

# Aplicación del Método de Rusanov a la modelización de la rotura de presas y olas de marea

Autor: Germán López Pineda

Director: Dr. Vicente Martínez García

TRABAJO FIN DE MASTER  
Máster Universitario en Matemática  
Computacional



Departamento de Matemáticas

Universitat Jaume I

Castelló (España)

Julio 2019

*Dedicado a mi padre y mi madre, por su  
paciencia infinita*

# Aplicación del Método de Rusanov a la modelización de la rotura de presas y olas de marea

Germán López Pineda

Este texto se presenta como Trabajo Final de Máster dentro del programa de Máster Universitario en Matemática Computacional para optar al título de Máster en la Universitat Jaume I.

## Resumen

En este trabajo se aplica el método de Rusanov a la aproximación numérica de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que modelizan el comportamiento de un flujo en condiciones de aguas poco profundas (*shallow water*).

Se ha usado código en MatLab para implementar dicho método y para para modelizar dos casos concretos, la rotura de una presa de pared delgada y la modelización del avance de una ola de marea.

En este trabajo se obtiene el sistema de ecuaciones conservativas, que con las necesarias simplificaciones modeliza los fenómenos asociados a problemas en los que se presenta un fluido, en este caso agua, con condiciones en las que la profundidad a la que se encuentra el lecho de apoyo es mucho menor que la longitud de onda asociada al movimiento del fluido.

Se tienen en cuenta las características de las ecuaciones conservativas que modelizan dichos fenómenos, se describe el problema de Riemann para el caso de salto entre dos valores constantes diferentes y para el caso general.

Se describen los métodos numéricos aplicados a ecuaciones conservativas, discretización del dominio espacial, número de *Courant – Friedrichs – Levy*, para controlar la convergencia del método.

Se indica la metodología para la aplicación del método de Rusanov, el contenido de las matrices para el planteamiento del problema, definición de la geometría del

fondo, condiciones de rugosidad y condiciones seco-mojado para el caso de dominios de transición de dominios con agua a aquellos que permanecen secos en algún momento del modelo.

Finalmente se realizan tres test numéricos para comprobar el funcionamiento del código:

- Test numérico con fondo constante, para el caso de rotura de presa de pared delgada.
- Test con fondo variable, para el caso de régimen estacionario.
- Test con fondo variables y rugosidad en el fondo para el caso de olas de marea.

# Agradecimientos

Agradezco a la Universitat Jaume I la posibilidad de realizar el Master en Matemática Computacional, así como a mi director de Trabajo Fin de Master, Dr. D. Vicente Martínez cuyo apoyo ha sido fundamental e imprescindible para terminar este trabajo.

# Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	v
<b>1. Introduccción</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción . . . . .	1
1.2. Aplicaciones . . . . .	2
<b>2. Introducción a la mecánica de fluidos</b>	<b>6</b>
2.1. Condiciones de contorno en mecánica de fluidos . . . . .	6
2.2. Propiedades de los fluidos . . . . .	6
2.3. Comportamiento del fluido . . . . .	7
2.4. Fuerzas externas . . . . .	9
<b>3. Ecuaciones de aguas poco profundas (SWE)</b>	<b>10</b>
3.1. Introducción . . . . .	10
3.2. Obtención de las ecuaciones de aguas someras . . . . .	11
3.2.1. La ecuación fundamental de la mecánica de fluidos . . . . .	11
3.2.2. La conservación de la masa . . . . .	12
3.2.3. La conservación del momento . . . . .	15
3.2.4. El sistema de ecuaciones de aguas poco profundas . . . . .	17
3.2.5. Modelización de fuerzas externas en la ecuación de aguas poco profundas . . . . .	19
<b>4. Propiedades de las ecuaciones de aguas someras</b>	<b>22</b>
4.1. Características de las ecuaciones de aguas someras . . . . .	22

4.1.1. Valores y vectores propios . . . . .	24
4.1.2. Curvas características . . . . .	24
4.1.3. Definición de la solución del problema . . . . .	25
4.2. La condición Rankine-Hugoniot . . . . .	28
4.3. La condición de entropía de Lax . . . . .	30
4.4. Forma característica de las ecuaciones de aguas poco profundas . . . . .	31
4.4.1. Definición de ondas de choque . . . . .	34
4.4.2. Definición de rarefacción . . . . .	35
4.5. Sistemas de ecuaciones hiperbólicas de leyes de conservación . . . . .	35
4.6. El problema general de valores iniciales, variables características . . . . .	38
4.7. El problema de Riemann para el sistema característico . . . . .	39
4.7.1. El problema generalizado de Riemann . . . . .	42
4.8. La solución general . . . . .	43
<b>5. Métodos numéricos aplicado a ecuaciones conservativas</b>	<b>46</b>
5.1. Definiciones básicas . . . . .	46
5.1.1. Esquemas conservativos . . . . .	46
5.1.2. Discretización del dominio en el plano $x-t$ . . . . .	47
5.2. Esquemas numéricos centrados . . . . .	49
5.2.1. Condición de Bermúdez-Vázquez para el buen comportamiento de un esquema numérico . . . . .	50
5.3. El coeficiente de Courant-Friedrichs-Levy . . . . .	51
<b>6. Métodos numéricos aplicados a las ecuaciones de aguas someras, el método de Rusanov</b>	<b>52</b>
6.1. El problema exacto de Riemann y el método de Godunov . . . . .	52
6.1.1. El esquema de Godunov . . . . .	54
6.2. El esquema de Rusanov . . . . .	56
6.2.1. Características del método de Rusanov . . . . .	57
<b>7. Aplicación del método de Rusanov a la resolución de fenómenos desarrollados en aguas poco profundas</b>	<b>58</b>

7.1. El fenómeno de la rotura de presas . . . . .	58
7.2. Olas de marea . . . . .	60
7.3. Planteamiento del problema, condiciones iniciales y de contorno . . .	60
7.3.1. Condiciones geométricas de fondo . . . . .	61
7.3.2. Características de rugosidad del fondo . . . . .	62
7.3.3. Condiciones de contorno seco-mojado . . . . .	62
7.3.3.1. Redefinición de la discretización de la función fon- do para eliminar la presencia de fuerzas de presión espurias. . . . .	62
7.3.3.2. Simulación de descarga cero cuando el fluido cruza el frente seco/mojado . . . . .	63
<b>8. Desarrollo del código aplicado a la modelización de rotura de presas y olas de marea mediante el método de Rusanov</b>	<b>64</b>
8.1. Descripción de datos de entrada . . . . .	64
8.2. Definición de funciones auxiliares . . . . .	65
8.3. Esquema de funcionamiento del código . . . . .	66
<b>9. Experimentos numéricos</b>	<b>68</b>
9.1. Experimentos numéricos para el caso de modelización de rotura de presas . . . . .	68
9.1.1. Test 1: ecuaciones de aguas someras 1D con fondo constante	68
9.1.2. Test 2: ecuaciones de aguas someras 1D con fondo variable .	69
9.2. Experimentos numéricos para el caso de modelización olas de marea en zonas costeras . . . . .	71
9.2.1. Test 3: ecuaciones de aguas someras 1D con fondo variable y fricción. . . . .	71
<b>10. Conclusiones</b>	<b>74</b>
10.1. Resumen del contenido . . . . .	74
10.2. Futuras líneas de investigación . . . . .	77
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>



# Índice de figuras

1.1. Parámetros generales para definición de una onda. . . . .	2
1.2. Rotura de la Presa de Aznalcollar (España) 1998. . . . .	3
1.3. Rotura de la ladera norte en Mina de Cobre Las Cruces (España) 2019. . . . .	3
1.4. Efectos del tsunami de Fukushima Japón 2011. . . . .	4
1.5. Ojo de tormenta en Júpiter. . . . .	4
3.1. El sistema de coordenadas carteriano usado cuando definimos la ecuación de aguas someras, $b(x, y)$ es la elevación desde el fondo impermeable y $h(t, x, y)$ es la profundidad del agua. . . . .	13
4.1. Aproximación lineal de curvas características. . . . .	26
4.2. Aproximación lineal de curvas características. . . . .	27
4.3. El dominio de dependencia y el rango de influencia del punto $x, t$ para un sistema de dos ecuaciones hiperbólicas con $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . . . . .	28
4.4. Región infinitesimal en el plano $x - t$ usado para determinar las condiciones de Rankine-Hugoniot. . . . .	29
4.5. Determinación gráfica de la solución de un problema de valor inicial para una ley de conservación escalar usando el plano de fase $(x - t)$ . . . . .	33
4.6. Onda de Choque. . . . .	34
4.7. Onda de rarefacción. . . . .	35
4.8. Condiciones iniciales para el problema de Riemann, para el instante inicial, consiste en dos constantes separadas por una discontinuidad en $x=0$ . . . . .	40

---

4.9. Condiciones iniciales para el problema de Riemann, para el instante inicial, consiste en dos constantes separadas por una discontinuidad en $x=0$ . . . . .	41
4.10. Condiciones iniciales para el problema de Riemann, para el instante inicial, consiste en dos constantes separadas por una discontinuidad en $x=0$ . . . . .	42
4.11. Condiciones iniciales extendidas para el problema de Riemann, en el instante inicial, consistente en dos funciones que presentan una discontinuidad en $x_0$ . . . . .	43
5.1. Discretización del dominio $[0, L]$ , dentro del volumen finito $M$ , la celda computacional $I_i$ . . . . .	47
5.2. Distribución escalonada constante, de datos para el tiempo $n$ . . . . .	49
7.1. Esquema de modelización de una presa mediante los niveles aguas arriba y aguas abajo. . . . .	59
7.2. Esquema de modelización de un frente de onda de marea. . . . .	60
8.1. Esquema de funcionamiento del código. . . . .	67
9.1. Simulación de la rotura de una presa. . . . .	69
9.2. Aplicación del esquema Rusanov (9.1.1), (9.1.2), (9.1.3) sobre un problema estacionario. . . . .	71
9.3. Evolución de una ola de marea para diferentes tiempo. Esquema de Rusavov, $M = 0.015$ , $cfi = 0.5$ y 250 celdas computacionales. . . . .	73

# Índice de cuadros

3.1. Valores del coeficiente de Manning para algunos tipos de lecho de canales. . . . .	20
---	----

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Descripción

La mecánica de fluidos describe y modeliza un gran número de sistemas complejos, desde el comportamiento de fluidos en turbinas, flujo de agua en canales, definición de zonas de inundación, modelización del proceso de la rotura de una presa, etc.

Las ecuaciones básicas que describen el movimiento del flujo están construidas por tres principios básicos:

- Conservación de la masa.
- Conservación del momento lineal.
- Conservación de la energía.

Las ecuaciones que modelizan el comportamiento del flujo admiten numerosas adaptaciones según la modelización que requieran las características del fluido, tales como viscosidad, compresibilidad, así como de las dimensiones y características del dominio en el que el fluido esté situado.

En lo que se refiere a las características de comportamiento del fluido, es necesario realizar ciertas simplificaciones que resulten aceptables para situaciones particulares. El objetivo es simplificar el tratamiento matemático del problema para poder abordarlo con las herramientas disponibles, sin que éste pierda el sentido físico y obtener la mejor aproximación posible.

Las ecuaciones de flujo en aguas someras, constituyen una aproximación para la modelización de varios problemas que se desarrollan en este tipo de medio. Estas ecuaciones son usadas para representar el flujo de agua en una región en la que la longitud de onda de propagación es mucho mayor que la profundidad del lecho sobre el que se desarrolla el movimiento.

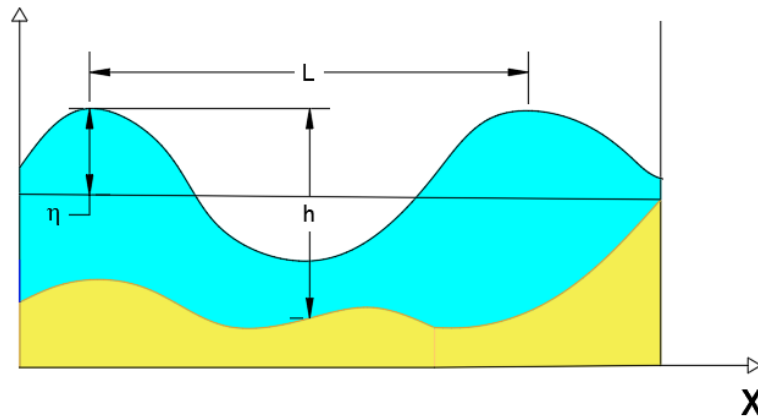


Figura 1.1: Parámetros generales para definición de una onda.

Estas ecuaciones sirven para constituir el modelo básico de mecánica de fluidos en caso de fluidos no viscosos e incompresibles.

En general, se utiliza una aproximación bidimensional de flujo que asume una aceleración vertical insignificante y una distribución de presión hidrostática bajo la cual la presión aumenta linealmente con la profundidad.

## 1.2. Aplicaciones

La ecuación de ondas para aguas poco profundas tiene las siguientes aplicaciones:

1. Rotura de Presas: el problema resultante de las roturas de la presa representa un riesgo potencial para la vida y las infraestructuras. Tales eventos a menudo se caracterizan por flujos y ondas de choque que varían rápidamente.



Figura 1.2: Rotura de la Presa de Aznalcollar (España) 1998.

2. Deslizamientos de ladera en forma de flujo: dentro de las tipologías de deslizamientos, el método podría ser adaptado a la modelización de roturas de taludes en los que la profundidad de la superficie de rotura es pequeña en relación a la longitud del deslizamiento.



Figura 1.3: Rotura de la ladera norte en Mina de Cobre Las Cruces (España) 2019.

3. Propagación del tsunami: los tsunamis representan un gran riesgo para las comunidades costeras de todo el mundo. Esto se ha vuelto evidente después del llamado tsunami del Océano Índico de 2004. Por estas razones hay un mayor esfuerzo en la mitigación del peligro de tsunami (detección de tsunamis, pronóstico y preparación para emergencias) para limitar la pérdida de vidas y las consecuencias económicas como resultado de su acción. Las ecuaciones de ondas de aguas someras aplicadas para modelizar la propagación de tsunamis.



Figura 1.4: Efectos del tsunami de Fukushima Japón 2011.

4. Mareas de tormenta: las mareas de tormenta o marejada ciclónica son causadas por las grandes velocidades del viento, la presión y las mareas altas asociadas a grandes tormenta, especialmente los ciclones tropicales, se dan en este caso situaciones similares a los eventos tipo tsunami.



Figura 1.5: Ojo de tormenta en Júpiter.

5. Transporte de sólidos: la predicción de las concentraciones y transporte de sólidos en flujos de fluidos es importante para muchas aplicaciones ambientales e industriales. Al desarrollar modelos ecológicos de humedales y estuarios, la información sobre el movimiento de contaminantes y otras formas de macrosolutos que a menudo son fuentes de alimentos es importante.

6. Flujos de ríos e inundaciones: el flujo en los ríos sobre las llanuras de inundación se representa con mucha precisión por el flujo de aguas poco profundas, es posible simular flujos para determinar los patrones de flujo y las alturas de los ríos durante las inundaciones.
7. Modelos ecológicos: las macro partículas que se encuentran en ríos y océanos a menudo son fuentes de alimento para pequeños animales marinos. La concentración de estas partículas puede tener un efecto sobre el tamaño de la población y la distribución de estos organismos y, a su vez, sobre el ecosistema como un todo. En consecuencia, el modelado de aguas poco profundas puede usarse para simular el movimiento de estas partículas y organismos y utilizarse para determinar y predecir marcadores ecológicos importantes.

Se recomienda la consulta de [18] para una profundización de las aplicaciones de la mecánica de fluidos.



# Capítulo 2

## Introducción a la mecánica de fluidos

### 2.1. Condiciones de contorno en mecánica de fluidos

La geometría está caracterizada por:

1. Una superficie libre.
2. Una suave pendiente de fondo, de tal forma no hay cambios abruptos en la topografía de fondo.
3. Aguas poco profundas: la profundidad del agua  $h$  es mucho menor que la longitud de onda  $L$ , tal que se considera que  $h \ll L$ . Generalmente, se considera que para admitir que se da la condición de aguas poco profundas, se cumple que  $h/L < 10^{-3}$  a  $10^{-4}$ . Si la amplitud de  $h$  es del mismo orden de magnitud que la profundidad misma, se le conoce como flujo muy poco profundo.
4. El valor de la escala de espacio horizontal a menudo está entre 1 m y 1000 km.

### 2.2. Propiedades de los fluidos

1. El medio es continuo: las propiedades físicas y mecánicas del fluido no deben

acercarse al infinito ni sufrir un salto en ningún punto aislado.

2. Viscosidad: para flujos laminares, el fluido puede describirse aproximadamente como un fluido newtoniano, en el cual la viscosidad molecular juega un papel importante. Para flujo turbulento, se considera fluido no-Newtoniano presentado por su viscosidad turbulenta.
3. Incompresibilidad: la densidad de un elemento de un fluido no cambia durante su movimiento. El efecto sobre el flujo de la variación volumétrica puede ser despreciado.
4. Homogeneidad: un fluido como medio de transporte de masa y de conducción del calor, se supone que la distribución de densidad no varía en toda la masa del fluido, la densidad por lo tanto no tiene influencia en el flujo. El efecto de la densidad, el flujo en capas, el flujo con sedimentos, efectos de la salinidad, contaminación, temperatura, no son considerados. El flujo y el transporte pueden ser calculados por separado, tomando el nivel del agua y la velocidad del flujo como entrada de las ecuaciones de transporte. La homogeneidad junto con la incompresibilidad significa que la densidad puede ser tomada constante,  $\rho$  es pues tomada constante. Consideramos que el valor de la densidad del agua dulce como  $1000 \text{ kg/m}^3$  mientras que en el caso de agua de mar se considera  $1025 \text{ kg/m}^3$ .
5. Isotropía: los parámetros de las propiedades del material, tales como el coeficiente de viscosidad  $\mu$ , no varían con la dirección.

## 2.3. Comportamiento del fluido

1. Flujo no estacionario: un flujo estacionario puede ser considerado como el comportamiento límite de un flujo no estacionario sobre una condición externa fija para un incremento de tiempo infinitesimal.

Tomamos un sistema de coordenadas inerciales como un marco de referencia para diferenciar los dos tipos de flujos, ya que un flujo estacionario en ese sistema se volvería inestable en otro sistema no inercial. En cálculos de flujo

de aguas someras, es práctica común tomar un plano horizontal particular como plano de referencia.

2. Debido a la poca profundidad del fondo, se obtiene una distribución relativamente uniforme de la velocidad horizontal sobre una vertical, por lo que se puede justificar la promediación de la profundidad.

Un flujo intrínsecamente tridimensional se puede simplificar en un flujo plano integrando la velocidad horizontal sobre una vertical para obtener un valor promediado en profundidad e ignorando los efectos de las velocidades verticales.

3. El flujo es generalmente rotacional, donde se produce transporte, difusión, y disipación de vórtices se toma de forma simultánea y continua. Los flujos a gran escala existen en planos horizontales, mientras que solo los pequeños ocurren en planos verticales. Los vórtices grandes se pueden considerar como un tipo de flujo secundario superpuesto al flujo principal.
4. La temperatura a menudo se trata como una constante, ya que la producción de calor debido a la disipación de fricción y la transferencia de calor es insignificante. Si hay una diferencia de temperatura, no consideramos la variación en densidad, viscosidad y conductividad térmica, por lo que el campo de flujo está desacoplado del campo de temperatura. Se pueden calcular por separado.
5. La elevación de la superficie libre varía gradualmente con una pequeña curvatura, de modo que, en comparación con la aceleración gravitacional, se puede ignorar la aceleración en la dirección vertical. Esto puede formularse como la suposición de que una distribución de presión hidrostática (lineal) sobre la profundidad es una buena aproximación en regiones de flujo continuo. Se deben tomar medidas especiales en casos de pendientes pronunciadas y discontinuidades tales como saltos hidráulicos.

Cuando no se pueden ignorar las aceleraciones verticales, ocasionalmente se puede suponer que la velocidad vertical es cero en el fondo de una masa de agua, que varía linealmente y alcanza un valor máximo en la superficie del agua. La ecuación de momento así obtenida es la ecuación de Boussinesq.

6. Los efectos de la tensión superficial pueden ser ignorados.
7. El flujo tiene una escala temporal entre unos segundos y varios días.

## 2.4. Fuerzas externas

1. La gravedad es la fuerza principal que inicia y gobierna el flujo, y da lugar al nombre de "onda de gravedad". La topografía submarina principalmente manifiesta su influencia a través de efectos gravitacionales.
2. Fuerza inercial de Coriolis, debido a que la tierra gira alrededor de su propio eje.
3. Mareas provocadas por los efectos gravitatorios de la luna y el sol.
4. Fuerzas de fricción entre el flujo y el fondo. La disipación de la energía mecánica debido a la viscosidad molecular y turbulenta también se puede incluir en este término. Con tal técnica, el fluido puede verse como no viscoso, pero tal suposición no se cumple en las discontinuidades del fluido.
5. Tensión generada por la acción del viento sobre la superficie del agua.
6. Gradiente de fuerza producida por el campo de la presión atmosférica sobre la superficie del agua.

Las tres primeras son fuerzas de cuerpo, cuyos valores están relacionados con la profundidad del agua, mientras que las últimas tres fuerzas de superficie dependen del área horizontal de una columna de fluido analizada.

# Capítulo 3

## Ecuaciones de aguas poco profundas (SWE)

### 3.1. Introducción

Las ecuaciones de las aguas poco profundas o someras, “*shallow water equation*” (SWE), en lengua inglesa, corresponden a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas/hiperbólicas que modelizan el flujo de fluidos en los océanos, regiones costeras, estuarios, ríos y canales con algunos condicionantes.

La característica general de los flujos de aguas someras es que la dimensión vertical es mucho más pequeña que la escala horizontal típica. En este caso podemos promediar sobre la profundidad para deshacernos de la dimensión vertical.

El SWE se puede utilizar para predecir las mareas, los niveles de mareas de tempestad y los cambios en la costa de los huracanes, las corrientes oceánicas y para estudiar la viabilidad de un dragado, etc. También surgen en flujos atmosféricos y en flujos de suelo. Las ecuaciones de aguas someras derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales describen el movimiento de fluidos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes derivan de las ecuaciones de conservación de la masa y del momento lineal.

Las ecuaciones de las aguas poco profundas (SWE), son un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen fenómenos del flujo de fluidos, se obtienen de las leyes de conservación de la masa y del momento, son válidas para

la resolución de problemas en los efectos de la componente vertical de las variables, puede ser despreciada en comparación con los efectos horizontales, son un modelo en 2D, que se deriva de un modelo 3D mediante el promedio de profundidad.

Las ecuaciones de aguas poco profundas admiten entre otras cierta adaptabilidad:

- El fluido no tiene que ser agua, se puede adaptar a cualquier fluido.
- El fluido no tiene que ser necesariamente somero, por ejemplo, se usa para modelizar una ola de tsunami en el océano (con aproximadamente 5 km de profundidad).

Las ecuaciones de aguas someras han sido usadas en:

1. Predicción de Tsunamis.
2. Flujo Atmosférico.
3. Mareas.
4. Flujos alrededor de estructuras.
5. Flujo Planetario.

El modelo de aguas poco profundas, no puede ser aplicado cuando:

- Los efectos 3D son fundamentales.
- Las ondas de las olas con demasiado cortas o demasiado grandes.

## 3.2. Obtención de las ecuaciones de aguas someras

### 3.2.1. La ecuación fundamental de la mecánica de fluidos

Las ecuaciones de modelización del flujo de fluidos, incluido el flujo de aguas someras, se basan en la conservación de la masa, el momento y la energía, y la segunda ley de la termodinámicas.

El principio de conservación requiere que las tres cantidades fundamentales antes mencionadas no sean creadas ni destruidas.

La ecuación de movimiento y continuidad se deriva generalmente adoptando los sistemas de coordenadas lagrangianos o eulerianos. El enfoque lagrangiano utiliza un sistema de coordenadas en evolución que sigue la trayectoria de cada partícula de fluido dentro de una región elegida a medida que se produce el movimiento.

El borde de la región de contorno evoluciona continuamente para no permitir que ninguna partícula del flujo lo cruce.

Intuitivamente, uno puede ver que esto permite un método simple para conservar la masa y el momento dentro de estas regiones.

El método Lagrangiano da lugar a ecuaciones que especifican la ubicación y las cantidades de flujo básicas, como la velocidad y la presión, de cada partícula de fluido dentro del campo de flujo.

Esto significa que las ecuaciones resultantes se expresan en cantidades de flujo básicas, como la velocidad y la presión, de cada partícula de fluido dentro del campo de flujo en un sistema de coordenadas que se mueve con el flujo de fluido. En contraste, el enfoque Euleriano describe el movimiento del fluido en términos de los flujos de las diversas cantidades de fluido a través de la superficie de un volumen de control que se fija con respecto al sistema de coordenadas que se está utilizando.

Este método no tiene en cuenta la posición de las partículas individuales que ocupan un determinado espacio, sino que evalúa las cantidades de flujo básico, como la masa y el momento, en función de las coordenadas de un punto y el tiempo.

### 3.2.2. La conservación de la masa

La conservación de la masa es el primer principio usado en el desarrollo de las ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos. Simplemente la conservación de la masa implica que la masa total de un sistema o región cerrada  $\Omega$  es constante, es decir la masa no puede ser creada ni destruida.

Las ecuaciones de agua poco profundas, que representan el balance de masa e impulso en el fluido, son típicas de otros sistemas hiperbólicos. Para ver cómo las leyes de conservación surgen de los principios físicos, comenzaremos por derivar la

ecuación unidimensional para la conservación de la masa.

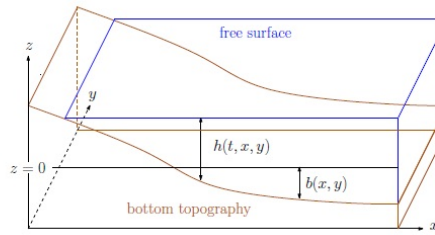


Figura 3.1: El sistema de coordenadas cartesiano usado cuando definimos la ecuación de aguas someras,  $b(x, y)$  es la elevación desde el fondo impermeable y  $h(t, x, y)$  es la profundidad del agua.

Sea  $H$  la altura de una superficie no perturbada y consideramos que la altura de la superficie libre es dada en cualquier momento y localización  $x$ , por  $y = h(x, t)$ .

En la superficie libre la presión es  $p_0$ , es la presión atmosférica, sin pérdida de generalidad, podemos considerar  $p_0 = 0$ .

Si una onda típica en la superficie tiene una longitud de onda  $L$ , la hipótesis del agua somera es que  $H$  es más pequeña en comparación con  $L$ , ( $H \ll L$ ). En este caso, podemos ignorar los movimientos verticales y suponer que hay una velocidad de flujo  $v(x, t)$  en la dirección  $y$  que es una velocidad promedio sobre la profundidad.

Ahora derivamos la ecuación para la conservación de masa, que requiere que la tasa de cambio de tiempo de la masa total en una región definida por  $x_1$  y  $x_2$ . En el presente caso, el flujo de masa en  $x$  viene dado por la densidad multiplicada por la velocidad  $u$  a  $x$  multiplicada por el área transversal en  $x$ .

Ahora derivamos la ecuación de conservación de la masa, la cual requiere del producto de la relación de cambio de la masa total en una región definida por  $x_1$  and  $x_2$ .

En nuestro caso, el flujo de masa en un punto  $x$  es tomado por el producto de la velocidad  $u$  y  $x$  multiplicada por el área de la sección transversal en  $x$ , la masa en  $[x_1, x_2]$  en un tiempo  $t$  es igual a:

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx. \quad (3.2.1)$$



Si asumimos que los contornos del sistema son impermeables y que la masa ni se crea ni se destruye, entonces la masa en esta sección puede cambiar porque el fluido fluye a través de los puntos finales  $x_1$  a  $x_2$ .

Ahora, supongamos que  $u(x, t)$  sea la velocidad del fluido en el punto  $x$  al tiempo  $t$ . Entonces la tasa de flujo pasado este punto viene dada por el flujo de masa en  $(x, t)$  en un tiempo  $t$  es igual a:  $f(x, t) = \rho h(x, t)u(x, t)$ . La relación de cambio de masa en  $[x_1, x_2]$  es tomada por la diferencia de flujos entre  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx = \rho h(x_1, t)u(x_1, t) - \rho h(x_2, t)u(x_2, t). \quad (3.2.2)$$

Esta es la forma integral de la ley de conservación de la masa. Otra forma es obtenida mediante la integración a través del tiempo entre  $t_1$  y  $t_2$ , tomando la expresión para la masa en  $[x_1, x_2]$  en un tiempo  $t_1 > t_2$ , en términos de la masa y en un tiempo  $t_1$  en el flujo total para cada contorno en este periodo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} \rho h(x_1, t)u(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho h(x_2, t)u(x_2, t) dt. \quad (3.2.3)$$

Para derivar la forma diferencial de la ley de conservación de la masa, ahora debemos asumir que  $h(x, t)$  y  $u(x, t)$  son funciones diferenciales, y suponemos que  $\rho(x, t)$  es una función constante. Entonces, usando la igualdad:

$$h(x, t_2) - h(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) dt. \quad (3.2.4)$$

Teniendo en cuenta:

$$h(x_2, t)u(x_2, t) - h(x_1, t)u(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} h(x, t)u(x, t) dx, \quad (3.2.5)$$

entonces usando (3.2.4),

$$\int_{t_2}^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) dx + \frac{\partial}{\partial x} h(x, t) u(x, t) \right\} dx dt = 0, \quad (3.2.6)$$

entonces,

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) dx + \frac{\partial}{\partial x} (h(x, t) u(x, t)) dt = 0 \quad (3.2.7)$$

que en forma compacta queda:

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (3.2.8)$$

ecuación de la conservación de la masa. Esta es la forma diferencial de la ley de conservación de la masa. La ley de conservación de la masa (3.2.9) se puede resolver de forma aislada solo si la velocidad  $u(x, t)$  se conoce a priori o se conoce como una función de  $\rho(x, t)$ . Si lo es, entonces  $\rho$  es una función de  $p$  sólo, digamos  $\rho \cdot v = f(p)$ , y la conservación de la ecuación de masa (3.2.9) se convierte en una ley de conservación escalar para  $\rho$ :

$$h_t + f(h)_x = 0. \quad (3.2.9)$$

La ecuación (3.2.9) se debe resolver junto con la ecuación de conservación del momento.

### 3.2.3. La conservación del momento

La siguiente ecuación corresponde a la conservación del momento en la dirección  $x$ , asumimos que hay equilibrio hidrostático en la dirección  $y$ . La conservación de momento requiere que la relación temporal del momento total en la zona entre  $[x_1, x_2]$ , es igual al flujo neto del momento, la relación con la que el momento fluye dentro de la región en  $x_1$  menos la relación del flujo del momento fuera de la región en  $x_2$ , más las fuerzas actuantes en la región en  $[x_1, x_2]$ .

El momento lineal es el producto de la masa por la velocidad, así el momento en  $[x_1, x_2]$ , es tomado como:

$$\text{Momento Total} = \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) u(x, t) dx. \quad (3.2.10)$$

El flujo del momento a través de una sección en  $x$ , es el momento multiplicado por la velocidad en  $x$ , o  $\rho h(x, t) u(x, t)$ .

Entonces, el momento neto del flujo es tomado como:

$$\text{Momento Neto del flujo} = \rho h(x_1, t) u(x_1, t)^2 - \rho h(x_2, t) u(x_2, t)^2. \quad (3.2.11)$$

La fuerza actuante en la cara  $h(x_1, t)$  es la presión  $P(x_1, y, t)$ , pero la presión varía con la profundidad y entonces podemos integrar a lo largo de la profundidad para obtener la fuerza total actuante en  $x_1$ , así que, la presión en  $x_1$  es igual a:

$$\int_0^{h(x_1, 0)} \rho g (h(x_1, t) - z) dz = \frac{\rho g}{2} h(x_1, t)^2. \quad (3.2.12)$$

Análogamente la presión en  $x_2$  es igual a:

$$- \int_0^{h(x_2, 0)} \rho g (h(x_2, t) - z) dz = \frac{\rho g}{2} h(x_2, t)^2. \quad (3.2.13)$$

Por lo tanto, la formulación integral de la ecuación de conservación del momento es:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) u(x, t) dx = h(x_1, t) u(x_2, t)^2 - h(x_2, t) u(x_2, t)^2 + \frac{g}{2} [h(x_1, t)^2 - h(x_2, t)^2]. \quad (3.2.14)$$

La forma diferencial de la expresión de la ley de conservación del momento lineal puede ser obtenida si  $u(x, t)$  y  $h(x, t)$  tiene el grado de suavidad necesario, entonces:

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{g}{2} h^2)_x = 0. \quad (3.2.15)$$

### 3.2.4. El sistema de ecuaciones de aguas poco profundas

La extensión de la ecuación del balance de masa a dos dimensiones es sencilla tan sólo hay que añadir un término similar al término de eje  $x$  pero con respecto al eje  $y$ :

$$h_t + (uh)_x = 0. \quad (3.2.16)$$

La extensión de la ecuación a dos dimensiones es sencilla, tan sólo hay que colocar el término en  $y$  similar al de  $x$ , por lo tanto tenemos la siguiente expresión:

$$h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0. \quad (3.2.17)$$

Desarrollando la expresión en 1D, tenemos:

$$h_t + u_x h + u h_x = 0. \quad (3.2.18)$$

La ecuación del balance de momento en 1D, es:

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{gh^2}{2})_x = 0. \quad (3.2.19)$$

Y podemos expresar esta ecuación en 2D, obteniendo:

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{gh^2}{2})_x + (hv^2 + \frac{gh^2}{2})_y = 0. \quad (3.2.20)$$

Combinando las expresiones de conservación de la masa y del momento, en 1D, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} h_t + u_x h + u h_x &= 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{gh^2}{2})_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.21)$$

Expresado en notación matricial, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} = 0.$$

La expresión en 2D, se expresaría en los siguientes términos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\frac{h^2}{2} \\ uvh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} = 0,$$

desarrollando la expresión en 1D:

$$h_t u + hu_t + h_x u^2 + 2huu_x + gh h_x = 0, \quad (3.2.22)$$

$$h_t u + u_x hu + u^2 h_x + hu_t + hu u_x + gh h_x = 0, \quad (3.2.23)$$

de (3.2.17), tenemos:

$$h(u_t + uu_x + gh_x) = 0, \quad (3.2.24)$$

finalmente obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} u_t + uu_x + gh_x &= 0 \\ h_t + u_x h + u h_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.25)$$

Estas son las ecuaciones del modelo de aguas someras en una dimensión.

### 3.2.5. Modelización de fuerzas externas en la ecuación de aguas poco profundas

La modelización mediante las ecuaciones de aguas someras, depende del número y tipos de fuerzas que se supone afectan al flujo. En la obtención de las ecuaciones, sólo hemos considerado la influencia de la gravedad en el fluido de movimiento. Sin embargo, muchas otras afectan el flujo, incluyendo la fricción, el esfuerzo cortante del viento, los gradientes de presión atmosférica y la fuerza de Coriolis. Con frecuencia, los términos se agregan simplemente al lado derecho de la ecuación. En la expresión (3.2.25) no tiene componentes de fuerza externos. La expresión extendida de las ecuaciones de aguas someras es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\frac{h^2}{2} \\ uvh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} = G.$$

Donde  $G$  es el término genérico que representa a las fuerzas externas que afectan a las aguas someras, también denominado término fuente, es decir en este término es posible incluir en el modelo los siguientes efectos:

- Fuerzas gravitatorias externas al fluido.
- Topografía no horizontal del lecho de apoyo.
- Efecto de la fricción en el lecho de apoyo.
- Viscosidad de un fluido.
- Efecto de la temperatura.
- Compresibilidad del flujo.
- Flujos con variación de áreas de los contornos, por ejemplo canales de sección variable.
- Efecto de la fuerza de Coriolis.

Para el caso de aguas poco profundas vamos a considerar los correspondientes a:

- Flujos con variación de área horizontal en este caso los términos para el caso 2D es:

$$G(W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho A_x \\ \rho A_y \\ \rho A_t \end{bmatrix}, \quad (3.2.26)$$

donde  $A_x$ ,  $A_y$  corresponden a la variación espacial de la sección y la tercera componente corresponde a la variación temporal.

- Efecto de la fricción en el lecho de apoyo, el término a añadir es :

$$G(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gqM^2 \left| \frac{q}{h} \right| h^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix},$$

donde  $M$  es el coeficiente de rugosidad Manning que depende del tipo de material que sirve de apoyo al agua.

En la siguiente tabla se indican los valores del coeficiente para algunos tipos de suelos:

Tipo de suelo	Coeficiente de Manning
Terreno natural en roca lisa	0.035
Terreno natural en tierra con poca vegetación	0.027
Terreno natural en tierra con vegetación abundante	0.027

Cuadro 3.1: Valores del coeficiente de Manning para algunos tipos de lecho de canales.

Es posible consultar un amplio espectro de valores del coeficiente de Manning en [16].

- Se considera el caso en el que el lecho de apoyo del fluido no es horizontal, los términos son:

$$G(W) = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}, \quad (3.2.27)$$

donde  $-b_x$  y  $-b_y$  representan la pendiente del fondo en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Las tres estados definidos anteriormente pueden aparecer de forma individual o de forma concomitante, en este texto no se considera la posibilidad de variación de sección.

Para una información más completa sobre las componentes de  $G(W)$ , consultar [13].



# Capítulo 4

## Propiedades de las ecuaciones de aguas someras

En este capítulo se describen las propiedades matemáticas de las ecuaciones de aguas someras. En particular, se analiza la estructura característica de las ecuaciones de aguas someras y las soluciones de estudio del problema de Riemann, que son fundamentales para muchos métodos numéricos.

El resto de este capítulo está dedicado a desarrollar una serie de soluciones analíticas que se utilizan para establecer la veracidad de los esquemas numéricos.

### 4.1. Características de las ecuaciones de aguas someras

La forma general conservadora de las ecuaciones unidimensionales de agua someras está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial x}F(W) = G(W), \quad (4.1.1)$$

donde  $W$  es el vector de las variables conservativas,  $F$  es el vector de flujo en la dirección  $x$ , y  $G$  es el vector fuente. Los vectores  $W$  y  $F$  pueden ser expresado en términos de las variables conservativas primarias,  $u$  y  $h$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
W &= \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}, \\
F &= \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix}, \\
G &= \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Donde  $u$  es el componente en  $x$  de la velocidad del fluido promediada en profundidad,  $h$  es la profundidad del agua, y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

El término de acciones exteriores o término fuente  $G$  en dos dimensiones, se define considerando fondo variable y acción de rozamiento como:

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb'(x) - gqM^2 \left| \frac{q}{h} \right| h^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix},$$

donde  $b'(x)$  es la pendiente del fondo y  $M$  es el coeficiente de Manning. El término fuente se puede modificar para incluir otras fuerzas como la fricción y la cizalladura del viento. Centramos nuestro análisis al sistema homogéneo:

$$W_t + F(W)_x = 0. \tag{4.1.3}$$

El sistema de ecuaciones puede escribirse en forma cuasi-lineal como:

$$W_t + F'(W)W_x = 0. \tag{4.1.4}$$

La matriz Jacobiana  $F'(W)$  de  $F$  con respecto a  $W$  es:

$$F'(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix}. \tag{4.1.5}$$

El sistema homogéneo (4.1.4) es estrictamente hiperbólica ya que la matriz Jacobiana  $F'(W)$  es diagonalizable y tiene valores propios reales distintos. Se denomina  $A(W) = F'(W)$  a la matriz jacobiana, por lo que la expresión queda:

$$W_t + A(W)W_x = 0. \quad (4.1.6)$$

#### 4.1.1. Valores y vectores propios

Los autovalores de la matriz  $A(W)$ , son :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - \sqrt{gh} , \\ \lambda_2 &= u + \sqrt{gh} \end{aligned}$$

y los respectivos vectores propios:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 = u - \sqrt{gh} \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 = u + \sqrt{gh} \end{bmatrix}.$$

Para el sistema hiperbólico (4.1.4), estos autovalores son velocidades de propagación de los diversos componentes de la onda, que a menudo, se denominan velocidades características.

En este caso, estas velocidades características dependen de la velocidad del flujo  $u$  y de la altura del agua sobre el lecho  $h$ .

#### 4.1.2. Curvas características

Los autovalores definidos anteriormente, corresponden a los gradientes de las dos familias de curvas características asociadas con el flujo de agua en zonas someras:

$$C_1 : \frac{dx}{dt} = u - \sqrt{gh} \quad ; \quad C_2 : \frac{dx}{dt} = u + \sqrt{gh}. \quad (4.1.7)$$

El valor de la curvatura en las curvas anteriormente definidas, depende del punto a través del cual pasan en el instante  $t = 0$ .

Las curvas son constantes en la región donde  $u$  y  $h$  son constantes. Para un sistema de  $m$  ecuaciones, habrá  $m$  familias características. Las funciones  $u \pm 2\sqrt{gh} = k_1$  son constantes a lo largo de estas curvas y se conocen como invariantes de Riemann y dan lugar a las siguientes relaciones:

$$u - 2 \times \sqrt{gh} = k_1; \quad u + 2 \times \sqrt{gh} = k_2. \quad (4.1.8)$$

Dada una condición inicial para  $u$  y  $h$ , (4.1.4) y (4.1.6) pueden ser completamente determinados y con ello dar una solución al problema. Tengamos en cuenta que  $k_1$  y  $k_2$  podrán ser diferentes si pasan por diferentes puntos del espacio en el instante  $t = 0$ .

### 4.1.3. Definición de la solución del problema

Consideremos un problema unidimensional para el cual  $u(x, t)$  y  $h(x, t)$  son conocidos para todos los valores de  $x$  en  $t = 0$ . Para determinar la solución del problema para  $t > 0$  supongamos que:

$$u(x, 0) = d(x); \quad \sqrt{gh(x, 0)} = f(x). \quad (4.1.9)$$

Donde  $u$  y  $f$  son funciones conocidas. Podemos ahora aproximar los valores de  $u$  y  $gh$  para pequeños incrementos del tiempo  $\Delta t$ .

Ahora podemos aproximar los valores de  $u$  y de  $gh$  para incrementos de tiempo. Esto se puede lograr mediante la selección de los puntos 1, 2, 3 y 4 de la figura (4.1), separados por una distancia  $\Delta x$ , para dichos puntos  $u$  y  $gh$  son conocidos, calculando la pendiente de  $C_1$  y  $C_2$ , se pueden dibujar segmentos rectos tangentes a las curvas características, esas líneas se cortan en los puntos 5, 6 y 7.

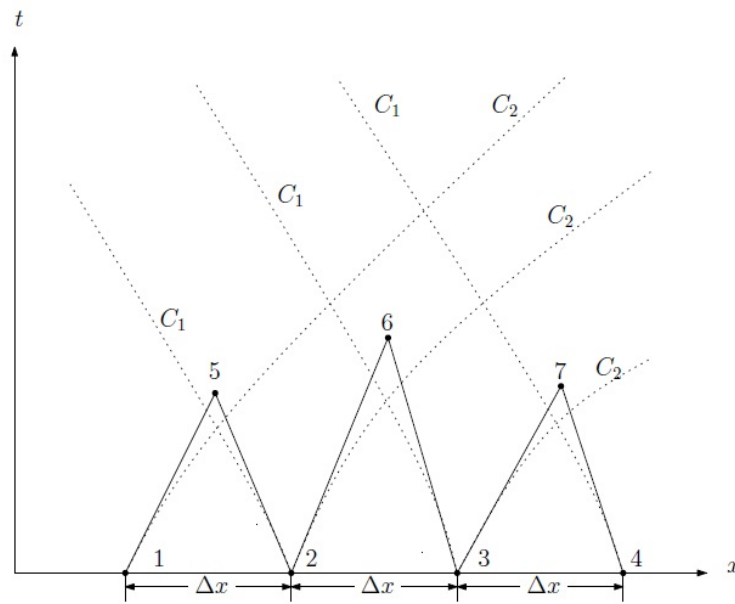


Figura 4.1: Aproximación lineal de curvas características.

Estos puntos son una aproximación de la intersección de las curvas características si  $\Delta x$  es suficientemente pequeño.

De la expresión (4.1.8), podemos determinar los valores de  $x$  y de  $t$ , de las posiciones 5, 6 y 7, usando:

$$u - 2\sqrt{gh} = d - 2f; \quad u + 2\sqrt{gh} = d - 2f \quad (4.1.10)$$

a lo largo de  $C_1$  y de  $C_2$ , respectivamente. Una vez  $u$  y  $gh$  son conocidas, las pendientes de  $C_1$  y de  $C_2$ , pueden ser determinadas de (4.1.7).

Repitiendo el proceso se obtendrían los puntos 8 y 9 de la figura (4.2).

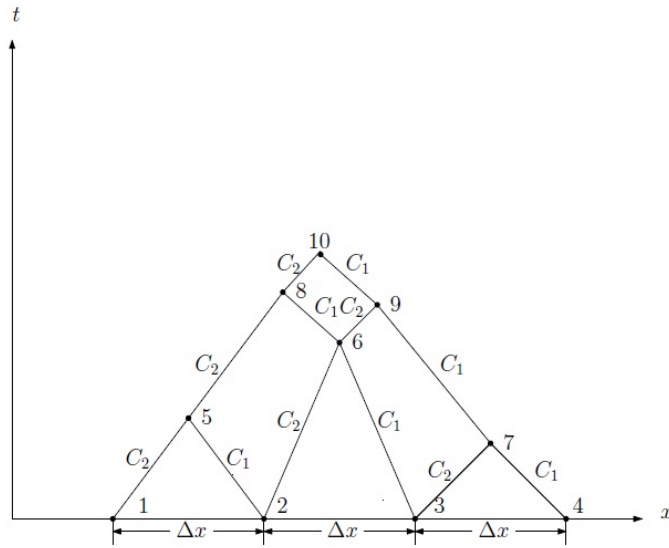


Figura 4.2: Aproximación lineal de curvas características.

Consideremos un punto fijo en  $x$  e  $t$ , (punto 10 de la imagen (4.2)), lo anteriormente planteado ha mostrado que la solución de  $w(x, t)$  en este punto, sólo puede verse influenciada por los datos aportados por los puntos en tiempo anteriores al correspondiente a 10, particularmente los 1, 2, 3 y 4. Es decir un punto en el plano  $x - t$ , sólo está influenciado por los puntos de su dominio de dependencia, ya que la información es transferida por una velocidad de onda finita.

Para ecuaciones de aguas profundas no lineales el dominio de dependencia está limitado por las ondas de menor y mayor velocidad. Específicamente la solución  $w(X, T)$  depende sólo de los datos iniciales del intervalo  $[X - \lambda_2 \cdot T, X - \lambda_1 \cdot T]$ , de forma similar un punto en el plano  $x - t$ , puede sólo ser influenciado por puntos en tiempos anteriores al considerado.

El rango de influencia de este punto es de nuevo condicionado por la curvas características correspondientes al menor y al mayor de los valores propios.

El dominio de dependencia y el rango de influencia de un punto  $(X, T)$ , se muestra en la figura (4.3).

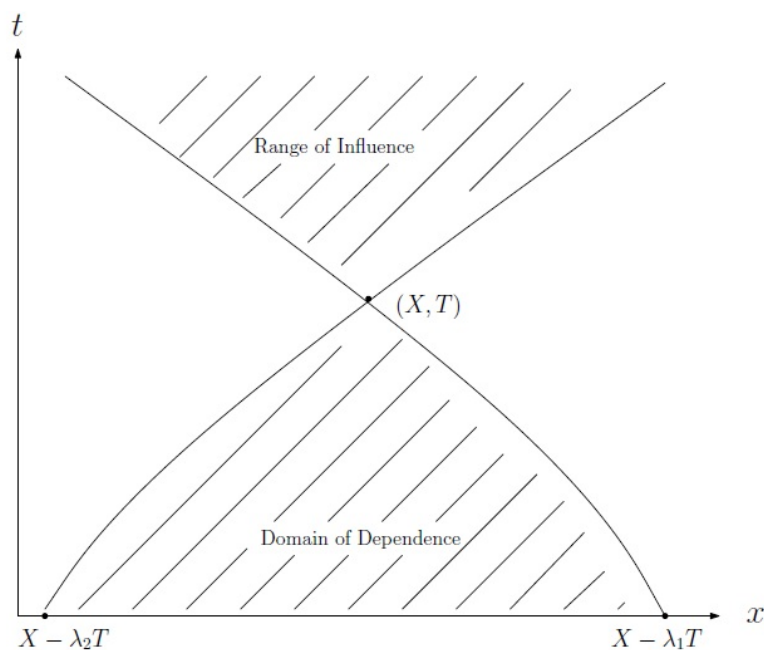


Figura 4.3: El dominio de dependencia y el rango de influencia del punto  $x, t$  para un sistema de dos ecuaciones hiperbólicas con  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

Se puede probar que si  $\Delta x \rightarrow 0$ , el estado del proceso, puede converger a la solución exacta correspondiente a las condiciones iniciales dadas.

Se debe de indicar, que asumimos que las dos familias de curvas características forman un sistema de coordenadas curvilíneas sobre todo el plano  $x - t$ .

Debemos considerar cuándo y dónde las curvas características dejan de tener las propiedades y el sentido físico, lo que nos lleva necesariamente a las condiciones de Rankine-Hugoniot y a las condiciones de entropía.

## 4.2. La condición Rankine-Hugoniot

En la forma de derivadas parciales de las ecuaciones de aguas someras, se asumió que la solución ha de ser continua, si este no es el caso, se debe de usar la formulación integral de las leyes de conservación.

Cuando dos o más curvas características de alguna familia se cruzan con una discontinuidad conocida, se puede producir un choque.

La velocidad del choque  $s(t)$ , puede ser determinada en algún tiempo de los

estados  $W_l(t)$  y  $W_r(t)$ , inmediatamente a la derecha y la izquierda del choque respectivamente.

A medida que evoluciona una solución que contiene una discontinuidad, el choque se propagará con cierta velocidad  $s(t)$ . Para cualquier tiempo  $t$  la velocidad de este choque puede ser determinada en términos de los estados  $W_l(t)$  y  $W_r(t)$ , de forma inmediata, a la derecha y a la izquierda del choque.

Consideremos una región pequeña en el intervalo  $[x_1, x_1 + \Delta x]$  y también consideremos un periodo de tiempo pequeño  $[t_1, t_1 + \Delta t]$ . En este dominio la velocidad del choque y los estados a la derecha y a la izquierda del choque son constantes, tal como se muestra en la figura (4.4).

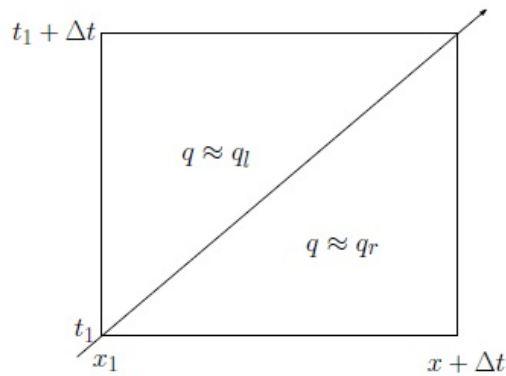


Figura 4.4: Región infinitesimal en el plano  $x - t$  usado para determinar las condiciones de Rankine-Hugoniot.

Aplicando las leyes de conservación a los estados tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} W(x, t_1 + \Delta t) dx - \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} W(x, t_1) dx = \\ \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} F(W(x_1, t)) dt \\ - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} F(W(x_1 + \Delta x, t)) dt. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Como  $q$  es esencialmente constante en cada lado del choque en el dominio rectangular, los flujos a la izquierda y derecha del choque también son constantes y la ecuación anterior se convierte en:

$$\Delta x (W_l - W_r) = \Delta t (F(W_l) - F(W_r)). \quad (4.2.12)$$



Dado que el choque se está propagando a una velocidad  $s$ , entonces  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos mostrar que en cualquier choque debe de satisfacerse la condición:

$$s(W_r - W_l) = F(W_r - W_l). \quad (4.2.13)$$

Esta expresión se conoce como la condición de Rankine-Hugoniot y cualquier solución que satisfaga esta condición a través de un choque es una solución débil de la ley de conservación.

### 4.3. La condición de entropía de Lax

La condición de Rankine-Hugoniot no garantiza la unicidad de solución que modeliza correctamente el sistema físico. En estas situaciones son necesarias restricciones adicionales, a menudo referidas como condiciones de admisibilidad que deben de ser añadidas.

La condición de entropía de Lax puede ser usada para determinar si una solución débil es de hecho una solución correcta. La condición de entropía es satisfecha si las características convergen tal que el primer choque:

$$\lambda_l(W_l) > s > \lambda_l(W_r), \quad (4.3.14)$$

y para el segundo choque:

$$\lambda_2(W_l) > s > \lambda_2(W_r). \quad (4.3.15)$$

Si las condiciones de Rankine-Hugoniot y de entropía de Lax se sostienen, la energía en el fluido disminuirá a través del choque, asegurando que es físicamente correcto.

## 4.4. Forma característica de las ecuaciones de aguas poco profundas

La siguiente expresión corresponde a las ecuaciones de aguas poco profundas que es un sistema de ecuaciones hiperbólicas:

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial x}F = G. \quad (4.4.16)$$

Siendo  $W$  y  $F$  funciones continuas y diferenciables, donde:

- $t \geq 0$  a la variable temporal.
- $x \in R$ , a la variable espacial.

$W(x, t)$  es la incógnita del problema escalar, que representa la densidad de una cantidad conservada en este caso la masa y la cantidad de movimiento en el tiempo en un sistema físico, en este caso un sistema de aguas poco profundas.

$F$  representa el flujo en la dirección  $x$ , es decir la cantidad de  $W$ , que pasa por la ordenada por unidad de tiempo.

$S$  es el término fuente, que corresponde a la cantidad de  $W$ , creada por unidad de tiempo y volumen.

Se entiende que el flujo  $F$ , está en función de  $W$ , mientras el término fuente  $G$ , es independiente del flujo  $F$ , pero es función de  $x$ ,  $t$  y  $W$ .

En ausencia del término fuente, es decir considerando  $S = 0$ , la anterior igualdad queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (4.4.17)$$

La forma característica de la ley de conservación escalar se puede reescribir como:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (4.4.18)$$

#### 4.4. Forma característica de las ecuaciones de aguas poco profundas 32

Para un observador desplazándose con una rapidez  $\lambda$ , la variación temporal de  $W$  a lo largo de la trayectoria  $\frac{dx}{dt} = \lambda$ , viene dada por:

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (4.4.19)$$

Por lo tanto en el caso particular de que :

$$\frac{DF}{DW} = \lambda. \quad (4.4.20)$$

Tenemos que:

$$\frac{DW}{Dt} = 0, \quad (4.4.21)$$

a lo largo de:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{DF}{DW}. \quad (4.4.22)$$

En este contexto  $\frac{dx}{dt} = \frac{DF}{DW}$ , se denomina curva característica, mientras que el término  $\frac{DF}{DW}$ , se denomina rapidez de onda. De acuerdo con  $\frac{dx}{dt} = \frac{DF}{DW}$ , la cantidad  $W$  se mantiene invariante a lo largo de la curva característica, decimos que  $W$  es un invariante de Riemann. En el caso de que existiese un término fuente  $G$ , en la ecuación diferencial del modelo, entonces  $W$  ya no sería un invariante.

La utilidad de las curvas características, es que permiten obtener una solución de la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{\partial}{\partial x} F = G. \quad (4.4.23)$$

Al menos cuando el término fuente  $G = 0$ , la ecuación  $\frac{DW}{Dt} = 0$ , permite construir gráficamente una solución de la ecuación diferencial, cuando disponemos de una condición inicial  $u_0(x)$ , que es suficientemente diferenciable y cuando suponemos que la expresión de  $F$  es lineal. La imagen siguiente representa el perfil inicial en el tiempo  $t_0$  (línea de color verde), y el perfil final en un tiempo  $t_1$ , línea de color azul.

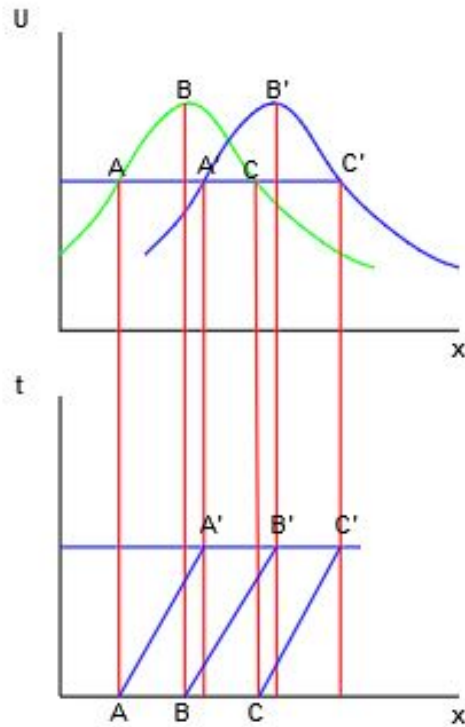


Figura 4.5: Determinación gráfica de la solución de un problema de valor inicial para una ley de conservación escalar usando el plano de fase  $(x - t)$ .

El gráfico inferior representa las curvas características en el plano de fase  $(x - t)$ . Supongamos que conocemos el valor de  $W$  en el punto  $A$ , en el tiempo  $t_0$ , denominado como  $U_A$ . Entre los tiempos  $t_0$  y  $t_1$ , una partícula inicialmente situada en  $A$ , se desplaza a lo largo de una curva característica con una velocidad:

$$\lambda_A = \frac{dF}{dW}(A). \tag{4.4.24}$$

Como  $W$ , no varía a lo largo de la curva característica, entonces la rapidez de onda es constante en dicha trayectoria y por lo tanto la curva característica es una

línea recta en el plano de fase  $(x - t)$ . En el tiempo  $t_1$ , la partícula está en el punto  $A'$  cuya ubicación viene dada por:

$$x_{A'} = x_A + (t_1 - t_0)\lambda_A. \tag{4.4.25}$$

Por el mismo argumento de la invarianza, se deduce que el valor de  $W$  en  $A'$  en el tiempo  $t_1$ , coincide con el valor de  $W$  en  $A$ , en el tiempo  $t_0$ , lo cual se puede observar en la gráfica anterior.

Se insiste en que el método es válido siempre que el perfil sea continuo, sin embargo dependiendo de la función de flujo  $F$ , y la condición inicial  $W_0$ , pueden surgir discontinuidades en el perfil después de cierto tiempo, en especial si  $F$  es una función no lineal de  $W$ , entonces la pendiente  $\frac{dF}{dW}$  de la curva característica varía con  $W$ . Así las distintas partes del perfil  $W(x, t)$  viajan a distintas velocidades, modificando la forma del perfil inicial. En el plano de fase, esto se traduce en la intersección de las curvas características y a su vez esto genera discontinuidades en la curva solución.

#### 4.4.1. Definición de ondas de choque

Se habla de ondas de choque, cuando la rapidez de onda  $\lambda$  es creciente en  $x$ , esto se refleja en que un punto del perfil viaja más rápido que el frente del perfil, tal como se puede ver en la siguiente figura.

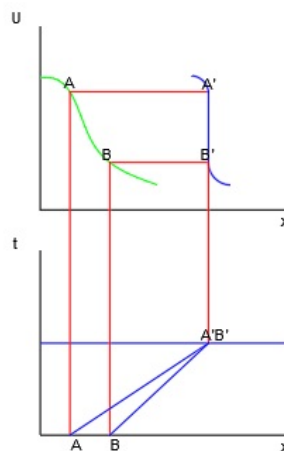


Figura 4.6: Onda de Choque.

### 4.4.2. Definición de rarefacción

Se define la situación en la que aparecen ondas de rarefacción, cuando la rapidez de onda  $\lambda$  es decreciente en  $x$ , esto se refleja en la cola del perfil viaja más rápido que el frente del perfil, tal como se puede ver en la siguiente figura.

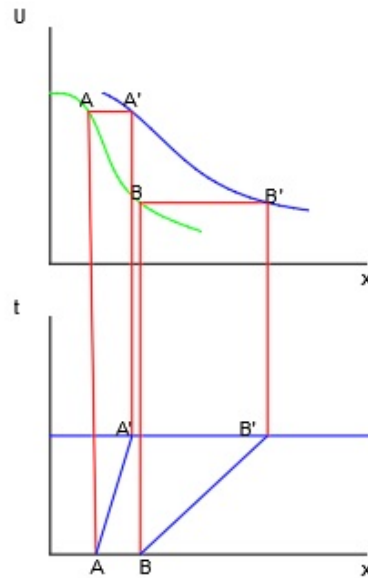


Figura 4.7: Onda de rarefacción.

## 4.5. Sistemas de ecuaciones hiperbólicas de leyes de conservación

Vamos a suponer que son varias las cantidades conservadas en el tiempo, cuando leyes múltiples escalares que se deben de resolver de forma simultánea, se tratan de ecuaciones en derivadas parciales.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (4.5.26)$$

Resolver el sistema anterior equivale a resolver las siguientes  $m$  ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x} = G_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (4.5.27)$$

Consideramos que el término fuente  $G$  es nulo y se asume que el flujo  $F$ , depende sólo de la incógnita  $W$ . Sea la siguiente ecuación la forma característica del sistema:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (4.5.28)$$

Siendo  $A$ , la matriz jacobiana de  $F$ , con respecto a  $W$ , es decir:

$$A_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial W_j} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}. \quad (4.5.29)$$

Un sistema de leyes de conservación se dice hiperbólico, si la matriz  $A$ , tiene  $m$  valores propios reales y distintos  $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ . En particular el problema de las ecuaciones de aguas poco profundas constituye un sistema de leyes de conservación de tipo hiperbólico.

Por lo general la matriz  $A$ , no es diagonalizable, pero en el caso hiperbólico, si se denota  $K^1, \dots, K^m \in R^m$  a los vectores propios de  $A$  asociados a los valores propios  $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ , entonces podemos escribir:

$$\Lambda = K^{-1}AK, \quad (4.5.30)$$

donde :

- $\Lambda$  es la matriz diagonal de los valores propios de  $A$ .
- $K$  es la matriz de vectores propios de  $A$ .

Multiplicando  $K^{-1}$  y (4.5.28) en este orden, obtenemos la expresión para el caso homogéneo:

$$K^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} + K^{-1} A \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (4.5.31)$$

Si introducimos la forma diferencial  $dW = K^{-1} dW$ , entonces la anterior expresión queda como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (4.5.32)$$

siendo  $W$  el vector de variables características. Como la matriz  $\Lambda$  es diagonal el sistema anterior es equivalente al conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial V^{(p)}}{\partial t} + \lambda^{(p)} \frac{\partial V^{(p)}}{\partial x} = 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, m\}. \quad (4.5.33)$$

Es decir, tenemos que para  $\forall p \in \{1, \dots, m\}$

$$\frac{DV^{(p)}}{dt} = 0, \quad (4.5.34)$$

a lo largo de la curva

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^{(p)}. \quad (4.5.35)$$

Esta última expresión establece la invarianza de la cantidad  $V^{(p)}$  a lo largo de la curva característica, en este contexto  $W^{(p)}$  se denomina la  $p$ -ésima invariante de Riemann, mientras que,  $W$  es el vector de invariantes de Riemann independientes.



## 4.6. El problema general de valores iniciales, variables características

Se estudia en este punto el problema de valores iniciales de la ecuación diferencial:

$$W_t + AW_x = 0. \quad (4.6.36)$$

Donde la matrix  $A$  es una matriz de elementos constantes, se denominan como los valores que definen inicialmente los valores de las variables conservadas, las cuales se denominan como:

$$W^0 = (w_1^0, \dots, w_n^0)^T. \quad (4.6.37)$$

Nuestro objetivo es encontrar la solución del problema de valores iniciales, pero primero solucionamos el problema de valores iniciales de sistema característico:

$$V_t + \Lambda V_x = 0. \quad (4.6.38)$$

En términos de la variable característica  $W$ , las condiciones iniciales presentan la forma:

$$V^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)^T, \quad (4.6.39)$$

tal que:

$$V^0 = K^{-1}W^0, \quad (4.6.40)$$

o bien

$$W^0 = KV^0. \quad (4.6.41)$$

La solución de este problema de valores iniciales de (4.6.37), pasa por considerar cada variable desconocida  $w_i(x, t)$  que satisface el sistema de ecuaciones conservativas. Podemos definir la solución como:

$$v_i(x, t) = v_i^0(x - \lambda_i t), \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (4.6.42)$$

Una vez que tenemos esta solución, la podemos transformar para obtener los valores con respecto a las variables originales, mediante la transformación:

$$W = KV. \quad (4.6.43)$$

La expresión de los valores iniciales en términos de las variables características y retomando la expresión (4.6.42) usada para plantear la solución del problema inicial, se puede expresar como:

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^m v_i^{(0)}(x, t) K^{(i)}. \quad (4.6.44)$$

Teniendo en cuenta (4.6.41), tenemos:

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^m v_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)}. \quad (4.6.45)$$

## 4.7. El problema de Riemann para el sistema característico

El problema de Riemann para sistemas hiperbólicos con coeficientes constantes es un problema de valores iniciales para el sistema característico:

$$\frac{\partial}{\partial t}V + \Delta \frac{\partial}{\partial x}V = 0. \quad (4.7.46)$$

Consideremos el problema centrado en  $x = x_0 = 0$  y  $t = t_0 = 0$  con las condiciones iniciales :

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_l & \text{si } x < x_0 \\ v_r & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad (4.7.47)$$

Donde  $v_l$  y  $v_r$  son dos vectores constantes cuya representación se indica en la siguiente imagen:

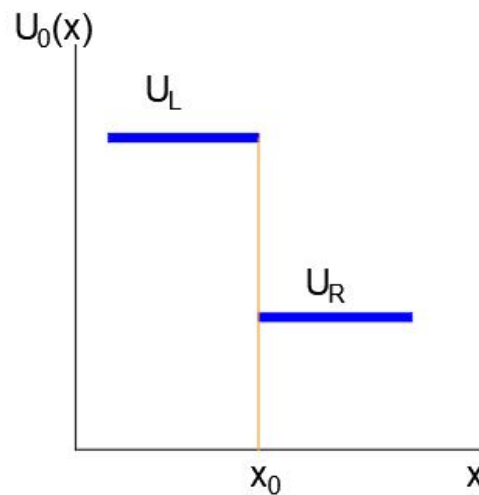


Figura 4.8: Condiciones iniciales para el problema de Riemann, para el instante inicial, consiste en dos constantes separadas por una discontinuidad en  $x=0$ .

Como se puede observar los datos iniciales presentan una discontinuidad en  $x = x_0$ , en el caso más simple de condiciones iniciales sólo se considera la existencia de una discontinuidad, se considera el caso trivial cuando  $v_l = v_r$ . Se espera que algún punto del perfil inicial se propague una distancia  $d = ct$  en un tiempo  $t$ . Para la curva característica particular  $x = ct$ , separará aquellas curvas características a la izquierda de las cuales la solución toma el valor  $v_l$ , de las que la solución toma el valor  $v_r$ , en la siguiente imagen se representa dicha curva.

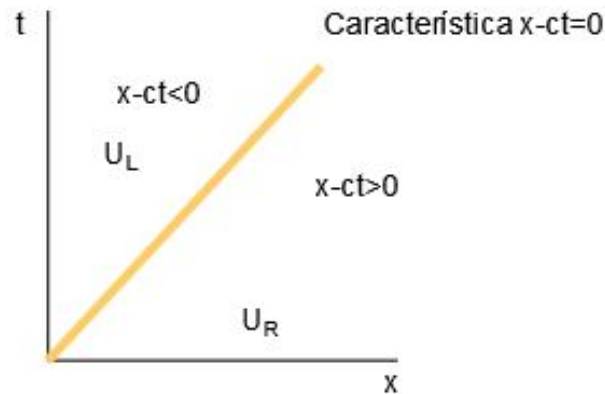


Figura 4.9: Condiciones iniciales para el problema de Riemann, para el instante inicial, consiste en dos constantes separadas por una discontinuidad en  $x=0$ .

A través de un punto  $x_0$  en el eje  $x$ , se puede dibujar una característica, como  $c$  es constante todas las características son paralelas. Para la solución del problema de Riemann.

El problema de Riemann describe las condiciones iniciales uniformes aguas arriba y aguas abajo de una discontinuidad de salto único. Hay dos razones principales para discutir el problema de Riemann:

- El problema de Riemann, se puede resolver de forma analítica.
- Muchos esquemas numéricos usado para simular el flujo en aguas someras dan lugar a resultados exactos o muy aproximados.

Donde  $V_l$  y  $V_r$  son vectores constantes, la solución de (4.7.46), se extiende uniformemente de modo que la solución depende sólo de la relación  $(x - x_0)/t$  en lugar de  $x$  y de  $t$ , de forma separada.

Esta reducción en el número de variables independientes permite soluciones analíticas que pueden ser obtenidas más fácilmente. Sin embargo, encontrar soluciones al problema general de Riemann para las ecuaciones de aguas someras es aún una tarea complicada.

A medida que la solución evoluciona, parte del agua en el lado izquierdo de la discontinuidad se acelera haciendo que fluya instantáneamente sobre el fluido que se mueve más lento en el lado derecho de la discontinuidad, y causar un choque.

Por ahora, supongamos que el choque se mueve con velocidad constante. Entonces En algún instante  $t_1$ , la solución se puede descomponer en tres regiones:

- Región inalterable, a la izquierda de  $l$  y derecha de  $r$  de la perturbación que emana del punto de la discontinuidad inicial.
- Región intermedia  $m$ , que conecta esos dos estados de reposo, la región intermedia se puede descomponer en otras dos regiones.

Si el choque se mueve a velocidad constante el estado inmediatamente detrás del impacto se mantendrá constante para siempre. Sin embargo, este estado no puede continuar aguas arriba indefinidamente ya que la velocidad de esta región no es cero y una sección del dominio ascendente aún no se alterará y, por lo tanto, no tendrá velocidad. Esto significa que hay que ser alguna forma de onda de depresión que conecte estos dos estados constantes.

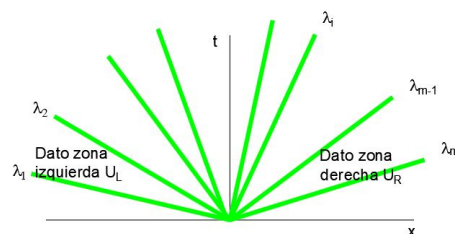


Figura 4.10: Condiciones iniciales para el problema de Riemann, para el instante inicial, consiste en dos constantes separadas por una discontinuidad en  $x=0$ .

#### 4.7.1. El problema generalizado de Riemann

En la generalización del problema de Riemann, los valores iniciales de estado a la derecha e izquierda no necesariamente han de ser constantes:

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_l(x), & \text{si } x \leq x_0 \\ v_r(x), & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad (4.7.48)$$

Donde  $v_l(x)$  y  $v_r(x)$  son funciones canónicas, en el espacio coordenado  $x$  en este caso no necesariamente constantes, además pueden o no tomar valores en el punto  $x_0$ . Estas funciones pueden ser continuas pero no es una condición necesaria en este caso, es posible incluso que sean expresiones complejas. Para leyes de conservación escalares es posible usar el método de las características para encontrar la solución.

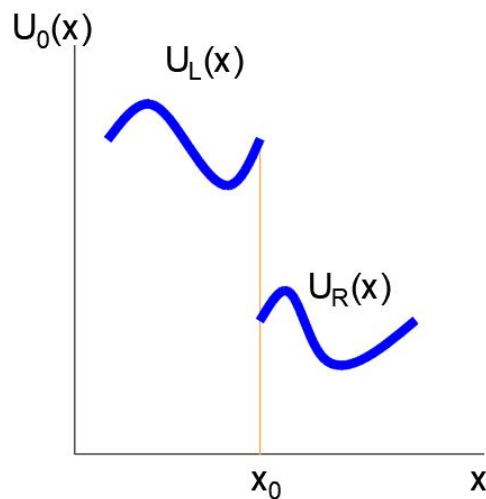


Figura 4.11: Condiciones iniciales extendidas para el problema de Riemann, en el instante inicial, consistente en dos funciones que presentan una discontinuidad en  $x_0$ .

## 4.8. La solución general

La estructura de la solución del problema de Riemann en el plano  $x - t$  descrito en la figura (4.7) , que consiste en  $m$  ondas que salen del origen, una por cada valor de  $\lambda_i$ , cada onda  $i$  lleva un salto de discontinuidad en  $V$ , que se propaga con una velocidad  $\lambda_i$ , la solución de la izquierda de la  $\lambda_1$  onda es simplemente el dato inicial  $V_L$  y la de la derecha de la  $\lambda_m$  onda es  $V_R$ . El objetivo es encontrar la solución en la

zona comprendida entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_m$ . Como los valores propios  $K^{(1)}, \dots, K^{(m)}$ , son linealmente independientes, entonces podemos expandir los datos del estado izquierdo  $V_L$  y del estado derecho  $V_R$  como combinación lineal del conjunto de vectores propios,  $K^{(1)}, \dots, K^{(m)}$ , tal como:

$$V_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot K^{(i)}, \quad (4.8.49)$$

$$V_R = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot K^{(i)}. \quad (4.8.50)$$

Con coeficientes constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , para  $i = \{1, \dots, m\}$ .

Formalmente la solución del problema de valores iniciales es tomada de (4.6.44), en términos de los datos iniciales  $x_i^0(x)$ , para las variables características y los valores propios  $K^i$ .

En términos de variables características tenemos  $m$  problemas escalares de Riemann determinados por el siguiente sistema de ecuaciones de derivadas parciales.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0. \quad (4.8.51)$$

Los valores iniciales son obtenidos por comparación de (4.8.49) y (4.8.50) con (4.6.44), que nos da como resultado:

$$v_i^0(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{si } x < 0, \\ \beta_i, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.8.52)$$

Para  $i \in \{1, \dots, m\}$ , conocemos que las soluciones de los problemas escalares de Riemann, viene dada por :

$$v_i(x, t) = v_i^0(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{si } x < 0, \\ \beta_i, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.8.53)$$

Para un punto dado  $(x, t)$ , hay un valor propio  $\lambda_I$ , tal que  $\lambda_I < \frac{x}{t} < \lambda_{I+1}$ , esto es  $x - \lambda_i > 0, \forall i$  tal que  $i \leq I$ .

Podemos considerar que la solución final del problema de Riemann

$$V_t + AV_x = 0, \quad (4.8.54)$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_l, & \text{si } x < x_0, \\ v_r, & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (4.8.55)$$

en términos de las variables originales:

$$V_{x,t} = \sum_{i=I+1}^m \alpha_i \cdot K^{(i)} + \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot K^{(i)}, \quad (4.8.56)$$

donde el entero  $I = I(x, t)$  es el máximo valor de el subíndice  $i$  cuando  $x - \lambda_i t > 0$ .

Para obtener la solución del problema deshacemos el cambio para la obtención de las expresiones canónicas, mediante la transformación:

$$U = KV. \quad (4.8.57)$$



# Capítulo 5

## Métodos numéricos aplicado a ecuaciones conservativas

### 5.1. Definiciones básicas

Vamos a considerar en este capítulo los métodos aproximación numérica tipo *upwind* a la solución de ecuaciones procedentes de leyes de conservación escalar . Consideramos la siguiente ecuación:

$$v_t + f(v)_x = 0. \quad (5.1.1)$$

Donde  $f(v)$  es la función de flujo, para el caso de  $f(v) = av$ , tendríamos la ecuación de la advección.

#### 5.1.1. Esquemas conservativos

Un esquema conservativo para una ley de conservación escalar es un método numérico de la forma:

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}], \quad (5.1.2)$$

donde

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}(v_{i-l_L}^n, \dots, v_{i+l_R}^n), \quad (5.1.3)$$

con  $l_L, l_R$  son dos enteros no negativos,  $f_{i+\frac{1}{2}}$  es denominado flujo numérico, como aproximación al flujo físico  $f(w)$ , que aparece en (5.1.1)

Un requerimiento fundamental para el flujo numérico es la condición de consistencia,  $f_{i+\frac{1}{2}}(v, \dots, v) = f(v)$ , en base a esta expresión si los argumentos en la expresión (5.1.3), son iguales a  $v$ , entonces el flujo es idéntico al flujo físico. Se verifica que :

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}(v_i^n, v_{i+1}^n) = \frac{1}{2}(f_i^n + f_{i+1}^n). \quad (5.1.4)$$

### 5.1.2. Discretización del dominio en el plano $x-t$

El esquema conservativo requiere una definición de la discretización del dominio de definición del problema conservativo, en la siguiente imagen se indica el esquema de discretización  $[0, L] \times [0, T]$ , en el plano  $x-t$ .

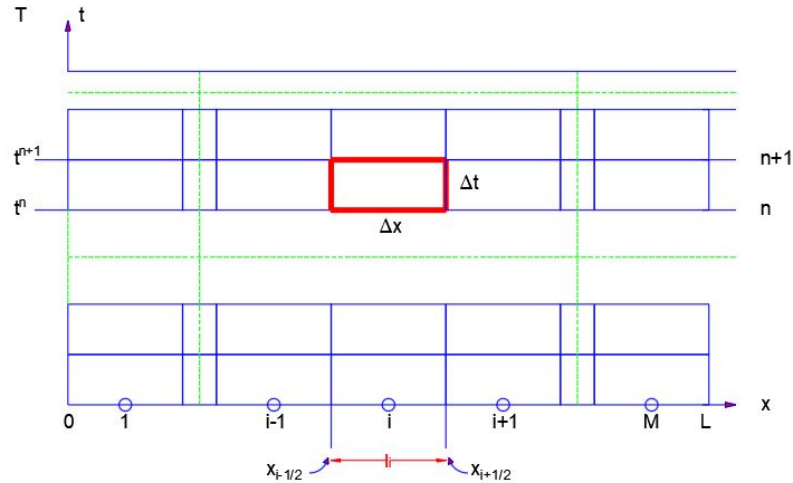


Figura 5.1: Discretización del dominio  $[0, L]$ , dentro del volumen finito  $M$ , la celda computacional  $I_i$ .

El dominio espacial de longitud  $L$ , se subdivide  $M$  en volúmenes finitos denominados celdas computacionales o simplemente celdas, tomadas como:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = (i-1) \Delta x \leq x \leq i \Delta x = x_{i+\frac{1}{2}}. \quad (5.1.5)$$

Los valores extremos  $x_{i-\frac{1}{2}}$  y  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , de la celda  $I_i$ , define la posición de los contornos de la intercelda, en el cual el correspondiente flujo numérico de la intercelda puede ser especificado. El tamaño de la celda es :

$$\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{L}{M}. \quad (5.1.6)$$

También es posible discretizar el dominio mediante celdas irregulares, en nuestro caso suponemos que las celdas son de tamaño regular.

El valor promedio de  $u(x, t)$  en la celda  $i$  celda promedio, en el tiempo  $t = t^n = n \Delta t$ , es definida como:

$$w_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t^n) dx. \quad (5.1.7)$$

Así que siempre que dentro de la celda  $i$ , pueda haber variaciones de  $w(x, t)$  en el tiempo  $t = t^n$ , la integral promedio de valor  $w_i^n$  descrita en la expresión anterior es constante.

Podemos asumir que el valor constante en el centro de la celda da lugar a la aplicación de los métodos conservativos centrados en las células.

Computacionalmente acordamos con aproximaciones a las células promedio  $w_i^n$ , la cual por simplicidad se denomina  $w_i^n$ .

El conjunto de células promedio define una distribución constante por partes de la solución en el tiempo  $t^n$ , que de indica en la siguiente imagen:

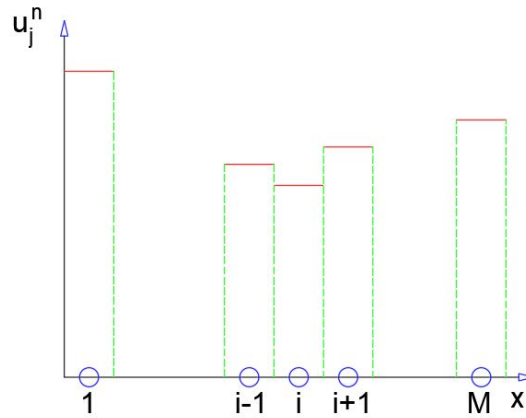


Figura 5.2: Distribución escalonada constante, de datos para el tiempo  $n$ .

## 5.2. Esquemas numéricos centrados

Para admitir soluciones discontinuas, es usual considerar la siguiente formulación integral:

$$\int (W dx - F(W) dt) = 0. \quad (5.2.8)$$

Los esquemas numéricos generalmente usan (5.2.8) para aproximar los resultados numéricos de las ecuaciones conservativas. Para ello, se introduce un volumen de control en el espacio  $(x - t)$  de dimensiones  $\Delta x \times \Delta t$ . A continuación, se evalúa la integral (5.2.8) en este volumen de control,

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (W(x, t^{n+1}) - W(x, t^n)) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (F(W(x_{j+1/2}, t)) - F(W(x_{j-1/2}, t))) dt = 0.$$

Dividiendo por  $\Delta x$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} W(x, t^{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} W(x, t^n) dx - \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{j+1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{j-1/2}, t)) dt \right]. \end{aligned}$$

De esta manera se deduce la siguiente fórmula conservativa

$$\bar{W}_j^{n+1} = \bar{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2} - F_{j-1/2}], \quad (5.2.9)$$

donde  $\overline{W}_j^n$  es un promedio  $\overline{W}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} W(x, t^n) dx$  en el tiempo  $t = t^n$  en el intervalo  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  cuya longitud viene dada por  $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ .

El flujo en (5.2.9) puede interpretarse como un promedio en tiempo del flujo físico, i.e.,

$$F_{j+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{j+1/2}, t)) dt.$$

Los esquemas numéricos centrales basados en (5.2.9), vienen caracterizados por la expresión que considera que el flujo numérico  $F_{j+1/2}$ , depende de una función  $\phi$ , es decir:

$$F_{j+1/2} = \phi(W_j^n, W_{j+1}^n).$$

El lector puede encontrar más detalles en [14].

### 5.2.1. Condición de Bermúdez-Vázquez para el buen comportamiento de un esquema numérico

Bermúdez y Vázquez, caracterizan el buen comportamiento del esquema numérico cuando satisface una solución estacionaria en un problema que el agua está en reposo. Introducen el problema estacionario (*Problema PE*) dado por  $q(x, t) = 0$  y  $h(x, t) = C - b(x)$  como función independiente de  $t$ . En estas condiciones definen las siguientes propiedades de conservación:

**Definición 5.2.1 C-propiedad exacta.** *Decimos que un esquema numérico satisface una C-propiedad exacta si es exacto cuando se utiliza para resolver un problema PE.*

**Definición 5.2.2 C-propiedad aproximada.** *Decimos que un esquema numérico satisface una C-propiedad aproximada si aproxima la solución de un Problema PE con orden de aproximación  $\Theta(\Delta x^2)$ .*

Es conocido que los esquemas numéricos que no satisfacen una C-propiedad propagan ondas oscilatorias espúreas en los problemas estacionarios. Este aspecto puede profundizarse en [4].

### 5.3. El coeficiente de Courant-Friedrichs-Levy

En cualquier método de aproximación numérica es necesario introducir una condición de estabilidad, el coeficiente de *Courant – Friedrichs – Levy* o *CFL* es una relación fundamental a la hora de buscar la viabilidad de las soluciones de métodos numéricos de ecuaciones conservativas.

Es una condición necesaria que debe cumplirse en cualquier método de volumen finito o diferencia finita para proporcionar estabilidad a medida que se refina la cuadrícula.

En resumen la condición CFL como: un método numérico se considera convergente según la condición *CFL* si se cumple:

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (5.3.10)$$

Siendo  $c$  la celeridad, la anterior ecuación se puede expresar como:

$$c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (5.3.11)$$

# Capítulo 6

## Métodos numéricos aplicados a las ecuaciones de aguas someras, el método de Rusanov

### 6.1. El problema exacto de Riemann y el método de Godunov

Godunov propuso un método numérico aplicado a dinámica de gases, donde la solución exacta de problema de valores iniciales del problema de Riemann presentaba una discontinuidad inicial, que evidentemente se puede aplicar a la modelización de aguas someras.

Consideramos el sistema hiperbólico característico de coeficientes constantes escrito en forma de ley conservativa:

$$W_t + F(W)_x = 0 \quad F(W) \equiv AW. \quad (6.1.1)$$

El método de Godunov de primer orden usa la formulación conservativa:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}] \quad (6.1.2)$$

que requiere la solución  $W_{i+(1/2)}(x/t)$ , del problema local de Riemann. Para computar el flujo numérico intercelda:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(W_{1+\frac{1}{2}}(0)), \quad (6.1.3)$$

$W_{i+1/2}$ , es el valor de la solución  $W_{i+1/1}(x/t)$  en  $x/t = 0$  a lo largo del contorno de la intercelda.

La expresión  $W_{i+1/2}(x/t)$  puede ser fácilmente encontrada mediante la expansión de los datos iniciales  $W_i^n$  y  $W_{i+1}^n$ , en términos de los vectores propios:

$$W_i^n = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot K^{(j)}. \quad (6.1.4)$$

$$W_{i+1}^m = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot K^{(j)}. \quad (6.1.5)$$

La solución general en un punto  $(x, t)$  es definida como:

$$W_{i+\frac{1}{2}}(x, t) = \sum_{j=1}^I \alpha_j \cdot K^{(j)} + \sum_{j=i+1}^m \beta_j \cdot K^{(j)}. \quad (6.1.6)$$

Donde  $I$ , es el mayor entero con  $1 \leq I \leq m$  tal que  $x/t \geq \lambda_I$ . El flujo de Godunov, requiere la solución en  $x/t = 0$ . en (6.1.6)

Para  $x/t = 0$ ,  $I$  es tal que  $\lambda_i \leq 0$  y  $\lambda_{i+1} \geq 0$ , entonces  $W_{i+1/2}(0)$  se obtiene mediante (6.1.6):

$$W_{i+\frac{1}{2}}(0) = W_i^I + \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}, \quad (6.1.7)$$

o



$$W_{i+\frac{1}{2}}(0) = W_i^n - \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}, \quad (6.1.8)$$

o

$$W_{i+\frac{1}{2}}(0) = W_{i+1}^n - \sum_{j=I+1}^m (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}. \quad (6.1.9)$$

El salto a través de la onda  $j$ , con valor propio  $\lambda_j$ , y vector propio  $K^{(j)}$  es dado por  $(\beta_j - \alpha_j)K^j$ , se indica que la solución del problema de Riemann en  $x/t = 0$  es dada por (6.1.8), puede ser interpretada como el dato del estado del lado izquierdo más todos los saltos de onda a lo largo de ondas de velocidad cero o negativa. De forma similar la expresión (6.1.8), toma la solución de los datos del estado derecho  $W_{i+1}^n$ , menos los saltos de onda, a través de todas las ondas con velocidad positiva o cero.

Combinando (6.1.8) a (6.1.9) tenemos la expresión:

$$W_{i+\frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{2}(W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^m (\text{sign}(\lambda_j)(\beta_j - \alpha_j) \cdot K^{(j)})\right). \quad (6.1.10)$$

### 6.1.1. El esquema de Godunov

El flujo numérico intercelda de Godunov, puede ser obtenido mediante la evaluación de  $F(W)$  por alguna de las expresiones (6.1.8) a (6.1.10), para la solución del problema de Riemann.

Usando la expresión (6.1.8), tenemos:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_i^n + \sum_{j=1}^I A(\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}, \quad (6.1.11)$$

y desde  $AK^{(j)} = \lambda_j K^{(j)}$ , tenemos:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_i^n + \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) \lambda_j K^{(j)}. \quad (6.1.12)$$

De forma similar tomando (6.1.9), tenemos:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+1}^n - \sum_{j=1+I}^m (\beta_j - \alpha_j) \lambda_j K^{(j)}. \quad (6.1.13)$$

Y combinando las expresiones (6.1.12) y (6.1.13), tenemos:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) |\lambda_j| K^{(j)}. \quad (6.1.14)$$

El flujo de Godunov que resuelve (6.1.1), puede ser escrito de la siguiente forma:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2}|A|(W_{i+1}^n - W_i^n). \quad (6.1.15)$$

El flujo de Godunov también puede ser expresado de la siguiente forma:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = A^+ W_i^n + A^- W_{i+1}^n. \quad (6.1.16)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \lambda_j^+ &= \max(\lambda_j, 0), \\ \lambda_j^- &= \min(\lambda_j, 0). \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

En la expresión superior de (6.1.17) sólo se consideran los valores propios positivos, los valores negativos se sustituyen por ceros en la expresión inferior, sólo se consideran los valores propios negativos, los valores positivos se sustituyen por ceros. Además  $\lambda_j = \lambda_j^+ + \lambda_j^-$  y  $|\lambda_j| = \lambda_j^+ - \lambda_j^-$  siendo:

$$\begin{aligned}\Lambda^+ &= \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_m^+), \\ \Lambda^- &= \text{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_m^-),\end{aligned}\tag{6.1.18}$$

$$\begin{aligned}A^+ &= K\Lambda^+K^{-1}, \\ A^- &= K\Lambda^-K^{-1}, \\ \Lambda &= \Lambda^+ + \Lambda^-, \\ |\Lambda| &= \Lambda^+ - \Lambda^-, \\ A &= A^+ - A^-, \\ |A| &= A^+ - A^- = K|\Lambda|K^{-1}.\end{aligned}\tag{6.1.19}$$

El método queda pues con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}], \\ F_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2}|A|(W_{i+1}^n - W_i^n), \\ F_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(F_{i-1}^n + F_i^n) - \frac{1}{2}|A|(W_i^n - W_{i-1}^n).\end{aligned}\tag{6.1.20}$$

## 6.2. El esquema de Rusanov

El esquema de Rusanov aún siendo de primer orden resulta muy simple y por tanto adecuado cuando interesa extender un esquema a dimensiones 2D o 3D con una gran cantidad de gasto computacional. Tiene su origen en 1961 y el lector interesado puede consultarlo en [11]. Posiblemente se precisará una traducción, ya que el original está en ruso, sin embargo resulta muy interesante disponer de textos clásicos que han hecho historia.

En este método, el flujo numérico viene dado por un promedio de los flujos físicos calculados para cada celda adyacente para el instante anterior, corregido por un factor, que es proporcional a la diferencia en las variables conservadas de cada celda en el instante anterior, y una velocidad del orden de la velocidad de propagación de la perturbación, denotada como  $\lambda$ .

El método de Rusanov puede considerarse una variación del Método de Godunov en el que el valor del autovalor usado en los cálculos del flujo es el mayor de los autovalores en valor absoluto.

Así pues, el flujo numérico de Rusanov puede escribirse como:

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{2} (F(W_j) + F(W_{j+1})) - \frac{1}{2} S_{j+1/2}^+ (W_{j+1} - W_j), \quad (6.2.21)$$

$$F_{j-1/2} = \frac{1}{2} (F(W_{j-1}) + F(W_j)) - \frac{1}{2} S_{j-1/2}^+ (W_j - W_{j-1}), \quad (6.2.22)$$

donde:

$$S_{j+1/2}^+ = \max_k \{|\lambda_k|, \lambda_k = \text{autovalor del Jacobiano de } F(W) \text{ entre } W_j \text{ y } W_{j+1}\}.$$

### 6.2.1. Características del método de Rusanov

Se selecciona este método dado que presenta las siguientes características:

- Es un método sencillo y por ello fácil de programar.
- Es un método robusto.
- Numéricamente no es muy dispersivo.
- Suele captar discontinuidades de forma bastante limpia.
- Siendo de primer orden es extensible y aplicable a 2D y 3D con menor coste computacional que otros métodos.

Se puede obtener una información más completa del método en [11].

# Capítulo 7

## Aplicación del método de Rusanov a la resolución de fenómenos desarrollados en aguas poco profundas

En esta apartado se aplica el método de Rusanov, a la aproximación numérica de dos problemas de modelización de aguas poco profundas como son:

- Modelización de rotura de presas.
- Modelización de olas de marea.

Estos dos fenómenos se pueden modelizar mediante las ecuaciones conservativas de aguas poco profundas.

### 7.1. El fenómeno de la rotura de presas

Una presa constituye una discontinuidad en el cauce de un río, por lo que el problema de rotura de presas en 1D, es representable como un caso particular del problema de Riemann.

Se considera inicialmente que el fluido está en reposo a cada lado de la discontinuidad de salto. Físicamente modeliza el colapso de una estructura infinitamente

delgada, considerando un ancho de canal infinito.

El proceso de rotura de una presa puede deberse a varios factores entre ellos:

- Diseño erróneo del elemento de contención, que no es capaz de resistir el empuje del agua.
- Deterioro de los materiales que forman el cuerpo de la presa, que supone que el material de esta no sea capaz de cumplir su función de dique.
- Fenómenos de erosión interna, que producen el desmoronamiento del dique de contención.
- Acción sísmica no esperada.
- La acción concomitante de varios de los fenómenos antes expuestos.

En la siguiente imagen se indica de forma esquemática el modelo de una presa.

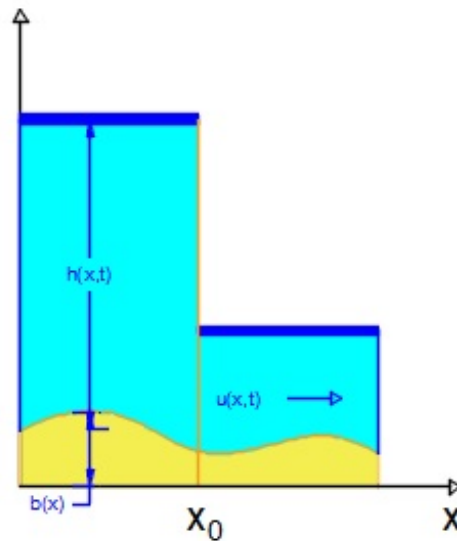


Figura 7.1: Esquema de modelización de una presa mediante los niveles aguas arriba y aguas abajo.

Se recomienda la consulta de [17], para profundizar sobre las condiciones de seguridad en presas.

## 7.2. Olas de marea

El fenómeno de las olas de marea consiste en una ola única remonta cauces que remonta ríos y estuarios.

Se producen en las zonas de desembocadura de los cauces fluviales en zonas de mares abiertos, en zonas de intensas mareas y evolucionan a contracorriente del cauce, por su aspecto general son similares a las olas de línea de costa, salvo por su extensión horizontal, que está limitada por los cauces que remonta. Es posible que la ola siga remontando el cauce incluso después de finalizar la marea.

Se trata de ondas sin dispersión, pero pierden energía al remontar el cauce por fricción con el fondo y por fenómenos de viscosidad, además un incremento en la profundidad del cauce pone fin al efecto de embudo de las aguas poco profundas. En la siguiente imagen se esquematiza un frente de onda de marea.

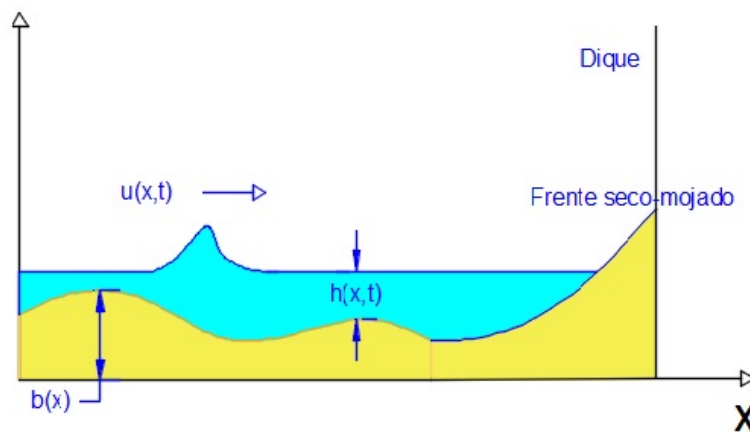


Figura 7.2: Esquema de modelización de un frente de onda de marea.

## 7.3. Planteamiento del problema, condiciones iniciales y de contorno

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales que modeliza el comportamiento del problema son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} = G,$$

siendo  $G$  el término fuente.

### 7.3.1. Condiciones geométricas de fondo

La condición inicial que describe la geometría del problema en el instante  $t = 0$  para el caso de la altura de la lámina de agua sobre el fondo no variable y con un sólo punto de discontinuidad es:

$$h(x, 0) = \begin{cases} h(x, 0)_l, & \text{si } x < x_0, \\ h(x, 0)_r, & \text{si } x > x_0. \end{cases} \quad (7.3.1)$$

En el caso de existir un lecho variable, entonces  $B'(x) \neq 0$  con lo que la expresión de la condición inicial a considerar sería:

$$h(x, 0) = \begin{cases} h(x, 0)_l - B(x)_l, & \text{si } x < x_0, \\ h(x, 0)_r - B(x)_r, & \text{si } x > x_0. \end{cases} \quad (7.3.2)$$

El valor inicial de la velocidad del fluido, que se considera en reposo es  $u(0, x) = 0$ . Las condiciones son aplicables tanto al caso de rotura de presa como en el caso de modelización del caso de onda de marea. Las condiciones de geometría del fondo no sólo afectan a las condiciones geométricas de la altura del agua  $h$ , también se han de incluir en el término fuente mediante la siguiente expresión:

$$G(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb'(x) \end{pmatrix}.$$



### 7.3.2. Características de rugosidad del fondo

Los cauces naturales no son perfectamente lisos, presentan irregularidades que produce fricción en el contacto del fluido con el fondo del cauce, lo que provoca pérdida de energía por rozamiento.

Esta componente de fricción es un término a tener en cuenta en el modelo de aguas poco profundas. El término de fricción por Manning se incluye dentro del vector de términos fuente mediante la siguiente expresión:

$$G(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gqM^2 \left| \frac{q}{h} \right| h^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix}.$$

Siendo  $M$  el coeficiente Manning, se indican algunos de los valores del coeficiente en la tabla (3.2.5)

### 7.3.3. Condiciones de contorno seco-mojado

Entre las celdas que no tienen agua y las que sí tienen agua, aparece un frente seco-mojado que es necesario tratar adecuadamente desde un punto de vista numérico, para evitar la aparición de inestabilidades y oscilaciones en la solución.

Para el tratamiento del frente seco mojado ya sea un frente de rotura de presa o una zona de frente de ola de marea, se define una tolerancia seco-mojado, de forma que si el calado en una celda es menor a la tolerancia, se considera que esa celda está seca y no se incluye en el cálculo.

#### 7.3.3.1. Redefinición de la discretización de la función fondo para eliminar la presencia de fuerzas de presión espurias.

- Si  $I_j$  está seco,  $I_{j-1}$  mojado y  $h_{j-1} + b_{j-1} < h_j + b_j$ , entonces  $b_j = b_{j-1} + h_{j-1}$ .
- Si  $I_j$  está mojado,  $I_{j-1}$  seco y  $h_{j-1} + b_{j-1} > h_j + b_j$ , entonces  $b_j = b_{j-1} - h_j$ .

**7.3.3.2. Simulación de descarga cero cuando el fluido cruza el frente seco/mojado**

- Si  $I_j$  está seco, entonces  $q_j^{n+1} = 0$ .
- Si  $I_j$  está mojado, la estimación  $q_j^{n+1} < 0$  y  $I_{j-1}$  seco, entonces  $q_j^{n+1} = 0$ .
- Si  $I_j$  está mojado, la estimación  $q_j^{n+1} > 0$  y  $I_{j+1}$  seco, entonces  $q_j^{n+1} = 0$ .

Para eliminar las oscilaciones espurias causadas por la fricción en  $q$ , hemos utilizado una discretización semi-implícita, dada por

$$q_j^{n+1} = H(\theta q_j^{n+1} + (1 - \theta)q_j^n, h_j^n), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Se recomienda la consulta de [15], para profundizar sobre la caracterización de las condiciones seco-mojado.

# Capítulo 8

## Desarrollo del código aplicado a la modelización de rotura de presas y olas de marea mediante el método de Rusanov

En este apartado se indican los componentes del código generado sobre MatLab, así como la descripción del algoritmo en el que se basa el código. El código en los tres casos estudiado arranca con el script *Ifini.m*.

### 8.1. Descripción de datos de entrada

Los valores de entrada considerados para la definición del modelo son:

- Límites del intervalo de definición  $[a, b]$ .
- Número de particiones del intervalo de definición del problema,  $n$ .
- Valor del número de Courant,  $cfl$ .
- Valor inicial del tiempo  $t=0$ , por defecto.
- Número máximo de iteraciones,  $tfmax$ .

- Límite temporal,  $t1$ .
- Coeficiente de Manning, para el caso de modelización de fondo rugoso  $ma$ .
- Caudal de la ola de marea para el caso de modelización de olas de marea,  $tq$ .
- Coeficiente de Manning,  $ma$ .

## 8.2. Definición de funciones auxiliares

Las distintas funciones auxiliares usadas en los cálculos son:

- Script de arranque del programa *Ifini.m*.
  - Introducción de los valores del intervalo espacial de definición de modelo,  $a$  y  $b$ .
  - Definición del número de particiones del intervalo espacial,  $n$ .
  - Definición del número de Courant,  $cfl$ .
  - Valores del tiempo inicial,  $t = 0$  y tiempo de finalización de los cálculos,  $t1$ .
  - Número máximo de iteraciones  $itmax$ .
- Script donde se controla el proceso de cálculo *esquema.m*
  - Incremento de  $x$ .
  - Partición del intervalo espacial.
  - Vectores de condiciones iniciales.
  - Cálculo de autovalores.
  - Gestiona el cálculo de las aproximaciones.
  - Envía los resultados a archivos de texto plano.
  - Salida de resultados en la consola de MatLab.
  - Salida gráfica de resultados.

Este programa hace uso de las siguientes funciones o script:

- *u0.m*, donde se describen las condiciones iniciales mediante una función.
  - *bat.m*, en esta función se define el fondo, en el caso de que sea variable.
  - *flujoRUS.m*, en esta función se implementa el esquema de *Rusanov*, a su vez esta función hace uso de la función *fj.m*.
  - *drywet.m* y *flucel.m*, estas funciones introducen las condiciones seco-mojado.
  - funciones *gt1.m*, *gt2.m*, *gt3.m*, En las que se define el término fuente.
- Función para definir las condiciones iniciales *u0.m*.
  - Función de definición del fondo, en el caso de considerarlo variable *bat.m*.
  - Funciones para la definición de los términos fuente.
    - Para el caso de fondo variable *gt1.m*.
    - Para el caso de ancho variable *gt2.m*.
    - Para el caso de fondo rugoso *gt3.m*.
  - Función para el cálculo del flujo de Rusanov *flujoRUS.m*.
  - Función que define el flujo físico *fj.m*.
  - Funciones para control de la condición seco-mojado.
    - *flucel.m*.
    - *drywet.m*.
  - Cálculo de autovalores *autov.m*.
  - Script para la representación gráfica del resultado del modelo, *plot1.m*.

### 8.3. Esquema de funcionamiento del código

En el siguiente esquema se representa el flujo de datos y llamadas a funciones y scripts que realiza el código:

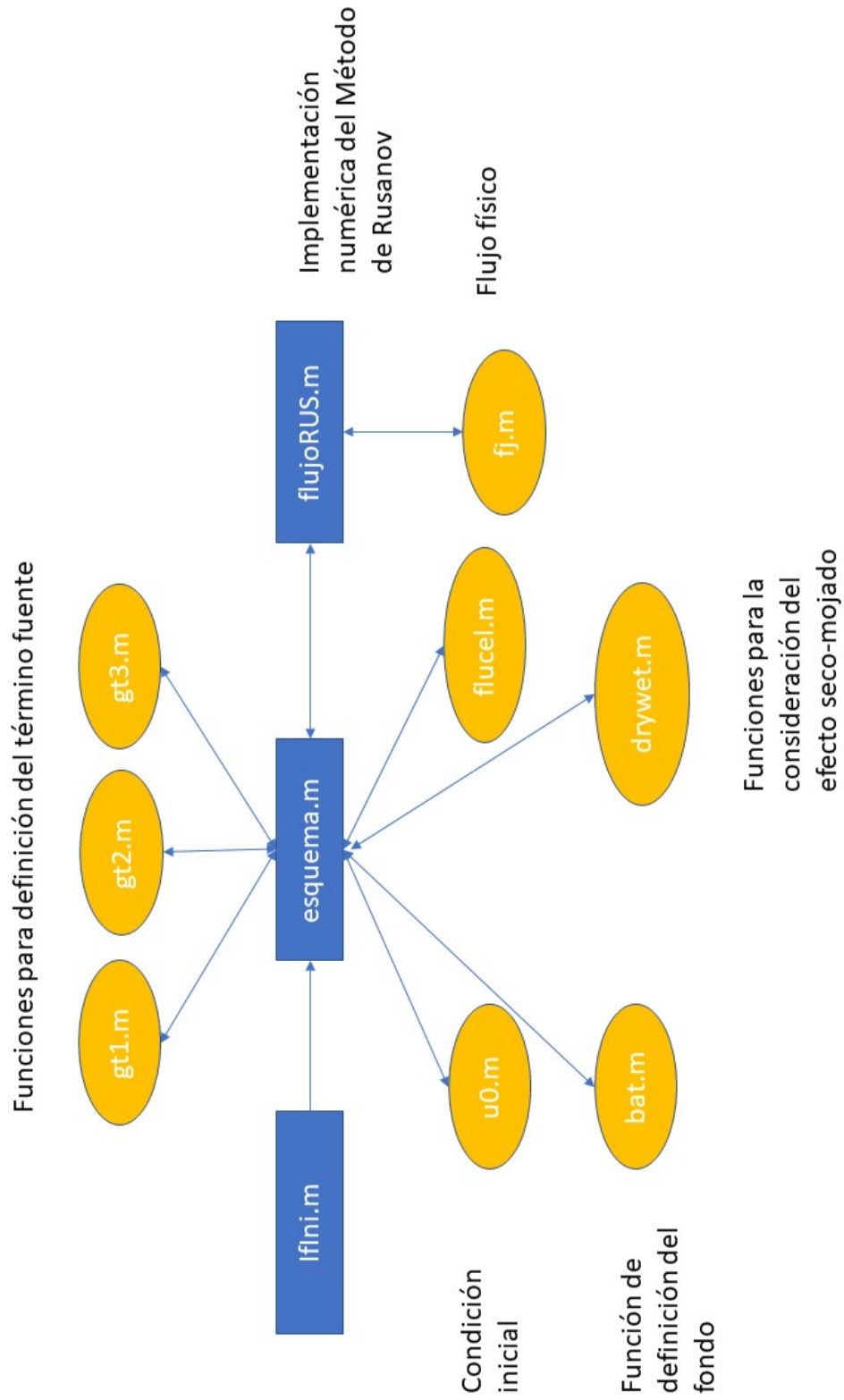


Figura 8.1: Esquema de funcionamiento del código.

# Capítulo 9

## Experimentos numéricos

### 9.1. Experimentos numéricos para el caso de modelización de rotura de presas

#### 9.1.1. Test 1: ecuaciones de aguas someras 1D con fondo constante

$$\begin{cases} W(x, t)_t + F(W(x, t))_x = 0, & (x, t) \in [0, 20] \times \mathbb{R}^+, \\ W(x, 0) = W_0(x), & x \in [0, 20], \end{cases}$$

$$W = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}; F(W) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}; W_0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & x < 10, \\ \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, & x > 10. \end{cases}$$

El problema simula rotura de una presa que tiene su dique en  $x = 10$ . En este caso hemos considerado  $b(x) = cte$ , y así el sistema es homogéneo. Aguas arriba el agua tiene una altura igual a 1 y aguas abajo 0.1. En tiempo  $t = 0$  se rompe el dique y entonces la altura del agua tiende estabilizarse a ambos lados del dique.

La Fig. 9.1 muestra la simulación de la rotura de una presa. Desde el instante  $t = 0$ , cuando el agua permanece quieta (velocidad igual a cero), hasta el valor

$t = 1.5$ . Los resultados son coherentes con los obtenidos utilizando esquemas más sofisticados ([12, pag. 217]).

Condición inicial ( $t = 0$ )

$t = 1.5$ , Esquema Rusanov

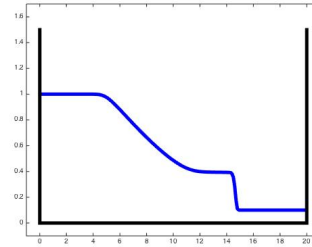
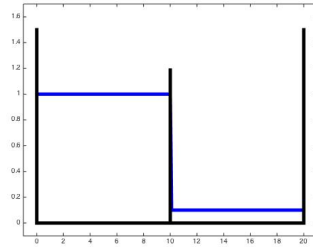


Figura 9.1: Simulación de la rotura de una presa.

### 9.1.2. Test 2: ecuaciones de aguas someras 1D con fondo variable

Generalmente los esquemas numéricos se testean con un problema estacionario (*Problema PS*). Se mantiene el agua con velocidad cero y se hace avanzar el esquema en tiempo. Obviamente, el resultado óptimo es el que mantiene el agua quieta: si el agua esta en reposo con velocidad cero, al avanzar el esquema el agua debe permanecer en reposo,

$$\begin{cases} W(x, t)_t + F(W(x, t))_x = G(W(x, t)), & (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+, \\ W(x, 0) = W_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb'(x) \end{pmatrix}; \quad b(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \cos(10\pi(x - \frac{1}{2})) + 1, & \frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$W_0(x) = \begin{pmatrix} 1 - b(x) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x \in [0, 1].$$

El esquema numérico, en el caso de sistemas no homogéneos añade un sumando más, el correspondiente al término fuente. Así el esquema a considerar será



$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n] + \Delta t G_j^n, \quad (9.1.1)$$

donde:

$$W_j^{n+1} = \begin{pmatrix} h_j^{n+1} \\ q_j^{n+1} \end{pmatrix}; W_j^n = \begin{pmatrix} h_j^n \\ q_j^n \end{pmatrix}; G_j^n = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_j^n b_j^n \end{pmatrix}.$$

Además, se considera  $F_{j+1/2}^n$  como el flujo de Rusanov dado en (6.2.22).

Es conocido (ver [4]), que si el esquema (9.1.1), se utiliza sin descentralizar el término fuente, se producen inestabilidades. Nosotros en este caso, descentramos el término en el sentido que sugiere en el trabajo mencionado:

$$G_j^n = \frac{GR_j^n + GL_j^n}{2}; GR_j^n = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^+}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot ghb' \\ -ghb' \end{pmatrix}_{j+1,j}; GL_j^n = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^+}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot ghb' \\ -ghb' \end{pmatrix}_{j,j-1}.$$

Más en concreto, aprovechando que  $h + b = 1$  (y por tanto  $b' = -h'$ )

$$GR_j^n = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_{j+1/2}^+}{\lambda_{1,j+1/2} \cdot \lambda_{2,j+1/2}} g \left( \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \right) \left( \frac{h_j - h_{j+1}}{\Delta x} \right) \\ -g \left( \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \right) \left( \frac{h_j - h_{j+1}}{\Delta x} \right) \end{pmatrix}. \quad (9.1.2)$$

Los valores promedio utilizados han sido los siguientes

$$\lambda_{j+1/2}^+ = \max\{|\lambda_{1,j}|, |\lambda_{2,j}|, |\lambda_{1,j+1}|, |\lambda_{2,j+1}|\};$$

$$\lambda_{1,j+1/2} = \frac{\lambda_{1,j} + \lambda_{1,j+1}}{2}; \lambda_{2,j+1/2} = \frac{\lambda_{2,j} + \lambda_{2,j+1}}{2}.$$

Análogamente se obtiene

$$GL_j^n = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_{j-1/2}^+}{\lambda_{1,j-1/2} \cdot \lambda_{2,j-1/2}} g \left( \frac{h_j + h_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{h_{j-1} - h_j}{\Delta x} \right) \\ -g \left( \frac{h_j + h_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{h_{j-1} - h_j}{\Delta x} \right) \end{pmatrix}. \quad (9.1.3)$$

**Nota.-** Se puede comprobar que el esquema anterior cumple una C-propiedad exacta.

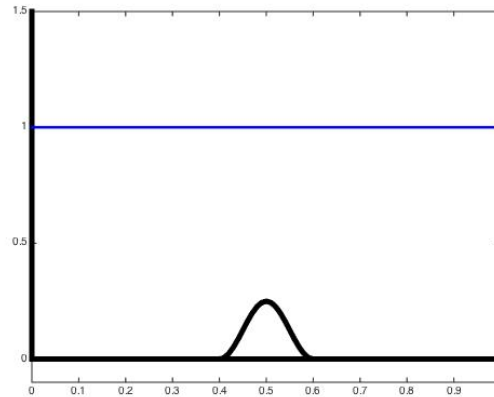


Figura 9.2: Aplicación del esquema Rusanov (9.1.1), (9.1.2), (9.1.3) sobre un problema estacionario.

En la Fig. 9.2 puede observarse el buen comportamiento del esquema Rusanov: por mucho que avancemos en tiempo el agua permanece en reposo. El lector interesado puede encontrar tests similares en [9].

## 9.2. Experimentos numéricos para el caso de modelización olas de marea en zonas costeras

### 9.2.1. Test 3: ecuaciones de aguas someras 1D con fondo variable y fricción.

En este test emularemos el efecto que se produce cuando una onda de marea rompe en la costa. Para ello un efecto que no debe despreciarse es la fricción del fluido con el fondo marino. Por esta razón aparece un nuevo elemento en el término fuente. Generalmente, para modelizar este efecto, se utiliza la Ley de Manning, dada por

$$G(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb'(x) - gqM^2 \left| \frac{q}{h} \right| h^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix},$$

donde  $M$  es el llamado coeficiente de Manning.

Consideremos el dominio  $(x, t) \in [0, 6] \times \mathbb{R}^+$  y como fondo marino la función

$$b(x) = \begin{cases} 0.00125x + 0.0125, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0.162(x - 3) + 0.01625, & 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

En este caso la ecuación a resolver será:

$$W(x, t)_t + F(W(x, t))_x = G(W(x, t)), \quad (x, t) \in [0, 6] \times \mathbb{R}^+.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb'(x) - gqM^2 \left| \frac{q}{h} \right| h^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix}; \quad q = hu.$$

El esquema numérico quedará:

$$\begin{pmatrix} h_j^{n+1} \\ q_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_j^n \\ q_j^n \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2} - F_{j-1/2}] + \Delta t G_j^n,$$

donde  $F_{j+1/2}$  es el flujo numérico de Rusanov dado en (6.2.22);  $G_j^n$  obtenido de (9.1.2) y (9.1.3).

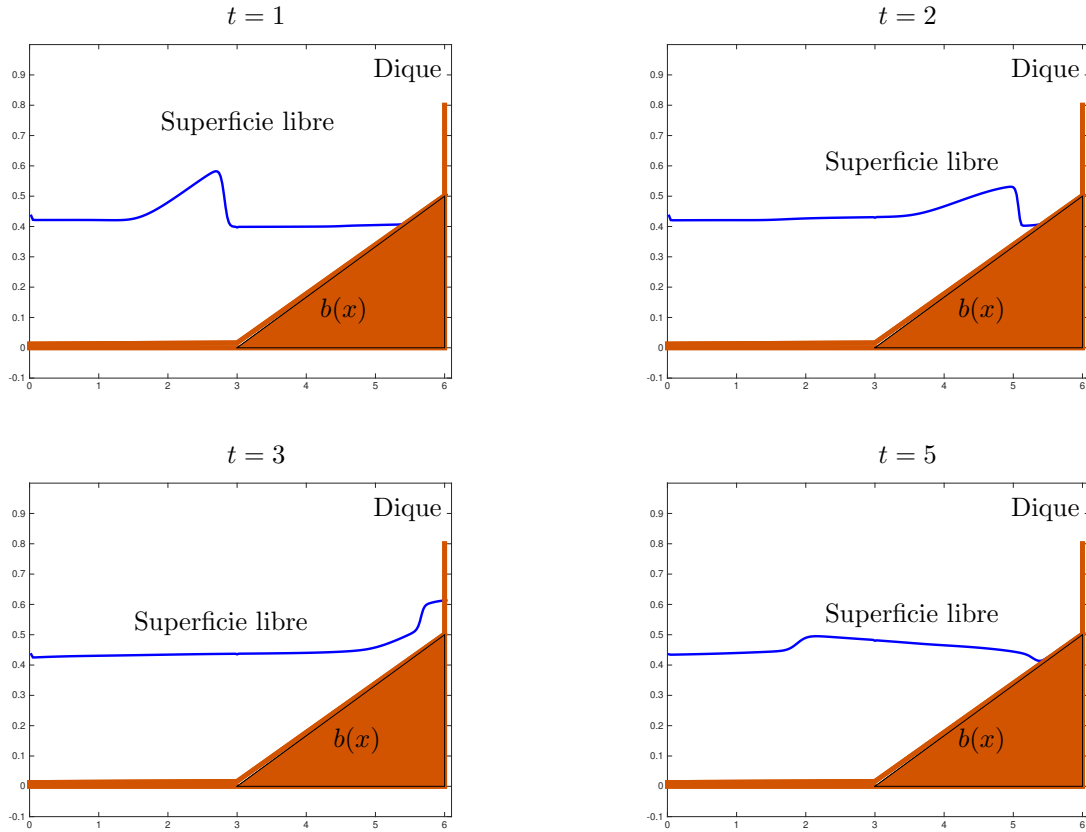


Figura 9.3: Evolución de una ola de marea para diferentes tiempo. Esquema de Rusavov,  $M = 0.015$ ,  $cfl = 0.5$  y 250 celdas computacionales.

En tiempo  $t = t^n$  se ha considerado la celda computacional  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  de longitud  $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$  y  $\Delta t$  verificando una condición de estabilidad.

Para este test hemos considerado la longitud en metros, el tiempo en segundos y el nivel de referencia lo hemos situado a 25 cm. La onda de marea se simula introduciendo una descarga en el extremo izquierdo.

# Capítulo 10

## Conclusiones

### 10.1. Resumen del contenido

En el **Capítulo 1** se realiza una breve descripción de los principios de conservación de masa, momento lineal y energía, se describe de forma breve el concepto de aguas poco profundas. Se indican así mismo ejemplos de aplicación práctica del modelo de aguas poco profundas.

En el **Capítulo 2**, se describen las condiciones de contorno en Mecánica de Fluidos y el rango de validez del modelo de aguas poco profundas, así como las propiedades ideales de los fluidos que permiten la simplificación del modelo de aguas poco profundas (Incompresibilidad, Homogeneidad e Isotropía). Se indican nociones de comportamiento de fluido esperable para el caso de modelo de aguas poco someras, también se enumeran las fuerzas externas que pueden actuar sobre el fluido.

En el **Capítulo 3**, se exponen los principios de conservación de la masa y del momento, y se usan para la obtención del sistema de ecuaciones en derivadas parciales correspondiente al modelo de aguas poco profundas para el caso de dos dimensiones.

Se indican la forma de expresar el término fuente con el que modelizar:

- Variación de secciones horizontales en canales.
- Fricción entre el fluido y el lecho de apoyo.
- Casos en los que el lecho de de apoyo no es horizontal.

Este término fuente puede expresarse e incluirse dentro del sistema de ecuaciones de aguas poco profundas para la modelización matemática del modelo a calcular.

En el **Capítulo 4**, se describen las propiedades de las ecuaciones de aguas poco profundas, la transformación de sistemas de ecuaciones de aguas poco profundas en la expresión cuasi-lineal, la descripción de la matriz jacobiana, la obtención de valores y vectores propios asociados a la matriz jacobiana, el concepto de curva característica, la definición de la solución del problema. Se describe la condición de Rankine-Hugoniot y la condición de entropía de Lax. Se especifican los conceptos de onda de choque y rarefacción asociadas a crecimiento o decrecimiento de la rapidez de la onda  $\lambda$  con respecto al eje espacial. Se expone la forma de un sistema de ecuaciones hiperbólicas de leyes de conservación, el problema general de valores iniciales, la definición del problema de Riemann y por último la estructura de la solución general del problema.

El **Capítulo 5**, contiene una introducción a los métodos numéricos aplicados a ecuaciones conservativas, discretización del dominio espacial, definición de los esquemas numéricos centrados, definición de la condición para un buen comportamiento de un sistema numérico (definición de la C-propiedad exacta y la C-propiedad aproximada), definición del coeficiente de Courant-Friedrichs-Levy para controlar la estabilidad del método numérico.

En el **Capítulo 6** se describen las bases del método de Rusanov, sus características y la expresión de la formulación del esquema en diferencias finitas

En el **Capítulo 7** se indican dos aplicaciones del método de Rusanov a la modelización de sendos problemas que pueden ser abordados mediante las ecuaciones de agua someras :

- Rotura de presas de pared delgada.
- Fenómeno de olas de marea.

En los dos casos es posible considerar:

- Condiciones geométricas de fondo variable.
- Rugosidad en el fondo.

- Se considera en el caso de las olas de marea la condición de contorno seco-mojado.

**Capítulo 8**, se ha desarrollado en MAtLab un código formado por varios script y funciones cada una de las cuales realiza una tarea específica en la aplicación del método de Rusanov. El paradigma de programación funcional se ajusta bastante a la modelización del problema ya que:

- Los módulos o funciones son fácilmente modificables si cambiar el código principal.
- El código es extensible, se pueden añadir nuevas funcionalidades .
- Hace un código más legible y fácil de testear.

Se incluyen varios apartados en los que se nombran:

- Los datos de entrada del programa de inicio de la aplicación *Ifni.m*.
- Funciones auxiliares y sus cometidos.
- Esquema de funcionamiento del código.

En el **Capítulo 9** se pone a prueba el código mediante tres experimentos numéricos:

- Caso de rotura de una presa.
  - Fondo constante.
  - No se consideran términos fuente.
- Aproximación de la solución de la ecuación de aguas someras en el caso de fondo variable.
  - Se considera fondo variable.
  - En este caso se considera el problema estacionario.
- Modelización del problema de olas de marea.

- Se considera fondo variable.
- Se considera fricción en el fondo.
- Es necesario aportar un caudal independiente de las condiciones iniciales para modelizar la ola de marea.

## 10.2. Futuras líneas de investigación

El método de Rusanov es extensible fácilmente a problemas de dos dimensiones de las ecuaciones de aguas poco profundas, con la gran cantidad de aplicaciones que ello puede generar la modelización de fenómenos tales como:

- Modelización de rotura de presas en 2D (presas de materiales sueltos).
- Cálculo de la llanura de inundación tras la rotura de una presa.
- Cálculo de la zona inundable de ríos.
- Cálculo de zonas inundables en costas por efecto de un tsunami.
- Modelo de corrientes en zonas costeras.
- Movimiento de sedimentos en suspensión y planificación de dragas.
- Modelización de deslizamientos de ladera.

Además el código usado para la aplicación del método de Rusanov es extensible y adaptable a :

- Consideración de la condición seco-mojado para el caso de la zona aguas abajo en el caso de modelización de rotura de una presa
- Ampliación de los términos fuente
- Modelización de fondos variables y aproximables mediante funciones



# Bibliografía

- [1] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1995), *An error bound for the finite element approximation of the Cahn-Hilliard equation with logarithmic free energy*, Numerische Mathematics, **72**, pp 1–20.
- [2] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1997), *Finite element approximation of a model for phase separation of a multi-component alloy with non-smooth free energy*, Numerische Mathematics, **77**, pp 1–34.
- [3] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1999a), *An improve error bound for finite element approximation of a model for phase separation of a multi-component alloy*, IMA J. Numer. Anal. **19**, pp 147-168.
- [4] A. Bermúdez and M. E. Vázquez (1994), *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Comp. Fluids, **23**, pp 1049-1071.
- [5] P. Brufau, M. E. Vázquez-Cendón, and P. García-Navarro (2002), *A numerical model for the flooding and drying of irregular domain*, Int. J. Numer. Methods Fluids **39**, pp 247-275.
- [6] M. J. Castro, A. M. Ferreiro-Ferreiro, J. A. García-Rodríguez, J. M. González-Vida, J. Macías, C. Parés and M. E. Vázquez-Cendón (2005), *The Numerical Treatment of Wet/Dry Fronts in Shallow Flows: Application to One-Layer and Two-Layer Systems*, Mathematical and Computer Modelling, **42**, pp 419-439.
- [7] P. G. Ciarlet (1978), *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland.

- [8] J. L. Lions (1969), *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites*, Dunod.
- [9] V. Martínez (2018), *A numerical technique for applying time splitting methods in shallow water equations*, *Computers & Fluids*, **169**, pp 285–295.
- [10] V. Martínez (2012), *To split or not to split, that Is the question in some shallow water equations*, ArXiv:1211.6655 [math.NA].
- [11] V. V. Rusanov (1961), *Calculation of Intersection of Non-Steady Shock Waves with Obstacles*, *J. Comput. Math. Phys. USSR*, **1**, pp 267–279.
- [12] E. F. Toro (2001), *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. Chichester, John Wiley.
- [13] E. F. Toro (2001), *Riemann solvers and numerical method for fluid dynamics. A practical introduction Third edition..* Springer.
- [14] M. E. Vázquez-Cendón (1999), *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, *J. Comput. Phys.* **148**, pp 497-526.
- [15] Ferreiro, A. M., *Resolución y validación experimental del modelo de aguas poco profundas unidimensional incluyendo áreas secas*, Trabajo de Investigación Tutelado en el Programa de Doctorado Métodos Numéricos en Ecuaciones en Derivadas Parciales, Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela, 2002.
- [16] V. T. Chow (2004), *Hidráulica de los canales abiertos*, MC Graw Hill. **108**, tabla 5-6.
- [17] MOPTMA (1996), *Reglamento técnico sobre seguridad de presas*, Ministerio de Obras Públicas, Transporte y Medio Ambiente.
- [18] Mott, Robert (1996), *. Mecánica de fluidos aplicada (4ª edición).*, Pearson Educación