L \cdot V \quad \Delta P = c \cdot \rho \cdot V \quad [3.3.5]$$

Dividimos la expresión por el peso específico del líquido (agua) para expresar el incremento de presión en metros de columna de agua:

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \Delta H_{\text{máx}} = \frac{\rho}{\gamma} \cdot c \cdot V \quad [3.3.6]$$

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \quad \gamma = \frac{\text{peso}}{\text{volumen}} = \frac{\text{masa} \cdot \text{gravedad}}{\text{volumen}} \quad \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\frac{\text{masa}}{\text{volumen}}}{\frac{\text{masa} \cdot \text{gravedad}}{\text{volumen}}} = \frac{1}{\text{gravedad}}$$

Sustituyendo en [3.3.6] obtenemos la expresión conocida como fórmula de Allievi

$$\Delta H_{\text{máx}} = \left( \frac{\text{celeridad de la onda de Presión}}{\text{gravedad}} \right) \cdot \text{Velocidad Agua} \quad [3.3.7]$$

$$\Delta H_{\text{máx}} = \left( \frac{c}{g} \right) \cdot V$$

Siendo

- $\Delta H_{\text{máx}}$  es el máximo incremento de presión debido al fenómeno del Golpe de Ariete expresado en metros de columna de agua.
- $c$  la celeridad o velocidad de la onda de presión en el conjunto líquido-tubería medida en metros/segundo.
- $g$  la constante de aceleración de la gravedad que asume un valor aproximado a nivel del mar de 9,8 metros/segundo<sup>2</sup>.
- $V$  representa la velocidad del líquido en la tubería antes del inicio del cierre de la válvula.

### PULSO DE JOUKOWSKY

Formalmente similar a la fórmula de Allievi se cita con frecuencia el Pulso de Joukowsky bajo su aspecto incremental:

$$\Delta H = \left( -\frac{c}{g} \right) \cdot \Delta V \quad \text{m. c. a.} \quad [3.3.8]$$

El signo negativo corresponde al incremento de velocidad, dado que la velocidad final es menor que la inicial. Joukowsky define esta expresión unos años antes que Allievi. Para un cierre total se cumple que  $\Delta V = -V_0$  siendo  $V_0$  la velocidad inicial del agua antes del inicio de la maniobra de cierre. El Pulso de Joukowsky se expresa entonces como:

$$\Delta H = \left( \frac{c}{g} \right) \cdot V_0 \quad \text{m. c. a.} \quad [3.3.9]$$

### 3.4 FÓRMULA DE ANGUS.

Para el desarrollo de la expresión aportada por Angus denominamos  $T_M$  al tiempo de maniobra de la válvula.

El tiempo crítico viene dado por el valor del tiempo que tarda la onda de presión generada por el cierre de la válvula en desplazarse hasta el embalse regulador y volver hasta la válvula de nuevo por lo que la onda recorre dos veces la longitud de la tubería que une el depósito y la válvula

$$c = \frac{2 \cdot L}{T_{\text{crítico}}} \quad T_{\text{crítico}} = 2 \cdot \frac{\text{Longitud ed la Tubería}}{\text{celeridad de la onda de presión}} = 2 \cdot \frac{L}{c} \quad [3.3.8]$$

#### Cierre rápido o instantáneo.

Tal y como se ha visto anteriormente Allievi nos da la máxima sobrepresión alcanzable con un cierre rápido de la válvula de alivio, es decir, con un tiempo de maniobra de la válvula inferior al tiempo crítico ( $T_M < T_c$ )

$$\Delta H_{\text{máx}} = \left(\frac{c}{g}\right) \cdot V \quad [3.3.7]$$

Siendo

- $c$  la celeridad de la onda de presión en la conducción que depende del fluido transportado, que normalmente será agua, y del material que conforma la propia tubería.
- $V$  es la velocidad media del fluido durante el régimen permanente anterior al inicio de la maniobra de cierre de la válvula.
- $g$  representa la aceleración de la gravedad que suponemos constante a lo largo de todo el proceso, debido a que se produce una variación de altitud despreciable frente a la acción de los demás factores que intervienen.

#### Cierre lento.

Adoptando la hipótesis de maniobra lineal de cierre de la válvula tenemos la expresión de Michaud que se puede aplicar cuando el tiempo de maniobra  $T_M$  de la válvula supera al crítico, es decir en caso de cierre lento:

$$\Delta H = 2 \cdot \frac{L \cdot V}{g \cdot T_M} \quad [3.2.3]$$

- $L$  es la longitud de la tubería que va desde el depósito hasta la válvula cuyo cierre origina la onda de presión.

**Envolvente de las dos situaciones anteriores.**

Se dispone de un método semiempírico, especialmente útil para el caso de parada repentina de equipos de bombeo, debido al Profesor **Angus** que en los años 30 calcula la máxima sobrepresión en metros de columna de agua debido al cierre de válvula en el sistema Depósito-Tubería-Válvula. Este método considera que la sobrepresión máxima se produce en el instante:

$$T = T_0 + T_{crítico} = T_0 + \frac{2 \cdot L}{c} \tag{3.3.9}$$

Según la expresión:

$$\sqrt{H} = \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{T}{t}\right)^2 + 1 + M - \left(\frac{M}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{T}{t}\right)} \tag{3.3.10}$$

donde

$$H = \frac{H_T}{H_0} \qquad M = \frac{c \cdot V}{g \cdot H_0}$$

- **H<sub>T</sub>** representa la altura máxima y más desfavorable en metros de columna de agua a la que se llega en la sección de la válvula en el tiempo

$$t = T_0 + \frac{2 \cdot L}{c}$$

- **H<sub>0</sub>** es la altura de presión en régimen permanente en la misma sección en un tiempo anterior al inicio de la maniobra de apertura de la válvula.

Los valores prácticos de **M** varían generalmente entre 0,5 y 0,75 asumiendo que **g**, la aceleración de la gravedad, tiene un valor próximo a 10 metros/segundo<sup>2</sup> y la celeridad **c** de la onda de presión viajando a través del conjunto agua-tubería adquiere valores superiores a 1300 metros/segundo, además se piensa que las velocidades iniciales del líquido pueden oscilar entre los valores de 0,6 metros/segundo y 3 metros/segundo.

Se puede representar los valores del parámetro **M** tomando:

- En abscisas el cociente entre los tiempos de maniobra y el crítico como variable independiente.
- En ordenadas como variable dependiente se toma el cociente entre alturas máximas y la altura estática inicial medida en el depósito

$$H = \frac{H_T}{H_0}$$

El diagrama siguiente se establece para distintos valores de M y solo es válido para el caso de cierre lento. Aunque la ecuación de Angus no proporciona resultados exactos, en la práctica totalidad de los casos contrastados queda del lado de la seguridad arrojando resultados conservadores respecto de la realidad del fenómeno estudiado, por lo que nos aporta un orden de magnitud suficiente en casos sencillos.

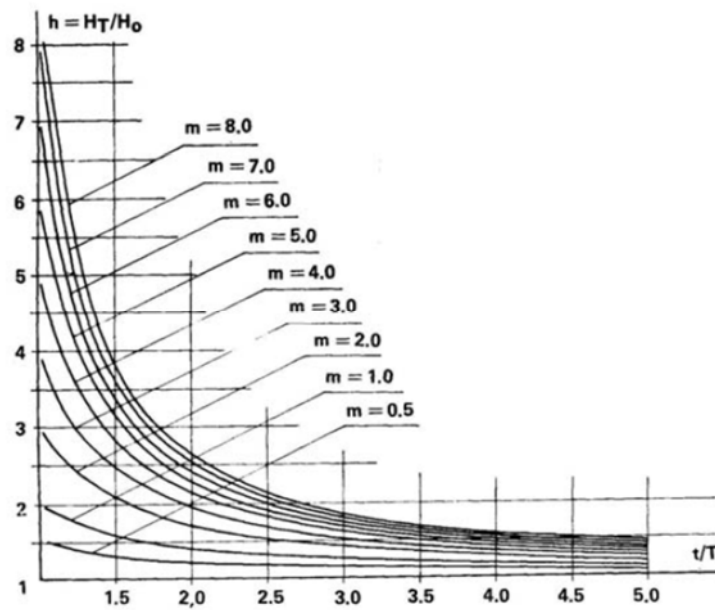


Figura 3.1. Sobrecarga unitaria del sistema en función M. Fuente: Criterios de diseño, cálculo y selección de tuberías en base al criterio de las prestaciones equivalentes. Luis Pérez Farrás.

### 3.5 FÓRMULA SIMPLIFICADA DERIVADA DE LA TEORÍA DE LA COLUMNA RÍGIDA.

Aunque se expone con mayor detalle la teoría de la columna rígida de agua más adelante no podemos obviar aquí una fórmula de uso muy extendido que con relativa sencillez nos aporta un valor aproximado del incremento de presión debido al Golpe de Ariete. Se consideran tres hipótesis simplificadoras que son:

1 ■ Fluido totalmente incompresible.

Sabemos que esto no es cierto en ningún caso y una de las consecuencias directas de asumir esta hipótesis es despreciar parte de la energía elástica del sistema.

2 ■ Tubo rígido.

Con esta premisa y asumiendo la anterior se abandona totalmente la posibilidad de transformación de la energía cinética del agua circulante en capacidad de respuesta elástica del binomio fluido-tubería de ahí la denominación de columna rígida de agua.

3 ■ Los cambios de presión y velocidad se presentan de forma instantánea con la misma intensidad en el conducto.

Esta hipótesis introduce una simplificación importante en el sistema eliminando de un plumazo la intervención de la celeridad de la onda de presión, pero obliga a establecer unas condiciones de contorno que limitan la aplicación práctica de la fórmula resultante. Como consecuencia directa e inmediata la expresión subsiguiente solo cobra validez para tuberías que satisfacen las siguientes condiciones:

- 1 ■ El tiempo de cierre de la válvula debe superar la septuagésima tercera parte de la longitud de la tubería ( $L/73 < t_{\text{cierre}}$ )
- 2 ■ El cociente entre la carga inicial del sistema en metros de columna de agua y la velocidad del agua en régimen laminar anterior a la maniobra de la válvula debe quedar por debajo de 50 es decir ( $H_0 / V_0 \leq 50$ ). La aplicabilidad de la expresión solo contempla sistemas en los que el fenómeno de Golpe de Ariete no es excesivamente agresivo.

El incremento (o decremento) máximo de carga en el instante en que se culmina el cierre de la válvula ( $t = t_c$ ) para una maniobra de cierre o apertura, total o parcial es:

$$\frac{\Delta H_{\text{máx}}}{H_0} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{L \cdot \Delta V}{g \cdot t_c \cdot H_0}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{L \cdot \Delta V}{g \cdot t_c \cdot H_0}\right)^4 + \left(\frac{L \cdot \Delta V}{g \cdot t_c \cdot H_0}\right)^2}$$

- **g** es la aceleración de la gravedad expresada en metros/segundo<sup>2</sup>.
- **H<sub>0</sub>** representa la carga de presión en el conducto cuando el flujo es permanente, medida a partir de un plano de referencia en metros.
- **L** es la longitud total del conducto medido en metros de columna de agua.
- **V** corresponde a la velocidad del fluido en el conducto expresada en metros/segundo.
- **ΔV = V - V<sub>0</sub>** viene a ser el cambio o variación de la velocidad sufrido por el fluido por efecto del cierre de la válvula expresado en metros/segundo. Está claro que si se trata de un cierre total de la válvula el incremento o decremento anterior asume el valor de la velocidad inicial del agua en la tubería antes del accionamiento de la válvula.
- **ΔH<sub>máx</sub>** representa el incremento o decremento máximo de carga expresado en metros de columna de agua, medido desde la línea de presiones de flujo permanente.
- **t<sub>c</sub>** expresa el tiempo de cierre de la válvula en segundos.

Cabe destacar que en la ecuación anterior el signo positivo del radical se utiliza para el cierre de la válvula y el negativo para su apertura.

### 3.6 FÓRMULA DE MENDILUCE.

Hasta ahora se han comentado ciertos aspectos relativos al tiempo de maniobra centrándonos en el tiempo de cierre de la válvula de alivio situada en cola del sistema. El tiempo de parada o maniobra en el caso concreto de una válvula es medible directamente o bien es suministrado por el fabricante de la válvula y en el caso concreto de válvulas motorizadas se dispone incluso de la ley que rige los tiempos y velocidades de cierre.

El tiempo de parada es aquel en que se detiene de forma completa el flujo de agua. En el caso de válvulas coinciden plenamente los tiempos de cierre con los de parada. No ocurre lo mismo en equipos de bombeo, en los que, aunque se detenga la impulsión del grupo de bombeo, la energía cinética transmitida al fluido y la inercia del propio líquido tardan en disiparse por rozamiento dándose con cierta frecuencia el fenómeno de cavitación y por supuesto de Golpe de Ariete, pero iniciándose este en su fase de subpresión. El tiempo de parada en sistemas de bombeo es difícil de apreciar y viene impuesto por las condiciones de funcionamiento y de contorno del sistema.

El tiempo de parada es una variable sobre la que se puede actuar con precisión en el caso de cierre de válvula, pasando de ser una incógnita a ser un dato del problema. No ocurre así en instalaciones de bombeo donde el tiempo de parada constituye una variable sobre la que no tenemos ninguna autoridad. El tiempo de parada es un parámetro fundamental y definitorio en el estudio del Golpe de Ariete. El profesor **Mendiluce** establece para su cálculo una fórmula semiempírica que goza de cierta garantía por su extendido uso quedando en la mayor parte de los casos contrastados del lado de la seguridad. La expresión propuesta por **Mendiluce** para el caso de una bomba es la siguiente:

$$\text{Tiempo de Parada} = C + K \cdot \frac{L \cdot V}{g \cdot H_M}$$

con los siguientes significados para los parámetros intervinientes:

- Tanto **C** como **K** son parámetros empíricos de ajuste que dependen, de la pendiente hidráulica para **C** y de la longitud de la tubería en el caso de **K**.
- **L** es la longitud de la conducción medida en metros.
- **V** representa la velocidad del flujo antes del inicio de la maniobra de detención del grupo de impulsión medida en metros/segundo.
- **g** es como siempre el valor de la aceleración de la gravedad con un valor aproximado de 10 metros/segundo<sup>2</sup>.
- **H<sub>M</sub>** es la llamada altura manométrica que suministra el grupo de bombeo al fluido. La altura manométrica es la suma de dos energías, la primera es la altura piezométrica y la segunda las pérdidas.

Respecto del coeficiente  $C$ , este es función de la pendiente hidráulica ( $i$ ) definida como:

$$\text{Pendiente hidráulica} = i = \frac{\text{Altura manométrica}}{\text{longitud tubería}} = \frac{H_m}{L}$$

Para valores de la Pendiente Hidráulica que no superen el 20% el coeficiente  $C$  asume como valor la unidad. El coeficiente  $K$  representa la inercia del equipo de bombeo, en función de la energía cinética del agua. Tal y como se aprecia en la figura aportada, conforme aumenta la Pendiente Hidráulica a partir del 20%, el valor del coeficiente  $C$  disminuye hasta anularse cuando la Pendiente Hidráulica alcanza el valor del 40%, no siendo lineal entre ambos valores.

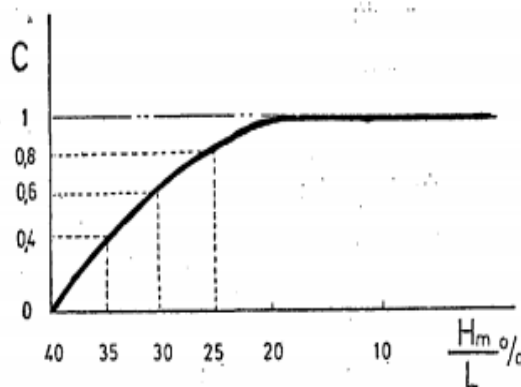


Figura 3.2. Valores del coeficiente  $C$  en la fórmula de Mendiluce. Fuente: Temas de clase de la Cátedra de Ingeniería Rural de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real.

Por lo que respecta al parámetro  $K$ , este es decreciente conforme la tubería es más larga, admitiendo los redondeos por tramos enumerados en la tabla siguiente figura 3.3 dado su escasa repercusión en el resultado final del cálculo de Golpe de Ariete. Para el valor asumido por  $C$  En función de la pendiente hidráulica de la instalación, se recomiendan los siguientes valores tabulados en la figura 3.3.

| $L$ (m)          | $K$  |
|------------------|------|
| < 500            | 2    |
| ≈ 500            | 1,75 |
| 500 < $L$ < 1500 | 1,5  |
| ≈ 1500           | 1,25 |
| > 1500           | 1    |

| $i$   | $C$ |
|-------|-----|
| < 20% | 1   |
| ≈ 25% | 0,8 |
| ≈ 30% | 0,6 |
| ≈ 40% | 0,4 |
| > 50% | 0   |

Figura 3.3. Valores tabulados por escalones del coeficiente  $C$  en la fórmula de Mendiluce. Fuente: Temas de clase de la Cátedra de Ingeniería Rural de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real.

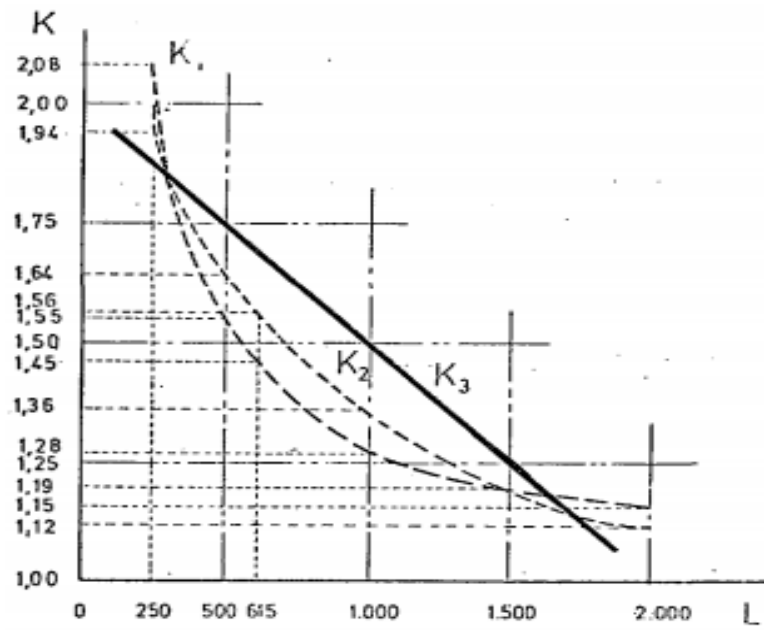


Figura 3.3. Valores del coeficiente K en función de la longitud de la tubería en la fórmula de Mendiluce. Fuente: Temas de clase de la Cátedra de Ingeniería Rural de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real.

La consideración de los valores tabulados frente a los entresacados de la gráfica siempre nos deja del lado de la seguridad.



## ■ CAPÍTULO 4.

# ESQUEMAS SIMPLIFICADOS DEL PROCESO DE GOLPE DE ARIETE.

En este capítulo las ocho primeras figuras ilustrativas aportadas han sido extraídas de la publicación de González Casas, F. Zamudio Huertas, y E. García Ubaque, C. A. (2015). Demostración y análisis del Golpe de Ariete por el método de los promedios aritméticos. Revista Tecnura, 19, 143-151. DOI: 10.14483/udistrital.jour.tecnura.2015.SE1.a12 recogida también en la bibliografía.

### 4.1 SITUACIÓN INICIAL.

Partimos del mismo sistema que venimos utilizando, es decir se trata de un depósito de grandes dimensiones o de un embalse, de cuyo fondo se extrae una tubería de desagüe de longitud  $L$  que vierte a la atmosfera el alivio que conduce. La tubería contempla unas características genéricas en cuanto a su diámetro  $D$ , su espesor  $e$  y su coeficiente de fricción unitario por metro de longitud  $f$ .

Suponemos, para no tener que involucrar el fenómeno de oscilación en masa, que las dimensiones del embalse son de tal magnitud, que el volumen del agua contenida en la conducción y el vertido por ella son despreciables frente a la capacidad del embalse o depósito, por lo que no se altera el nivel del mismo y como consecuencia directa, la carga hidráulica inicial debido al peso de la columna de agua que gravita sobre la boca de carga de la tubería se mantiene constante pasando a ser de una variable a un dato fijo constante inicial como condición de contorno inamovible.

También suponemos, para incluir los efectos gravitatorios derivados del peso del agua el que, la tubería lleva una ligera pendiente descendiente conforme a su avance con un ángulo  $\theta$ , medido en sentido horario (dextrorsum) desde la horizontal, aunque este hecho no venga reflejado en los croquis adjuntos para facilitar la comprensión del fenómeno en sí, pudiendo despreciarse a efectos explicativos.

Somos conscientes de que el Golpe de Ariete, entre otros motivos ya comentados, se inicia con el cierre brusco de la válvula de alivio, aunque con cierres rápidos sin llegar a bruscos se producen igualmente sobrepresiones de valor importante, frente a las que debe dimensionarse estructuralmente tanto la tubería como sus anclajes y accesorios varios. Despreciaremos claramente y sin rubor la energía disipada de varias formas, pero fundamentalmente la térmica.

## 4.2 CIERRE BRUSCO DE LA VÁLVULA.

Al cerrarse la válvula, el agua que está en contacto con ella se comprime fuertemente e incrementa su presión sobre dicha válvula, al frenarse de forma abrupta se está transformando la energía cinética del fluido circulante valorado en:

$$\text{Energía cinética} = \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

en energía potencia de presión almacenada en el sistema bajo la forma de deformación elástica de la tubería que se ensancha y también en compresión del agua que consecuentemente disminuye su volumen. Aunque el agua tenga velocidad nula en contacto con la válvula, como por una parte se comprime ocupando está un menor volumen y por otro se dilata fuertemente la tubería creando un volumen extra, el agua sigue circulando cierto tiempo desde el deposito hacia la válvula tras el cierre. La onda de sobrepresión viaja en sentido contrario al desplazamiento del agua conforme avanza el frente de dilatación de la tubería. Esta onda de presión viaja a gran velocidad que suele superar ampliamente los 1300 metros/segundo conformando la cabecera de la onda del Golpe de Ariete. En el tramo más cercano a la válvula, la presión del agua es la suma de la inicial de carga, debido al depósito con la del peso de la columna de agua contenida en la tubería proyectada a lo largo de su eje longitudinal y además la sobrepresión debida a la transformación de la energía cinética que llevaba el líquido. La parte todavía no ensanchada de la tubería sufre la presión debida a la carga hidráulica del depósito y al peso de la columna de agua circulando, pero no de la sobrepresión consecuencia del Golpe de Ariete. Para simplificar la descripción del fenómeno, vamos a suponer a partir de ahora que, la tubería es horizontal y eliminamos de un plumazo la acción de la gravedad sobre el volumen del agua confinado en la tubería, que se considera constante y no altera el sentido físico de la descripción.

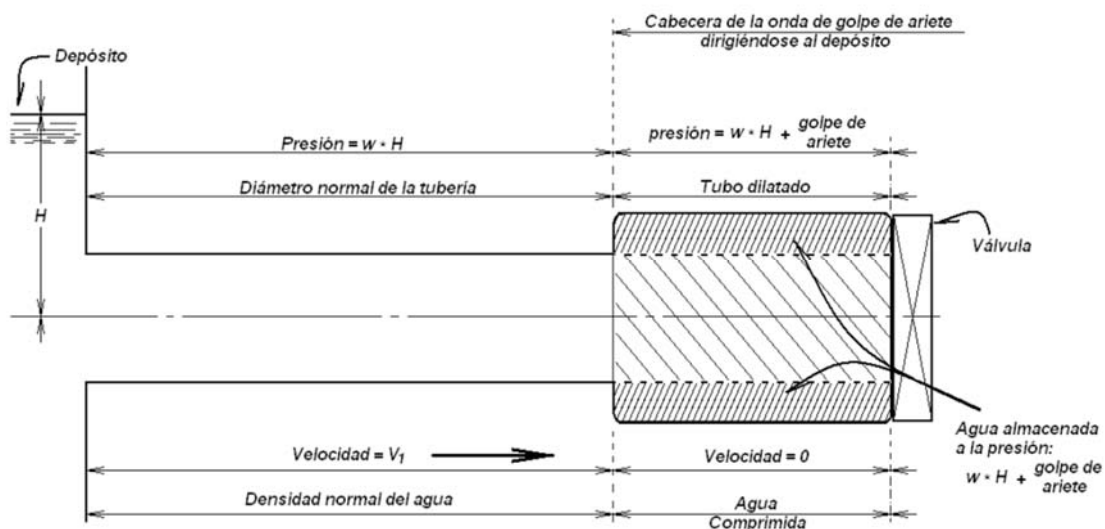


Figura 1. Cierre brusco de la válvula.

### 4.3 ALCANCE DEL DEPÓSITO.

Cuando la totalidad de la tubería está ensanchada, es decir, cuando el frente de la onda de presión debida al Golpe de Ariete alcanza el depósito, la magnitud de este es tan grande frente al volumen encerrado en la conducción que, se disipan las condiciones de sobrepresión del agua adoptándose el valor de la presión reinante en el depósito a la cota de acometida de la tubería que denominaremos H por ganar en brevedad.

El valor de H es el producto del peso específico del agua por la profundidad a la que acomete la tubería.

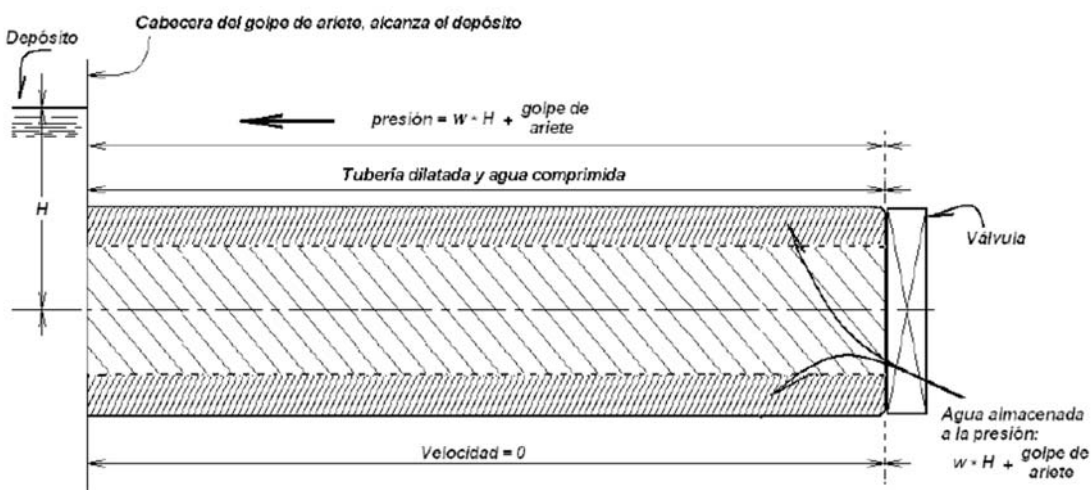


Figura 2. Alcance del depósito.

Al disminuir la presión del agua en la boca de la tubería hasta el valor de H la elasticidad de la tubería propicia que esta vuelva a su diámetro original.

Realmente no ocurre esto exactamente, sino algo más, pues la tubería funciona como un muelle que no solo recupera su tamaño original, sino que sobrepasa este oscilando al otro lado de su posición de origen.

La tubería en clara consonancia con el comportamiento del muelle actúa de oscilador mecánico y se contrae más allá de su diámetro inicial antes de iniciarse el cierre de la válvula, pero no consideraremos este aspecto porque no supone un incremento significativo de la presión del agua confinada y además es un fenómeno residual que se produce en todas las fases de inversión de la presión compensándose unas con otras.

## 4.4 RETORNO A LA VÁLVULA

La contracción de la tubería hasta su diámetro nominal acaba “escupiendo” hacia el depósito toda el agua sobrante respecto del volumen inicial de la tubería que ocupa el sitio dejado, por una parte, por el incremento del diámetro de la tubería y por otra, el que el agua comprimida deja espacio libre debido a que estando comprimida ocupa un volumen menor que el inicial.

En esta fase el agua tiene sentido hacia el embalse y la onda de presión (depresión) viaja desde el depósito hasta la válvula, asociada a una fuerte contracción de la tubería a la misma velocidad en módulo que en la fase anterior. A lo largo de esta etapa en la tubería coexisten dos tramos diferenciados:

- El primero del lado del depósito, contiene agua a la presión  $H$  derivada de la existencia en el depósito, asimismo tiene como diámetro el nominal inicial, creándose un frente de onda que se desplaza hacia la válvula en sentido contrario al flujo de agua.
- El segundo, situado del lado de la válvula sigue con diámetro mayor que el nominal y lleno de agua a presión, la existente en el depósito a cota de acceso a la tubería, más la sobrepresión debida al Golpe de Ariete.

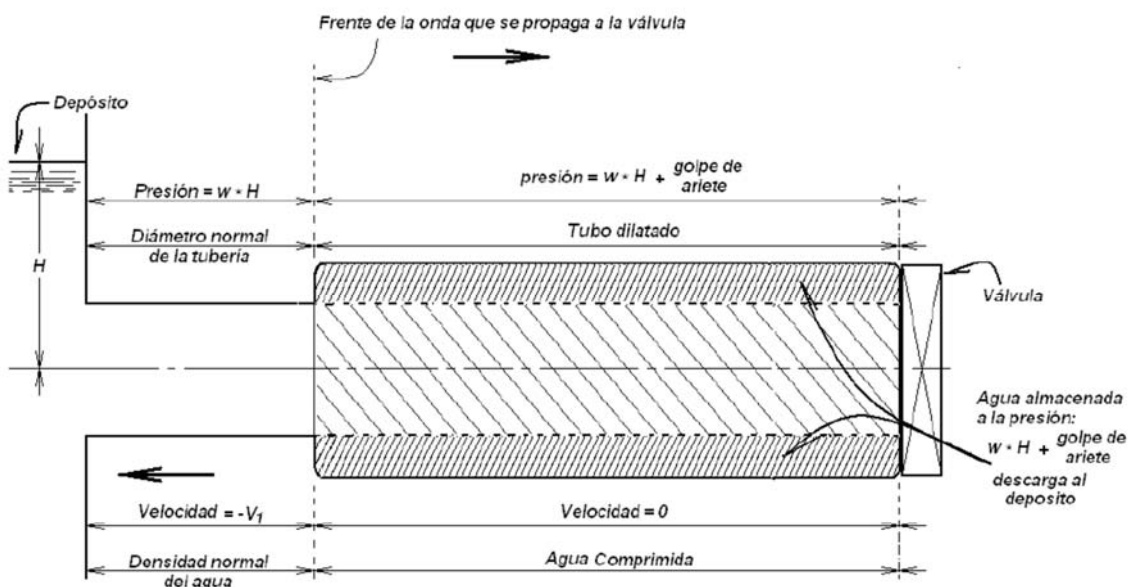


Figura 3. Retorno a la válvula

### 4.5 ALCANCE DE LA VÁLVULA.

En este instante la onda de compresión de la tubería, desde su estado ensanchado con diámetro  $D+\Delta D$  hasta un diámetro final igual al Diámetro inicial nominal  $D$ , llega hasta la válvula y la velocidad del agua tiene sentido hacia el depósito, con una magnitud igual que la tenía en la primera fase en sentido contrario depósito-válvula.

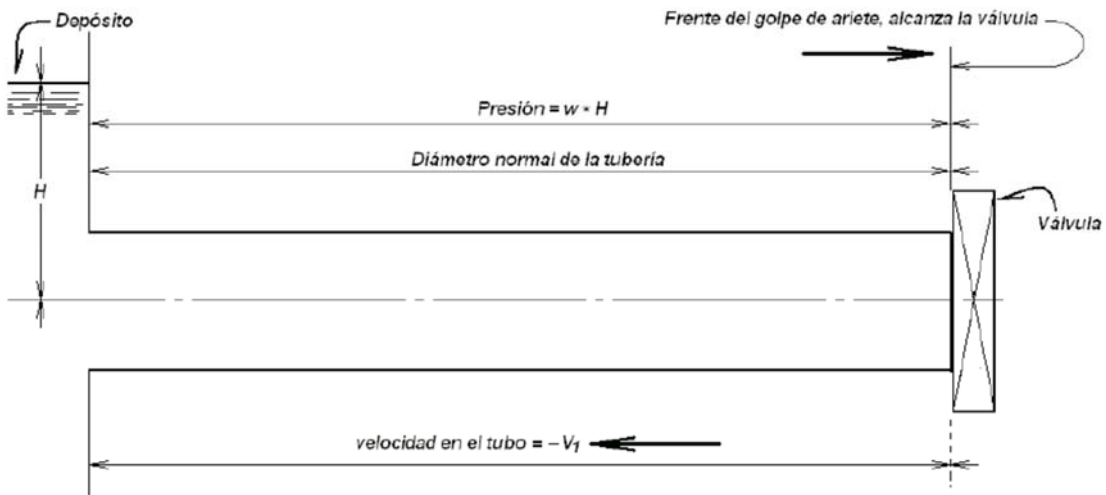


Figura 4. Alcance de la válvula.

### 4.6 RETORNO AL DEPÓSITO CON CONTRACCIÓN DE LA TUBERÍA.

A partir de que la onda de contracción alcanza la válvula, el agua sigue fluyendo hacia el depósito con velocidad  $V$  y su inercia le lleva a vaciar la tubería creando una subpresión que arranca desde la válvula y hace que la tubería se contraiga desde su recién recuperado diámetro nominal hasta un valor menor contraído cuyo valor podemos cifrar en  $D-\Delta D$ .

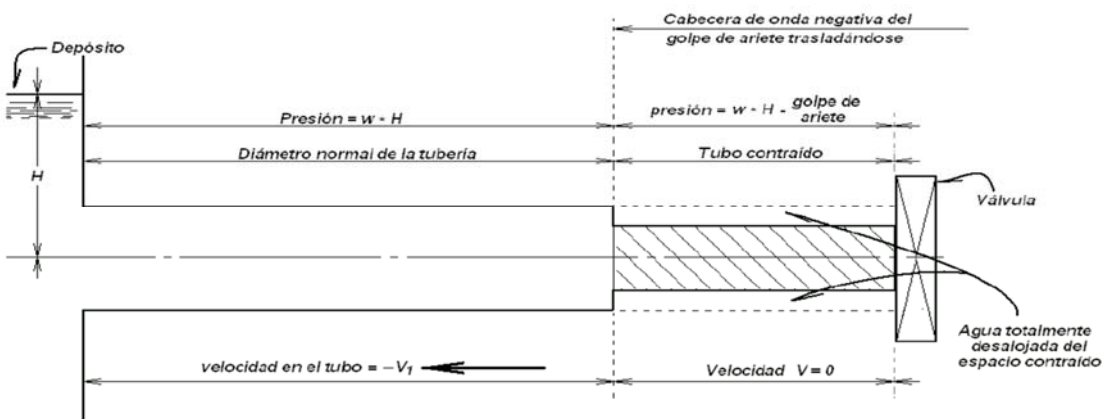


Figura 5. Retorno al depósito con contracción.

Podíamos pensar que, el incremento de presión original  $\Delta D$  y el decremento en esta fase son de igual magnitud pero, aquí entra en juego la fricción existente entre el agua y las paredes internas de la tubería, que reduce algo el decremento del diámetro nominal frente a su incremento anterior  $\Delta D > |-\Delta D|$ .

La fricción es la que propicia de esta forma la disipación energética y el amortiguamiento del fenómeno de Golpe de Ariete conforme al tiempo.

En este momento es cuando hay peligro de cavitación en las cercanías de la válvula, porque la inercia arrastra toda el agua hacia el depósito creando una fuerte depresión o "vacío" al lado de la válvula con riesgo asociado de alcanzar valores de la presión por debajo de la presión de vapor del agua.

Esta fase se caracteriza por el desplazamiento de una onda de presión que corre desde la válvula hacia el depósito asociada a la contracción de la tubería hasta un diámetro menor que el nominal. La presión en esta fase es la hidrostática  $H$  correspondiente al depósito restándole la correspondiente al Golpe de Ariete disminuido en su parte de fricción pertinente.

#### 4.7 LA CONTRACCIÓN DE LA CONDUCCIÓN ALCANZA EL DEPÓSITO.

La contracción en forma de onda depresiva alcanza de nuevo el depósito y como siempre se acopla a sus características tanto dinámicas con velocidad nula como de presión, adquiriendo ésta el valor  $H$  del depósito. La desproporción entre la capacidad hidráulica del embalse y el volumen de la tubería evita que se produzca el fenómeno de oscilación en masa entre ambos sistemas, hecho este, que conseguiría amortiguar rápidamente el fenómeno de Golpe de Ariete.

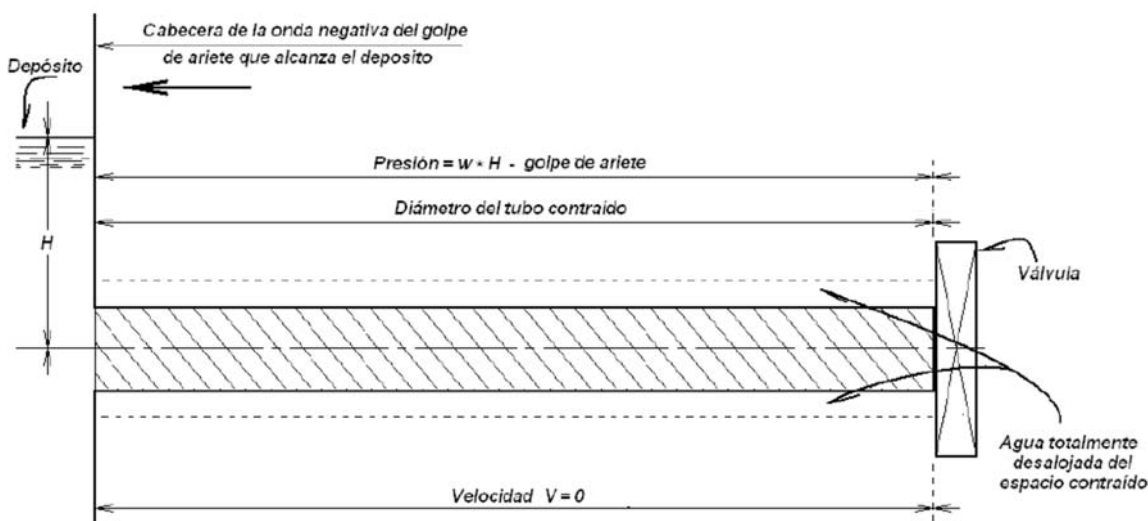


Figura 6. La contracción alcanza el depósito.

### 4.8 RETORNO HACIA LA VÁLVULA CON DIÁMETRO NOMINAL RECUPERADO.

La boca de la tubería se encuentra a la presión  $H$ , lo que permite a la tubería recuperar su diámetro nominal, succionando fuertemente el agua desde el embalse y acelerándola hasta alcanzar la velocidad  $V$  que venía llevando inicialmente antes de iniciarse el cierre de la válvula. Se produce entonces otra onda de presión positiva que devuelve la tubería a su diámetro original fluyendo el agua en su mismo sentido, es decir desde el embalse hacia la válvula.

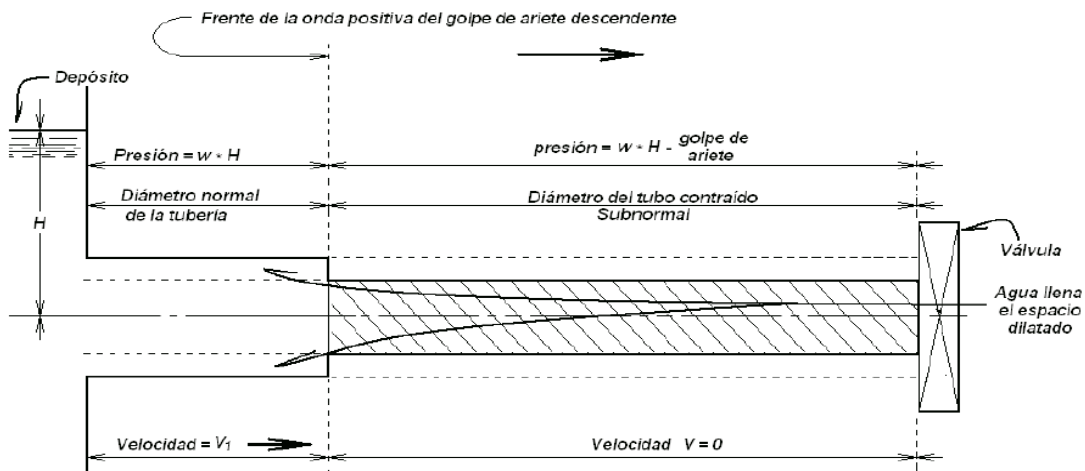


Figura 7. Retorno hacia la válvula con diámetro nominal.

### 4.9 ALCANCE DE LA VÁLVULA CON DIÁMETRO NOMINAL.

Completada la fase anterior volvemos a contemplar la situación original y empieza otro ciclo, con menos amplitud en las presiones en función del coeficiente de rozamiento existente entre el agua y las paredes internas del ducto.

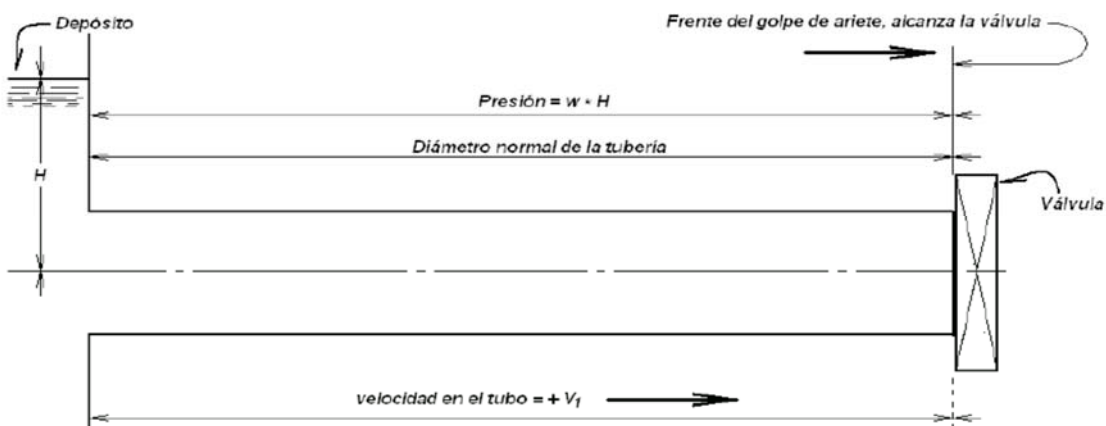


Figura 8. Alcance de la válvula con diámetro nominal.



### 4.10 RESUMEN GRÁFICO DEL PROCESO.

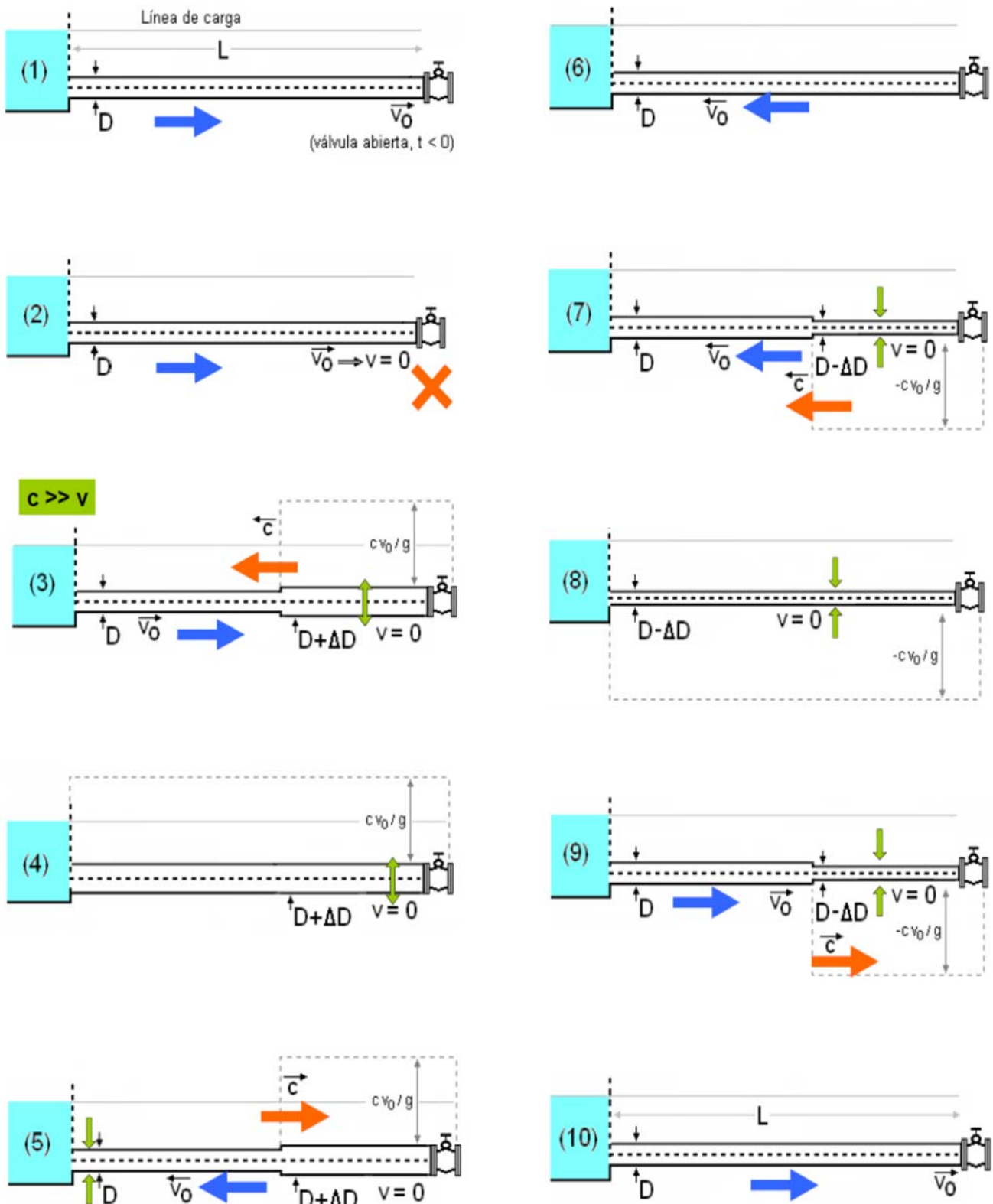


Figura 9. Resumen gráfico del desarrollo del proceso de Golpe de Ariete. Termodinámica y Mecánica de Fluidos Grados en Ingeniería Marina y Marítima de la Universidad de Cantabria



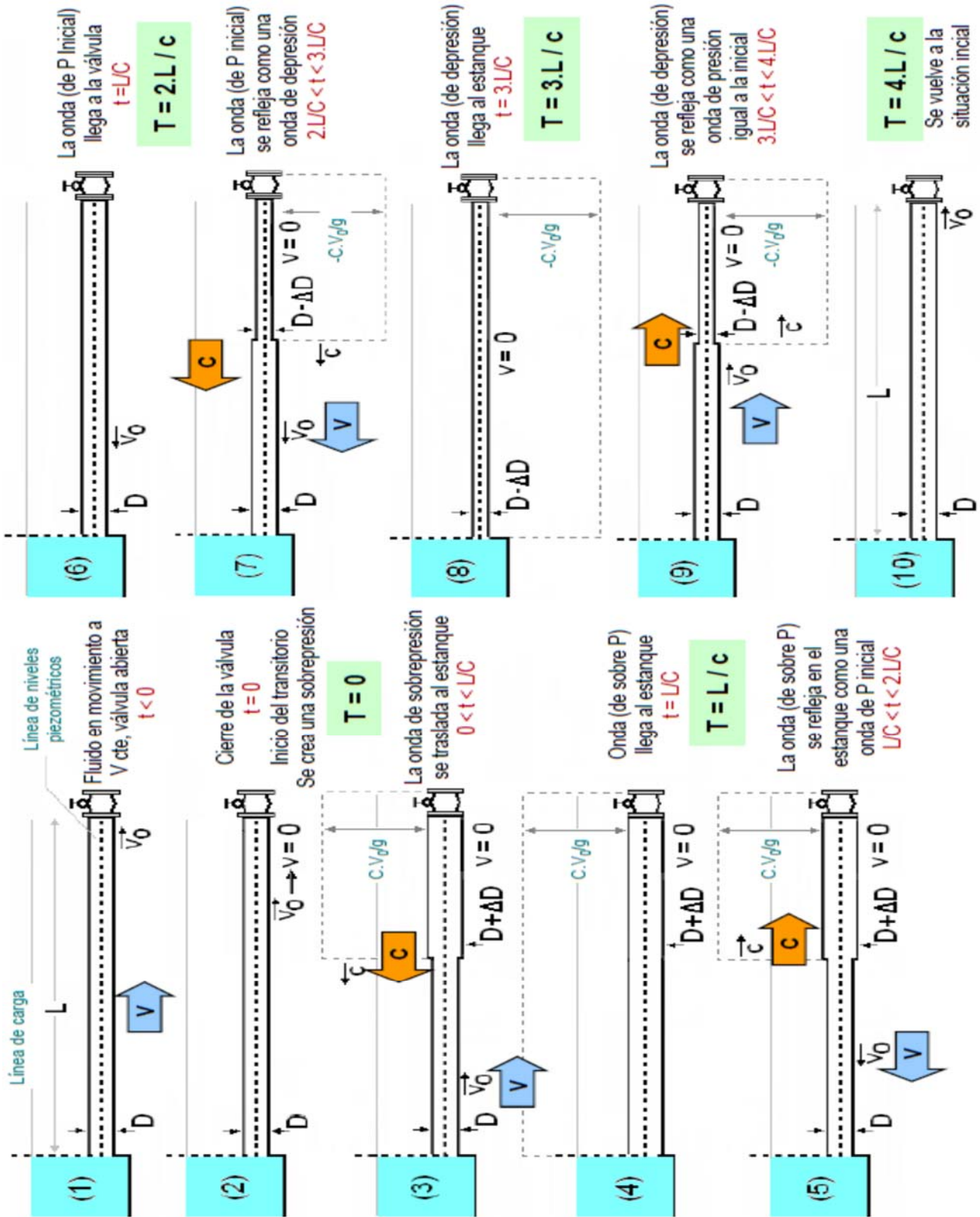


Figura 10. Tiempos asociados al proceso de Golpe de Ariete. Termodinámica y Mecánica de Fluidos Grados en Ingeniería Marina y Marítima de la Universidad de Cantabria



## ■ CAPÍTULO 5.

# ECUACIÓN CONSTITUTIVA MEDIANTE APLICACIÓN DIRECTA DEL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD O DE CONSERVACIÓN DE LA MASA.

Hallaremos en este capítulo la primera de las ecuaciones fundamentales por las que se rige el Golpe de Ariete en base a la aplicación del principio de conservación de la masa comúnmente denominado principio de continuidad, descrito en un addendum al efecto.

Tomemos un volumen de control que será una rebanada diferencial de espesor  $\delta x$  y una sección de referencia anterior definida por su **Área (A)** sometida a una cierta **Presión Inicial (P)**. El fluido que transita consta de una **Densidad ( $\rho$ )** y fluye a una **Velocidad (V)**. Vamos a considerar todas las variaciones posibles de los parámetros descritos. Se aporta el esquema del volumen de control sobre el que se efectúa el balance diferencial de masa.

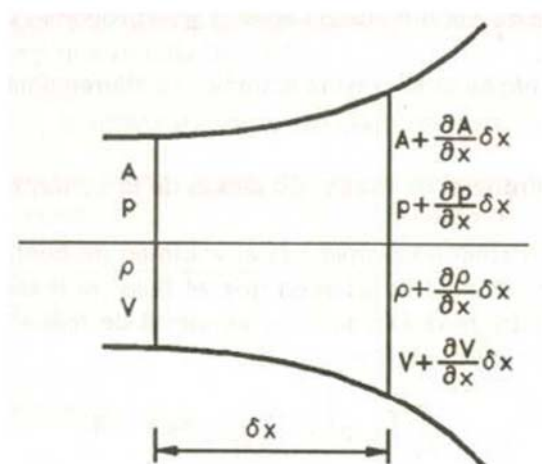


Figura 5.1. Fuente: Streeter, V.L.; Wylie, E.B., (1967), Hydraulic Transients. Mc Graw Hill Book Co. Inc. New York.

En la sección posterior final, que dista  $\delta x$  de la sección anterior, contemplamos las siguientes variables que han evolucionado respecto de las existentes en la cara anterior:

$$\text{Densidad} \quad \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \quad [5.1]$$

$$\text{Volumen} \quad V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \quad [5.2]$$

$$\text{Área} \quad A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \quad [5.3]$$

$$\text{Presión} \quad P + \frac{\partial P}{\partial x} \delta x \quad [5.4]$$

En el volumen de control considerado, la aplicación de la ecuación de conservación de la masa siempre se cumple y puede formularse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \rho \cdot \delta V \right) + \int \rho \cdot V \cdot dA = 0 \quad [5.5]$$

En esta expresión [5.5] la primera integral abarca todo el volumen de control, mientras la segunda se extiende a lo largo de su superficie envolvente que denominaremos superficie de control. El fluido transitado en nuestro caso será agua, que consideraremos incompresible, por lo que la variación de densidad no ha lugar, pero mantendremos la generalidad del estudio y aplicaremos posteriormente las particularidades correspondientes.

### VOLUMEN DE CONTROL.

La densidad de cualquier cuerpo se define como el cociente entre su masa y el volumen que ocupa de donde podemos encontrar el valor de la masa como el producto de su densidad por su volumen. Únicamente consideramos la variación de la densidad conforme al tiempo asociada al cambio de sección (y por ende del volumen) de la tubería por incremento de la presión interna. La densidad final en la cara posterior del volumen de control es la inicial existente en la cara anterior sumándole su variación, sufrida al evolucionar hasta la cara posterior.

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \quad [5.6]$$

Expresión en la que se asume el valor medio (de ahí que se divida  $\delta x$  por 2) al suponer que la variación de la densidad  $\rho$  conforme la abscisa  $x$  es lineal a lo largo de las líneas de corriente que definen el volumen de control. Esto simplifica ciertamente el desarrollo puesto que equivale a despreciar los infinitésimos de mayor orden que los lineales.

Por otro lado, la variación de **volumen** respecto de  $x$  la expresamos en función de la sección por el recorrido  $\delta x$  resultando:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \right) \quad \delta V = \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \right) \delta x \quad [5.7]$$

Componiendo la integral extendida a todo el Volumen de control al amparo de las ecuaciones [5.6] y [5.7] y despreciando los productos diferenciales mayores o iguales a los de **segundo orden**

$$\int \rho \cdot \delta V = \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \right) \cdot \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \right) \cdot \delta x \quad [5.8]$$

$$\int \rho \cdot \delta V = \left( \rho \cdot A \cdot \delta x + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \cdot \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \cdot A \cdot \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \cdot \delta x \right)$$

$$\int \rho \cdot \delta V \cong \rho \cdot A \cdot \delta x \quad [5.9]$$

Derivando con respecto al tiempo para cumplir con lo prescrito en el primer sumando de la ecuación de conservación de la masa y extendiéndose siempre la parte integral al conjunto del volumen de control y además derivando el producto del segundo sumando tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\int \rho \cdot \delta V) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot A) \cdot \delta x \qquad \frac{\partial}{\partial t} (\int \rho \cdot \delta V) = A \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \delta x + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \delta x \qquad [5.10]$$

Esta última ecuación nos indica la masa encerrada en el volumen de control en un determinado momento, que corresponde al primer sumando integral de la ecuación de conservación de la masa. Es importante llamar la atención sobre el hecho de que para hallar la expresión anterior no se ha hecho uso en ningún momento de las características mecánicas ni elásticas de la tubería. Hemos supuesto que la tubería no sufre elongación axial longitudinal alguna porque en caso contrario esto afectaría al término  $\delta x$  alterando la formulación anteriormente expuesta.

### SUPERFICIE DE CONTROL

La segunda integral de la ecuación de continuidad [5.5] representa la variación neta másica que ocurre en el volumen de control y es la diferencia entre la masa saliente y la entrante en dicho volumen a través de la superficie de control. Haciendo uso del análisis dimensional se puede comprobar que el término que aquí nos ocupa tiene dimensiones de masa por unidad de tiempo.

$$\text{Densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{longitud}^3} \qquad \text{Velocidad} = \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}} \qquad \text{Área} = \text{longitud}^2$$

Multiplicando los tres parámetros anteriores:

$$\text{Densidad} \cdot \text{Velocidad} \cdot \text{Área} = \frac{\text{masa}}{\text{longitud}^3} \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}} \cdot \text{longitud}^2 = \frac{\text{masa}}{\text{tiempo}}$$

El flujo másico saliente vendrá dado por el producto:

$$FMS = \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \right) \cdot \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) \cdot \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \right) \qquad [5.11]$$

Desarrollando el producto de los tres elementos anteriores y despreciaremos los infinitésimos de orden dos o superior

$$FMS = \left( \rho \cdot A + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \cdot A + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) \cdot \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \right)$$

$$FMS = \rho AV + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \rho \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \cdot V + \rho \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + A \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \cdot V + A \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \cdot V + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \frac{\partial V}{\partial x} \delta x$$

$$FMS = \rho \cdot A \cdot V + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + A \cdot V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \qquad [5.12]$$

En cuanto al flujo másico entrante (FME) tenemos de forma inmediata su expresión bajo la forma:

$$FME = \rho \cdot A \cdot V \quad [5.13]$$

El flujo neto viene dado por la diferencia entre el flujo másico saliente (FMS) y el flujo másico entrante (FME) y responde a la siguiente ecuación tras cancelarse  $\rho \cdot A \cdot V$

$$FMS - FME = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + A \cdot V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x$$

La segunda integral de la ecuación de continuidad extendida a toda la superficie de control queda:

$$\int \rho \cdot V \cdot dA = FMS - FME = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + A \cdot V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \quad [5.14]$$

Podemos ya substituir [5.10] y [5.14] en la ecuación de continuidad original [5.5] y sus dos elementos integrales componentes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \cdot \delta Vol + \int \rho \cdot Vel \cdot dA = \left( A \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \delta x \right) + \left( \rho \cdot A \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + A \cdot V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \right) = 0$$

Dividimos toda la ecuación anterior por la masa contenida en el volumen de control en un instante dado que será el producto de la densidad del fluido por el volumen que ocupa, es decir

$$masa\ encerrada = \rho \cdot A \cdot \delta x$$

Dividiendo obtenemos:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \left(\frac{1}{A}\right) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left[\left(\frac{V}{A}\right) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \left(\frac{V}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right] = 0$$

Aplicamos ahora la expresión de la derivada total en función de la local y la convectiva según la cual la Derivada total es igual a la suma de la derivada local y la derivada convectiva (regla de la cadena).

$$\begin{aligned} \rho = \rho(x, t) \quad \quad \quad d\rho &= \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad \quad \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} V + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{d\rho}{dt}\right) &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \left(\frac{V}{\rho}\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned} \quad [5.15]$$

$$\begin{aligned} A = A(x, t) \quad \quad \quad dA &= \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial t} dt \quad \quad \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} V + \frac{\partial A}{\partial t} \\ \left(\frac{1}{A}\right) \left(\frac{dA}{dt}\right) &= \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) \left(\frac{V}{A}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{A}\right) \end{aligned} \quad [5.16]$$

Substituyendo queda:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \left(\frac{1}{A}\right) \cdot \left(\frac{dA}{dt}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0 \quad [5.17]$$

### CARACTERÍSTICAS DE LA TUBERÍA.

Ahora es cuando entran a jugar su papel las características tanto geométricas como mecánicas elásticas de la tubería. Necesitamos expresar la ecuación anterior en términos de presión, a ser posible en metros de columna de agua de carga hidráulica y la velocidad del agua a lo largo de

la tubería. Partimos de la definición de módulo de compresibilidad volumétrico o coeficiente volumétrico de elasticidad  $K$  del agua ( $K=2,2 \cdot 10^9 \text{ Pa}=0,22 \cdot 10^{10} \text{ kp/m}^2$ ) que se expresa como:

$$K = \frac{dP}{d\rho/\rho} \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{K} \cdot dP \qquad [5.18]$$

Dividimos ambos miembros por dt para obtener el primer término de los tres que componen la ecuación [5.17] anteriormente hallada:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{d\rho}{dt}\right) = \left(\frac{1}{K}\right) \cdot \left(\frac{dP}{dt}\right) \qquad [5.19]$$

Partiendo de la fórmula del área del círculo, por suponer que el conducto es de sección circular, y diferenciando tenemos que el Diferencial de Área es igual al producto de tres factores,  $(\pi/2)$ , el Diámetro y el Diferencial de Diámetro

$$\text{Área} = \pi \cdot \text{radio}^2 = \pi \cdot \left(\frac{\text{Diámetro}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{Diámetro}^2 \qquad dA = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot D \cdot dD \qquad [5.20]$$

Esta expresión nos proporciona la variación que sufre el área de la tubería debido un aumento de presión en función del diámetro de dicha conducción.

Necesitamos introducir aquí las características elásticas del material que conforma la conducción y para ello vamos a buscar la relación existente entre un incremento de la presión interna del líquido y la respuesta elástica de la tubería, que reaccionará contrarrestando la presión sufrida almacenando energía en deformación elástica a base de aumentar su diámetro y por ende su perímetro circunferencial.

Aquí tampoco vamos a considerar la elongación longitudinal a lo largo del eje de la tubería, cuya exposición aclaratoria reservamos para objeto de un addendum adjunto en la parte final de este trabajo.

Para obtener la tensión en las paredes de una tubería sometida a presión interna  $P_i$  perpendicular a un plano que pasa por su eje longitudinal, tomemos un tramo de dicha tubería de longitud unidad y consideremos una sección transversal de la misma.

En la figura adjunta se aprecia a la izquierda, la vista de una sección recta de la tubería en la que se apunta que bajo una presión  $P_i$  interna del líquido trasegado sobre las paredes interiores de la conducción se generan unos esfuerzos radiales compensatorios representados por  $dF$  en cada punto del perímetro circunferencial interno, de tal forma que sus componentes horizontales se anulan y las verticales se suman creando la aparición de las dos reacciones tensionales que deben ser soportadas por la pared de la tubería. En la parte derecha de la figura se aísla el diferencial de fuerza  $dF$  que actúa sobre un diferencial de superficie que tiene como primer lado la unidad y

como segunda magnitud el arco que subtiende el ángulo diferencial  $d\alpha$ . La tubería considerada dispone como siempre de un radio  $R$  y un espesor  $e$ .

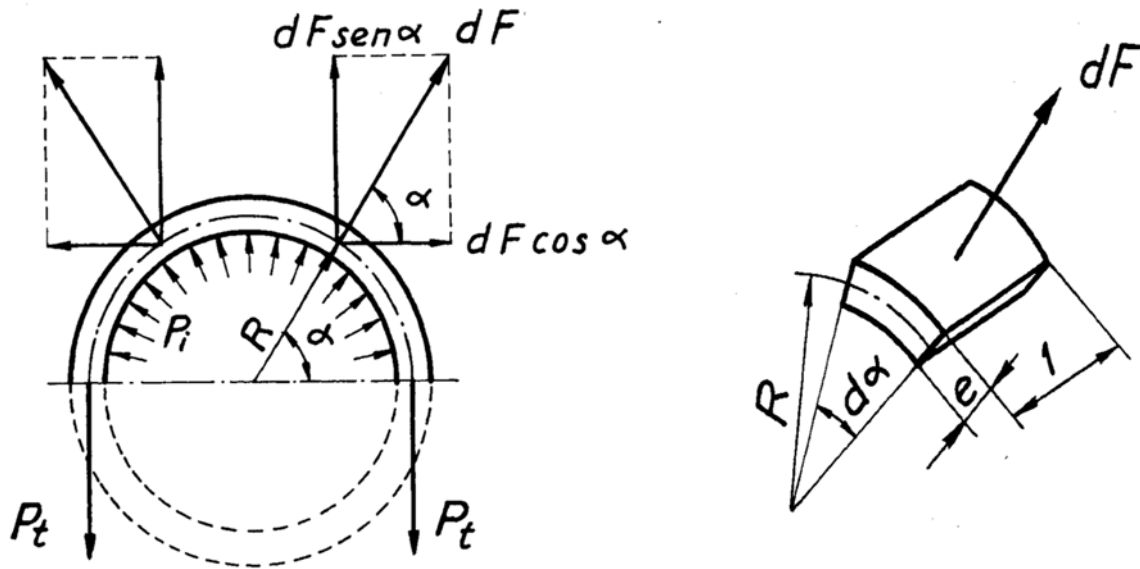


Figura 5.2. Fuerzas actuantes sobre las paredes del conducto. Fuente: Tuberías. José María Mayol Mallorquí.

Debido a la presión interna del líquido denominada  $P_i$  se crean en las paredes de la tubería tensiones circunferenciales (cercos de los toneles).

1.- Para el diferencial de perímetro se cumple siempre que según el dibujo anterior.

- Arco = Angulo • Radio.
- Diferencial de arco perimetral = Diferencial de Ángulo • Radio.
- Diferencial de perímetro =  $d\alpha \cdot R_{\text{medio}}$

En este desarrollo se desprecia por residual la variación que sufre el arco a lo largo del espesor de la conducción introduciendo un término lineal a través del radio medio que corresponde al radio situado a mitad de espesor de la tubería.

2.- El diferencial de superficie es el diferencial de arco, (coincidente con el diferencial de perímetro), multiplicado por la longitud que hemos adoptado por simplificación como la unidad.

- Diferencial de Superficie =  $d\alpha \cdot R_{\text{medio}} \cdot 1 = R_{\text{medio}} \cdot d\alpha$

3.- Respecto del diferencial de fuerza sobre el diferencial de superficie sabemos que la presión, por definición, se expresa como una fuerza dividida por una superficie, de donde si queremos aislar la fuerza esta será el producto de la presión por la superficie sobre la que actúa. Sobre el diferencial de superficie se produce a una presión constante  $P_i$  que da lugar a un diferencial de fuerza



▪ Diferencial de fuerza =  $P_i \cdot$  Diferencial de superficie  $dF = P_i \cdot R_{medio} \cdot d\alpha$

Esta fuerza diferencial es radial, pasando su línea de acción por el centro de la sección y perpendicular a la pared de la superficie. Descomponiendo dicha Fuerza diferencial  $dF$  en sus componentes horizontal y vertical queda:

▪ Componente horizontal  $dF \cdot \cos(\alpha) = P_i \cdot R_{medio} \cdot d\alpha \cdot \cos(\alpha)$   
 ▪ Componente vertical  $dF \cdot \sin(\alpha) = P_i \cdot R_{medio} \cdot d\alpha \cdot \sin(\alpha)$

Según la figura vemos que las componentes horizontales se anulan, pues para cada proyección horizontal de la derecha en función del ángulo  $\alpha$  se encuentra su opuesta simétrica respecto del eje vertical para el valor:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Los componentes verticales de las infinitas presiones  $P_i$  actuando cada una sobre su diferencial de superficie se suman dando lugar a las tensiones  $\mathbf{P}_{totales}$  que son fuerzas de tracción que actúan sobre el plano longitudinal de corte de la sección de espesor  $e$  (espesor de la tubería) y longitud 1 (porque así lo hemos acordado). Para poder hallar las fuerzas  $\mathbf{P}_t$  de la figura 5.2 integramos (sumamos) los infinitos diferenciales a lo largo del semiperímetro superior

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} P_i \cdot R_{medio} \cdot d\alpha \cdot \sin(\alpha) = P_i \cdot R_{medio} [-\cos(\alpha)]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}$$

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} P_i \cdot R_{medio} \cdot d\alpha \cdot \sin(\alpha) = P_i \cdot R_{medio} (-1) [\cos(\pi) - \cos(0)]$$

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} P_i \cdot R_{medio} \cdot d\alpha \cdot \sin(\alpha) = P_i \cdot R_{medio} (-1) [(-1) - (1)] = P_i \cdot R_{medio} \cdot 2$$

La Fuerza Total  $\mathbf{P}_t$  ejercida por la presión interna es igual al producto  $2 \cdot P_i \cdot R_{medio}$  por lo que igualando fuerzas queda:

$$P_i \cdot R_{medio} \cdot 2 = 2 \cdot P_t \qquad P_t = P_i \cdot R_{medio}$$

La fuerza  $P_t$  actúa sobre la superficie de corte longitudinal de la semisección transversal, por lo que la fuerza a la que se ve sometida la pared es:

Tensión  $\cdot$  Superficie =  $P_i \cdot R_{medio}$   $\sigma \cdot S = P_i \cdot R_{medio}$   $\sigma \cdot (e \cdot 1) = P_i \cdot R_{medio}$

Pero  $R_{medio}$  equivale al Diámetro medio dividido entre dos, quedando:  $\sigma \cdot e = (1/2) \cdot P_i \cdot D_{medio}$   
 de donde se obtiene la tensión radial a la que se ve sometida la pared de la tubería debido a la presión interna del agua:

$$\sigma = P_i \cdot \left( \frac{D_{medio}}{2 \cdot e} \right) \qquad [5.21]$$

Expresión en que tanto el diámetro medio,  $D_{\text{Medio}}$  como el espesor  $e$  son parámetros geométricos de la tubería. Es más sencilla la medición del diámetro exterior de una tubería que su diámetro interior por lo que nos es favorable establecer su equivalencia.

Sabemos que:  $D_{\text{exterior}} = D_{\text{interior}} + 2 \cdot e$        $D_{\text{Medio}} = D_{\text{interior}} + e$   
 De donde:  $D_{\text{exterior}} = D_{\text{Medio}} - e + 2 \cdot e$        $D_{\text{exterior}} = D_{\text{Medio}} + e$        $D_{\text{Medio}} = D_{\text{exterior}} - e$

Substituyendo en la fórmula de la tensión  $\sigma$  queda:

$$\sigma = P_i \cdot \left( \frac{D_{\text{exterior}} - \text{espesor}}{2 \cdot \text{espesor}} \right) \quad [5.22]$$

A esta tensión se le suele denominar  $\sigma_0$  y nos proporciona la tensión de tracción que sufre la pared de una tubería perpendicularmente a un plano que contenga el eje longitudinal en la conducción. A pesar de que no son unidades del sistema internacional, históricamente las tensiones  $\sigma$  y las presiones  $P_i$  se suelen expresar por comodidad en kilopondios/cm<sup>2</sup>, tanto el Diámetro Exterior ( $D_{\text{exterior}}$ ) como el espesor de la tubería ( $e$ ) deben introducirse en la misma unidad de longitud que suelen ser milímetros, que aunque no coincidan con los centímetros de las tensiones, al ser la fórmula un cociente, se cancelan sin alterar la homogeneidad dimensional de la fórmula general hallada.

De forma implícita para mantener la validez de esta fórmula se están asumiendo ciertas hipótesis:

1º). Que la distribución de tensiones es lineal en todo el espesor de la pared, variando desde el valor adoptado por la presión  $P_i$  en su cara interior (por hipótesis) hasta anularse en su cara exterior. De ahí que adoptemos el diámetro medio y no el interior, aunque no reviste excesiva trascendencia.

2º). Que la relación entre la medida del diámetro de tubería y la del espesor de la tubería  $e$  se sitúa al menos entre 10 y 20, es decir el diámetro  $D$  se enmarca en un intervalo comprendido entre diez y 20 veces el espesor de la tubería para poder asumir la primera hipótesis y enfocar el problema como flujo en presión en tubería de pared delgada. Las tuberías cuya geometría no cumple esta premisa sufren variación de la tensión  $\sigma_0$  cuyo comportamiento no es lineal en el espesor de la pared siendo su cálculo algo más complejo.

En lo que sigue denotaremos por la letra  $D$ , el Diámetro Medio sin hacer distinción alguna entre el Diámetro Interior y el Medio o el exterior, pues a efectos prácticos en cuestiones mecánicas derivadas de la elasticidad de la tubería no supone ninguna ventaja añadida debida a su escasa repercusión numérica. Tampoco marcaremos diferencia entre la presión del líquido  $P$  y la presión interior que se ejerce sobre las paredes internas de la tubería  $P_i$  puesto que son el mismo parámetro.

La fórmula de la tensión radial soportada por la pared de la tubería debido a la existencia de la carga P del agua resulta entonces:

$$\sigma = P \cdot \left(\frac{D}{2 \cdot e}\right) \quad P = \left(\frac{2 \cdot e}{D}\right) \cdot \sigma \quad dP = \left(\frac{2 \cdot e}{D}\right) \cdot d\sigma \quad [5.23]$$

Según la Ley de Hooke la tensión en el caso de un problema unidimensional donde las deformaciones o tensiones en direcciones perpendiculares a una dirección dada (longitudinal en nuestro caso) son irrelevantes se puede expresar como el producto del Módulo de Young del material que conforma la tubería (E) por su deformación unitaria  $\varepsilon$  en la misma dirección que, según hemos visto, se queda en el plano de la sección recta de la tubería.

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon \quad dP = \left(\frac{2 \cdot e}{D}\right) \cdot E \cdot d\varepsilon$$

Introducimos el valor de  $d\varepsilon$  a partir de su definición que por tratarse de una deformación unitaria viene referida a su valor total como

$$d\varepsilon = \frac{dD}{D} \quad dP = \left(\frac{2 \cdot e}{D}\right) \cdot E \cdot \left(\frac{dD}{D}\right) \quad [5.24]$$

Combinamos las dos ecuaciones que ligan las características físicas de la tubería substituyendo la una en la otra despejando el diferencial de Diámetro de la primera ecuación [5.20]

$$dA = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot D \cdot dD \quad dD = \left(\frac{2}{\pi \cdot D}\right) \cdot dA$$

Substituimos el diferencial de diámetro  $dD$  en la expresión del diferencial de Presión  $dP$  anteriormente hallada [5.24]

$$dP = \left(\frac{2 \cdot e}{D}\right) \cdot \frac{E}{D} \cdot \frac{2}{\pi \cdot D} \cdot dA \quad dP = \left(\frac{e \cdot E}{D}\right) \cdot \frac{4}{\pi \cdot D^2} \cdot dA$$

Atendiendo a la fórmula del Área de la sección y dividiendo toda la expresión por el diferencial de tiempo  $dt$  obtenemos

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \quad dP = \left(\frac{e \cdot E}{D}\right) \cdot \frac{dA}{A} \quad \frac{dA}{A} = \left(\frac{D}{e \cdot E}\right) \cdot dP \quad \frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dt} = \left(\frac{D}{e \cdot E}\right) \cdot \frac{dP}{dt}$$

Esta expresión nos permite recuperar la ecuación de continuidad [5.17] con parámetros conocidos de la ecuación [5.19]

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{D}{e \cdot E} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [5.25]$$

Reagrupando los términos con factor común  $dP/dt$  queda.

$$\left(\frac{1}{K} + \frac{D}{e \cdot E}\right) \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [5.26]$$

Tal y como se demuestra en el addendum número tres, la celeridad (**c**) de una onda de presión que viaja a través de un fluido circulando por una tubería viene dada por la expresión de Joukowski - Korteweg que adopta para el caso particular del Golpe de Ariete la siguiente expresión suponiendo que el conducto no está arriostrado longitudinalmente:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot D}{E \cdot e}}}$$

- **c** es la celeridad de la onda de presión en el medio agua-tubería.
- **K** módulo de compresibilidad volumétrico o coeficiente volumétrico de elasticidad del fluido.
- **ρ** se refiere a la densidad del fluido
- **D** es el diámetro interno de la tubería, el diámetro medio o el exterior indistintamente.
- **E** es el módulo de elasticidad lineal del material que forma la tubería.
- **e** representa el espesor de la tubería por la que circula el fluido.

Vamos a establecer algunas modificaciones en la expresión de **c** para simplificar la ecuación diferencial [5.26] que resulta del principio de continuidad anterior. Empezamos por elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación y dividimos por **K** el numerador y denominador del segundo miembro

$$c^2 = \frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \frac{K \cdot D}{E \cdot e}} \qquad c^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{D}{E \cdot e}}$$

Reordenando obtenemos el coeficiente deseado que insertamos en la ecuación de continuidad [5.26]

$$\frac{1}{K} + \frac{D}{E \cdot e} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{c^2} \qquad \left( \frac{1}{\rho \cdot c^2} \right) \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad [5.27]$$

El uso y costumbre, así como la comodidad han propiciado que se suela trabajar con la altura piezométrica **H**, también llamada carga hidráulica medida en metros de columna de agua, en vez de con presiones debido a la dificultad que supone su medición exacta. La energía total calculada en un punto cualquiera del conducto es siempre la suma de tres términos energéticos según la ecuación de Bernoulli:

- 1 • La energía potencial
- 2 • La energía de presión
- 3 • la energía cinética.

Estos tres términos medidos en altura de columna de agua dan lugar a tres alturas, que son:

- 1 ■ La altura geométrica Z o cota sobre un plano de referencia medida en metros. Esta energía se debe única y exclusivamente a la posición que ocupa el fluido respecto del plano de referencia propiciada por la gravedad, esto tiene su equivalencia en la física clásica en la llamada energía potencial.
- 2 ■ La altura debida a la presión P a la que se ve sometido el líquido en el interior de la tubería. Físicamente representa la altura de la columna del correspondiente líquido capaz de originar únicamente por su propio peso la presión P expresada en metros de columna del líquido correspondiente.
- 3 ■ La altura cinética debida a la velocidad que lleva el líquido en la conducción, y representa la altura desde la cual el fluido en caída libre alcanzaría la velocidad final V respondiendo a la expresión  $V^2/(2g)$ . Representa la energía cinética asociada a la velocidad de trasiego.

La altura piezométrica es una energía que resulta ser suma de las dos primeras componentes anteriores.

Las dos figuras siguientes ilustran perfectamente lo comentado.

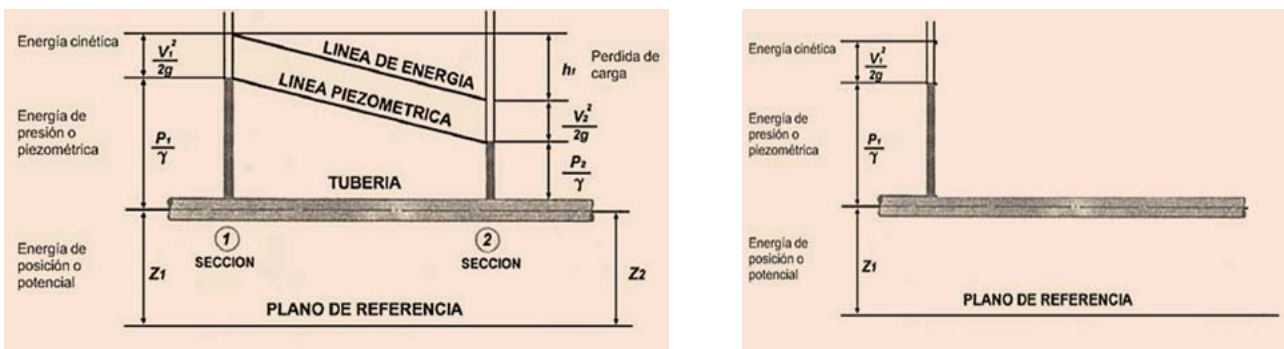


Figura 5.3. Componentes de la energía total en un fluido confinado. Fuente: Tuberías. <https://www.iagua.es/blogs/miguel-angel-monge-redondo/fbh3-energia-agua>.

En base a lo anterior la altura piezométrica nos viene dada por la siguiente expresión

$$H = z + \frac{P}{\gamma} \qquad P = \gamma \cdot (H - z) \qquad \frac{dP}{dt} = \gamma \cdot \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right) \qquad [5.28]$$

La relación  $dx/dt$  es la velocidad del fluido y el cociente diferencial  $dz/dx$  es el seno del ángulo que forma la tubería con respecto a la horizontal. Al considerar que la tubería desciende conforme se aleja del depósito el seno antes comentado será negativo. Denominamos alfa  $\alpha$  el ángulo comentado. Queda:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma \cdot \left( \frac{dH}{dt} - (-\text{sena}) \cdot V \right) \qquad \frac{dP}{dt} = \gamma \cdot \left( \frac{dH}{dt} + V \cdot \text{sena} \right)$$

Volviendo a la ecuación de continuidad [5.27] e incorporándole este último resultado

$$\left(\frac{1}{\rho \cdot c^2}\right) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{dH}{dt} + V \cdot \text{sen}\alpha\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [5.29]$$

Solo nos queda tener en cuenta la definición de peso específico

$$\gamma = \rho \cdot g \quad \left(\frac{g}{c^2}\right) \cdot \frac{dH}{dt} + \left(\frac{g}{c^2}\right) \cdot V \cdot \text{sen}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Recordamos que la derivada total es la suma de la derivada local y de la derivada convectiva.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \quad [5.30]$$

Substituyendo [5.30] al mismo tiempo que multiplicamos toda la ecuación por  $c^2$  y simultáneamente la dividimos por  $g$

$$\left(\frac{g}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{g}{c^2}\right) \cdot V \cdot \text{sen}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + V \cdot \text{sen}\alpha + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0 \quad [5.31]$$

Hemos obtenido la primera de las dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales básicas que gobiernan el fenómeno del Golpe de Ariete en base a la aplicación del principio de conservación de la masa (principio de continuidad).

## ■ CAPÍTULO 6.

# ECUACIÓN CONSTITUTIVA DERIVADA DE LA APLICACIÓN DIRECTA DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La segunda ecuación diferencial básica por la que se rige el fenómeno del Golpe de Ariete se desprende del principio de conservación de la cantidad de movimiento y se establece en base al equilibrio de fuerzas actuantes sobre un Volumen de Control, de forma similar a como lo hemos realizado para la primera ecuación [5.31].

El Volumen de Control asumido es el que se describe en la figura 6.1 adjunta:

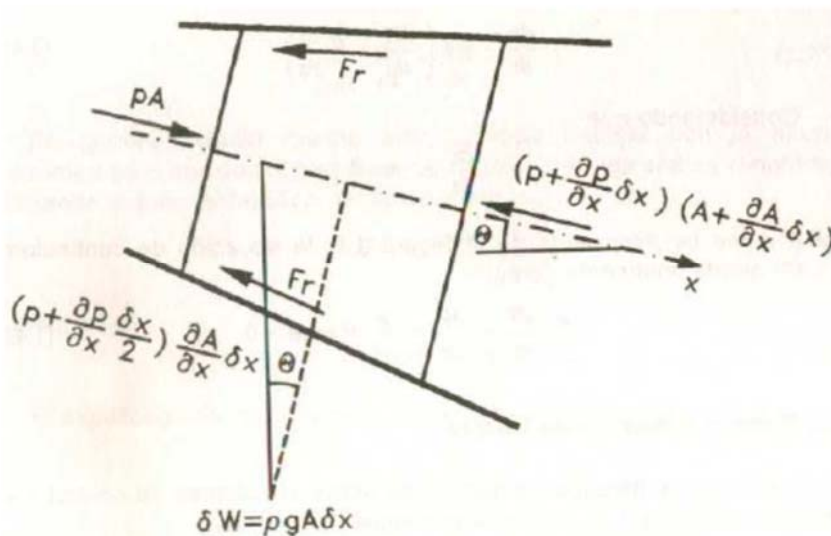


Figura 6.1. Fuente: Streeter, V.L.; Wylie, E.B., (1967), Hydraulic Transients. Mc Graw Hill Book Co. Inc. New York.

En este nuevo Volumen de Control se aprecian dos superficies sensiblemente paralelas al flujo líquido. La primera queda a la izquierda en el dibujo y consta de un Área **A** sobre la que se reparte actuando una presión denotada por **P**. A esta cara la llamaremos anterior siguiendo lógicamente el sentido del flujo que en este caso suponemos que discurre de izquierda (aguas arriba) hacia la derecha (aguas abajo). Sobre la cara posterior que viene grafada a la derecha del esquema

anterior actúa también una presión, pero distinta de la que impera en la cara anterior, lógicamente al cruzar el flujo, el volumen de control, se van alterando las condiciones a las que se ve sometido. La presión  $P$  imperante en la cara anterior evoluciona hasta el valor:

$$P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x$$

De la misma forma, aunque no es lo habitual, debemos contemplar una variación en el área de la sección recta de la tubería asumiendo que en la cara posterior (aguas abajo) se dispone de un Área:

$$A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x$$

Como siempre al problema planteado se le asocian unas hipótesis tendentes a su simplificación, haciendo posible su resolución numérica. En este caso concreto asumimos las siguientes hipótesis:

1º). El flujo no es turbulento, sino que predomina el régimen laminar o estacionario, esto nos permite abordar el problema del Golpe Ariete contando con variables no vectoriales, contemplando el problema desde la óptica de la unidimensionalidad.

2º). El rozamiento entre fluido y conducción que hace las veces de amortiguador del fenómeno oscilatorio se supone independiente del régimen del flujo. Este supuesto no es cierto, puesto que el coeficiente que representa la fricción denotado como  $f$  es variable según el sentido del flujo y el tipo de sección de la tubería, alcanzando su mayor variación en los tramos más largos y con mayor rectitud. Este aspecto, aunque cierto no reviste mayor importancia porque no actúa directamente en el momento de producirse el Golpe de Ariete, sino que ofrece su mayor desarrollo y oposición a lo largo de todo el proceso y como la mayor sobrepresión se da al inicio del Golpe de Ariete la fricción no dispone del tiempo suficiente para movilizarse y representar un sesgo importante en la magnitud inicial del fenómeno.

3º). La tercera consideración se refiere a las fuerzas involucradas que tenemos en cuenta a la hora de aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento. Este aspecto, aunque no se le preste excesivo interés a lo largo y ancho de la literatura científica, reviste sin embargo un interés primordial e incluso definitorio de la posibilidad de alcanzar una solución viable al problema. De considerar esfuerzos derivados de la variación de la aceleración de la gravedad, del efecto de **Coriolis**, de los vórtices de rotacionales internos y de las hipótesis de accionamiento de esfuerzos tangenciales respecto de la capa límite de interfaz liquido tubería, etc. harían inviable por completo alcanzar siquiera un esbozo de la solución teórica del problema. Para simplificar las cosas y no hacer del agua, no solo un fluido incompresible sino también incomprensible, únicamente contaremos con la presencia y efecto de varias fuerzas, que de hecho son las que mayor calado tienen, en el desarrollo teórico y además están perfectamente estudiadas y acotadas.



Las fuerzas actuantes elegidas se pueden clasificar en dos tipos fundamentales que son por orden de importancia:

**1.- Fuerzas de carácter superficial.** En esta categoría se debe considerar en primer lugar la presión que afecta al Volumen de Control, tanto en su sección recta anterior como en su cara posterior y por supuesto a cualquier punto de su interior. También entra a formar parte de esta clase de fuerzas el rozamiento, que se ejerce principalmente a través de la envoltura lateral del Volumen de Control, despreciando el rozamiento líquido-líquido establecido a través de las caras de dicho Volumen de Control, debido a la baja viscosidad que presenta el agua como tal fluido.

**2.- Fuerzas de carácter volumétrico.** Como tal, solo prestaremos cierta importancia al peso del elemento Volumen de Control. Su relevancia es más didáctica que necesaria, pues las elevadas presiones involucradas se ven muy poco corregidas por la acción gravitatoria, salvo en instalaciones de muy larga longitud y fuerte pendiente de la tubería.

Estudiaremos las fuerzas debidas a la presión en primer lugar, sabido es que, siendo la definición de presión el cociente entre una fuerza y la superficie sobre la que se aplica, deducimos que cualquier fuerza puede expresarse como el producto de la presión derivada de su aplicación por el área involucrada. Sobre la cara anterior del Volumen de Control cuya Área hemos denominado **A** actúa una presión externa determinada por el valor de la presión **P**, con lo que la fuerza soportada por la cara anterior del Volumen de Control es:

$$\text{Fuerza Sobre Cara Anterior} = P \cdot A \quad [6.1]$$

Sobre la cara posterior actúa de forma similar otra fuerza distinta de la anterior, porque tanto el valor de la presión **P** como el Área **A** han sufrido variaciones, pasando a valer:

$$P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \qquad A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x$$

El producto de ambas expresiones nos proporciona la fuerza aplicada en la cara posterior que por ser contraria al flujo deberá tomarse con signo negativo a la hora de introducirla en la expresión principal:

$$\text{Fuerza sobre Cara Posterior} = \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right) \quad [6.2]$$

Desarrollando el producto y eliminando los diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} F_{SCP} &= P \cdot A + P \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x + A \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x^2 \\ F_{SCP} &= P \cdot A + P \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x + A \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \end{aligned} \quad [6.3]$$

Nos falta introducir la fuerza debida a la presión interna a la que se ve sometido el líquido contenido en el Volumen de Control. La presión interior al volumen de control realmente es una

incógnita, por lo que se acepta una aproximación lineal de la misma, añadiendo a la Presión que afecta a la cara anterior un término que sitúa el valor de la presión en mitad del volumen de control. Se puede entender como la media entre la presión ejercida sobre la cara anterior y la cara posterior, recordando que esta última es negativa por ir en contra del sentido del flujo, pero consideramos aquí únicamente su módulo:

$$\text{Presión Media} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[ P + \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \right) \right] = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[ 2P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \right] = P + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x$$

El producto de la Presión Media por la variación sufrida por el Área nos dará la fuerza asociada a la presión interior soportada por el agua encerrada en el Volumen de Control:

$$\text{Fuerza} = \text{Presión Media} \cdot \left( \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right) = \left( P + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \right) \cdot \left( \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right)$$

Desarrollando el producto tenemos:

$$\text{Fuerza} = P \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x$$

Igualmente despreciamos los infinitésimos de segundo orden, quedando:

$$\text{Fuerza} = P \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \quad [6.4]$$

Nos queda sumar, los tres términos de presión contemplando su signo encontrando la resultante de presiones que actúa sobre el Volumen de Control.

*Fuerza total = Fuerza sobre cara anterior - Fuerza sobre cara posterior + Fuerza de la presión interna.*

$$\text{Fuerza Total} = (P \cdot A) - \left( P \cdot A + P \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x + A \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \right) + \left( P \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right)$$

Operando:

$$\text{Fuerza Total} = -A \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x \quad [6.5]$$

Hemos obtenido la fuerza debida a las presiones sufridas por el líquido encerrado en el Volumen de Control.

La fuerza que ejerce la **gravedad** sobre el líquido contenido en el volumen de control es por definición el peso de dicho líquido cuya definición es el producto de la masa encerrada por la aceleración de la gravedad (g).

$$\text{Peso} = \text{Masa} \cdot g$$

$$\rho = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}}$$

$$\text{Masa} = \rho \cdot \text{Volumen}$$

El volumen de forma directa es el producto de la longitud  $\delta x$  por el área involucrada. El área la obtenemos como media de las secciones anterior y posterior

$$\text{Área Media} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[ A + \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right) \right] = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[ 2A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right] = A + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \quad [6.6]$$

Formula a partir de la cual obtenemos el volumen del elemento de Control:

$$\text{Volumen} = \text{Área Media} \cdot \delta x = \left( A + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right) \delta x = A \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x^2 \quad [6.7]$$

Despreciando de nuevo los infinitésimos de segundo orden en [6.7]:

$$\text{Volumen} = A \cdot \delta x \qquad \text{Masa} = \rho \cdot A \cdot \delta x \qquad \text{Peso} = \rho \cdot A \cdot \delta x \cdot g \quad [6.8]$$

Como hemos considerado la hipótesis de un flujo unidireccional proyectamos el peso del elemento de volumen sobre la dirección del eje del flujo. El diferencial de peso en la dirección del flujo queda:

$$\delta \text{peso} = \rho \cdot g \cdot A \cdot \text{sen} \theta \cdot \delta x \quad [6.9]$$

Para calcular la fuerza de rozamiento que se ejerce en contra del flujo sobre la superficie exterior del volumen de control recurrimos a la expresión de Darcy-Weisbach, que nos proporciona el rozamiento que experimenta el fluido en contacto con las paredes internas de la tubería por unidad de área del ducto en metros de columna de agua:

$$h = f \cdot \left( \frac{L}{D} \right) \cdot \left( \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) \quad [6.10]$$

- h es el rozamiento sufrido entre las secciones anterior y posterior, por lo que en nuestro caso la longitud L a considerar es  $\delta x$ .
- f es el coeficiente de fricción que varía con la rugosidad relativa de la tubería que suponemos constante en cada sistema hidráulico concreto.

La fuerza diferencial debida al rozamiento lateral para todo el volumen de control en el sistema internacional se halla multiplicando el correspondiente valor en metros de columna de agua por el peso específico y por el área:

$$\delta F_{\text{rozamiento}} = \gamma \cdot A \cdot h = \gamma \cdot A \cdot f \cdot \left( \frac{1}{D} \right) \cdot \left( \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) \cdot \delta x$$

El rozamiento en cualquier circunstancia se opone al movimiento y para que aflore el signo de la velocidad descomponemos su cuadrado  $V^2$  en dos términos, expresándolo como  $V \cdot |V|$  donde  $|V|$  siempre es positivo pero V cumple con el objetivo de mantener el signo adecuado a cada fase del desarrollo del fenómeno. Si recordamos que el peso específico se puede expresar como el producto de la densidad por la aceleración de la gravedad tenemos:

$$\gamma = \rho \cdot g \qquad \delta F_{\text{rozamiento}} = \rho \cdot A \cdot f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} \cdot \delta x \quad [6.11]$$

Para establecer el equilibrio de fuerzas a lo largo del sentido que marca el flujo, procedemos a la suma de todas las fuerzas anteriores y, siguiendo el segundo principio de Newton la igualaremos al producto de la masa por la aceleración.

La suma de fuerzas halladas es según [6.5], [6.9] y [6.11]:

$$\sum F = \text{Fuerza total} + \delta F_{\text{rozamiento}} + \delta P_{\text{peso}}$$

$$\sum F = -A \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x - \rho \cdot A \cdot f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} \cdot \delta x + \rho \cdot g \cdot A \cdot \text{sen} \theta \cdot \delta x \quad [6.12]$$

El sumatorio anterior lo igualamos a la masa por la aceleración:

$$\text{Masa} \cdot \text{Aceleración} = \rho \cdot (A \cdot \delta x) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) \quad [6.13]$$

Iguando ambas expresiones [6.12] y [6.13]:

$$-A \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta x - \rho \cdot A \cdot f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} \cdot \delta x + \rho \cdot g \cdot A \cdot \text{sen} \theta \cdot \delta x = \rho \cdot (A \cdot \delta x) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right)$$

Para simplificar podemos obviar el producto  $\rho \cdot A \cdot \delta x$  que nunca es nulo quedándonos con:

$$-\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} + g \cdot \text{sen} \theta = \frac{dV}{dt} \quad \left(\frac{dV}{dt}\right) + f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} + \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - g \cdot \text{sen} \theta = 0 \quad [6.14]$$

Tal y como se procedió anteriormente, partimos de la ecuación de la altura piezométrica, aislamos el término de presión y derivando respecto de x queda:

$$H = z + \frac{P}{\gamma} \quad (H - z) \cdot \gamma = P \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \gamma \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Dividiendo toda la expresión por la densidad:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad [6.15]$$

El cociente diferencia parcial  $\partial z / \partial x$  corresponde al seno del ángulo que forma la tubería con la horizontal, pero con signo negativo, puesto que conforme crece x, decrece la cota de la conducción.

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - (-\text{sen} \theta)\right) \quad \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot \text{sen} \theta \quad \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - g \cdot \text{sen} \theta = g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

Substituyendo en [6.14] queda:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) + f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} + g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0 \quad [6.17]$$

Para quedarnos con una ecuación en la que solo aparezcan términos en derivadas parciales de nuevo, establecemos la equivalencia entre la derivada total y la suma de la derivada local y la derivada convectiva que se puede justificar teniendo en cuenta que la velocidad es función de dos variables independientes que son la abscisa x y el tiempo t.

Si aplicamos a la velocidad la definición de diferencial de una función de varias variables tenemos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

El término  $\partial x/\partial t$  representa una variación de espacio respecto del tiempo que por definición es la velocidad. Dividiendo toda la expresión anterior por el diferencial de la variable  $t$   $dt$  queda:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} V + \frac{\partial V}{\partial t}$$

En el segundo miembro de esta ecuación el primer término es el convectivo y el segundo es el denominado local. Expresión está última que insertamos en la anterior ecuación [6.17]:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} + g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0 \qquad [6.18]$$

Esta es la segunda ecuación diferencial que gobierna y controla el fenómeno del Golpe de Ariete.

A modo de resumen recogemos el sistema de dos ecuaciones [5.31] y [6.18] de forma conjunta renombrando ambas para su posterior referencia:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) + V \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{c^2}{g}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + V \operatorname{sen} \theta = 0 \qquad [6.19]$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + V \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + f \frac{V \cdot |V|}{2D} + g \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0 \qquad [6.20]$$

A las que debemos añadir las condiciones de contorno correspondientes.



## CAPÍTULO 7.

# TEORÍAS ASUMIENDO SIMPLIFICACIONES EN EL SISTEMA. TEORÍA DE LA COLUMNA RÍGIDA.

Se dispone de dos teorías que plantean el fenómeno del Golpe de Ariete y se diferencian en las hipótesis simplificadoras asumidas por cada una de ellas. La primera es la Teoría de la Columna Rígida, que trata de hallar la sobrepresión debida al Golpe de Ariete en su versión más sencilla. La segunda es la Teoría de la Columna Elástica de agua que, además de los condicionantes propios de la Teoría de la Columna Rígida, tiene en cuenta tres factores importantes como son:

- La fricción desarrollada entre el agua y la tubería.
- La compresibilidad del agua.
- La elasticidad y consecuentemente deformación de la pared que conforma el ducto.

### 7.1 TEORÍA DE LA COLUMNA RÍGIDA DE AGUA

De entre los modelos de análisis del fenómeno del Golpe de Ariete, la Teoría de la Columna Rígida es la que asume mayores simplificaciones despreciando los términos menores frente a los de mayor importancia a la hora de caracterizar el fenómeno. Las simplificaciones llevadas a cabo por la teoría de la columna rígida son ocho y más concretamente se enumeran de la siguiente forma:

#### Primera hipótesis simplificativa.

**1.-** El líquido en cuyo seno se desarrolla el fenómeno físico de Golpe de Ariete es agua, y se considera incompresible, es decir que, ante cualquier incremento de presión a que se vea sometida, por muy fuerte que este sea, no altera su volumen permaneciendo constante tanto su densidad como su peso específico. Esta hipótesis conlleva de forma implícita el que la aceleración de la gravedad, denotada por la letra  $g$ , se mantenga constante, cosa que no se cumple en la realidad pues esta varía tanto con la altitud de forma parabólica como con la latitud debido al efecto Coriolis de arrastre relativo tal y como se describe en un addendum al final del trabajo.

#### Segunda hipótesis simplificativa.

**2.-** La tubería está conformada por un material infinitamente rígido por lo que cualquier sobrepresión que le transmita el agua no le produce deformación alguna, ni intercambio energético derivado.

### Tercera hipótesis simplificativa.

**3.-** Supondremos que la tubería está totalmente llena en cualquier momento a lo largo del desarrollo del fenómeno del Golpe de Ariete. Esto implica no tener que entrar a considerar procesos dinámicos complejos como la cavitación, la rotura de vena líquida o el cambio de régimen hidráulico bajo el que circula el agua.

### Cuarta hipótesis simplificativa.

**4.-** El flujo del agua por el interior del conducto produce grandes pérdidas de energía en forma de rozamiento agua-tubería, que en módulo son proporcionales a la energía cinética del agua en movimiento y que evolucionan conforme al cuadrado de la velocidad alcanzada por el agua a través del conducto ( $\alpha \cdot V^2/2 \cdot g$ ). Prescindiremos en esta primera aproximación de dichas pérdidas por fricción denominadas pérdidas de carga por conducción.

### Quinta hipótesis simplificativa.

**5.-** Cuando el agua discurre por una conducción asumimos que cada sección posee una velocidad media concreta, cosa que no es cierta, pues las partículas de agua en contacto con la tubería no fluyen (teoría de la capa límite) mientras que las que circulan próximas al eje del conducto poseen una velocidad mayor que la media de toda la sección. El perfil de velocidades es parabólico con su máximo valor en el eje de tubería y nulo en las paredes del tubo. Nosotros aquí asumiremos que la totalidad de las partículas de agua que atraviesan una misma sección poseen la misma velocidad y que esta es la media entre las velocidades reales en dicha sección.

Dado que el volumen de un paraboloide (distribución real de la velocidad) es la mitad que la del cilindro circunscrito (velocidad media) podemos afirmar que la velocidad máxima que se da en el eje de la tubería es del orden del doble de la velocidad media considerada en toda la sección.

### Sexta hipótesis simplificativa.

**6.-** Al igual que sucede con la velocidad vamos a considerar que en una sección todas las partículas de agua se ven sometidas a la misma presión, esto sería cierto en un fluido perfecto no confinado.

### Séptima hipótesis simplificativa.

**7.-** Supondremos asimismo que, el parámetro que mayor variación brusca experimenta es la presión, puesto que al final las consecuencias del Golpe de Ariete se traducen en una sobrepresión de magnitud suficientemente importante como para arruinar el sistema físico. Lo anterior, no significa que la variación de velocidad sea despreciable, sino que comparada con el incremento de presión no ocasiona errores de cálculo significativos en cuanto al análisis del fenómeno del Golpe de Ariete.

### Octava hipótesis simplificativa.

**8.-** Supondremos que no hay variación de diámetro de la tubería en todo el tramo bajo estudio para no complejizar innecesariamente el desarrollo de las ecuaciones resultantes. También, por otro lado, como partimos de una tubería alimentada por un depósito, suponemos que la superficie



de lámina de agua es mucho mayor que el diámetro de la tubería y entonces no se produce variación en su nivel de llenado. Esto mantiene constantes los términos de energía por cota (gravedad) y presión hidrostática, simplificando el problema substancialmente.

Resumiendo lo anterior podemos afirmar que la teoría de la columna rígida de agua analiza el fenómeno del Golpe de Ariete en su aspecto más sencillo a saber:

- Desprecia el rozamiento (fricción) entre el agua de la tubería.
- Asume que tanto el agua como la tubería tienen un comportamiento infinitamente rígido.

Partimos de la siguiente figura:

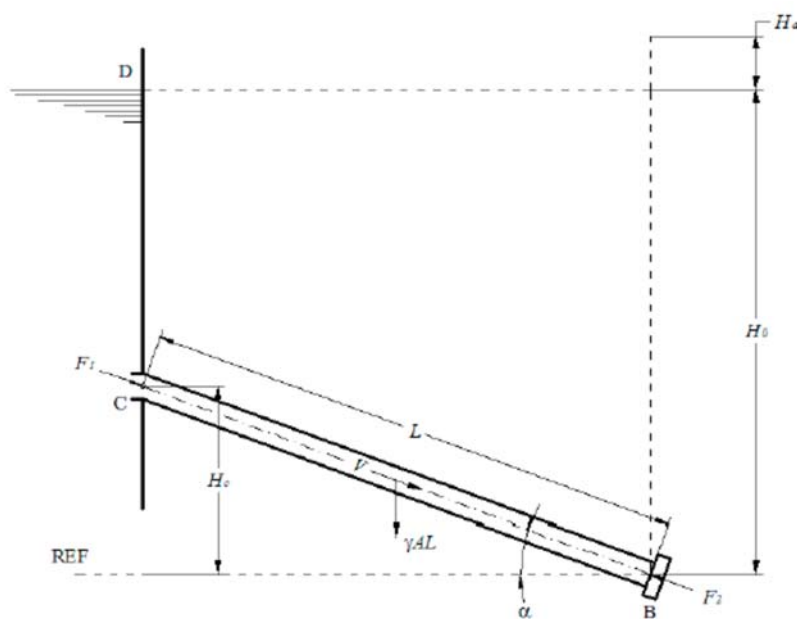


figura 7.1: equilibrio de fuerzas para la teoría de columna rígida de agua. fuente: "Análisis del golpe de ariete en tuberías de presión de centrales hidroeléctricas" de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

En ella se pueden apreciar varios parámetros que son:

- $V$  es la velocidad del agua a lo largo del conducto paralela al eje de la tubería y antes de accionar la válvula en sentido desde el punto denominado **C** hacia el punto **B** donde se encuentra la válvula.
- $L$  es la longitud de la tubería. Es el tramo que discurre entre el depósito y la válvula objeto de estudio. Distancia entre el punto **C** y **B**.
- $\gamma$  representa el peso específico del agua. Se define como el peso de la unidad de volumen de líquido y tiene unidades de fuerza/volumen, siendo la fuerza involucrada la producida por la gravedad.

- $\alpha$  es el ángulo que forma la tubería con la horizontal medido en sentido dextrógiro quedando el punto **B** por debajo del punto **C** para partir de una situación estable conocida.

- $F_1$  y  $F_2$  son fuerzas que aparecen sobre la superficie de la sección recta en el punto **C** y en el punto **B** fruto de la presión sufrida. Esto no nos debe extrañar pues, en principio, como la tubería tiene pendiente positiva el agua debido a la fuerza de la gravedad se acelera continuamente puesto que hemos supuesto que no existe fricción entre el agua y las paredes del conducto. Si existiese rozamiento se alcanzaría un estado de equilibrio en el que a fuerza de rozamiento (que aumenta con el cuadrado de la velocidad) compensa la aceleración por peso, pero partimos de la hipótesis de rozamiento nulo.

Para poder estudiar entonces el sistema como estático introducimos las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  que son la resultante de todas las fuerzas externas que hacen que el sistema esté en equilibrio, cosa que ocurre en la realidad. Estamos aislando un volumen de control que incluye todo el líquido que se encuentra en la tubería desde que está abandonado el depósito (tanque, embalse, etc.) hasta el límite físico que marca inexorablemente la válvula. En régimen permanente y estable el volumen de control recibe la aplicación de fuerzas a través de su superficie. Hemos despreciado las fuerzas de fricción entre el líquido y las paredes del conducto, por lo que a través de la superficie envolvente perimetral no sufre la acción de ninguna fuerza. De todas formas, aunque no fuese así como vamos a plantear el equilibrio en la dirección del eje de la tubería, el área diferencial sería perpendicular a dicha dirección anulándose su proyección. Solamente nos quedarán las secciones rectas perpendiculares a la tubería en los puntos B y C. El volumen de control se desplaza conforme al tiempo a lo largo de la tubería y en un tiempo diferencial  $dt$  ha recorrido una distancia dada por  $dx = dL = V \cdot dt$ . Debido este desplazamiento diferencial las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  efectúan un trabajo que, por definición, es el producto de la fuerza por su respectivo desplazamiento.

- $H_0$  y  $H_c$  son las presiones que sufre el agua, en el punto **B** de la válvula ( $H_0$ ) y en el punto **C** de salida del depósito ( $H_c$ ) respectivamente contadas desde un plano de referencia horizontal que pasa por la intersección del eje de la tubería de la válvula. Es importante distinguir que se trata de presiones y no de alturas geométricas. Estas presiones se deben a que ambos puntos quedan por debajo del nivel de agua que tiene el depósito, luego sufren el peso de la columna de agua que va desde la rasante del nivel del depósito hasta la profundidad en que se encuentran ambos puntos que es  $H_0$  para el punto **B** y  $H_0 - H_c$  para el punto **C** respectivamente.

Sabemos que por el mero hecho de estar sumergido cualquier cuerpo sufre una presión por parte del líquido que lo rodea, que en caso de que el mencionado líquido sea agua se denomina presión hidrostática. La presión hidrostática viene dada en módulo por:  $P = \rho \cdot g \cdot h$

- $h$  es la profundidad a la que se encuentra sumergido el cuerpo (su centro de gravedad) por eso cuanto mayor es la profundidad mayor es la presión.

- $g$  representa la aceleración de la gravedad que supondremos constante y vale aproximadamente  $9.81$  metros/seg<sup>2</sup>, se suele redondear a  $10$  metros/segundo<sup>2</sup> sin riesgo de introducir errores relativos significativos.

•  $\rho$  es la densidad del líquido en el que se sumerge el cuerpo. La definición de densidad es la masa por unidad de volumen  $\rho = \text{masa}/\text{Volumen}$ . El peso específico es  $\gamma = \text{peso}/\text{Volumen}$ , eliminando el volumen entre las dos ecuaciones queda  $\rho = \mathbf{g} \cdot \rho$ , es decir, que el peso específico característico de cada líquido es unas diez veces mayor que su densidad. La fórmula de la presión hidrostática tomando la presión atmosférica como referencia queda como:

$$P = g \cdot \rho \cdot h = \gamma \cdot h \quad \text{en pascales} = \text{Nw/m}^2$$

Como el peso específico del agua es aproximadamente de una tonelada por cada metro cúbico, para realizar mediciones es más sencillo hablar de la presión ejercida por una columna de agua indicando su altura, es decir que en vez de hablar de pascales de presión nos referiremos a metros de columna de agua que es mucho más gráfico y práctico. Recordemos que cada 10,33 metros de columna de agua corresponden a una atmósfera de presión o bien a 1,033 kilopondios/centímetro<sup>2</sup> o también se puede expresar como 1,01.10<sup>5</sup> Pascales.

•  $H_a$  también es una presión expresada en metros de columna de agua (**m.c.a.**) como era de esperar, y corresponde a la sobrepresión, es decir el incremento de presión sufrido por el punto **B** en la compuerta debida al desarrollo del fenómeno de Golpe de Ariete.

Hechas las presentaciones de los principales participantes, pasamos a la deducción de las fórmulas que describen el comportamiento del Golpe de Ariete en el caso de la Teoría de la Columna Rígida de agua.

En cuanto se inicia el proceso de cierre de la válvula, al impedir parcialmente el paso del agua se produce sobre la compuerta una fuerza que actúa sobre todo nuestro volumen de control, que es el tramo de conducto objeto de estudio, puesto que la compuerta empuja el agua (y viceversa) creando una sobrepresión que es el Golpe de Ariete, consecuencia del cierre brusco (aunque parcial) de la válvula. En la válvula la presión se eleva hasta alcanzar la que tenía antes de iniciar el cierre más la correspondiente al cierre, es decir la presión en un punto B una vez iniciado la maniobra de cierre se equilibra con la suma de la Presión inicial y la presión correspondiente al Golpe de Ariete

$$P_B = H_0 + H_a \quad \text{metros de columna de agua}$$

Estas presiones están expresadas en metros de columna de agua, para operar con presiones de acuerdo al sistema internacional, es decir en pascales las tenemos que multiplicar por el peso específico del agua a ( $\gamma$ )

$$P_B = (H_0 + H_a) \cdot \gamma \quad \text{Pascales}$$

Siendo Fuerza = Presión • superficie, La fuerza que actúa en B sobre el volumen de control viene dada por:

$$F_2 = P_B \cdot A = (H_0 + H_a) \cdot \gamma \cdot A \quad [7.1.1]$$

De la misma forma, la fuerza externa que actúa en el punto C coincidente con la salida del depósito, se debe a la producida por estar dicho punto a una profundidad  $H_0 - H_c$  de la superficie

del depósito. Pasándolo a presiones convencionales (Pascuales) y multiplicando por la superficie sobre la que actúa, tenemos igualmente

$$F1 = (H_0 - Hc) \cdot \gamma \cdot A \quad [7.1.2]$$

Nos falta la expresión correspondiente al peso del agua contenida en la tubería. Hemos tomado como eje de proyección de todas las fuerzas, el eje del conducto y como sentido positivo el de avance desde C hacia B. El volumen del agua contenida en la tubería es:

$$\text{Volumen} = \text{Longitud} \cdot \text{Sección}$$

multiplicando dicho volumen por el peso específico, tenemos el peso del agua contenida en la tubería:

$$\text{Peso de la columna de agua} = \gamma \cdot L \cdot A$$

De esta fuerza vertical para el equilibrio de fuerzas sólo nos interesa su componente a lo largo del eje del conducto, que es:

$$\text{Peso de la columna de agua} = \gamma \cdot L \cdot A \cdot \text{seno}(\alpha) \quad [7.1.3]$$

Disponemos ahora de tres fuerzas [7.1.1], [7.1.2] y [7.1.3] que podemos sumar hallando su resultante algebraica. Tanto la  $F_1$  como la componente del peso de la ecuación [7.1.3] siguen el sentido de la corriente por lo que las consideramos positivas. No ocurre lo mismo con la fuerza  $F_2$  de la ecuación [7.1.1] que se opone al movimiento, por lo que la dotaremos de sentido negativo respecto del flujo del agua. Sumando algebraicamente tenemos:

$$\text{Fuerza} = F1 - F2 + \text{Peso Agua} = (H_0 - Hc) \cdot \gamma \cdot A - (H_0 + H_a) \cdot \gamma \cdot A + L \cdot \text{seno}(\alpha) \cdot \gamma \cdot A$$

La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración. Conocemos el primer miembro de esta ecuación. Respecto del segundo miembro podemos expresar la aceleración del agua en función de su velocidad como: Aceleración = derivada de la velocidad respecto del tiempo

$$a = dV/dt$$

La masa la extraemos de la definición de densidad del agua, expresión en la que se recurre al producto de la longitud de la tubería y el área de su sección transversal recta para definir el volumen:

$$\rho = \frac{\text{masa}}{L \cdot A} \quad \text{Masa} = \rho \cdot L \cdot A \quad [7.1.4]$$

Nos interesa que aparezca el peso específico para poder cancelarlo en ambos miembros de la ecuación, por lo que echaremos mano de la relación

$$\gamma = \rho \cdot g \quad \rho = \gamma/g$$

Con lo que la expresión de la masa de la expresión [7.1.4] resulta

$$\text{Masa} = \rho \cdot L \cdot A = \left(\frac{\gamma}{g}\right) \cdot L \cdot A \quad [7.1.5]$$

Volviendo a la segunda ley de Newton: Fuerza=masa•aceleración

$$(H_o - H_c) \cdot \gamma \cdot A - (H_o + H_a) \cdot \gamma \cdot A + L \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \gamma \cdot A = \left(\frac{\gamma}{g}\right) \cdot L \cdot A \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) \quad [7.1.6]$$

Dividimos toda la ecuación por  $\gamma \cdot A$  (que nunca es nulo)

$$(H_o - H_c) - (H_o + H_a) + L \cdot \text{sen}(\alpha) = \left(\frac{L}{g}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) \quad [7.1.7]$$

Podemos simplificar algo más la ecuación [7.1.7] teniendo en cuenta que:  $\text{seno}(\alpha)=H_o/L$  de donde  $H_c=L \cdot \text{seno}(\alpha)$

$$H_o - L \cdot \text{seno}(\alpha) - H_o - H_a + L \cdot \text{seno}(\alpha) = \left(\frac{L}{g}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right)$$

$$H_a = - \left(\frac{L}{g}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) \quad [7.1.8]$$

Esta es la primera de las dos ecuaciones básicas del Golpe de Ariete obtenida según la teoría de la columna rígida con las hipótesis simplificativas asumidas.

Para hallar la segunda ecuación partimos de que se cumple siempre la ecuación de continuidad descrita en el Addendum numero uno y debemos recordar asimismo tanto el principio de trinomio de Bernoulli del Addendum numero dos como la fórmula de Torricelli descrita en el quinto.

Evidentemente, por continuidad, el caudal que circula por la tubería es el mismo que pasa por la válvula antes del inicio de la maniobra de cierre siendo  $Q_0$  y  $V_0$  respectivamente el caudal y la velocidad en condiciones iniciales de equilibrio antes de accionar la maniobra de cierre de la válvula. Por lo general el área de la válvula no es la misma que la correspondiente a la tubería y denominaremos **Aval** al área de dicha válvula. Podemos suponer sin pérdida de generalidad de la válvula es de vertido y alivio a presión atmosférica por el que es posible definir la velocidad a la salida de la compuerta mediante la ecuación de Torricelli. Aunque la válvula no fuese de alivio exterior, cuando se inicia el cierre se produce una sobrepresión aguas arriba y una fuerte depresión (de magnitud similar) aguas abajo de la válvula, por lo que una vez rebasada la válvula, cerrándose el agua presenta presiones cercanas a la atmosférica e incluso algunas veces inferior, produciéndose entonces cavitación o rotura de la vena líquida quedando patente la aplicabilidad de la ecuación de Torricelli en cualquiera de los dos casos comentados.

Según lo descrito y a tenor de lo marcado un por el principio de continuidad, disponemos de las siguientes ecuaciones para el caudal que circula a través de la válvula:

$$\text{Caudal}_o = (\text{Área Tubería} \cdot \text{VelocidadTubería})_o = \text{Área Vál} \cdot \text{Velocidad Vál}$$

$$Q_o = \text{cte} = A_o \cdot V_o = A_{val} \cdot V_{val} \quad [7.1.9]$$

En esta expresión tanto el caudal como el Área de la tubería y también la velocidad de flujo del agua por la tubería se refieren a las condiciones iniciales que corresponden a tiempos anteriores al inicio de cierre de la válvula. La velocidad del agua a su paso por la válvula según Torricelli la podemos expresar como:

$$V_{val} = \sqrt{(2 \cdot g \cdot H_o)} \quad Q = cte = A_o \cdot V_o = A_{val} \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot H_o)} \quad [7.1.10]$$

Al pasar el agua por cualquier accesorio y en general cuando se producen pérdidas de carga por embocadura, se produce una contracción de la vena líquida. Este aspecto es variable según el tipo y características geométricas de la embocadura y se mide experimentalmente arrojando en cada caso concreto un factor  $C_c$  denominar denominado Coeficiente de Contracción o de descarga, por el que se ha de multiplicar el área efectiva de paso por el elemento. Al franquear la válvula el flujo sufre dicho fenómeno por lo que el área de la vena líquida es menor que la correspondiente de la válvula, quedando:

$$\text{Área Vena Líquida} = \text{Coeficiente Contracción} \cdot \text{Área Válvula}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial de continuidad [7.1.10]

$$Q = A_o \cdot V_o = C_c \cdot A_{val} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_o} \quad [7.1.11]$$

De esta expresión despejamos  $V_o$ , aislando  $H_o^{1/2}$

$$V_o = C_c \cdot \left(\frac{A_{val}}{A_o}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{H_o}$$

Para no arrastrar valores constantes o conocidos, representaremos como  $B_o$  la siguiente expresión

$$B_o = C_c \cdot \left(\frac{A_{val}}{A_o}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g} \quad [7.1.12]$$

quedándonos

$$V_o = B_o \cdot \sqrt{H_o} \quad [7.1.13]$$

donde  $V_o$  y  $H_o$  son valores iniciales a anteriores al cierre de la válvula y  $B_o$  es conocido.

La expresión de  $V_o$  es válida al iniciarse el cierre y una vez alcanzado un cierre parcial, sabemos que se produce una sobrepresión correspondiente al Golpe de Ariete y en un momento genérico tenemos que incrementar  $H_o$  en el valor del Golpe de Ariete, es decir en  $H_a$ .

En un tiempo intermedio anterior al cierre total queda:

$$V = B \cdot \sqrt{H_o + H_a} \quad [7.1.14]$$

El parámetro  $B$  es distinto de  $B_o$  porque el área que queda abierta es menor que  $C_c \cdot A_{val}$ . Para disponer de magnitudes adimensionales relativas dividimos  $V$  entre  $V_o$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{B}{B_0}\right) \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} = \tau \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \quad [7.1.15]$$

$$\frac{V}{V_0} = \tau \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \quad [7.1.16]$$

Tau ( $\tau$ ) representa al cociente  $B/B_0$  que varía con el tiempo y mide el tanto por uno de apertura de la válvula en un tiempo t concreto cualquiera respecto del área  $C_c \cdot A_{val}$  que es el valor del área cuando dicha válvula está totalmente abierta antes del inicio de la maniobra de cierre. La fórmula anterior dada por [7.1.16] que nos proporciona el valor de  $V/V_0$  es la segunda ecuación fundamental que gobierna el fenómeno de Golpe de Ariete en el caso de considerar como punto de partida la Teoría de la Columna Rígida con sus correspondientes limitaciones.

Resumiendo, las dos ecuaciones obtenidas en base a la teoría de la columna rígida de agua son:

1.-Aplicación de la segunda ley de Newton

$$H_a = - \left(\frac{L}{g}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) \quad \text{Primera Ecuación} \quad [7.1.17]$$

2.-Aplicación del principio de continuidad

$$\frac{V}{V_0} = \tau \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \quad \text{Segunda Ecuación} \quad [7.1.18]$$

Siendo:

- $L$  la longitud de la tubería entre la salida del depósito y la válvula de cierre medida en metros.
- $g$  es el valor adoptado para la aceleración de la gravedad que hemos supuesto constante con un valor aproximado de  $g=9,81$  metros/segundo<sup>2</sup>  $\cong 10$  mm/s<sup>2</sup>.
- $V$  es la velocidad a la que en un momento intermedio entre válvula completamente abierta y válvula cerrada circula el agua por la tubería.
- $H_a$  representa la sobrepresión debida al Golpe de Ariete evaluada en metros de columna de agua.
- $H_0$  es la presión en un punto cercano a la válvula antes de iniciar su cierre igualmente estimada en metros de columna de agua.
- $V_0$  es la velocidad del agua a través de la conducción antes de iniciarse el cierre de la válvula en unidades de metros/segundo.
- $\tau$  Tau representa el cociente  $\tau = B/B_0 = (C_c \cdot A_{val})/A$  con:

- **Cc** es el denominado coeficiente de contracción de la vena líquida que es adimensional por ser cociente de magnitudes de misma unidad, concretamente áreas.
- **Aval** es el área de la compuerta de la válvula medida en metros<sup>2</sup>.
- **A** corresponde al área que permanece abierta en un momento genérico una vez iniciada la maniobra de cierre de la compuerta.

Podemos en la segunda de las dos fórmulas anteriores explicitar el valor de Tau ( $\tau$ ) que representa una función que, como ya hemos comentado, depende del tiempo suponiendo que su variación es lineal. El supuesto de linealidad es asumible porque la teoría de la columna rígida se suele aplicar con cierta exactitud cuando estamos en presencia de válvulas de bola muy utilizadas por su buen comportamiento, poco desgaste y coste contenido que tiene la particularidad de que la velocidad de su vástago de empuje es constante produciendo un desplazamiento de carácter lineal con el tiempo.

En un instante cualquiera durante la maniobra se puede expresar la magnitud del diámetro de apertura respecto del inicial **Do**

$$\text{diámetro en un instante } d = Do - D = Vo \cdot T - V \cdot t$$

Como  $\tau$  es el tanto por uno de cierre en un momento dado intermedio dividimos la expresión anterior por **Do** (apertura total)

$$\frac{d}{Do} = \tau = \frac{Vo \cdot T}{Do} - \frac{V \cdot t}{Do} \quad Do = Vo \cdot T \quad \tau = 1 - \frac{V \cdot t}{Vo \cdot T} \quad [7.1.18]$$

En esta ecuación **V** es un incremento de velocidad, porque el fluido (agua) ya partía con una velocidad inicial **Vo** para diferenciarla de la velocidad genérica que lleva el fluido en un instante cualquiera, la denotaremos como **V'** que es la diferencia entre **V** y **Vo**. Evidentemente el parámetro **t** oscila entre **t=0** cuando no se ha iniciado todavía la maniobra de cierre y **t = T** que es el tiempo total invertido en la maniobra de apertura. Con esto nos queda

$$\tau = 1 - \frac{V' \cdot t}{Vo \cdot T} \quad [7.1.19]$$

En la segunda ecuación podemos substituir  $\tau$  por su valor aproximado anterior quedando:

$$\frac{V}{Vo} = \left( 1 - \frac{V' \cdot t}{Vo \cdot T} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{Ha}{Ho}} \quad [7.1.20]$$

Esta es la versión más desarrollada de la segunda ecuación básica.



## 7.2 COTA MÁXIMA DE LA SOBREPRESIÓN SEGÚN LA TEORÍA DE LA COLUMNA RÍGIDA DE AGUA.

En la Teoría de la Columna Rígida de agua más que las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de Golpe de Ariete, que también, nos interesa disponer de una cota máxima de la sobrepresión para poder dimensionar a tal efecto, al menos, el espesor de la tubería. Despejando la velocidad de la última ecuación [7.1.20] obtenemos la siguiente expresión:

$$V = V_0 \cdot \left[ 1 - \frac{V' \cdot t}{V_0 \cdot T} \right] \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \quad V = \left[ V_0 - \frac{V' \cdot t}{T} \right] \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \quad [7.2.1]$$

Donde el Valor de la sobrepresión **Ha** nos viene dado por [7.1.8], la primera ecuación fundamental del Golpe de Ariete:

$$H_a = -\left(\frac{L}{g}\right) \cdot \frac{dV}{dt} \quad \text{o bien} \quad \frac{dV}{dt} = \left(-\frac{g}{L}\right) \cdot H_a \quad [7.2.2]$$

En esta ecuación resultante [7.2.2] de la velocidad tenemos dos variables, por una parte, el tiempo **t** y por otra la sobrepresión del Golpe de Ariete **Ha** luego podemos poner que la velocidad es función del tiempo y de la sobrepresión:  $V=f(t, H_a)$ . Diferenciando esta expresión y dividiendo posteriormente por dt

$$dV = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial H_a} dH_a \quad dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial H_a} dH_a \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial H_a} \frac{dH_a}{dt} \quad (\text{Regla de la Cadena})$$

Como disponemos de la ecuación de **V** podemos hallar su derivada parcial respecto de **t** y también respecto de **Ha**.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( V_0 - \frac{V' \cdot t}{T} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \right] \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \left( -\frac{V'}{T} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \quad [7.2.3]$$

$$\frac{\partial V}{\partial H_a} = \frac{\partial}{\partial H_a} \left[ \left( V_0 - \frac{V' \cdot t}{T} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \right] \quad \frac{\partial V}{\partial H_a} = \left( V_0 - \frac{V' \cdot t}{T} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}}} \cdot \left( \frac{1}{H_0} \right) \quad [7.2.4]$$

Sustituyendo las dos parciales anteriores [7.2.3] y [7.2.4] en la fórmula de la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \left( -\frac{V'}{T} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} + \frac{\left( \frac{1}{2 \cdot H_0} \right) \left( V_0 - \frac{V' \cdot t}{T} \right)}{\sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}}} \cdot \frac{dH_a}{dt}$$

Expresando  $dV/dt$  en función de **Ha** y arreglando un poco la ecuación con la raíz como denominador común al mismo tiempo que hacemos uso de la ecuación [7.2.2]:

$$\left( -\frac{g}{L} \right) \cdot H_a = \frac{\left( -\frac{V'}{T} \right) \cdot \left( 1 + \frac{H_a}{H_0} \right) + \left( \frac{1}{2 \cdot H_0} \right) \cdot \left[ V_0 + \left( -\frac{V'}{T} \right) \cdot t \right] \cdot \frac{dH_a}{dt}}{\sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}}} \quad [4.2.5]$$

Nos interesa ahora despejar  $dH_a/dt$  para igualarlo a cero y poder hallar sus valores máximos y mínimos

$$\frac{\left(-\frac{g}{L}\right) \cdot H_a \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_o}} + \left(\frac{V'}{T}\right) \cdot \left(1 + \frac{H_a}{H_o}\right)}{V_o + \left(-\frac{V'}{T}\right) \cdot t} = \frac{dH_a}{dt} \quad [7.2.6]$$

Para que un cociente sea nulo basta con que lo sea su numerador:

$$\left(-\frac{g}{L}\right) \cdot H_a \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_o}} + \left(\frac{V'}{T}\right) \cdot \left(1 + \frac{H_a}{H_o}\right) = 0 \quad [7.2.7]$$

Dividiendo toda la ecuación por

$$\left(1 + \frac{H_a}{H_o}\right)^{1/2}$$

$$\left(-\frac{g}{L}\right) \cdot H_a + \left(\frac{V'}{T}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_o}} = 0 \quad [7.2.8]$$

Elevamos la ecuación al cuadrado para eliminar el radical:

$$\left(\frac{V'}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{H_a}{H_o}\right) = \left(\frac{g \cdot H_a}{L}\right)^2 \quad [7.2.9]$$

Para buscar el cociente  $H_a/H_o$  en el segundo miembro multiplicamos este por la unidad de la forma  $1 = H_o / H_o$

$$\left(\frac{g \cdot H_a \cdot H_o}{L \cdot H_o}\right)^2 = \left(\frac{g \cdot H_o}{L}\right)^2 \left(\frac{H_a}{H_o}\right)^2$$

Juntando términos exentos de  $H_a/H_o$  queda a partir de [7.2.9]:

$$\left(\frac{V'}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{H_a}{H_o}\right) = \left(\frac{g \cdot H_o}{L}\right)^2 \left(\frac{H_a}{H_o}\right)^2$$

$$\left(\frac{L \cdot V'}{g \cdot H_o \cdot T}\right)^2 \left(1 + \frac{H_a}{H_o}\right) = \left(\frac{H_a}{H_o}\right)^2 \quad [7.2.10]$$

Denotamos por  $K$  el término independiente

$$K = \left(\frac{L \cdot V'}{g \cdot H_o \cdot T}\right)^2 \quad K \cdot \left(1 + \frac{H_a}{H_o}\right) = \left(\frac{H_a}{H_o}\right)^2 \quad [7.11]$$

Reordenamos la ecuación de segundo grado en  $H_a/H_o$

$$\left(\frac{H_a}{H_o}\right)^2 - K \cdot \left(\frac{H_a}{H_o}\right) - K = 0 \quad [7.2.12]$$

Resolviendo la ecuación [7.2.12] polinómica de segundo grado respecto de la variable  $H_a/H_o$

$$\left(\frac{H_a}{H_o}\right) = \frac{K \pm \sqrt{K^2 + 4 \cdot K}}{2}$$

Despejando  $H_a$  máximo hallado es:

$$H_a \text{ máx} = H_0 \cdot \left[ \frac{K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 + K} \right] \quad [7.2.13]$$

La solución positiva (la mayor en valor absoluto) corresponde a la sobrepresión mientras que el valor negativo representa la subpresión consecuente que puede provocar cavitación y rotura de la vena líquida. Es importante destacar que, dadas las limitaciones y simplificaciones asumidas por la teoría de la columna rígida de agua, está únicamente es válida para cierres lentos de la válvula con tiempo de cierre  $T$  mayor que la milésima parte de la longitud de la tubería ( $T > L / 1000$ ) con  $L$  en metros y  $T$  en segundos.

### 7.3 VÁLVULAS TIPO ASOCIADAS AL CIERRE DE FLUJO.

Las características de la válvula de cierre es un factor decisivo en la acotación del fenómeno del Golpe de Ariete. Se vio anteriormente la expresión que liga alturas de columna de agua (presión) con la velocidad alcanzada bajo la forma transcrita como ecuación [7.1.18]

$$\frac{V}{V_0} = \tau \sqrt{\frac{H}{H_0}}$$

marcamos con el subíndice  $0$  el estado anterior al inicio de la maniobra de cierre y sin subíndice un punto intermedio del suceso entre la apertura total de válvula y su cierre completo. Dividiendo la velocidad por la sección de la tubería obtenemos el correspondiente caudal, que despejamos:

$$Q = \tau \left( \frac{Q_0}{\sqrt{H_0}} \right) \sqrt{H} \quad [7.3.1]$$

Como ya vimos,  $\tau$  representa (en tanto por uno) la apertura de la válvula que evidentemente viene representada por una función gobernada por la variable tiempo. El parámetro  $\tau$  depende del tipo de válvula de que dispongamos y con mayor detalle de la variación que sufra su área útil de paso de agua con el tiempo y por supuesto de su coeficiente de contracción asociado ( $C_c$ ). El valor de  $C_c$  es función de la geometría física del sistema de cierre y de la aceleración que sufre el vástago de guiado y descenso de la válvula y su valor se determina experimentalmente.  $\tau$  en tanto por uno se puede expresar como:

$$\tau = \frac{(C_c \cdot A_v)}{(C_c \cdot A_v)_{ci}} \quad [7.3.2]$$

Donde el subíndice  $ci$  refleja que se trata de las condiciones iniciales de paso del fluido antes del inicio del proceso de cierre de válvula. Lo más usual es que cada tipo de válvula tenga asociada una función  $\tau$  en función del desplazamiento sufrido por el vástago de guiado. Según la tipología de la válvula el desplazamiento de su parte móvil de cierre depende de un parámetro lineal o

angular. Las válvulas con recorrido móvil gobernado por un parámetro lineal definen su ley  $\tau$  como una posición genérica de cierre con longitud actuada  $L$  respecto del total cuando el cierre es completo y su desplazamiento entonces es  $D$ .

Para la válvulas cuyo parámetro relativo de cierre es angular se relaciona el ángulo  $\theta$  en un momento cualquiera del proceso de cierre con el ángulo correspondiente a su cierre total  $\theta_T$

Se distinguen básicamente 4 familias de cierres con parámetro lineal:

### 1.- Válvula de Compuerta circular:

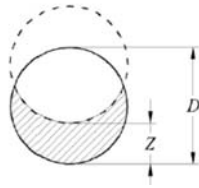


Figura 1. Válvula de Compuerta circular. Fuente: Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega

$$\tau_{circular} = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \left[ \arccos\left(\frac{L}{D}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) \text{sen}\left(2 \arccos\left(\frac{L}{D}\right)\right) \right]$$

### 2.- Válvula de Compuerta rectangular:

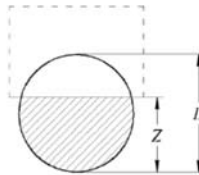


Figura 2. Válvula de Compuerta rectangular. Fuente: Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

$$\tau_{comp} = 1 - \left(\frac{1}{\pi}\right) \left[ \arccos\left(2\left(\frac{L}{D}\right) - 1\right) - \left(2\left(\frac{L}{D}\right) - 1\right) \cdot \sqrt{1 - \left(2\left(\frac{L}{D}\right) - 1\right)^2} \right]$$

### 3.- Válvula de Balón

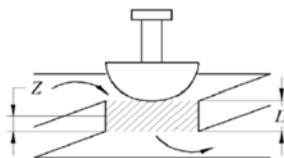


Figura 3. Válvula de balón. Fuente: Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

Presenta una relación directa de alturas:

$$\tau_{balon} = \frac{L}{D}$$

#### 4.- Válvula de Aguja

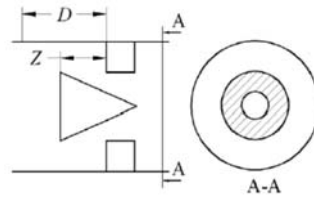


Figura 4. Válvula de Aguja. Fuente: Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

El flujo discurre por una corona circular de área cada vez menor.

$$\tau_{aguja} = 2 \left( \frac{L}{D} \right) - \left( \frac{L}{D} \right)^2$$

La mayoría de las válvulas cuyo parámetro variable de cierre viene gobernado por un valor angular se agrupan en dos categorías:

##### 1.- Válvulas de Mariposa:

Su ley es relativamente sencilla:

$$\tau_{mariposa} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

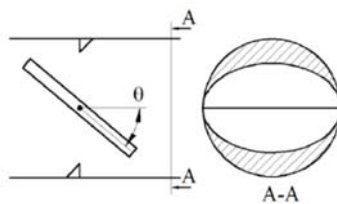


Figura 5. Válvula de mariposa. Fuente: Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

El ángulo  $\theta$  puede variar desde  $\theta=0$  que corresponde a la válvula totalmente abierta y  $\theta=\pi/2$  cuando el cierre es completo.

##### 2.- Válvula Esférica:

Es de las más utilizadas por su fiabilidad, poco mantenimiento y sencillez a la vez que es muy robusta.

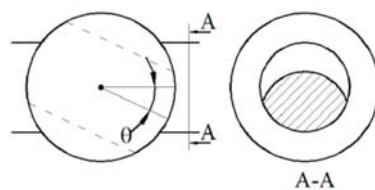


Figura 6. Válvula esférica. Fuente: Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

$$\tau_{esferica} = (1 + \cos\theta) \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsen(p) + 2p \cos(\arcsen(p)) \right] \qquad p = \frac{1,0678 \cdot \text{sen}(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$$

Los valores así marcados por el ángulo  $\theta$  oscilan entre cero y uno, correspondiendo  $\theta=0$  apertura total y  $\theta=1$  cierre completo de la válvula esférica.

Si en vez de parametrizar el grado de apertura de la compuerta modelizamos, el movimiento del vástago que la acompaña se deben considerar las situaciones que más a menudo suceden que son mantener constante su velocidad o su aceleración para poder describir el proceso algebraicamente, ya sea mediante un desplazamiento o mediante un giro angular.

Respecto de la relación de caudales tenemos:

1.- Para procesos lineales con velocidad constante:

$$\frac{L}{D} = 1 - \left( \frac{\Delta Q}{Q_0} \right) \left( \frac{t}{t_c} \right) \qquad [7.3.3]$$

siendo

- L apertura en un momento dado del proceso de cierre.
- D valor máximo del desplazamiento del vástago que corresponde con el cierre total.
- $\Delta Q$  es el incremento de caudal entre el caudal inicial y el genérico final.
- $t_c$  tiempo total que tarde la válvula en cerrarse.
- t instante cualquiera del proceso de cierre.

2.- Para procesos angulares con velocidad de cierre constante:

$$\frac{\theta}{\theta_c} = \left( \frac{\Delta Q}{Q_0} \right) \left( \frac{t}{t_c} \right) \qquad [7.3.4]$$

- $Q_0$  es el caudal que circula por la tubería antes de iniciarse la maniobra de cierre, en los dos casos descritos con velocidad constante.
- $\theta_c$  ángulo girado total cuando se completa la maniobra de cierre.
- $\theta$  posición genérica del ángulo de cierre en un tiempo intermedio entre el inicio y final de la maniobra de cierre.

3.- Para procesos lineales manteniendo constante la aceleración del vástago tenemos:

$$\frac{L}{D} = 1 - \left( \frac{\Delta Q}{Q_0} \right) \cdot \left( \frac{t}{t_c} \right)^2 \qquad [7.3.5]$$

4.- Para procesos de cierre angulares del vástago con la aceleración constante queda:

$$\left( \frac{Q}{Q_0} \right) = \left( \frac{\Delta Q}{Q_0} \right) \cdot \left( \frac{t}{t_c} \right)^2 \qquad [7.3.6]$$

Como se aprecia son las mismas fórmulas que para la velocidad, pero elevando el cociente  $t/t_c$  al cuadrado. Para procesos lineales se puede substituir directamente la relación  $(L/D)$  en las formulas por  $\tau$ , tanto para la velocidad constante como para aceleración constante.

Para procesos angulares separamos la variable  $\theta$  antes de substituir  $\tau$  en las correspondientes ecuaciones.

Lo expuesto anteriormente respecto de  $\tau$  y los cocientes  $(L/D)$  y  $(\theta/\theta_c)$  relativos a cada tipología de válvula tiene un interés didáctico innegable pero para tratar el fenómeno de Golpe de Ariete con mayor rigor, siendo que cada fabricante patenta válvulas con características específicas particulares, este mismo fabricante es el que proporciona el comportamiento hidráulico en referencia a la ley de cierre de la válvula y suele hacerse a través de una fórmula polinómica de ajuste, obtenida empíricamente con precisión. Suelen ser leyes polinomiales de quinto o sexto grado, es decir  $\tau =$  polinomio en  $t$  de grado 5 o 6 y a veces de grados superiores.





## ■ CAPÍTULO 8.

# MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.

## 8.1 VENTAJAS DE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.

El análisis de un transitorio tiene como objetivo principal la determinación de la velocidad y la presión en un punto cualquiera del ducto.

El método de las características parte de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno sin considerar simplificación alguna, por lo que las soluciones responden plenamente a la descripción real del fenómeno asociado Golpe de Ariete, es un método explícito de primer orden, asume la celeridad de la onda ( $c$ ), como si de una constante se tratara, pudiendo modelar con cierta facilidad el frente de avance de la onda de presión, en los casos comunes de **transitorios de elevada velocidad**, lo que le confiere una ventaja innegable respecto de otros métodos, como pueden ser, el método de elementos finitos o métodos basados en diferencias finitas. Este método presenta gran **adaptabilidad** a distintos sistemas hidráulicos, siendo además relativamente **rápido**. Según describe Armando Coutinho Lencastre en su obra Manual de Ingeniería Hidráulica "el método de las características es, hoy en día, el método de análisis más **potente** y **versátil**, con el cual es posible la simulación de regímenes transitorios en sistemas hidráulicos complejos y de fenómenos especiales como la cavitación y la ruptura de la vena líquida".

El método de las características presenta otras ventajas sobre los diversos modelos de desarrollo físico-matemáticos y es que al trabajar con intervalos de tiempo definidos por el usuario y **se puede garantizar siempre su convergencia**, además de ser un método **estable** con una **programación relativamente asequible**. No obstante lo anterior, su mayor logro se encuentra en que es un **método explícito**, puesto que sus incógnitas pueden hallarse por métodos secuenciales sin tener que abordar la totalidad del problema de forma simultánea y se encuentra la solución paso a paso con la exactitud y bondad que uno desee. También es fundamental saber que **los puntos frontera o de contorno se pueden calcular de forma independiente** de los puntos interiores, lo que nos lleva a poder descomponer el sistema hidráulico en tramos y nodos calculables por separado de forma desacoplada. Esta última propiedad es esencial, pues **permite abordar sistemas complejos** por partes independientes resolubles cada una por sí sola, integrando posteriormente los resultados al sistema total. La característica anterior conlleva el que, se puedan modelizar una multitud de accesorios de la red a través de la definición de sus

ecuaciones de contorno que se resuelven aisladamente y se trasladan sin grandes problemas a la globalidad.

## 8.2 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS SIN INCLUIR EL TÉRMINO DE FRICCIÓN.

Partiendo del teorema de transporte de Reynolds se alcanzan las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento, cuya aplicación al caso que nos ocupa dan como resultado las ecuaciones diferenciales básicas que caracterizan nuestro modelo uniaxial del fenómeno del Golpe de Ariete que son:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [8.2.1]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \text{sen}\theta + \frac{f}{2 \cdot D} V|V| = 0 \quad [8.2.2]$$

Estas ecuaciones deben considerarse de forma conjunta y unitaria con la ecuación de celeridad de la onda de presión:

$$c^2 = \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot (C^* + D^*) \quad [8.2.3]$$

Y también con las ecuaciones constitutivas de conjunto agua-conducto:

$$\frac{d\rho}{\rho} = C^* \cdot dp = \frac{1}{K} \cdot dp \quad [8.2.4]$$

$$\frac{dA}{A} = D^* \cdot dp = \psi \cdot \frac{D}{eE} \cdot dp \quad [8.2.5]$$

El conjunto de ecuaciones [8.2.1] [8.2.2] [8.2.3] [8.2.4] [8.2.5] gobierna el comportamiento dinámico y cinemático del Golpe de Ariete.

De los parámetros de presión (**P**), volumen (**V**), densidad del líquido (**ρ**), celeridad de la onda de presión (**c**), aceleración de la gravedad (**g**), ángulo de inclinación de la tubería (**α**), diámetro de la tubería (**D**), tiempo (**t**) y desplazamiento (**x**) se ha dado ya cumplida cuenta y explicación pero **C\*** es el coeficiente de compresibilidad a temperatura constante del fluido que se corresponde con la variación relativa de la densidad con relación al incremento unitario de presión:

$$C^* = \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \frac{d\rho}{dP} \quad [8.2.6]$$

Si tenemos en cuenta el módulo de compresibilidad volumétrico denominado coeficiente de compresibilidad (**K**) a temperatura constante definido como:

$$K = \rho \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \quad C^* = \frac{1}{K} \quad [8.2.7]$$

El módulo de compresibilidad volumétrico  $K$  tiene unidades de presión y para el agua en condiciones normales de presión y temperatura vale  $K=2,2 \cdot 10^9 \text{ Nw/m}^2$ .

$D^*$  es la distensibilidad de la tubería con valor

$$D^* = \left(\frac{1}{A}\right) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial P}\right) \quad [8.2.8]$$

Bajo un brusco incremento de presión se produce una variación del radio de la tubería, que pasa de valer  $R$ , a asumir un mayor tamaño dado por  $R+\Delta R$ , esto provoca tensiones en la tubería que se concretan en una tensión radial  $\sigma_R$  y otra azimutal  $\sigma_A$  en dirección axial. Veamos en que se traduce el incremento unitario de área despreciando los infinitésimos de segundo orden ( $\Delta R^2 \cong 0$ )

$$\text{Área Inicial} = \pi \cdot R^2$$

$$\text{Área Final} = \pi \cdot (R + \Delta R)^2 = \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta R + \pi \cdot \Delta R^2$$

$$\text{Área Final} = \text{Área Inicial} + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta R$$

$$\Delta A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta R \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta R}{\pi \cdot R^2} = 2 \cdot \frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot \Delta \epsilon_R \quad [8.2.9]$$

$\Delta \epsilon_R$  es el incremento unitario de radio.

La ley de Hooke relaciona deformaciones unitarias con tensiones radiales y axiales mediante la siguiente expresión

$$\epsilon_R = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_R - \nu \cdot \sigma_A) \quad [8.2.10]$$

- $E$  es el módulo elástico lineal también llamado módulo de Young de la tubería.
- $\nu$  es el coeficiente de Poisson, relación entre la deformación unitaria transversal y la deformación unitaria longitudinal.

Atendiendo al siguiente esquema de las fuerzas que entran en juego en el equilibrio podemos plantear:

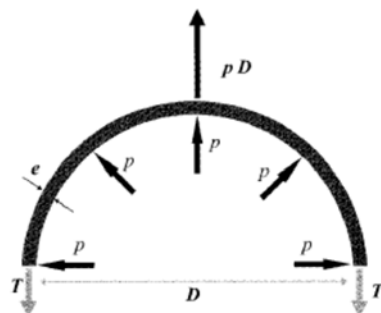


Figura 8.1. Fuerzas que intervienen en el cálculo de la tensión radial. Fuente Abreu et alter.

La resultante de todas las fuerzas elementales debidas a la presión interior  $p$  es vertical con sentido hacia arriba y con módulo el producto de  $p$  por el diámetro  $D$  al ser dicha resultante la suma de

las componentes verticales de las presiones distribuidas puesto que las componentes horizontales se anulan entre ellas dos a dos. A la resultante ( $p \cdot D$ ) se la oponen, para garantizar el equilibrio, las dos tensiones de valor  $T$  de tracción que actúan sobre una superficie  $e \cdot 1 \text{ metro} = e \text{ m}^2$ . Planteando la ecuación de equilibrio y despejando la tensión radial  $\sigma_R$  tenemos:

$$P \cdot D = 2 \cdot T = \sigma_R \cdot 2 \cdot e \qquad \sigma_R = \frac{D}{2 \cdot e} \cdot P \qquad [8.2.11]$$

La expresión [8.2.11] anterior es la denominada ley de las calderas. Volviendo a la ley Hooke dada en [8.2.10]:

$$\Delta \varepsilon_R = \left( \frac{1}{E} \right) \cdot \left( \frac{D}{2 \cdot e} \cdot \Delta P - \nu \cdot \sigma_A \right) \qquad [8.2.12]$$

Ante esta última expresión se nos plantea tres posibilidades:

● 1.- Suponer que la dilatación de la tubería es instantánea conforme al  $\Delta P$  como si pasará de  $R$  a  $R + \Delta R$  de forma instantánea, despreciando la velocidad de deformación de la tubería en su sentido longitudinal (axial), lo que implica asumir una velocidad de onda infinita que se traduce en  $\sigma_A = 0$ . Esta primera opción equivale a que la tubería no tiene restringida su deformación longitudinal.

$$\Delta \varepsilon_R = \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{D}{E \cdot e} \right) \cdot \Delta P \qquad [8.2.13]$$

● 2.- Si la tubería se ve sujeta por un extremo sufre una tensión dada por el cociente entre la fuerza ejercida y la superficie de aplicación, que es la sección de tubería:

- Fuerza  $\Delta P \cdot \text{Área} = \Delta P \cdot \pi \cdot R^2$
- Superficie  $2 \cdot \pi \cdot R \cdot e$
- Tensión axial  $\sigma_A = \Delta P \cdot R / (2 \cdot e)$

El alargamiento unitario radial recordando que  $D = 2 \cdot R$  queda:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_R &= \left( \frac{1}{E} \right) \cdot \left( \frac{D}{2 \cdot e} \cdot \Delta P - \nu \cdot \frac{R}{2 \cdot e} \cdot \Delta P \right) = \left( \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{\Delta P}{2 \cdot e} \cdot R \cdot (2 - \nu) = \left( \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{\Delta P}{4 \cdot e} \cdot D \cdot \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) \cdot 2 \\ \Delta \varepsilon_R &= \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) \cdot \left( \frac{D}{E \cdot e} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta P \end{aligned} \qquad [8.2.14]$$

● 3.- En esta situación, la tubería está totalmente anclada por sus extremos, no permitiendo su elongación, cumpliéndose que  $\varepsilon_A$  es nulo y la ley de Hooke en este caso se expresa como una tensión axial dada por:

$$\sigma_A = \left( \frac{\nu}{1 - \nu^2} \right) E \cdot \varepsilon_R \qquad [8.2.15]$$

substituyendo  $\sigma_R$  de la ecuación [8.2.11] y  $\sigma_A$  de la ecuación [8.2.15] en [8.2.10]

$$\Delta \varepsilon_R = \left( \frac{1}{E} \right) \cdot \left( \frac{D}{2 \cdot e} \cdot \Delta P - \nu \cdot \left( \frac{\nu}{1 - \nu^2} \right) \cdot E \cdot \Delta \varepsilon_R \right) = \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{D}{E \cdot e} \right) \cdot \Delta P - \frac{\nu^2}{1 - \nu^2} \cdot \Delta \varepsilon_R$$

$$\Delta \varepsilon_R \cdot \left(1 + \frac{v^2}{1 - v^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{D}{E \cdot e}\right) \cdot \Delta P$$

$$\Delta \varepsilon_R = (1 - v^2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{D}{E \cdot e}\right) \cdot \Delta P \quad [8.2.16]$$

En las tres alternativas estudiadas se puede poner la distensibilidad de la tubería bajo la siguiente forma genérica:

$$D^* = \frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta A}{\Delta P} = \Psi \cdot \left(\frac{D}{E \cdot e}\right) \cdot \Delta P \quad [8.2.17]$$

$\Psi$  es un parámetro que en general es función del coeficiente de Poisson  $\nu$ , cuyo valor para los tres casos anteriores es:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Psi_2 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

$$\Psi_3 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - \nu^2)$$



Figura 8.2. Condiciones de sustentación de la tubería. Fuente Abreu et alter.

Las hipótesis simplificativas asumidas para llegar a las ecuaciones que describen el fenómeno del Golpe de Ariete bajo la forma de sistema diferencial se pueden ordenar y clasificar en función de los elementos a los que afecta y se refiere:

- Hipótesis acerca del flujo hidráulico.
- Hipótesis que afectan al binomio agua-tubería como un sistema conjunto continuo.
- Hipótesis a la hora de definir el valor de los parámetros participativos del fenómeno.

**Hipótesis 1.-** Confinamiento físico del flujo que viene limitado y delimitado por las superficies interiores de la tubería.

**Hipótesis 2.-** Flujo unidireccional y axial en la dirección del eje de la tubería, despreciando las velocidades erráticas y en otras direcciones. Las variaciones de velocidad son unidimensionales.

**Hipótesis 3.-** La distribución de presiones internas es uniforme en toda la sección de la tubería, adoptándose la media de presiones hidrostáticas como valor de referencia.

**Hipótesis 4.-** Flujo turbulento despreciable en las zonas de contacto agua-tubería frente a la magnitud de la superficie recta de la sección. Equivale a limitar el espesor de la capa límite.

**Hipótesis 5.-** La envolvente del volumen de control, formada por el fluido de capa límite y la propia tubería, no intervienen dinámicamente sobre dicho volumen por lo que, únicamente se precisa de un parámetro radial para describir las características del conducto.

**Hipótesis 6.-** Se cuenta siempre con un medio fluido que se comporta físicamente como homogéneo y con una densidad uniforme, es decir que sus características físicas intrínsecas no vienen afectadas de direccionalidad. Campo conservativo.

**Hipótesis 7.-** En la tubería no se produce derivación de caudal ni aporte entre la sección inicial del tramo en estudio y la sección final. El caudal se mantiene constante y continuo.

**Hipótesis 8.-** La distribución de velocidades en una sección recta se considera constante, adoptándose como tal la media de los valores reales (parábola).

**Hipótesis 9.-** El líquido considerado (agua) se toma como isoterma en cuanto a su proceso termodinámico de compresión, por lo que se desprecian las variaciones de sus propiedades intrínsecas con la temperatura.

**Hipótesis 10.-** La sección recta de la tubería se supone constante conforme el avance de la variable  $x$ , a todo lo largo de la conducción.

**Hipótesis 11.-** Se adopta el valor de rozamiento el arrojado por la fórmula de Darcy-Weisbach, para las tensiones tangenciales del flujo transitorio proporcional al cuadrado de la velocidad y a la densidad de agua, así como el coeficiente de fricción  $f$ , siendo el coeficiente de proporcionalidad igual a  $0,125 = 1/8$ .

$$\tau = f \cdot \frac{\rho}{8} \cdot V|V|$$

La imposición de dos hipótesis adicionales nos va a permitir prescindir de los términos convectivos.

**Hipótesis 12.-** La aproximación acústica supone despreciar las variaciones de la densidad  $\rho$  y del área  $A$  respecto de las fluctuaciones de presión.

**Hipótesis 13.-** Consideraremos la celeridad de la onda de presión  $c$  como constante.

La hipótesis 12 y 13, de forma conjunta asumen el comportamiento lineal elástico del fluido. Siendo los dos términos convectivos  $\mathbf{V} \cdot (\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{x})$  y  $\mathbf{V} \cdot (\partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{x})$ , con su cancelación del cuerpo de las ecuaciones obtenemos un modelo simplificado que solo consta de dos ecuaciones, puesto que las hipótesis 12 y 13 anulan al considerar las ecuaciones [8.2.4] y [8.2.5] constitutivas del conjunto agua-tubería.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [8.2.18]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + g \cdot \text{sen}\theta + \frac{f}{2 \cdot D} \cdot V \cdot |V| = 0 \quad [8.2.19]$$

En función de la altura piezométrica H en vez de la presión según la relación:

$$P = \rho \cdot g \cdot (H - z) \quad [8.2.20]$$

Diferenciamos esta expresión respecto del tiempo y despreciando el término  $\partial z / \partial t$  porque z no depende de t

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial H}{\partial t}$$

Expresión que sustituimos en la ecuación [8.2.18] eliminando  $\rho \cdot g$  del primer término:

$$\begin{aligned} \rho \cdot g \cdot \frac{\partial H}{\partial t} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \cdot \left(\frac{1}{A}\right) \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad [8.2.21]$$

donde se ha tenido en cuenta que el caudal se puede expresar como el producto del área de la sección por su velocidad  $Q = A \cdot V$ . Derivando parcialmente la ecuación [8.2.20] pero esta vez respecto de la variable x:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Substituyendo el valor hallado para  $\partial P / \partial x$  en la ecuación [8.2.18], teniendo en cuenta que la variación de z respecto de x ( $\partial z / \partial x$ ) es el seno del ángulo de inclinación de la tubería:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{1}{A}\right) + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - g \cdot \text{sen}\alpha + g \cdot \text{sen}\alpha + \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) V |V| &= 0 \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{1}{A}\right) + g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) \frac{Q |Q|}{A^2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) + g \cdot A \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) Q |Q| &= 0 \end{aligned} \quad [8.2.22]$$

Resumiendo, las ecuaciones que describen el Golpe de Ariete en función del caudal  $Q$  y de la carga piezométrica  $H$ , son de forma simplificada:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \left(\frac{1}{A}\right) \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \quad [8.2.23]$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) + g \cdot A \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) Q |Q| = 0 \quad [8.2.24]$$

Para exponer el método de las características, partiremos de las ecuaciones completas incluyendo los términos convectivos, que vienen dadas en función de la presión y la velocidad, modificándolas para trabajar con alturas piezométricas (H) y velocidades (V).

**PRIMERA ECUACIÓN. PRINCIPIO DE CONTINUIDAD.**

Retomamos la ecuación [8.2.1] que corresponde al principio de continuidad

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [8.2.25]$$

Como la altura piezométrica y la presión vienen relacionadas, podemos obtener la presión P en función de la altura piezométrica H:

$$H = z + \left(\frac{1}{\gamma}\right) \cdot P \quad P = \gamma \cdot H - \gamma \cdot z$$

Buscamos las derivadas parciales respecto del tiempo t y de la distancia x:  $\partial P/\partial t$  y  $\partial P/\partial x$

- $\frac{\partial P}{\partial x} = \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \gamma \cdot (-\text{sen}\alpha) = \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma \cdot \text{sen}\alpha$
- $\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial t} - \gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial t}$

Substituyendo simultáneamente en la ecuación [8.2.23]

$$\gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial t} + \gamma \cdot V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma \cdot V \cdot \text{sen}\alpha + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) + V \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + V \cdot \text{sen}(\alpha) + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0 \quad [8.2.26]$$

**SEGUNDA ECUACIÓN. CANTIDAD DE MOVIMIENTO.**

Modificaremos ahora la segunda ecuación [8.2.2] correspondiente a la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento que se expresa como anteriormente:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + g \cdot \text{sen}\theta + \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) V|V| = 0 \quad [8.2.27]$$

Buscamos la expresión de  $\partial P/\partial x$

$$H = z + \left(\frac{1}{\gamma}\right) \cdot P$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{1}{\gamma}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = \text{sen}\alpha + \left(\frac{1}{\gamma}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = g \cdot \text{sen}\alpha + \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

Reemplazando en [8.2.27] queda:



$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) V|V| = 0 \quad [6.20] [8.2.28]$$

### Expresión matricial del sistema de ecuaciones descriptivas del Golpe de Ariete.

Partiendo de las recientes ecuaciones transformadas [8.2.26] y [8.2.28], el sistema se puede agrupar sucesivamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \text{sen}\alpha &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{f}{2 \cdot D} V|V| &= 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \\ g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \cdot \text{sen}\alpha \\ \frac{f}{2 \cdot D} \cdot V|V| \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & \frac{c^2}{g} \\ g & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \cdot \text{sen}\alpha \\ \frac{f}{2 \cdot D} \cdot V|V| \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & \frac{c^2}{g} \\ g & V \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \cdot \text{sen}\alpha \\ \frac{f}{2 \cdot D} \cdot V|V| \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [8.2.29]$$

Veamos los valores propios de la matriz de los coeficientes del sistema:

$$\text{Determinante} \begin{pmatrix} V - \lambda & \frac{c^2}{g} \\ g & V - \lambda \end{pmatrix} = (V - \lambda)^2 - c^2$$

Igualamos a cero el polinomio característico anterior:

$$(V - \lambda)^2 - c^2 = 0 \quad (V - \lambda)^2 = c^2 \quad \lambda = V \pm c \quad [8.2.30]$$

Como  $\lambda$  adopta valores reales disponemos de un **sistema hiperbólico**. El sistema resultante de ecuaciones diferenciales no se puede resolver de forma analítica, por lo que se acude al método de las características, asumiendo dos simplificaciones que suponen muy poca merma en la calidad del resultado definitivo global pero que sin embargo agilizan de forma importante los cálculos.

Contando con las hipótesis 12 y 13 por una parte, eliminamos los términos convectivos asumiendo que la onda de presión viaja mucho más deprisa que el agua  $c \gg V$ , lo que nos deja sin los términos  $V \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$  y  $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$  en ambas ecuaciones, por otra parte, en un primer abordaje suponemos que el ángulo de inclinación de la tubería es pequeño y como la función seno es un infinitésimo equivalente al ángulo, se puede ignorar  $\text{sen}(\alpha)$ , en base a lo que se puede despreciar entonces el sumando debido a la fricción por ser este proporcional al cuadrado de la velocidad, con esto las ecuaciones [8.2.26] y [8.2.28] quedan

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [8.2.31]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad [8.2.32]$$

Aplicamos el teorema de Schartz-Clairaut de igualdad de las derivadas cruzadas, derivando las ecuaciones [8.2.31] y [8.2.32] respecto de x y también respecto de t, eliminando los términos cruzados:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad [A]$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}\right) = 0 \quad [B]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + g \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad [C]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + g \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}\right) = 0 \quad [D]$$

Despejando en [A] la derivada cruzada y sustituyéndola en [D], así como despejando la cruzada de [C] para sustituirla en [B] obtenemos respectivamente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad [8.2.33]$$

Vemos que tanto la velocidad como la altura piezométrica cumplen con la ecuación de onda, (ver nota al final del capítulo) por lo que cualquier combinación lineal de ambas variables también la cumplirá, según el principio de superposición lineal.

Denominaremos U la combinación lineal de forma que  $U = \alpha \cdot H + \beta \cdot V$  cumpliendo esta combinación la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad [8.2.34]$$

Se demuestra que la función U, que igualmente depende de las variables x y t, asume un valor constante si las variables independiente x y t se relacionan mediante dos rectas llamadas rectas características:

**Primera recta característica:**

$$\frac{dx}{dt} = c \qquad dx = c \cdot dt \qquad \int dx = c \int dt \qquad x = c \cdot t + K_1 \quad [8.2.35]$$

Esta ecuación representa una recta en el plano x-t con pendiente igual a 1/c y abscisa en el origen igual a  $K_1$

**Segunda recta característica:**

$$\frac{dx}{dt} = -c \quad dx = -c \cdot dt \quad \int dx = -c \int dt \quad x = -c \cdot t + K_2 \quad [8.2.36]$$

Esta recta tiene pendiente igual a  $-1/c$  y abscisa en el origen  $K_2$ .

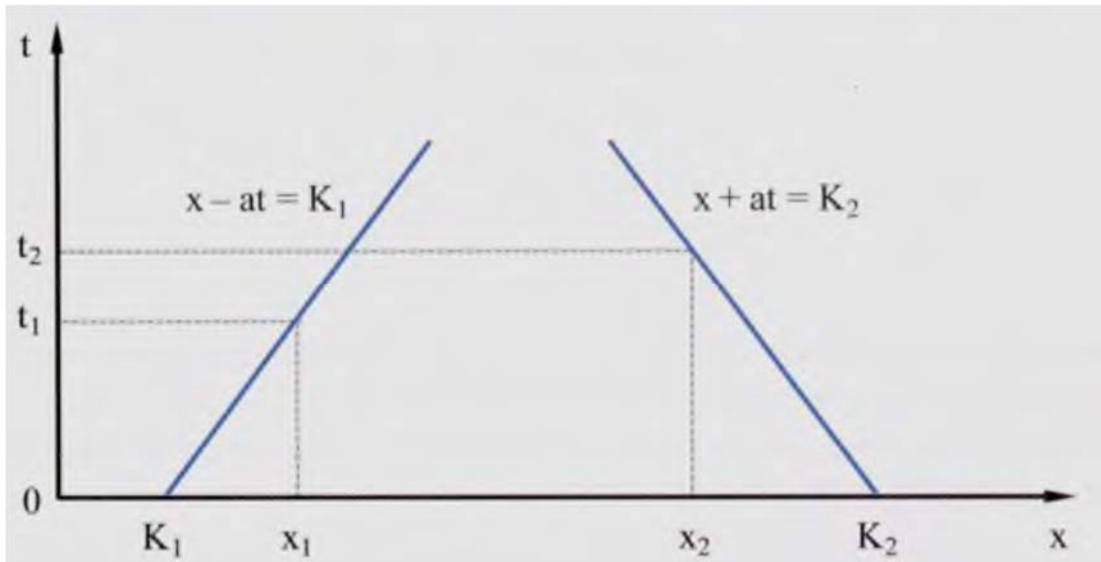


Figura 8.3. Rectas características en el plano x-t. Fuente Abreu et alter.

En la figura 8.3 adjunta se representan las rectas características que parten de sendos puntos  $k_1$  y  $k_2$  del eje de las abscisas. Recordemos que el rango en el que se mueve la variable independiente  $x$  es la longitud de la tubería y por tanto el marco de variabilidad de los términos  $k_1$  y  $k_2$  son igualmente dicha longitud. Las coordenadas cartesianas de los puntos de arranque de las rectas características en el eje de abscisas son  $(k_1, 0)$  para la primera recta y  $(k_2, 0)$  para la segunda.

Como apuntamos anteriormente a lo largo de las rectas características el valor de la función  $U(x,t)$  no se altera, permaneciendo constante, es decir en un punto cualquiera  $P_1$  de la primera recta característica que tenga por coordenadas  $(x_1, t_1)$  se cumplirá siempre  $U(x_1, t_1) = U(k_1, 0)$ . De la misma forma llegamos a la conclusión de que para un punto cualquiera  $P_2$  de la segunda recta característica  $U(x_2, t_2) = U(k_2, 0)$ .

Presentaremos la formulación del método de las características en dos casuísticas distintas, la primera despreciando el rozamiento y la segunda tomándolo en consideración.

### 8.3 MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS PARA TUBERÍAS SIN PÉRDIDAS POR FRICCIÓN.

Abreu-Cabrera et alter demuestra que el valor de la combinación lineal  $U_1 = H+(c/g) \cdot V$  es constante a lo largo de la primera recta característica  $C^+$  así como que el valor de la combinación lineal  $U_2 = H-(c/g) \cdot V$  es constante a lo largo de la segunda recta característica  $C^-$ .

La recta  $C^+$  mantiene constante el valor que asume  $U_1$  en el punto  $K_1$  de la tubería, así como la recta  $C^-$  transmite sin alteración alguna el valor que toma  $U_2$  en el punto  $K_2$ . Ambas rectas "transmiten" la información a la velocidad  $c$ , puesto que  $dx/dt = c$  para  $C^+$  y  $dx/dt=-c$  para  $C^-$ .

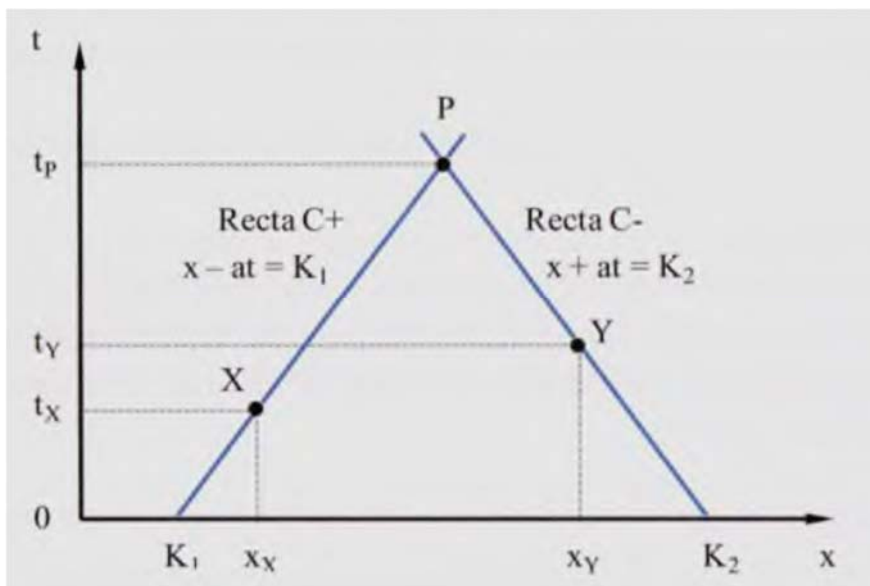


Figura 8.4. Transmisión de los valores de U a través de las rectas características. Fuente Abreu et alter.

Se observa en la figura como el valor de  $U_1$  que asume el punto X (heredado de  $K_1$ ) en el instante  $t_x$  se transmite siguiendo  $C^+$  y de la misma manera ocurre para el punto Y que habiendo asumido el valor  $U_2$  en  $K_2$  lo transmite a lo largo de  $C^-$  en un instante  $t_y$ . En el punto P, intersección de ambas rectas características se cumplen simultáneamente  $U_1$  y  $U_2$  en el instante  $t_p$ . En el punto P los valores de las variables H y V deben cumplir simultáneamente  $U_1$  y  $U_2$  obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\text{Para } C^+ \quad H_x + \left(\frac{c}{g}\right) V_x = H_p + \left(\frac{c}{g}\right) V_p \quad [8.3.1]$$

$$\text{Para } C^- \quad H_y - \left(\frac{c}{g}\right) V_y = H_p - \left(\frac{c}{g}\right) V_p \quad [8.3.2]$$

La resolución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas nos conduce al valor de H y V en el punto P a partir de sus dos antecesores en el tiempo.

Sumando ambas ecuaciones:

$$(H_x + H_y) + \left(\frac{c}{g}\right)(V_x - V_y) = 2H_p \quad H_p = \left(\frac{1}{2}\right)(H_x + H_y) + \left(\frac{c}{2 \cdot g}\right)(V_x - V_y) \quad [8.3.3]$$

Restando ambas ecuaciones:

$$(H_x - H_y) + \left(\frac{c}{g}\right)(V_x + V_y) = \left(\frac{2 \cdot c}{g}\right)V_p \quad V_p = \left(\frac{g}{2 \cdot c}\right)(H_x - H_y) + \left(\frac{1}{2}\right)(V_x + V_y) \quad [8.3.4]$$

En base a las dos ecuaciones anteriores, se eligen dos puntos en los que se conozcan los valores de H y V y se hallan los correspondientes valores para un tercero desconocido, repitiendo este proceso las veces deseadas obtenemos las características del flujo deseadas en toda la tubería.

## 8.4 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS ASUMIENDO EL TÉRMINO DE FRICCIÓN.

Debido a la dificultad que presenta la integración de las ecuaciones asumiendo la existencia tanto de los términos convectivos como del rozamiento agua-tubería se establece en este apartado otra estrategia algebraica de aproximación al fenómeno del Golpe de Ariete. Partimos de las dos ecuaciones halladas que denominamos anteriormente ecuaciones [6.19] y [6.20] respectivamente:

$$V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{c^2}{g}\right) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \text{sen}(\theta) = 0 \quad [6.19] [8.4.1]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot D} = 0 \quad [6.20] [8.4.2]$$

En este sistema de ecuaciones tenemos como **variables dependientes** la sobrepresión **H**, cuyos valores mediremos en metros de columna de agua y la velocidad V estimada en metros/segundo. Como **variables independientes** disponemos del tiempo **t** en segundos y de la distancia **x** en metros lineales que, si adoptamos el origen de medición de distancias en la posición de la válvula, representa el recorrido de las abscisas a lo largo del eje de la tubería.

Se inicia el procedimiento con la combinación lineal de ambas ecuaciones a través del multiplicador de LaGrange ( $\lambda$ ), de la forma [8.4.1] +  $\lambda$  [8.4.2] = 0 obteniendo la ecuación [8.4.3]. Sustituyendo resulta:

$$V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \text{sen}(\theta) + \lambda \cdot \left[ g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f}{2 \cdot D} \cdot V|V| \right] = 0 \quad [8.4.3]$$

El método de las características consiste en encontrar valores de  $\lambda$  (concretamente dos) que nos permitan transformar ambas ecuaciones en derivadas parciales en un sistema de ecuaciones en derivadas totales, resolubles en base a métodos numéricos. Reordenando la ecuación [8.4.3]:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)(V + \lambda \cdot g) + \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) + \lambda \left[ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot \left(V + \frac{c^2}{\lambda \cdot g}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) \right] + V \cdot \text{sen}(\theta) + \lambda \cdot \left(\frac{f}{2D}\right) \cdot V|V| = 0 \quad [8.4.4]$$

Podemos considerar dos opciones válidas posibles al ser tanto  $\lambda$ ,  $g$  como  $c$  constantes siempre y por lo tanto con derivada nula.

$$V + \lambda \cdot g \quad \text{como resultado de } dx/dt \quad [8.4.5]$$

$$V + [c^2/(\lambda \cdot g)] \quad \text{como resultado de } dx/dt \quad [8.4.6]$$

Substituimos [8.4.5] y [8.4.6] en [8.4.4]

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}\right) + \lambda \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) + V \text{sen}(\theta) + \frac{\lambda \cdot f}{2 \cdot D} V|V| = 0 \quad [8.4.7]$$

Sabemos que tanto la sobrepresión  $H$  como la velocidad  $V$  son dependiente de la distancia  $x$  y del tiempo  $t$ , es decir  $H=H(x,t)$  y  $V=V(x,t)$  luego su diferencial nos proporciona la posibilidad de despejar tanto  $dH/dt$  como  $dV/dt$ . Diferenciamos  $H(x,t)$  y dividimos por  $dt$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad [8.4.7]$$

Diferenciamos  $V(x,t)$  y dividiendo por  $dt$  hallamos la ecuación [8.4.6]

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad [8.4.8]$$

La substitución de las ecuaciones [8.4.8] y [8.4.9] en la ecuación [8.4.7] simplifica bastante la situación dando lugar a la ecuación [8.4.10]

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) + \lambda \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) + V \cdot \text{sen}(\theta) + \left(\frac{\lambda \cdot f}{2 \cdot D}\right) \cdot V|V| = 0 \quad [8.4.10]$$

Una forma de relacionar todos los parámetros involucrados incluyendo el multiplicador de LaGrange es igualar las ecuaciones [8.4.5] y [8.4.6] y cancelando  $V$  en ambos miembros despejamos  $c^2$

$$V + \lambda \cdot g = V + \frac{c^2}{\lambda \cdot g} \quad \lambda \cdot g = \frac{c^2}{\lambda \cdot g} \quad \lambda^2 \cdot g^2 = c^2$$

Como buscamos los valores de  $\lambda$  que cumplen la igualdad anterior despejamos  $\lambda$

$$\lambda^2 = \frac{c^2}{g^2} \quad \lambda = \pm c/g \quad \lambda = c/g \quad \lambda = -c/g$$

Podemos ahora substituir cada uno de los valores anteriores de  $\lambda$  en la ecuación [8.4.10] que de esta forma se desdobra de forma natural en dos ecuaciones que denominamos [8.4.11] y [8.4.12]:

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{c}{g}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) + V \cdot \text{sen}(\theta) + \left(\frac{c \cdot f}{2 \cdot g \cdot D}\right) V|V| = 0 \quad [8.4.11]$$

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(-\frac{c}{g}\right) \cdot \frac{dV}{dt} + V \text{sen}(\theta) + \left(-\frac{c \cdot f}{2 \cdot g \cdot D}\right) V|V| = 0 \quad [8.4.12]$$

Recordemos que se deben cumplir las ecuaciones [8.4.5] y [8.4.6]. De la expresión [8.4.5] obtenemos otra que nos genera dos ecuaciones según el valor adoptados para  $\lambda$ .

$$\frac{dx}{dt} = V + \lambda \cdot g$$

● Para  $\lambda$  con valor  $c/g$  se tiene

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{c}{g} \cdot g \quad \frac{dx}{dt} = V + c$$

● Para  $\lambda$  con valor  $-c/g$  se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = V + \left(-\frac{c}{g}\right) \cdot g \quad \frac{dx}{dt} = V - c \quad [8.4.13]$$

De la expresión [8.4.6] obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{c^2}{\lambda \cdot g}$$

Substituimos los dos valores de  $\lambda$  hallados anteriormente:

● Para  $\lambda$  con valor  $c/g$  de nuevo se tiene

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{c^2}{\left(\frac{c}{g}\right) \cdot g} \quad \frac{dx}{dt} = V + c \quad [8.4.14]$$

● Para  $\lambda$  con valor  $-c/g$  se obtiene en este caso

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{c^2}{\left(-\frac{c}{g}\right) \cdot g} \quad \frac{dx}{dt} = V - c$$

De estas 4 ecuaciones anteriores solamente dos de ellas son distintas que son las denominadas ecuaciones [8.4.13] y [8.4.14]:

$$\frac{dx}{dt} = V - c \quad [8.4.13] \quad \frac{dx}{dt} = V + c \quad [8.4.14]$$

Finalmente obtenemos las cuatro ecuaciones en derivadas totales que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete, que son las [8.4.15], [8.4.17], [8.4.18] y [8.4.16] puesto que estas dos últimas era una condición impuesta para el método algebraico para llegar al resultado hallado.

$$\text{Ecuación} \quad \left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{c}{g}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) + V \cdot \text{sen}(\theta) + \left(\frac{c}{g}\right) \cdot \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) \cdot V|V| = 0 \quad [8.4.15]$$

$$\text{Restricción} \quad \frac{dx}{dt} = V + c \quad [8.4.18]$$

Ecuación  $\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(-\frac{c}{g}\right) \cdot \frac{dV}{dt} + V \cdot \text{sen}(\theta) + \left(-\frac{c}{g}\right) \cdot \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) \cdot V|V| = 0$  [8.4.17]

Restricción  $\frac{dx}{dt} = V - c$  [8.4.16]

Las dos restricciones compuestas por las ecuaciones [8.4.18] y [8.4.16] se pueden representar en un plano en el que se consideren las abscisas  $x$  frente al tiempo  $t$  en ordenadas. El orden de magnitud de la velocidad del fluido  $V$  es de unos pocos metros por segundo, mientras que la velocidad de propagación de la onda de presión suele estar en el entorno de los 1.500 m/s, por lo que en las ecuaciones de restricción ([8.4.18] y [8.4.16]) se puede despreciar  $V$  frente a la celeridad  $c$ , quedando ambas ecuaciones reducidas a la expresión de senda rectas representadas en un plano  $x - t$

$$\frac{dx}{dt} = \pm c$$

Son dos rectas de pendiente  $c$  y  $-c$  respectivamente. Tal y como vimos en el caso anterior estas dos rectas se denominan líneas o rectas características. El sentido físico de las líneas características que denominaremos  $C^+$  y  $C^-$ , en función del sentido de su pendiente, son las trayectorias materiales por la que se desplazan (o que recorren) las ondas de presión que describen las ecuaciones [8.4.1] y [8.4.2], de tal forma que si somos sabedores de las condiciones de presión ( $H$ ) y de velocidad ( $V$ ) en el instante  $t_0$  en los puntos denominados en este caso como  $R$  y  $S$  podemos recorrer las líneas características hasta su intersección en el punto  $P$  mediante las ecuaciones [8.4.15] y [8.4.17], que describen el movimiento reflejado por el Golpe de Ariete.

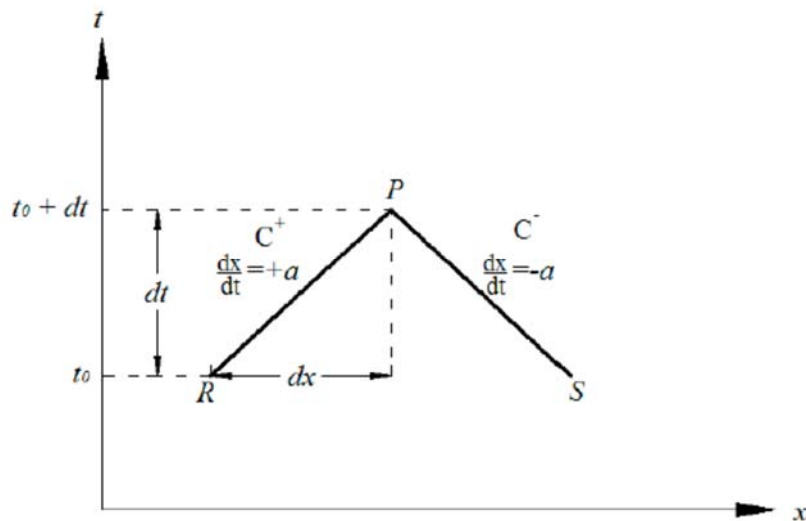


Figura 8.4. Rectas características en el plano x-t. Fuente Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

Las condiciones halladas en el punto  $P$  reflejado en la gráfica, a partir de los puntos  $R$  y  $S$  son en un tiempo algo posterior a  $t_0$ , concretamente  $t_0 + dt$ . Lo descrito en la figura aportada es el método iterativo a seguir, es decir que partiendo de dos puntos cuyas condiciones de presión y velocidad son conocidos en  $t_0$  alcanzamos otro punto un instante más tarde ( $dt$ ) siguiendo la traza de las



líneas características. El problema se nos plantea a la hora de abordar la resolución efectiva de las ecuaciones [8.4.15] y [8.4.17].

La dificultad radica en que se desconoce la variación de la velocidad con el tiempo, es decir el término ( $dV/dt$ ) debiendo introducir aquí y en este aspecto, una simplificación que consiste en suponer que entre  $t_0$  y  $t_0+dt$  la variación de la velocidad es nula, o dicho de otro modo, que la velocidad se mantiene constante entre los puntos **R** y **P** así como entre el punto **S** y el **P**.

Partimos en primer lugar de la ecuación [8.4.15] multiplicando ambos miembros por  $dt$  y posteriormente integramos esta última ecuación entre los puntos **R** y **P**.

$$dH + \left(\frac{c}{g}\right) \cdot dV + V \cdot \text{sen}(\theta) \cdot dt + \left(\frac{c}{g}\right) \cdot \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) \cdot V|V| \cdot dt = 0$$

$$\int_R^P dH + \left(\frac{c}{g}\right) \int_R^P dV + \int_R^P V \cdot \text{sen}(\theta) \cdot dt + \int_R^P \left(\frac{c}{g}\right) \cdot \left(\frac{f}{2 \cdot D}\right) \cdot V|V| \cdot dt = 0$$

Para la primera de estas cuatro integrales queda según la Regla de Barrow

$$\int_R^P dH = H_P - H_R$$

De forma similar para el segundo término tenemos:

$$\left(\frac{c}{g}\right) \cdot \int_R^P dV = \left(\frac{c}{g}\right) \cdot (V_P - V_R)$$

Tal y como hemos comentado en las dos integrales restantes de las 4 inicialmente disponibles, vamos a considerar la velocidad del fluido como constante e igual a su valor en el punto inicial R. El tercer término queda entonces:

$$\int_R^P \text{sen}(\theta) \cdot V \cdot dt = \text{sen}(\theta) \cdot V_R \int_R^P dt = V_R \cdot \text{sen}(\theta) \cdot (t_P - t_R)$$

Donde  $\text{sen}(\theta)$  es constante por definición. El término  $t_P - t_R$  corresponde al tiempo transcurrido entre los valores  $t = t_0$  y  $t = t_0 + dt$ , es decir  $dt = t_P - t_R$ . Como estamos tratando con incrementos finitos hacemos uso de la equivalencia entre  $dt$  e  $\Delta t$ , por lo que  $t_P - t_R = \Delta t$ . Dado que entre el punto **R** y el punto **P** consideramos la velocidad constante es indistinto hablar de  $V = V_P = V_R$  y adoptaremos  $V_R$  por ser coherentes con el resto de los subíndices y además ser **R** un punto con presión y velocidad conocidas a través de la ecuación  $V_R = Q_R/A$ . La integración del cuarto término de la ecuación, con lo comentado anteriormente, ya no presenta dificultad alguna siendo en este caso, constantes  $c$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $2 \cdot D$  y  $V$  porque así lo hemos considerado.

$$\int_R^P \left(\frac{c \cdot f}{g \cdot 2 \cdot D}\right) \cdot V|V| dt = \left(\frac{c \cdot f}{g \cdot 2 \cdot D}\right) \int_R^P V|V| dt = \left(\frac{c \cdot f}{g \cdot 2 \cdot D}\right) (V|V|) \int_R^P dt = \left(\frac{c \cdot f}{g \cdot 2 \cdot D}\right) (V|V|) (t_P - t_R)$$

$$\int_R^P \left(\frac{c \cdot f}{g \cdot 2 \cdot D}\right) V|V| dt = \left(\frac{c \cdot f}{g \cdot 2 \cdot D}\right) \cdot \frac{Q_R |Q_R|}{A^2} \Delta t$$

Por un tema de operatividad se suele poner la ecuación resultante en función del caudal, porque es mucho más fácil realizar mediciones de caudal tanto la tubería como en la válvula, en función de su grado de apertura que medir la velocidad del fluido. Recordemos que, por definición de caudal, este es un producto de la velocidad por el área interior de la tubería pudiéndose escribir  $Q = Vel \cdot Area = V \cdot A$  de donde obtenemos la velocidad como  $V = Q/A$  organizando la ecuación final queda:

Por lo que respecta a la línea de característica  $C^+$

$$(H_P - H_R) + \left(\frac{c}{A \cdot g}\right) \cdot (Q_P - Q_R) + \text{sen}(\theta) \cdot \frac{\Delta t}{A} \cdot Q_R + \left(\frac{c \cdot f}{2 \cdot g \cdot D}\right) \cdot \left(\frac{1}{A^2}\right) \cdot Q_R |Q_R| \cdot \Delta t = 0 \quad [8.4.19]$$

En esta ecuación las incógnitas son  $H_P$  y  $Q_P$ . El  $\Delta t$  lo marcaremos nosotros al definir la partición del tramo a estudiar.

Podemos tener las mismas consideraciones para  $C^-$  con solo intercambiar el índice R por S y cambiar el signo de c, pasando a considerarse c como negativo.

$$(H_P - H_S) + \left(-\frac{c}{A \cdot g}\right) \cdot (Q_P - Q_S) + \text{sen}(\theta) \cdot \frac{\Delta t}{A} \cdot Q_S + \left(-\frac{c \cdot f}{2 \cdot g \cdot D}\right) \cdot \left(\frac{1}{A^2}\right) \cdot Q_S |Q_S| \cdot \Delta t = 0 \quad [8.4.20]$$

El proceso práctico que se suele seguir es dividir el tramo de tubería que discurre entre el embalse y la válvula en N partes iguales que se identifican con un índice i. Es importante tener en cuenta que tal y como hemos definido el  $\Delta x$  este es igual al producto  $c \cdot \Delta t$  siendo c la velocidad a la que viajan las ondas de presión a lo largo de la conducción y el líquido involucrado que, para nosotros en todos los casos, será agua. Este hecho se deriva directamente de las dos ecuaciones restrictivas, a saber, la ecuación [8.4.18] y [8.4.16]. Es conveniente trabajar con un solo índice i que recorre todo el tramo de la tubería y especificar las ecuaciones [8.4.19] y [8.4.20] en función de su antecesor en el tiempo i-1 y su situación posterior i+1 en vez de utilizar los puntos origen R y S con el punto final P. Este proceso responde al siguiente esquema de la figura 8.5:

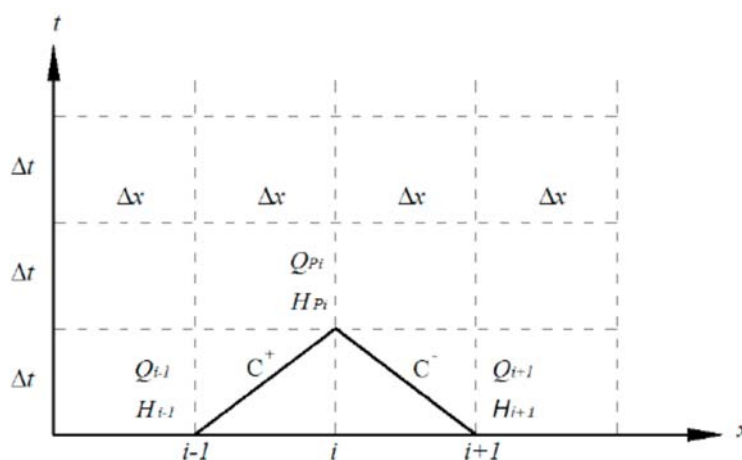


Figura 8.5. Red mallada de avance del proceso. Fuente Proyecto de Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

El esquema de representación gráfica del método de las características es una red mallada en cuadrícula, en la que un eje (generalmente el de abscisas) representa el espacio (x) discretizado en saltos incrementales de valor  $\Delta x$  y las ordenadas marcan el paso del tiempo, igualmente discretizado de forma incremental como  $\Delta t$ . Reescribimos las ecuaciones [8.4.19] y [8.4.20] en función del índice mudo  $i$  tanto para la línea característica  $C^+$  como para la  $C^-$  obteniendo las ecuaciones [8.4.21] y [8.4.22]

$$(H_{Pi} - H_{i-1}) + \left(\frac{c}{A \cdot g}\right) \cdot (Q_{Pi} - Q_{i-1}) + \text{sen} \theta \cdot \frac{\Delta t}{A} \cdot Q_{i-1} + \left(\frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2}\right) \cdot Q_{i-1} |Q_{i-1}| \cdot \Delta t = 0 \quad [8.4.21]$$

$$(H_{Pi} - H_{i+1}) + \left(-\frac{c}{A \cdot g}\right) \cdot (Q_{Pi} - Q_{i+1}) + \text{sen} \theta \cdot \frac{\Delta t}{A} \cdot Q_{i+1} + \left(-\frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2}\right) \cdot Q_{i+1} |Q_{i+1}| = 0 \quad [8.4.22]$$

En estas dos ecuaciones que forman sistema, tenemos dos incógnitas que son el valor de la presión  $H$  y el caudal  $Q$  del punto  $P_i$  que hemos remarcado como  $H_{Pi}$  y  $Q_{Pi}$ . De la aplicación sucesiva de las ecuaciones anteriores hallamos nuevos valores para puntos en función de los anteriormente calculados. Las variables definitorias del proceso físico como son el caudal  $Q$  y la altura piezométrica  $H$  se generan en base a sus valores conocidos en un instante inmediatamente anterior. Para dar comienzo del proceso iterativo anterior son fundamentales las condiciones iniciales, puesto que son las que nos permiten hallar los primeros puntos avanzados.

Adoptamos una notación más compacta despejando las variables de interés ( $H_{Pi}$ ,  $Q_{Pi}$ )

$$H_{Pi} = C_P - C_H \cdot Q_{Pi} \quad [8.4.23]$$

$$C_P = H_{i-1} + Q_{i-1} \cdot \left[ C_H - \left(\frac{\Delta t}{A}\right) \cdot \text{sen}(\theta) - \frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} |Q_{i-1}| \cdot \Delta x \right] \quad [8.4.24]$$

$$C_H = \frac{c}{g \cdot A} \quad [8.4.25]$$

En cada integración se conoce  $C_P$  puesto que sólo depende de las condiciones anteriores a la que queremos hallar. También se conoce siempre  $C_H$  porque es agrupación de características de la tubería, siendo además  $g$  la constante de aceleración gravitacional. De la misma forma podemos expresar también la segunda ecuación:

$$H_{Pi} = C_N + C_H \cdot Q_{Pi} \quad [8.4.26]$$

$$C_N = H_{i+1} - Q_{i+1} \cdot \left[ C_H + \left(\frac{\Delta t}{A}\right) \cdot \text{sen}(\theta) - \frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} |Q_{i+1}| \cdot \Delta x \right] \quad [8.4.27]$$

$C_N$  es conocido de forma anterior a  $H_{Pi}$  y  $Q_{Pi}$  adoptando  $C_H$  el mismo valor que para la ecuación anterior. Resolviendo el sistema de forma genérica para  $H_{Pi}$  y  $Q_{Pi}$  tenemos igualando [8.4.23] y [8.4.26]

$$H_{Pi} = C_P - C_H \cdot Q_{Pi} = C_N + C_H \cdot Q_{Pi} = H_{Pi} \quad C_P - C_N = 2 \cdot C_H \cdot Q_{Pi}$$

$$\frac{(C_P - C_N)}{2 \cdot C_H} = Q_{Pi} \quad [8.4.28]$$

Substituyendo este valor de  $Q_{Pi}$  en cualquier de las ecuaciones [8.4.21] o [8.4.22]

$$H_{Pi} = C_N + \frac{C_P}{C_H} - \frac{C_N}{C_H} \quad [8.4.29]$$

Las condiciones de contorno son importantes y podemos aseverar que cuando la válvula se encuentra totalmente cerrada ya no discurre por esa sección caudal alguno por lo que se permite poner  $Q_{Pi} = 0$  pudiendo entonces hallar el valor de  $H_{Pi}$ .

En cuanto al embalse, dada su magnitud infinitamente mayor que el de la tubería, la presión hidrostática se mantiene constante pudiendo expresarse como  $H_{Pi} = H_0$  procediendo en este caso a despejar el caudal y, por ende, al dividir este por la sección de la tubería, el valor de la velocidad.

La consideración del grado de apertura de la válvula ( $\tau$ ) se puede introducir mediante la siguiente ecuación:

$$V = V_0 \cdot \tau \cdot \left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad [8.4.30]$$

Si multiplicamos ambos miembros por el área interior de la sección de la tubería obtenemos caudales. Para el punto genérico  $P_i$  es:

$$Q_{Pi} = Q_0 \cdot \tau \cdot \left(\frac{H_{Pi}}{H_0}\right)^{1/2} \quad [8.4.31]$$

$\tau$  representa la apertura de la compuerta de válvula en función del tiempo y suele ser un dato del fabricante que la suministra en forma de función polinómica dependiente del tiempo.

A modo de resumen del método de las características se puede enunciar que para calcular la altura piezométrica ( $H$ ) y el caudal ( $Q$ ) en cada punto de la tubería, se divide ésta en un número entero de tramos ( $NT$ ), que evidentemente genera un número de secciones dado por  $NS = NT+1$ . Se establece una malla cuadrangular con tamaño de celda  $\Delta x$  y  $\Delta t$ , cumpliéndose el criterio de convergencia de Courant, que si admitimos la celeridad constante se relaciona por  $\Delta t \cdot c = \Delta x$ . Con estas premisas, las rectas características  $C^+$  y  $C^-$  forman las diagonales de la cuadrícula. La figura adjunta explicita el proceso descrito.

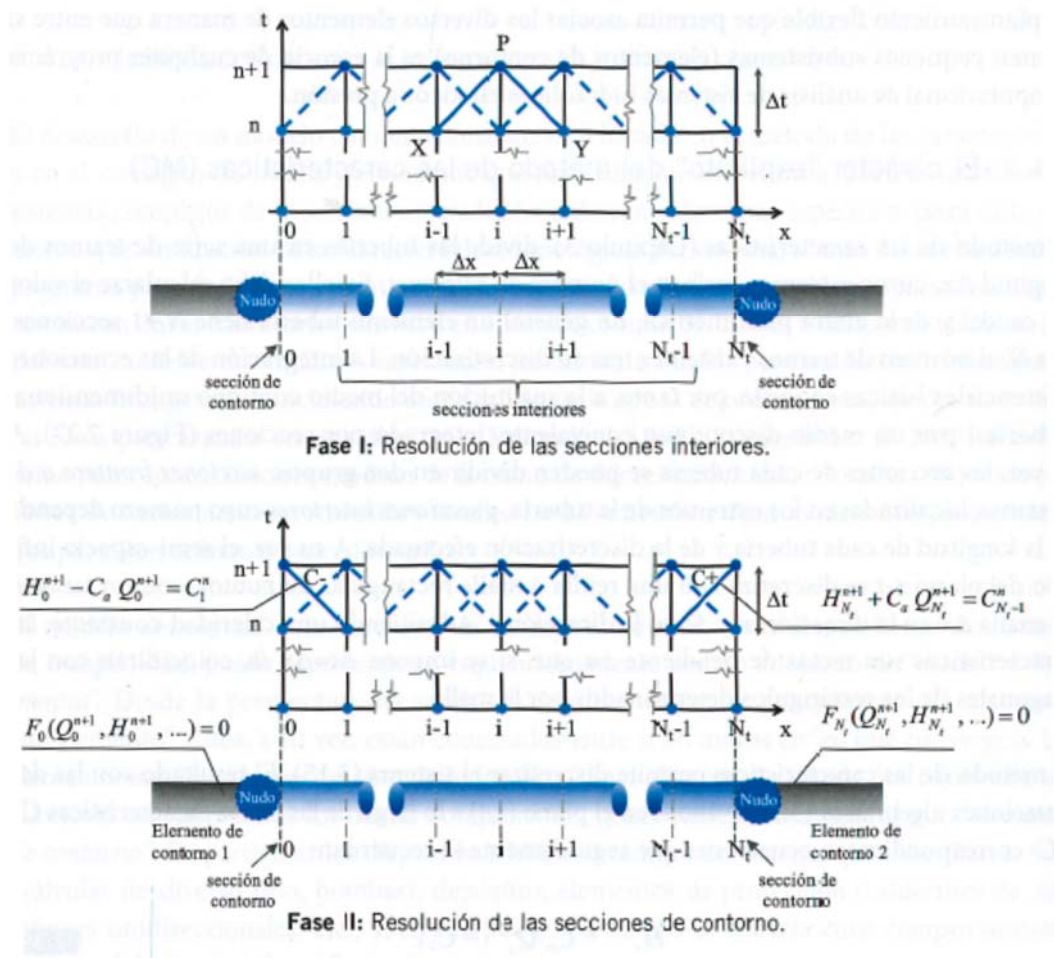


Figura 8.7. Resumen del proceso mediante rectas características. Fuente Abreu et aliter.

## 8.5 MÉTODO DE CARACTERÍSTICAS CONSIDERANDO LA VELOCIDAD DEL FLUIDO FRENTE A LA CELERIDAD DE LA ONDA.

Hasta ahora hemos despreciado la velocidad del agua frente a la de la onda de presión, cuya consecuencia directa es la eliminación de los términos convectivos del sistema de ecuaciones que gobierna el Golpe de Ariete.

En tuberías cuya elasticidad sea muy grande la anterior simplificación genera cierto error que podemos soslayar contemplando como  $dx/dt$  el valor  $V+c$  en vez de únicamente  $c$  en  $C^+$  y en cuanto a  $C^-$  se trata de entender  $dx/dt$  como  $V-c$  en vez de su simplificación  $dx/dt = -c$ . Como la

velocidad depende de las variables independientes  $x$  y  $t$ , lo que antes eran rectas características ahora serán curvas tal y como se muestra en la siguiente figura:

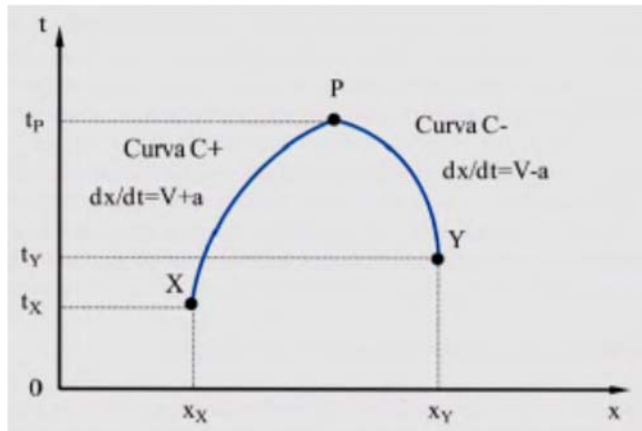


Figura 8.5. Curvas características en el plano  $x$ - $t$ . Fuente Abreu et alter.

Al tratarse de curvas, los puntos origen y destino no son equidistantes, ni en el espacio ( $x$ ) ni en el tiempo ( $t$ ), por lo que se distorsiona la retícula adoptada en el método de las características, despreciando la velocidad del fluido. El método adoptado de resolución parte de la misma retícula que si despreciásemos la velocidad, cumpliendo asimismo el criterio de convergencia de Courant, que veremos posteriormente. Ahora insertamos las rectas características tal y como se aprecia en la figura 8.6 adjunta, de forma que  $C^+$  y  $C^-$  ya no parten de los puntos descritos como  $X$  e  $Y$ , sino de otros intermedios pertenecientes al intervalo  $[X, Y]$ , pero sí que se cumple que  $C^+$  y  $C^-$  se intersectan en el punto  $P$  cuyas características de altura piezométrica y velocidad (o caudal) buscamos.

El proceso descrito tiene como finalidad el aproximar las curvas características por dos rectas cuya intersección es el punto  $P$  tal y como se aprecia en la figura 8.6

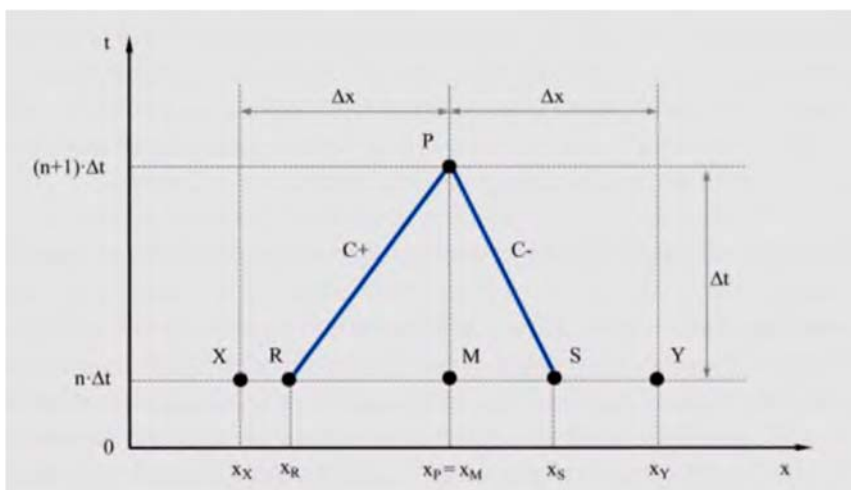


Figura 8.6. Rectas características interpoladas. Fuente Abreu et alter.

En el caso que nos ocupa las ecuaciones involucradas son para  $C^+$  y  $C^-$  respectivamente, por pares:

$$(H_p - H_R) + \left(\frac{c}{g \cdot A}\right) \cdot (Q_p - Q_R) + \left(\frac{f_R}{2 \cdot g \cdot d \cdot A^2}\right) \cdot Q_R |Q_R| \cdot (x_p - x_R) = 0 \quad [8.5.1]$$

$$x_p - x_R = (V_R + c) \cdot \Delta t \quad [8.5.2]$$

$$(H_p - H_S) - \left(\frac{c}{g \cdot A}\right) \cdot (Q_p - Q_S) - \left(\frac{f_S}{2 \cdot g \cdot d \cdot A^2}\right) \cdot Q_S |Q_S| \cdot (x_p - x_S) = 0 \quad [8.5.3]$$

$$x_p - x_S = (V_S - c) \cdot \Delta t \quad [8.5.4]$$

El problema que se nos plantea es que, en este caso, desconocemos los valores de H y Q asociados a los puntos R y S y los tenemos que interpolar a partir de los puntos X e Y que sí conocemos y de su punto medio M, tal y como se describe en la figura 8.6. La interpolación lineal se apoya en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{X_M - X_R}{\Delta X} = \frac{H_M - H_R}{H_M - H_X} = \frac{Q_M - Q_R}{Q_M - Q_X} \quad [8.5.5]$$

$$\frac{X_S - X_M}{\Delta X} = \frac{H_S - H_M}{H_Y - H_M} = \frac{Q_S - Q_M}{Q_Y - Q_M} \quad [8.5.6]$$

Disponemos ahora de un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas perfectamente resoluble, recordando que  $X_p = X_M$  por construcción. Este proceso se repite hasta hallar todos los puntos deseados.

## 8.6 CRITERIO DE CONVERGENCIA

Para garantizar la convergencia del método nos apoyamos en el criterio de Courant-Friedrichs-Lewy que se expresa bajo la forma de Número de Courant (NC) definido de la siguiente manera:

$$NC = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \cdot (V + c) \quad [8.6.1]$$

Siendo:

- V la velocidad del agua (m/s).
- c es la velocidad de la onda de presión a través del conjunto agua-tubería(m/s).
- $\Delta t$  representa el incremento temporal en los que se discretiza la variable tiempo (s).
- $\Delta x$  es un elemento de la partición evaluada a lo largo de la longitud de la tubería de tal forma que si dividimos toda la longitud del conducto en un número N de partes iguales hallamos  $\Delta x$  como  $\Delta x = \text{Longitud Tubería}/N$  disponiendo entonces de N+1 secciones (m).

La variable N que computará el número de intervalos en los que dividimos la longitud de la tubería, se puede variar a nuestro antojo, pero al crecer este el cómputo informático se hace más pesado, teniendo además que dar cumplimiento al criterio de convergencia anterior, puesto que si el Número de Courant es igual a uno el método converge y la solución es exacta; si el número de Courant (NC) es menor que la unidad se produce amortiguación del resultado y cuando el Número de Courant se eleva por encima de la unidad el sistema numérico se hace inestable.

Es importante saber que la celeridad (c) de la onda de presión es mucho mayor que la velocidad que presenta el agua en la tubería (V), estamos hablando de que la velocidad V del fluido es del orden del 3 % de la correspondiente a la onda de presión c, por lo que se puede ampliamente despreciar V frente a c en el número de Courant, simplificándose la expresión de regularidad de la cuadrícula.

$$NC = 1 = (V + c) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad \Delta x = c \cdot \Delta t \qquad [8.6.2]$$

Esta última relación nos marca la relación de proporcionalidad que debe observarse en la construcción de la cuadrícula para garantizar con total seguridad y solvencia la convergencia y exactitud del método de las características aplicado al fenómeno del Golpe de Ariete.

#### NOTA.

Las ecuaciones lineales diferenciales en derivadas parciales de segundo orden se contemplan bajo la siguiente ecuación general:

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D = 0$$

- Los coeficientes A, B, y C son funciones de las dos variables independientes x e y.
- D es una función que depende de 5 elementos: x, y, la función f,  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$

La ecuación genérica se clasifica en función del signo del discriminante  $B^2 - 4 \cdot A \cdot C$  de la siguiente forma:

- $B^2 - 4A \cdot C < 0$  Elíptica.
- $B^2 - 4A \cdot C = 0$  Parabólica.
- $B^2 - 4A \cdot C > 0$  Hiperbólica (nuestro caso).



## CAPÍTULO 9.

# MODELIZACIÓN Y ESTUDIO DEL PROCESO Y DESARROLLO DEL GOLPE DE ARIETE.

### 9.1 DESCRIPCIÓN DE LOS PARÁMETROS GRÁFICOS.

Para poder analizar los diagramas resultantes de las simulaciones, daremos una breve explicación del significado físico y gráfico del fenómeno de Golpe de Ariete.

Nos basamos en el siguiente gráfico genérico y describiremos de nuevo, aunque con menos detenimiento, el proceso observado, la manera en que su evolución se refleja en la gráfica y las magnitudes numéricas representadas en el esquema.

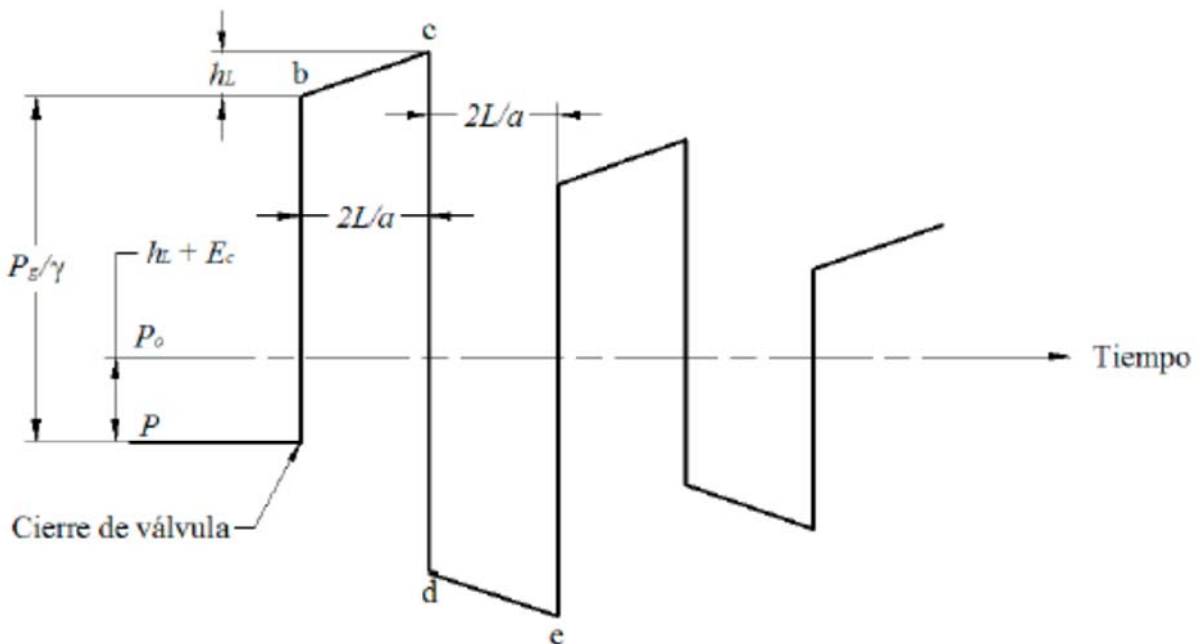


Figura 9.1. Sobrepresión en la válvula con cierre rápido. Fuente: Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

Antes del cierre de la válvula se tiene un régimen permanente y el agua posee una energía que se puede desglosar en tres términos, tal y como refleja el teorema de Bernoulli.

El primer término de energía viene descrito en el diagrama como  $P_0$  y representa la presión inducida por el embalse debido al peso de la columna de agua que gravita sobre cualquier punto

de la tubería y por ende en la válvula. Como el diagrama reproduce el fenómeno en función del tiempo solamente en un punto de la tubería, concretamente la válvula, no sabemos si estamos ante una tubería horizontal o descendente, tal y como se ha considerado en la parte teórica, aunque este aspecto aquí no reviste trascendencia pues lo único que modificaría sería la altura de la línea de  $P_0$  respecto de la horizontal de  $P$  con una variación lineal conforme se avance a lo largo de la tubería, es decir sólo altera el valor del parámetro  $P_0$ . Recordemos que denominamos tiempo crítico y lo denotamos por  $T_c$  al tiempo que invierte la onda de presión del Golpe de Ariete en viajar desde la válvula hasta el embalse y volver a la válvula, recorriendo dos veces la longitud de la tubería, una a la ida hasta el embalse y la otra de vuelta hasta la válvula. Como la onda de presión viaja a una velocidad que hemos transcrito como  $c$ , el tiempo crítico vendrá dado por la siguiente expresión:

$$T_c = 2 \cdot \frac{L}{a} \quad [9.1.1]$$

El tiempo crítico  $T_c$  marca la frontera, y distingue el cierre rápido del cierre lento, según el tiempo de accionamiento de la compuerta sea mayor o menor que  $T_c$  respectivamente.

El segundo término que suma en la energía en puntos cercanos a la válvula antes del inicio de la maniobra es el de energía cinética, que se denota como  $E_c$  en el diagrama. Vimos con anterioridad que, es proporcional al cuadrado de la velocidad con la que circula el agua en régimen de flujo permanente pre cierre, con coeficiente de proporcionalidad  $1/(2 \cdot g)$  que, si asumimos para la aceleración de la gravedad el valor aproximado de 10 metros/segundo<sup>2</sup> arroja un valor cercano a  $1/20 = 0,05$ . Queda entonces:

$$E_c = \left( \frac{1}{2 \cdot g} \right) \cdot V_0^2 = 0,05 \cdot V_0^2 \quad [9.1.2]$$

La velocidad a través de una tubería a presión no rebasa más que, en contadas ocasiones, los 4 o 5 metros/segundo por lo que, medida en términos de metros de columna de agua, la energía cinética no suele superar la cifra de 1 metro, valor prácticamente despreciable frente a la profundidad del embalse.

El tercer y último término que forma la terna energética, que actúa sobre un punto de flujo es el inevitable rozamiento entre el agua y las paredes de la tubería, así como en todos los accesorios y cambios de dirección del ducto. En el diagrama la fricción se denota por  $h_L$  y, como no podía ser de otro modo, tiene signo negativo, puesto que siempre se opone al movimiento del agua. El subíndice L responde al hecho de que el rozamiento se determina por metro de longitud de la tubería.

Al efectuarse el cierre brusco de la compuerta se produce un incremento de presión en el agua que impacta contra la válvula, iniciándose el fenómeno de Golpe de Ariete. El incremento inicial de presión, inmediatamente después de cerrarse la válvula, lo denotamos por  $P_g$  tal y como se refleja en la figura 9.1. Para poder expresarlo en metros de columna de agua utilizamos  $P_g$  dividido

por el peso específico del agua, que representaremos por  $\gamma$ . Tal y como se aprecia en el diagrama, en el instante de cierre el salto de presión se expresa por  $P_g/\gamma$ . Podíamos pensar que es en ese preciso instante, en el que se produce la máxima sobrepresión  $P_g/\gamma$ , pero no ocurre de esa forma porque, la fricción solo se opone al movimiento del fluido cuando este está fluyendo y justamente la válvula no solo frena sino que, detiene el flujo del agua suponiendo un cierre total.

Al estar el agua en reposo estático, la energía de fricción ya no se resta de la energía total, es decir que se suma a la que lleva el agua. Al dejar de restar es como si sumara. La columna de agua se encuentra totalmente frenada y quieta cuando ha transcurrido el tiempo crítico  $T_c = 2 \cdot (L/c)$ .

En el diagrama se aprecia como la diferencia de altura entre los puntos **b** y **c** viene marcada como  $h_L$ , en consecuencia, con lo descrito anteriormente, habiendo transcurrido un tiempo  $2 \cdot L/c$  acotado en la figura. Este fenómeno de inversión del signo de la fricción en función de la velocidad del fluido se da entre todos los múltiplos enteros del tiempo crítico y siempre afectando de forma negativa al proceso, es decir incrementando, ya sea la sobrepresión como la subpresión del lado de los negativos, tal y como se aprecia en el segmento constante **d-e** del diagrama.

Conforme el transcurso del tiempo debido a la fricción y a la pérdida energética propiciada por las inversiones de sentido del flujo en la boca de la tubería en contacto con el embalse, el fenómeno se va amortiguando poco a poco. El tiempo de amortiguamiento suele rondar entre 2 y 3 minutos.

Para comprobar el buen funcionamiento del programa, así como obtener un conocimiento más práctico del fenómeno del Golpe de Ariete, se ha procedido a la ejecución de simulaciones variando los parámetros más definitorios del proceso. Concretamente se han ido modificando tres variables que son, por orden, **el tiempo de cierre** o accionamiento de la válvula, **el coeficiente de fricción**, **el diámetro** de la tubería y **el caudal** circulante.

Veremos como el tiempo de maniobra incide mayormente en el fenómeno de amortiguación y en menor medida en la magnitud del fenómeno al tiempo que el coeficiente de fricción gobierna directamente la relajación del sistema y su evolución rápida hacia la posición de equilibrio. El diámetro es quien menos incide sobre el fenómeno al intervenir de forma indirecta en las ecuaciones que rigen el Golpe de Ariete.

## 9.2 TIEMPO DE MANIOBRA DE LA VÁLVULA

La introducción de otros parámetros, exigidos por el programa, nos sitúa ante un cierre rápido. Se ha escogido de esta forma para forzar a que se genere un Golpe de Ariete de cierta magnitud que se refleje claramente en los diagramas aportados.

Comprobemos, con los datos que mantenemos constantes del problema, que nos situamos ante un cierre rápido calculando el tiempo crítico y nos cercioramos que es menor que el tiempo de cierre.

Con una longitud de tubería de 2000 metros y velocidad de la onda cifrada en 1400 metros/segundo, obtenemos un valor de tiempo crítico dado por

$$T_c = 2 \cdot L/c = 2 \cdot 2000/1400 = 2,86 \text{ seg.}$$

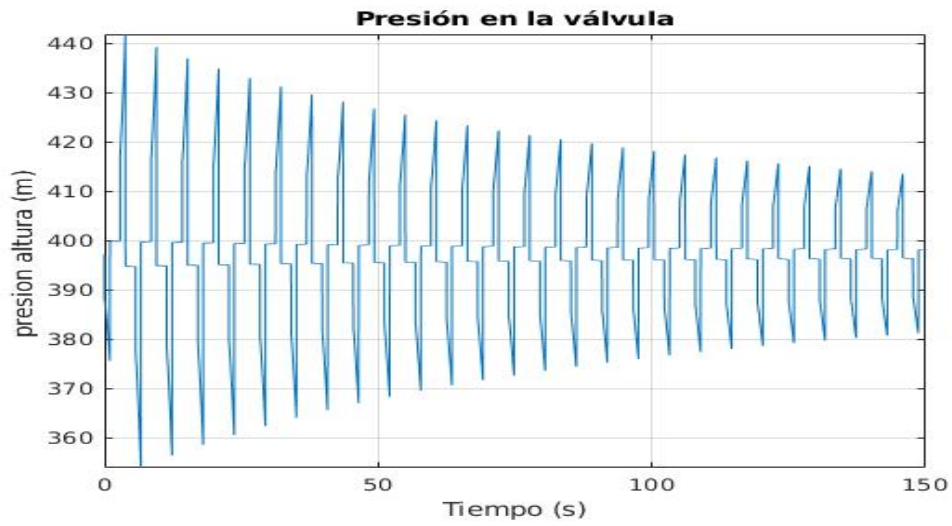
Como hemos impuesto un tiempo de cierre de 3 segundos, vemos que efectivamente estamos en la situación más peligrosa que es de cierre rápido.

El tiempo de ensayo es de 150 segundos en todos los casos y también mantenemos invariante la presión inicial en puntos cercanos a la válvula, asumiendo un valor de 397,28 metros de columna de agua.

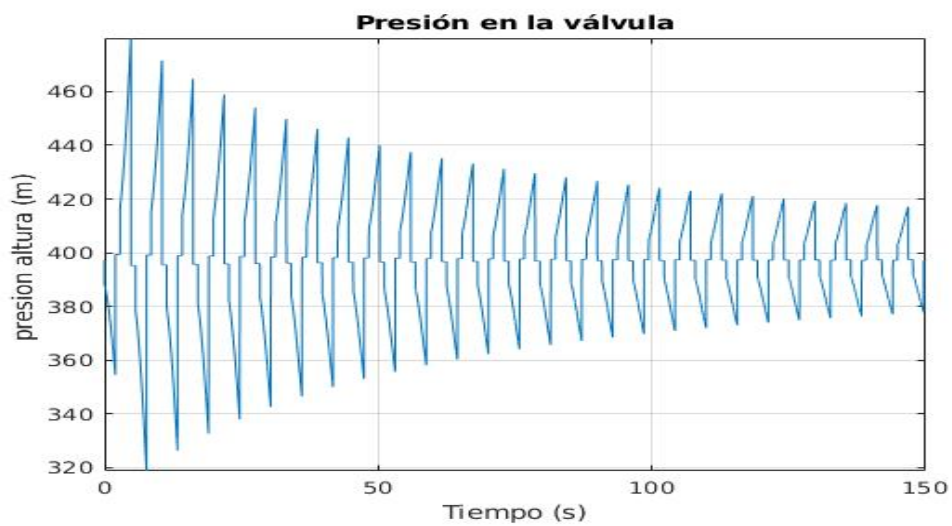
El tiempo en el que se extiende la maniobra de la válvula reviste una importancia derivada más de la cadencia del movimiento que de su amplitud. El factor determinante es la velocidad y regularidad en el cierre. La situación ideal es que el área interceptada por el cierre se desarrolle siguiendo una ley lineal. De no ser así, en los tiempos en que se desarrollan las aceleraciones de la válvula, se producen diversos Golpes de Ariete que, aunque de forma aislada son de menor magnitud que el provocado por el cierre total, pueden entrar en fase solapándose las ondas de presión creando un frente mayor y más destructivo (puente de Tacoma) debido al fenómeno de resonancia.

Los tiempos de cierre impuestos y sus correspondientes sobrepresiones asociadas, debidas al Golpe de Ariete, se pueden observar en las cinco figuras adjuntas:

Tiempo de maniobra: 1 segundo  
Sobrepresión del Golpe de Ariete: 44.64 mca.

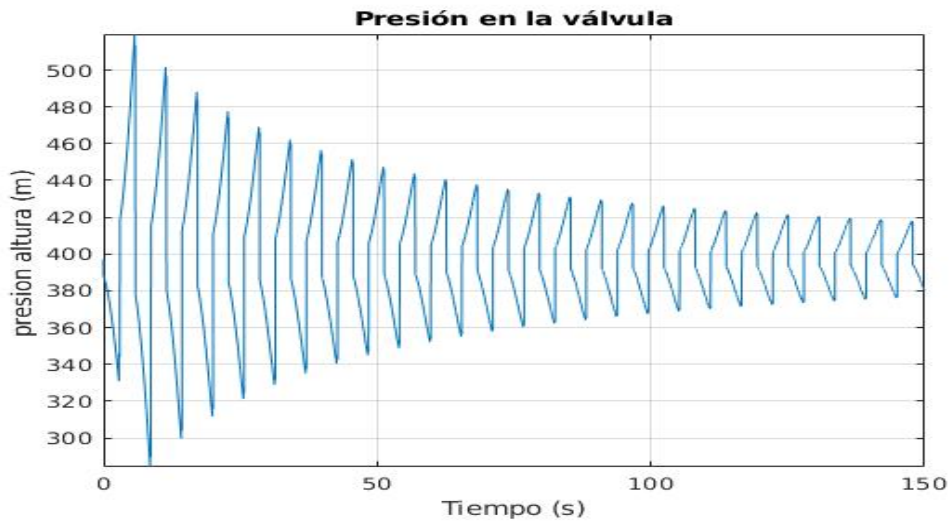


Tiempo de maniobra: 2 segundos.  
Sobrepresión del Golpe de Ariete: 82.64 mca.



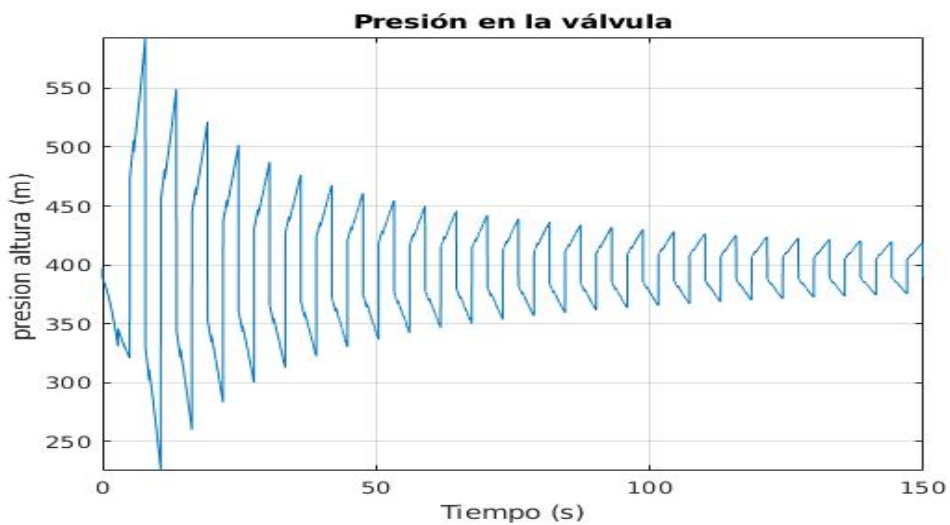
Tiempo de maniobra: 3 segundos.

Sobrepresión del Golpe de Ariete: 122.28 mca.

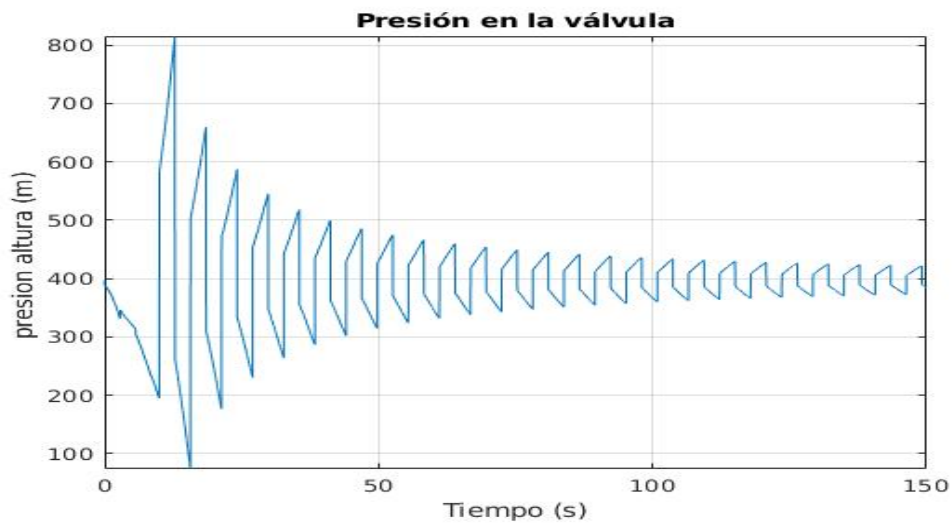


Tiempo de maniobra: 5 segundos.

Sobrepresión del Golpe de Ariete: 195.9 mca.



Tiempo de maniobra: 10 segundos.  
 Sobrepresión del Golpe de Ariete: 418.12 mca.



Tabulando los resultados a modo de resumen tenemos:

|                     |       |       |        |       |        |
|---------------------|-------|-------|--------|-------|--------|
| <b>Tiempo</b>       | 1     | 2     | 3      | 5     | 10     |
| <b>Sobrepresión</b> | 44,64 | 82,64 | 122,28 | 195,9 | 418,12 |

Se aprecia que conforme aumenta el tiempo de maniobra también lo hace la sobrepresión, de forma sensiblemente exponencial, pero la onda de presión se amortigua con mucha mayor rapidez.

### 9.3 COEFICIENTE DE FRICCIÓN AGUA-TUBERÍA

El coeficiente de fricción es el elemento decisorio que produce la casi totalidad de la amortiguación y desaparición de los efectos de sobrepresión generados por el Golpe de Ariete. Es un parámetro escurridizo y de muy difícil definición exacta. Durante muchos años solo se disponía de algunas ecuaciones empíricas para su averiguación.

Cuando en la tubería la trayectoria de las partículas de agua son paralelas al eje de la conducción e independientes del tiempo, nos encontramos ante un régimen laminar. En una sección determinada la velocidad no es la misma para todas las partículas del fluido pues, en las zonas de contacto con las paredes de la tubería la velocidad es nula, según la teoría de la capa límite y es máxima en el eje de la tubería siguiendo una ley parabólica.

El régimen de flujo se denomina turbulento cuando las trayectorias de las partículas del fluido son erráticas con velocidades que varían conforme al tiempo. En este caso, aunque el perfil de velocidades sigue presentando un máximo en el eje de la tubería, la velocidad del fluido no es nula en los puntos de contacto con dicha tubería. En la figura adjunta la parte superior representa un esquema de flujo laminar mientras la inferior un régimen hidráulico turbulento.

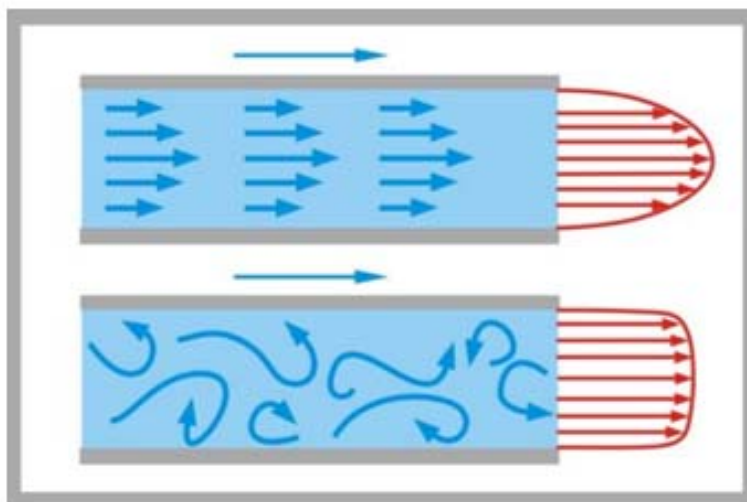


Figura 9.3. Flujo laminar y flujo turbulento. Fuente: Tuberías. Fuente <http://mecanicadefluidoscod5131587.blogspot.com/2015/11/perdidas-por-friccion-en-tuberias-con.html>

El que un líquido (agua), que circula a lo largo de un conducto, adopte uno u otro régimen depende principalmente de cuatro factores:

a). **La velocidad** media de circulación del flujo que denominamos  $V$ .



b). **El diámetro interno** de la tubería que designamos por D.

c). **La viscosidad cinemática** del agua ( $\nu$ )

d). **La rugosidad**, aunque debemos distinguir entre rugosidad absoluta y rugosidad relativa.

La rugosidad absoluta es el valor promedio adoptado en la medida de las irregularidades en su cara interna que presenta una tubería y se suele representar por K. La rugosidad relativa es la absoluta dividida por el diámetro de la tubería y en función de la magnitud de la rugosidad, los tubos se clasifican en lisos o rugosos.

La pérdida de carga, medida como siempre en metros de columna de agua, que sufre el líquido circulante por una tubería, es un término energético y viene dado por la denominada Ley de Darcy-Weisbach:

$$\text{Ley de Darcy – Weisbach} \quad J = \lambda \cdot \left( \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) \cdot \left( \frac{L}{D} \right) \quad [9.3.1]$$

- **J** es la pérdida de carga en metros de columna de agua.
- $\lambda$  es el llamado coeficiente de fricción que a menudo se presenta por f. Este coeficiente es adimensional.
- **V** es la velocidad media a la que circula el agua por la tubería medida en metros/segundo.
- **g** es nuestra conocida aceleración de la gravedad, que consideramos constante e igual, aproximadamente a 10 metros/segundo<sup>2</sup>. En algunos cálculos se suele aproximar el valor de g por el de  $\pi^2$ .
- **D** es el diámetro interno de la tubería que tiene que medirse en las mismas unidades en que viene dada la longitud del conducto.
- **L** representa, como siempre la longitud de la tubería que suele adoptarse en metros.

El estudio del coeficiente de fricción ( $\lambda$ ) se efectúa relacionándolo con dos parámetros importantes en mecánica de fluidos, la rugosidad relativa que hemos comentado anteriormente (**K/D**) y el número de Reynolds (**Re**), que liga los tres primeros parámetros comentados determinantes del régimen de flujo (laminar o turbulento) a saber, la velocidad (**V**) el diámetro (**D**) y la viscosidad cinemática ( $\nu$ ) del agua. La expresión definitoria del número de Reynolds es:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} \quad [9.3.2]$$

El número de Reynolds (Re) es adimensional, siempre y cuando se tome la precaución de usar en los tres parámetros que lo definen unidades homogéneas compatibles entre sí, para la velocidad de circulación del agua por la tubería se eligen los centímetros /segundo, mientras que para el diámetro interior de la tubería se mantiene la medición en centímetros, de esta forma la viscosidad cinemática del líquido a la temperatura a la que circula se puede expresar en centímetros<sup>2</sup>/segundo.

Como datos importantes se puede retener que, para el agua, a una temperatura de 12 grados Celsius, la viscosidad cinemática asume un valor de 0,0124 cm<sup>2</sup>/segundo y acerca del número de Reynolds se puede comentar que por debajo de valores de  $Re = 2000$ , el flujo se mantiene laminar. A partir de  $Re = 2000$  hacia arriba se inicia la llamada zona de transición que, para valores elevados de  $Re$ , pasa a ser un régimen turbulento. El paso del flujo de transición a turbulento está mal definido en general y es un proceso complejo, pero, por el contrario, solo depende de la rugosidad de la tubería indistintamente, puesto que las rugosidades son proporcionales entre sí y con el diámetro de la tubería.

Para entender el comportamiento hidráulico del agua se suele relacionar, el coeficiente de rozamiento ( $\lambda$ ) con el número de Reynolds ( $Re$ ) por una parte y con la rugosidad relativa por otra ( $K/D$ ) en un gráfico denominado ábaco de Moody.

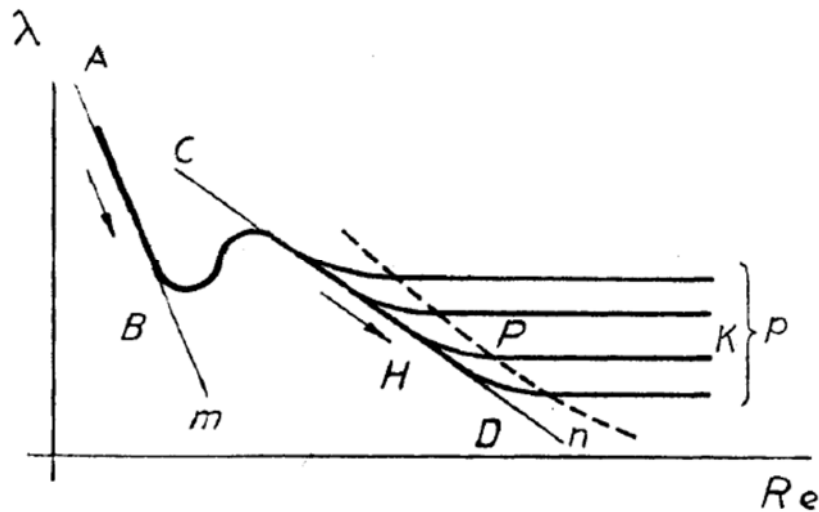


Figura 9.3. Ábaco de Moody. Fuente: Tuberías. José María Mayol Mallorquí.

El ábaco de Moody representa en abscisas y a escala logarítmica el número de Reynolds ( $Re$ ) y en ordenadas el valor del coeficiente de fricción ( $\lambda$ ). En él se distinguen tres tipos de rectas.

**RECTA M.**

Por una parte, la recta denominada como **m** que abarca números de Reynolds crecientes pero que permanecen por debajo de la barrera de  $Re = 2000$ , siendo entonces en régimen laminar independientemente de si estamos en presencia de tubería lisa o rugosa, el coeficiente de fricción  $\lambda$  decrece desplazándose entre los puntos **A** y **B** sobre la recta **m**. En estas condiciones el coeficiente de fricción  $\lambda$  viene dado por la expresión de Poiseuille:

Poiseuille

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

[9.3.3]

### RECTA N.

Por otra parte, encontramos la recta **n**. En el área situada entre las rectas **m** y **n** se desarrolla el flujo de transición, que abarca números de Reynolds que oscilan entre valores de **2000** a **40000**. El valor del Número de **Reynolds** **Re = 40.000** se suele considerar el máximo asumible para que el líquido permanezca en la zona de transición entre el régimen laminar y el turbulento.

A lo largo de la recta **n**, mientras se incrementa el número de Reynolds, los valores del coeficiente de fricción disminuyen desde el punto **C** hacia el punto **D**, pero no alcanzan este último punto porque, a la altura del punto **H** se inicia la entrada en turbulencia del flujo, en el que el coeficiente de fricción se estabiliza, pasando a ser únicamente función de la rugosidad relativa ( $k/D$ ) sin depender para nada del número de **Reynolds**. En cuanto al valor algebraico del coeficiente de fricción, considerando su evolución sobre el tramo **C – D**, viene dado por la llamada ley de los tubos lisos formulada por **Von Karmann** y **Nikuradse** donde el logaritmo es decimal:

$$\text{Von Karmann – Nikuradse} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log \left( \frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2,51} \right) \quad [9.3.4]$$

### RECTAS P.

El último tipo de rectas que entresacamos del ábaco de **Moody** es un haz de rectas paralelas denominado como **p** en el diagrama. A cada una de las rectas del haz le corresponde una rugosidad relativa (**K/D**). El punto **H** a partir del cual se puede considerar franqueado el límite del régimen de transición al turbulento es función directa de la rugosidad relativa siendo que, cuanto más lisa sea la tubería, más se acerca el punto **H** al punto **D** y menor es el coeficiente de fricción  $\lambda$ .

De forma cuasi paralela a la recta **n** se encuentra la curva de puntos discontinuos de forma que, entre el punto de escape **H** y el punto **P** de la curva se considera la tubería semirrugosa. A partir de la curva discontinua hacia la derecha se desarrolla francamente el régimen turbulento en el que ya no cabe hablar de tubos lisos o rugosos en relación a su comportamiento hidráulico. Es digno de mención que, un mismo ducto se considera liso entre los puntos **C** y **H**, mientras adquiere la condición de semirrugoso en el trayecto comprendido entre los puntos **H** y **P** y además se considera rugoso a lo largo de la horizontal **P – K**, una vez entrado de lleno el régimen turbulento.

En cuanto a la ecuación que gobierna el valor del coeficiente de fricción  $\lambda$  a lo largo del haz de rectas, esta responde a la ley de tubos rugosos:

$$\text{Nikuradse} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log \left( \frac{3,71 \cdot D}{k} \right) \quad [9.3.5]$$

Las dos fórmulas anteriores se refunden en una única expresión de la mano de **Colebrook** de forma empírica y tiene la ventaja de cubrir la zona de transición, cosa imposible en base a las dos expresiones anteriores debidas a **Nikuradse**.

$$\text{Colebrook} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71 \cdot D} \right) \quad [9.3.6]$$

En esta fórmula de Colebrook para valores muy bajos de **K** o muy altos de **Re** se hallan respectivamente las dos anteriores expresiones de Nikuradse.

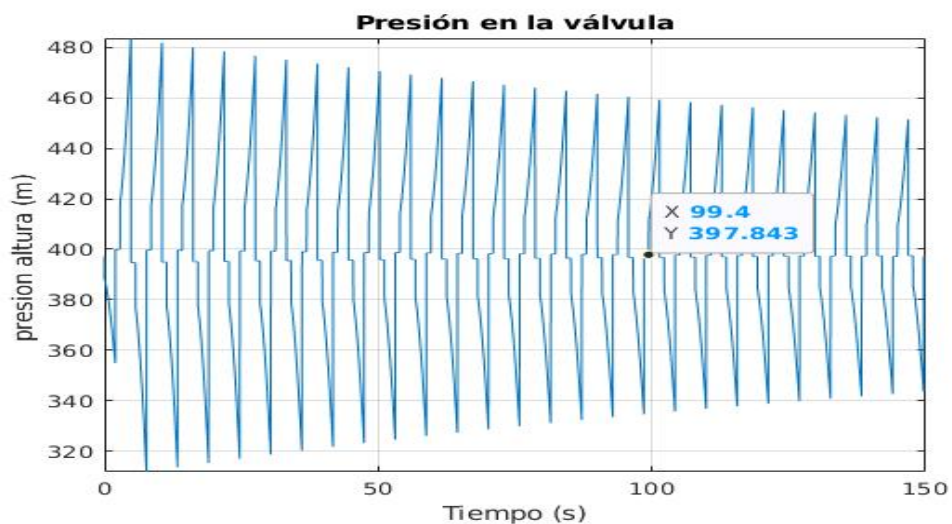
Como resumen esquemático de lo anterior, podemos enunciar que:

- El régimen de flujo puede ser laminar cuando las irregularidades de las paredes de la tubería no son relevantes y predomina el efecto de la viscosidad a través del número de Reynolds o, también puede ser turbulento cuando el número de **Reynolds** (y por ende la viscosidad) no influye, pero si predomina el efecto de la rugosidad. Entre ambos regímenes se desarrolla el de transición cuando no predomina ninguno de los parámetros considerados (Re, K/D) sobre el otro.
- En cuanto a su comportamiento hidráulico, las tuberías se distinguen entre: lisas, semirrugasas y rugosas, siendo que en función de las condiciones de servicio a que se ve sometida una misma tubería puede clasificarse en uno u otro grupo.
- El coeficiente de fricción es decreciente en los casos de régimen laminar y de transición, mientras se mantiene constante en régimen turbulento desarrollado conforme al crecimiento de Re.
- La fórmula de Colebrook es universal y se puede aplicar para cualquier régimen salvo el laminar, en que se aplica la expresión de Poiseuille.

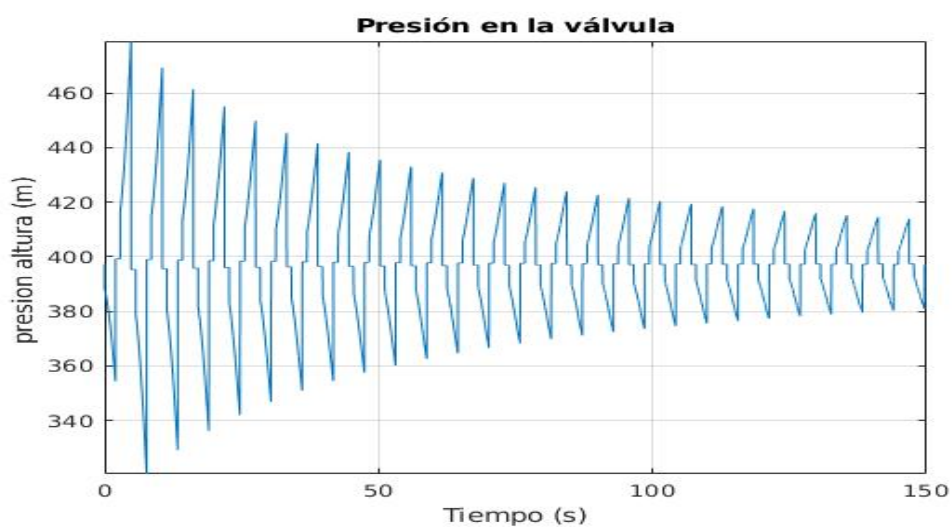
Se ha evolucionado el sistema variando únicamente el coeficiente de fricción y manteniendo el tiempo de maniobra en dos segundos (tiempo menor que el crítico) para garantizar con franqueza la ocurrencia del Golpe de Ariete.

Se aportan las gráficas de los ensayos efectuados reseñando los valores de los parámetros que las determinan.

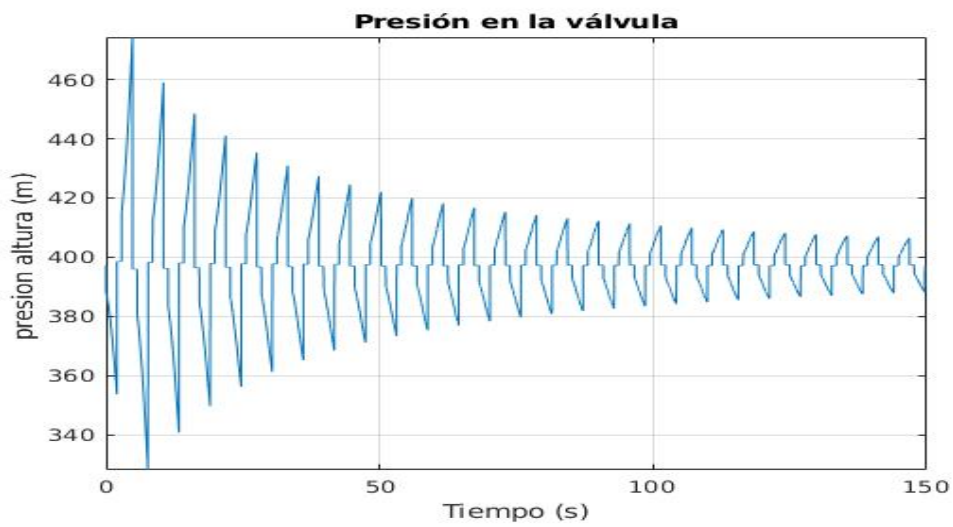
Tiempo de maniobra: 2 segundos.  
Coeficiente de fricción: 0.025  
Sobrepresión del Golpe de Ariete: 86.43 mca



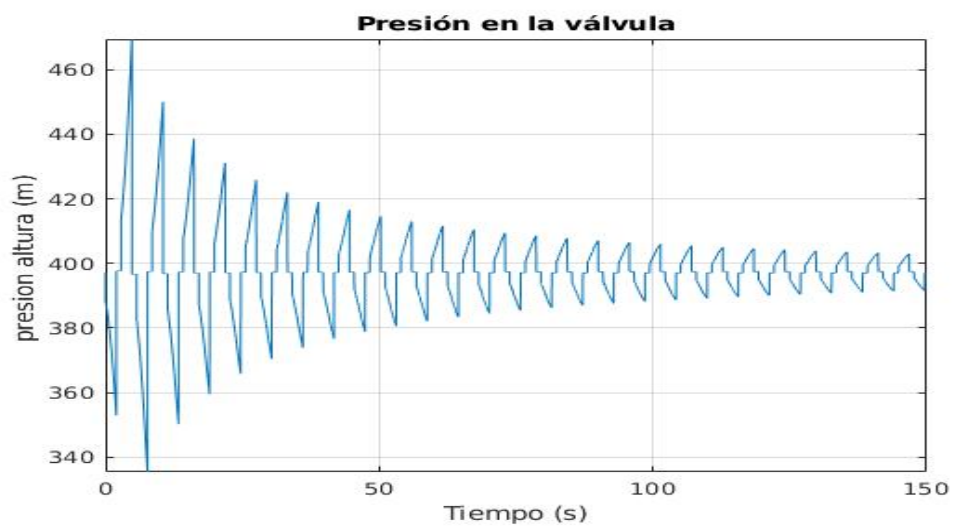
Tiempo de maniobra: 2 segundos.  
Coeficiente de fricción: 0.25  
Sobrepresión del Golpe de Ariete: 81.68 mca



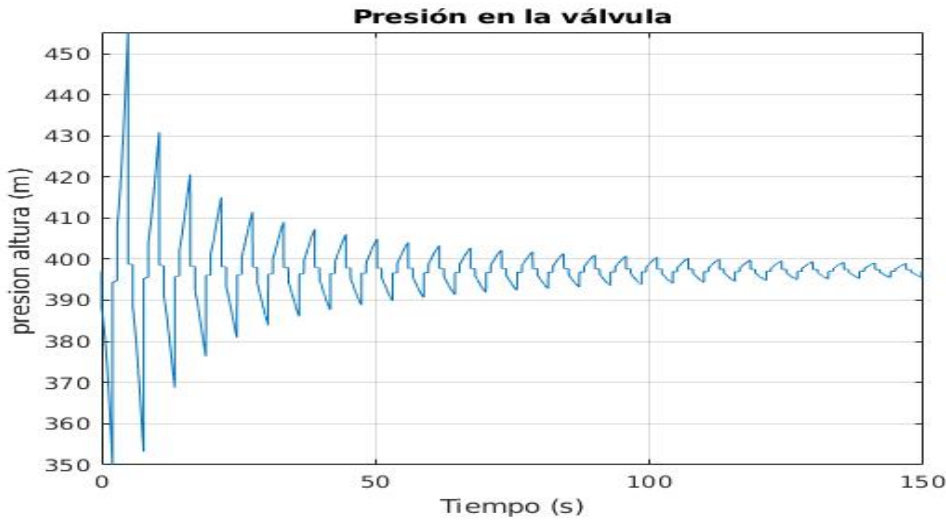
Tiempo de maniobra: 2 segundos.  
Coeficiente de fricción: 0.5  
Sobrepresión del Golpe de Ariete: 77.06 mca



Tiempo de maniobra: 2 segundos.  
Coeficiente de fricción: 0.8  
Sobrepresión del Golpe de Ariete: 72.25 mca



Tiempo de maniobra: 2 segundos.  
 Coeficiente de fricción: 2  
 Sobrepresión del Golpe de Ariete: 58.19 mca

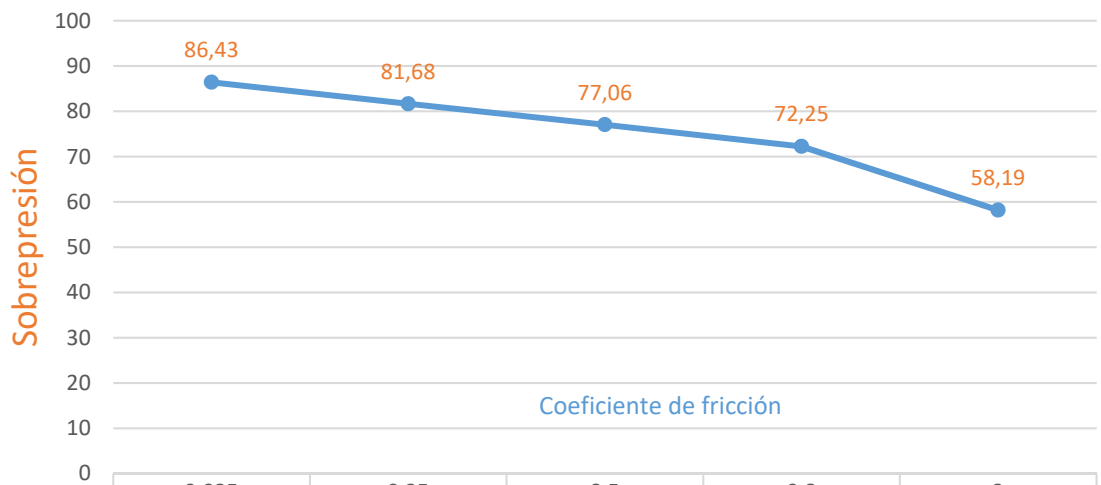


Los resultados obtenidos de forma resumida se reflejan en la tabla siguiente:

|                     |       |       |       |       |       |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>Fricción</b>     | 0,025 | 0,25  | 0,5   | 0,8   | 2     |
| <b>Sobrepresión</b> | 86,43 | 81,68 | 77,06 | 72,25 | 58,19 |

De la tabla anterior se infiere que, el valor del coeficiente de fricción no es un factor determinante de la magnitud asociada de sobrepresión, consecuencia del Golpe de Ariete puesto que, al multiplicar el valor del coeficiente de fricción por 80, al pasar de 0,025 a 2 solo se consigue disminuir la sobrepresión en un 33% de su magnitud inicial aproximadamente, pero lo que sí es llamativo en la secuencia de diagramas obtenidos de los resultados arrojados por el programa, y se aprecia con mucha claridad, es que se produce una rapidísima variación de la velocidad de amortiguación del fenómeno, no en vano la fricción es la "culpable" de que el Golpe de Ariete no oscile indefinidamente.

### Sobrepresión con variación del coeficiente de fricción.



|                | 0,025 | 0,25  | 0,5   | 0,8   | 2     |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ● Sobrepresión | 86,43 | 81,68 | 77,06 | 72,25 | 58,19 |



## 9.4 VARIACIÓN DEL DIÁMETRO DE LA TUBERÍA

Las variaciones de diámetro se han realizado introduciendo los valores por defecto que asume el programa establecidos de la siguiente forma en cuanto a características generales:

- Altura del depósito, 50 metros.
- Tiempo total de cierre de la válvula, 3 segundos.
- Tiempo de simulación, 150 segundos.
- El caudal inicial 0.025 metros<sup>3</sup>/segundo.
- El caudal final 0.01 metros<sup>3</sup>/segundo.
- El intervalo de tiempo 0.02 segundos.

Respecto de los datos propios de la tubería tenemos

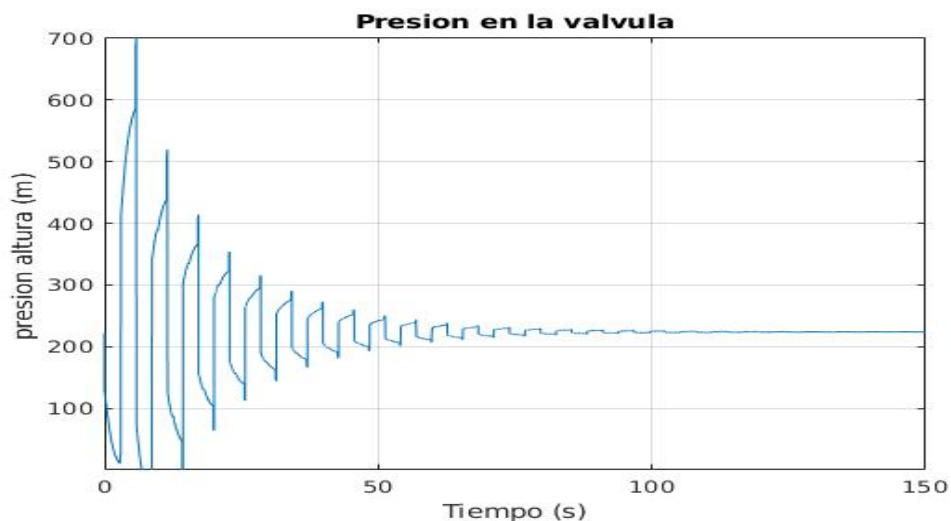
- Longitud de la tubería 2000 metros.
- Inclinación por defecto 5 grados sexagesimales.
- Factor de fricción, 0.02 (adimensional)
- Valor de la velocidad para la onda de presión 1400 metros/segundo.
- Coeficientes del polinomio de la ley de cierre de la válvula, 1,2,3.

Se aportan las gráficas resultantes de las simulaciones efectuadas cuyo resumen de resultados es el siguiente.

| Número de orden | Diámetro interno en metros | Sobrepresión en mca |
|-----------------|----------------------------|---------------------|
| 1               | 0.25                       | 479.49              |
| 2               | 0.50                       | 313.45              |
| 3               | 0.75                       | 189.75              |
| 4               | 1.00                       | 122.28              |
| 5               | 1.20                       | 89.64               |
| 6               | 1.50                       | 59.97               |
| 7               | 2.00                       | 35.69               |
| 8               | 3.00                       | 15.90               |

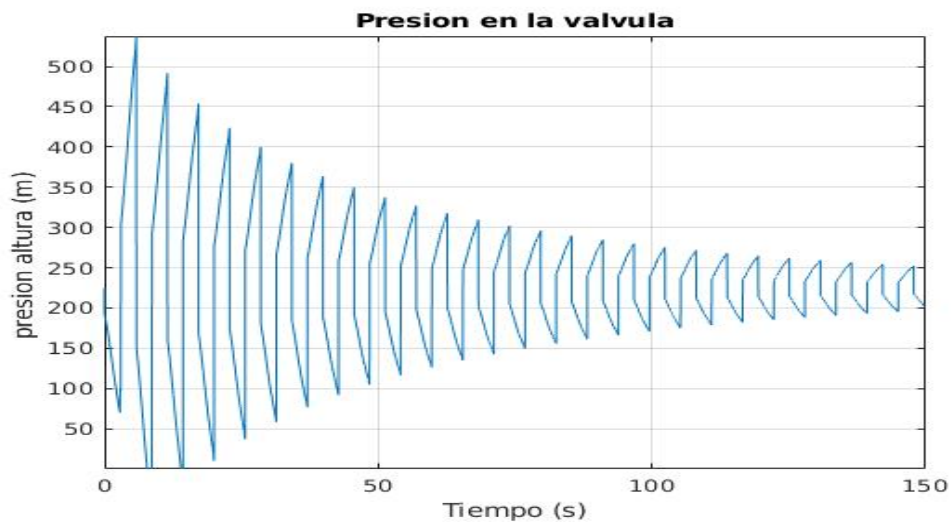
### Resultado obtenido para diámetro interno 0.25 metros

- Presión inicial en la válvula 222.21 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 701.70 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 479.49 metros



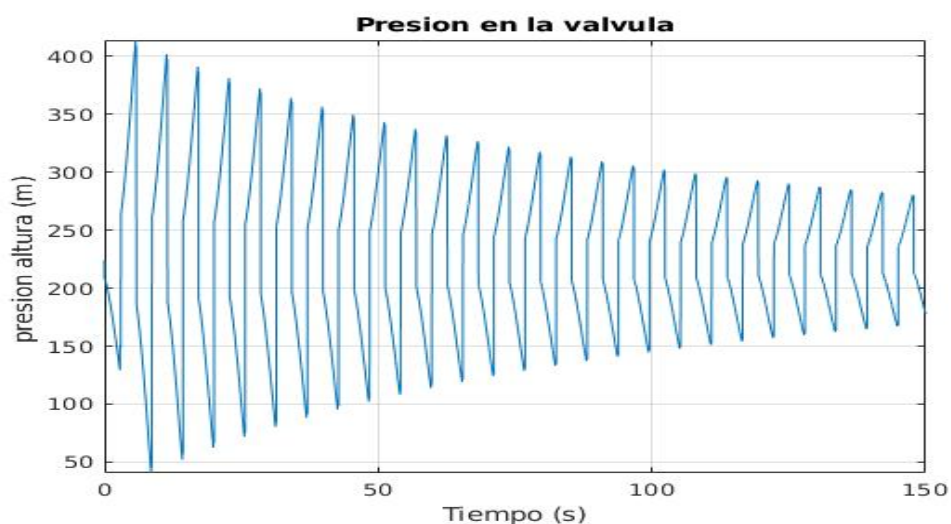
### Resultado obtenido para diámetro interno 0.5 metros

- Presión inicial en la válvula 224.25 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula: 537.69 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 313.45 metros



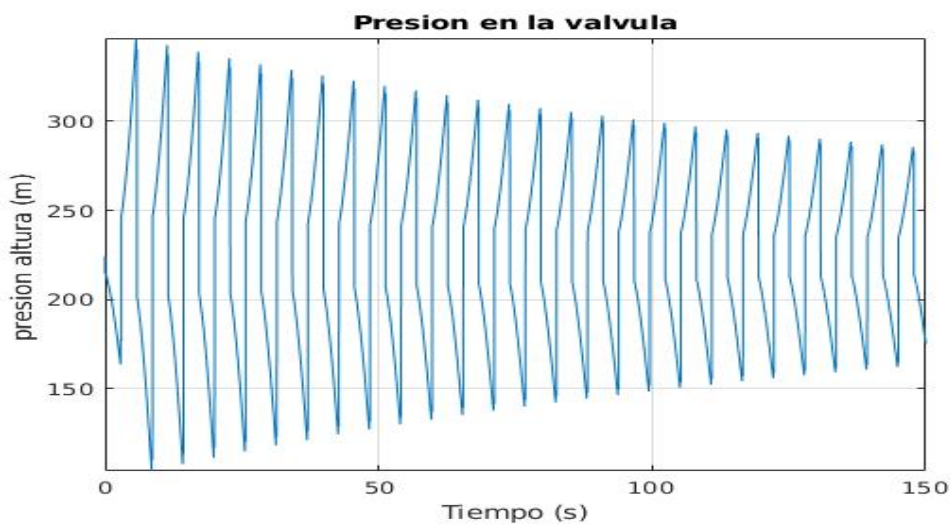
### Resultado obtenido para diámetro interno 0.75 metros

- Presión inicial en la válvula 224.30 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 414.05 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 189.75 metros



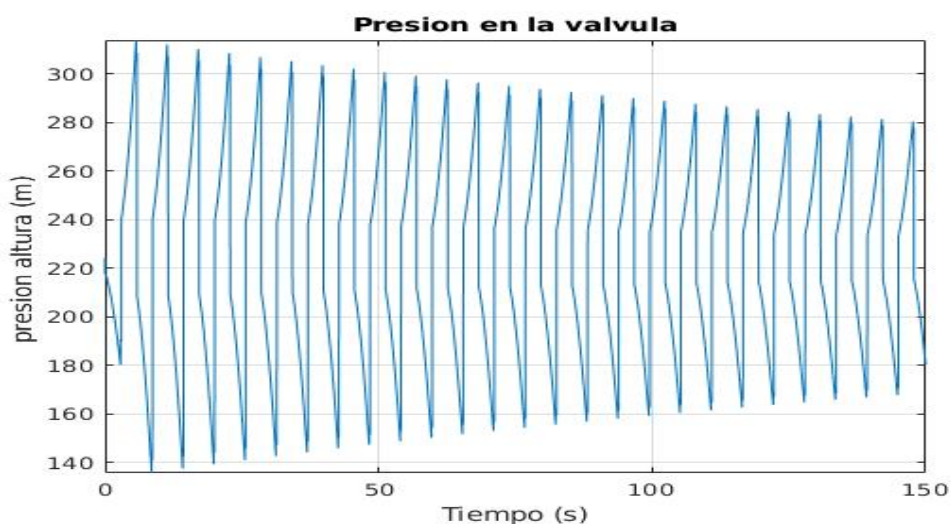
### Resultado obtenido para diámetro interno 1 metro

- Presión inicial en la válvula: 224.31 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula: 346.59 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete: 122.28 metros



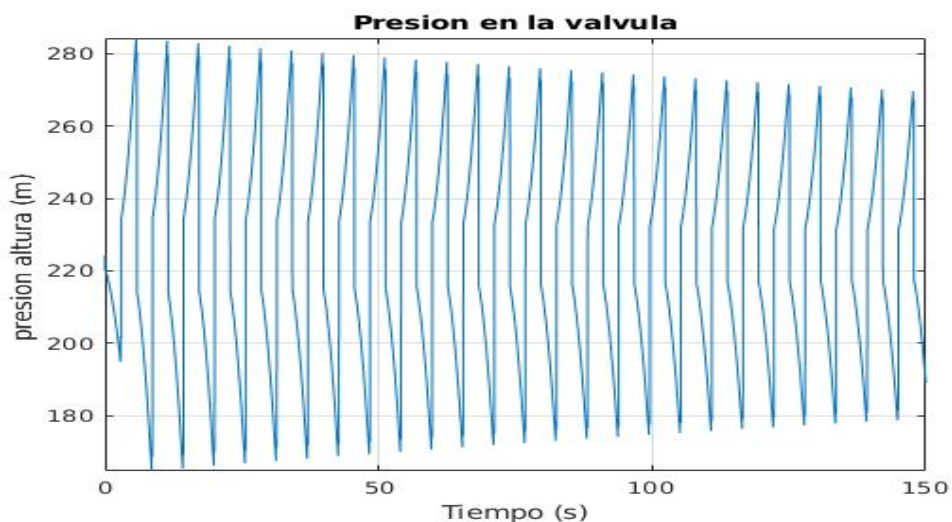
### Resultado obtenido para diámetro interno 1.2 metros

- Presión inicial en la válvula 224.31 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 313.95 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 89.64 metros



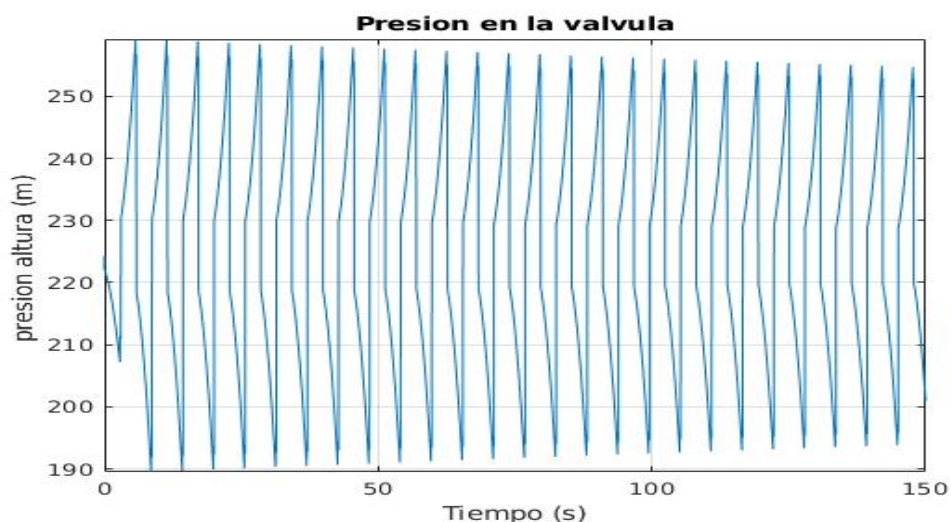
### Resultado obtenido para diámetro interno 1.5 metros

- Presión inicial en la válvula 224.31 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 284.00 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 59.97 metros



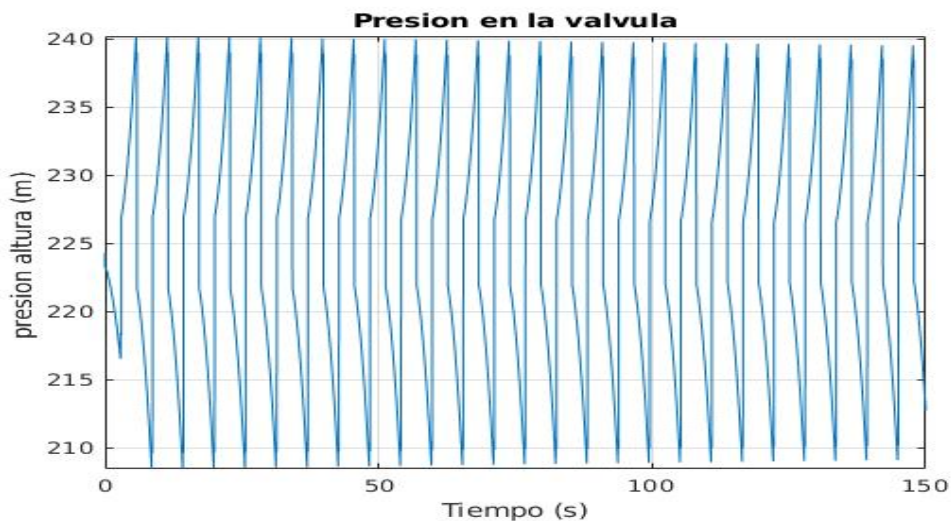
### Resultado obtenido para diámetro interno 2 metros

- Presión inicial en la válvula 224.31 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 260.00 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 35.69 metros



### Resultado obtenido para diámetro interno 3 metros

- Presión inicial en la válvula 224.31 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 240.21 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 15.90 metros



Del análisis de las gráficas se observa que conforme aumenta el diámetro decrece la sobrepresión. Este efecto adquiere mayor importancia en el rango de diámetros pequeños, mientras que para diámetros que superan el metro de diámetro, la relación se linealiza.

La repercusión más importante que tiene la variación del diámetro de la tubería es en el tiempo de amortiguación de la onda de presión, pues a mayor diámetro mucho menor es el apaciguamiento del fenómeno. Esto se debe a que la fricción es una fuerza que nace del rozamiento entre el agua y las paredes internas de la tubería y es directamente proporcional a la superficie actuante. El volumen de agua contenida en la tubería aumenta mucho más rápidamente que la superficie del contacto al incrementarse el diámetro.

Supongamos que aislamos un metro lineal de la tubería con diámetro inicial  $D$ , la superficie abarcada y el volumen correspondiente son:

$$Sup = \pi \cdot D \qquad Vol = (\pi/4) \cdot D^2$$

Si incrementamos el diámetro en la magnitud  $\Delta D$ , la nueva superficie de rozamiento y el correspondiente volumen involucrado son:

$$Superficie\ final = \pi \cdot (D + \Delta D) = \pi \cdot D + \pi \cdot \Delta D$$

$$Superficie\ final = Superficie\ Inicial + \pi \cdot \Delta D$$

$$Volumen\ final = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (D + \Delta D)^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot D^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cdot D \cdot \Delta D + \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \Delta D^2$$

$$Volumen\ final = Volumen\ inicial + \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot [2 \cdot D \cdot \Delta D + \Delta D^2]$$

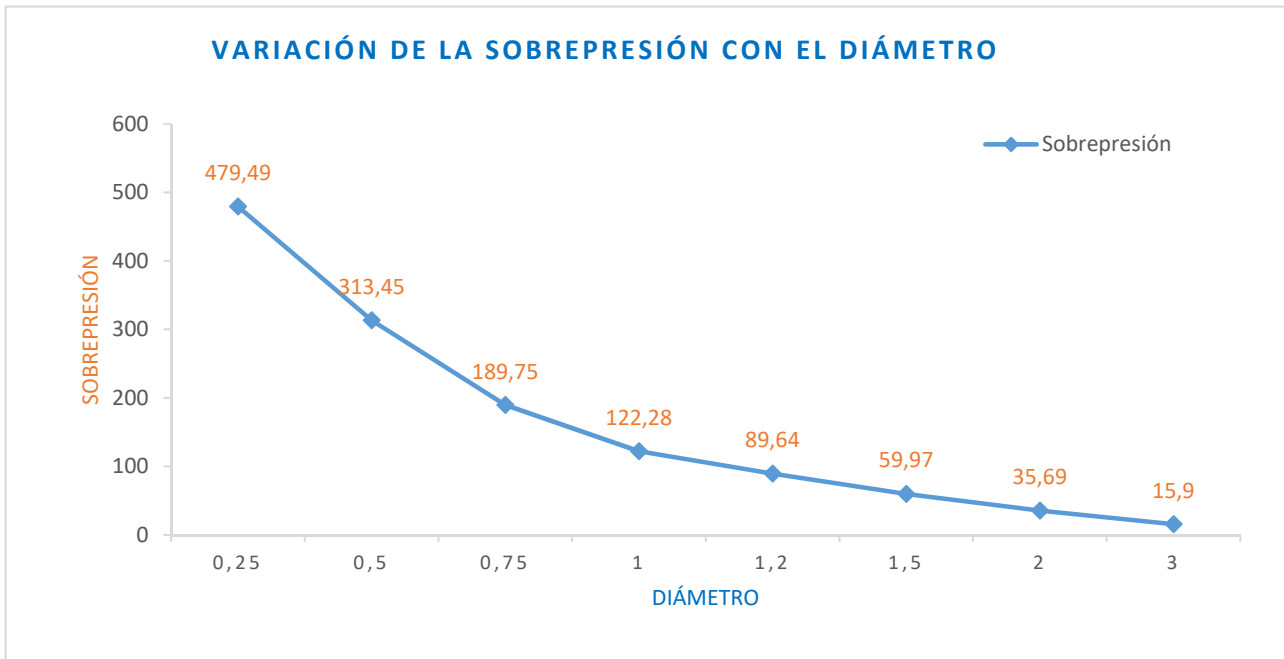
La tasa relativa de crecimiento es:

$$\frac{Incremento\ volumen}{Incremento\ superficie} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot [2 \cdot D \cdot \Delta D + \Delta D^2]}{\pi \cdot \Delta D}$$

$$\frac{\Delta Volumen}{\Delta Superficie} = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot [2 \cdot D + \Delta D] = \left(\frac{D}{2}\right) + \left(\frac{\Delta D}{4}\right)$$

Se aprecia que, aunque el incremento del diámetro no sea significativo, el cociente  $D/2$  siempre lo es, por lo que el crecimiento del volumen es mucho mayor que el de la superficie para una misma variación del diámetro.

De lo anterior se desprende que, puesto que la fricción es el principal responsable de la atenuación del fenómeno y ésta es proporcional a la superficie común involucrada, como el crecimiento del volumen es más rápido conforme al  $\Delta D$ , el tiempo de atenuación crece conforme lo hace el diámetro. Este hecho se visualiza directamente de la mera prospección ocular de las figuras aportadas.



## 9.5 EVOLUCIÓN DEL CAUDAL.

En cuanto a las distintas combinaciones moviendo la variable caudal se han realizado manteniendo igualmente los valores por defecto suministrados al programa que para las características generales se enuncian como:

- Altura del depósito, 50 metros.
- Tiempo total de cierre de la válvula, 3 segundos.
- Tiempo de simulación, 150 segundos.
- El caudal final nulo por cierre total de la válvula.
- El intervalo de tiempo 0.02 segundos.

Por lo que respecta de los datos relativos a la tubería hemos conservado

- Longitud de la tubería 2000 metros.
- Inclinación por defecto 5 grados sexagesimales.
- Factor de fricción, 0.02 (adimensional)
- Valor de la velocidad para la onda de presión 1400 metros/segundo.
- Coeficientes del polinomio de la ley de cierre de la válvula, 1,2,3.

Se aportan de la misma manera que anteriormente las gráficas proporcionadas por el programa.

Los resultados obtenidos de forma resumida se reflejan en la tabla siguiente:

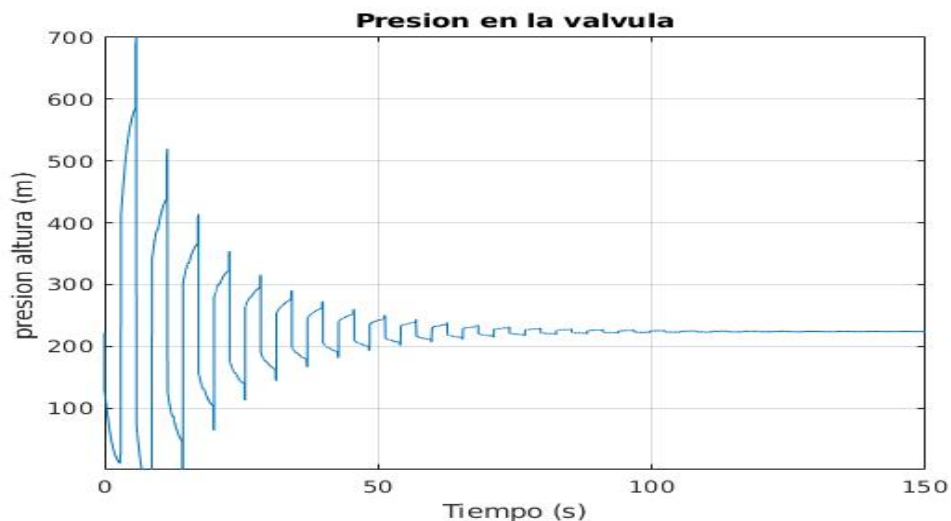
|                     |        |        |        |        |         |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| <b>Caudal</b>       | 0,25   | 0,5    | 1      | 1,5    | 2       |
| <b>Sobrepresión</b> | 525,46 | 676,84 | 831,95 | 930,96 | 1010,88 |

|      | Caudal | Sobrepresión |        |     |
|------|--------|--------------|--------|-----|
|      | 0,25   | 525,46       |        |     |
| 100% |        |              | 151,38 | 29% |
|      | 0,50   | 676,84       |        |     |
| 100% |        |              | 155,11 | 23% |
|      | 1,00   | 831,95       |        |     |
| 50%  |        |              | 99,01  | 12% |
|      | 1,50   | 930,96       |        |     |
| 33%  |        |              | 79,92  | 9%  |
|      | 2,00   | 1010,88      |        |     |



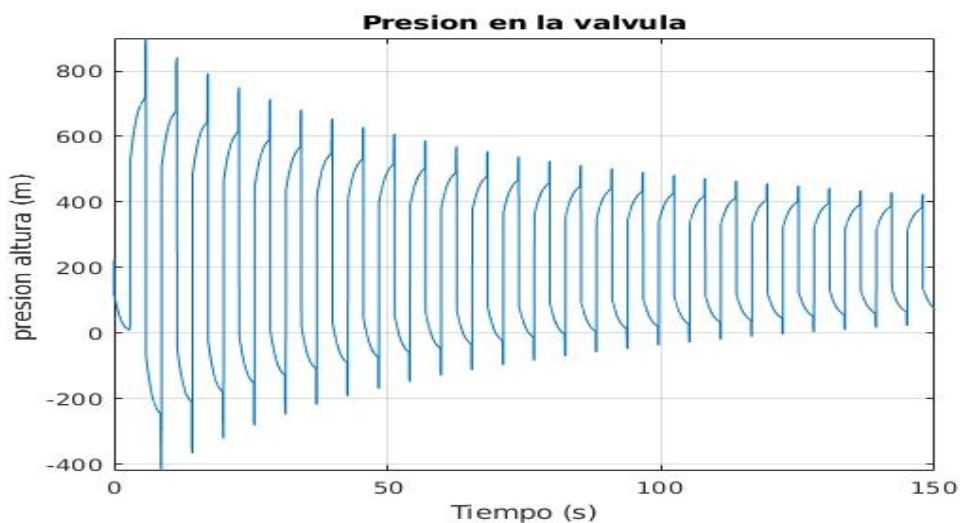
Resultado obtenido para caudal inicial 0.25 metros<sup>3</sup>/segundo y caudal final nulo.

- Presión inicial en la válvula 224.11 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 749.57 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 525.46 metros



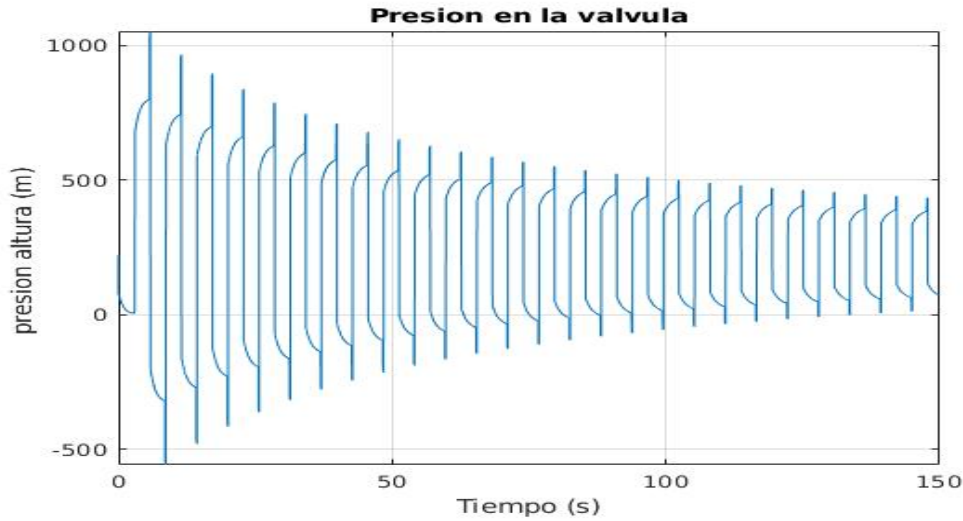
Resultado obtenido para caudal inicial 0.5 metros<sup>3</sup>/segundo y caudal final nulo.

- Presión inicial en la válvula 223.49 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 900.33 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 676.84 metros



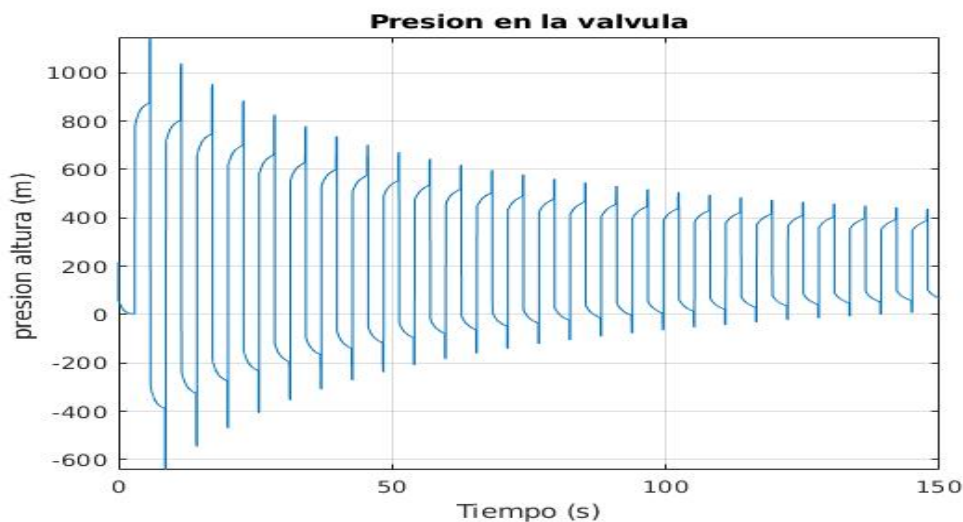
Resultado obtenido para caudal inicial 1 metro<sup>3</sup>/segundo y caudal final nulo.

- Presión inicial en la válvula 221.03 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 1052.98 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 831.95 metros



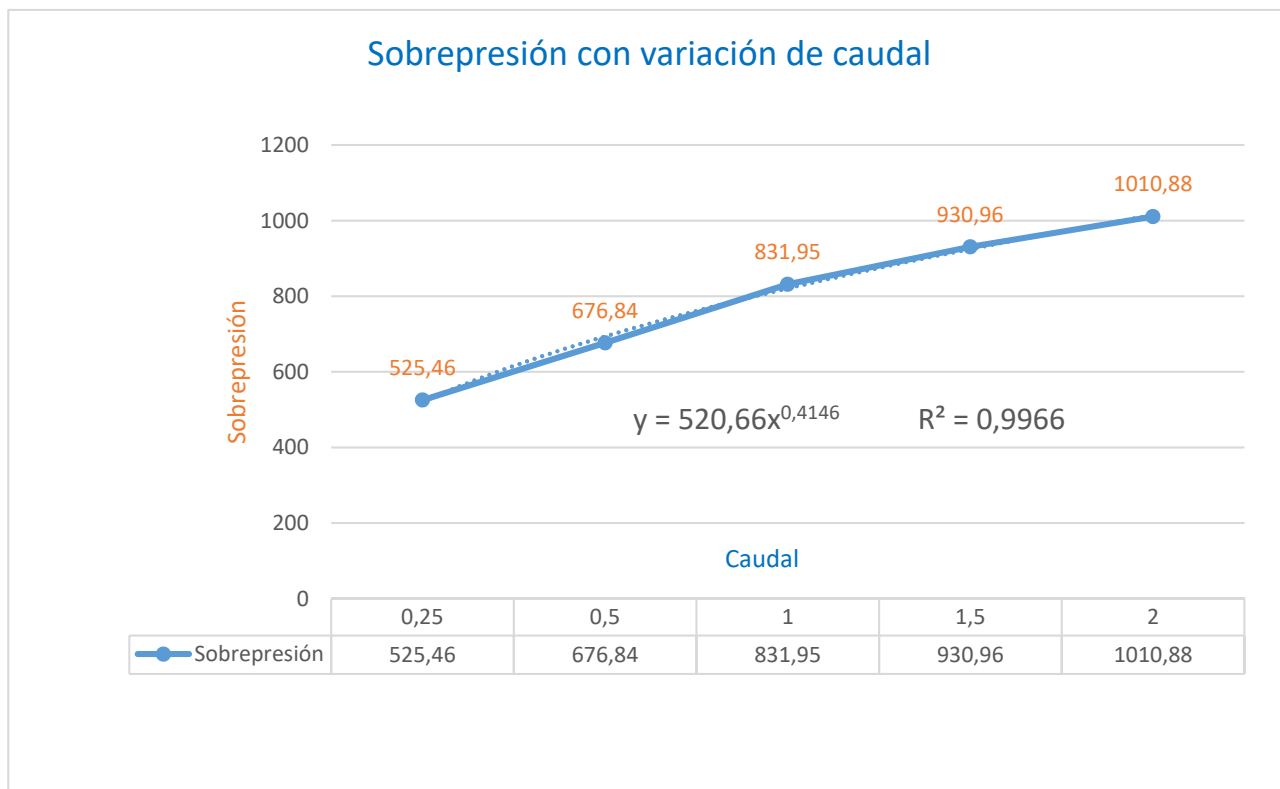
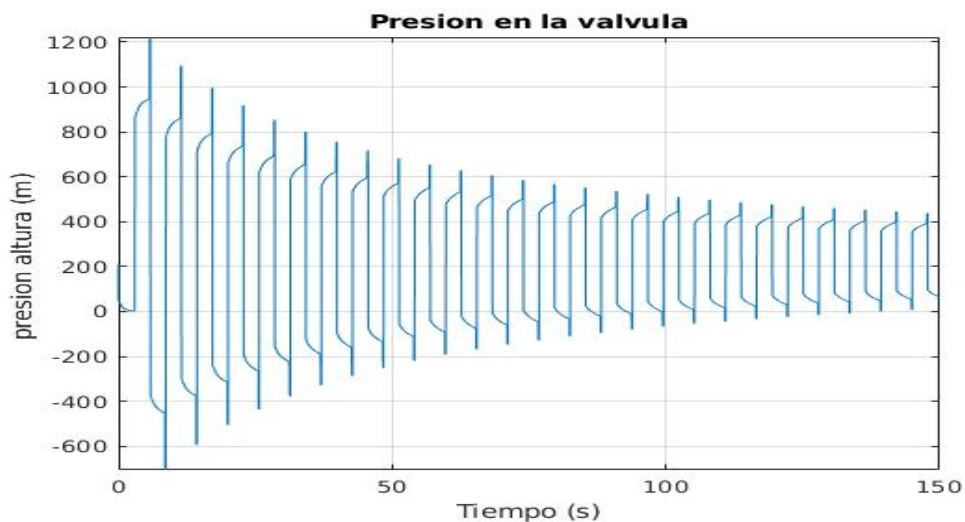
Resultado obtenido para caudal inicial 1.5 metros<sup>3</sup>/segundo y caudal final nulo.

- Presión inicial en la válvula 216.92 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 1147.88 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 930.96 metros



Resultado obtenido para caudal inicial 2 metros<sup>3</sup>/segundo y caudal final nulo.

- Presión inicial en la válvula 211.17 metros
- Máxima presión dinámica inicial en la válvula 1222.05 metros
- Sobrepresión debida al Golpe de Ariete 1010.88 metros



De los resultados obtenidos podemos deducir que mientras el rango de caudales se sitúe en una franja baja, que en este caso y, dependiendo de los datos mantenidos constantes, se cifra en no superar el  $\text{m}^3/\text{s}$  de caudal, el incremento de presión solo crece en una tercera parte.

Este ratio se mantiene prácticamente constante incluso para incrementos menores de caudal.

Este resultado es coherente con el aspecto teórico que representa pues, como hemos comentado con anterioridad, el caudal se puede desglosar como el producto de la velocidad por la sección. La sección, una vez fijada para todos los ensayos se puede considerar como constante quedando la velocidad como elemento determinante. La velocidad con la que discurre el fluido tiene un marco estrecho por el que puede evolucionar, que se sitúa entre aproximadamente 1 m/s hasta 3 o 4 m/s, pues para velocidades mayores se dispara el término de rozamiento puesto que este contempla en su desarrollo el cuadrado de dicha velocidad.

## ■ CAPÍTULO 10.

### FLUJO DEL PROGRAMA.

#### 10.1 • DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA.

Se ha dividido la programación en tres partes bien diferenciadas, la primera consiste en un bloque de entrada de datos, tanto de carácter general como los parámetros del agua, la segunda de cálculo propiamente dicho y la tercera parte es de presentación de los resultados, haciendo hincapié en la gráfica que representa el desarrollo del fenómeno del Golpe de Ariete.

Se ha utilizado el paquete informático MATLAB R2019a Update 4 (9.6.0.1150989) 64-bit (win 64) June 26, 2019 License Number: STUDENT propio.

En el primer tercio del programa denominado config.m se hace entrada de tres parámetros que hemos supuestos fijos, aunque no lo sean, debido a la poca repercusión numérica que presenta su inclusión respecto de la dificultad añadida de considerarlos con su marco de variabilidad. Los tres parámetros considerados fijos son la aceleración de la gravedad ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ), el módulo de rigidez del agua ( $k_a = 2,2 \cdot 10^9 \text{ Pascales}$ ) y su densidad ( $\rho = 1000 \text{ kilogramos/m}^3$ ).

Los parámetros variables necesarios para "correr" el programa son los relativos a las condiciones de contorno por una parte y a la tubería por otro.

Concretamente para las variables genéricas del flujo se solicita la introducción de:

- 1.-  $H_0$  Altura del depósito en metros que es la profundidad a la que acomete la tubería de alivio. Por defecto se adopta el valor de  $H_0 = 50$  metros.
- 2.-  $t$  Tiempo medido en segundos en que la compuerta efectúa la maniobra total o parcial de cierre. Por defecto el programa asume el valor de  $t = 3$  segundos.
- 3.-  $t_f$  Es el tiempo en segundos en que el programa va a calcular la sobrepresión en la válvula comprobando la amortiguación del fenómeno. Por defecto se asume un valor de  $t_f = 150$  segundos.
- 4.- Respecto del caudal se introducen dos valores, el inicial que pasa a través de la válvula y el final que en caso de que el cierre sea total se anula. La introducción de caudal en vez de la velocidad simplifica algo los cálculos, pues por continuidad el caudal es constante en cualquier sección de la

tubería, aunque varíe la velocidad y/o la sección. Lo anterior nos permite la aplicación del principio de continuidad.

5.- Como característica propia de la aplicación del método de las características introducimos el incremento elemental de tiempo, que nos servirá para definir la cuadrícula cumpliendo con el criterio de convergencia. Por defecto se admite el valor de 0,002 segundos.

Pasamos a los datos propios de la tubería que son:

6.- Su longitud  $L$  en metros cuyo valor por defecto tomamos como  $L = 2000$  metros.

7.- El ángulo de inclinación descendiente de la tubería que introducimos en grados sexagesimales, pues el programa los transforma a radianes, previamente a su inclusión al flujo informático. Si no se dice nada en contra, su valor por defecto es de 10 grados.

8.- El factor  $f$  de fricción del agua con la tubería que se introduce de forma adimensional. Por defecto se toma el valor de  $f = 0,2$  que puede parecer algo elevado, pero se trata de poder apreciar la amortiguación del fenómeno a lo largo de los 150 segundos que dura el ensayo.

9.- El diámetro interior de la tubería se introduce en metros asumiendo en su defecto un diámetro  $D = 1$  metro.

10.- El valor de la celeridad de la onda de presión se introduce también de forma manual, aunque su cálculo se detalla en el trabajo. Sin otro particular se asume que  $c = 1400$  m/s a falta de otro más exacto calculado.

11.- La ley de apertura de la válvula se introduce en forma de coeficientes del polinomio que la define según las especificaciones del fabricante. Se suponen, a falta de otros datos introducidos, los coeficientes 1, 2 y 3 que reflejan un polinomio de segundo grado.

El grupo de sentencias informáticas que conforman la parte del programa denominada proyecto.m es quien sufre el peso del cálculo propiamente dicho.

Tras reiniciar todas las variables residuales y limpiar la pantalla se llama a la parte config.m cargando así todas las variables descritas anteriormente.

La secuencia de cálculo seguida es, por orden de aparición en el flujo informático:

1.- Cálculo del intervalo de distancia en la que se divide la partición de la longitud de la tubería, que se corresponde con el incremento de distancia considerado.

2.- Hallamos el área de la tubería para poder averiguar las velocidades del agua a su paso por la válvula, tanto la velocidad inicial como la final.

- 3.- Se monta el polinomio que refleja el comportamiento de la válvula en base a sus coeficientes y halla el valor de la variable  $\tau$  para cada intervalo de tiempo requerido hasta agotar el tiempo de maniobra de la válvula.
- 4.- Calcula la presión imperante en la tubería antes del inicio del cierre en base a la altura del embalse y la pendiente de la tubería particularizando para la sección en la que se encuentra la válvula.
- 5.- Calcula las pérdidas por fricción en base al caudal inicial mediante la ley de Darcy-Weisbach.
- 6.- Restamos de la presión inicial las pérdidas ocasionadas por rozamiento, creándose las matrices de presión y caudal.
- 7.- Se calcula la matriz de valores de presión inicial en la válvula ( $H_{ov}$ ) y en base a estas condiciones iniciales de contorno de matriz CP, particularizada en la válvula ( $CP_v$ ) se halla el caudal que atraviesa la válvula en cada instante y su correspondiente presión.
- 8.- Las condiciones de cota en el embalse nos proporciona la matriz CN correspondiente a un tiempo posterior  $i+1$ . Se introduce el resultado en la matriz caudal.
- 9.- Fijando el parámetro de tiempo encontramos la presión en válvula.
- 10.- Como resultados de los ensayos pedimos la presión inicial en la válvula, la máxima presión soportada por esta y la diferencia entre los dos valores anteriores.

La parte de gráfica propiamente dicha, denominada como simulación.m se inicia escalando la ventana de presentación, tanto horizontalmente como verticalmente, en cada punto, pero respetando el marco inicial marcado por los máximos valores, así como los mínimos correspondientes, variando el valor de  $\tau$  conforme al tiempo.

Se etiqueta el resultado gráfico para su mejor interpretación.

## 10.2 • CONFIG.M

### % DATOS CONSTANTES

```
g = 9.81;           % gravedad constante
ka = 2.2*10^9;     % módulo de rigidez constante
den = 1000;        % densidad del agua constante
```

### % DATOS DE FLUJO

```
fprintf('¥n***INGRESO DE INFORMACIÓN GENERAL***¥n¥n');
% variable altura del deposito
Ho = input('Ingrese la altura del depósito, por defecto 50m: ');
if isempty(Ho)
    Ho = 50;
end
% variable tiempo de funcionamiento de la compuerta
t = input('Tiempo total de cierre o apertura (seg), por defecto 3: '); if isempty(t)
    t = 3;
end
% variable tiempo final de simulación
tf = input('Tiempo hasta que quiere la simulación (seg),por defecto 150: ');
if isempty(tf)
    tf = 150;
end
% variable caudal inicial
Qo = input('Ingrese el caudal inicial (m^3/s), por defecto 0.025: ');
if isempty(Qo)
    Qo = 0.025;
end
% variable caudal final
Qf = input('Ingrese el caudal final (m^3/s), por defecto 0.01: ');
if isempty(Qf)
    Qf = 0.01;
end
% variable incremento diferencial de tiempo
dt = input('Ingrese el intervalo de tiempo para el método de la características, por defecto 0.02: ');
if isempty(dt)
    dt = 0.02;
end
```



### % DATOS DE LA TUBERÍA

```
fprintf('¥n****INGRESO DE LOS DATOS DE LAS TUBERÍAS****¥n¥n')
```

```
% variable longitud de la tubería
```

```
L = input('Longitud (m), por defecto 2000: ');
```

```
if isempty(L)
```

```
    L = 2000;
```

```
end
```

```
% variable inclinación de la tubería
```

```
grados = input('Inclinación (grados), por defecto 5: ');
```

```
if isempty(grados)
```

```
    ang = 5 * pi/180;
```

```
else
```

```
    ang = grados * pi/180;
```

```
end
```

```
% variable coeficiente de rozamiento agua-tubería
```

```
f = input('Factor de fricción, por defecto 0.02: ');
```

```
if isempty(f)
```

```
    f = 0.02;
```

```
end
```

```
% variable diámetro interno de la tubería
```

```
D = input('Ingrese el diámetro interno (m), por defecto 1: ');
```

```
if isempty(D)
```

```
    D = 1;
```

```
end
```

### % DATOS DE LA ONDA

```
% variable velocidad de propagación de la onda de presión a través de agua-tubería
```

```
c = input('Ingrese el valor de la velocidad para la onda de presión (m/s), por defecto 1400: ');
```

```
if isempty(c)
```

```
    c = 1400;
```

```
end
```

### % DATOS DE LA VÁLVULA

```
% variable coeficientes del polinomio de la ley de cierre de la válvula
```

```
coe = input('Ingrese los coeficientes del polinomio, por defecto: 1,2,3: ','s');
```

```
if isempty(coe)
```

```
    coe = [1,2,3];
```

```
else
```

```
    coe = textscan( coe, '%f', 'Delimiter',' ');
```

```
    coe = permute( coe{1}, [2,1] );
```

```
end
```

### 10.3 • PROYECTO.M

```

% inicializa las variables y limpia pantalla
clear all; close all; clc;
% Carga de los datos introducidos en el programa anterior
config;
% condición de convergencia
dx = dt*c;
% Calculo del área interior de la tubería
A = pi*D^2/4;
% Número de intervalos de distancia de la partición
No = floor(L/dx);
% Número de intervalos de tiempo de la partición
Ntiempo = floor(tf/dt)+1;
% INFORMACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA VÁLVULA
% Velocidad inicial del agua en la válvula
Vo = Qo/A;
% Velocidad final del agua en la válvula
Vf = Qf/A;
% BUCLE GENERADOR DE TAO
pot=length(coe)-1; % grado del polinomio de la ley de cierre
tao = zeros(1,Ntiempo); % vector tao
for i=1:Ntiempo
    if i*dt<=t
        tao(i) = 0;
        for k=1:pot+1
            tao(i) = tao(i)+coe(k)*((i-1)*dt)^(pot-k+1);
        end
    else
        tao(i) = Qf/Qo;
    end
end
%CÁLCULOS
% Presión inicial
Po = Ho+L*sin(ang);
% Pérdidas iniciales
Perd(1,1) = 0;
% Perdidas con caudal inicial
for j=1:No
    Perd(1,j+1) = Perd(1,j)+dx*f*Qo^2/(D*A^2*2*g);

```

```

end
% Presión con pérdidas caudal inicial
presion = Po-Perd;
caudal = zeros(1, No+1); % vector caudal
caudal(1:end)=Qo; % vector caudal con caudal inicial
presion(1:Ntiempo,1)=Po; %Matriz de presión
CH = c/g/A; %Variable auxiliar
for i=2:Ntiempo
% vector presión inicial en la válvula
Hov=presion(1,No+1);
% Cp en la válvula
CPv=presion(i-1,No)+caudal(i-1,No)*(CH-sin(ang))*dt/A-f*abs(caudal(i-1,No))*dx/(2*g*D*A ^2));
% caudal en la válvula
caudal(i,No+1)=-
((Qo^2)*(tao(i))^2*CH/(2*Hov))+(((Qo^2)*(tao(i))^2*CH/(2*Hov))^2+Qo^2*(tao(i))^2*CPv/Hov)^0.5;
%presión en la válvula
presion(i,No+1)=CPv-CH*caudal(i,No+1);
%Condición de contorno en el depósito
CNv=presion(i-1,2)-caudal(i-1,2)*(CH(1)+dt*sin(ang(1))/A(1)-f(1)*abs(caudal(i-1,2))*dx(1)/(2*g*D(1) *(A(1))^2));
caudal(i,1)=(presion(i,1)-CNv)/CH(1);
% TUBERÍA
for j=1:No-1
% variable auxiliar Cp tubería
CP=presion(i-1,j)+caudal(i-1,j)*(CH-sin(ang))*dt/A-f*abs(caudal(i-1,j))*dx/(2*g*D*(A)^2));
% variable auxiliar Cn tubería
CN=presion(i-1,j+2)-caudal(i-1,j+2)*(CH+sin(ang))*dt/A-f*abs(caudal(i-1,j+2))*dx/(2*g*D*(A)^2));
% caudal tubería
caudal(i,j+1)=(CP-CN)/(2*CH);
% presión tubería
presion(i,j+1)=CP-CH*caudal(i,j+1);
end
end
tiempo=((1:Ntiempo)-1)*dt;
% presión en la válvula
presion_valvula=presion(1:Ntiempo,No+1);
simulacion; % llama al programa de dibujo
%PRESENTACION DE LOS RESULTADOS FINALES
fprintf('\n***RESULTADO FINAL ***\n');
% edita la presión en la válvula en la pantalla
fprintf('Presion inicial en la valvula: %10.2f (m) \n',presion(1,No+1));
% edita la máxima presión en la válvula en la pantalla

```

```
fprintf('Maxima presion dinamica inicial en la valvula: %10.2f (m) \n',max(presion_valvula));
% edita el incremento de presión en la válvula en la pantalla
fprintf('Sobrepresion del golpe de ariete: %10.2f (m) \n',max(presion_valvula)-presion(1,No+1));
```

## 10.4 • SIMULACIÓN.M

### % MATRIZ DE ESCALADO HORIZONTAL Y VERTICAL

```
Mn=min(presion_valvula);
Mx=max(presion_valvula);
%GRÁFICAS %
figure(1)
% variable auxiliar
t1=10;
for i=1:10:Ntiempo
% límites de los ejes
    if t1<max(tiempo(1:i))
        t1=max(tiempo(1:i));
    end
% gráfica matriz presión en la válvula
    plot(tiempo(1:i),real(presion_valvula(1:i)));
% propiedades de la gráfica
    axis([0 t1 Mn Mx]);
% etiqueta de abscisas de la gráfica
xlabel('Tiempo (s)');
% etiqueta de ordenadas de la gráfica
ylabel('presion altura (m) ');
% título de la gráfica
title('Presion en la valvula');
grid on; % líneas de referencia
hold off
getframe(gcf); % retícula móvil
end
```

## ADDENDA.

Aun no siendo imprescindible para la completa comprensión del desarrollo del trabajo, a modo de Addenda se incluyen algunos aspectos técnicos que vienen a ser útiles a la hora de abordar el tema que aquí nos ocupa.

Se aportan algunos conceptos teóricos sencillos relativos a la mecánica de fluidos e hidráulica que aparecen de forma recurrente en la parte de desarrollo y planteamiento teórico de este trabajo. Siendo estos desarrollos genéricos de divulgación relativamente sencilla y muy extendidos no se puede considerar su aportación a este trabajo como mérito propio del autor sino como simple expresión de su significado.

## ADDENDUM N° 1.

### ECUACION DE CONTINUIDAD.

La ecuación de continuidad se puede expresar como la constancia del caudal, que es el flujo de masa por unidad de tiempo: **Caudal = Velocidad • Sección = constante.**

El caudal es el volumen de agua que pasa por cada unidad de tiempo por una sección determinada, es decir que se expresa igualmente como: **Caudal = Q = Volumen / Tiempo.**

Si tomamos un tramo de tubería de longitud **L**, el volumen de agua encerrado en dicho tramo es el producto de la Longitud de la tubería y su Sección: **Volumen=Longitud • Sección.**

Substituyendo podemos expresar el caudal como: **Caudal = Q = Longitud • Sección / Tiempo.**

La velocidad se puede expresar bajo la forma: **Velocidad = Longitud / tiempo** de donde obtenemos la siguiente expresión del caudal:

$$Q = \text{Velocidad} \cdot \text{Sección}$$

Que no es más que la anterior primera ecuación tal y como queríamos demostrar.

El caudal se expresa en m<sup>3</sup>/segundos en el Sistema Internacional de Unidades.

Queda por comprobar que como consecuencia de la conservación de la masa se establece la ecuación de continuidad, lo que propicia que el caudal sea constante.

Supongamos que disponemos de un tramo de tubería cuya sección es **Sección<sub>1</sub> = S<sub>1</sub>** por la que circula un líquido que puede ser agua o cualquier otro con una velocidad **V<sub>1</sub>**. Desde que empezamos a contar el tiempo, es decir desde que **t = t<sub>0</sub>** si transcurre un incremento de tiempo **Δt**, en ese tiempo la sección **S<sub>1</sub>** se mueve en sentido del movimiento del agua, una distancia dada por: **Δx<sub>1</sub> = V<sub>1</sub> • Δt**

Por definición de densidad esta viene dada por **ρ = masa / volumen** y despejando el volumen: **Volumen = Δx<sub>1</sub> • S<sub>1</sub>**, de donde:

$$\text{Masa}_1 = \rho \cdot (\Delta x_1) \cdot S_1 = \rho \cdot V_1 \cdot \Delta t \cdot S_1$$

Esta es la cantidad de masa desplazada en un tiempo **Δt** a lo largo de la distancia **Δx<sub>1</sub>** por un fluido considerado incompresible circulando por el interior de una tubería con una velocidad **V<sub>1</sub>**.

Supongamos que un poco más adelante de la sección primera estudiada la tubería sufre una variación de diámetro interior que puede ser tanto una reducción como un ensanchamiento encontrándose con una sección  $S_2$ .

En esta **Sección<sub>2</sub>** se modifica la velocidad del fluido hasta un valor **Velocidad<sub>2</sub> =  $V_2$** . En el mismo lapso de tiempo  $\Delta t$  la **Sección<sub>2</sub>** habrá avanzado una distancia:  **$\Delta x_2 = \text{Velocidad}_2 \cdot \Delta t = V_2 \cdot \Delta t$**

Sabemos que la densidad del líquido es la misma al suponer este incompresible, por lo que la masa desplazada es (de la misma forma que se ha visto anteriormente)

$$\text{Masa}_2 = \rho \cdot (\Delta x_2) \cdot S_2 = \rho \cdot V_2 \cdot \Delta t \cdot S_2$$

Pero, evidentemente en el tiempo  $\Delta t$  la masa que pasa por la **Sección<sub>1</sub>** es la misma que la que atraviesa la **Sección<sub>2</sub>** por el principio de conservación de la masa, luego podemos establecer sin temor a equivocarnos que  **$\text{Masa}_1 = \text{Masa}_2$** .

Igualando las dos expresiones anteriormente halladas para las masas involucradas queda:

$$\text{Masa}_1 = \text{Masa}_2 \quad \rho \cdot V_1 \cdot \Delta t \cdot S_1 = \rho \cdot V_2 \cdot \Delta t \cdot S_2$$

Cancelamos en ambos miembros la densidad  $\rho$  y el incremento de tiempo  $\Delta t$ , resultando la expresión

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 \quad \text{Caudal}_1 = Q_1 = Q_2 = \text{Caudal}_2$$

Esta última igualdad entre caudales es la ecuación de continuidad buscada.

A modo de resumen podemos afirmar que el producto de una sección cualquiera por su correspondiente velocidad se corresponde con el caudal circulante por dicha sección llegando a establecerse la continuidad y constancia del caudal en una tubería en la que se modifica la sección.

## ADDENDUM N° 2.

### ECUACIÓN DE BERNOULLI.

Suponemos un tubo de corriente como el reflejado en la figura adjunta:

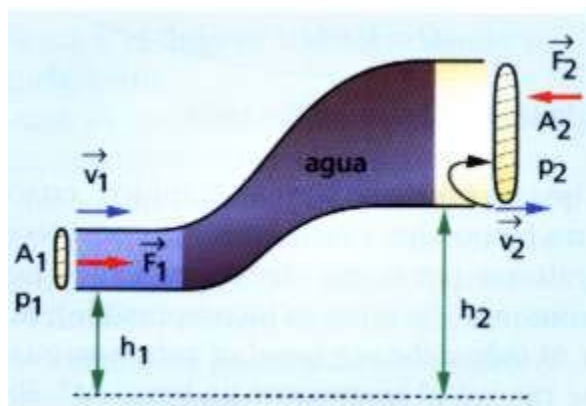


Figura A2.1. Tubo de corriente tipo. Fuente: <https://yeisonc.wordpress.com/segundo-corte/temas-vistos/teorema-de-bernoulli/>

Las magnitudes reflejadas en la figura anterior representan los siguientes conceptos:

- $P_1$  es la presión del agua en el centro de gravedad de la sección 1.
- $P_2$  es la presión del agua en el centro de gravedad de la sección 2.
- $V_1$  es la velocidad del agua al atravesar la sección 1.
- $V_2$  es la velocidad del agua al pasar por la sección 2.
- $A_1$  es el área de la sección 1 del tubo de corriente.
- $A_2$  es el área de la sección 2 del tubo de corriente.
- $h_1$  es la altura del centro de gravedad de la sección 1 respecto de un plano de referencia.
- $h_2$  es la altura del centro de gravedad de la sección 2 respecto del plano de referencia.

Las velocidades del agua en las secciones 1 y 2 son distintas ( $V_1 \neq V_2$ ) puesto que las áreas en la sección 1 y en la sección 2 no son las mismas ( $A_1 \neq A_2$ ). En primer lugar, buscamos el trabajo que efectúan las fuerzas asociadas a las presiones  $P_1$  y  $P_2$  que actúan en el centro de gravedad de cada una de las dos secciones consideradas que son la **sección 1** y la **sección 2**. El trabajo de una fuerza se define por el producto de la magnitud de la fuerza considerada multiplicada por su desplazamiento.

El trabajo  $W_1$  que desarrolla la fuerza  $F_1$  asociada a la presión  $P_1$  al desplazar la masa contenida en la **sección 1** una distancia  $dx_1$  desde la sección situada en el punto 1 hasta la sección posicionada en el punto  $1+dx_1$  es:  $W_1 = F_1 \cdot dx_1$



Por definición de presión se cumple que **Presión = Fuerza / Superficie** tenemos despejando la fuerza: **Fuerza = Presión • Superficie**. La anterior expresión del trabajo  $W_1$  queda:

$$W_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot dx_1$$

La definición de velocidad es **Velocidad = Espacio / Tiempo**. Despejando el Espacio representado por la distancia que recorre la **sección 1** entre los puntos 1 y  $1+dx_1$  y procediendo a diferenciar esta expresión para disponer del valor de  $dx_1$  tenemos:  $x_1=V_1 \cdot t$ ,  $dx_1=V_1 \cdot dt$  substituyendo en la expresión del trabajo

$$W_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot V_1 \cdot dt$$

Siguiendo un razonamiento similar al correspondiente a la sección 1 y considerando el mismo lapso de tiempo ( $dt$ ) para ambas secciones el trabajo efectuado por la fuerza asociada a la presión en la **sección 2** ( $P_2$ ) para llevar la **sección 2** desde el **punto 2** al **punto  $2+dx_2$**  es análogamente:

$$W_2 = P_2 \cdot A_2 \cdot V_2 \cdot dt$$

El trabajo efectivo efectuado por el fluido entre las secciones 1 y 2 es la diferencia entre el trabajo (energía) entrante y el trabajo (energía) saliente, es decir la resta entre  $W_1$  y  $W_2$

$$dW = W_1 - W_2 = P_1 \cdot A_1 \cdot V_1 \cdot dt - P_2 \cdot A_2 \cdot V_2 \cdot dt$$

$$dW = (P_1 \cdot A_1 \cdot V_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot V_2) \cdot dt$$

$dW$  representa el trabajo entregado o generado por el sistema y este se invierte, a tenor de lo prescrito por el teorema de la conservación de la energía, en la variación tanto de la **energía cinética** ( $dK$ ) del agua como de su **energía potencial** ( $dU$ )

$$dW = dU + dK$$

Por definición, la energía potencial de un cuerpo es el producto de su peso por la altura a que se encuentra medida desde una superficie (equipotencial) de referencia:  **$U = \text{Peso} \cdot \text{Altura}$** , pero sabemos por la definición de peso que  **$\text{Peso} = \text{Masa} \cdot \text{Gravedad}$** . Además del concepto de densidad podemos aislar la masa,  **$\text{Densidad} = \text{Masa} / \text{Volumen}$**  de donde se despeja la masa  **$\text{Masa} = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen}$** . El peso se puede expresar entonces como el producto de tres magnitudes:  **$\text{Peso} = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen} \cdot \text{Gravedad}$**  y resulta finalmente que la energía potencial se puede expresar de la siguiente forma

$$U = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen} \cdot \text{Gravedad} \cdot \text{Altura}.$$

Donde

- La densidad del agua la consideramos constante igual a  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .
- La gravedad es el Valor de la aceleración de la gravedad  $g = 9,81 \text{ m/seg}^2$ .

El volumen considerado es el encerrado entre las secciones iniciales **1** y **1+dx<sub>1</sub>** en el caso del extremo 1 del tubo de corriente mientras que en el caso del extremo 2 del tubo, se trata del volumen abarcado desde el punto **2** hasta el punto **2+dx<sub>2</sub>**. Ambas magnitudes se calculan como el producto del área correspondiente involucrada por su desplazamiento respectivo

$$\text{Volumen en extremo 1} = A_1 \cdot dx_1$$

$$\text{Volumen en extremo 2} = A_2 \cdot dx_2$$

El valor de la energía potencia (U) expresada de forma genérica es:

$$U = \text{Densidad} \cdot (\text{Área} \cdot dx) \cdot \text{gravedad} \cdot \text{Altura}$$

Particularizando para los extremos 1 y 2 tenemos:

$$U_1 = \text{Densidad} \cdot \text{Área}_1 \cdot dx_1 \cdot \text{gravedad} \cdot \text{Altura}_1 = U_1 = \rho \cdot A_1 \cdot dx_1 \cdot g \cdot h_1$$

$$U_2 = \text{Densidad} \cdot \text{Área}_2 \cdot dx_2 \cdot \text{gravedad} \cdot \text{Altura}_2 = U_2 = \rho \cdot A_2 \cdot dx_2 \cdot g \cdot h_2$$

La variación de la energía potencial (dU) viene representada por la diferencia entre las dos expresiones anteriores

$$dU = U_2 - U_1 \quad dU = U_2 - U_1 = \rho \cdot A_2 \cdot dx_2 \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot A_1 \cdot dx_1 \cdot g \cdot h_1$$

Reagrupando términos y despejando los valores comunes  $\rho$  y  $g$

$$dU = \rho \cdot g \cdot (A_2 \cdot dx_2 \cdot h_2 - A_1 \cdot dx_1 \cdot h_1)$$

Recordando que  $dx = V \cdot dt$ , es decir podemos substituir el desplazamiento infinitesimal por el producto de la velocidad por el diferencial de tiempo

$$dU = \rho \cdot g \cdot (A_2 \cdot h_2 \cdot V_2 \cdot dt - A_1 \cdot h_1 \cdot V_1 \cdot dt) = \rho \cdot g \cdot dt \cdot (A_2 \cdot h_2 \cdot V_2 - A_1 \cdot h_1 \cdot V_1)$$

Por lo que atañe a la energía cinética sabemos que responde a la ecuación genérica:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \text{masa} \cdot \text{Velocidad}^2$$

La masa es

$$\text{Masa} = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen} = \text{Densidad} \cdot \text{Área} \cdot dx = \text{Densidad} \cdot \text{Área} \cdot \text{Velocidad} \cdot dt$$

Particularizando para las regiones 1 y 2:

$$\text{Masa}_1 = \text{Densidad} \cdot \text{Área}_1 \cdot \text{Velocidad}_1 \cdot dt \quad \text{Masa}_2 = \text{Densidad} \cdot \text{Área}_2 \cdot \text{Velocidad}_2 \cdot dt$$

Substituyendo en la expresión de la energía cinética cada uno de estos dos valores anteriores obtenemos

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot \text{Densidad} \cdot \text{Área}_1 \cdot \text{Velocidad}_1 \cdot dt \cdot \text{Velocidad}_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot \text{Densidad} \cdot \text{Área}_2 \cdot \text{Velocidad}_2 \cdot dt \cdot \text{Velocidad}_2^2$$

La variación sufrida por la energía cinética se halla por resta entre las dos magnitudes anteriores

$$dK = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_2 \cdot V_2 \cdot dt \cdot V_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_1 \cdot V_1 \cdot dt \cdot V_1^2$$

$$dK = (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dt) \cdot (A_2 \cdot V_2^3 - A_1 \cdot V_1^3)$$

Ahora podemos aplicar el principio de continuidad que nos indica que en cualquier sección el caudal se mantiene constante, es decir:  $Q_1 = A_1 \cdot V_1 = Q_2 = A_2 \cdot V_2 = Q$

Substituimos en las tres expresiones energéticas:

- La ecuación del trabajo:

$$dW = (P_1 \cdot A_1 \cdot V_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot V_2) \cdot dt$$

$$dW = Q \cdot dt \cdot (P_1 - P_2)$$

- La ecuación de la energía potencial:

$$dU = \rho \cdot g \cdot dt \cdot (A_2 \cdot h_2 \cdot V_2 - A_1 \cdot h_1 \cdot V_1) = \rho \cdot g \cdot dt \cdot (Q \cdot h_2 - Q \cdot h_1)$$

$$dU = \rho \cdot g \cdot dt \cdot Q \cdot (h_2 - h_1)$$

- La ecuación de la energía cinética:

$$dK = (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dt) \cdot (A_2 \cdot V_2^3 - A_1 \cdot V_1^3) = (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dt) \cdot (Q \cdot V_2^2 - Q \cdot V_1^2)$$

$$dK = (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dt \cdot Q) \cdot (V_2^2 - V_1^2)$$

Igualando el trabajo a la energía tal y como se planteó al principio de la demostración:

$$dW = dU + dK \quad Q \cdot dt \cdot (P_1 - P_2) = \rho \cdot g \cdot dt \cdot Q \cdot (h_2 - h_1) + (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dt \cdot Q) \cdot (V_2^2 - V_1^2)$$

Simplificando la expresión anterior se cancelan Q y dt en ambos miembros

$$(P_1 - P_2) = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + (\frac{1}{2} \cdot \rho) \cdot (V_2^2 - V_1^2)$$

Reordenando:

$$[P_1] + [\rho \cdot g \cdot h_1] + [(1/2) \cdot \rho \cdot V_1^2] = [P_2] + [\rho \cdot g \cdot h_2] + [(1/2) \cdot \rho \cdot V_2^2]$$

Esto significa que en cualquier punto la suma de estas tres cantidades es constante. Esta ecuación es la forma que adopta para fluidos en movimiento la conservación de la energía en cada una de las secciones consideradas. La expresión anterior viene referida a unidades del sistema internacional, pero se suele trabajar con alturas de columna de agua que es una unidad tremendamente gráfica, esto se consigue dividiendo ambos miembros de la ecuación por el peso específico del líquido involucrado que en nuestro caso particular es agua. El peso específico del agua se asume como una constante  $\gamma = 1000 \text{ Kp/m}^3$

$$\left[ \frac{P_1}{\gamma} \right] + [h_1] + \left[ \frac{V_1^2}{2 \cdot g} \right] = \left[ \frac{P_2}{\gamma} \right] + [h_2] + \left[ \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \right]$$

Donde se ha hecho uso de la igualdad: **Peso específico = g • densidad**

$$\gamma = g \cdot \rho$$

## ADDENDUM N° 3.

### CELERIDAD DE UNA ONDA DE PRESIÓN EN UN ENTORNO LINEAL UNIDIRECCIONAL PARA EL BINOMIO FLUIDO-TUBERÍA.

#### A3.1 CONCEPTO FÍSICO DE VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA DE PRESIÓN A TRAVÉS DE UN FLUIDO.

La velocidad a la que viaja una onda de presión, por ejemplo, el sonido, en el seno de un fluido, se asocia, siempre que la entropía se mantenga constante, con la variación de la presión, a que se ve sometido dicho fluido, en función de su densidad según la fórmula:

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{K}{\rho}$$

- **K** es el módulo de compresibilidad del fluido que, en caso de ser agua asume el valor asumido como constante de  $k = 2.106 \text{ kiloNewton/metro}^2 = 2,2.109 \text{ Pascales}$  sabiendo que  $10^5 \text{ Pascales}$  equivalen a  $1 \text{ kilopondio/centímetro}^2$ .
- **$\rho$**  densidad del fluido de que se trate siendo para el agua  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

Veamos cómo deducir la celeridad de una onda de presión a lo largo de una tubería por la que circula un fluido que, de momento, puede ser cualquiera. De forma muy genérica una onda consiste en la propagación de una perturbación de alguna propiedad característica del medio afectado. El medio suele describirse como un campo ya sea escalar o vectorial. El aspecto más representativo del fenómeno de propagación de una onda es que involucra un transporte de energía, pero no de materia, es decir, el material físico sólo hace de conductor.

Como propiedades características perturbadas en el fenómeno ondulatorio que aquí nos ocupa podemos destacar la densidad y la presión. Queda patente que el fenómeno ondulatorio es dependiente tanto del medio en que se produce como de los parámetros definitorios de su posición y por supuesto del tiempo, pero además para poder ser englobado y descrito como tal fenómeno ondulatorio se le requiere que pueda describirse o que responda a la denominada ecuación de ondas que se puede expresar como:

$$\nabla^2 M (\text{posición, tiempo}) = \left(\frac{1}{\text{Vel}^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} (\text{posición, tiempo})$$

- **Vel** es la velocidad de propagación de la perturbación de la Magnitud física M (en nuestro caso la presión).
- **M** representa una magnitud física propia del medio que se perturba y cuyos valores se modifican en tiempo y lugar. M es una función que depende del tiempo y del espacio.
- $\nabla^2$  es el operador Laplaciano nabra cuadrado que aplicado sobre una función cualquiera f en coordenadas cartesianas tridimensionales se puede expresar como:

$$\nabla^2(f) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(f) \quad f = f(x, y, z)$$

algebraicamente representa la divergencia del gradiente de la función f. La ecuación anterior reducida a una sola dimensión fue resulta por D'Alembert.

### A3.2 DEDUCCIÓN DE LA CELERIDAD DE UNA ONDA DE PRESIÓN EN UN ENTORNO LINEAL UNIDIRECCIONAL PARA EL BINOMIO FLUIDO-TUBERÍA.

■ La fórmula genérica que nos proporciona la celeridad de una onda de presión en un entorno líquido es:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

donde el significado de los parámetros involucrados es el siguiente:

- **c** es la velocidad de la onda de presión.
- **$\rho$**  corresponde a la densidad del fluido circulante por la tubería.
- **K** representa el módulo de compresibilidad volumétrico del fluido (agua).

Sabemos que el peso específico se puede expresar como el producto  $\gamma = \mathbf{g} \cdot \rho$  donde:

- **g** es la aceleración de la gravedad que consideramos constante.
- **$\gamma$**  es el peso específico del líquido circulante por la tubería (agua).

Sustituyendo en la ecuación inicial queda:

$$c = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \cdot k}$$

En la propagación de la onda tiene un peso importante la tubería, por lo que debemos sustituir el término K por un módulo conjunto que recoja tanto las características del fluido como las de la

tubería. Por definición sabemos que el **módulo de compresibilidad del fluido** es la variación de volumen unitario que sufre dicho fluido (agua) tras un incremento de presión.

$$K_{\text{líquido}} = \frac{d\text{Presión}}{\frac{d\text{Volumen}}{\text{Volumen}}} = \frac{dP}{\frac{dV}{V}}$$

reordenando los anteriores elementos queda de la siguiente forma:

$$K_{\text{líquido}} = \text{Volumen} \cdot \left( \frac{d\text{Presión}}{d\text{Volumen}} \right) = V \cdot \left( \frac{dP}{dV} \right) \quad [A3.1]$$

En esta expresión los componentes que la integran son:

- **$K_{\text{líquido}}$**  es el módulo de compresibilidad del fluido considerado que para nosotros en la práctica totalidad de los casos estudiados es agua.
- **$d\text{Presión} = dP$** , es el incremento de presión a que se somete el volumen de líquido.
- **$d\text{Volumen} = dV$** , representa el cambio de volumen experimentado por el volumen de agua involucrado al ser comprimido.
- **$\text{Volumen}$** , representado abreviadamente como  **$V$** , es el volumen inicial de líquido de que se parte (agua).

Para tener en cuenta el efecto añadido de la tubería en la expresión inicial se introduce un término similar al anterior pero referido a la conducción, cuya sección (es decir su área transversal interior) se amplía un diferencial de área de dicha tubería, quedando una expresión que recoge ambos elementos:

$$K_{\text{mixto}} = \frac{1}{\text{Volumen} \cdot \frac{dP}{d(\text{Volumen})}} + \frac{1}{\text{Volumen} \cdot \frac{dP}{d(\text{ÁreaTubería})}} \quad [A3.2]$$

En esta expresión

- **$K_{\text{mixto}}$**  es el módulo de compresibilidad combinado que recoge la influencia tanto del fluido (agua) como de la tubería.
- **$\text{Volumen}$**  representa el volumen inicial del fluido del que partimos.
- **$d\text{ÁreaTubería}$**  es la variación de la sección interna de la tubería debido al incremento de presión soportada por el fluido.
- **$\text{Volumen} \cdot (dP/d\text{Volumen})$**  es el módulo de compresibilidad del fluido.

• **Volumen • (dP/dAreaTubería)** es el módulo de compresibilidad de la tubería.

Si tomamos un volumen de fluido con longitud unidad, su volumen es el área de la sección por la unidad de longitud abarcada:

$$\text{Volumen} = \pi \cdot \text{Radio}^2 \cdot \text{Longitud} = \pi \cdot \text{Radio}^2 \cdot 1 = \pi \cdot \text{Radio}^2 = \pi \cdot R^2 \quad [\text{A3.3}]$$

La sección interior de la tubería viene dada por:  $\text{Area} = \pi \cdot \text{Radio}^2 = \pi \cdot R^2$

La variación del área interna de la tubería respecto del Radio es:

$$d\text{Area} / d\text{Radio} = 2 \cdot \pi \cdot \text{Radio} = 2 \cdot \pi \cdot R$$

despejando el diferencial de Área:

$$d\text{Area} = 2 \cdot \pi \cdot \text{Radio} \cdot d\text{Radio} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dR \quad [\text{A3.4}]$$

Esta expresión nos da a la variación que sufre el área interna de la tubería al variar el radio interior de la conducción.

La conducción tiene una capacidad de deformación en rango elástico que viene definida por su módulo de elasticidad del material que conforma la conducción o módulo de Young, transcrito por  $E_T$  que, por definición es el cociente entre el incremento de tensión que sufre el material dividido por el alargamiento unitario asociado que sufre. El incremento de tensión viene dado por la subida de presión del líquido que tensa y ensancha el conducto, es decir dPresión y el alargamiento unitario se produce a lo largo del perímetro de la tubería en la sección considerada. La longitud circunferencial del perímetro interior de la tubería tiene una expresión harto conocida:  $L = \text{Longitud} = \text{perímetro} = 2 \cdot \pi \cdot \text{Radio} = 2 \cdot \pi \cdot R$ , diferenciando  $dL = 2 \cdot \pi \cdot dR$ , que nos indica que un incremento de radio  $dR$ , amplificado por el factor de proporcionalidad  $2 \cdot \pi$  se traduce de forma lineal en su correspondiente incremento de longitud circunferencial  $dL$ .

El alargamiento unitario a lo largo de la circunferencia perimetral es el cociente entre el incremento de longitud sufrido hallado anteriormente ( $2 \cdot \pi \cdot dR$ ) y denotado como  $dL$ , dividido entre el valor inicial del perímetro ( $2 \cdot \pi \cdot R$ ).

$$\text{Alargamiento Unitario} = \frac{dL}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot dR}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{dR}{R} \quad [\text{A3.5}]$$

- **R** es el radio interno de la tubería.
- **dR** es el incremento que sufre el radio de la tubería al incrementarse la presión.
- **dL** es el incremento que sufre la longitud de la circunferencia perimetral interior como consecuencia del aumento de presión sufrido.



Nos queda por considerar que, la presión es un esfuerzo radial y al ser el tubo de pared delgada podemos suponer que la tensión se mantiene constante a lo largo del espesor de la tubería, por lo que su alargamiento unitario radial puede aproximarse por el cociente  $e/R$ . Esta consideración de linealidad del espesor respecto del radio interior NO es asumible en tuberías de pared gruesa que son las conducciones en las que el espesor supera un rango de valores que expresados en función del radio interior es de **R/15 a R/20** aproximadamente. El incremento de tensión circunferencial sufrido por la pared de la conducción referido al radio y el alargamiento unitario asociado son

$$\text{Incremento tensional} = \frac{dP}{\left(\frac{e}{R}\right)} \qquad \text{alargamiento unitario} = \frac{dR}{R}$$

Queda entonces substituyendo en la expresión del módulo de elasticidad de la tubería que viene dado, como se ha descrito anteriormente, por el cociente entre el incremento tensional y el correspondiente alargamiento unitario:

$$E_T = \frac{\frac{dP}{\left(\frac{e}{R}\right)}}{\frac{dR}{R}} = \frac{dP}{e} \cdot R \cdot \frac{R}{dR} = \left(\frac{R^2}{e}\right) \cdot \frac{dP}{dR} \qquad dP = E_T \cdot \left(\frac{e}{R^2}\right) \cdot dR \qquad [A3.6]$$

- $E_T$  es el módulo de elasticidad del material que conforma la conducción.
- $e$  representa el espesor de la conducción.
- $R$  es el radio interior inicial normal del tubo.
- $dR$  es el incremento del radio interno de la tubería debida al incremento de presión.
- $dP$  es el incremento de presión sufrido por el líquido transmitido a la tubería.

Quedamos al principio que al módulo de compresibilidad del líquido le sumamos el correspondiente módulo de compresibilidad de la tubería (a no confundir con el módulo de elasticidad de la tubería denotado como  $E_T$ ) que era de la forma:

$$E_{Tubería} = \text{Volumen} \cdot \left(\frac{dP}{d\text{AreaTubería}}\right) \qquad [A3.7]$$

■ Substituimos los tres componentes hallados por separado dados por las ecuaciones [A3.3], [A3.4] y [A3.6] en la expresión del módulo de compresibilidad de la tubería insertada como [A3.7]

$$E_{Tubería} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{e \cdot E_T}{R^2} dR \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot dR} \qquad E_{Tubería} = \frac{\pi \cdot e \cdot E_T}{2 \cdot \pi \cdot R} \qquad E_{Tubería} = \frac{e \cdot E_T}{2 \cdot R}$$

Como  $2 \cdot \text{Radio} = \text{Diámetro}$  (diámetro interno de la conducción) obtenemos finalmente:

$$E_{Tubería} = \frac{e \cdot E_T}{D} \qquad [A3.8]$$

- $E$  módulo elástico de la tubería que limita su deformación elástica.

- $D$  diámetro interno de la tubería.
- $e$  es el espesor de la tubería que suponemos delgado frente a su radio interno.
- $E_{Tubería}$  representa el módulo de compresibilidad de la tubería con las limitaciones anteriores.

El inverso del módulo de compresibilidad mixto o combinado del líquido y de la tubería ( $K_{mixto}$ ) queda finalmente:

$$\frac{1}{K_{mixto}} = \frac{1}{E_{agua}} + \frac{1}{E_{Tubería}} = \frac{1}{E_a} + \frac{1}{e \cdot E_T} \frac{1}{E_a} + \frac{D}{e \cdot E_T} \quad K_{mixto} = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_a} + \frac{D}{e \cdot E_T}\right)} \quad [A3.9]$$

La fórmula de la celeridad de la onda queda:

$$c = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \cdot K_{mixto}} \quad c = \sqrt{\frac{g}{\gamma \cdot \left[\left(\frac{1}{E_a}\right) + \left(\frac{D}{e}\right) \cdot \left(\frac{1}{E_T}\right)\right]}} \quad [A3.10]$$

Algunos autores, por comodidad, prefieren la forma inversa cuadrática de esta expresión:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\gamma}{g} \cdot \left[\left(\frac{1}{E_a}\right) + \left(\frac{D}{e}\right) \cdot \left(\frac{1}{E_T}\right)\right] \quad [A3.11]$$

- $c$  es la celeridad o velocidad de desplazamiento de la onda de presión a lo largo de la tubería considerando tanto la propia tubería como el líquido que conduce que para nosotros será agua.
- $\gamma$  es el Peso Específico del fluido. En caso de ser este agua  $\gamma = 1.000 \text{ kp/m}^3$ .
- $g$  es la constante correspondiente a la aceleración de la gravedad ( $\cong 10 \text{ m/s}^2$ ).
- $E_a$  representa el **módulo de compresibilidad** del agua ( $E_a = 21.000 \text{ kg/cm}^2 = 2,2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ).
- $D$  es el diámetro interior de la tubería.
- $e$  espesor de la tubería cumpliéndose que  $\text{espesor} < [D/20, D/15]$
- $E_T$  es el **módulo de elasticidad** del material que conforma la tubería también denominado módulo de Young.

### A3.3 INFLUENCIA DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO DE LA TUBERÍA EN LA CELERIDAD DE UNA ONDA DE PRESIÓN.

En el apartado anterior hemos llegado a la conclusión de que la velocidad de una onda de presión teniendo en cuenta la contribución de la tubería de trasiego se puede calcular mediante la

expresión [A3.10]. Elevando al cuadrado ambos miembros de dicha ecuación y dividiendo el numerador y denominador del cociente por el peso específico del agua queda

$$c^2 = \frac{g}{\gamma \cdot \left( \frac{1}{E_a} + \frac{D}{e \cdot E_T} \right)} = \frac{1/\rho}{\left( \frac{1}{E_a} + \frac{D}{e \cdot E_T} \right)}$$

Multiplicando el numerador y denominador del cociente por el módulo de compresibilidad del agua se llega a una expresión más genérica que la inicialmente propuesta

$$c^2 = \frac{\frac{E_a}{\rho}}{\frac{E_a}{E_a} + \frac{E_a}{E_T} \cdot \left( \frac{D}{e} \right)} \qquad c^2 = \frac{\frac{E_a}{\rho}}{1 + \left( \frac{E_a}{E_T} \right) \cdot \Psi} \qquad [A3.12]$$

- $\Psi$  es un parámetro adimensional que depende de las condiciones elásticas del conducto y de las características propias de la tubería que con las consideraciones asumidas en el desarrollo anterior asume, a falta de más datos el valor  $D/e$  porque se han supuesto las mejores condiciones de sustentación que consisten en juntas elásticas de expansión.
- $E_T$  es el módulo de elasticidad del material que conforma la tubería o módulo de Young de las paredes del conducto.
- $E_a$  representa el **módulo de compresibilidad** del agua y en general del fluido considerado.
- $\rho$  densidad del fluido considerado.

Valores a considerar del parámetro  $\Psi$  según la condiciones elásticas de contorno de la tubería.

### Caso 1.- Tubería rígida.

En el caso, físicamente imposible, en que la tubería fuese totalmente rígida el parámetro  $\Psi$  asume el valor nulo  $\Psi = 0$  quedando para la velocidad de propagación de la onda de presión, la expresión de su desplazamiento en el medio líquido sin importar la tubería.

$$c^2 = \frac{E_a}{\rho}$$

### Caso 2. Tubería elástica.

En el caso de conducto elástico distinguiremos entre las que disponen de pared delgada y las que constan de pared gruesa debido a su distinto comportamiento mecánico.

## ① TUBERÍA ELÁSTICA DE GRAN ESPESOR.

- Tubería anclada contra movimiento longitudinal

$$\Psi = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \left[ \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} - 2 \cdot \nu \cdot \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \right]$$

- $\nu$  es el coeficiente de Poisson.
- $R_e$  representa el radio exterior de la tubería.
- $R_i$  representa el radio interior tubería.

● Tubería anclada en su extremo de aguas arriba impidiendo la aplicación de los esfuerzos de torsión:

$$\psi = 2 \cdot \left[ \frac{R_e^2 + 1,5 \cdot R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} + \nu \cdot \frac{R_e^3 - 3 \cdot R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \right]$$

● Tubería fuertemente anclada con muchas juntas de expansión intercaladas:

$$\psi = 2 \cdot \left[ \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} + \nu \right]$$

## 2 TUBERÍA ELÁSTICA DELGADA.

● Tubería con anclajes en toda su longitud:

$$\psi = \left(\frac{D}{e}\right) \cdot (1 - \nu^2)$$

siendo

- $D$  el diámetro exterior de la tubería.
- $e$  el espesor de la tubería.

● Tubería anclada en su extremo de agua arriba:

$$\psi = \frac{D}{e} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

● Tuberías con juntas de expansión que es el caso genérico estudiado para el desarrollo de la correspondiente expresión:

$$\psi = \frac{D}{e}$$

### A3.4 VELOCIDAD DE UNA ONDA APLICADO AL CASO DEL GOLPE DE ARIETE.

Consideramos distintas hipótesis respecto de la compresibilidad del líquido involucrado y de la elasticidad de la tubería.

#### Hipótesis 1.

Tubería totalmente rígida y fluido completamente incompresible.

Si se supone un cierre instantáneo de la válvula, ya no se produce entrada del líquido en la tubería desde el embalse (depósito), por lo que el caudal circulante será nulo. Como la fórmula de la celeridad viene dada por Velocidad = espacio/tiempo cuando el tiempo tiende a cero, la velocidad tiende a infinito.

#### Hipótesis 2.

Tubería totalmente rígida y fluido compresible.

La onda se desplaza a la velocidad del sonido en el fluido porque sigue entrando caudal al ser el fluido compresible. La celeridad de una onda en un fluido circulando por una tubería viene dada por la fórmula de Joukowski, también denominada expresión de **Korteweg** que hemos abordado anteriormente cuyos parámetros han sido explicitados con anterioridad:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{k}{\rho}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{E_T}\right) \cdot \left(\frac{D}{e}\right)}}$$

En esta expresión, si consideramos la tubería infinitamente rígida su módulo de Young tiende a infinito ( $E_T = \infty$ ) y substituyendo queda:

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

que es el valor de la propagación de la onda de presión en el fluido, siendo el máximo valor alcanzable por c puesto que la tubería nunca es totalmente rígida. Para el caso particular de que el fluido considerado sea agua podemos hallar la celeridad de desplazamiento de una onda de presión en su seno puesto que tenemos como datos:

- Módulo de elasticidad del agua  $K=2,03 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup>
- Densidad del agua  $\rho=1.000$  Kg/ m<sup>3</sup>

$$c^2 = 2,03 \cdot 10^9 / 1.000 = 2,03 \cdot 10^6$$

$$c = 1.424,78 \text{ metros/segundo}$$

La fórmula de Allievi que nos proporciona la celeridad de la onda involucrada en el Golpe de Ariete es un caso particular de la de Joukowski siendo que la velocidad del sonido en el agua es de 1.425 m/s y el módulo de elasticidad del agua es  $k=2,03 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  (a 10°C). La fórmula de Joukowski se simplifica en la de Allievi como:

$$c = \frac{9.900}{\sqrt{48,3 + \beta \cdot \frac{D}{e}}} \quad [43.13]$$

siendo  $\beta$  un valor adimensional igual a  $10^{10}/E_T$ .

Tabulando los valores de  $\beta$  en la fórmula de Allievi para distintos materiales tenemos:

| MATERIAL          | $E_T$ [kp/cm <sup>2</sup> ] | $\beta$ |
|-------------------|-----------------------------|---------|
| Acero             | $2 \cdot 10^6$              | 0,5     |
| Aluminio          | $7 \cdot 10^5$              | 1,43    |
| Fundición dúctil  | $1,7 \cdot 10^6$            | 0,5     |
| Fundición laminar | $10^6$                      | 1       |
| Hormigón          | 200.000                     | 5       |
| HDPE              | 9.000                       | 111,11  |
| LDPE              | 2.000                       | 500     |
| PVC               | 30.000                      | 33,33   |

### Hipótesis 3.

#### Tubería No totalmente rígida y fluido compresible

La realidad se sitúa entre los dos campos anteriores puesto que nunca la tubería es infinitamente rígida ni el fluido totalmente incompresible, aunque para el agua la variación de volumen sea prácticamente despreciable.

## ADDENDUM N° 4.

### TEOREMA O PRINCIPIO DE TORRICELLI.

El teorema o principio de Torricelli es una consecuencia directa de la aplicación práctica del trinomio de Bernoulli (conservación de la energía total en cualquier sección de un fluido incompresible en régimen laminar).

Supongamos que disponemos de un depósito y que éste, tiene un orificio de salida a cierta profundidad  $h$  respecto de la lámina libre superior de dicho depósito.

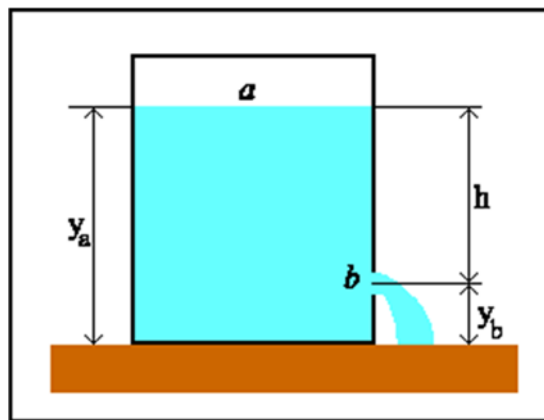


Figura A5.1. Recipiente de Torricelli. Fuente: <https://davidrodriguez2206.wordpress.com/teorema-de-torricelli/>

Nos preocupa saber la velocidad de salida del chorro de agua (fuga) en el punto **b** y Torricelli nos enseña que la velocidad de salida del chorro es la misma que tendría en caída libre desde la altura **h**. Para aplicar el teorema de Bernoulli tomamos como punto **a** de la superficie del agua en el depósito y como punto **b** el situado en el eje del chorro de salida. Aplicamos la ecuación del trinomio de Bernoulli entre los puntos **a** y **b**:

$$\frac{P_a}{\gamma} + z_a + \frac{V_a^2}{2 \cdot g} = \frac{P_b}{\gamma} + z_b + \frac{V_b^2}{2 \cdot g} + \text{pérdidas entre a y b}$$

1º) Despreciamos las pérdidas por rozamiento y por embocadura.

2º)  $Z_a$  y  $Z_b$  son las alturas geométricas sobre un mismo plano de referencia. Si tomamos el plano de referencia en el eje del chorro, es decir a la altura del punto **b** entonces  $Z_b$  se anula y  $Z_a$  es el valor de la profundidad a la que se encuentra el eje del chorro respecto del nivel de agua en el tanque que hemos denominado como **h** Luego  $z_a = h$ .

3º) Tanto el punto **a** como el **b** se encuentran a presión atmosférica ( $P_{at}$ ).

4º)  $g$  es la "constante" de aceleración de la gravedad ya conocida para la cual adoptaremos el valor numérico  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

5º)  $\gamma$  Es también "constante" y se trata del peso específico del líquido (agua).

Reordenando los términos y dejando la expresión en forma incremental:

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right) \cdot (P_b - P_a) + (z_b - z_a) + \left(\frac{1}{2 \cdot g}\right) \cdot (V_b^2 - V_a^2) = 0$$

Aplicamos  $P_a = P_b = P_{atm}$

Luego  $P_b - P_a = 0$

Tenemos  $z_b - z_a = h$

La velocidad de descenso del agua en el tanque es prácticamente nula. Para unos valores medios reales la velocidad de salida es del orden de  $10^5$  veces mayor que la de descenso de la superficie del líquido del tanque, por lo que  $V_a$  es despreciable frente a  $V_b$ . Asumimos de acuerdo a lo anterior que  $V_a = 0$ . Con todo esto o en la fórmula original nos queda:

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right) (0) + (-h) + \left(\frac{1}{2 \cdot g}\right) V_b^2 = 0$$

El signo negativo de  $h$  responde a que  $Z_b$  es menor que  $Z_a$  por lo que el incrementado correspondiente se traduce en decremento. Esto no tiene la mayor importancia puesto que lo que buscamos es el módulo de  $V_b$ , porque es obvio que el chorro presenta una velocidad cuyo sentido es hacia fuera del tanque. Multiplicando toda la ecuación por  $2 \cdot g$  y despejando  $V_b$  queda la ecuación de Torricelli.

$$V_b = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$



## ADDENDUM N° 5.

### LA GRAVEDAD.

La gravedad o aceleración de la gravedad denotada por  $g$  se mide en el sistema internacional de unidades de Newton/kilógramo, puesto que es una fuerza que actúa por kilogramo de masa. Se puede definir como la aceleración que sufre cualquier cuerpo en su caída libre, por lo que también se expresa en metros/segundo<sup>2</sup>.

En Alemania se ha desarrollado a través del PTB (Physikalisch-Technische Bundesanstalt: Instituto de Meteorología de Alemania) el sistema SIS (Schwere-Information System) que mediante una página web permite conocer el valor de  $g$  en cualquier punto de la tierra con una precisión de 6 cifras decimales.

La gravedad  $g$  varía con la latitud. La Organización internacional de Metrología Legal, en su boletín OIML127 la calcula con una exactitud de 0,01% utilizando los coeficientes propuestos por la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) en el GRS80 (Geodesic Reference System of 1980):

$$g_{Local} = g_{Ecuador} [1 + f \cdot \text{sen}^2(\theta) - p \cdot \text{sen}^2(2\theta)] - 3,086 \cdot 10^{-6} \cdot H$$

- $g_{Local}$  es la aceleración de la gravedad local en  $m/s^2$ .
- $g_{Ecuador}$  es la  $9,780\ 318\ m/s^2$ . Aceleración de la gravedad en el ecuador ( $\theta = 0^\circ$ ).
- $f$  es el coeficiente de aplastamiento gravitacional cuyo valor es  $f = 0,005\ 3024$ .
- $p$  es una constante.  $p = 0,000\ 005\ 8$ .
- $\theta$  representa la latitud en grados ( $^\circ$ )
- $H$  es la altitud ortométrica sobre el nivel medio del mar en metros.

El valor de  $g$  varía con la altitud siendo máxima en la superficie terrestre, disminuyendo "linealmente" con la profundidad y "parabólicamente" con la altura:

$$g(h) = \begin{cases} g^* \cdot \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2}\right) & h > 0 \\ g^* \cdot \left(1 + \frac{2h}{R}\right) & h < 0 \end{cases}$$

- $g^*$  vale  $9,80665$  para  $h=0$
- $R$  es el radio medio de la tierra estimado en  $6.371.000\ m$

## BIBLIOGRAFÍA.

- |            |                         |
|------------|-------------------------|
| Título:    | INGENIERÍA HIDRÁULICA   |
| Autor:     | Teodoro Montalvo López. |
| ISBN:      | 84-95422-18-2.          |
| Editorial: | Ediciones VJ.           |
- 
- |            |  |
|------------|--|
| Título:    | CANALIZACIONES. FUNDICIÓN DÚCTIL/1986. |
| Autor:     | Funditubo, S.A.                        |
| ISBN:      |  |
| Editorial: |  |
- 
- |            |                                      |
|------------|--------------------------------------|
| Título:    | TUBERÍAS. Tomo I.                    |
| Autor:     | José M <sup>a</sup> Mayol Mallorquí. |
| ISBN:      | 85-198-70-0                          |
| Editorial: | Bellisco.                            |
- 
- |            |                                      |
|------------|--------------------------------------|
| Título:    | TUBERÍAS. Tomo II                    |
| Autor:     | José M <sup>a</sup> Mayol Mallorquí. |
| ISBN:      | 84-7146-231-1                        |
| Editorial: | Técnicos Asociados, SA.              |
- 
- |            |                                      |
|------------|--------------------------------------|
| Título:    | TUBERÍAS. Tomo III                   |
| Autor:     | José M <sup>a</sup> Mayol Mallorquí. |
| ISBN:      | 84-604-6608-6                        |
| Editorial: | Bellisco                             |
- 
- |            |   |
|------------|---|
| Título:    | TRANSITORIOS HIDRÁULICOS  |
| Autor:     | Abreu, J.; Cabrera, E.; Espert, V.B.; García-Serra, J. y Sanz, F. |
| ISBN:      | 978-84-8363-780-7   |
| Editorial: | Universidad Politécnica de Valencia                               |
- 
- |            |                                  |
|------------|----------------------------------|
| Título:    | REDES INDUSTRIALES DE TUBERÍAS   |
| Autor:     | Antoni Kuszczewski               |
| ISBN:      | 968-6708-41-3                    |
| Editorial: | Reverté Ediciones, SA de CV.1999 |

**Título:** PROBLEMAS DE HIDRÁULICA  
**Autor:** Lázaro López Andrés  
**ISBN:** 84-7908-647-5  
**Editorial:** Publicaciones Universidad de Alicante

**Título:** MANUAL DE INGENIERÍA HIDRÁULICA  
**Autor:** Armando Coutiniio de Lencastre y Camilo Robles García  
**ISBN:** 84-95075-16-4  
**Editorial:** Universidad Pública de Navarra

**Título:** TUBERÍAS DE POLIETILENO  
**Autor:** Luis Balairón Pérez  
**ISBN:** 978-84-8143-531-3  
**Editorial:** AENOR Ediciones

**Título:** CONDUCCIONES  
**Autor:** Manuel Mateos de Vicente  
**ISBN:** 84-85198-74-3  
**Editorial:** Bellisco

**Título:** MANUAL DE CONDUCCIONES URALITA  
**Autor:** Joaquín Suarez López, Fernando Martínez Abella, Jerónimo Puertas Agudo  
**ISBN:** 978-84-283-2882-1  
**Editorial:** THOMSON, Paraninfo

**Título:** ABASTECIMIENTO Y DISTRIBUCIÓN DE AGUA  
**Autor:** Aurelio Hernández Muñoz  
**ISBN:** 978-84-380-0390-9  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** FLUJO ESTACIONARIO DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES EN TUBERÍAS  
**Autor:** Rafael Pérez García, Pedro L. Iglesias Rey y Vicente S. Fuentes Miquel  
**ISBN:** 84-9705-894-1  
**Editorial:** Universidad Politécnica de Valencia

**Título:** PROBLEMAS RESUELTOS DE INGENIERÍA FLUIDOMECÁNICA  
**Autor:** Ricardo Cobacho Jordán, Enrique Cabrera Rochera, Vicent Espert Alemany  
**ISBN:** 978-84-8363-268-0  
**Editorial:** Universidad Politécnica de Valencia

**Título:** MECÁNICA DE FLUIDOS.

**Autor:** Antonio Crespo Martínez

**ISBN:** 978-84-9732-292-8

**Editorial:** Thomson Editores Spain

**Título:** PROBLEMAS DE OBRAS HIDRÁULICAS.

**Autor:** Fernando Delgado Ramos y Joaquín Delgado García

**ISBN:** 84-8491-501-8

**Editorial:** Grupo Editorial Universitario

**Título:** INGENIERÍA RURAL: HIDRÁULICA.

**Autor:** Jaime Arviza Valverde, Ibán Balbastre Peralta y Pablo González Altozano.

**ISBN:** 84-9705-293-5

**Editorial:** Universidad Politécnica de Valencia

**Título:** FORMULARIO TÉCNICO DE HIDRÁULICA.

**Autor:** Paloma Batanero Akerman y Eduardo Martínez Martín

**ISBN:** 84-96486-09-5

**Editorial:** Bellisco Ediciones

**Título:** INGENIERÍA HIDRÁULICA.

**Autor:** Teodoro Montalvo López

**ISBN:** 84-95422-97-2

**Editorial:** Ediciones VJ

**Título:** PROBLEMAS DE HIDRÁULICA BÁSICA.

**Autor:** José Luis Pulido Carrillo

**ISBN:** 84-930437-0-2

**Editorial:** Rugarte, SL.

**Título:** HIDRÁULICA PARA INGENIEROS.

**Autor:** Domingo Escribá Bonafé

**ISBN:** 84-85198-21-2

**Editorial:** Bellisco

**Título:** GUÍA TÉCNICA SOBRE TUBERÍAS PARA EL TRANSPORTE DE AGUA A PRESIÓN.

**Autor:** Grupo de trabajo, presidido por Manuel L. Martín Antón.

**ISBN:** 978-84-7790-437-3

**Editorial:** CEDEX

**Título:** INGENIERÍA HIDRÁULICA. PROBLEMAS RESUELTOS.  
**Autor:** Leonardo S. Nanía, Pablo Ortiz Rossini y Miguel Ortega Sánchez  
**ISBN:** 84-8491-595-6  
**Editorial:** Grupo Editorial Universitario

**Título:** TUBERÍAS DE PVC. MANUAL TÉCNICO.  
**Autor:** AseTUB  
**ISBN:** 84-8143-462-0  
**Editorial:** AENOR

**Título:** GUÍA TÉCNICA SOBRE REDES DE SANEAMIENTO Y DRENAJE URBANO.  
**Autor:** Grupo de trabajo presidido por José M. Ruíz García  
**ISBN:** 978-84-7790-464-9  
**Editorial:** CEDEX

**Título:** CANALES HIDRÁULICOS.  
**Autor:** José Liria Montañés  
**ISBN:** 84-380-0187-4  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** APUNTES DE HIDRÁULICA TÉCNICA.  
**Autor:** Juan F. Fernández Bono y Juan B. Marco Segura.  
**ISBN:** SPUPV-88.071  
**Editorial:** Universidad Politécnica de Valencia

**Título:** OBRAS HIDRÁULICAS. III MAQUINARÍA.  
**Autor:** Miguel Delgado Fernández  
**ISBN:** 84-600-1774-5  
**Editorial:** Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** OBRAS HIDRÁULICAS.  
**Autor:** Eugenio Vallarino  
**ISBN:** 84-7493-262-9  
**Editorial:** Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** OBRAS HIDRÁULICAS. III MAQUINARÍA.  
**Autor:** Eugenio Vallarino  
**ISBN:** 84-600-1774-5  
**Editorial:** Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

- Título:** OBRAS HIDRÁULICAS. IV CONDUCCIONES.  
**Autor:** Eugenio Vallarino  
**ISBN:** 84-7493-194-3  
**Editorial:** Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
- Título:** SEGURIDAD DE PRESAS Y EMBALSES. NORMATIVA Y RECOMENDACIONES.  
**Autor:** Fernando Delgado Ramos  
**ISBN:** 84-380-0296-X  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
- Título:** DISEÑO DE PEQUEÑAS PRESAS.  
**Autor:** Eduardo Martínez Marín, Paloma Batanero Akerman, Ignacio Martínez González, Eduardo Martínez Olmos y Elena González Ordóñez.  
**ISBN:** 84-96486-49-4  
**Editorial:** Bellisco
- Título:** ANÁLISIS DE SISTEMAS HIDROELÉCTRICOS.  
**Autor:** José Román Wilhelmi Ayza  
**ISBN:** 978-84-7493-383-3  
**Editorial:** Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
- Título:** LAS TUBERÍAS. ACUEDUCTOS, OLEODUCTOS, GASODUCTOS.  
**Autor:** Manuel Cegarra Plané  
**ISBN:** 84-7493-274-2  
**Editorial:** Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
- Título:** DISTRIBUTIONS D'EAU ET DES ÉGOUTS.  
**Autor:** L. Bonet  
**ISBN:**  
**Editorial:** Librairie Polytechnique, CH Béranger, Editeur
- Título:** GUÍA TÉCNICA SOBRE TUBERÍAS PARA EL TRANSPORTE DE AGUA A PRESIÓN.  
**Autor:** Grupo de trabajo presidido por Manuel L Martín Antón  
**ISBN:** 978-84-7790-437-3  
**Editorial:** CEDEX
- Título:** RECOMENDACIONES PARA TUBERÍAS DE HORMIGÓN ARMADO EN REDES DE SANEAMIENTO Y DRENAJE  
**Autor:** Alfonso Palma Villalónet Alter  
**ISBN:** 84-7790-413-8  
**Editorial:** CEDEX

**Título:** GUÍA TÉCNICA SOBRE REDES DE SANEAMIENTO Y DRENAJE URBANO.  
**Autor:** Grupo de trabajo presidido por Juan Manuel Ruiz García  
**ISBN:** 978-84-7790-464-9  
**Editorial:** CEDEX

**Título:** MANUAL DE TUBERÍAS.  
**Autor:** Bernardo Martín Hernández  
**ISBN:** 84-605-0533-2  
**Editorial:** Bernardo Martín Hernández

**Título:** MANUAL DE SANEAMIENTO URALITA.  
**Autor:** Aurelio Hernández Muñoz y Aurelio Hernández Lehmann  
**ISBN:** 84-283-2871-4  
**Editorial:** Thomson. Paraninfo

**Título:** TIPOLOGÍA Y SEGURIDAD DE PRESAS.  
**Autor:** Alfonso Álvarez Martínez  
**ISBN:** 84-380-0299-4  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** APROVECHAMIENTOS HIDROELÉCTRICOS. TOMO I.  
**Autor:** Luis Cuesta Diego y Eugenio Vallarino  
**ISBN:** 84-380-0167-X  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** APROVECHAMIENTOS HIDROELÉCTRICOS. TOMO II.  
**Autor:** Luis Cuesta Diego y Eugenio Vallarino  
**ISBN:** 84-380-0168-8  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** TRATADO BÁSICO DE PRESAS. TOMO I.  
**Autor:** Eugenio Vallarino  
**ISBN:** 84-380-0312-5  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Título:** TRATADO BÁSICO DE PRESAS. TOMO II.  
**Autor:** Eugenio Vallarino  
**ISBN:** 84-380-0313-3  
**Editorial:** Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

- Título:** EL GOLPE DE ARIETE EN SISTEMAS DE ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE  
**Autor:** Gustavo Adolfo Ortiz Masek  
**Universidad:** U. de San Carlos de Guatemala. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Civil
- Título:** HIDRÁULICA DE TUBERÍAS. DESCRIPCIÓN Y EFECTOS DEL GOLPE DE ARIETE. PROTECCIÓN DE LÍNEAS HIDRÁULICAS  
**Autor:** Holger Benavides Muñoz  
**Página web:** [www.utpl.edu.ec/ucg](http://www.utpl.edu.ec/ucg)
- Título:** EL GOLPE DE ARIETE EN TUBERÍAS DE IMPULSIÓN. COMENTARIOS A LAS EXPRESIONES DE MENDILUCE.  
**Autor:** J.M. Abreu, E. Cabrera, P.L. Iglesias, J. Izquierdo  
**Universidad:** Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Coímbra (Portugal).  
U.D. Mecánica de Fluidos. Universidad Politécnica de Valencia (España)
- Título:** UNA NUEVA APROXIMACIÓN PARA LA EVALUACIÓN DEL GOLPE DE ARIETE INCLUYENDO LA CONDICIÓN INICIAL DE PRESURIZACIÓN DE LA INSTALACIÓN Y DEL FLUIDO.  
**Autor:** Kaless, G.  
**Universidad:** Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Departamento de Ingeniería Civil Orientación Hidráulica.
- Título:** CÁLCULO HIDRÁULICO DE LAS CONDUCCIONES LIBRES Y FORZADAS. UNA APROXIMACIÓN DE LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS.  
**Autor:** Josep Maria Franquet Bernis.  
**ISBN:** 84 - 930364 - 2 - 0  
**Universidad:** Universitat Internacional de catalunya.  
Escuela Universitaria de Ciencias experimentales y Tecnología.
- Título:** DEMOSTRACIÓN Y ANÁLISIS DEL GOLPE DE ARIETE POR EL MÉTODO DE LOS PROMEDIOS ARITMÉTICOS  
**Autor:** González Casas, F., Zamudio Huertas, E., & García Ubaque  
**Página web:** <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/Tecnura/issue/view/650>  
<http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.tecnura.2015.SE1.a12>  
**Editorial:** Revista Tecnura, 19, 143-151. doi: 10.14483/udistrital.jour.tecnura.2015.SE1.a12.
- Título:** ANÁLISIS DEL GOLPE DE ARIETE EN UN SISTEMA DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA.  
**Autor:** Twyman, J.  
**Página web:** <https://doi.org/10.4995/la.2017.6389>



**Título:** ANÁLISIS DEL GOLPE DE ARIETE EN TUBERÍAS CON COMPORTAMIENTO VISCOELÁSTICO.

**Autor:** Gabriel Cisneros Azpeitia.

**Universidad:** Universidad Nacional Autónoma de México.

**Título:** ANÁLISIS DEL GOLPE DE ARIETE EN TUBERÍAS DE PRESIÓN DE CENTRALES HIDROELÉCTRICAS.

**Autor:** Juan Sebastián Bahamonde Noriega.

**Universidad:** Escuela Politécnica Del Ejército. Facultad De Ingeniería Mecánica.

**Título:** MODELAMIENTO MATEMÁTICO DEL GOLPE DE ARIETE.

**Autor:** Pablo Andrés Gil Leguizamón y Julián Rodrigo Quintero González.

**Universidad:** Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

**Título:** MECÁNICA DE FLUIDOS – GOLPE DE ARIETE

**Autor:** Henquín, Eduardo R. y Meyer, Camilo I.

**Página web:** [http://www.geocities.ws/ehenquin/golpe\\_de\\_ariete.pdf](http://www.geocities.ws/ehenquin/golpe_de_ariete.pdf)

**Título:** ESTUDIO DE TRANSITORIOS. GOLPE DE ARIETE.

**Autor:** Luis E. Pérez Farrás y Adolfo Guitelman.

**Universidad:** Universidad De Buenos Aires. Facultad De Ingeniería. Departamento De Hidráulica. Cátedra De Construcciones Hidráulicas.

**Título:** GOLPE DE ARIETE Y CAVITACIÓN.

**Universidad:** Universidad de Cantabria. Termodinámica y Mecánica de Fluidos.

**Título:** GOLPE DE ARIETE: SIMULACIÓN DEL TRANSITORIO AMORTIGUADO.

**Autor:** Roberto Jorge Aguerre

**Universidad:** Universidad Nacional de Luján

**Página web:** <https://www.researchgate.net/publication/236130342>

**Título:** ESTUDIO DEL GOLPE DE ARIETE EN BOMBAS VOLUMÉTRICAS. ANÁLISIS FLUIDODINÁMICO DE LOS TRANSITORIOS DE PRESIÓN.

**Autor:** David Adrián Rodríguez García.

**Universidad:** Universidade Da Coruña. Escola Politécnica Superior. Ferrol. Campus Universitario de Esteiro.

**Título:** SIMULACIÓN DE FLUJO EN TUBERÍAS APLICANDO UN MODELO DE FRICCIÓN TRANSITORIO.

**Autor:** Edwin Fernando Zetina Robleda.

**Universidad:** Universidad Nacional Autónoma De México. Programa De Maestría Y Doctorado En Ingeniería. Ingeniería Civil – Hidráulica.

**Título:** MODELIZACIÓN NUMÉRICA Y MEJORA DEL SISTEMA DE MEDIDA EN UNA INSTALACIÓN EXPERIMENTAL DOCENTE DE GOLPE DE ARIETE.

**Autor:** José Luis Martínez Fernández.

**Universidad:** Universidad Politécnica De Cartagena.  
Escuela Técnica Superior De Ingeniería Industrial.

**Título:** MECÁNICA DE FLUIDOS.

**Autor:** Pedro Fernández Díez.

**Página web:** <http://es.pfernandezdiez.es>

**Título:** MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

**Autor:** Enrique Zuazua.

**Universidad:** Basque Center for Applied Mathematics (BCAM). Bilbao, Spain.

**Página web:** <http://www.bcamath.org/zuazua/>

**Título:** APRENDA MATLAB 7.0 COMO SI ESTUVIERA EN PRIMERO.

**Autor:** Javier García de Jalón, José Ignacio Rodríguez, Jesús Vidal.

**Universidad:** Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.  
Universidad Politécnica de Madrid.

**Título:** BREVE INTRODUCCIÓN A MATLAB.

**Autor:** Pablo Castañeda, Jimena Rodríguez Lebrija y Rodrigo Zepeda Tello.

**Universidad:** Departamento Académico de Matemáticas, ITAM. Ciudad de México. México.  
Centro de Investigación en Salud Poblacional, INSP. Ciudad de México. México.

**Título:** MATEMÁTICAS. MATLAB: COMANDOS Y EJEMPLOS.

**Autor:** Elena Álvarez Sáiz.

**Universidad:** Ingeniería de Telecomunicación. Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación.  
Universidad de Cantabria.

**Título:** CURSO RÁPIDO DE MATLAB.

**Autor:** Rafael Palacios.

**Universidad:** Universidad Pontificia Comillas. ICAI-ICADE. Escuela Técnica Superior De Ingeniería.  
Instituto De Investigación Tecnológica.

**Título:** CURSO DE PROGRAMACIÓN EN MATLAB Y SIMULINK.

**Autor:** Alberto Herreros y Enrique Baeyens.

**Universidad:** Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática (DISA).  
Escuela de Ingenierías Industriales. Universidad de Valladolid (UVa).

**Título:** MANUAL BÁSICO DE MATLAB.  
**Autor:** M<sup>a</sup> Cristina Casado Fernández  
**Universidad:** Servicios Informáticos U.C.M. Apoyo a Investigación y Docencia.

**Título:** BREVES APUNTES DE MATLAB. UNA INTRODUCCIÓN RÁPIDA PERO NO TRIVIAL.  
**Autor:** Rosa Echevarría Líbano.  
**Universidad:** Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico. Universidad de Sevilla.

**Título:** INGENIERÍA DE LOS ALGORITMOS Y MÉTODOS NUMÉRICOS. UN ACERCAMIENTO PRÁCTICO AVANZADO A LA COMPUTACIÓN CIENTÍFICA E INGENIERIL CON MATLAB.  
**Autor:** José Luis de la Fuente O'Connor.  
**Editorial:** Círculo Rojo.  
**ISBN:** 978-84-9140-984-7

En Castellón a 14 de octubre de 2019.

Francisco Navarro Plana.

