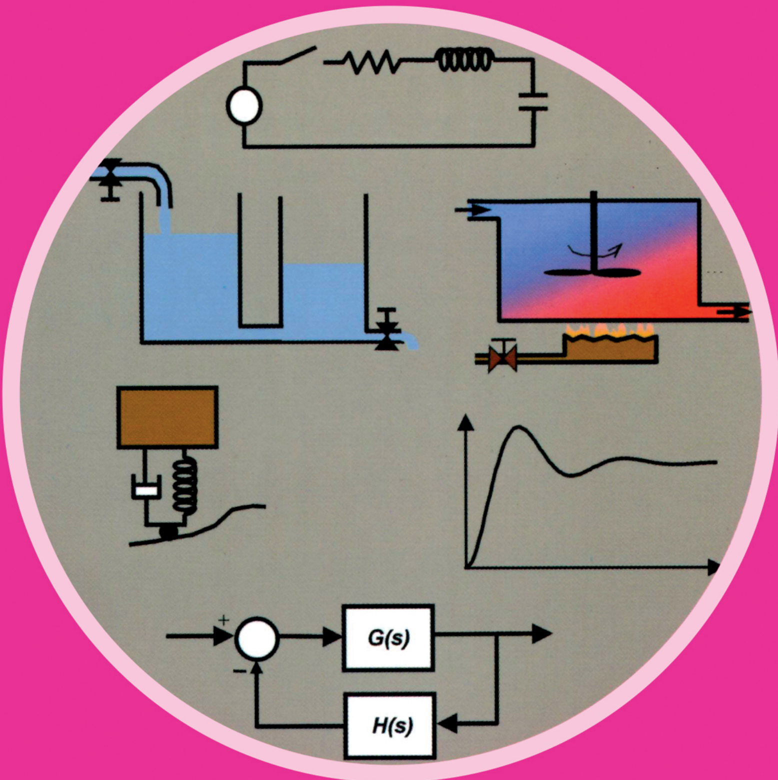
UNIVERSITAT
JAUME·I

PROBLEMAS RESUELTOS DE TEORÍA DE SISTEMAS

Roberto Sanchis Llopis



COL·LECCIÓ
«TREBALLS D'INFORMÀTICA I TECNOLOGIA»
Núm. 11

Col·lecció
«Treballs d'Informàtica i Tecnologia»
Núm. 11

PROBLEMAS RESUELTOS DE TEORÍA DE SISTEMAS

(2ª edición)

Roberto Sanchis Llopis

UNIVERSITAT
JAUME•I

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT JAUME I. Dades catalogràfiques

SANCHIS LLOPIS, Roberto

Problemas resueltos de teoría de sistemas / Roberto Sanchis Llopis. — 2a ed. — Castelló de la Plana : Publicacions de la Universitat Jaume I, D.L. 2007
p. : il. ; cm. — (Treballs d'informàtica i tecnologia ; 11)
Bibliografia.
ISBN: 978-84-15443-83-4
1. Sistemes, Teoria de - Problemes, exercicis, etc. I. Universitat Jaume I. Publicacions. II. Títol. III. Sèrie.
517.93

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
Fax 964 72 88 32
tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

ISBN: 978-84-15443-83-4

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/INFiTEC.2007.11

A Marga a Roberto y a Mar

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente libro es el fruto de la recopilación de los problemas de los exámenes realizados entre 1996 y 2000 en la asignatura de Teoría de Sistemas de segundo curso de Ingeniería Industrial de la Universitat Jaume I de Castellón. Esta segunda edición se amplía con una colección de problemas propuestos extraídos de los exámenes de la misma asignatura entre 2001 y 2006.

Teoría de Sistemas es una asignatura troncal cuyo contenido abarca los conceptos básicos de la ingeniería de sistemas. El programa actual de dicha asignatura es el siguiente:

1. Introducción. Definiciones básicas.
2. Sistemas dinámicos continuos. Transformada de Laplace.
3. Análisis de la respuesta temporal de sistemas dinámicos.
4. Sistemas dinámicos discretos. Transformada en Z.
5. Representación interna.
6. Modelado de sistemas físicos.
7. Convolución de señales y respuesta de sistemas.
8. Respuesta en frecuencia de sistemas lineales.
9. Aplicaciones.

Los problemas están clasificados en diversas categorías, correspondiendo (aunque no exactamente) con el temario anterior.

Al principio de cada sección se explica brevemente el tipo de problemas que contiene dicha sección, así como los capítulos de los libros de teoría recomendados en los que se puede encontrar la teoría necesaria para resolverlos. En resumen se podría establecer la siguiente correspondencia entre las secciones de problemas del libro y los temas del programa anterior:

- La sección 1 se corresponde con el tema 2.
- Las secciones 2 y 3 se corresponden con el tema 4.
- Las secciones 4, 5 y 6 se corresponden con el tema 6 (y con los temas 2 y 4).
- La sección 7 se corresponde con el tema 7.

- La sección 8 se corresponde con el tema 5.
- La sección 9 se corresponde con el tema 3.
- La sección 10 se corresponde con el tema 8.
- La sección 11 se corresponde con diversos temas.

Los problemas están resueltos con explicaciones detalladas para ayudar al estudiante a comprender mejor los conceptos teóricos.

Los problemas propuestos añadidos en esta segunda edición están clasificados siguiendo la misma estructura anterior.

El libro pretende servir de apoyo para los estudiantes (y profesores) de asignaturas similares que se imparten en la mayoría de las titulaciones de ingeniería industrial de las universidades españolas.

NOMENCLATURA

A lo largo del texto se utilizan los siguientes convencionalismos:

1. Se denomina $u_0(t)$ a la señal escalón unitario continua ($u_0(t)=1$ para $t \geq 0$, $u_0(t)=0$ para $t<0$).

2. Se denomina $u_0(k)$ a la señal escalón unitario discreta ($u_0(k)=1$ para $k\geq 0$, $u_0(k)=0$ para $k<0$).

3. En general se llaman las señales temporales (tanto continuas como discretas) mediante letras minúsculas, utilizando la letra mayúscula correspondiente para denominar a la transformada de la señal (de Laplace o en Z). Cuando no sea así se distinguirá la señal de su transformada indicando de forma explícita la dependencia de t (señal continua), de k (señal discreta), de s (transformada de Laplace) ó de z (transformada en Z).

4. Se utiliza el subíndice $_0$ para indicar el valor de las variables en un punto de equilibrio en sistemas continuos (u_0, y_0, etc) .

5. Se utiliza una barra sobre la variable para indicar el valor en el punto de funcionamiento o de equilibrio en sistemas discretos ($\bar{u}$, $\bar{y}$, etc).

6. Se utiliza la letra griega Δ para representar la variación de una señal respecto de un valor constante correspondiente a un punto de funcionamiento o de equilibrio del sistema ($\Delta y=y-y_0$).

1 RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS CONTINUOS

Esta sección contiene problemas cuya resolución requiere la obtención de la respuesta temporal de sistemas lineales continuos en el tiempo ante diversas entradas. La resolución de todos ellos se basa en la utilización de la transformada de Laplace.

El procedimiento de resolución consiste básicamente en los siguientes puntos:

1. Plantear la ecuación diferencial (o ecuaciones diferenciales) del sistema.
2. Tomar transformadas de Laplace, teniendo en cuenta las condiciones iniciales (cuando éstas son distintas de cero).
3. Obtener la transformada de Laplace de la salida.
4. Obtener la evolución temporal de la salida mediante la transformada de Laplace inversa.

En algunos ejercicios el procedimiento anterior debe realizarse más de una vez, puesto que el sistema cambia en un momento determinado (cortocircuito eléctrico por ejemplo), y la evolución temporal obtenida con el primer sistema sirve para determinar las condiciones iniciales para el sistema modificado.

Por otra parte, en algunos de los problemas se deben aplicar además algunas de las propiedades de la transformada de Laplace, como el teorema del valor final.

La ecuación diferencial del sistema puede ser un dato, o bien debe obtenerse a partir de las ecuaciones básicas del sistema físico de que se trata.

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 3 de [Sala00].

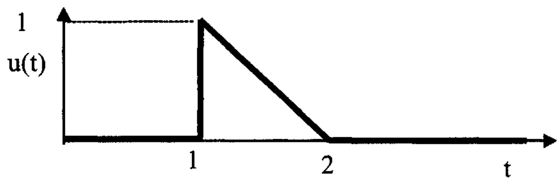
También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [Meade93] (capítulo 4), [Solyman99] (capítulos 2 y 5), [Oppenheim98] (capítulos 2 y 9), [D'azzo92] (capítulos 3 y 4), y [Ogata93] (capítulo 1).

PROBLEMA 1. Respuesta de un sistema

Obtener la salida del sistema:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=u$$

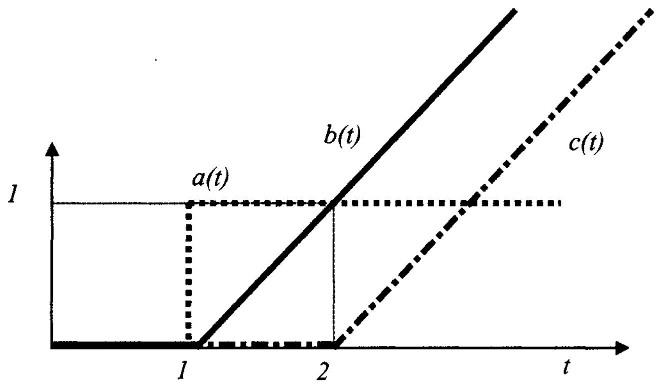
en el instante t=4 segundos ante la entrada u definida como:



Solución

Este problema se puede resolver de 2 formas, por convolución, o mediante transformada de Laplace.

Para resolverlo mediante la T.L. el primer paso es obtener la T.L. de la señal de entrada. En este caso se puede descomponer como la suma de 3 señales: un escalón unitario retrasado 1 segundo menos una rampa unitaria retrasada 1 segundo más una rampa unitaria retrasada 2 segundos:



$$u(t)=a(t)-b(t)+c(t)$$

tomando transformadas:

$$U(s)=A(s)-B(s)+C(s)=$$

$$=e^{-s}\frac{1}{s}-e^{-s}\frac{1}{s^2}+e^{-2s}\frac{1}{s^2}=e^{-s}\frac{(s-1)}{s^2}+e^{-2s}\frac{1}{s^2}$$

con lo que la salida es:

$$Y(s)=G(s)U(s)=e^{-s}\frac{(s-1)}{s^3(s+1)}+e^{-2s}\frac{1}{s^3(s+1)}$$

Para calcular la transformada inversa, se hace con cada término, sin considerar el retraso, y luego se le impone el retraso correspondiente:

$$\frac{s-1}{s^3(s+1)}=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{-2}{s} \xrightarrow{T.L.I.} 2e^{-t}-\frac{1}{2}t^2+2t-2$$

$$e^{-s}\frac{s-1}{s^3(s+1)} \xrightarrow{T.L.I.} u_0(t-1)\left(2e^{-(t-1)}-\frac{1}{2}(t-1)^2+2(t-1)-2\right)$$

donde $U_0(t\text{-}1)$ es el escalón unitario retrasado 1 unidad.

$$\frac{1}{s^3(s+1)}=\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s^3}+\frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s} \xrightarrow{T.L.I.} -e^{-t}+\frac{1}{2}t^2-t+1$$

$$e^{-2s}\frac{1}{s^3(s+1)} \xrightarrow{T.L.I.} u_0(t-2)\left(-e^{-(t-2)}+\frac{1}{2}(t-2)^2-(t-2)+1\right)$$

Con lo que la salida completa vale:

$$y(t)=u_0(t-1)\left(2e^{-(t-1)}-\frac{1}{2}(t-1)^2+2(t-1)-2\right)+$$

$$+u_0(t-2)\left(-e^{-(t-2)}+\frac{1}{2}(t-2)^2-(t-2)+1\right)$$

que, en el instante t=4 queda:

$$y(4)=2e^{-3}-\frac{1}{2}3^2+2\cdot 3-2-e^{-2}+\frac{1}{2}2^2-2+1=\frac{1}{2}-e^{-2}+2e^{-3}$$

PROBLEMA 2. Respuesta de un sistema

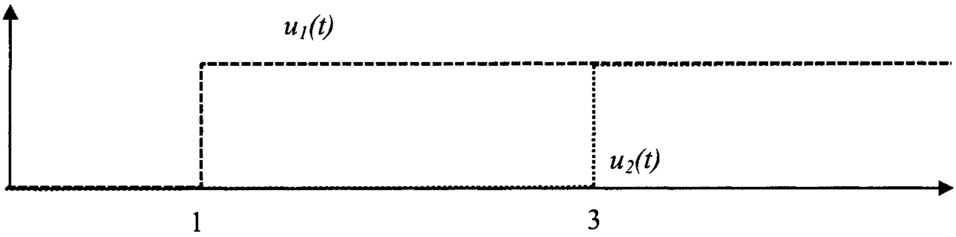
Obtener la respuesta del sistema cuya ecuación diferencial es:

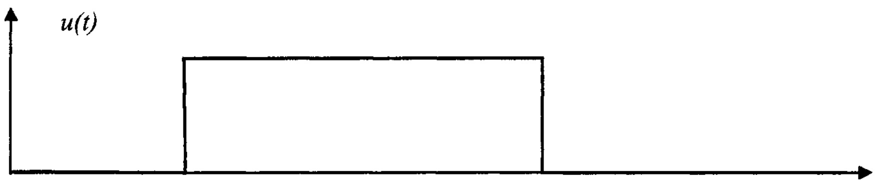
$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=u$$

ante la entrada $u=\begin{cases}0 & t<1\\ 1 & 1\le t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases}$

Solución

El problema se puede resolver por convolución o mediante la transformada de Laplace. Para resolverlo mediante la T.L. hay que calcular en primer lugar la T.L. de la entrada. En este caso es fácil ver que se puede descomponer en resta de dos escalones unitarios retrasados 1 y 3 segundos respectivamente:





$u(t)=u_0(t-1)-u_0(t-3)$

tomando transformadas: $U(s)=\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}$

por lo que:

$$Y(s)=G(s)U(s)=\left(\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}\right)\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{e^{-s}}{s}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{e^{-3s}}{s}\frac{1}{(s+1)^2}$$

Para calcular la transformada inversa de cada término se deja el retraso fuera, y al final se añade al resultado:

$$\frac{e^{-s}}{s}\frac{1}{(s+1)^2}=e^{-s}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{T.L.I.}\qquad u_o(t-1)\left[1-e^{-(t-1)}-(t-1)e^{-(t-1)}\right]$$

$$\frac{e^{-3s}}{s}\frac{1}{(s+1)^2}=e^{-3s}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{T.L.I.}\qquad u_o(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}-(t-3)e^{-(t-3)}\right]$$

quedando finalmente:

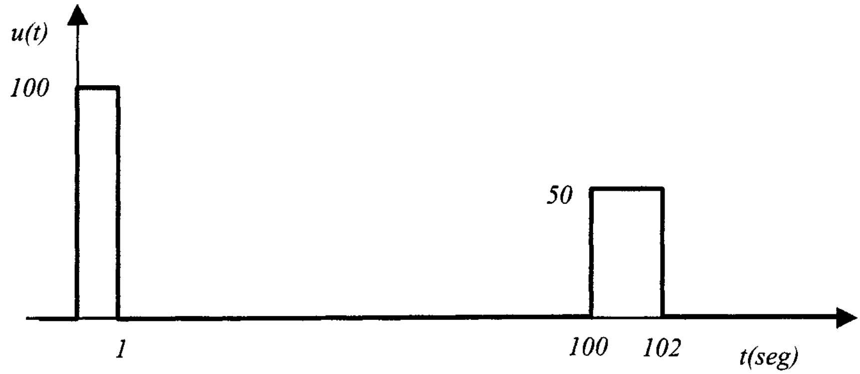
$$y(t) = u_o(t-1)\left[1 - e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}\right] - u_o(t-3)\left[1 - e^{-(t-3)} - (t-3)e^{-(t-3)}\right]$$

PROBLEMA 3. Respuesta de un sistema

Un sistema continuo de ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 0.001y = 0.3u$$

ha recibido (partiendo del reposo) una entrada de la forma:



Calcular la respuesta del sistema en el instante t=150 haciendo las suposiciones que se consideren oportunas.

Solución

Tomando transformadas de Laplace (al ser nulas las condiciones iniciales) se obtiene:

$$s^2Y(s) + 0.02sY(s) + 0.001Y(s) = 0.3U(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{0.3}{s^2 + 0.02s + 0.001}U(s)$$

Los polos de la función de transferencia son $-0.01 \pm 0.03j$ por lo que la respuesta tendrá un término de la forma $e^{-0.01t}cos(0.03t)$. Estos polos son muy lentos comparados con la anchura de los pulsos de la entrada, por lo que se podrá aproximar la entrada a la suma de 2 impulsos. Esta idea se puede comprobar calculando el valor del término de la respuesta en el instante t=2 segundos, que es la anchura del pulso más ancho: $e^{-0.02}cos(0.06)=0.98 \approx 1$. Es decir, en el tiempo que dura el pulso de entrada la señal de salida apenas tiene tiempo de cambiar nada. Así pues se aproxima la *entrada a dos impulsos retrasados. El valor de cada impulso es la integral (el área):*

$$u(t) \approx 100\delta(t) + 100\delta(t-100) \quad \Rightarrow \quad U(s) \approx 100 + 100e^{-100s}$$

La transformada de Laplace de la respuesta será por tanto:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{0.3}{s^2 + 0.02s + 0.001}(100 + 100e^{-100s}) =$$

$$= \frac{30}{(s+0.01)^2 + 0.03^2}(1 + e^{-100s}) = 1000\frac{0.03}{(s+0.01)^2 + 0.03^2}(1 + e^{-100s})$$

cuya transformada inversa es, directamente:

$$y(t) = 1000\left(e^{-0.01t}\,\mathrm{sen}(0.03t) + e^{-0.01(t-100)}\,\mathrm{sen}(0.03(t-100))\right)$$

Sustituyendo en t=150 se obtiene la respuesta pedida:

$$y(150) = 386.9$$

PROBLEMA 4. Respuesta de un sistema

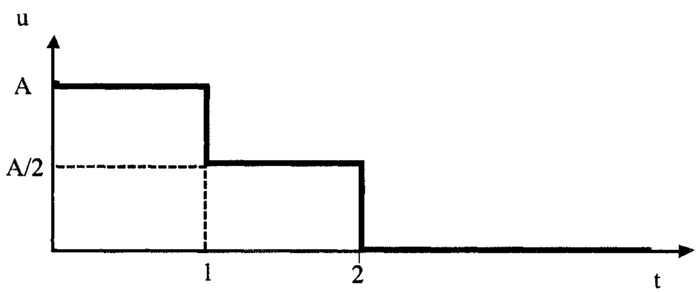
Mediante un computador se controla la entrada de un sistema de función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

El periodo con el que el computador actualiza la entrada es de 1 segundo. Se quiere que la salida valga y=1 en el instante t=3 segundos. Para ello se decide dar a la entrada un valor de A durante el primer periodo, cambiándolo por un valor de A/2 en el segundo periodo, haciendo nula la entrada a partir de entonces. Obtener el valor de A para que se cumpla lo anterior.

Solución

La entrada al sistema es constante en cada periodo, según la figura:



La salida del sistema en el instante t=3 se puede calcular utilizando la transformada de Laplace. La señal de entrada es la suma de 3 escalones retrasados:

$$u(t) = Au_0(t) - \frac{A}{2}u_0(t-1) - \frac{A}{2}u_0(t-2)$$

Por lo que su transformada de Laplace es:

$$U(s) = A\left(\frac{1}{s} - \frac{0.5e^{-s}}{s} - \frac{0.5e^{-2s}}{s}\right)$$

La transformada de Laplace de la salida será por tanto:

$$Y(s) = G(s)U(s) = A\frac{s+1}{s(s+2)}\left(\frac{1}{s} - \frac{0.5e^{-s}}{s} - \frac{0.5e^{-2s}}{s}\right)$$

Para obtener la transformada inversa se calculará en primer lugar la de la función:

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+2} = \frac{as(s+2) + b(s+2) + cs^2}{s^2(s+2)}$$

Igualando los numeradores se obtiene b=0.5, a=0.25, c=-0.25, por lo que la transformada inversa de esta función es:

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)} = \frac{0.25}{s} + \frac{0.5}{s^2} - \frac{0.25}{s+2} \xrightarrow{L^{-1}} \left(0.25 + 0.5t - 0.25e^{-2t}\right)u_o(t)$$

Aplicando superposición se obtiene la transformada inversa de Y(s):

$$\begin{aligned} y(t) = {} & A\left(0.25 + 0.5t - 0.25e^{-2t}\right)u_o(t) - \\ & - 0.5A\left(0.25 + 0.5(t-1) - 0.25e^{-2(t-1)}\right)u_o(t-1) - \\ & - 0.5A\left(0.25 + 0.5(t-2) - 0.25e^{-2(t-2)}\right)u_o(t-2) \end{aligned}$$

Sustituyendo por t=3 y aplicando la condición de que y(3)=1 se obtiene:

$$y(3) = 0.7686A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1.3$$

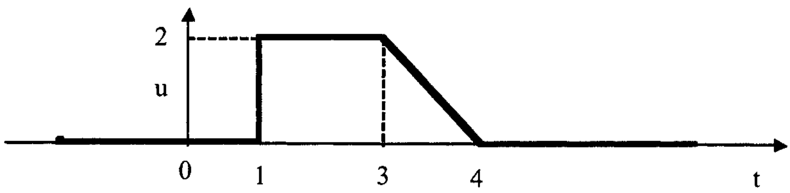
Este problema también puede resolverse utilizando el equivalente discreto, ya que la entrada es constante en cada periodo de 1 segundo, y nos interesa el valor de la salida en el instante 3seg, es decir en el periodo de muestreo 3. Ver el problema 70 para más detalles.

PROBLEMA 5. Respuesta de un sistema

Obtener la respuesta del sistema cuya ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4u$$

ante la entrada:



Solución

La función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4}{(s+2)(s+1)}$$

La respuesta se puede obtener bien por convolución, bien utilizando la transformada de Laplace.

La señal de entrada se puede descomponer en suma de varias entradas (un escalón retrasado 1segundo menos una rampa de pendiente 2 retrasada 3 segundos más otra rampa de pendiente 2 retrasada 4 segundos):

$$u(t) = 2u_0(t-1) - 2(t-3)u_0(t-3) + 2(t-4)u_0(t-4)$$

$$\Rightarrow \quad U(s) = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} + \frac{2e^{-4s}}{s^2}$$

La transformada de Laplace de la respuesta será por tanto:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{(s+2)(s+1)}\left(\frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} + \frac{2e^{-4s}}{s^2}\right)$$

Para obtener la respuesta hay que calcular dos transformadas inversas:

$$Y_1(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+1} =$$

$$= \frac{a(s+2)(s+1) + bs(s+1) + cs(s+2)}{s(s+2)(s+1)}$$

Igualando numeradores y resolviendo se obtiene a=2, b=2, c=-4 por lo que:

$$y_1(t) = \left(2 + 2e^{-2t} - 4e^{-t}\right)u_0(t)$$

$$Y_2(s) = \frac{4}{s^2(s+2)(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+2} + \frac{d}{s+1} =$$
$$= \frac{as(s+2)(s+1) + b(s+2)(s+1) + cs^2(s+1) + ds^2(s+2)}{s(s+2)(s+1)}$$

Igualando numeradores y resolviendo se obtiene a=-3, b=2, c=-1, d=4 por lo que:

$$y_2(t) = \left(-3 + 2t - e^{-2t} + 4e^{-t}\right)u_0(t)$$

Aplicando superposición se obtiene la respuesta del sistema:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2y_1(t-1) - 2y_2(t-3) + 2y_2(t-4) = \\ &= 2\left(2 + 2e^{-2(t-1)} - 4e^{-(t-1)}\right)u_0(t-1) - \\ &\quad - 2\left(-3 + 2(t-3) - e^{-2(t-3)} + 4e^{-(t-3)}\right)u_0(t-3) + \\ &\quad + 2\left(-3 + 2(t-4) - e^{-2(t-4)} + 4e^{-(t-4)}\right)u_0(t-4) \end{aligned}$$

PROBLEMA 6. Desintegración de sustancias

Las ecuaciones siguientes modelan la desintegración de una sustancia A que da lugar a otra B, y ésta a otra C:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= -0.01x_A \\ \dot{x}_B &= 0.02x_A - 0.005x_B \\ \dot{x}_C &= 0.01x_B \end{aligned}$$

donde x_j representa la cantidad (n° de moles) de la sustancia j. Si inicialmente se tiene únicamente una cantidad x_A=*100 moles,* calcular:

a) La cantidad final de cada producto cuando pase mucho tiempo.

b) El valor máximo que alcanzará el producto B.

Solución

a) Tomando transformadas de Laplace en las ecuaciones (teniendo en cuenta las condiciones iniciales) se obtiene fácilmente la transformada de Laplace de las tres variables del sistema:

$$\dot{x}_A = -0.01x_A \quad \Rightarrow \quad sX_A(s) - x_A(0) = -0.01X_A(s)$$
$$\Rightarrow \quad X_A(s) = \frac{x_A(0)}{s+0.01} = \frac{100}{s+0.01}$$

$$\dot{x}_B = 0.02x_A - 0.005x_B \quad \Rightarrow \quad sX_B(s) = 0.02X_A(s) - 0.005X_B(s)$$

$$\Rightarrow \quad X_B(s) = \frac{2}{(s+0.005)(s+0.01)}$$

$$\dot{x}_C = 0.01x_B \quad \Rightarrow \quad sX_C(s) = 0.01X_B(s)$$

$$\Rightarrow \quad X_C(s) = \frac{0.02}{s(s+0.005)(s+0.01)}$$

Para calcular la cantidad final de cada producto cuando pase mucho tiempo se puede utilizar el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} x_A(t) = \lim_{s\to 0} sX_A(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{100}{s+0.01} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} x_B(t) = \lim_{s\to 0} sX_B(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2}{(s+0.005)(s+0.01)} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} x_C(t) = \lim_{s\to 0} sX_C(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{0.02}{s(s+0.005)(s+0.01)} = 400 \quad moles$$

b) Para calcular el valor máximo que alcanzará el producto B hay que calcular la evolución con el tiempo por medio de la transformada inversa y calcular el máximo de esa función:

$$X_B(s) = \frac{2}{(s+0.005)(s+0.01)} \quad \Rightarrow \quad x_B(t) = 400e^{-0.005t} - 400e^{-0.01t}$$

Derivando e igualando a cero se tiene:

$$\frac{dx_B(t)}{dt} = -2e^{-0.005t} + 4e^{-0.01t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 138.63 \quad seg$$

Con lo que el valor máximo será:

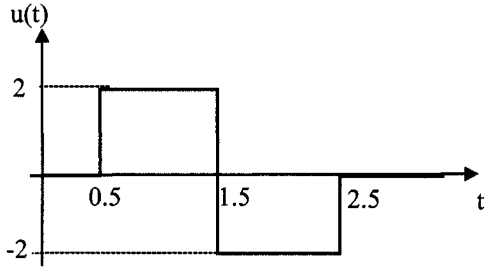
$$x_{B,MAX} = 400e^{-0.005\cdot 138.63} - 400e^{-0.01\cdot 138.63} = 100 \quad moles$$

PROBLEMA 7. Respuesta de un sistema

Obtener la salida en el instante 10 del sistema definido por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + y = \dot{u} + u$$

ante la entrada definida por:



Solución

La función de transferencia del sistema es:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^2+1}$$

La respuesta puede obtenerse utilizando la transformada de Laplace. La entrada se puede descomponer en suma de 3 escalones retrasados:

$$u(t)=2u_0(t-0.5)-4u_0(t-1.5)+2u_0(t-2.5)$$

$$\Rightarrow \quad U(s)=\frac{2e^{-0.5s}}{s}-\frac{4e^{-1.5s}}{s}+\frac{2e^{-2.5s}}{s}$$

La transformada de Laplace de la respuesta será por tanto:

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{s+1}{s^2+1}\left(\frac{2e^{-0.5s}}{s}-\frac{4e^{-1.5s}}{s}+\frac{2e^{-2.5s}}{s}\right)$$

Para obtener la transformada inversa basta con resolver la de la función:

$$Y_1(s)=\frac{s+1}{s(s^2+1)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2+1}+\frac{cs}{s^2+1}=\frac{a(s^2+1)+bs+cs^2}{s(s^2+1)}$$

Igualando los numeradores se obtiene a=1, b=1, c=-1, por lo que:

$$y_1(t)=\left(1+\mathrm{sen}(t)-\cos(t)\right)u_0(t)$$

Aplicando superposición se obtiene la respuesta:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2y_1(t-0.5)-4y_1(t-1.5)+2y_1(t-2.5)= \\ &= 2\left(1+\mathrm{sen}(t-0.5)-\cos(t-0.5)\right)u_0(t-0.5)- \\ &\quad -4\left(1+\mathrm{sen}(t-1.5)-\cos(t-1.5)\right)u_0(t-1.5)+ \\ &\quad +2\left(1+\mathrm{sen}(t-2.5)-\cos(t-2.5)\right)u_0(t-2.5) \end{aligned}$$

Sustituyendo en t=10 se obtiene el valor pedido:

$$y(10)=-2.5752$$

PROBLEMA 8. Respuesta de un sistema

Dado un sistema cuya respuesta impulsional es:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ 3 - t & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

obtener la respuesta del mismo en el instante t=4 ante la entrada definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Solución

La respuesta se puede obtener mediante la transformada de Laplace o mediante convolución. La entrada se puede descomponer de la siguiente forma:

$$u(t) = u_0(t) - u_0(t-2) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

Por otra parte la respuesta impulsional se puede descomponer en suma de varias señales, lo que permite obtener la función de transferencia:

$$g(t) = 2u_0(t-1) - u_0(t-2) - (t-2)u_0(t-2) + (t-3)u_0(t-3)$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

La transformada de Laplace de la salida será por tanto:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{2e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s^2}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right) =$$

$$= \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^3} + \frac{e^{-3s}}{s^3} + \frac{e^{-4s}}{s^3} - \frac{e^{-5s}}{s^3}$$

cuya transformada inversa es inmediata:

$$y(t) = 2(t-1)u_0(t-1) - (t-2)u_0(t-2) - 2(t-3)u_0(t-3) +$$

$$+ (t-4)u_0(t-4) - \frac{(t-2)^2}{2}u_0(t-2) + \frac{(t-3)^2}{2}u_0(t-3) +$$

$$+ \frac{(t-4)^2}{2}u_0(t-4) - \frac{(t-5)^2}{2}u_0(t-5)$$

que sustituido en el instante t=4 permite obtener el valor pedido:

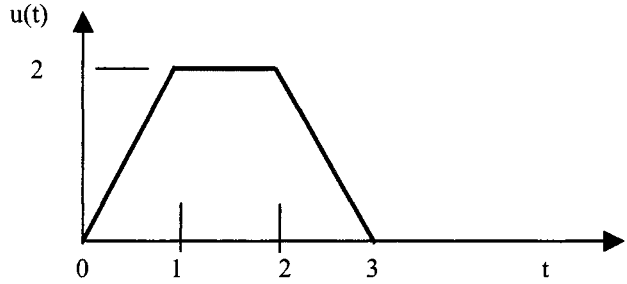
$$y(4) = 0.5$$

PROBLEMA 9. Aplicación de superposición

Se ha medido en varios instantes la respuesta de un sistema continuo lineal ante una entrada rampa unitaria. Los valores obtenidos han sido:

Tiempo (seg)	1	2	3	4
Salida	1	2.5	3.6	4.9

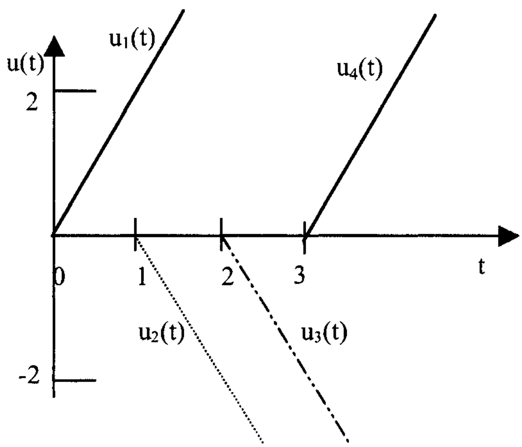
Obtener la respuesta de ese mismo sistema en el instante t=4 seg ante la entrada:



Sugerencia: razonar con el principio de superposición. No intentar obtener G(s), ya que no hay datos suficientes para calcularla.

Solución

La señal de entrada se puede descomponer en suma de 4 rampas con diferentes retrasos:



$$u(t) = 2tu_0(t) - 2(t-1)u_0(t-1) - 2(t-2)u_0(t-2) + 2(t-3)u_0(t-3)$$

donde $u_0(t)$ es el escalón unitario.

La salida ante esta suma de entradas es la suma de las salidas ante cada entrada por separado. Ante la primera rampa la salida es:

$$u_1(t) = 2tu_0(t) \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = 2y(t) \quad \Rightarrow \quad y_1(4) = 2y(4) = 9.8$$

donde se ha llamado y(t) a la respuesta del sistema ante rampa unitaria (cuyos valores se tienen en la tabla). Ante la segunda rampa se tiene:

$$u_2(t) = 2(t-1)u_0(t-1) \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = 2y(t-1) \quad \Rightarrow \quad y_2(4) = 2y(3) = 7.2$$

por ser el sistema lineal e invariante.

Procediendo de la misma forma con las otras 2 rampas se tiene:

$$u_3(t) = 2(t-2)u_0(t-2) \quad \Rightarrow \quad y_3(t) = 2y(t-2) \quad \Rightarrow \quad y_3(4) = 2y(2) = 5$$

$$u_4(t) = 2(t-3)u_0(t-3) \quad \Rightarrow \quad y_4(t) = 2y(t-3) \quad \Rightarrow \quad y_4(4) = 2y(1) = 2$$

Por lo que la salida total es:

$$y_1(4) - y_2(4) - y_3(4) + y_4(4) = 9.8 - 7.2 - 5 + 2 = -0.4$$

PROBLEMA 10. Respuesta de un sistema

Un sistema continuo tiene una respuesta ante rampa unitaria:

$$y(t) = -2 + 4t + 2e^{-2t}\cos(t)$$

Obtener la respuesta de ese sistema en el instante t=2 segundos ante la entrada

$$\begin{cases} 0 & 0 < t < 0.5 \\ 3 & 0.5 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 1.5 \\ 0 & t > 1.5 \end{cases}$$

Solución

La entrada es una combinación de escalones retrasados (un escalón de valor 3 retrasado 0.5 menos un escalón de valor 2 retrasado 1 menos un escalón de valor 1 retrasado 1.5). Por lo tanto se necesita obtener la respuesta del sistema ante escalón. La transformada de Laplace de la respuesta ante rampa es:

$$Y_r(s) = \frac{G(s)}{s^2}$$

La transformada de Laplace de la derivada de la respuesta ante rampa es:

$$L\left\{\frac{dy_r}{dt}\right\} = sY_r(s) - y_r(0) = \frac{G(s)}{s} = Y_e(s)$$

ya que $y_r(0)=0$. Es decir, la derivada de la respuesta ante rampa es la respuesta ante escalón:

$$y_e(t) = \frac{dy_r(t)}{dt} = 4 - 4e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-2t}\,\mathrm{sen}(t)$$

La respuesta del sistema ante la entrada pedida será por tanto:

$$y(t) = 3y_e(t-0.5)u_0(t-0.5) - 2y_e(t-1)u_0(t-1) - y_e(t-1.5)u_0(t-1.5)$$

por lo que el valor en el instante t=2 es:

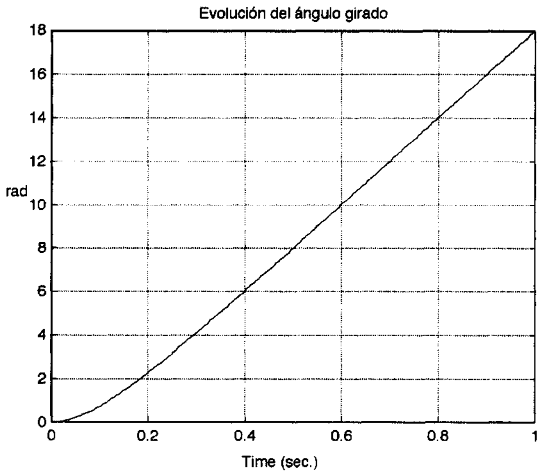
$$\begin{aligned} y(2) = {} & 3\left(4 - 4e^{-2(1.5)}\cos(1.5) - 2e^{-2(1.5)}\,\mathrm{sen}(1.5)\right) - \\ & - 2\left(4 - 4e^{-2}\cos(1) - 2e^{-2}\,\mathrm{sen}(1)\right) - \\ & - \left(4 - 4e^{-2(0.5)}\cos(0.5) - 2e^{-2(0.5)}\,\mathrm{sen}(0.5)\right) = 2.3444 \end{aligned}$$

PROBLEMA 11. Identificación de motor

Se quiere obtener la función de transferencia de un motor. Se sabe que ésta es de la forma:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{K}{s(1+\tau s)}$$

donde θ es el ángulo girado, y u es la tensión aplicada. Se ha aplicado una señal de entrada escalón de valor 5 voltios, midiéndose la evolución del ángulo:



Obtener la función de transferencia del sistema.

Solución

La respuesta del sistema ante una entrada escalón de valor 5 se puede obtener mediante la transformada de Laplace:

$$\theta(s) = G(s)u(s) = \frac{5K}{s^2(1+\tau s)} = \frac{5\frac{K}{\tau}}{s^2(s+\frac{1}{\tau})} \Rightarrow \theta(t) = A + Bt + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtienen los coeficientes A, B y C:

$$\theta(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+\frac{1}{\tau}} = \frac{As(s+\frac{1}{\tau}) + B(s+\frac{1}{\tau}) + Cs^2}{s^2(s+\frac{1}{\tau})} = \frac{5\frac{K}{\tau}}{s^2(s+\frac{1}{\tau})}$$

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 0 \\ \frac{A}{\tau} + B = 0 \\ \frac{B}{\tau} = 5\frac{K}{\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -5K\tau \\ B = 5K \\ C = 5K\tau \end{array}\right.$$

Finalmente queda:

$$\theta(t) = -5K\tau + 5Kt + 5K\tau e^{-\frac{t}{\tau}} = 5K(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Observando la respuesta, cuando t se hace grande la exponencial tiende a cero, quedando únicamente el término 5K(t-τ), es decir, una recta de pendiente 5K. Midiendo la pendiente en la gráfica se obtiene

$$5K = \frac{4}{0.2} = 20 \Rightarrow K = 4$$

Por otra parte la recta 20(t-τ) es igual a la recta 20t retrasada τ segundos, luego τ es el retraso de la recta de la figura respecto de la recta 20t, es decir, τ=0.1 segundos (medidos por ejemplo en θ(t)=16). La función de transferencia es, por tanto:

$$G(s) = \frac{4}{s(1+0.1s)}$$

PROBLEMA 12. Motor de continua

Las ecuaciones de un motor de continua controlado por armadura son:

$$T = K_m \cdot i_a$$
$$\varepsilon = K_b \cdot \omega$$
$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + \varepsilon = u$$
$$J \frac{d\omega}{dt} + b \cdot \omega = T$$

Estando el motor inicialmente en reposo, se le somete a una entrada de la forma:

Se ha medido la distancia angular total recorrida por el eje del motor, que ha sido de 20 rad.

Obtener el valor de p de 2 formas:

a) Despreciando el efecto de la inductancia, y considerando la entrada exacta.
b) Considerando la inductancia, pero aproximando la entrada por un impulso.

Datos: K_m=0.028 Nm/A, K_b=0.0029V/rpm, J=23.5 gcm^2, L_a=1.27mH, R_a=11.4 Ω, b=10^{-6}Nm/rpm.

Solución

En primer lugar se obtiene la función de transferencia del motor de continua tomando transformadas de Laplace y despejando:

$$L_a s i_a(s) + R_a i_a(s) + \varepsilon(s) = u(s) \quad \Rightarrow \quad i_a(s) = \frac{u(s) - K_b s\theta(s)}{L_a s + R_a}$$

$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = T(s) = K_m i_a(s) = K_m \frac{u(s) - K_b s\theta(s)}{L_a s + R_a}$$

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{K_m}{(Js^2 + bs)(L_a s + R_a) + K_m K_b s}$$

a) Si se desprecia el efecto de la inductancia (L_a=0), la función de transferencia queda:

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{u(s)}=\frac{K_m}{s(JR_a s+bR_a+K_mK_b)}=$$
$$=\frac{0.028}{s(2.679\cdot 10^{-5}s+8.8426\cdot 10^{-4})}=\frac{1045}{s(s+33)}$$

La transformada de Laplace de la señal de entrada es:

$$u(s)=\frac{p}{s}-\frac{p}{s}e^{-0.01s}=\frac{p(1-e^{-0.01s})}{s}$$

Como las condiciones iniciales son nulas (el motor parte del reposo), la transformada de Laplace del ángulo de giro es:

$$\theta(s)=G(s)u(s)=\frac{1045}{s(s+33)}\frac{p(1-e^{-0.01s})}{s}$$

El ángulo total recorrido se puede calcular mediante el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\lim_{s\to 0}s\theta(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1045}{(s+33)}\frac{p(1-e^{-0.01s})}{s}=$$
$$=\frac{1045p}{33}\lim_{s\to 0}\frac{0.01e^{-0.01s}}{1}=0.31667p$$

donde se ha aplicado la regla de L'Hopital por ser una indeterminación del tipo 0/0. Como el ángulo total recorrido ha sido de 20 rad, el valor de p_0 es:

$$0.316667p=20\quad\Rightarrow\quad p=63.158\ V$$

b) Si no se desprecia la inductancia la función de transferencia del motor queda:

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{u(s)}=$$
$$=\frac{0.028}{(23.5\cdot 10^{-7}s^2+9.545\cdot 10^{-6}s)(0.00127s+11.4)+7.754\cdot 10^{-4}s}$$

Si la entrada se aproxima por un impulso, el valor de éste será el área bajo la curva, es decir:

$$u(t)\approx 0.01p\delta(t)\quad\Rightarrow\quad u(s)\approx 0.01p$$

Por lo que la transformada de Laplace del ángulo girado será:

$$\theta(s)=G(s)u(s)=$$
$$=\frac{0.028\cdot 0.01p}{(23.5\cdot 10^{-7}s^2+9.545\cdot 10^{-6}s)(0.00127s+11.4)+7.754\cdot 10^{-4}s}$$

Procediendo de la misma forma que en el apartado anterior (utilizando el teorema del valor final) se tiene:

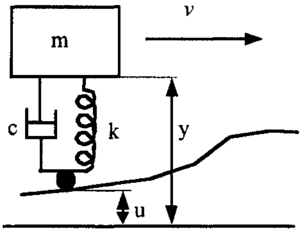
$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \lim_{s\to 0} s\theta(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{0.028\cdot 0.01p}{(23.5\cdot 10^{-7}s + 9.545\cdot 10^{-6})(0.00127s + 11.4) + 7.754\cdot 10^{-4}} =$$

$$= 0.31667p = 20 \quad\Rightarrow\quad p = 63.158\ V$$

PROBLEMA 13. Amortiguador de coche

El dibujo representa el modelo de un amortiguador de automóvil:



Obtener la evolución con el tiempo de la altura de la masa *m* si estando circulando por una superficie horizontal en régimen permanente se encuentra de repente con un bordilllo de altura 0.1 metro.

Datos:
v=20km/h, m=1000 kg, d=10cm, k=40000 N/m, c= 8000 Ns/m, longitud en reposo del muelle l_o=50cm.

Solución

La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$m\ddot{y} = -mg - k(y - u - 0.5) - c(\dot{y} - \dot{u})$$

Suponemos que el coche está circulando en régimen permanente por el suelo (antes del bache). El punto de funcionamiento será por tanto:

$$0 = -mg - k(y_0 - u_0 - 0.5) \quad\Rightarrow\quad y_0 = u_0 + 0.255$$

donde u_0 es la altura del suelo respecto de una réferencia de altitud absoluta. Tomando incrementos (linealizando) se tendría:

$$\Delta\ddot{y} = -\frac{k}{m}(\Delta y - \Delta u) - \frac{c}{m}(\Delta\dot{y} - \Delta\dot{u}) \quad\Rightarrow\quad G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{8s + 40}{s^2 + 8s + 40}$$

El bordillo de 0.1 m de altura representa una señal escalón de valor 0.1, por lo que la transformada de Laplace de la salida es:

$$\Delta y(s) = \frac{8s+40}{s^2+8s+40}\frac{0.1}{s} = \frac{0.8s+4}{s((s+4)^2+4.899^2)}$$

cuya transformada inversa es:

$$\Delta y(t) = A + Be^{-4t}\cos(4.899t) + Ce^{-4t}\,\mathrm{sen}(4.899t)$$

donde tomando transformadas, sumando e igualando numeradores se obtienen las constantes quedando:

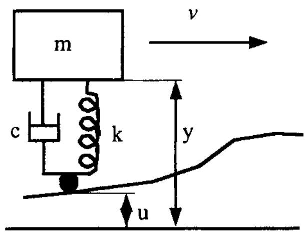
$$\Delta y(t) = 0.1 - 0.1e^{-4t}\cos(4.899t) + 0.08165e^{-4t}\,\mathrm{sen}(4.899t)$$

La evolución de la posición absoluta del coche es:

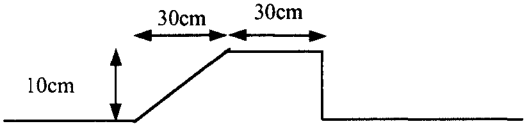
$$y(t) = y_0 + \Delta y(t) = u_0 + 0.255 + \Delta y(t)$$

PROBLEMA 14. Amortiguador de coche II

El dibujo representa el modelo de un amortiguador de automóvil:



a) Obtener la evolución de la altura de la masa *m* si estando circulando por una superficie horizontal en régimen permanente a velocidad de 1 m/s se encuentra de repente con un badén de sección trapezoidal de la forma de la figura:



b) Obtener la longitud mínima y máxima que alcanza el muelle en el caso anterior.
Datos (para los dos apartados):
m=1000 kg, k=40000 N/m, c= 8000 Ns/m , longitud en reposo del muelle l_o=50cm.

Solución

a) La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$m\ddot{y} = -mg - k(y-u-0.5) - c(\dot{y}-\dot{u})$$

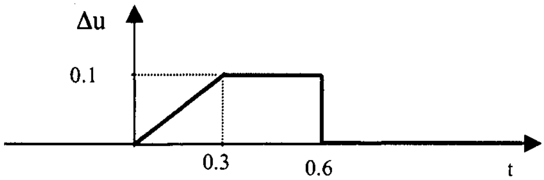
Suponemos que el coche está circulando en régimen permanente por el suelo (antes del bache). El punto de funcionamiento será por tanto:

$$0 = -mg - k(y_0 - u_0 - 0.5) \quad \Rightarrow \quad y_0 = u_0 + 0.255$$

donde u_0 es la altura del suelo respecto de una referencia de altitud absoluta. Tomando incrementos (linealizando) se tendría:

$$\Delta\ddot{y} = -\frac{k}{m}(\Delta y - \Delta u5) - \frac{c}{m}(\Delta\dot{y} - \Delta\dot{u}) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{8s+40}{s^2+8s+40}$$

Como la velocidad horizontal es 1m/s, la forma de la señal de entrada $\Delta u(t)$ es:



Esta señal se puede descomponer en suma de una rampa de pendiente 1/3 menos otra rampa de pendiente 1/3 retrasada 0.3 segundos menos un escalón de valor 0.1 retrasado 0.6 segundos. Su transformada de Laplace será por tanto:

$$\Delta u(s) = \frac{1/3}{s^2} - \frac{1/3}{s^2}e^{-0.3s} - \frac{0.1}{s}e^{-0.6s}$$

La transformada de la evolución de la altura del coche será:

$$\Delta y(s) = G(s)\Delta u(s) = \frac{8s+40}{s^2+8s+40}\left(\frac{1/3}{s^2} - \frac{1/3}{s^2}e^{-0.3s} - \frac{0.1}{s}e^{-0.6s}\right)$$

Para obtener la transformada inversa bastará obtener la respuesta ante rampa y ante escalón, y aplicar los retrasos adecuados. La respuesta ante rampa es:

$$y_r(s) = \frac{8s+40}{s^2((s+4)^2+4.9^2)}$$

$$\Rightarrow \quad y_r(t) = A + Bt + Ce^{-4t}\cos(4.9t) + De^{-4t}\,\mathrm{sen}(4.9t)$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtienen los 4 coeficientes, quedando:

$$y_r(t) = t - 0.2041242e^{-4t}\,\mathrm{sen}(4.9t)$$

La respuesta ante escalón se obtiene sin más que derivar la respuesta ante rampa:

$$y_e(t) = \frac{dy_r(t)}{dt} = 1 + 0.8165e^{-4t}\,\mathrm{sen}(4.9t) - e^{-4t}\cos(4.9t)$$

Por lo que la evolución de la altura del coche es:

$$\Delta y(t) = \frac{1}{3}y_r(t) - \frac{1}{3}y_r(t-0.3)u_0(t-0.3) - 0.1y_e(t-0.6)u_0(t-0.6) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(t - 0.2041242e^{-4t}\operatorname{sen}(4.9t)\right)u_0(t) -$$

$$-\frac{1}{3}\left(t - 0.3 - 0.2041242e^{-4(t-0.3)}\operatorname{sen}(4.9(t-0.3))\right)u_0(t-0.3) -$$

$$-0.1\left(1 + 0.8165e^{-4(t-0.6)}\operatorname{sen}(4.9(t-0.6)) - e^{-4(t-0.6)}\cos(4.9(t-0.6))\right)u_0(t-0.6)$$

La evolución de la posición absoluta sería

$$y(t) = \Delta y(t) + y_0 = \Delta y(t) + u_0 + 0.255$$

b) La evolución con el tiempo de la longitud del muelle es:

$$l(t) = y(t) - u(t) = \Delta y(t) - \Delta u(t) + y_0 - u_0 = \Delta y(t) - \Delta u(t) + 0.255$$

Como la función anterior está definida a intervalos (entre 0 y 0.3, entre 0.3 y 0.6 y desde 0.6 en adelante), los valores máximo y mínimo los tomará en un extremo de un intervalo, ó en medio de un intervalo, en cuyo caso la derivada debe anularse.

La máxima longitud del muelle se dará en el extremo de un intervalo, concretamente en el instante $t=0.6^+$, ya que en ese momento la posición de la rueda cae bruscamente. El valor de esta longitud máxima será:

$$l_{max} = \Delta y(0.6^+) - \Delta u(0.6^+) + 0.255 = 0.255 + 0.1002 = 0.3552\ m$$

La longitud mínima se dará probablemente entre el instante 0 y el instante 0.3 segundos, ya que es en ese momento cuando la masa del coche tiende a comprimir más el muelle. En principio podría ser en el extremo del intervalo (en t=0.3 seg), o en medio del mismo. En el extremo del intervalo se tiene una longitud:

$$l(t=0.3) = \Delta y(0.3) - \Delta u(0.3) + 0.255 = 0.255 - 0.1 + 0.09938 = 0.25438$$

No parece que sea la longitud mínima, pues es casi igual a la longitud en régimen permanente (0.255). Así pues, la longitud mínima se dará entre 0 y 0.3 segundos, por lo que se obtendrá derivando e igualando a cero. En este intervalo la longitud es:

$$l(t) = \Delta y(t) - \Delta u(t) + 0.255 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(t - 0.2041242e^{-4t}\operatorname{sen}(4.899t)\right) - \frac{1}{3}t + 0.255$$

derivando e igualando a cero se tiene:

$$\frac{dl(t)}{dt} = \frac{1}{3}\left(1 + 0.8165e^{-4t}\operatorname{sen}(4.899t) - e^{-4t}\cos(4.899t)\right) - \frac{1}{3} = 0$$

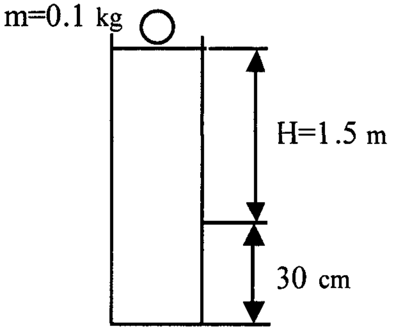
$$t = \frac{1}{4.899}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0.8165}\right) = 0.1809\ seg$$

por lo que la longitud mínima es:

$$l_{min} = l(0.1809) = 0.2294\ m$$

PROBLEMA 15. Viscosímetro de bola

El siguiente dispositivo se utiliza para medir la viscosidad de un fluido:



El tubo vertical está lleno del fluido en cuestión. La bola, de masa m, se deja caer partiendo del reposo. La bola solo está sujeta a la fuerza de gravedad y al rozamiento viscoso del fluido, con coeficiente c.

a) Obtener la expresión de la velocidad de caída de la bola y de la posición de la bola en función del tiempo.

b) El sistema se utiliza para medir el coeficiente c. Para ello se cronometra el tiempo que tarda la bola en recorrer los últimos 30 cm del tubo. Obtener la relación entre ese tiempo y el coeficiente c si la altura H fuera infinita. Si se utiliza esa relación para obtener c a partir del tiempo medido en el sistema con H=1.5, ¿cuál es el valor mínimo de c que podría medirse con un error menor del 1%?.

Solución

a) Las ecuaciones del movimiento son:

$$m\ddot{y} = mg - c\dot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} = g$$

donde y es la distancia de la bola a la superficie del líquido.

Las condiciones iniciales son nulas por partir del reposo con y(0)=0, por lo que tomando transformadas de Laplace se tiene:

$$s^2Y(s)+10csY(s)=\frac{9.8}{s} \quad\Rightarrow\quad Y(s)=\frac{9.8}{s^2(s+10c)}$$

La evolución con el tiempo se obtiene sin más que aplicar la transformada inversa:

$$y(t)=A+Bt+De^{-10ct} \xrightarrow{TL} \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{D}{s+10c}=\frac{9.8}{s^2(s+10c)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{9.8}{100c^2} \\ B=\dfrac{9.8}{10c} \\ D=\dfrac{9.8}{100c^2} \end{cases}$$

Por lo que la evolución de la posición de la bola es:

$$y(t)=\frac{9.8}{10c}t-\frac{9.8}{100c^2}\left(1-e^{-10ct}\right)$$

La velocidad se obtiene sin más que derivar la posición:

$$\dot{y}(t)=\frac{9.8}{10c}\left(1-e^{-10ct}\right)$$

b) Si la altura H fuera infinita la velocidad de la bola en el último tramo sería constante e igual a:

$$\dot{y}(\infty)=\frac{9.8}{10c}$$

Si el tiempo que tarda la bola en recorrer esos últimos 30 cm es T, se cumplirá que:

$$\dot{y}(\infty)=\frac{0.3}{T}=\frac{9.8}{10c} \quad\Rightarrow\quad c=\frac{9.8}{3}T$$

Si la altura del sistema real es H=1.5m, la velocidad de la bola cuando entra en el último tramo es menor que la velocidad límite anterior. Si se utiliza la expresión anterior para calcular c se cometerá un error que depende de la diferencia entre la velocidad límite y la que realmente tiene la bola. Para que el error sea menor del 1%, la velocidad real de la bola en el último tramo debe tener un error menor del 1% respecto de la velocidad límite. Si se define t_1 como el instante en el que la bola entra en el último tramo se tiene que:

$$y(t_1)=\frac{9.8}{10c}t_1-\frac{9.8}{100c^2}\left(1-e^{-10ct_1}\right)=1.5$$

Para que el error sea menor del 1%:

$$\dot{y}(t_1) = \frac{9.8}{10c}\left(1 - e^{-10ct_1}\right) = 0.99\frac{9.8}{10c} \quad \Rightarrow \quad e^{-10ct_1} = 0.01$$

En las dos ecuaciones anteriores se tienen 2 incógnitas. Sustituyendo la segunda en la primera se obtiene:

$$y(t_1) = \frac{9.8}{10c}t_1 - \frac{9.8}{100c^2}0.99 = 1.5 \quad \Rightarrow t_1 = \frac{15c}{9.8} + \frac{0.99}{10c}$$

De la segunda ecuación se obtiene:

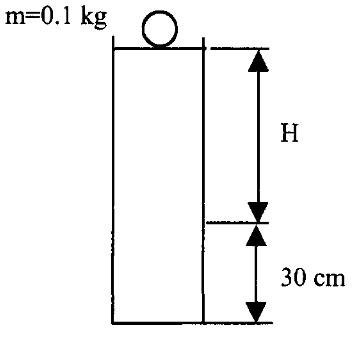
$$e^{-10ct_1} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{-\ln(0.01)}{10t_1} = \frac{0.46}{t_1} = \frac{0.46}{\dfrac{15c}{9.8} + \dfrac{0.99}{10c}}$$

de donde se despeja el valor mínimo de c:

$$\frac{15c^2}{9.8} + \frac{0.99}{10} = 0.46 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{(0.46 - 0.099)\frac{9.8}{15}} = 0.486 \quad Ns/m$$

PROBLEMA 16. Viscosímetro de caída de bola II

El siguiente dispositivo se utiliza para medir la viscosidad de un fluido:



El tubo vertical está lleno del fluido en cuestión. La bola, de masa m, se deja caer partiendo del reposo, existiendo un sistema que mide el tiempo T que tarda la bola en recorrer los últimos 30 cm del tubo. La bola solo está sujeta a la fuerza de gravedad y al rozamiento viscoso del fluido, con coeficiente c. El objetivo del sistema es obtener el valor del coeficiente c, que está relacionado con la viscosidad.

a) Si se quiere que exista una relación aproximada de la forma: $c=k*T$ calcular el valor mínimo que debe tener H para que esta expresión aproximada tenga un error menor del 1%, sabiendo que $c>0.5$ Ns/m. Obtener el valor de esa constante k. Sugerencia: definir H para que la velocidad de la masa m en el tramo de medida sea casi constante.

b) Obtener el valor de c que predeciría el sistema (con la relación aproximada $c=k*T$) para un fluido con un valor real de $c=0.7\ Nm/s$. Para ello calcular el valor exacto de T y aplicar la relación anterior.

Solución

a) Tal y como se obtuvo en el ejercicio anterior, la evolución de la posición de la bola es:

$$y(t) = \frac{9.8}{10c}t - \frac{9.8}{100c^2}\left(1 - e^{-10ct}\right)$$

y su velocidad:

$$\dot{y}(t) = \frac{9.8}{10c}\left(1 - e^{-10ct}\right)$$

Si la altura H fuera infinita la velocidad de la bola en el último tramo sería constante e igual a:

$$\dot{y}(\infty) = \frac{9.8}{10c}$$

Si el tiempo que tarda la bola en recorrer esos últimos 30 cm es T, se cumplirá que:

$$\dot{y}(\infty) = \frac{0.3}{T} = \frac{9.8}{10c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{9.8}{3}T$$

por lo que la constante pedida es $k=9.8/3$.

Si la altura es finita la velocidad de la bola en el último tramo será algo menor que la velocidad límite. Si se quiere que el error sea menor del 1%, esta velocidad debe ser mayor del 99% de la velocidad final, es decir:

$$\dot{y}(t_1) = \frac{9.8}{10c}\left(1 - e^{-10ct_1}\right) = 0.99\frac{9.8}{10c} \quad \Rightarrow \quad e^{-10ct_1} = 0.01$$

donde t_1 es el tiempo que tarda en recorrer la altura H.

Por otra parte se tiene que:

$$y(t_1) = \frac{9.8}{10c}t_1 - \frac{9.8}{100c^2}\left(1 - e^{-10ct_1}\right) = H$$

En las dos ecuaciones anteriores se tienen 2 incógnitas, ya que se tomará el valor frontera $c= 0.5$ para el que el sistema de medición debe tener un error menor del 1%.

De la primera ecuación se obtiene el tiempo:

$$t_1 = \frac{\ln(0.01)}{-10c} = 0.921\ seg$$

De la segunda ecuación se obtiene la altura:

$$H = y(t_1) = \frac{9.8}{10 \cdot 0.5} 0.921 - \frac{9.8}{100 \cdot 0.5^2}\left(1 - e^{-10 \cdot 0.5 \cdot 0.921}\right) = 1.417\ m$$

b) Si c=0.7, la ecuación de la evolución de la altura con el tiempo es:

$$y(t) = \frac{9.8}{7} t - \frac{9.8}{49}\left(1 - e^{-7t}\right)$$

Si se llama t_1 al tiempo que tarda en llegar al inicio del tramo de medición, y T el tiempo que tarda en recorrer ese tramo de 0.3 m, se tiene:

$$y(t_1) = \frac{9.8}{7} t_1 - \frac{9.8}{49}\left(1 - e^{-7t_1}\right) = 1.417$$

de donde se obtiene t_1. Para ello se tantea, sabiendo que será algo mayor que 0.921 seg. Para t_1=1, la parte izquierda de la ecuación da 1.2. Para t_1=1.2, se tiene 1.48. Para t_1=1.15 se tiene 1.4101. Para t_1=1.155 se tiene 1.417, luego t_1=1.155 seg. Por otra parte se tiene:

$$y(t_1 + T) = \frac{9.8}{7}(t_1 + T) - \frac{9.8}{49}\left(1 - e^{-7(t_1+T)}\right) = 1.717$$

de donde se obtiene T. Para el tanteo se sabe que el tiempo es cercano a 3c/9.8=0.2143. De hecho, sustituyendo este valor se tiene que la parte izquierda de la ecuación da 1.717, por lo que la solución aproximada es T=0.2143 (el error es éfectivamente mucho menor del 1%, puesto que el tiempo aproximado y el exacto coinciden hasta la cuarta cifra significativa.

PROBLEMA 17. Objeto en cazuela

Se dispone de una cazuela llena de agua y colocada sobre un quemador. En este quemador se puede controlar el flujo de calor suministrado a la cazuela, q. Estando el sistema en régimen permanente con un calor constante q_0=500W, se introduce en el agua un objeto a temperatura ambiente, quedando sumergido en el agua sin contacto con la cazuela ni con el aire. Al mismo tiempo se corta (se pone a cero) el calor del quemador. Obtener la evolución con el tiempo de la temperatura del objeto, calculando el valor máximo que alcanza.

Datos: Temperatura exterior=25°C.

	Masa (kg)	Calor específico (J/kg/°C
Cazuela	0.6	8000
Agua	1 kg	4180
Objeto	0.5 kg	6000

	Coeficientes de transmisión (W/°C)
Cazuela-exterior	4
Cazuela-agua	20
Agua-exterior	5
Agua-objeto	15

Solución

Antes de introducir el objeto solo hay dos masas que almacenan calor, por lo que las ecuaciones térmicas del sistema son:

$$m_c c_c \dot{T}_c = q - \mu_{ca}(T_c - T_a) - \mu_{ce}(T_c - T_{ex})$$

$$m_a c_a \dot{T}_a = \mu_{ca}(T_c - T_a) - \mu_{ae}(T_a - T_{ex})$$

Si está en régimen permanente con q_0=500, las temperaturas serán:

$$0 = q_0 - \mu_{ca}(T_{c0} - T_{a0}) - \mu_{ce}(T_{c0} - T_{ex})$$

$$0 = \mu_{ca}(T_{c0} - T_{a0}) - \mu_{ae}(T_{a0} - T_{ex})$$

de donde se obtiene:

$$T_{a0} = 75\,°C$$

$$T_{c0} = 87.5\,°C$$

Estas serán las condiciones iniciales cuando se introduzca el objeto. La otra condición inicial será la temperatura del objeto, que es $T_o(0)$=25°C.

Una vez se ha introducido el objeto hay 3 masas que almacenan calor, por lo que las ecuaciones son ahora:

$$m_c c_c \dot{T}_c = q - \mu_{ca}(T_c - T_a) - \mu_{ce}(T_c - T_{ex})$$

$$m_a c_a \dot{T}_a = \mu_{ca}(T_c - T_a) - \mu_{ae}(T_a - T_{ex}) - \mu_{ao}(T_a - T_o)$$

$$m_o c_o \dot{T}_a = \mu_{ao}(T_a - T_o)$$

Para obtener la evolución con el tiempo de la temperatura T_o basta con tomar transformadas de Laplace teniendo en cuenta las condiciones iniciales, y teniendo en cuenta que q=0 (se apaga el quemador):

$$4800sT_c(s) - 4800 \cdot 87.5 = -20(T_c(s) - T_a(s)) - 4\left(T_c(s) - \frac{25}{s}\right)$$

$$4180sT_a(s) - 4180\cdot 75 =$$

$$= 20(T_c(s) - T_a(s)) - 5\left(T_a(s) - \frac{25}{s}\right) - 15(T_a(s) - T_o(s))$$

$$3000sT_o(s) - 3000\cdot 25 = 15(T_a(s) - T_o(s))$$

despejando de las ecuaciones anteriores se obtiene la transformada de Laplace de la temperatura del objeto:

$$T_o(\mathrm{s}) = \frac{25s^3 + 0.7392344s^2 + 4.81559\cdot 10^{-3}s + 1.246013\cdot 10^{-6}}{s(s^3 + 1.956938\cdot 10^{-2}s^2 + 8.281499\cdot 10^{-5}s + 4.984051\cdot 10^{-8})}$$

cuya transformada inversa es:

$$T_o(\mathrm{s}) = \frac{25s^3 + 0.7392344s^2 + 4.81559\cdot 10^{-3}s + 1.246013\cdot 10^{-6}}{s(s + 7.197372\cdot 10^{-4})(s + 0.005)(s + 1.384964\cdot 10^{-2})}$$

$$T_o(t) = A + Be^{-7.1974\cdot 10^{-4}t} + Ce^{-0.005t} + De^{-1.385\cdot 10^{-2}t}$$

donde tomando transformadas, sumando e igualando numeradores se obtienen las constantes quedando finalmente:

$$T_o(t) = 25 + 45.646e^{-7.1974\cdot 10^{-4}t} - 39.474e^{-0.005t} - 6.172e^{-1.385\cdot 10^{-2}t}$$

La temperatura máxima se obtiene derivando e igualando a cero.

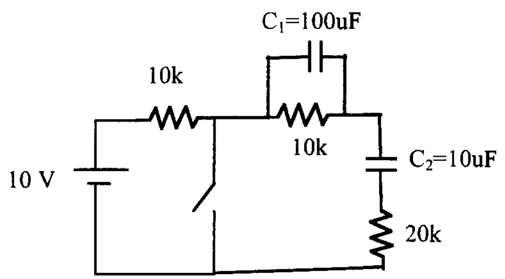
$$\frac{dT_o(t)}{dt} = -0.03285e^{-7.1974\cdot 10^{-4}t} + 0.197374e^{-0.005t} + 0.08548e^{-1.385\cdot 10^{-2}t} = 0$$

de donde se obtiene t=422.5, y la temperatura máxima:

$$T_{o,max} = T_o(422.5) = 53.88°C$$

PROBLEMA 18. Transitorio eléctrico

Se supone que el circuito de la figura se encuentra en equilibrio (en régimen permanente) con el interruptor abierto. En un momento dado se cierra el interruptor. Obtener la evolución con el tiempo de la tensión en los condensadores a partir de ese momento.



Solución

En régimen permanente los condensadores son circuitos abiertos, puesto que:

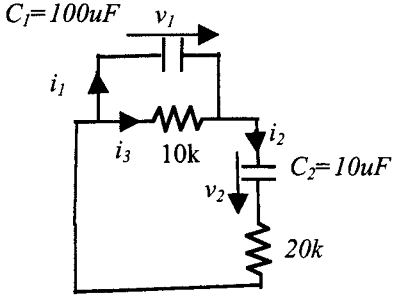
$$i_C = C\dot{v}_c = 0 \quad \text{en régimen permanente}$$

Debido a esto las tensiones en los condensadores en el momento en que se cierra el interruptor (condiciones iniciales) serán:

$$v_1(0) = 10k \cdot i_2(0) = 0$$

$$v_2(0) = 10 - 10k \cdot i_2(0) = 10\ V$$

Al cerrar el interruptor el circuito pasa a ser:



Aplicando las leyes de Kirchoff se tiene:

$$0 = v_1 + v_2 + 20000 i_2 = v_1 + v_2 + 20000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \dot{v}_2 = v_1 + v_2 + 0.2\dot{v}_2$$

$$\dot{v}_2 = -5v_1 - 5v_2 \qquad (I)$$

Por otra parte se tiene que:

$$v_1 = 10000 i_3 = 10000(i_2 - i_1) = 10000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \dot{v}_2 - 10000 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \dot{v}_1$$

$$\dot{v}_1 = -v_1 + 0.1\dot{v}_2 = -1.5v_1 - 0.5v_2 \qquad (II)$$

Tomando transformadas de Laplace en las ecuaciones (I) y (II), teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene:

$$sv_2(s) - v_2(0) = -5v_1(s) - 5v_2(s) \qquad (I)$$

$$sv_1(s) - v_1(0) = -1.5v_1(s) - 0.5v_2(s) \qquad (II)$$

de donde se despejan $v_1(s)$ y $v_2(s)$:

$$v_1(s) = \frac{-5}{s^2 + 6.5s + 5} = \frac{-5}{(s + 5.608)(s + 0.8915)}$$

$$v_2(s) = \frac{10s + 15}{s^2 + 6.5s + 5} = \frac{10s + 15}{(s + 5.608)(s + 0.8915)}$$

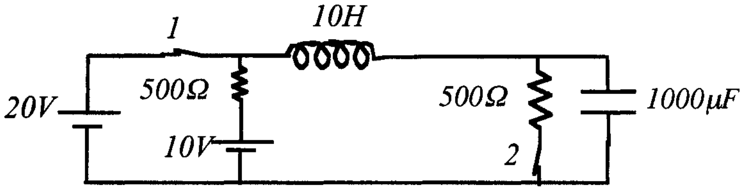
La respuesta es la transformada inversa:

$$v_1(t) = -1.06e^{-0.8915t} + 1.06e^{-5.608t}$$

$$v_2(t) = 1.29e^{-0.8915t} + 8.71e^{-5.608t}$$

PROBLEMA 19. Transitorio eléctrico II

Estando el circuito de la figura en régimen permanente (con los dos interruptores cerrados) se abre el interruptor 1. Al cabo de 0.1 segundos se abre el interruptor 2. Calcular la evolución con el tiempo de la tensión del condensador.



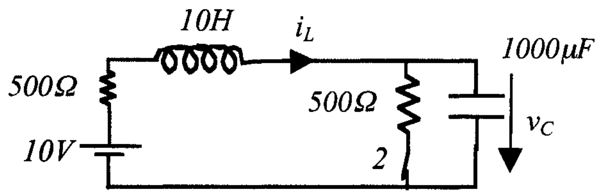
Solución

En régimen permanente con los interruptores cerrados se tiene que la bobina es un cortocircuito y el condensador un circuito abierto, por lo que

$$v_C(0) = 20\ V$$

$$i_L(0) = 20/500 = 0.04\ A$$

Si se abre el interruptor 1 el circuito queda:



Las ecuaciones diferenciales del sistema son:

$$10 = 500i_L + 10\frac{di_L}{dt} + v_C$$

$$i_L = \frac{v_C}{500} + 0.001\frac{dv_C}{dt}$$

Tomando transformadas de Laplace teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene:

$$\frac{10}{s} = 500I_L + 10sI_L - 10i_L(0) + V_C$$

$$I_L = \frac{V_C}{500} + 0.001sV_C - 0.001v_C(0)$$

Despejando V_C se obtiene:

$$V_C = \frac{20s^2 + 1040s + 1000}{s(s^2 + 52s + 200)} = \frac{20s^2 + 1040s + 1000}{s(s + 47.8174)(s + 4.1826)}$$

Cuya transformada inversa es:

$$v_C(t) = A + Be^{-47.8174t} + Ce^{-4.1826t}$$

donde tomando transformadas e igualando se obtiene

A=5

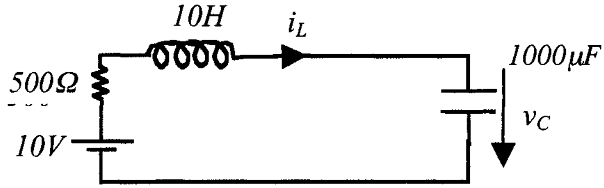
B=-1.4378

C=16.4378

Luego entre 0 y 0.1 la tensión del condensador es:

$$v_C(t) = 5 - 1.4378e^{-47.8174t} + 16.4378e^{-4.1826t}$$

Si en t=0.1 se abre el interruptor 2, el circuito queda:



por lo que la ecuación diferencial es:

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 500i_L + 10\dfrac{di_L}{dt} + v_C \\ i_L = 0.001\dfrac{dv_C}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 10 = 0.5\dot{v}_C + 0.01\ddot{v}_C + v_C$$

Para obtener la evolución se toman transformadas de Laplace teniendo en cuenta las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales son la corriente en la bobina y la tensión en el condensador en t=0.1⁺, que coinciden con los valores en t=0.1⁻. Definiendo un nuevo origen de tiempos t'=t-0.1 y tomando transformadas quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{s} = 500I_L + 10sI_L - 10i_L(0^+) + V_C \\ I_L = 0.001sV_C - 0.001v_C(0^+) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{v_C(0^+)s^2 + (1000i_L(0^+) + 50v_C(0^+))s + 1000}{s(s^2 + 50s + 100)}$$

Las condiciones iniciales se obtienen a partir de la tensión del condensador en el instante t=0.1⁻ en el circuito antes de abrir el segundo interruptor:

$$v_C(t' = 0^+) = v_C(t = 0.1^+) = v_C(t = 0.1^-) =$$
$$= 5 - 1.4378e^{-4.78174} + 16.4378e^{-0.41826} = 15.807$$

$$i_L(t' = 0^+) = i_L(t = 0.1^+) = i_L(t = 0.1^-) = \frac{v_C(t = 0.1^-)}{500} + 0.001\dot{v}_C(t = 0.1^-)$$

donde

$$\dot{v}_C(t = 0.1^-) = 68.752e^{-4.78174} - 68.752e^{-0.41826} = -44.676$$

por lo que

$$i_L(t' = 0^+) = \frac{15.807}{500} + 0.001(-44.676) = -0.01306 \quad A$$

por lo que:

$$V_C(s) = \frac{15.807s^2 + 777.3s + 1000}{s(s^2 + 50s + 100)}$$

Se podría resolver el problema también a partir de la ecuación diferencial de orden 2 de la tensión del condensador. En ese caso las condiciones iniciales serán la tensión en el condensador y su derivada en t=0.1⁺. La tensión coincide con el valor en t=0.1⁻, pero la derivada no. Para obtener el valor hay que tener en cuenta que $i_L(0.1^+)$= $i_L(0.1^-)$, por lo que teniendo en cuenta la ecuación del circuito después de abrir el interruptor:

$$0.001\dot{v}_C(t = 0.1^+) = i_L(t = 0.1^+) = i_L(t = 0.1^-) =$$
$$= \frac{v_C(t = 0.1^-)}{500} + 0.001\dot{v}_C(t = 0.1^-)$$

de donde se obtiene:

$$\dot{v}_C(t = 0.1^+) = \frac{-0.01306}{0.001} = -13.06$$

Tomando transformadas de la ecuación diferencial de orden 2 se tiene:

$$\frac{10}{s} = 0.5sV_C - 0.5v_C(0^+) + 0.01s^2V_C - 0.01sv_C(0^+) - 0.01\dot{v}_C(0^+) + V_C$$

$$V_C = \frac{15.807s^2 + 777.3s + 1000}{s(s^2 + 50s + 100)} = \frac{15.807s^2 + 777.3s + 1000}{s(s + 47.9129)(s + 2.0871)}$$

cuya transformada inversa es:

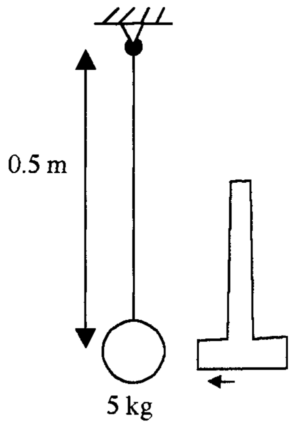
$$v_C(t') = 10 + 5.7867e^{-2.0871t'} + 0.0203e^{-47.9129t'}$$

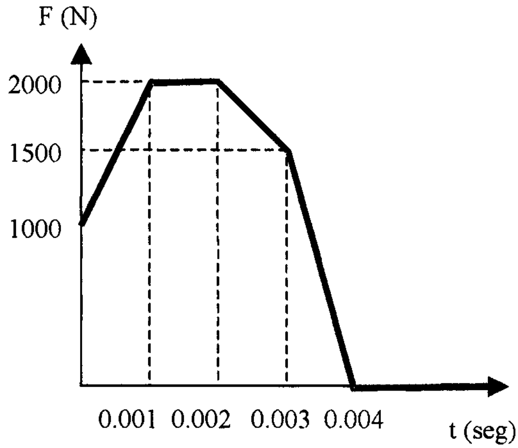
Por lo que el resultado final se puede expresar como:

$$v_C(t) = \begin{cases} 5 - 1.4378e^{-47.8174t} + 16.4378e^{-4.1826t} & 0 < t < 0.1 \\ 10 + 5.7867e^{-2.0871(t-0.1)} + 0.0203e^{-47.9129(t-01)} & t > 0.1 \end{cases}$$

PROBLEMA 20. Impacto en péndulo

Se golpea el péndulo de la figura con un martillo en dirección horizontal, de forma que la fuerza ejercida por el martillo sobre el péndulo es la descrita por la gráfica. Si el péndulo parte del reposo, y la bola sufre una fuerza de rozamiento viscoso con el aire de coeficiente $c=1$ Ns/m, obtener de forma aproximada el ángulo máximo de oscilación que alcanza, y el tiempo que tarda en volver a pasar por la posición vertical. Hacer las suposiciones que se consideren oportunas.





Solución

Si se define como entrada al sistema la fuerza horizontal que ejerce el martillo sobre la bola, la ecuación diferencial del movimiento de rotación del péndulo es:

$$I\ddot{\theta} = mL^2\ddot{\theta} = FL\cos(\theta) - mgLsen(\theta) - c(\dot{\theta}L)L$$

donde q es el ángulo respecto de la vertical. Sustituyendo valores se obtiene:

$$\ddot{\theta} = 0.4F\cos(\theta) - 19.6sen(\theta) - 0.2\dot{\theta}$$

Para obtener la evolución temporal de forma aproximada se linealiza la ecuación diferencial alrededor del punto de funcionamiento $\theta_0=0$, $F_0=0$:

$$\Delta\ddot{\theta} = 0.4\Delta F - (0.4F_0 sen(\theta_0) + 19.6\cos(\theta_0))\Delta\theta - 0.2\Delta\dot{\theta} =$$
$$= 0.4\Delta F - 19.6\Delta\theta - 0.2\Delta\dot{\theta}$$

La función de transferencia es:

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta F(s)} = \frac{0.4}{s^2 + 0.2s + 19.6}$$

Como la fuerza F actúa durante un tiempo muy corto (4 ms), siendo nula después, se puede aproximar por una señal impulso de valor igual al área encerrada bajo la curva F(t). Esta área es:

$$F(t) \approx [0.001 \cdot 1500 + 0.001 \cdot 2000 + 0.001 \cdot 1750 + 0.001 \cdot 750]\delta(t) = 6\delta(t)$$

con lo que la transformada de Laplace de la respuesta aproximada es:

$$\Delta\theta(s) \approx \frac{0.4}{s^2 + 0.2s + 19.6}\Delta F(s) = \frac{2.4}{s^2 + 0.2s + 19.6} = \frac{2.4}{((s+0.1)^2 + 4.426^2}$$

ya que las condiciones iniciales son nulas. La transformada inversa da la evolución con el tiempo:

$$\theta(t) = \Delta\theta(t) = \frac{2.4}{4.426}e^{-0.1t}sen(4.426t)$$

El ángulo máximo que alcanzará se obtendrá derivando e igualando a cero:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = 2.4e^{-0.1t}\cos(4.426t) - \frac{0.24}{4.426}e^{-0.1t}sen(4.426t) = 0$$

cuya solución es:

$$t = 0.3498 + \frac{k\pi}{4.426} \quad , k \quad entero$$

El ángulo máximo se tendrá en el primer máximo de la función, es decir, para k=0 → t=0.3498 seg:

$$\theta_{\max} = \theta(0.3498) = 0.5235\, rad$$

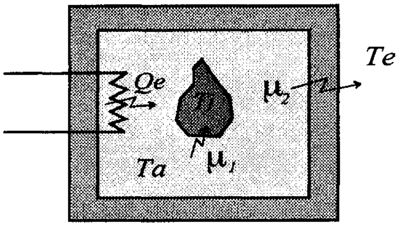
El tiempo que tardará en volver a pasar por la posición θ=0 se obtiene sin más que igualar:

$$\theta(t) = \frac{2.4}{4.426}e^{-0.1t}sen(4.426t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{k\pi}{4.426}$$

El primer paso se tendrá para k=1, por lo que t=0.7098 seg.

PROBLEMA 21. Temperatura de jamón

Obtener la temperatura del jamón en el instante t=2000 seg, si partiendo de temperatura ambiente se le da un calor de entrada de 5000 W durante 1000 segundos, pasando después a cero.



Datos: T_e=25°C, μ_1=100 W/°C, μ_2=20 W/°C, c_a=4000 J/kg°C , c_j=6000 J/kg°C , m_a=20 kg , m_j=5 kg

Solución

Las ecuaciones de transmisión de calor son:

$$m_j c_j \frac{dT_j}{dt} = \mu_1 (T_a - T_j)$$

$$m_a c_a \frac{dT_a}{dt} = Q_e - \mu_1 (T_a - T_j) - \mu_2 (T_a - T_e)$$

Como T_e es constante, se toman incrementos ($\Delta T_j = T_j - T_e$, $\Delta T_a = T_a - T_e$), y se obtiene un sistema lineal. Esto es equivalente a linealizar el sistema alrededor del punto de funcionamiento $Q_{e0}=0$, $T_{a0}=T_{j0}=25°C$. El resultado es:

$$m_j c_j \frac{d\Delta T_j}{dt} = \mu_1 (\Delta T_a - \Delta T_j)$$

$$m_a c_a \frac{d\Delta T_a}{dt} = Q_e - \mu_1 (\Delta T_a - \Delta T_j) - \mu_2 \Delta T_a$$

donde se ha puesto Q_e por ser $Q_e = \Delta Q_e$, al ser $Q_{e0}=0$.

Tomando transformadas de Laplace se tiene:

$$m_j c_j s \Delta T_j(s) = \mu_1 \Delta T_a(s) - \mu_1 \Delta T_j(s)$$

$$m_a c_a s \Delta T_a(s) = Q_e(s) - (\mu_1 + \mu_2) \Delta T_a(s) + \mu_1 \Delta T_j(s)$$

ya que las condiciones iniciales de las variables incrementales son nulas. Despejando de las ecuaciones se obtiene la función de transferencia entre Q_e y ΔT_j.

$$G(s)=\frac{\Delta T_j(s)}{Q_e(s)}=\frac{1}{\dfrac{m_a c_a m_j c_j}{\mu_1}s^2+\left[m_a c_a+\dfrac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1}m_j c_j\right]s+\mu_2}$$

que, sustituyendo valores queda:

$$\frac{\Delta T_j(s)}{Q_e(s)}=\frac{1}{24\cdot 10^6 s^2+116000s+20}=\frac{4.167\cdot 10^{-8}}{s^2+4.833\cdot 10^{-3}s+8.333\cdot 10^{-7}}=$$

$$=\frac{4.167\cdot 10^{-8}}{(s+4.654\cdot 10^{-3})(s+1.7905\cdot 10^{-4})}$$

La entrada es una suma de dos escalones retrasados:

$$Q_e(t)=5000(u_0(t)-u_0(t-1000))\ \Rightarrow\ Q_e(s)=5000\frac{1-e^{-1000s}}{s}$$

La transformada de Laplace del incremento de temperatura será:

$$\Delta T_j(s)=G(s)Q_e(s)=\frac{2.0835\cdot 10^{-4}}{(s+4.654\cdot 10^{-3})(s+1.7905\cdot 10^{-4})}\frac{(1-e^{-1000s})}{s}$$

Para calcular la transformada inversa se obtiene en primer lugar la de la función:

$$Y_1(s)=\frac{2.0835\cdot 10^{-4}}{s(s+4.654\cdot 10^{-3})(s+1.7905\cdot 10^{-4})}=$$

$$=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+4.654\cdot 10^{-3}}+\frac{c}{s+1.7905\cdot 10^{-4}}$$

Sumando e igualando los numeradores se obtiene a=250, b=10, c=-260 con lo que la transformada inversa es:

$$y_1(t)=\left(250+10e^{-4.654\cdot 10^{-3}t}-260e^{-1.7905\cdot 10^{-4}t}\right)u_0(t)$$

Aplicando superposición el incremento de temperatura pedido será:

$$\Delta T_j(t)=y_1(t)-y_1(t-1000)=$$

$$=\left(250+10e^{-4.654\cdot 10^{-3}t}-260e^{-1.7905\cdot 10^{-4}t}\right)u_0(t)-$$

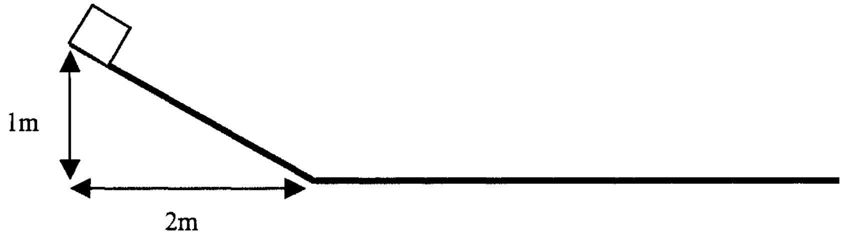
$$-\left(250+10e^{-4.654\cdot 10^{-3}(t-1000)}-260e^{-1.7905\cdot 10^{-4}(t-1000)}\right)u_0(t-1000)$$

Sustituyendo en el instante t=2000 se obtiene $\Delta T_j(2000)$=35.54°C, por lo que la temperatura absoluta será:

$$T_j(2000)=T_e+\Delta T_j(2000)=60.54\,°C$$

PROBLEMA 22. Caída por rampa

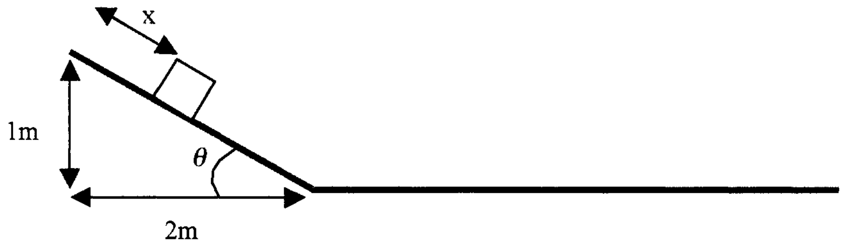
El cuerpo de la figura, de masa 10 kg, puede deslizar sobre la superficie estando sometido a una fuerza de rozamiento viscosa de coeficiente $c=10Ns/m$. Estando en reposo se deja caer por la rampa de la figura. Obtener la distancia total que recorre en la zona llana.



Solución

La ecuación del movimiento es diferente según se encuentre la masa en el plano inclinado, o en la superficie horizontal. Debido a esto se resolverá en primer lugar el movimiento por la rampa, obteniendo la velocidad al final de la misma. Ésta será la condición inicial para el movimiento horizontal, que permitirá resolver fácilmente el problema.

En primer lugar se plantea la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la masa por el plano inclinado. Para ello se definen las siguientes variables:



$$m\ddot{x} = mg\,\mathrm{sen}(\theta) - c\dot{x} = mg\frac{1}{\sqrt{5}} - c\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dot{x} = \frac{9.8}{\sqrt{5}}$$

Tomando transformadas de Laplace y teniendo en cuenta que se suelta partiendo del reposo se tiene:

$$s^2X(s) - sx(0^+) - \dot{x}(0^+) + sX(s) - x(0^+) = s(s+1)X(s) = \frac{9.8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{\frac{9.8}{\sqrt{5}}}{s^2(s+1)} \quad \Rightarrow \quad x(t) = A + Bt + Ce^{-t}$$

Tomando transformadas de Laplace, sumando e igualando los numeradores se obtienen los coeficientes A,B y C:

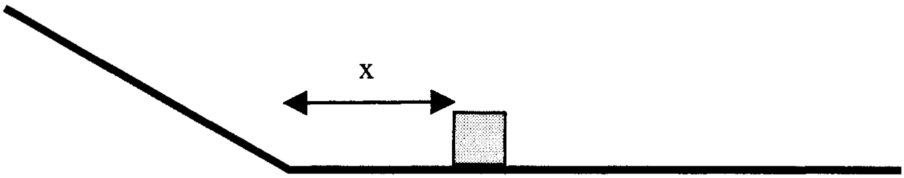
$$x(t) = \frac{9.8}{\sqrt{5}}\left(-1 + t + e^{-t}\right)$$

La rampa inclinada tiene una longitud de $\sqrt{5}$ *metros. Por otra parte interesa conocer la velocidad en el punto final de la rampa, puesto que será la condición inicial para la ecuación del movimiento en el plano horizontal. El tiempo que tarda en alcanzar el final de la rampa es:*

$$x(t_1) = \sqrt{5} = \frac{9.8}{\sqrt{5}}\left(-1 + t_1 + e^{-t_1}\right) \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1.213\ seg$$

$$\dot{x}(t_1) = \frac{9.8}{\sqrt{5}}\left(1 - e^{-t_1}\right) = 3.08\ m/s$$

Para el movimiento en el plano horizontal se define la variable:



La ecuación diferencial es ahora:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Tomando transformadas de Laplace y teniendo en cuenta la condición inicial de la velocidad se obtiene la transformada de Laplace del desplazamiento horizontal:

$$s^2X(s) - sx(0^+) - \dot{x}(0^+) + sX(s) - x(0^+) = s(s+1)X(s) - 3.08 = 0$$

$$X(s) = \frac{3.08}{s(s+1)}$$

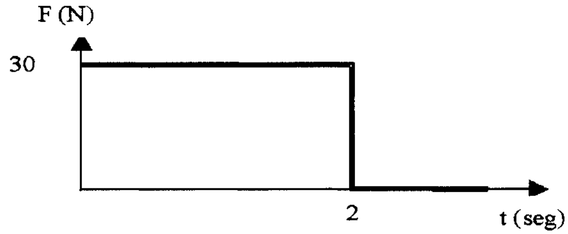
Como se pide la distancia total recorrida, ésta se puede obtener mediante el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3.08}{s+1} = 3.08 \quad m$$

Índice

PROBLEMA 23. Lanzamiento de balón

Se lanza un balón de 0.25 kg en sentido vertical hacia arriba empujándolo con la fuerza de la gráfica. Si el balón parte del reposo, y la fuerza de rozamiento viscoso con el aire tiene un coeficiente *c=0.25 Ns/m* obtener la altura máxima que alcanza tras el primer rebote con el suelo si se supone un coeficiente de restitución 1 en dicho rebote. Hacer las suposiciones que se consideren oportunas.



Solución

Llamando y a la altura del balón respecto del suelo, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$m\ddot{y} = -mg - c\dot{y} + F(t)$$

donde F es la fuerza que empuja el balón hacia arriba. Sustituyendo valores se obtiene:

$$\ddot{y} = -g - \dot{y} + 4F(t)$$

Tomando transformadas de Laplace y teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son nulas se obtiene la transformada de la evolución de la altura:

$$s^2Y(s) = -\frac{g}{s} - sY(s) + 4F(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{-g}{s^2(s+1)} + \frac{4F(s)}{s(s+1)}$$

La transformada de Laplace de la fuerza es una suma de dos escalones retrasados, por lo que la transformada de Laplace de la altura es:

$$Y(s) = \frac{-g}{s^2(s+1)} + \frac{120}{s^2(s+1)}(1 - e^{-2s})$$

Para obtener la transformada inversa se calcula en primer lugar la de la función:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} = \frac{as(s+1) + b(s+1) + cs^2}{s^2(s+1)}$$

Igualando los numeradores y despejando se obtiene: a=-1, b=1, c=1, es decir:

$$y_1(t) = -1 + t + e^{-t}$$

Aplicando superposición se obtiene la salida:

$$y(t) = 110.2\left(-1 + t + e^{-t}\right)u_0(t) - 120\left(-1 + (t-2) + e^{-(t-2)}\right)u_0(t-2)$$

Igualando a cero se obtiene el tiempo que tarda el balón en llegar al suelo. Este tiempo servirá para calcular la velocidad con que llega al suelo:

$$y(t) = 110.2\left(-1 + t + e^{-t}\right)u_0(t) - 120\left(-1 + (t-2) + e^{-(t-2)}\right)u_0(t-2) = 0$$

Agrupando términos se obtiene:

$$0 = 249.8 - 9.8t - 776.49e^{-t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 25.4 \quad seg$$

La velocidad en ese instante vale:

$$\dot{y}(t) = 110.2\left(1 - e^{-t}\right)u_0(t) - 120\left(1 - e^{-(t-2)}\right)u_0(t-2) = -9.8 \quad m/s$$

Como el rebote tiene coeficiente de restitución 1, la velocidad con que sale rebotado hacia arriba es la misma, por lo que la condición inicial para la segunda parte del movimiento es

$$\dot{y}(0) = 9.8\ m/s$$

Tras el rebote la ecuación diferencial es la misma, solo que la fuerza con que se empuja es nula:

$$\ddot{y} = -g - \dot{y}$$

Tomando transformadas de Laplace y teniendo en cuenta la condición inicial de velocidad se tiene:

$$s^2Y(s) - \dot{y}(0) = -\frac{g}{s} - sY(s)$$

$$Y(s) = \frac{-g}{s^2(s+1)} + \frac{\dot{y}(0)}{s(s+1)} = \frac{-9.8}{s^2(s+1)} + \frac{9.8}{s(s+1)}$$

Para obtener la transformada inversa necesitamos obtener la del término:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + bs}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad y_2(t) = 1 - e^{-t}$$

La evolución de la altura tras el rebote será por tanto:

$$y(t) = -9.8(-1 + t + e^{-t}) + 9.8(1 - e^{-t})$$

El punto más alto será aquel en que la velocidad sea nula:

$$\dot{y}(t) = -9.8(1 - e^{-t}) + 9.8e^{-t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0.693 \quad seg$$

Por lo que la altura máxima alcanzada será:

$$y(0.693) = 3 \quad m$$

2 RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DISCRETOS

Esta sección contiene problemas cuya resolución requiere la obtención de la respuesta temporal de sistemas lineales discretos en el tiempo ante diversas entradas. La resolución de todos ellos se basa en la utilización de la transformada en Z.

El procedimiento de resolución consiste básicamente en los siguientes puntos:

1. Plantear la ecuación en diferencias del sistema.
2. Tomar transformadas en Z, teniendo en cuenta las condiciones iniciales (cuando éstas son distintas de cero).
3. Obtener la transformada en Z de la salida.
4. Obtener la evolución temporal de la salida mediante la transformada en Z inversa.

En algunos ejercicios se debe linealizar la ecuación en diferencias del sistema antes de tomar transformadas en Z, pues el sistema no es lineal, o parte de un punto de funcionamiento distinto de cero.

En este último caso la linealización de la ecuación en diferencias (aunque de hecho ésta ya sea lineal) permite simplificar el cálculo, pues las condiciones iniciales pasan a ser nulas, y la consideración de condiciones iniciales distintas de cero en sistemas discretos es más susceptible de producir errores en la resolución.

Por otra parte, en algunos de los problemas se deben aplicar además algunas de las propiedades de la transformada en Z, como el teorema del valor final.

La ecuación en diferencias del sistema suele ser un dato del problema.

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 4 de [Sala00].

También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [Meade93] (capítulo 5), [Solyman99] (capítulos 6 y 8), [Oppenheim98] (capítulos 7 y 10), [Phillips93] (capítulo 2) y [Ogata95] (capítulo 2).

PROBLEMA 24. Identificación de sistema discreto

La respuesta ante escalón unitario de un sistema discreto es: {0,1,1.5,1.75,1.875,...}. Obtener la ecuación en diferencias y la función de transferencia. Obtener la respuesta del sistema en el instante 6 ante la entrada u_k=k (es decir, u={0,1,2,3,...}).

Solución

A partir de la respuesta ante escalón se obtendrá la respuesta impulsional, que nos define directamente la f.d.t. Se cumple que la respuesta impulsional se obtiene a partir de la respuesta ante escalón sin más que restar los valores. De esta forma:

$g_0=0$

$g_1=1-0=1$

$g_2=1.5-1=0.5$

$g_3=1.75-1.5=0.25$

$g_4=1.875-1.75=0.125$

etc.

es decir, $g_k = 0.5^{k-1}u_o(k-1)$, *cuya transformada en Z es*

$$G(z) = z^{-1}\frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{1}{z-0.5}$$

La ecuación en diferencias es:

$$y_k - 0.5y_{k-1} = u_{k-1}$$

Para obtener la respuesta del sistema en el instante 6 ante la entrada rampa unitaria se utiliza la transformada en Z:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})^2} =$$

$$= \frac{a}{1-0.5z^{-1}} + \frac{b}{1-z^{-1}} + \frac{cz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

donde la descomposición se ha realizado basándose en los polinomios en z^{-1}. *Como el orden del denominador es mayor que el del numerador no es necesario dividir los polinomios. Los términos de la descomposición se desprenden de los polos. El polo real en* $z=0.5$ *da lugar a una respuesta de la forma* $a(0.5)^k$, *el polo doble en* $z=1$ *da lugar a dos términos, un escalón:* $bu_0(k)$, *y una rampa:* ck. *Para obtener las constantes basta con hacer la suma e igualar los numeradores, obteniéndose*

$$a(1-z^{-1})^2 + b(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1}) + cz^{-1}(1-0.5z^{-1}) = z^{-2}$$

Las ecuaciones resultantes son:

$$a + b = 0$$
$$-2a - 1.5b + c = 0$$
$$a + 0.5b - 0.5c = 1$$

Cuya solución es: a=4, b=-4, c=2. La respuesta del sistema es, pues:

$$y_k = \left(4(0.5)^k - 4 + 2k\right)u_0(k)$$

cuyo valor en el instante k=6 es:

$$y_6 = 8.0625$$

PROBLEMA 25. Transformada en Z

Dado el sistema de función de transferencia

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - z + 1},$$

definir una secuencia de entrada acotada de forma que produzca una salida no acotada. Calcular esa secuencia de salida. Datos:

$$Z\left\{a^k \operatorname{sen}(bk)\right\} = \frac{a \operatorname{sen}(b) z^{-1}}{1 - 2a\cos(b)z^{-1} + a^2 z^{-2}}$$

$$Z\left\{a^k \cos(bk)\right\} = \frac{1 - a\cos(b) z^{-1}}{1 - 2a\cos(b)z^{-1} + a^2 z^{-2}}$$

Solución

Los polos del sistema son $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$*, cuyo módulo es 1 y cuyo argumento es* $\pi/3$*. Al ser el módulo 1, el sistema es críticamente estable. Si la entrada es una secuencia cuya transformada en Z tiene los mismos polos que el sistema, la salida tendrá un término en rampa, que hará que no sea acotada. Por ejemplo:*

$$U(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 1}$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - z + 1}\frac{z^2}{z^2 - z + 1} = \frac{z^3 + 2z^2}{\left(z^2 - z + 1\right)^2} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{\left(1 - z^{-1} + z^{-2}\right)^2}$$

Como tenemos un par de polos complejos conjugados de módulo 1 y argumento $\pi/3$*, que además tienen multiplicidad 2, la secuencia de salida tendrá los siguientes términos:*

$$y_k = A\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}k) + B\cos(\frac{\pi}{3}k) + C\,k\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}k) + D\,k\cos(\frac{\pi}{3}k)$$

Para calcular los coeficientes bastará obtener la transformada en Z e igualar con lo de arriba:

$$Z\left\{A\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}k)\right\} = A\frac{\text{sen}(\frac{\pi}{3})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{\pi}{3})z^{-1}+z^{-2}} = A\frac{0.866z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}} = A\frac{0.866z}{z^2-z+1}$$

$$Z\left\{B\cos(\frac{\pi}{3}k)\right\} = B\frac{1-\cos(\frac{\pi}{3})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{\pi}{3})z^{-1}+z^{-2}} = B\frac{1-0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}} = B\frac{z^2-0.5z}{z^2-z+1}$$

$$Z\left\{C\,k\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}k)\right\} = -C\,z\frac{d}{dz}\left\{\frac{0.866z}{z^2-z+1}\right\} =$$

$$= -C\,z\frac{0.866(z^2-z+1)-0.866z(2z-1)}{\left(z^2-z+1\right)^2} = -C\,z\frac{-0.866z^2+0.866}{\left(z^2-z+1\right)^2}$$

$$Z\left\{D\,k\cos(\frac{\pi}{3}k)\right\} = -D\,z\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2-0.5z}{z^2-z+1}\right\} =$$

$$= -D\,z\frac{(2z-0.5)(z^2-z+1)-(z^2-0.5z)(2z-1)}{\left(z^2-z+1\right)^2} =$$

$$= -D\,z\frac{-0.5z^2+2z-0.5}{\left(z^2-z+1\right)^2}$$

Sumando:

$$Y(z) = \frac{A0.866z(z^2-z+1)+B(z^2-0.5z)(z^2-z+1)}{\left(z^2-z+1\right)^2} +$$

$$+\frac{0.5Dz^3-2Dz^2+0.5Dz+0.866Cz^3-0.866Cz}{\left(z^2-z+1\right)^2} =$$

$$= \frac{Bz^4+(0.866A-1.5B+0.5D+0.866C)z^3}{\left(z^2-z+1\right)^2} +$$

$$+\frac{(-0.866A+1.5B-2D)z^2+(0.866A-0.5B+0.5D-0.866C)z}{\left(z^2-z+1\right)^2}$$

B=0
0.866A+0.5D+0.866C=1
-0.866A-2D=2
0.866A+0.5D-0.866C=0
resolviendo: A=4/3/0.866=1.54; D=-5/3; C=0.5774

PROBLEMA 26. Respuesta de un sistema

La función de transferencia de un sistema discreto es

$$G(z) = \frac{2z^2 + z - 0.5}{z^2}.$$

Obtener la respuesta del sistema ante una secuencia de entrada de la forma

$$u_k = \begin{cases} 2^k \operatorname{sen}(3k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Solución

Este problema puede resolverse mediante la transformada en Z o por convolución. La transformada en Z de la entrada es:

$$U(z) = \frac{2\operatorname{sen}(3)z}{z^2 - 2*2\cos(3)z + 2^2} = \frac{0.2822z}{z^2 + 3.96z + 4}$$

La transformada en Z de la salida será por tanto:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \left(2 + z^{-1} - 0.5z^{-2}\right)U(z) =$$
$$= 2U(z) + z^{-1}U(z) - 0.5z^{-2}U(z)$$

La transformada inversa será la suma de los tres términos. Como el producto por z^{-1} implica el retardo de un periodo, el resultado final es:

$$y_k = 2u_k u_0(k) + u_{k-1}u_0(k-1) - 0.5u_{k-2}u_0(k-2) =$$
$$= 2\cdot 2^k \operatorname{sen}(3k) + 2^{k-1}\operatorname{sen}(3(k-1))u_0(k-1) -$$
$$- 0.5\cdot 2^{k-2}\operatorname{sen}(3(k-2))u_0(k-2)$$

donde $u_0(k)$ representa el escalón unitario.

PROBLEMA 27. Respuesta de un sistema

Los 4 primeros valores de la respuesta del sistema discreto cuya función de transferencia es $G(z) = \dfrac{1}{z-0.8}$ frente a una entrada desconocida son $\{0,0,1,2,8\}$. Además se conoce el valor de la respuesta en el instante 20, $y_{20}=0.01$. Sabiendo que la entrada vale 0 a partir del instante 4 ($u_4=u_5=\ldots=0$), obtener los valores de la entrada hasta el instante 3 (u_0, u_1, u_2, u_3).

Solución

La ecuación en diferencias del sistema es:

$$y_{k+1} = 0.8y_k + u_k$$

Con los datos que se tienen se pueden plantear varias ecuaciones:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0.8y_0 + u_0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.8\cdot 0 + u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 0 \\
y_2 &= 0.8y_1 + u_1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0.8\cdot 0 + u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1 \\
y_3 &= 0.8y_2 + u_2 \quad \Rightarrow \quad 2.8 = 0.8\cdot 1 + u_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 2
\end{aligned}$$

Para obtener u_3 se dispone del dato $y_{20}=0.01$. Para poder utilizar este dato se calcula la respuesta del sistema mediante la transformada en Z. La entrada es una secuencia finita, por lo que su transformada en Z es:

$$U(z) = u_0 + u_1z^{-1} + u_2z^{-2} + u_3z^{-3} = z^{-1} + 2z^{-2} + u_3z^{-3}$$

La salida será por tanto:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\left(z^{-1} + 2z^{-2} + u_3z^{-3}\right)$$

cuya tranformada inversa es:

$$y_k = (0.8)^{k-2}u_0(k-2) + 2(0.8)^{k-3}u_0(k-3) + u_3(0.8)^{k-4}u_0(k-4)$$

Aplicando la expresión al periodo k=20 e igualando a 0.01 se obtiene el valor pedido:

$$y_{20} = 0.01 = (0.8)^{18} + 2(0.8)^{17} + u_3(0.8)^{16} \quad \Rightarrow \quad u_3 = -1.8847$$

PROBLEMA 28. Respuesta de un sistema

Calcular la salida del sistema de función de transferencia

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - 1.5z + 0.54}$$

en el instante 100 ante una entrada definida como:

$$u_k = \begin{cases} 0 & k < 5 \\ 3 & 5 \le k < 25 \\ 1 & k \ge 25 \end{cases}$$

Solución

El problema se puede resolver por convolución o mediante la transformada en Z. La entrada es una suma de dos escalones retrasados, por lo que su transformada en Z es:

$$u_k = 3u_0(k-5) - 2u_0(k-25) \quad \Rightarrow \quad U(z) = \frac{3z^{-5}}{1-z^{-1}} - \frac{2z^{-25}}{1-z^{-1}}$$

La transformada en Z de la salida será por tanto:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.54z^{-2}} \left(\frac{3z^{-5}}{1-z^{-1}} - \frac{2z^{-25}}{1-z^{-1}} \right) =$$

$$= \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.9z^{-1})(1-0.6z^{-1})} (3z^{-5} - 2z^{-25})$$

donde se ha expresado G(z) como función de z^{-1}. Para calcular la transformada inversa se resuelve en primer lugar la de la función:

$$P(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.9z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

Como el orden del denominador (en z^{-1}) es mayor que el del numerador, la transformada inversa es de la forma:

$$p_k = a + b(0.9)^k + c(0.6)^K$$

Tomando transformadas e igualando a la expresión anterior se obtienen a, b y c:

$$P(z) = \frac{a}{1-z^{-1}} + \frac{b}{1-0.9z^{-1}} + \frac{c}{1-0.6z^{-1}} =$$

$$= \frac{a(1-0.9z^{-1})(1-0.6z^{-1}) + b(1-z^{-1})(1-0.6z^{-1}) + c(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.9z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

$$= \frac{z^{-1}+2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.9z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

Igualando los numeradores se obtienen las ecuaciones:

$$a+b+c=0$$

$$-1.5a-1.6b-1.9c=1$$

$$0.54a+0.6b+0.9c=2$$

de donde se obtiene a=75, b=-96.67, c=21.67

La respuesta del sistema se obtendrá por superposición, teniendo en cuenta los retardos:

$$y_k = 3p_{k-5}u_0(k-5) - 2p_{k-25}u_0(k-25) =$$

$$= 3\left(75 - 96.67(0.9)^{k-5} + 21.67(0.6)^{k-5}\right)u_0(k-5) -$$

$$-2\left(75 - 96.67(0.9)^{k-25} + 21.67(0.6)^{k-25}\right)u_0(k-25)$$

Cuyo valor en el periodo k=100 es:

$$y_{100} = 75.058$$

PROBLEMA 29. Modelo de índice de ozono

La siguiente ecuación en diferencias representa un modelo discreto del efecto de las emisiones de CFC sobre la capa de ozono:

$$y_k - 1.8y_{k-1} + 0.8y_{k-2} = -u_{k-1}$$

donde la salida y_k es un índice que mide la concentración media de ozono en la atmósfera al principio de la década k, y la entrada u_k representa las emisiones totales de CFCs durante la década k. Se tienen los siguientes datos de las emisiones de las últimas décadas:

1950-1960	1960-1970	1970-1980	1980-1990	1990-2000
?	4	5	7	5

donde el interrogante significa que no se conoce el dato de esa década. Suponiendo que en décadas anteriores no hubo emisiones, y que el índice de concentración en 1950 era de 100, mientras en 1980 era de 81.2, calcular:

a) Las emisiones de la década de 1950-1960.

b) Suponiendo que las emisiones se reducen a cero a partir de las próximas décadas, calcular el valor mínimo al que llegará el índice de ozono.

Solución

a) Si definimos el instante 0 como la década de los 40, se tienen los siguientes datos:

$$u_0=0,\ u_2=4,\ u_3=5,\ u_4=7,\ u_5=5$$

$$y_0=100,\ y_1=100,\ y_4=81.2$$

ya que antes de la década del 50 las emisiones habían sido nulas, y el índice era del 100%. La incógnita que hay que calcular es u_1*. Planteando la ecuación en diferencias para los distintos instantes se tiene:*

$$y_4 - 1.8y_3 + 0.8y_2 = -u_3$$
$$y_3 - 1.8y_2 + 0.8y_1 = -u_2$$
$$y_2 - 1.8y_1 + 0.8y_0 = -u_1$$

donde sustituyendo los valores conocidos se obtiene un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$81.2 - 1.8y_3 + 0.8y_2 = -5$$
$$y_3 - 1.8y_2 + 80 = -4$$
$$y_2 - 100 = -u_1$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$u_1 = 2.7 \quad ; \quad y_2 = 97.3 \quad ; \quad y_3 = 91.1$$

b) Si las emisiones se reducen a cero se tiene que $u_6=u_7=\ldots=0$*.*

Para calcular el valor mínimo al que llegan las emisiones se utilizará la transformada en Z. Tomando transformadas en la ecuación en diferencias (teniendo en cuenta las condiciones iniciales) se tiene:

$$y_{k+2} - 1.8y_{k+1} + 0.8y_k = -u_{k+1}$$
$$\Downarrow T.Z.$$
$$z^2Y(z) - zy_1 - z^2y_0 - 1.8zY(z) + 1.8zy_0 + 0.8Y(z) = -zU(z) + zu_0$$

De donde despejando se obtiene:

$$Y(z) = \frac{y_0z^2 + (y_1 - 1.8y_0 + u_0)z - zU(z)}{z^2 - 1.8z + 0.8}$$

La transformada de la entrada se calcula fácilmente sin más que aplicar la definición de transformada en Z, ya que la secuencia se anula a partir del periodo 6:

$$U(z) = 0 + 2.7z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3} + 7z^{-4} + 5z^{-5}$$

por lo que:

$$Y(z) = \frac{100z^2 - 80z - 2.7 - 4z^{-1} - 5z^{-2} - 7z^{-3} - 5z^{-4}}{z^2 - 1.8z + 0.8}$$

La transformada inversa en Z permite obtener la secuencia de valores y_k. En este caso, se puede calcular el valor final que alcanzará cuando $k \to \infty$ aplicando directamente el teorema del valor final:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) =$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{100z^2 - 80z - 2.7 - 4z^{-1} - 5z^{-2} - 7z^{-3} - 5z^{-4}}{z(z-1)(z-0.8)} = -18.5$$

Es decir, el modelo predice un valor final del índice de ozono negativo. Como esto no tiene sentido físico se concluye que el valor mínimo que alcanzará (según el modelo) es del 0% (es decir,según el modelo desaparecerá todo el ozono).

PROBLEMA 30. Modelo de proceso de producción

A un proceso entran piezas tipo a y de él salen piezas tipo b. Partiendo del proceso vacío se introduce un número constante de 10 piezas tipo a cada media hora. Se ha contado el número de piezas tipo b que salen también cada media hora. Las piezas obtenidas han sido: $\{0,4,14,20,20,20,...\}$. Se pide:

a) Obtener el modelo discreto que relaciona la cantidad de piezas entrantes y la cantidad de piezas salientes cada periodo. ¿Cuál es la ganancia estática de este modelo? ¿Cuál puede ser la justificación de esta ganancia?.

b) ¿Cuál es el número máximo de piezas que hay en un momento dado dentro del proceso?. Suponer que son todas tipo *a* (en cuanto se transforman en piezas tipo *b* salen del proceso).

c) Si en un momento dado dejan de introducirse piezas, determinar la evolución del número de piezas que salen en los siguientes periodos. ¿Cuál es la cantidad total de piezas tipo *b* que salen desde que se deja de introducir piezas tipo *a*?

Solución

a*) Se tiene que partiendo de condiciones iniciales nulas, ante la secuencia de entrada*

$$\{u_k\} = \{10, 10, 10, \cdots\}$$

la secuencia de salida ha sido:

$$\{y_k\} = \{0, 4, 14, 20, 20, \cdots\}$$

Tomando transformadas en las dos secuencias se obtiene la función de transferencia:

$$u(z) = \frac{10}{1 - z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} y(z) &= 4z^{-1} + 14z^{-2} + 20z^{-3} + 20z^{-4} + \cdots = \\ &= 4z^{-1} + 14z^{-2} + 20z^{-3}(1 + z^{-1} + \cdots) = \\ &= 4z^{-1} + 14z^{-2} + \frac{20z^{-3}}{1 - z^{-1}} = \frac{4z^{-1} + 10z^{-2} + 6z^{-3}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = 0.4z^{-1} + z^{-2} + 0.6z^{-3}$$

La ganancia estática del modelo es G(1)=2. El significado es que en régimen permanente de cada pieza tipo a que entra salen 2 piezas tipo b, es decir, las piezas tipo a se dividen en 2 dentro del proceso.

b) *Las piezas tipo a que hay dentro del proceso es la diferencia entre las que entran y las que salen, es decir:*

$$d_{k+1} = d_k + u_k - 0.5y_k$$

donde las piezas que salen se han dividido por 2 porque 2 piezas tipo b equivalen a 1 pieza tipo a. Como inicialmente la máquina estaba vacía se puede obtener la evolución de las piezas dentro de la máquina:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_0 + u_0 - 0.5y_0 = 10 \\ d_2 &= d_1 + u_1 - 0.5y_1 = 10 + 10 - 2 = 18 \\ d_3 &= d_2 + u_2 - 0.5y_2 = 18 + 10 - 7 = 21 \\ d_4 &= d_3 + u_3 - 0.5y_3 = 21 + 10 - 10 = 21 \end{aligned}$$

A partir del instante 3 el número de piezas dentro del proceso es constante e igual a 21, por lo que esta es la respuesta buscada. El cálculo de las piezas cada periodo es útil en este caso porque el sistema es de respuesta impulsional finita, y ante entrada escalón en un número finito de periodos (3 en este caso) las variables se hacen constantes.

Otra alternativa para el cálculo que no necesita que el sistema sea de ese tipo es tomar transformadas en z para calcular d(z):

$$zd(z) - zd_0 = zd(z) = d(z) + u(z) - 0.5y(z)$$

$$d(z)=\frac{1}{z-1}\left(\frac{10}{1-z^{-1}}-\frac{2z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}}{1-z^{-1}}\right)=$$

$$=\frac{10z^{-1}-2z^{-2}-5z^{-3}-3z^{-4}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{10z^{-1}+8z^{-2}+3z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

El valor final que alcanza se obtiene por el teorema del valor final:

$$d_\infty=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})d(z)=10+8+3=21$$

c) *La ecuación en diferencias del proceso es:*

$$y_k=0.4u_{k-1}+u_{k-2}+0.6u_{k-3}$$

Si estando en régimen permanente (21 piezas dentro del proceso, 10 piezas entrando y 20 saliendo) dejan de introducirse piezas, la entrada pasa a valer 0. Si se escribe la ecuación en diferencias adelantada:

$$y_{k+3}=0.4u_{k+2}+u_{k+1}+0.6u_k$$

y se supone que dejan de entrar piezas en el instante 3, es decir $u_0=u_1=u_2=10$, $u_3=u_4=...=0$, se puede calcular la evolución mediante la ecuación en diferencias (ya que la respuesta es finita en el tiempo):

$$y_3=0.4u_2+u_1+0.6u_0=20$$

$$y_4=0.4u_3+u_2+0.6u_1=16$$

$$y_5=0.4u_4+u_3+0.6u_2=6$$

$$y_6=0.4u_5+u_4+0.6u_3=0$$

y a partir de ese momento la salida vale 0. La secuencia de salida desde el instante en que dejan de introducirse piezas es por tanto:

$$\{20, 16, 6, 0, 0, \ldots\}$$

La cantidad total de piezas tipo b que salen es la suma de la secuencia anterior, es decir, 42 piezas.

Otra forma de resolver el problema es definir la ecuación en diferencias en incrementos. Definiendo $\Delta y_k=y_k-20$, $\Delta u_k=u_k-10$, como el sistema es lineal la ecuación en diferencias que se cumple es la misma:

$$\Delta y_{k+3}=0.4\Delta u_{k+2}+\Delta u_{k+1}+0.6\Delta u_k$$

Con la diferencia de que con las variables incrementales las condiciones iniciales son nulas. La reducción de la entrada de 10 a 0 implica un escalón de valor –10 en Δu_k, por lo que:

$$\Delta y(z)=G(z)\Delta u(z)=\left(0.4z^{-1}+z^{-2}+0.6z^{-3}\right)\frac{(-10)}{1-z^{-1}}$$

La transformada inversa en z dará la evolución de Δy_k:

$$\Delta y_k = -4u_0(k-1) - 10u_0(k-2) - 6u_0(k-3)$$

donde $u_0(k)$ representa el escalón unitario. La evolución total de las piezas de salida será:

$$y_k = \Delta y_k + 20 = 20 - 4u_0(k-1) - 10u_0(k-2) - 6u_0(k-3)$$

es decir, la secuencia de salida es:

$$\{y_k\} = \{20, 16, 6, 0, 0, \ldots\}$$

PROBLEMA 31. Respuesta de un sistema

Un sistema discreto se describe mediante la ecuación en diferencias:

$$y_k = 0.8y_{k-1} + 0.5u_{k-1} + u_{k-2} - 2v_{k-1}$$

donde tanto u como v son señales de entrada. Si se dispone de las secuencias

$$\{u_k\} = \{1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots\}$$

$$\{v_k\} = \{-2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots\}$$

Obtener el valor de y en el instante 100.

Solución

Como el enunciado no dice lo contrario se supondrá que las condiciones iniciales (valores de las secuencias para $k<0$) son nulos. Tomando transformadas en z en la ecuación en diferencias se tiene:

$$Y(z) = 0.8z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-1}U(z) + z^{-2}U(z) - 2z^{-1}V(z)$$

de donde se obtiene

$$Y(z) = \frac{0.5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1}}U(z) - \frac{2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}V(z)$$

De las secuencias de entrada se obtienen las transformadas en z aplicando la definición:

$$U(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$V(z) = -2 + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots =$$
$$= -2 + z^{-2}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots\right) = -2 + \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

La transformada en z inversa permite calcular la secuencia de salida. Ésta se realizará en dos partes:

$$Y_1(z) = \frac{0.5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1}} U(z) = \frac{2z^{-5} + 1.5z^{-3} + 2z^{-2} + 0.5z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Si se descompone en suma de 4 términos con sus correspondientes retrasos la transformada inversa es inmediata:

$$Y_1(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}\left(2z^{-5} + 1.5z^{-3} + 2z^{-2} + 0.5z^{-1}\right)$$
$$\Downarrow TIZ$$
$$y_1(k) = 2 \cdot 0.8^{k-5} u_0(k-5) + 1.5 \cdot 0.8^{k-3} u_0(k-3) +$$
$$+ 2 \cdot 0.8^{k-2} u_0(k-2) + 0.5 \cdot 0.8^{k-1} u_0(k-1)$$

donde se ha llamado $u_0(k)$ al escalón unitario. Como únicamente interesa el valor en el instante 100 se tiene que:

$$y_1(100) = 2 \cdot 0.8^{95} + 1.5 \cdot 0.8^{97} + 2 \cdot 0.8^{98} + 0.5 \cdot 0.8^{99} = 2.6 \cdot 10^{-9}$$

La segunda parte es:

$$Y_2(z) = -\frac{2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} V(z) = \frac{4z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} - \frac{2z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})}$$

Para calcular la transformada inversa de la forma más sencilla se calculará en primer lugar la de la función:

$$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} \xrightarrow{TIZ} Au_0(k) + B0.8^k \xrightarrow{TZ}$$

$$\frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0.8z^{-1}} = \frac{A + B - (0.8A + B)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})}$$

de donde se obtiene A=5, B=-5. La transformada inversa de $Y_2(z)$ se puede calcular ya directamente:

$$y_2(k) = 4 \cdot 0.8^{k-1} u_0(k-1) - 2\left(5 - 5 \cdot 0.8^{k-2}\right) u_0(k-2)$$

Cuyo valor en k=100 es:

$$y_2(100) = 4 \cdot 0.8^{99} - 2\left(5 - 5 \cdot 0.8^{98}\right) = -10$$

Con lo que la salida total es:

$$y(100) = y_1(100) + y_2(100) = -10$$

PROBLEMA 32. Respuesta de un sistema

La respuesta de un sistema discreto ante rampa unitaria es

$$y_k = 1 - 2 \cdot 0.5^k + 0.8^k - 0.8k$$

Calcular la salida del sistema en el instante 100 ante una entrada definida como:

$$u_k = \begin{cases} 0 & k < 5 \\ 3 & 5 \leq k < 15 \\ 0 & k < 5 \\ 3 & 5 \leq k < 15 \\ 0 & k \geq 15 \end{cases}$$

Solución

La entrada es una combinación de escalones retrasados (un escalón de valor 3 retrasado 5 menos un escalón de valor 3 retrasado 15). Por lo tanto se necesita obtener la respuesta del sistema ante escalón. La transformada en z de la respuesta ante rampa es:

$$Y_r(z) = \frac{G(z)z}{(z-1)^2}$$

La transformada en z de la respuesta ante rampa adelantada es:

$$Z\{y_r(k+1) - y_r(k)\} = zY_r(z) - zy_r(0) - Y_r(z) = \frac{G(z)z}{z-1} = Y_e(z)$$

ya que $y_r(0)=0$. Es decir, la respuesta ante escalón se obtiene a partir de la respuesta ante rampa:

$$y_e(k) = y_r(k+1) - y_r(k) =$$
$$= 1 - 2 \cdot 0.5^{k+1} + 0.8^{k+1} - 0.8(k+1) - 1 + 2 \cdot 0.5^k - 0.8^k + 0.8k =$$
$$= 0.5^k - 0.2 \cdot 0.8^k - 0.8$$

La respuesta del sistema ante la entrada pedida será por tanto:

$$y_k = 3y_e(k-5)u_0(k-5) - 3y_e(k-15)u_0(k-15)$$

por lo que el valor en el instante k=100 es:

$$y_{100} = 3\left(0.5^{95} - 0.2 \cdot 0.8^{95} - 0.8\right) - 3\left(0.5^{85} - 0.2 \cdot 0.8^{85} - 0.8\right) = 3.349 \cdot 10^{-9}$$

PROBLEMA 33. Respuesta de un sistema

La respuesta ante rampa unitaria de un sistema discreto es:

$$\{y_k\} = \{0, 1, 3, 3.5, 2.5, 2.5, 2.5, \ldots\}$$

Obtener la respuesta del sistema en el instante $k=30$ ante la entrada cuya transformada en z es:

$$u(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.9)}$$

Solución

La respuesta del sistema ante rampa unitaria es:

$$y_r(z) = G(z)\frac{z}{(z-1)^2}$$

mientras que las respuesta ante escalón es:

$$y_e(z) = G(z)\frac{z}{z-1} = (z-1)y_r(z) \quad \Rightarrow \quad y_e(k) = y_r(k+1) - y_r(k)$$

donde en la transformada inversa de $zy_r(z)$ se ha tenido en cuenta que la condición inicial ($y_r(0)$) es nula.

La respuesta ante escalón se obtiene por tanto como:

$$\{y_e(k)\} = \{1, 2, 0.5, -1, 0, 0, \ldots\}$$

cuya transformada en z es:

$$y_e(z) = 1 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - z^{-3} = G(z)\frac{z}{z-1}$$

Por lo que la respuesta que se nos pide tiene una transformada en Z:

$$y(z) = G(z)u(z) = G(z)\frac{z^2}{(z-1)(z-0.9)} = \left(1 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - z^{-3}\right)\frac{z}{z-0.9}$$

Otra forma de resolver el problema es calcular la función de transferencia:

$$\{y_k\} = \{0, 1, 3, 3.5, 2.5, 2.5, 2.5, \ldots\}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 3.5z^{-3} + 2.5z^{-4}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Como la entrada ha sido una rampa unitaria: $U(z) = \dfrac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$

Por lo que la función de transferencia es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(z^{-1} + 3z^{-2} + 3.5z^{-3} + 2.5z^{-4}\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)\frac{(1 - z^{-1})^2}{z^{-1}} =$$

$$= (1 - z^{-1})\left(2.5z^{-3} + (1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1} + 3.5z^{-2})\right) =$$

$$= (1 - z^{-1})\left(1 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - z^{-3}\right)$$

La respuesta ante la nueva entrada será:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{(1 - z^{-1})\left(1 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - z^{-3}\right)}{(1 - z^{-1})(1 - 0.9z^{-1})} =$$

$$= \frac{1 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - z^{-3}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

cuya transformada inversa es:

$$y_k = 0.9^k + 2 \cdot 0.9^{k-1}u_0(k - 1) + 0.5 \cdot 0.9^{k-2}u_0(k - 2) - 0.9^{k-3}u_0(k - 3)$$

y el valor en el instante 30:

$$y_{30} = 0.9^{30} + 2 \cdot 0.9^{29} + 0.5 \cdot 0.9^{28} - 0.9^{27} = 0.1046$$

La transformada inversa también puede calcularse dividiendo primero:

$$Y(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - z^{-3}}{1 - 0.9z^{-1}} =$$

$$= 1.111z^{-2} + 0.679z^{-1} - 1.46777 + \frac{2.46777}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$y_k = -1.46777\delta_k + 0.679\delta_{k-1} + 1.111\delta_{k-2} + 2.46777 \cdot 0.9^k$$

cuyo valor en el instante k=30 es:

$$y_k = 2.46777 \cdot 0.9^{30} = 0.1046$$

ya que las secuencias impulso son:

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \ldots\} \quad ; \quad \{\delta_{k-1}\} = \{0, 1, 0, 0, \ldots\} \quad ; \quad \{\delta_{k-2}\} = \{0, 0, 1, 0, \ldots\}$$

Se obtiene el mismo resultado planteando el cálculo por convolución a partir de Y(z), ya que ésta está definida como un producto de 2 transformadas:

$$y(z) = \left(1 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - z^{-3}\right)\frac{1}{1 - 0.9z^{-}} = X(z)W(z)$$

$$y_{30} = \sum_{k=0}^{30} x_k w_{30-k} = 0.9^{30} + 2 \cdot 0.9^{29} + 0.5 \cdot 0.9^{28} - 0.9^{27} = 0.1046$$

PROBLEMA 34. Respuesta de un sistema

El modelo de un sistema discreto está definido por la ecuación en diferencias:

$$y_k - 1.72y_{k-1} + 0.81y_{k-2} = 10u_k + 10u_{k-2}$$

Estando el sistema en equilibrio con u=20 se pasa a u=30 en un instante determinado. Obtener la evolución de la salida del sistema.

Solución

Como el sistema es lineal la ecuación en diferencias es válida también para variaciones respecto de un punto de funcionamiento.

El punto de funcionamiento en el que está inicialmente el sistema es:

$$\bar{y} - 1.72\bar{y} + 0.81\bar{y} = 10\bar{u} + 10\bar{u} = 400 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = 4444.44$$

Definiendo los incrementos como:

$$\Delta u_k = u_k - \bar{u} = u_k - 20$$

$$\Delta y_k = y_k - \bar{y} = y_k - 4444.44$$

se tiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$\Delta y_k - 1.72\Delta y_{k-1} + 0.81\Delta y_{k-2} = 10\Delta u_k + 10\Delta u_{k-2}$$

Con estas variables se tiene que la entrada es un escalón de valor 10, y que las condiciones iniciales son nulas, por lo que la salida se obtiene sin más que aplicar la transformada en z:

$$\Delta Y(z) = \frac{10 + 10z^{-2}}{1 - 1.72z^{-1} + 0.81z^{-2}}\Delta U(z) =$$

$$= 100\frac{1 + z^{-2}}{(1 - 1.72z^{-1} + 0.81z^{-2})(1 - z^{-1})}$$

El polinomio de segundo orden tiene dos raíces complejas conjugadas:

$$z^2 - 1.72z + 0.81 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.86 \pm 0.2653j = 0.9_{\angle \pm 0.3}$$

es decir, el módulo de las raíces es 0.9 y el argumento 0.3 rad. En este caso no es necesario dividir los polinomios, ya que el polinomio en z^{-1} del denominador es de orden mayor que el del numerador. La respuesta (transformada Z inversa) será por tanto de la forma:

$$\Delta y_k = A + B(0.9)^k \operatorname{sen}(0.3k) + C(0.9)^k \cos(0.3k)$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtienen los coeficientes A, B y C, quedando:

$$\Delta y_k = 2222.2 - 471.5(0.9)^k \operatorname{sen}(0.3k) - 2122.2(0.9)^k \cos(0.3k)$$

por lo que la evolución de la salida es:

$$y_k = \Delta y_k + \bar{y} = 6666.6 - 471.5(0.9)^k \operatorname{sen}(0.3k) - 2122.2(0.9)^k \cos(0.3k)$$

PROBLEMA 35. Respuesta de un sistema

La ecuación en diferencias siguiente representa un modelo de un sistema discreto:

$$y_k = a y_{k-1} + \frac{u_{k-1}}{b + u_{k-1}}$$

El sistema está en equilibrio con la entrada constante igual a 2 y la salida constante igual a 5. En un momento dado se cambia la entrada a un valor de 3, manteniéndose constante en ese valor durante 10 periodos, volviendo al valor de 2 a partir de entonces. Se sabe que la salida tuvo un valor de 5.4 en el instante 20 periodos después de cambiar la entrada de 2 a 3.

a) Calcular los valores de *a* y *b* de forma aproximada.

b) Calcular los valores de *a* y *b* de forma exacta.

Solución

En primer lugar se sabe que en situación inicial de equilibrio se tiene u=2, y=5, por lo que se tiene la siguiente ecuación:

$$5 = 5a + \frac{2}{2+b}$$

a) *Para resolver el problema de forma aproximada se obtendrá el sistema lineal aproximado alrededor del punto de equilibrio anterior, obteniendo después la evolución temporal de la salida utilizando la función de transferencia aproximada:*

$$\Delta y_k = a\Delta y_{k-1} + \frac{b}{(b+\bar{u})^2}\Delta u_{k-1} = a\Delta y_{k-1} + \frac{b}{(b+2)^2}\Delta u_{k-1}$$

La función de transferencia es por tanto:

$$\frac{\Delta Y(z)}{\Delta U(z)} = \frac{b}{(b+2)^2}\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

Si se considera el instante inicial aquel en el que la entrada cambia de 2 a 3, la variación de la entrada es una suma de dos escalones retrasados:

$$\Delta u_k = u_0(k) - u_0(k-10) \quad \Rightarrow \quad \Delta U(z) = \frac{1-z^{-10}}{1-z^{-1}}$$

La transformada en Z de la variación de la salida será por tanto:

$$\Delta Y(z) = \frac{b}{(b+2)^2} \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})} \frac{(1-z^{-10})}{(1-z^{-1})}$$

Para calcular la transformada inversa se calcula en primer lugar la del sistema:

$$P(z) = \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{c}{1-az^{-1}} + \frac{d}{1-z^{-1}} = \frac{c(1-z^{-1}) + d(1-az^{-1})}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

de donde igualando los numeradores se obtiene c=1/(a-1), d=1/(1-a), quedando:

$$p_k = ca^k + d = \frac{1}{1-a}(1-a^k)$$

La evolución de la salida será por tanto:

$$\Delta y_k = \frac{b}{(b+2)^2}\left(\frac{1}{1-a}(1-a^k) - \frac{1}{1-a}(1-a^{k-10})\right)$$

Sabiendo que en el instante k=20 se tiene y_k*=5.4, es decir,* Δy_k*=0.4, se tiene la ecuación:*

$$\Delta y_{20} = 0.4 = \frac{b}{(b+2)^2}\left(\frac{1}{1-a}(1-a^{20}) - \frac{1}{1-a}(1-a^{10})\right) = \frac{b(a^{10}-a^{20})}{(b+2)^2(1-a)}$$

Esta ecuación junto con la que se obtuvo en primer lugar de la condición de equilibrio inicial permiten obtener los dos parámetros pedidos. De la primera ecuación se obtiene:

$$b = \frac{2}{5(1-a)} - 2$$

que sustituido en la segunda ecuación da

$$0.4 = \frac{\left(\frac{2}{5(1-a)} - 2\right)(a^{10}-a^{20})}{\left(\frac{2}{5(1-a)}\right)^2 (1-a)} = \frac{5}{4}(10a-8)(a^{10}-a^{20})$$

Resolviendo la ecuación por tanteo se obtienen dos soluciones a=0.928, a=0.972, para los que se obtienen los correspondientes valores de b=3.556, b=12.286. Así pues se obtienen dos soluciones:

$$\begin{cases} a = 0.928, & b = 3.556 \\ a = 0.972, & b = 12.286 \end{cases}$$

b) *Para la solución exacta se tratará de no utilizar las ecuaciones aproximadas. Para ello se define una variable de entrada auxiliar u' definida como:*

$$u'_{k-1} = \frac{u_{k-1}}{b + u_{k-1}}$$

de esta forma la ecuación del sistema es:

$$y_k = ay_{k-1} + u'_{k-1}$$

que es una ecuación lineal (válida por tanto también para incrementos):

$$\Delta y_k = a\Delta y_{k-1} + \Delta u'_{k-1}$$

es decir, la función de transferencia es:

$$\frac{\Delta Y(z)}{\Delta U'(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

La nueva entrada pasa de un valor de 2/(2+b) a un valor de 3/(3+b) por lo que se tiene:

$$\Delta U'(z) = \left(\frac{3}{3+b} - \frac{2}{2+b}\right)\frac{1-z^{-10}}{1-z^{-1}}$$

es decir, la salida es:

$$\Delta Y(z) = \frac{b}{(b+2)^2}\left(\frac{3}{3+b} - \frac{2}{2+b}\right)\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})}\frac{(1-z^{-10})}{(1-z^{-1})}$$

por lo que la transformada inversa es:

$$\Delta y_k = \left(\frac{3}{3+b} - \frac{2}{2+b}\right)\left(\frac{1}{1-a}(1-a^k) - \frac{1}{1-a}(1-a^{k-10})\right)$$

que, sustituida en el instante k=20 da:

$$\Delta y_{20} = \left(\frac{3}{3+b} - \frac{2}{2+b}\right)\left(\frac{1}{1-a}(1-a^{20}) - \frac{1}{1-a}(1-a^{10})\right) =$$

$$= \left(\frac{b}{(3+b)(2+b)}\right)\frac{a^{10} - a^{20}}{1-a}$$

que, sustituyendo de la primera ecuación se tiene:

$$0.4 = \left(\frac{\frac{2}{5(1-a)} - 2}{(3 + \frac{2}{5(1-a)} - 2)(2 + \frac{2}{5(1-a)} - 2)}\right)\frac{a^{10} - a^{20}}{1-a} =$$

$$= \frac{5(10a-8)(a^{10} - a^{20})}{14 - 10a}$$

que se resuelve por tanteo obteniéndose a=0.95, a=0.964 para los que se obtienen los correspondientes valores de b=6, b=9.11. Así pues se obtienen dos soluciones:

$$\begin{cases} a = 0.95, & b = 6 \\ a = 0.964, & b = 9.11 \end{cases}$$

3 SISTEMAS CONTINUOS MUESTREADOS

Esta sección contiene problemas relacionados con sistemas continuos cuya salida es muestreada con un periodo constante y cuya entrada es constante entre mediciones.

La resolución de los problemas se basa en la utilización del concepto de equivalente discreto para retenedor de orden cero.

En algunos problemas se necesita aplicar mínimos cuadrados para obtener los parámetros del sistema discreto equivalente a partir de los datos del muestreo, obteniendo después el sistema continuo a partir del sistema discreto calculado.

En otros problemas se pide calcular la respuesta del sistema en un instante de muestreo cuando el sistema continuo está sometido a una entrada constante entre periodos. Estos problemas se pueden resolver también por convolución o mediante la transformada de Laplace, pero aquí están resueltos calculando el equivalente discreto y aplicando a continuación la ecuación en diferencias obtenida.

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 4 de [Sala00].

También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [Phillips96] (capítulo 12), [Phillips93] (capítulos 2 y 3) y [Ogata95] (capítulos 2 y 3).

PROBLEMA 36. Identificación de sistema muestreado

Un sistema continuo es controlado mediante un computador, que cambia la entrada cada 100 ms, manteniéndola constante entre muestreos. La salida se mide también cada 100 ms. Se han tomado 4 valores consecutivos de entradas y de salidas, obteniendo: u={1, 1.5, 2, 1}, y={0.5, 0.85, 1.35, 1.94}. Si se supone que el sistema es de primer orden, obtener la función de transferencia discreta del sistema. Obtener la f.d.t del sistema continuo, y la aproximación discreta del mismo por el método de la derivada. ¿Son iguales las dos f.d.t. discretas? Por qué.

Solución

Al tratarse del equivalente discreto de un sistema continuo se sabe que tiene un retraso de 1 periodo. La f.d.t. será entonces:

$$G(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} = \frac{b}{z+a}$$

siendo la ecuación en diferencias:

$$y_k + a\,y_{k-1} = b\,u_{k-1}$$

Con los datos disponibles se pueden plantear 3 ecuaciones:

$$y_1 = 0.85 = -0.5a + b$$
$$y_2 = 1.35 = -0.85a + 1.5b$$
$$y_3 = 1.94 = -1.35a + 2b$$

que, en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -0.85 & 1.5 \\ -1.35 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 1.35 \\ 1.94 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones es incompatible, y se resuelve por mínimos cuadrados, quedando:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -0.85 & 1.5 \\ -1.35 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -0.85 & 1.5 \\ -1.35 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -0.85 & 1.5 \\ -1.35 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0.85 \\ 1.35 \\ 1.94 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.6709 \\ 0.5176 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$G(z) = \frac{0.5176z^{-1}}{1 - 0.6709z^{-1}}$$

La f.d.t. del sistema continuo se obtiene sin más que expresar la G(s), obtener el sistema discreto y despejar igualando con la G(z) que se tiene:

$$G(s) = \frac{\alpha}{1+\tau s} \quad \Rightarrow \quad G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{\alpha}{s(1+\tau s)}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha\tau}{1+\tau s}\right\} =$$

$$= (1 - z^{-1})\left[\alpha\frac{1}{1 - z^{-1}} - \alpha Z\left\{e^{-\frac{1}{\tau}kT}\right\}\right] =$$

$$= (1 - z^{-1})\left[\alpha\frac{1}{1 - z^{-1}} - \alpha\frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}}\right] = \alpha\left[1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}}\right] = \alpha\frac{(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}}$$

Igualando la expresión anterior con la G(z) ya conocida se obtiene:

$$e^{-\frac{T}{\tau}} = 0.6709 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{-T}{\ln(0.6709)} = \frac{-0.1}{\ln(0.6709)} = 0.25$$

$$\alpha(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) = 0.5176 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.573$$

es decir, el sistema continuo es:

$$G(s) = \frac{1.573}{1 + 0.25s} = \frac{6.292}{s+4}$$

La aproximación discreta por el método de la derivada se obtiene sin más que sustituir la variable s por $\frac{1 - z^{-1}}{T}$ *quedando:*

$$G'(z) = \frac{6.292}{\dfrac{1 - z^{-1}}{0.1} + 4} = \frac{0.6292}{1.4 - z^{-1}} = \frac{0.4494}{1 - 0.714z^{-1}}$$

La f.d.t. obtenida no coincide con la anterior, pues aquella era un equivalente matemático exacto para entradas constantes entre muestreos, mientras que ésta última es solo una aproximación.

PROBLEMA 37. Identificación de sistema muestreado

La entrada de un sistema continuo es controlada por medio de un computador, que modifica la misma cada 200 ms. Con objeto de obtener el modelo continuo del sistema se han muestreado las entradas y salidas en 4 periodos consecutivos, obteniéndose u_k={1, 2, 1, 2}, y_k={0, 0.49, 1.44, 1.86}. Sabiendo que se trata de un sistema de 1er orden, obtener la ganancia estática del sistema continuo, y la amplitud y el desfase de la salida en régimen permanente si la entrada al sistema fuera una señal continua senoidal (no generada por el computador) de amplitud 3, frecuencia 0.3 Hz y fase 0.

Solución

Los valores muestreados de la entrada y la salida me permiten calcular la G(z) equivalente del sistema continuo, pues la entrada es constante entre muestreos. Como el sistema es de 1er orden supondremos que

$$G(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}},$$

ya que el valor de la salida en el instante 0 es nulo, lo que implica que el sistema tiene retraso 1. Esto es coherente con el equivalente discreto de un sistema continuo de 1er orden estándar

$$G(s) = \frac{K_G}{1+\tau s}$$

(se utiliza K_G para la ganancia estática para no confundirla con la k del índice de la secuencia).

Para calcular a y b se utiliza la ecuación en diferencias aplicada a los instantes k=1,2 y 3:

$$y_1 = -ay_0 + bu_0 \Rightarrow 0.49 = -0\cdot a + b$$

$$1.44 = -0.49a + 2b$$

$$1.86 = -1.44a + b$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.49 & 2 \\ -1.44 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 1.44 \\ 1.86 \end{bmatrix}$$

Se tiene un sistema incompatible de 3 ecuaciones y 2 incógnitas. La solución que minimiza el error cuadrático es la de mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.49 & 2 \\ -1.44 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.49 & 2 \\ -1.44 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.49 & 2 \\ -1.44 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0.49 \\ 1.44 \\ 1.86 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.9529 \\ 0.4873 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$G(z) = \frac{0.4873z^{-1}}{1 - 0.9529z^{-1}}$$

La ganancia estática del sistema continuo coincide con la del equivalente discreto, pues es un equivalente exacto para entrada escalón:

$$G(s)|_{s=0} = G(z)|_{z=1} = \frac{0.4873}{1 - 0.9529} = 10.34$$

Para obtener la respuesta ante una señal senoidal es necesario obtener la f.d.t. continua G(s). Para obtenerla se discretizará la expresión continua genérica para obtener después los valores de K_G y τ por comparación con la G(z):

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{K_G}{s(1+\tau s)}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{K_G}{s} - \frac{K_G \cdot \tau}{1+\tau s}\right\} =$$

$$= (1 - z^{-1})Z\left\{K_G(1 - e^{-\frac{kT}{\tau}})\right\} = (1 - z^{-1})\left[Z\{K_G\} - K_G \cdot Z\left\{\left(e^{-\frac{T}{\tau}}\right)^k\right\}\right] =$$

$$= (1 - z^{-1})\left[\frac{K_G}{1 - z^{-1}} - \frac{K_G}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}}\right] = K_G \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}}$$

Igualando el denominador de G(z) se tiene:

$$e^{-\frac{T}{\tau}} = e^{-\frac{0.2}{\tau}} = 0.9529 \quad \Rightarrow \quad \tau = 4.14$$

Igualando el numerador se tiene:

$$K_G(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) = 0.0471K_G = 0.4873 \quad \Rightarrow \quad K_G = 10.34$$

como ya se había obtenido anteriormente.

La salida ante la entrada senoidal quedará definida por la respuesta en frecuencia:

Amplitud

$$3|G(j2\pi\cdot 0.3)| = 3\cdot 10.34\frac{1}{|1+4.14j2\pi\cdot 0.3|} = 3.94$$

Desfase

$$\arg\left(G(j2\pi\cdot 0.3)\right) = -\mathrm{arctg}\frac{4.14\cdot 2\pi\cdot 0.3}{1} = -1.443rad = 4.84rad$$

PROBLEMA 38. Respuesta de sistema continuo

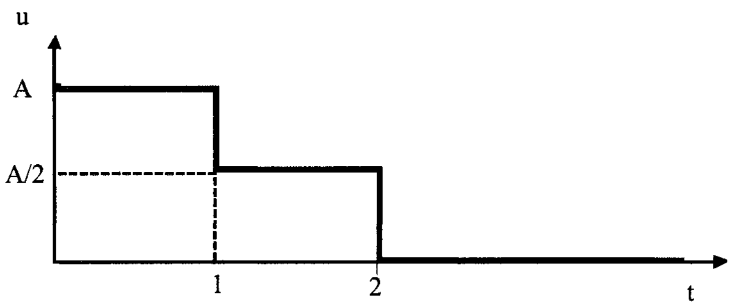
Mediante un computador se controla la entrada de un sistema de función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}\cdot$$

El periodo con el que el computador actualiza la entrada es de 1 segundo. Se quiere que la salida valga y=1 en el instante t=3 segundos. Para ello se decide dar a la entrada un valor de A durante el primer periodo, cambiándolo por un valor de A/2 en el segundo periodo, haciendo nula la entrada a partir de entonces. Obtener el valor de A para que se cumpla lo anterior.

Solución

La entrada al sistema es constante en cada periodo, según la figura:



Este problema puede resolverse utilizando el equivalente discreto de un sistema continuo, ya que la entrada es constante en cada periodo de 1 segundo, y nos interesa el valor de la salida en el instante 3seg, es decir en el instante de muestreo k=3. El procedimiento consiste en obtener el equivalente discreto para retenedor de orden cero (para entrada constante):

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)}\right\}$$

Donde la transformada en Z de la función de transferencia continua representa la transformada en Z de la señal discreta obtenida al muestrear con periodo 1segundo la respuesta impulsional de la función de transferencia continua. Esta respuesta impulsional se obtiene por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+2} = \frac{as(s+2) + b(s+2) + cs^2}{s^2(s+2)} = \frac{0.25}{s} + \frac{0.5}{s^2} - \frac{0.25}{s+2}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} 0.25U_0(t) + 0.5t - 0.25e^{-2t} \xrightarrow{muest.\, T=1} 0.25 + 0.5kT - 0.25e^{-2kT} =$$

$$= 0.25 + 0.5k - 0.25(e^{-2})^k \xrightarrow{TZ} \frac{0.25}{1 - z^{-1}} + \frac{0.5z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{0.25}{1 - e^{-2}z^{-1}}$$

Con lo que el sistema discreto equivalente queda:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\left\{\frac{0.25}{1 - z^{-1}} + \frac{0.5z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{0.25}{1 - e^{-2}z^{-1}}\right\} =$$

$$= 0.25 + \frac{0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{0.25(1 - z^{-1})}{1 - e^{-2}z^{-1}}$$

La salida pedida se puede calcular ahora por convolución discreta, para lo cual se necesita obtener la respuesta impulsional $g_k = Z^{-1}\{G(z)\}$:

$$g_k = 0.25\delta_k + 0.5U_0(k-1) - 0.25(e^{-2})^k + 0.25(e^{-2})^{k-1}U_0(k-1)$$

En este caso la suma de convolución se reduce a 2 términos, ya que la entrada discretizada es la secuencia

$$u_k = \{A, A/2, 0, 0, \ldots\}:$$

$$y(3) = y(3 \cdot T) = y_3 = \sum_{j=0}^{3} u_j g_{k-j} = u_0 g_3 + u_1 g_2 = 1 =$$

$$= A\left(0.5 - 0.25(e^{-2})^3 + 0.25(e^{-2})^2\right) + \frac{A}{2}\left(0.5 - 0.25(e^{-2})^2 + 0.25(e^{-2})^1\right)$$

De donde se obtiene A=1.3.

Otra posibilidad, una vez obtenida G(z) es aplicar la ecuación en diferencias para los instantes k=0,1,2,3, y obtener así el valor de y(3)

PROBLEMA 39. Identificación de sistema muestreado

Un sistema continuo es controlado por un computador, que actualiza la entrada al mismo cada 100 ms. Se dispone de varias medidas de la entrada y de la salida del sistema, siendo $u_k=\{0.5,-1,1.5,-2\}$, $y_k=\{1,-1,0.8,0.1\}$. Del sistema se sabe que es de primer orden, y además se conoce exactamente el valor de su constante de tiempo, que es $\tau=0.5$. Se sabe que la información de las entradas y salidas no es muy fiable, por problemas de ruido. El valor de la constante de tiempo sin embargo, es exacto. Calcular la ganancia estática del sistema utilizando toda la información disponible.

Solución

La función de transferencia del sistema buscado es:

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s} = \frac{K}{1+0.5s}$$

Como el sistema continuo tiene una entrada constante entre periodos (está controlado por un computador), existe una función de transferencia discreta equivalente que relaciona las secuencias se entradas con los valores muestreados de la salida. Esta función de transferencia discreta equivalente es:

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{K}{s(1+0.5s)}\right\}$$

Para calcularla hay que obtener la transformada inversa de Laplace, muestrear la señal resultante, y aplicar transformada en Z:

$$\frac{K}{s(1+0.5s)} = \frac{2K}{s(s+2)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s+2} = \frac{K}{s}-\frac{K}{s+2} \xrightarrow{TIL} K(1-e^{-2t})$$

$$K(1-e^{-2kT}) = K(1-(e^{-0.2})^k) = K(1-(0.81873)^k)$$

$$\xrightarrow{TZ} K\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.81873z^{-1}}\right)$$

Luego el equivalente discreto es:

$$G(z) = (1-z^{-1})K\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.81873z^{-1}}\right) = \frac{0.18127Kz^{-1}}{1-0.81873z^{-1}}$$

La ecuación en diferencias será por tanto:

$$y_k = 0.81873y_{k-1} + 0.18127Ku_{k-1}$$

La única incógnita es la ganancia estática, K. Para obtenerla se plantean tantas ecuaciones en diferencia como sea posible con los datos que se tienen (ya que éstos tienen mucho ruido)

$$y_1 = 0.81873y_0 + 0.18127Ku_0 \quad \Rightarrow \quad -1 = 0.81873 + 0.090635K$$

$$y_2 = 0.81873y_1 + 0.18127Ku_1 \quad \Rightarrow \quad 0.8 = -0.81873 - 0.18127K$$

$$y_3 = 0.81873y_2 + 0.18127Ku_2 \quad \Rightarrow \quad 0.1 = 0.654984 + 0.271905K$$

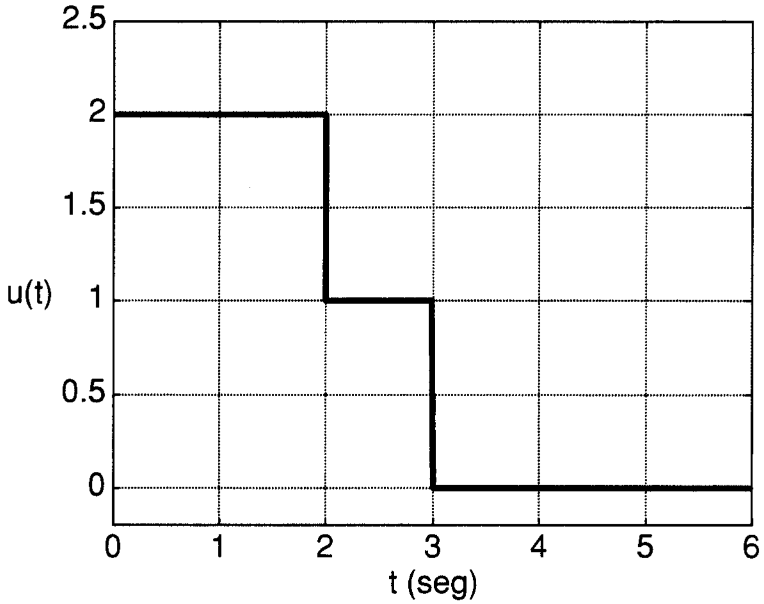
El sistema anterior es un sistema de ecuaciones con 3 ecuaciones y 1 incógnita. La solución de mínimos cuadrados minimiza el error cuadrático:

$$\begin{bmatrix} 0.090635 \\ -0.18127 \\ 0.271905 \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} -1.81873 \\ 1.61873 \\ -0.554984 \end{bmatrix}$$

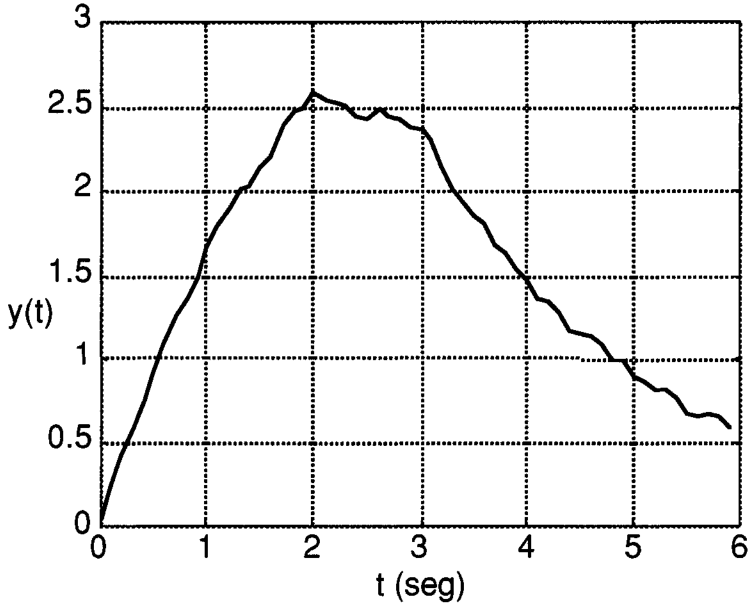
$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 0.090635 \\ -0.18127 \\ 0.271905 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.090635 \\ -0.18127 \\ 0.271905 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0.090635 \\ -0.18127 \\ 0.271905 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1.81873 \\ 1.61873 \\ -0.554984 \end{bmatrix} = -5.297$$

PROBLEMA 40. Identificación de sistema muestreado

Un sistema continuo de primer orden ha tenido como entrada la señal u(t):



La salida se ha medido con un sensor, habiéndose obtenido la gráfica:



Obtener la función de transferencia del sistema.

Solución

Como la entrada es constante entre periodos de 1 segundo existe el equivalente discreto del sistema continuo que relaciona la secuencia de valores de entrada con los valores muestreados de la salida cada segundo. Este sistema discreto a periodo 1 segundo es:

$$G(s) = \frac{k}{1+\tau s}$$

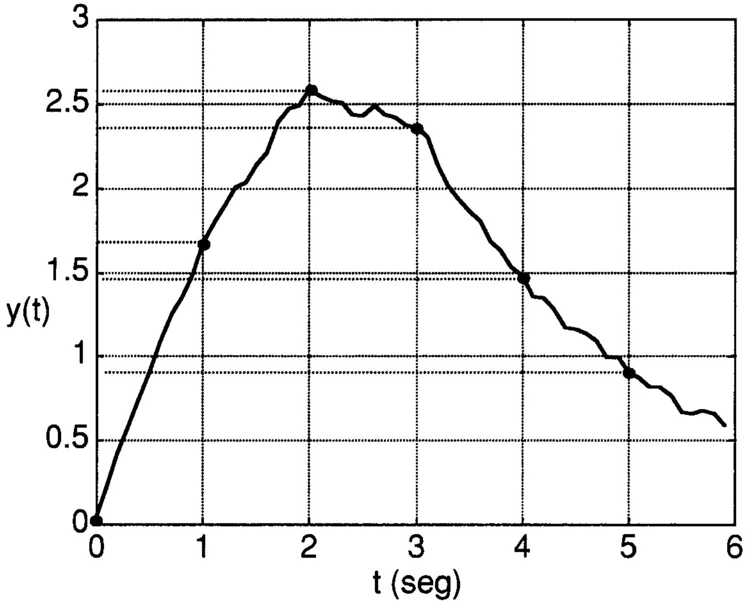
$$\Rightarrow \quad G(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{k}{s(1+\tau s)}\right\} = (1 - z^{-1}) Z\left\{k(1 - e^{-\frac{kT}{\tau}})\right\}$$

$$G(z) = k(1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}} z^{-1}}\right) = \frac{k(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}) z^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}} z^{-1}} = \frac{bz^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

Con los datos de las gráficas se obtendrá la función de transferencia discreta equivalente, y a partir de ésta la ganancia estática k, y la constante de tiempo, τ. Para ello se tomarán tantos valores como sea posible. La secuencia de valores de la entrada es:

$$\{u_k\} = \{2, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$$

ya que u_k es el valor constante que tiene la entrada entre el instante kT y el instante (k+1)T. La secuencia de valores de salida se obtiene muestreando la salida cada segundo, de forma que $y_k=y(kT)$:



$$\{y_k\} = \{0, 1.72, 2.6, 2.35, 1.48, 0.9, \ldots\}$$

Expresando la ecuación en diferencias del sistema se tiene:

$$y_{k+1} = ay_k + bu_k$$

Con los datos medidos, se pueden plantear 5 ecuaciones:

$$y_1 = ay_0 + bu_0 \quad \Rightarrow \quad 1.72 = 2b$$
$$y_2 = ay_1 + bu_1 \quad \Rightarrow \quad 2.6 = 1.72a + 2b$$
$$y_3 = ay_2 + bu_2 \quad \Rightarrow \quad 2.35 = 2.6a + b$$
$$y_4 = ay_3 + bu_3 \quad \Rightarrow \quad 1.48 = 2.35a$$
$$y_5 = ay_4 + bu_4 \quad \Rightarrow \quad 0.9 = 1.48a$$

Expresando las ecuaciones en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1.72 & 2 \\ 2.6 & 1 \\ 2.35 & 0 \\ 1.48 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.72 \\ 2.6 \\ 2.35 \\ 1.48 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

con lo que se tiene un sistema de ecuaciones incompatible (más ecuaciones que incógnitas). Los valores de a y b que minimizan el error cuadrático constituyen la solución de mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1.72 & 2.6 & 2.35 & 1.48 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1.72 & 2 \\ 2.6 & 1 \\ 2.35 & 0 \\ 1.48 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1.72 & 2.6 & 2.35 & 1.48 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.72 \\ 2.6 \\ 2.35 \\ 1.48 \\ 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5992 \\ 0.8190 \end{bmatrix}$$

Igualando los coeficientes de la función de transferencia discreta se obtiene:

$$a = 0.5992 = e^{-\frac{1}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \tau = 1.952$$

$$b = 0.819 = k(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}) = k(1 - 0.5992) \quad \Rightarrow \quad k = 2.043$$

PROBLEMA 41. Aproximación discreta

Dado el sistema continuo de función de transferencia

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 2}$$

a) Obtener un sistema discreto aproximado mediante la aproximación de TUSTIN o bilineal (aprox. de la integral) para un periodo de muestreo de 0.3 segundos.

b) Obtener cuál es la mayor diferencia entre la respuesta ante escalón del sistema continuo y la del sistema discreto aproximado, y en qué instante se da.

Solución

a*) La aproximación de la integral por trapecios (de TUSTIN o bilineal) se obtiene sin más que sustituir la variables en la función de transferencia continua por:*

$$\frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

La función de transferencia discreta aproximada será por tanto:

$$G(z) = \frac{3}{\left(\frac{2(z-1)}{0.3(z+1)}\right)^2 + 3\frac{2(z-1)}{0.3(z+1)} + 2} = \frac{3z^2+6z+3}{66.44z^2 - 84.88z + 26.44}$$

b) Para calcular la diferencia entre la respuesta ante escalón exacta y la aproximada es necesario obtener la respuesta del sistema continuo en los instantes de muestreo (cada 0.3 segundos), y restarla de la respuesta del sistema discreto aproximado, calculando después el valor máximo:

$$\left.\begin{array}{l} Y(s) = \frac{1}{s}G(s) \xrightarrow{TIL} y(t) \xrightarrow{muestreo} y(0.3k) \\ Y'(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}G'(z) \xrightarrow{TIZ} y'_k \end{array}\right\} \Rightarrow e_k = y(0.3k) - y'_k$$

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+2)} \xrightarrow{TIL} y(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-2t} = 1.5 - 3e^{-t} + 1.5e^{-2t}$$

La señal muestreada cada 0.3 segundos es:

$$y(0.3k) = 1.5 - 3e^{-0.3k} + 1.5e^{-0.6k} = 1.5 - 3\cdot 0.7408^k + 1.5\cdot 0.5488^k$$

$$Y'(z) = \frac{z(3z^2+6z+3)}{(z-1)(66.44z^2 - 84.88z + 26.44)} =$$

$$= \frac{0.04515(1+2z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})(1-0.5384z^{-1})(1-0.7392z^{-1})}$$

donde tomando transformada inversa en Z se obtiene:

$$y'_k = A + B0.5384^k + C0.7392^k = 1.5 + 1.153\cdot 0.5384^k - 2.608\cdot 0.7392^k$$

La diferencia es

$$e_k = y(0.3k) - y'_k =$$

$$= -3\cdot 0.7408^k + 1.5\cdot 0.5488^k - 1.153\cdot 0.5384^k + 2.608\cdot 0.7392^k$$

cuyo valor máximo se puede obtener (aproximadamente) derivando respecto de k e igualando a cero:

$$\frac{de_k}{dk} = -3\ln(0.7408)0.7408^k + 1.5\ln(0.5488)0.5488^k -$$

$$-1.153\ln(0.5384)0.5384^k + 2.608\ln(0.7392)0.7392^k = 0$$

Resolviendo la ecuación por tanteo se obtiene k=2.05, por lo que el máximo se dará en el instante k=2.

Otra forma de calcular el valor máximo en este caso es obtener los sucesivos valores para k=0,1,2 etc, ya que la diferencia tiende a cero con el tiempo, y las potenciales convergen rápido, por lo que el máximo se dará para un valor de k pequeño. Haciendo el cálculo para los primeros instantes se obtiene:

e_0=-0.045, e_1= -0.0921, e_2= -0.1038, e_3= -0.0982, e_4= -0.0856, e_5= -0.0712, e_6= -0.0574, e_7=-0.0454, e_8= -0.0354, e_9= -0.0273, e_{10}= -0.0209. *Se observa que la diferencia máxima se da en el instante k=2, y es de 0.1038 (en valor absoluto).*

4 SIMPLIFICACIÓN DE DIAGRAMAS DE BLOQUES

Esta sección contiene problemas en los que se tiene que simplificar un diagrama de bloques para obtener la función de transferencia entre dos variables del mismo.

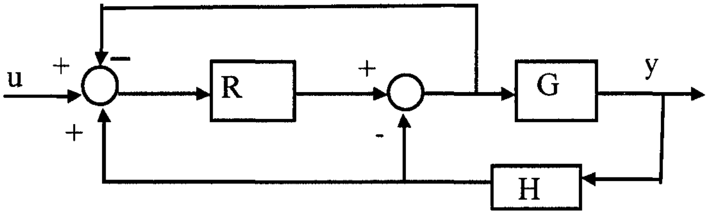
La resolución de los problemas se basa en la aplicación de las distintas propiedades y reglas de simplificación estudiadas en teoría (traslación de nodos de bifurcación y de nodos sumadores, cierre de bucles, elementos en serie y paralelo, etc).

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 5 de [Sala00].

También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [D'azzo92] (capítulo 5), y [Ogata93] (capítulo 1).

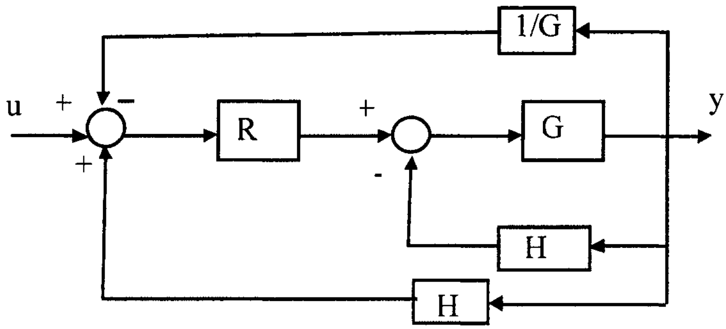
PROBLEMA 42. Diagrama de bloques

Obtener por simplificación la función de transferencia entre u e y en el siguiente sistema:

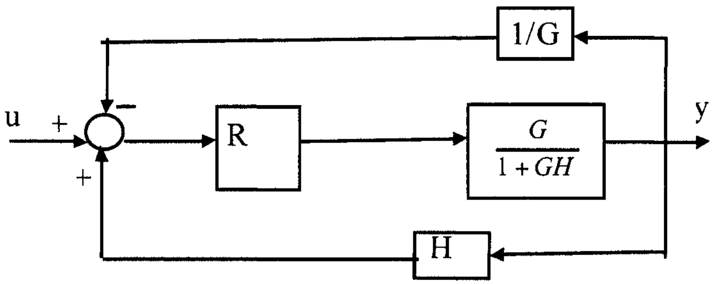


Solución

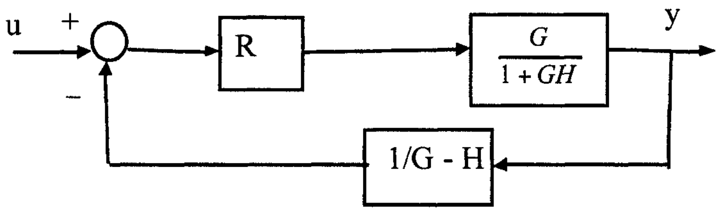
En primer lugar se traslada un nodo de bifurcación de la entrada de G a la salida de G:



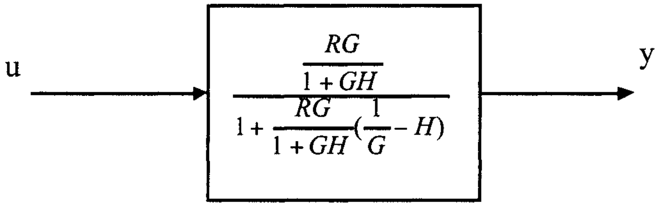
A continuación se simplifica el bucle de realimentación interno:



Se unen los dos bloques que están en paralelo:

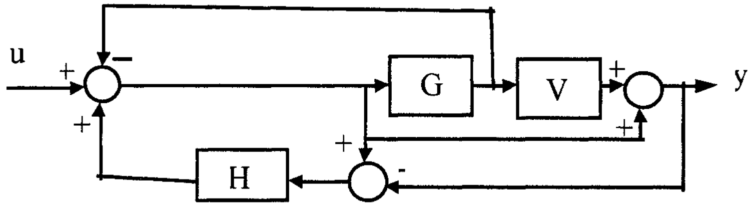


Por último se simplifica el bucle de realimentación:



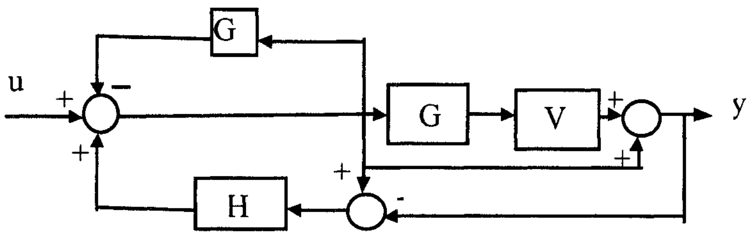
PROBLEMA 43. Diagrama de bloques

Obtener por simplificación la función de transferencia entre *u* e *y* en el siguiente sistema:

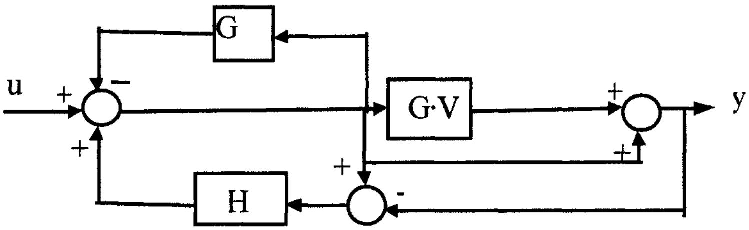


Solución

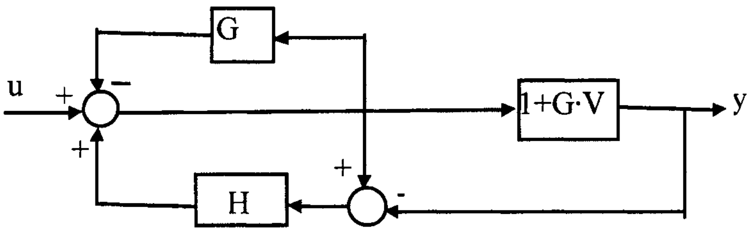
En primer lugar se traslada un nodo de bifurcación de la salida de G a la entrada de G:



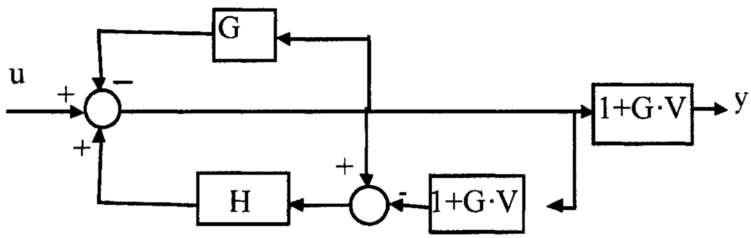
A continuación se unen los bloques G y V que están en serie:



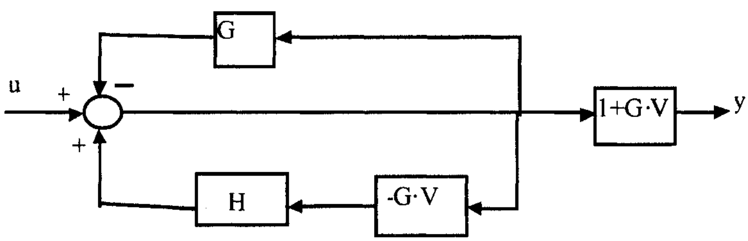
Se unen los bloques GV y un bloque unitario que están en paralelo:



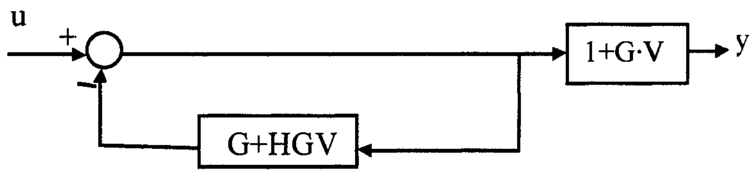
Se traslada un nodo de bifurcación de la salida del bloque 1+GV a la entrada:



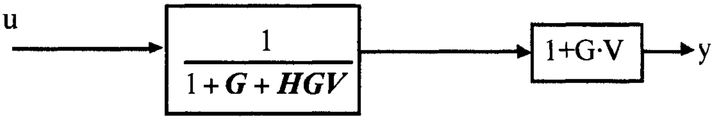
Se unen los bloques 1+GV y un bloque unitario que están en paralelo:



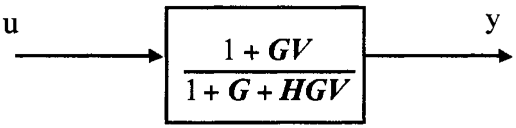
Se unen los bloques H y -GV que están en serie, y el resultado con el bloque G que está en paralelo:



Se simplifica el bucle de realimentación:

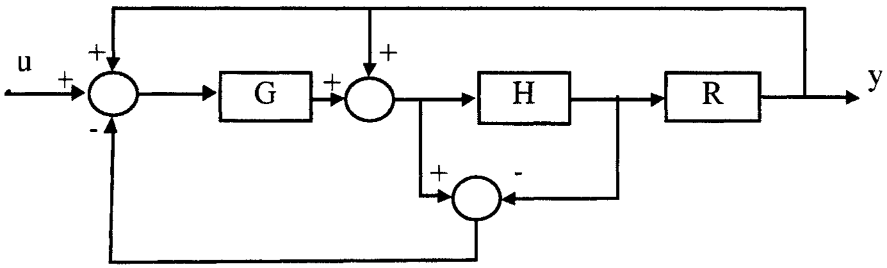


Por último se unen los bloques en serie:



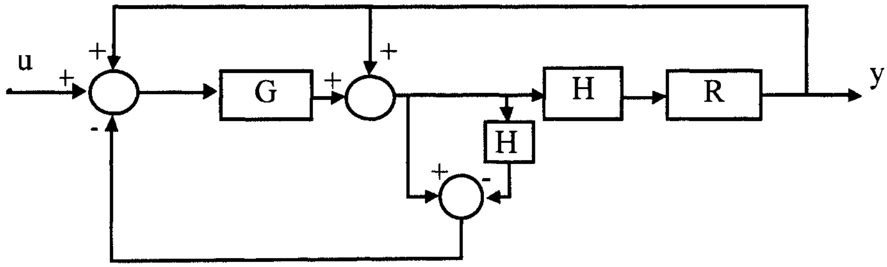
PROBLEMA 44. Diagrama de bloques

Obtener por simplificación la función de transferencia entre *u* e *y* en el siguiente sistema:

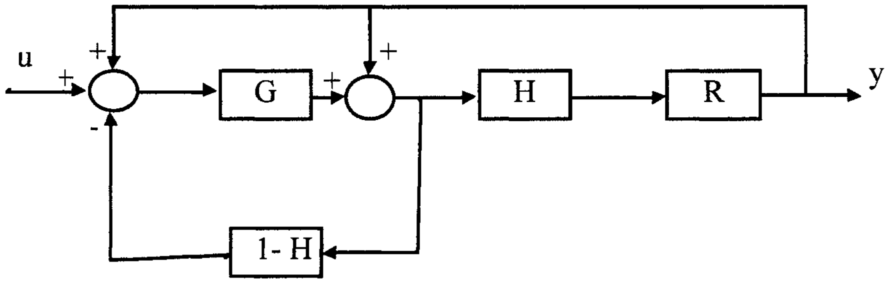


Solución

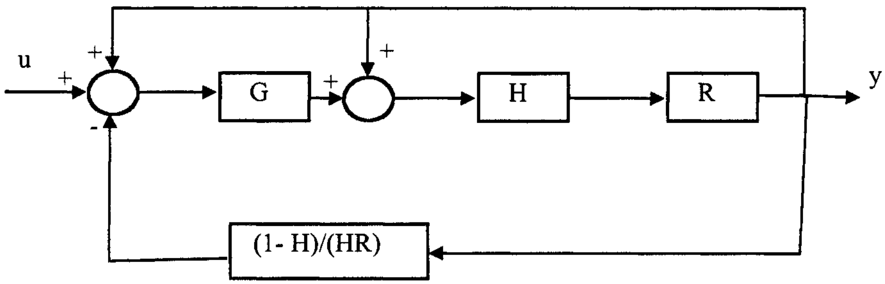
En primer lugar se traslada el nodo de bifurcación de la salida de H a la entrada:



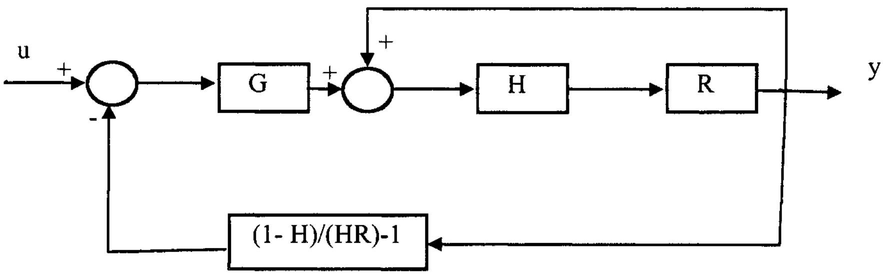
Se unen el bloque H y un bloque unitario que están en paralelo:



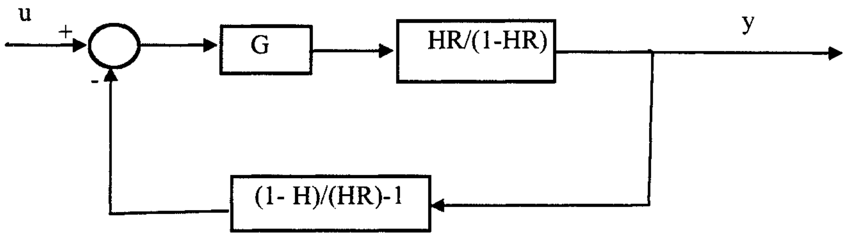
Se traslada el nodo de bifurcación de la entrada de H a la salida de R



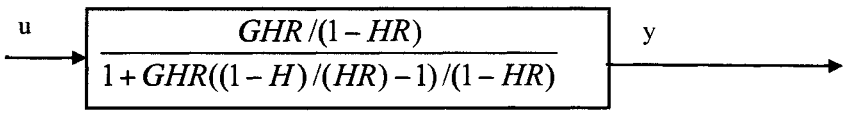
Se une el bloque inferior con un bloque unitario que está en paralelo:



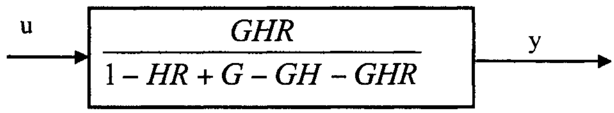
Se unen los bloques en serie (H y R) y se simplifica el bucle de realimentación:



Se unen los bloques en serie de la parte superior y se simplifica el bucle de realimentación:

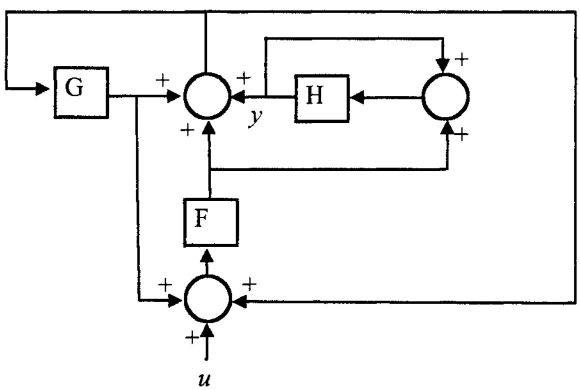


Se opera para simplificar la expresión final:



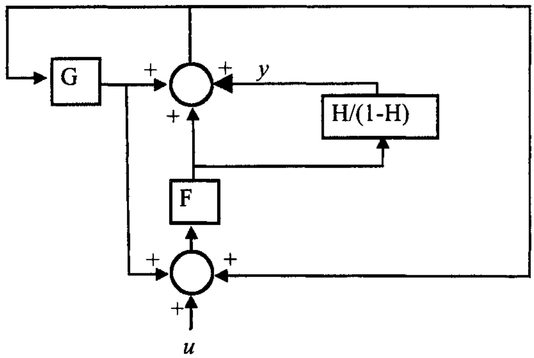
PROBLEMA 45. Diagrama de bloques

Obtener la función de transferencia entre las variables u e y del siguiente sistema:

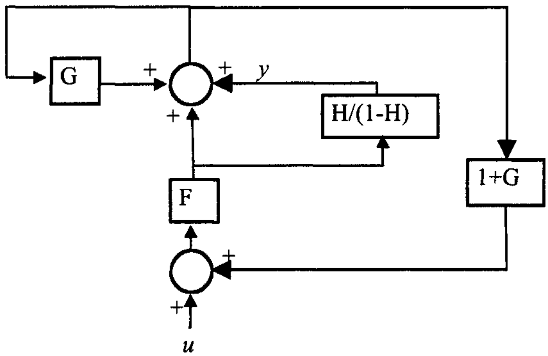


Solución

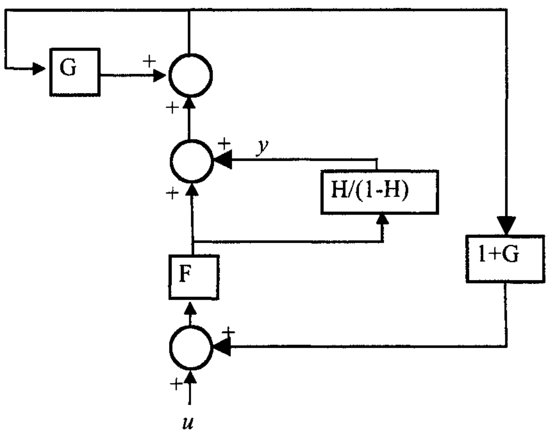
En primer lugar se simplifica el bucle de realimentación:



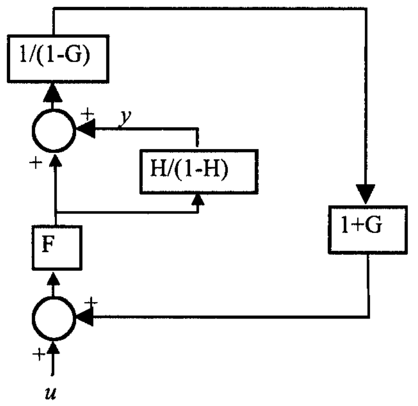
Se unen en paralelo el bloque G y un bloque unitario:



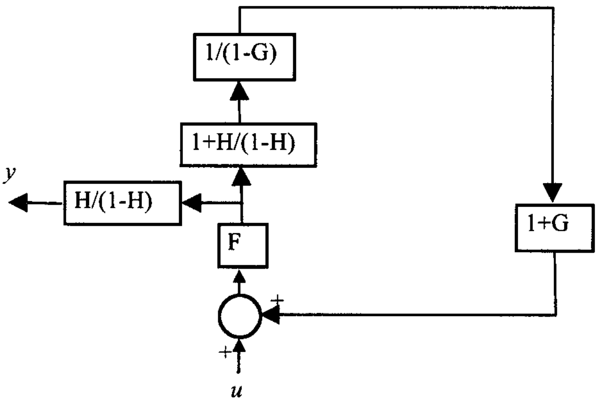
Se separa en dos el nodo sumador:



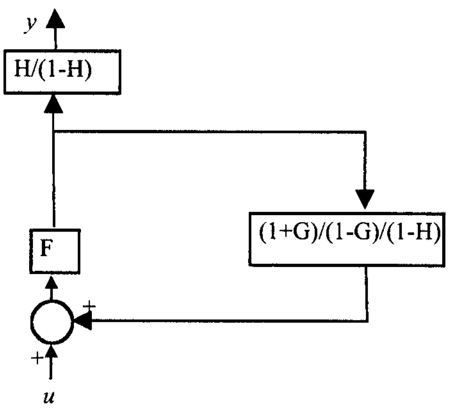
Se simplifica el bucle de realimentación:



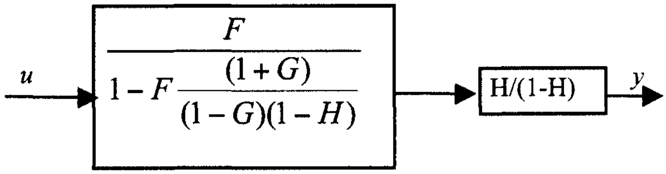
Se unen los dos bloques en paralelo (uno de ellos unitario), y se mantiene el bloque H/(1-H) para que no desaparezca la variable y:



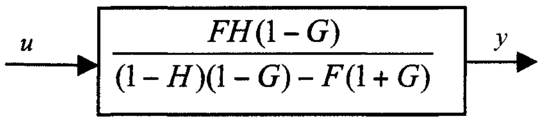
Se unen en serie los tres bloques:



Se simplifica el bucle de realimentación:

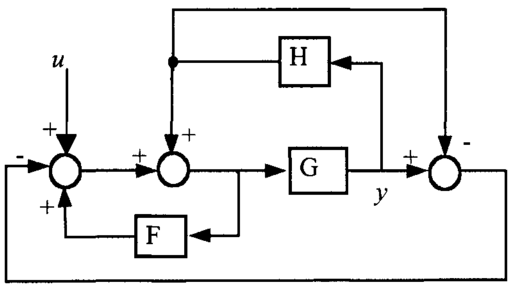


Por último se unen en serie los dos bloques restantes:



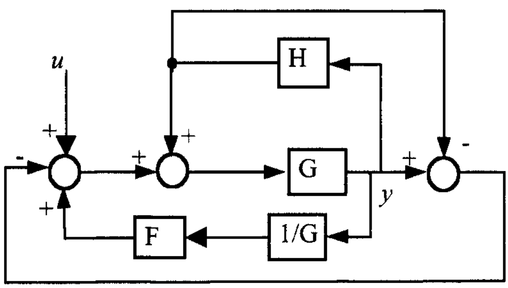
PROBLEMA 46. Diagrama de bloques

Obtener la función de transferencia entre *u* e *y* en el siguiente sistema:

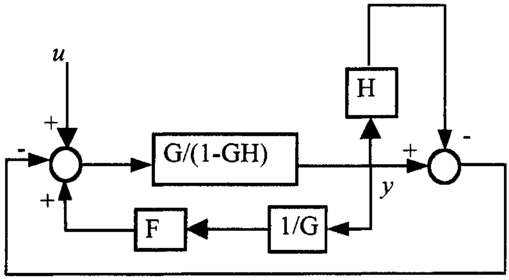


Solución

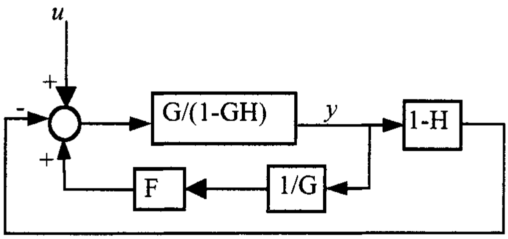
Se traslada el nodo de bifurcación de la entrada de G a la salida:



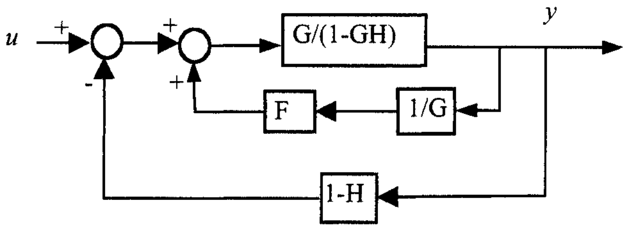
Se simplifica el bucle de realimentación superior (manteniendo el bloque H para que no se pierda la señal que va al último nodo sumador):



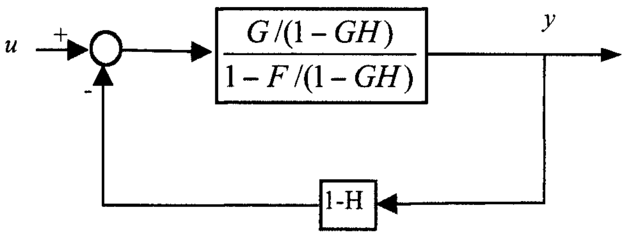
Se unen en paralelo el bloque H y un bloque unitario:



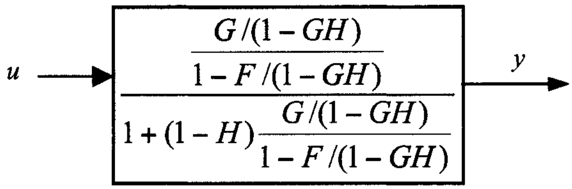
Se separa en dos el nodo sumador de la izquierda y se reordena el dibujo:



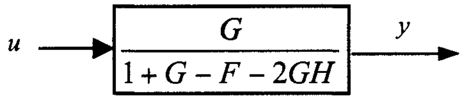
Se simplifica el bucle de realimentación interno:



Se simplifica el bucle de realimentación resultante:



Finalmente se simplifica la expresión obtenida:



5 MODELADO DE SISTEMAS FÍSICOS. LINEALIZACIÓN

Esta sección contiene problemas en los que se tienen que obtener las ecuaciones diferenciales que modelan un sistema físico. Posteriormente esas ecuaciones se linealizan alrededor de un punto de funcionamiento, pasando después a analizar el comportamiento del sistema lineal aproximado (estabilidad, respuesta temporal ante determinada entrada, etc.).

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 2 de [Sala00].

También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [D'azzo92] (capítulo 2), [Phillips96] (capítulo 2), [Franklin91] (capítulo 2) y [Ogata93] (capítulo 2).

PROBLEMA 47. Surtidor de gasolinera

Un surtidor de gasolinera está modelado por las ecuaciones:

$$a\frac{dQ}{dt} = P - bQ^2 - cQ$$

donde las constantes *a*, *b* y *c* dependen de la geometría del surtidor, *Q* es el caudal de gasolina que da el surtidor, y la presión *P* proporcionada por la bomba de impulsión cumple la ecuación diferencial:

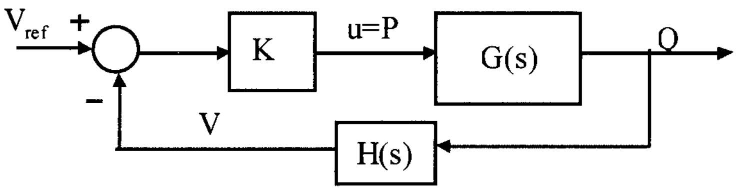
$$d \cdot \frac{dP}{dt} + P = u$$

siendo *u* la tensión de entrada al motor de la bomba, que se puede manipular a voluntad (es la entrada al sistema). Tomando $a=2, b=4, c=1, d=0.1$, calcular:

a) Obtener el sistema linealizado alrededor del punto de funcionamiento definido por $Q_0=1$ l/s.

b) Calcular aproximadamente la evolución del caudal con el tiempo si estando en el punto de funcionamiento anterior, la entrada aumenta instantáneamente en 0.5.

c) Si lo que se desea medir y controlar es la cantidad total de gasolina suministrada (V), ¿qué función de transferencia debe tener el elemento sensor H(s)?. Para el sistema linealizado alrededor del punto $Q_0=0$, despreciando la constante *d* (tomar $d=0$), calcular el valor máximo que puede tomar la ganancia K sin que el sistema en bucle cerrado funcione de forma incorrecta ante referencia escalón (funcionará incorrectamente si el valor de V sobrepasa el de V_{ref} en algún momento, pues la gasolina no se puede recuperar del depósito del coche):



Solución

a) *El punto de funcionamiento se define como:*

$$a\frac{dQ}{dt} = 0 = P_0 - bQ_0^2 - cQ_0$$

$$d \cdot \frac{dP}{dt} = 0 = -P_0 + u_0$$

de donde, teniendo en cuenta que $Q_0=1$, se obtiene $P_0 = u_0 = 5$

linealizando la primera ecuación se obtiene:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\Delta Q}{dt} = \frac{1}{a}\Delta P - \frac{2bQ_0 + c}{a}\Delta Q = 0.5\Delta P - 4.5\Delta Q$$

que, tomando T.L. y despejando queda:

$$\Delta Q(s) = \frac{0.5}{s + 4.5}\Delta P(s)$$

la segunda ecuación ya está linealizada, por lo que es válida también con incrementos:

$$d \cdot \frac{d\Delta P}{dt} + \Delta P = \Delta u$$

que tomando T.L. queda:

$$\Delta P(s) = \frac{1}{1 + 0.1s}\Delta U(s)$$

que, sustituido arriba nos da el sistema linealizado:

$$\Delta Q(s) = \frac{0.5}{(s + 4.5)(1 + 0.1s)}\Delta U(s)$$

b) Un cambio brusco significa una señal escalón. Si la entrada aumenta en 0.5 respecto al punto de funcionamiento, quiere decir que el incremento de la entrada es un escalón de valor 0.5. Para obtener la evolución del incremento del caudal se aplicará la f.d.t. obtenida anteriormente:

$$\Delta U(s) = \frac{0.5}{s}$$

$$\Delta Q(s) \approx \frac{0.5}{(s + 4.5)(1 + 0.1s)}\frac{0.5}{s} = \frac{2.5}{(s + 4.5)(s + 10)} =$$

$$= \frac{0.0555}{s} + \frac{-0.1}{s + 4.5} + \frac{0.045}{s + 10}$$

con lo que la T.I.L. es:

$$\Delta Q(t) \approx 0.0555(1 - 1.8e^{-4.5t} + 0.81e^{-10t})$$

siendo la evolución del caudal absoluto:

$$Q(t) = \Delta Q(t) + Q_0 \approx 1 + 0.0555(1 - 1.8e^{-4.5t} + 0.81e^{-10t})$$

c) En primer lugar se obtiene G(s) linealizando alrededor de Q_0=0, u_0=0 (d=0 en este apartado), quedando:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\Delta Q}{dt} = \frac{1}{a}\Delta u - \frac{2bQ_0 + c}{a}\Delta Q =$$

$$= 0.5\Delta u - 0.5\Delta Q \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\Delta Q(s)}{\Delta U(s)} = \frac{0.5}{s+0.5}$$

La f.d.t. del sensor debe ser $H(s) = \frac{1}{s}$, *que es el operador integral, pues para obtener la cantidad total de gasolina vertida (V) basta integrar el caudal (Q).*
la f.d.t. en bucle cerrado será (según el diagrama de bloques):

$$\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)} = \frac{K\dfrac{0.5}{s+0.5}}{1+K\dfrac{1}{s}\dfrac{0.5}{(s+0.5)}} =$$

$$= \frac{0.5Ks}{0.5K + s(s+0.5)} = \frac{0.5Ks}{s^2 + 0.5s + 0.5K}$$

Para que el sistema no sea oscilatorio, los polos de la f.d.t. en bucle cerrado deben ser reales (no tener parte imaginaria, que da lugar a términos senoidales), por lo que:

$$0.5^2 - 4 \cdot 0.5K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < \frac{1}{8}$$

Nota: el sistema no debe ser oscilatorio, pues eso significaría que tendría sobreoscilación (la salida se pasaría de largo, o lo que es lo mismo, se introduciría en el depósito más gasolina de la requerida, siendo imposible por las características físicas del problema volver a recuperarla del depósito del coche para llegar al valor final deseado).

PROBLEMA 48. Ventilador de continua

Un motor de corriente continua acciona un ventilador en el seno de un fluido, en el que el par de rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad de giro.

a) Obtener las ecuaciones del sistema considerando como entrada la tensión del motor, y como salida la velocidad del motor.

b) Obtener la ecuación linealizada alrededor del punto de funcionamiento definido por u=10 V. ¿Se podría simplificar el modelo lineal obtenido? ¿Cómo?

c) Obtener de forma aproximada la evolución de la velocidad si partiendo del punto de funcionamiento anterior, la entrada se aumenta bruscamente en 1 V.

d) Obtener aproximadamente la amplitud de la oscilación de la variable ω en régimen permanente cuando el incremento de la entrada alrededor del punto de equilibrio u=10, es una senoidal de amplitud 1 y frecuencia 5 rad/s.

Datos: Ecuaciones eléctricas del motor de continua:

$$L\frac{di_a}{dt} + Ri_a + \varepsilon = u \ ; \ \varepsilon = K_b \cdot \omega \ ; T = K_m \cdot i_a$$

par de rozamiento: $T_{roz}=c\ \omega^2$, momento de inercia del motor+ventilador, J.

Valores:
L=0.1 H, R=10 W, K_b=0.2 V/rd/s, K_m=0.3 Nm/A, c=10^{-3} Nm/(rd/s)^2, J=0.4 kg m^2.

Solución

a) *Las ecuaciones del sistema son las ecuaciones eléctricas del motor (expresadas arriba) más la ecuación de rotación mecánica:*

$$J\frac{d\omega}{dt} = T - c\omega^2$$

b) *Para linealizar la ecuación en primer lugar hay que calcular el punto de funcionamiento:*

$$\left.\begin{array}{l} R\bar{i}_a + \bar{\varepsilon} = \bar{u} = 10 \\ \bar{\varepsilon} = K_b \cdot \bar{\omega} \\ \bar{T} = K_m \cdot \bar{i}_a \\ 0 = \bar{T} - c\bar{\omega}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{\omega} = 14.58 \ rad/s \\ \bar{\varepsilon} = 2.916 \ V \\ \bar{T} = 0.2126 \ Nm \\ \bar{i}_a = 0.7087 \ A \end{array}$$

La única ecuación no lineal es la mecánica, por lo que bastará linealizar ésta, ya que el resto, al ser lineales, se cumplen igual para valores absolutos como para incrementos:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\Delta\omega}{dt} = \frac{1}{J}T - \frac{c}{J}\omega^2 \approx -\frac{c}{J}2\bar{\omega}(\omega - \bar{\omega}) + \frac{1}{J}(T - \bar{T}) =$$

$$= -\frac{c}{J}2\bar{\omega}\,\Delta\omega + \frac{1}{J}\Delta T = -0.0729\,\Delta\omega + 2.5\,\Delta T$$

$$L\frac{d\Delta i_a}{dt} + R\Delta i_a + \Delta\varepsilon = \Delta u$$

$$\Delta\varepsilon = K_b \cdot \Delta\omega$$

$$\Delta T = K_m \cdot \Delta i_a$$

Tomando T.L. y despejando $\Delta\omega(s)$ en función de $\Delta U(s)$ se obtiene:

$$G(s) = \frac{\Delta\omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{K_m}{(R + Ls)(Js + 2c\overline{\omega}) + K_m K_b} =$$
$$= \frac{0.3}{(10 + 0.1s)(0.4s + 0.02916) + 0.06} =$$
$$= \frac{0.3}{0.04s^2 + 4.0029s + 0.3516} = \frac{7.5}{(s + 0.088)(s + 100)}$$

El modelo obtenido sí se puede simplificar, pues uno de los polos es claramente dominante respecto del otro (es 1000 veces más lento), por lo que se podría reducir manteniendo la ganancia estática a:

$$G(s) = \frac{\Delta\omega(s)}{\Delta U(s)} \approx \frac{0.075}{(s + 0.088)}$$

El resultado anterior se habría obtenido directamente si se hubiera despreciado la inductancia L desde el principio, cosa que suele ser válida para los pequeños motores de continua.

c) *Si la entrada varía bruscamente en 1 V. eso representa una entrada Δu en escalón de valor 1V. La evolución de la salida se obtendrá:*

$$\Delta\omega(s) \approx G(s)\Delta U(s) = \frac{0.075}{s(s + 0.088)} = \frac{0.852}{s} - \frac{0.852}{s + 0.088}$$
$$\Delta\omega(t) = 0.852(1 - e^{-0.088t})$$

Utilizando la f.d.t. completa sería:

$$\Delta\omega(s) \approx G(s)\Delta U(s) = \frac{7.5}{s(s + 0.088)(s + 100)} =$$
$$= \frac{0.852}{s} - \frac{0.853}{s + 0.088} + \frac{0.00075}{s + 100}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega(t) = 0.8521 - 0.853e^{-0.088t} + 0.00075e^{-100t}$$

que prácticamente coincide con lo anterior, ya que el término de e^{-100t} además de ser muy pequeño, tiende a cero muy rápidamente.

La evolución completa de la velocidad será:

$$\omega(t) = \overline{\omega} + \Delta\omega(t) = 14.58 + 0.852(1 - e^{-0.088t})$$

d) *Si el incremento de la entrada es una señal senoidal de amplitud 1 y frecuencia 5 rad/s tendremos $\Delta u(t)$=sen(5t). La repuesta del sistema ante esa entrada tiene una parte transitoria que tiende a cero con el tiempo, y una parte de régimen permanente que es senoidal de la misma frecuencia que la entrada. La amplitud y desfase de esa parte permanente vienen dadas por la respuesta en frecuencia del sistema, es decir, la amplitud de la oscilación de la variable $\Delta\omega(t)$ será*

$$|G(j5)| = \left|\frac{0.075}{5j + 0.088}\right| = \frac{0.075}{\sqrt{5^2 + 0.088^2}} = 0.015\ rad/s$$

La fase sería el argumento:

$$\varphi = \arg(G(j5)) = \arg\left(\frac{0.075}{5j + 0.088}\right) = -arctan\left(\frac{5}{0.088}\right) = -1.553rad$$

Es decir, la parte permanente de la salida sería: $\Delta\omega(t) = 0.015\,\text{sen}(5t - 1.553)$

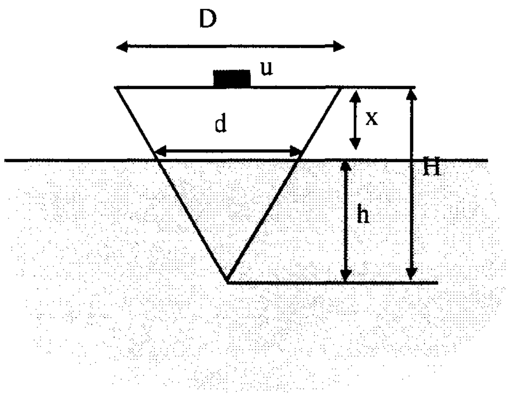
PROBLEMA 49. Boya cónica

Se dispone de una boya cónica cuya base superior tiene un diámetro de 2 m. Se puede actuar sobre la boya colocando pesas encima. La variable de entrada al sistema será por tanto la masa de las pesas colocadas sobre la boya. Se desea obtener la masa y la altura total de la boya. Para ello se parte de una posición (x_0=?) de reposo inicial desconocida, sin ninguna pesa encima (u_0=0). A continuación se le pone encima una pesa de 100 kg, midiendo la evolución de la posición de la boya, observándose que:

- La posición más hundida que alcanza es de $x=x_0$-0.08m.
- El tiempo que ha tardado en llegar a esa posición de hundimiento máximo desde que se puso la pesa es de 0.6 segundos.
- La nueva posición en la que se estabiliza es de $x=x_0$-0.05m.

Obtener la masa (M) y la altura (H) de la boya, así como la posición inicial x_0, sabiendo que el agua produce una fuerza de rozamiento vertical sobre la boya proporcional a la velocidad de ésta. Utilizar las aproximaciones que sean necesarias para el cálculo.

Datos: volumen de un cono: $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{h}{3}$. Principio de Arquímedes: fuerza vertical de empuje = peso del agua desalojada (F=1000*V*g, donde V en m^3).



Solución

El volumen hundido es: $V = \dfrac{\pi d^2}{4} \cdot \dfrac{h}{3} = \dfrac{\pi D^2 (H-x)^3}{12H^2}$

*Ya que, h=H-x, d=D*h/H=D*(H-x)/H.*

En la posición de reposo inicial (u_0=0) la masa de la boya será por el principio de Arquímedes igual a la masa del agua que desaloja:

$$M = 1000V = \frac{1000\pi}{3}\frac{(H-x_0)^3}{H^2}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\frac{d}{dt}\left[(M+u)\dot{x}\right] = (M+u)\ddot{x} + \dot{u}\dot{x} = -Mg - ug - c\dot{x} + 1000gV$$

donde M+u es la masa total (la de la boya más la de la pesa que se coloque encima).

$$(M+u)\ddot{x} + \dot{u}\dot{x} + c\dot{x} - 1000g\frac{\pi D^2 (H-x)^3}{12H^2} = -Mg - ug$$

$$\ddot{x} = -\frac{c+\dot{u}}{M+u}\dot{x} + \frac{1000g}{M+u}\frac{\pi D^2 (H-x)^3}{12H^2} - g$$

Linealizando el sistema alrededor de $u_0 = 0, \dot{u}_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, x_0 = ?$ *, queda:*

$$\Delta\ddot{x} = -\frac{c+\dot{u}_0}{M+u_0}\Delta\dot{x} - \frac{\dot{x}_0}{M+u_0}\Delta\dot{u} + \frac{1000g}{(M+u_0)}\frac{\pi D^2}{12H^2}3(H-x_0)^2(-1)\Delta x -$$
$$-\frac{1000g}{(M+u_0)^2}\frac{\pi D^2 (H-x_0)^3}{12H^2}\Delta u$$

es decir:

$$\Delta\ddot{x} + \frac{c}{M}\Delta\dot{x} + \frac{1000g}{M}\frac{\pi}{H^2}(H-x_0)^2\Delta x = -\frac{1000g}{M^2}\frac{\pi}{3H^2}(H-x_0)^3\Delta u$$

que, sustituyendo el valor de M queda:

$$\Delta\ddot{x} + \frac{3c}{1000\pi}\frac{H^2}{(H-x_0)^3}\Delta\dot{x} + \frac{3g}{(H-x_0)}\Delta x = -\frac{3g}{1000\pi}\frac{H^2}{(H-x_0)^3}\Delta u$$

$$G(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-\dfrac{3g}{1000\pi}\dfrac{H^2}{(H-x_0)^3}}{s^2 + \dfrac{3c}{1000\pi}\dfrac{H^2}{(H-x_0)^3}s + \dfrac{3g}{(H-x_0)}}$$

La colocación en un momento determinado de una pesa de 100 kg representa una entrada escalón de valor 100 para Δu, por lo que las medidas tomadas (máximo hundimiento y tiempo en llegar a ese máximo) corresponden a la respuesta ante escalón del sistema anterior.

El tiempo en llegar al máximo no es más que el tiempo de pico (t_p=0.6seg).

La posición en la que se estabiliza nos da el valor de la ganancia estática, ya que:

$\Delta u=100 \Rightarrow \Delta x(t\rightarrow\infty)=-0.05 \Rightarrow G(s=0)=-0.0005$

El valor del hundimiento máximo nos permite obtener la sobreoscilación, pues:

$$\delta = \frac{\Delta x(max) - \Delta x(t=\infty)}{\Delta x(t=\infty)} = \frac{-0.08-(-0.05)}{-0.05} = 0.6$$

De la ganancia estática podemos obtener una ecuación:

$$G(0) = \frac{-\dfrac{3g}{1000\pi}\dfrac{H^2}{(H-x_0)^3}}{\dfrac{3g}{(H-x_0)}} = \frac{-H^2}{1000\pi(H-x_0)^2} = -0.0005 \quad \Rightarrow \quad H = 4.95x_0$$

que, sustituyendo en G(s) queda:

$$G(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-\dfrac{3g}{1000\pi}\dfrac{4.95^2}{3.95^3 x_0}}{s^2 + \dfrac{3c}{1000\pi}\dfrac{4.95^2}{3.95^3 x_0}s + \dfrac{3g}{(3.95x_0)}}$$

Como se trata de un sistema de 2º orden estándar, se puede expresar:

$$\delta = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.16$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 5.236 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 5.304$$

comparando con G(s) se tiene:

$$\frac{3g}{3.95x_0} = \omega_n^2 = 28.132 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0.265m \quad \Rightarrow \quad H = 1.31m \quad \Rightarrow \quad M = 698Kg$$

$$\frac{3c}{1000\pi}\frac{4.95^2}{3.95^3 x_0} = 2\xi\omega_n \quad \Rightarrow \quad c = 1184.7 \quad Kg/s$$

PROBLEMA 50. Acuario

Se quiere controlar la temperatura del agua de un acuario de peces tropicales. Para ello se dispone de una resistencia calefactora de masa total 0.5 kg y calor específico 4000 J/kg°C que está en contacto con la pared del acuario. La pared del acuario tiene una masa de 10 kg y un calor específico de 10000 J/kg°C. El agua tiene una masa total de 20 kg y un calor específico de 4180 J/kg°C. Los coeficientes de transmisión de calor son: resistencia-pared:μ_{rp}=100W/°C, agua-pared: μ_{ap}=50W/°C, pared-exterior: μ_{pe}=30W/°C, agua-exterior: μ_{ae}=20W/°C. La entrada al sistema es la potencia eléctrica que entra en la resistencia ($u=V^2/R$), mientras la salida del sistema es la temperatura del agua. Obtener:

a) Las ecuaciones de estado del sistema.

b) Dibujar el diagrama de bloques del sistema, donde aparezcan las distintas temperaturas, incluida la temperatura exterior, que será una entrada de perturbación.

c) Simplificar el sistema reduciéndolo a uno de orden 2. Para ello despreciar la capacidad calorífica de la resistencia calefactora, es decir, suponer que la potencia *u* es transmitida directamente a la pared del acuario. Obtener las ecuaciones de estado del sistema reducido dibujando además el diagrama de bloques correspondiente. ¿Cómo se podría comprobar si la simplificación hecha es correcta?.

En los siguientes apartados utilizar el modelo simplificado de orden 2.

d) Para controlar la temperatura del agua se plantea una realimentación de la salida, de forma que $u=k(T_{ref}-T_a)$ donde T_a es la temperatura del agua y T_{ref}=35°C es la temperatura de referencia constante. Si los peces sobreviven mientras la temperatura esté entre 30 y 36°C, muriendo en cuanto se sale de ese rango, obtener la condición que debe cumplir *k* para que en régimen permanente los peces estén vivos, suponiendo una temperatura exterior constante de 20°. Para mayor seguridad se decide tomar el valor de *k* que hace que la temperatura en régimen permanente sea de 33°C. Calcular dicho valor.

e) Si estando con el control anterior en régimen permanente con $T_e=20$, $T_a=33$, se produce un cambio brusco de T_e de forma que pasa a valer 10°C, calcular la evolución temporal de la temperatura del agua, y si los peces sobrevivirán.

Solución

a) *Las ecuaciones de transmisión de calor entre los diferentes cuerpos son:*

$$m_r c_r \dot{T}_r = u - \mu_{rp}(T_r - T_p)$$

$$m_p c_p \dot{T}_p = \mu_{rp}(T_r - T_p) - \mu_{ap}(T_p - T_a) - \mu_{pe}(T_p - T_e)$$

$$m_a c_a \dot{T}_a = \mu_{ap}(T_p - T_a) - \mu_{ae}(T_a - T_e)$$

sustituyendo valores y despejando las derivadas:

$$\dot{T}_r = -0.05T_r + 0.05T_p + 0.0005u$$

$$\dot{T}_p = 0.001T_r - 0.0018T_p + 0.0005T_a + 0.0003T_e$$

$$\dot{T}_a = 0.0006T_p - 0.00084T_a + 0.00024T_e$$

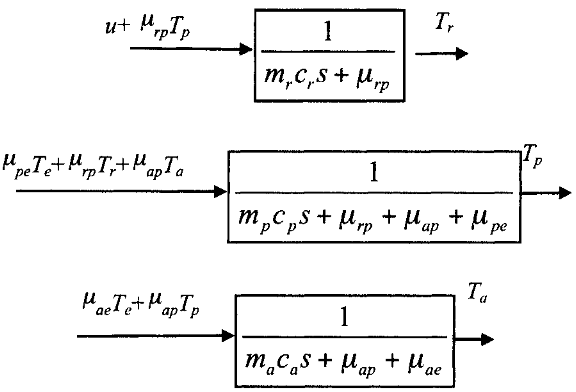
o, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_r \\ \dot{T}_p \\ \dot{T}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.001 & -0.0018 & 0.0005 \\ 0 & 0.0006 & -0.00084 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_p \\ T_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0003 \\ 0.00024 \end{bmatrix} T_e$$

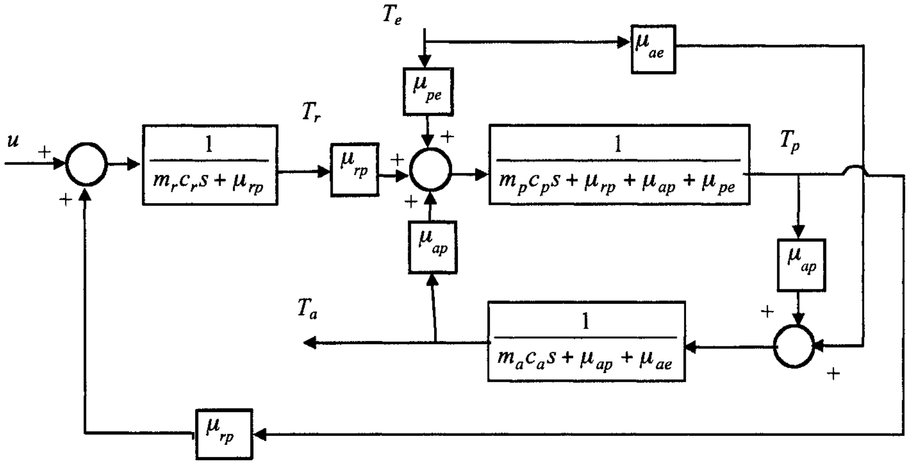
donde la entrada u es una entrada de control y T_e es una entrada de perturbación. Si se considera constante se pueden linealizar las ecuaciones tomando incrementos, quedando:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{T}_r \\ \Delta\dot{T}_p \\ \Delta\dot{T}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.001 & -0.0018 & 0.0005 \\ 0 & 0.0006 & -0.00084 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_r \\ \Delta T_p \\ \Delta T_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

b*) El diagrama de bloques que representa las ecuaciones anteriores se obtiene expresando en primer lugar los bloques fundamentales de las 3 ecuaciones diferenciales:*



Completando después con los nodos sumadores y de bifurcación necesarios para generar las señales de entrada a cada bloque a partir de las de salida. El resultado es:



c) Las ecuaciones de estado reducidas se pueden obtener suponiendo la simplificación de que el calor de la resistencia pasa directamente a la pared (la resistencia no acumula calor) quedando:

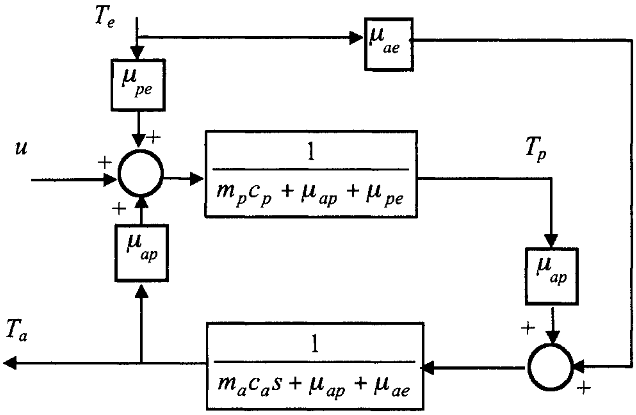
$$m_p c_p \dot{T}_p = u - \mu_{ap}(T_p - T_a) - \mu_{pe}(T_p - T_e)$$

$$m_a c_a \dot{T}_a = \mu_{ap}(T_p - T_a) - \mu_{ae}(T_a - T_e)$$

que puesto en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_p \\ \dot{T}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0008 & 0.0005 \\ 0.0006 & -0.00084 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_p \\ T_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.00024 \end{bmatrix} T_e$$

El diagrama de bloques será ahora más reducido:



Se puede comprobar si la simplificación es correcta calculando la f.d.t. entre la entrada (u) y la salida (T_a). Si la aproximación de 2º orden es buena, sus polos deben *ser parecidos a los 2 polos más lentos de la f.d.t. de 3er orden. Además, el 3er polo de ésta debe ser mucho más rápido que los otros.*

La f.d.t. entre $\Delta u=u-0$ y $\Delta T_a=T_a-T_e$ se obtiene de:

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{2.99\cdot 10^{-10}}{s^3 + 0.0526s^2 + 8.31\cdot 10^{-5}s + 1.85\cdot 10^{-8}}$$

Los polos de la f.d.t. son:

{-0.051, -0.00027, -0.00135}

Es evidente que el primer polo (-0.051) es mucho más rápido que los otros (38 veces más rápido), por lo que se podrá eliminar, manteniendo la ganancia estática, quedando:

$$G(s) \approx \frac{5.86\cdot 10^{-9}}{(s+0.00027)(s+0.00135)}$$

El polo rápido es debido a la baja capacidad calorífica de la resistencia calefactora, que hace que se caliente muy rápidamente, por lo que el sistema se comporta como si la potencia (u) se transmitiera directamente a la pared del acuario.

Se puede comprobar que la f.d.t. obtenida a partir de las ecuaciones de estado reducidas coincide prácticamente con la de arriba.

d) *Tomando la ecuación de 2º orden al tomar $u=k(T_{ref}-T_a)=k(35-T_a)$, siendo $T_e=20$, las ecuaciones quedan:*

$$\begin{bmatrix}\dot T_p\\ \dot T_a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.0008 & 0.0005\\ 0.0006 & -0.00084\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_p\\ T_a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10^{-5}\\ 0\end{bmatrix}k(35-T_a) + \begin{bmatrix}0.0003\\ 0.00024\end{bmatrix}20$$

$$\begin{bmatrix}\dot T_p\\ \dot T_a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.0008 & 0.0005-10^{-5}k\\ 0.0006 & -0.00084\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_p\\ T_a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.006+35\cdot 10^{-5}k\\ 0.0048\end{bmatrix}$$

El valor final que alcanzará la temperatura T_a en régimen permanente se obtiene sin más que hacer cero las derivadas:

$$\begin{bmatrix}T_p(t=\infty)\\ T_a(t=\infty)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}-0.0008 & 0.0005-10^{-5}k\\ 0.0006 & -0.00084\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0.006+35\cdot 10^{-5}k\\ 0.0048\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{3.72\cdot 10^{-7}+6\cdot 10^{-9}k}\begin{bmatrix}-7.44\cdot 10^{-6}-2.46\cdot 10^{-7}k\\ -7.44\cdot 10^{-6}-2.1\cdot 10^{-7}k\end{bmatrix}$$

Para que no mueran los peces, T_a tiene que ser al menos 30°C:

$$\frac{7.44\cdot 10^{-6}+2.1\cdot 10^{-7}k}{3.72\cdot 10^{-7}+6\cdot 10^{-9}k} \geq 30 \quad\Rightarrow\quad k \geq 124$$

Para que $T_a(\infty)=33$, $\dfrac{7.44\cdot 10^{-6}+2.1\cdot 10^{-7}k}{3.72\cdot 10^{-7}+6\cdot 10^{-9}k}=33 \quad\Rightarrow\quad k=403$

Para este valor de k se puede calcular la temperatura de la pared: $T_p(\infty)=38.2°C$

e) *Si estando en el equilibrio anterior ($T_e=20$, $T_a=33$, $T_p=38.2$) se produce un cambio brusco de forma que $T_e=10°C$, se tiene la ecuación diferencial original con los valores:*

$$\begin{bmatrix}\dot T_p\\ \dot T_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0008 & 0.0005\\ 0.0006 & -0.00084\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_p\\ T_a\end{bmatrix}+403\begin{bmatrix}10^{-5}\\ 0\end{bmatrix}(35-T_a)+\begin{bmatrix}0.0003\\ 0.00024\end{bmatrix}10$$

La evolución de la temperatura del agua se obtendrá sin más que resolver la ecuación diferencial, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son: $T_a(0)=33$, $T_p(0)=38.2$. Se ha considerado el origen de tiempos en el instante en el que se produce el cambio de temperatura exterior.

Para resolver la ecuación basta con tomar transformadas de Laplace:

$$\begin{bmatrix}sT_p(s)-T_p(0^+)\\ sT_a(s)-T_a(0^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0008 & -0.00353\\ 0.0006 & -0.00084\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_p(s)\\ T_a(s)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.144\\ 0.0024\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

despejando:

$$sI\begin{bmatrix}T_p(s)\\ T_a(s)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-0.0008 & -0.00353\\ 0.0006 & -0.00084\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_p(s)\\ T_a(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.144\\ 0.0024\end{bmatrix}\frac{1}{s}+\begin{bmatrix}38.2\\ 33\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}T_p(s)\\ T_a(s)\end{bmatrix}=\left(sI-\begin{bmatrix}-0.0008 & -0.00353\\ 0.0006 & -0.00084\end{bmatrix}\right)^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0.144\\ 0.0024\end{bmatrix}\frac{1}{s}+\begin{bmatrix}38.2\\ 33\end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}T_p(s)\\ T_a(s)\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}s+0.0008 & 0.00353\\ -0.0006 & s+0.00084\end{bmatrix}\right)^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0.144\\ 0.0024\end{bmatrix}\frac{1}{s}+\begin{bmatrix}38.2\\ 33\end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}T_p(s)\\ T_a(s)\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}s+0.00084 & -0.00353\\ 0.0006 & s+0.0008\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0.144\\ 0.0024\end{bmatrix}\frac{1}{s}+\begin{bmatrix}38.2\\ 33\end{bmatrix}\right\}}{(s^2+0.00164s+2.79\cdot 10^{-6})}=$$

$$=\frac{1}{s(s^2+0.00164s+2.79\cdot 10^{-6})}\begin{bmatrix}38.2s^2+0.06s+0.000112\\ 33s^2+0.0517s+8.83\cdot 10^{-5}\end{bmatrix}$$

La transformada de Laplace de la evolución de la temperatura del agua será por tanto:

$$T_a(s) = \frac{33s^2 + 0.0517s + 8.83\cdot 10^{-5}}{s(s^2 + 0.00164s + 2.79\cdot 10^{-6})}$$

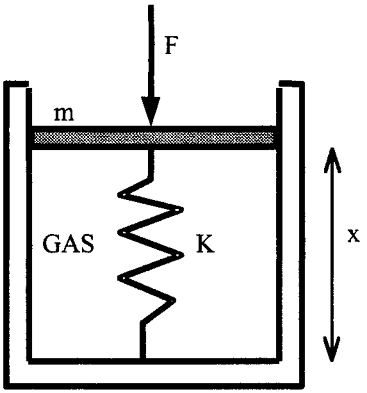
La transformada inversa me dará la evolución temporal $T_a(t)$:

$$T_a(t) = 31.65 + 1.624\cos(0.00146t + 0.59)e^{-0.00082t}$$

Para comprobar si en algún momento la temperatura se sale del rango admisible, basta con comprobar que el valor mínimo es superior a 30. En este caso no hace falta calcularlo, pues ese valor mínimo siempre será mayor que 31.65-1.624=30.026, por lo que, por los pelos los peces sobreviven.

PROBLEMA 51. Émbolo con gas adiabático

a) Obtener las ecuaciones que definen la dinámica del sistema de la figura:



donde la entrada es la fuerza F, y la salida es la posición de la masa *m*. El muelle tiene una longitud de reposo de 1 m, y el gas se comporta de forma adiabática (no se transmite calor al exterior), por lo que su ecuación es: $PV^{\gamma}=c$. La sección del cilindro es de 2 m^2.

b) Obtener la ecuación linealizada alrededor del punto de funcionamiento F=10 N.

c) Obtener de forma aproximada la evolución de la posición cuando partiendo de la posición de equilibrio anterior, la entrada se aumenta bruscamente en 1 N.

Datos: K=2 N/m, m=2 kg, γ =2, c=40.

Solución

a*) En primer lugar la ecuación que describe el sistema es:*

$$m\ddot{x} = -F - mg + P\cdot S - K(x-1)$$

donde la ecuación que relaciona la presión con el desplazamiento es:

$$PV^\gamma = P(xS)^\gamma = c \quad \Rightarrow \quad P = \frac{c}{S^\gamma x^\gamma}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$m\ddot{x} = -F - mg + \frac{c}{S^{\gamma-1}x^\gamma} - K(x-1)$$

que, sustituyendo valores queda:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}F - 9.8 + \frac{10}{x^2} - x + 1$$

b) *El punto de funcionamiento es:*

$$0 = -\frac{1}{2}10 - 9.8 + \frac{10}{x_0^2} - x_0 + 1 \quad \Rightarrow \quad x_0^3 + 13.8x_0^2 - 10 = 0$$

cuya única solución positiva es:

$$x_0 = 0.827 \quad m$$

La ecuación linealizada se obtiene haciendo el desarrollo de Taylor:

$$\Delta\ddot{x} = -\frac{1}{2}\Delta F + \left(\frac{-20}{x_0^3} - 1\right)\Delta x = -\frac{1}{2}\Delta F - 36.36\Delta x$$

que se puede expresar en forma de función de transferencia como:

$$G(s) = \frac{\Delta x}{\Delta F} = \frac{-0.5}{s^2 + 36.36}$$

c) *Si estando en equilibrio con F_0=10N, la entrada se aumenta en 1N, se tiene que la señal ΔF es un escalón de valor 1, por lo que la salida se puede calcular mediante la función de transferencia (las condiciones iniciales de Δx son nulas):*

$$\Delta x(s) = \frac{-0.5}{s^2 + 36.36}\Delta F(s) = \frac{-0.5}{s(s^2 + 36.36)}$$

El sistema tiene dos polos complejos conjugados puros, es decir, es críticamente estable, por lo que aparecerá en la respuesta un término senoidal no amortiguado (el sistema oscilará indefinidamente).

La transformada inversa será de la forma:

$$\Delta x(t) = A + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{36.36}t) + C\cos(\sqrt{36.36}t)$$

tomando transformadas:

$$\Delta x(s) = \frac{A}{s} + \frac{\sqrt{36.36}B}{s^2 + 36.36} + \frac{Cs}{s^2 + 36.36}$$

Sumando e igualando el numerador a –0.5 se obtienen los valores de A, B y C:

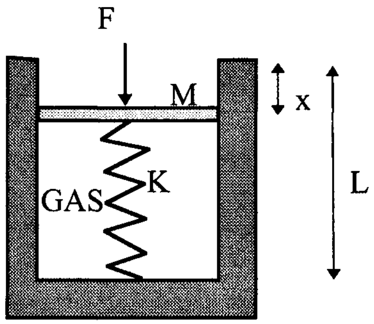
$$A(s^2 + 36.36) + \sqrt{36.36}Bs + Cs^2 = -0.5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -0.01375 \\ B = 0 \\ C = 0.01375 \end{cases}$$

Por lo que la evolución aproximada final de la posición del émbolo es:

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t) = 0.827 - 0.01375\left(1 - \cos(\sqrt{36.36}t)\right) \quad m$$

PROBLEMA 52. Émbolo adiabático con gas II

Dado el sistema de la figura:



Datos: Cilindro: sección S=0.05 m^2, longitud L=0.5m.
Émbolo: masa M=2kg.
Muelle: K=2000 N/m, longitud en reposo: L=0.5m.

Gas: Gas perfecto con evolución adiabática: $P \cdot V^{1.4} = 60$ donde V en m^3 y P en N/m^2 son el volumen y la presión del gas dentro del cilindro.

a) Obtener la ecuación diferencial que relaciona la entrada (fuerza F) con la salida (desplazamiento x)

b) Obtener la ecuación linealizada alrededor del punto de funcionamiento definido por x=0.2m. ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema linealizado? ¿Y la frecuencia propia?

c) Calcular de forma aproximada la evolución de la posición del émbolo con el tiempo si estando en el punto de funcionamiento anterior la fuerza F se incrementa en un término senoidal de amplitud 100 N y frecuencia ω. ¿Qué sucede si ω es próxima a la frecuencia propia calculada antes?.

Solución

a) En primer lugar la ecuación que describe el sistema es:

$$m\ddot{x} = F + mg - P \cdot S + K(L - x - 0.5)$$

donde la ecuación que relaciona la presión con el desplazamiento es:

$$PV^{\gamma} = P\big((L-x)S\big)^{\gamma} = c \quad \Rightarrow \quad P = \frac{c}{S^{\gamma}(L-x)^{\gamma}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$m\ddot{x} = F + mg - \frac{c}{S^{\gamma-1}(L-x)^{\gamma}} + K(L - x - 0.5)$$

que, sustituyendo valores queda:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}F + 9.8 - \frac{99.43}{(0.5-x)^{1.4}} - 1000x$$

b) El punto de funcionamiento es:

$$0 = \frac{1}{2}F_0 + 9.8 - \frac{99.43}{(0.5-0.2)^{1.4}} - 1000 \cdot 0.2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = 1453.34\ N$$

La ecuación linealizada se obtiene haciendo el desarrollo de Taylor:

$$\Delta\ddot{x} = \frac{1}{2}\Delta F + \left(\frac{-139.2}{(0.5-x_0)^{2.4}} - 1000\right)\Delta x = \frac{1}{2}\Delta F - 3503.5\Delta x$$

que se puede expresar en forma de función de transferencia como:

$$G(s) = \frac{\Delta x}{\Delta F} = \frac{0.5}{s^2 + 3503.5}$$

La frecuencia natural es

$$\omega_n = \sqrt{3503.5} = 59.19 \quad rad/s$$

que coincide en este caso con la frecuencia propia, al ser nulo el coeficiente de amortiguamiento.

c) *Si estando en equilibrio con F_0=1453.34 N, la entrada se aumenta en una señal senoidal de amplitud 100 N y frecuencia ω, se tiene que la señal ΔF es una señal senoidal de transformada de Laplace:*

$$\Delta F(s) = \frac{100\omega}{s^2 + \omega^2}$$

por lo que la salida se puede calcular mediante la función de transferencia (las condiciones iniciales de Δx son nulas):

$$\Delta x(s) = \frac{0.5}{s^2 + 3503.5}\Delta F(s) = \frac{50\omega}{(s^2 + 59.19^2)(s^2 + \omega^2)}$$

La transformada inversa será de la forma:

$$\Delta x(t) = A\,\mathrm{sen}(59.19t) + B\cos(59.19t) + C\,\mathrm{sen}(\omega t) + D\cos(\omega t)$$

tomando transformadas:

$$\Delta x(s) = \frac{59.19A}{s^2 + 59.19^2} + \frac{Bs}{s^2 + 59.19^2} + \frac{C\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{Ds}{s^2 + \omega^2}$$

Sumando e igualando el numerador a 0.5ω se obtienen los valores de A, B, C y D:

$$50\omega = 59.19A(s^2 + \omega^2) + Bs(s^2 + \omega^2) +$$
$$+ C\omega(s^2 + 59.19^2) + Ds(s^2 + 59.19^2)$$

de donde se obtiene:

$$B = D = 0$$

$$A = \frac{-50\omega^2}{59.19(59.19^2 - \omega^2)}$$

$$C = \frac{50}{(59.19^2 - \omega^2)}$$

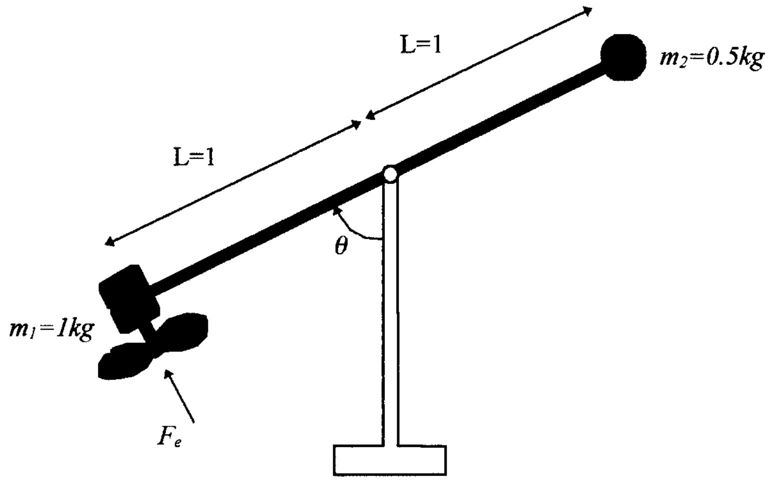
es decir:

$$\Delta x(t) = \frac{-50\omega^2}{59.19(59.19^2 - \omega^2)}\mathrm{sen}(59.19t) + \frac{50}{(59.19^2 - \omega^2)}\mathrm{sen}(\omega t)$$

Si la frecuencia de la señal senoidal de entrada (ω) se aproxima a la frecuencia propia (59.19 rad/s) la amplitud de la senoidal de salida se hace muy grande (idealmente si $\omega \to 59.19$, la amplitud tiende a infinito). En esta caso, al ser el amortiguamiento nulo la frecuencia propia coincide con la frecuencia de resonancia, y además el pico de resonancia es infinito, por lo que si la frecuencia de entrada se aproxima a la de resonancia la amplitud tiende a infinito.

PROBLEMA 53. Maqueta de helicóptero

El sistema de la figura representa un modelo a escala para simular la dinámica de un helicóptero.



La fuerza de empuje, F_e, la proporciona la hélice que es movida por un motor de corriente continua, cuya tensión u se puede cambiar a voluntad. La relación entre esa tensión u y la fuerza de empuje viene dada por una ecuación diferencial de primer orden de constante de tiempo τ*=0.2 seg*, y ganancia variable en función de la velocidad angular del helicóptero $K = 10(1 - \dot{\theta})$ *newtons*, con $\dot{\theta}$ en rad/seg.

a) Obtener la función de transferencia entre la entrada (tensión del motor) y la salida (ángulo θ) en función del punto de funcionamiento θ_0.

b) Estudiar la estabilidad del sistema en función del punto de funcionamiento. (Sugerencia: obtener primero los valores de θ_0 para los que el sistema es críticamente estable).

c) Obtener de forma aproximada los valores de θ_0 para los que el sistema es oscilatorio. Para ello, despreciar en las ecuaciones la constante de tiempo τ de la hélice.

d) Si, estando en el punto de funcionamiento θ_0=1.5 rad (unos 86°), con u_0 constante se procede a desviar con la mano el sistema de su posición 0.2 rad hacia arriba, soltándolo después, calcular de forma aproximada la evolución temporal de la posición angular. ¿Qué sucedería en el sistema real, teniendo en cuenta lo obtenido en el apartado b)? Nota: se supone que se suelta la hélice con velocidad inicial cero.

Solución

a) *La ecuación que relaciona la tensión del motor con la fuerza de empuje es una ecuación diferencial de orden 1, de constante de tiempo τ y de ganancia 10(1-ω):*

$$(I) \quad \tau\dot{F}_e + F_e = 10(1-\dot{\theta})u$$

La ecuación del movimiento es la de rotación:

$$(II)\quad (m_1+m_2)L^2\ddot{\theta} = F_e L + (m_2 - m_1)gL\,\text{sen}(\theta)$$

Sustituyendo valores (aproximando g=10) y despejando la derivada más alta se tiene:

$$(I)\quad \dot{F}_e = -5F_e + 50(1-\dot{\theta})u$$

$$(II)\quad \ddot{\theta} = \frac{2}{3}F_e - \frac{10}{3}\text{sen}(\theta)$$

El punto de funcionamiento se define como:

$$0 = -5F_{e0} + 50u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{F_{e0}}{10}$$

$$0 = \frac{2}{3}F_{e0} - \frac{10}{3}\text{sen}(\theta_0) \quad \Rightarrow \quad F_{e0} = 5\,\text{sen}(\theta_0) \quad \Rightarrow \quad u_0 = 0.5\,\text{sen}(\theta_0)$$

Linealizando las ecuaciones de obtiene:

$$(I)\quad \Delta\dot{F}_e = -5\Delta F_e + 50(1-\dot{\theta}_0)\Delta u - 50u_0\Delta\dot{\theta} =$$

$$= -5\Delta F_e + 50\Delta u - 25\,\text{sen}(\theta_0)\Delta\dot{\theta}$$

$$(II)\quad \Delta\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\Delta F_e - \frac{10}{3}\cos(\theta_0)\Delta\theta$$

Tomando transformadas de Laplace en las ecuaciones linealizadas y despejando se obtiene la función de transferencia:

$$s\Delta F_e(s) = -5\Delta F_e(s) + 50\Delta u(s) - 25\,\text{sen}(\theta_0)s\Delta\theta(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta F_e(s) = \frac{50}{s+5}\Delta u(s) - \frac{25\,\text{sen}(\theta_0)s}{s+5}\Delta\theta(s)$$

$$s^2\ \Delta\theta(s) = \frac{2}{3}\Delta F_e(s) - \frac{10}{3}\cos(\theta_0)\Delta\theta(s) =$$

$$= \frac{100/3}{s+5}\Delta u(s) - \frac{10}{3}\left(\frac{5\,\text{sen}(\theta_0)s}{s+5} + \cos(\theta_0)\right)\Delta\theta(s)$$

$$G(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta u(s)} = \frac{100/3}{s^2(s+5) + \frac{50}{3}\text{sen}(\theta_0)s + \frac{10}{3}\cos(\theta_0)(s+5)} =$$

$$= \frac{100/3}{s^3 + 5s^2 + \frac{10}{3}\left(5\,\text{sen}(\theta_0) + \cos(\theta_0)\right)s + \frac{50}{3}\cos(\theta_0)}$$

b) *El sistema será estable si los tres polos tienen parte real negativa, y será inestable si al menos uno de los polos tiene parte real positiva. Para estudiar la estabilidad se considerará en primer lugar la condición límite, es decir, los valores de* θ_0 *para los que uno de los polos tiene parte real nula. Al ser el sistema de orden 3, el polo críticamente estable puede ser un polo real (en cuyo caso será un polo en s=0) o un polo complejo conjugado (en cuyo caso serán un par de polos imaginarios puros).*

La primera posibilidad (polo en s=0) se traduce en la condición:

$$\frac{50}{3}\cos(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 90°$$

Con este valor los polos del sistema son:

$$s^3 + 5s^2 + \frac{50}{3}s = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 0 \\ s = -2.5 \pm 3.23j \end{cases}$$

Como se observa los otros dos polos son estables. Para comprobar si $\theta_0=90°$ *define un límite de estabilidad, tomamos un valor inmediatamente inferior y un valor inmediatamente superior a éste y comprobamos los polos del sistema. Los polos serán muy próximos a los calculados arriba, por lo que los polos complejos serán estables. El polo real será muy próximo a cero, pero puede ser positivo o negativo determinando la estabilidad:*

$$\theta_0 = 90° - \varepsilon \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_0) = \varepsilon > 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_0) \approx 1 \end{cases}$$

$$s^3 + 5s^2 + \frac{10}{3}(5+\varepsilon)s + \frac{50}{3}\varepsilon = \left((s+\sigma)^2 + \omega_p^{\ 2}\right)(s+\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\frac{50}{3}\varepsilon}{\sigma^2 + \omega_p^{\ 2}} > 0$$

Luego el polo real es estable y el sistema es estable (los polos complejos son prácticamente iguales a los calculados para $\theta_0=90°$.

$$\theta_0 = 90° + \varepsilon \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_0) = -\varepsilon < 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_0) \approx 1 \end{cases}$$

$$s^3 + 5s^2 + \frac{10}{3}(5+\varepsilon)s - \frac{50}{3}\varepsilon = \left((s+\sigma)^2 + \omega_p^{\ 2}\right)(s+\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-{}^{50}\!/_{3}\,\varepsilon}{\sigma^2 + \omega_p^{\ 2}} < 0$$

Luego el polo real es inestable, y el sistema es inestable.

Se concluye que el sistema es estable para puntos de funcionamiento $\theta_0 < 90°$ y será inestable para $\theta_0 > 90°$.

Falta por comprobar la segunda posibilidad en cuanto a los polos críticamente estables, es decir, que haya dos polos imaginarios puros. En este caso se tendría:

$$s^3 + 5s^2 + \frac{10}{3}\left(5\,\mathrm{sen}(\theta_0) + \cos(\theta_0)\right)s + \frac{50}{3}\cos(\theta_0) =$$

$$= (s^2 + \omega^2)(s + \alpha) = s^3 + \alpha s^2 + \omega^2 s + \alpha\omega^2$$

Igualando término a término se obtiene:

$$\alpha = 5$$

$$\alpha\omega^2 = \frac{50}{3}\cos(\theta_0) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{10}{3}\cos(\theta_0)$$

$$\omega^2 = \frac{10}{3}\cos(\theta_0) = \frac{10}{3}\left(5\,\mathrm{sen}(\theta_0) + \cos(\theta_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \begin{cases} 0° \\ 180° \end{cases}$$

Por lo que las posibles soluciones están justo en el límite del rango posible de movimiento de la maqueta. Es decir, esta segunda posibilidad no da ningún límite de estabilidad válido.

c) *Si se desprecia la constante de tiempo de la hélice se tiene un sistema de orden 2. En primer lugar habrá que obtener la función de transferencia en este caso:*

$$(I) \quad F_e = 10(1 - \dot{\theta})u$$

$$(II) \quad \ddot{\theta} = \frac{2}{3}F_e - \frac{10}{3}\mathrm{sen}(\theta) = \frac{20}{3}(1 - \dot{\theta})u - \frac{10}{3}\mathrm{sen}(\theta)$$

El punto de funcionamiento es el mismo, y la linealización da la función de transferencia:

$$\Delta\ddot{\theta} = \frac{20}{3}\Delta u - \frac{20}{3}u_0\Delta\dot{\theta} - \frac{10}{3}\cos(\theta_0)\Delta\theta$$

$$G(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta u(s)} = \frac{\frac{20}{3}}{s^2 + \frac{10}{3}\mathrm{sen}(\theta_0)s + \frac{10}{3}\cos(\theta_0)}$$

Los polos del sistema son ahora:

$$s = \frac{1}{2}\left(-\frac{10}{3}\mathrm{sen}(\theta_0) \pm \sqrt{\frac{100}{9}\mathrm{sen}^2(\theta_0) - \frac{40}{3}\cos(\theta_0)}\right)$$

El sistema será oscilatorio si los polos tiene parte imaginaria, es decir, si el término dentro de la raíz es negativo:

$$\frac{100}{9}\operatorname{sen}^2(\theta_0)-\frac{40}{3}\cos(\theta_0)<0$$

$$5\cos^2(\theta_0)+6\cos(\theta_0)-5>0$$

cuya solución es

$$1>\cos(\theta_0)>0.566$$

es decir

$$0^\circ<\theta_0<55.53^\circ$$

d) *Para el punto de funcionamiento θ_0=1.5 rad, se tiene:*

$$u_0=0.5\operatorname{sen}(\theta_0)=0.4987 \quad V$$

En este punto de funcionamiento, la función de transferencia es:

$$G(s)=\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta u(s)}=\frac{100/3}{s^3+5s^2+16.86s+1.179}$$

Si la tensión de entrada permanece constante, se tiene que Δu=0. Por otra parte, si se desvía el sistema de forma externa (con la mano) de la posición de equilibrio, se tiene que las condiciones iniciales de la variable de salida $\Delta\theta$ no son nulas. En concreto, como se desplaza 0.2 rad hacia arriba, y se suelta partiendo del reposo se tiene que:

$$\Delta\theta(t=0)=0.2 \quad rad$$

$$\Delta\dot{\theta}(t=0)=0$$

Como el sistema es de orden 3 se necesita también el valor inicial de la derivada segunda. En el momento en que se suelta, la fuerza de empuje vale:

$$F_{e0}=10u_0=4.987 \quad N$$

De la ecuación dinámica del movimiento se obtiene la condición inicial para la aceleración:

$$\Delta\ddot{\theta}(t=0)=\frac{2}{3}F_e(t=0)-\frac{10}{3}\operatorname{sen}(\theta(t=0))=$$

$$=\frac{2}{3}4.987-\frac{10}{3}\operatorname{sen}(1.5+0.2)=0.019 \quad rad/s^2$$

Para obtener la salida hay que escribir la ecuación diferencial que relaciona Δu con $\Delta\theta$, y tomar transformadas de Laplace, teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$G(s) = \frac{100/3}{s^3 + 5s^2 + 16.86s + 1.179}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta\dddot{\theta} + 5\Delta\ddot{\theta} + 16.86\Delta\dot{\theta} + 1.179\Delta\theta = 33.33\Delta u$$

Tomando transformadas (teniendo en cuenta que Δu=0, y que hay condiciones iniciales) se obtiene:

$$s^3\Delta\theta(s) - s^2\Delta\theta(0) - \Delta\ddot{\theta}(0) + 5s^2\Delta\theta - 5s\Delta\theta(0) +$$
$$+ 16.86s\Delta\theta(s) - 16.86\Delta\theta(0) + 1.179\Delta\theta(s) = 0$$

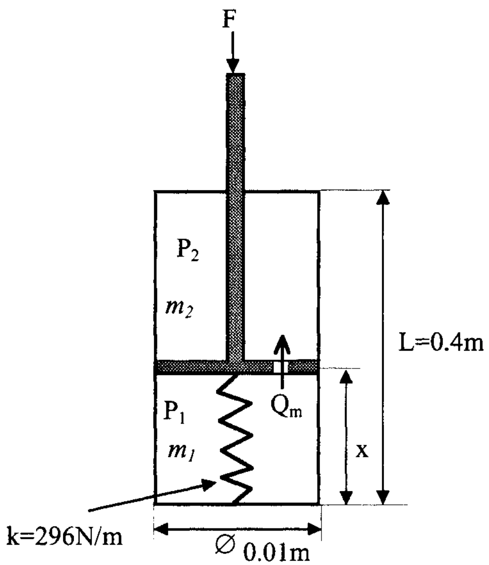
$$\Delta\theta(s) = \frac{-s^2\Delta\theta(0) - 5s\Delta\theta(0) - 16.86\Delta\theta(0) - \Delta\ddot{\theta}(0)}{s^3 + 5s^2 + 16.86s + 1.179} =$$
$$= -\frac{0.2s^2 + s + 3.391}{s^3 + 5s^2 + 16.86s + 1.179}$$

La evolución aproximada se obtendrá como la transformada de Laplace inversa:

$$\Delta\theta(t) = -0.2055e^{-0.07142t} + 0.00548e^{-2.464t}\cos(3.23t + 0.06772)$$

PROBLEMA 54. Amortiguador de gas

Se quiere modelar la dinámica del amortiguador de gas representado en el dibujo:



Cuando el émbolo se mueve cambia la presión de las dos partes del cilindro, circulando entre ellas un caudal másico de gas Q_m. Se pide:

a) Obtener las ecuaciones diferenciales que relacionan la fuerza aplicada F con el desplazamiento x y la masa de gas m_1 presente en la parte inferior del cilindro sabiendo que:

- La masa total de gas en el cilindro es constante e igual a: $m_1+m_2= 1\ kg$.
- La longitud en reposo del muelle es de 0.3m.
- La masa del émbolo es de 2kg.
- El caudal másico de gas que pasa de una parte del cilindro a la otra es $Q_m=c(P_1-P_2)$, estando Q_m en kg/s, y las presiones en Pa, siendo c una constante desconocida.
- Se supone para simplificar que el gas se comporta de forma isoterma (su temperatura se supone constante), cumpliendo la ecuación de los gases perfectos PV=mRT, donde R es una constante y m es la masa del gas en el compartimento.
- La presión del gas en reposo es de $P_1=P_2=P_0=$ 400000 Pa.

b) Obtener en función de c la función de transferencia aproximada entre F y x alrededor del punto de funcionamiento $F_o=10N$.

c) Estando el sistema en equilibrio con una fuerza de F=10N se retira esa fuerza, observándose que el émbolo sube alcanzando una altura máxima de x=0.245m en 0.23 segundos. Calcular de forma aproximada el valor de la constante c.

d) Calcular la evolución con el tiempo de la posición del émbolo en el supuesto anterior.

Solución

a) Las ecuaciones del sistema son la del movimiento:

$$(I)\quad M\ddot{x} = -F - Mg - K(x-0.3) + (P_1 - P_2)S$$

y la del flujo de gas de un compartimento a otro:

$$(II)\quad \dot{m}_2 = -\dot{m}_1 = Q_m = c(P_1 - P_2)$$

Para obtener las ecuaciones diferenciales hay que expresar las dos ecuaciones anteriores en función de x y m_1. Para ello se aplica la ley de los gases perfectos, teniendo en cuenta que la evolución se considera isoterma:

$$\left.\begin{aligned} P_1V_1 &= P_1Sx = m_1RT \\ P_2V_2 &= P_2S(0.4-x) = m_2RT \\ P_0V &= P_0S\cdot 0.4 = (m_1+m_2)RT \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{m_1}{x}\dfrac{0.4P_0}{(m_1+m_2)} = 0.4P_0\dfrac{m_1}{x} \\ P_2 = \dfrac{m_2}{0.4-x}\dfrac{0.4P_0}{(m_1+m_2)} = 0.4P_0\dfrac{(1-m_1)}{0.4-x} \end{cases}$$

Con lo que las ecuaciones quedan:

$$(I)\quad \ddot{x} = -\frac{1}{M}F - g - \frac{K}{M}(x-0.3) + \frac{0.4P_0S}{M}\frac{m_1}{x} - \frac{0.4P_0S}{M}\frac{(1-m_1)}{(0.4-x)}$$

$$(II)\quad \dot{m}_1 = -c\left(0.4P_0\frac{m_1}{x} - 0.4P_0\frac{(1-m_1)}{(0.4-x)}\right)$$

Sustituyendo valores queda:

$$(I)\quad \ddot{x} = -\frac{1}{2}F - 9.8 - 148(x-0.3) + 6.283\frac{m_1}{x} - 6.283\frac{(1-m_1)}{(0.4-x)}$$

$$(II)\quad \dot{m}_1 = -160000c\left(\frac{m_1}{x} - \frac{(1-m_1)}{(0.4-x)}\right)$$

b) *Para obtener la función de transferencia hay que linealizar las dos ecuaciones. El punto de funcionamiento es F_0=10N:*

$$0 = -c(P_{10} - P_{20}) \quad\Rightarrow\quad P_{10} = P_{20} = P_0 = 400000 \quad Pa$$

$$0 = -\frac{1}{2}F_0 - g - 148(x_0 - 0.3) + S(P_{10} - P_{20}) \quad\Rightarrow\quad x_0 = 0.2 \quad m$$

$$m_{10} = \frac{P_{10}x_0}{0.4P_0} = \frac{x_0}{0.4} = 0.5 \quad kg$$

Las aproximaciones lineales son:

$$(I)\quad \Delta\ddot{x} = -0.5\Delta F - \left(148 + 6.283\frac{m_{10}}{x_0^2} + 6.283\frac{(1-m_{10})}{(0.4-x_0)^2}\right)\Delta x +$$

$$+\left(\frac{6.283}{x_0} + \frac{6.283}{0.4-x_0}\right)\Delta m_1$$

$$(II)\quad \Delta\dot{m}_1 = 160000c\left(\frac{m_{10}}{x_0^2} + \frac{(1-m_{10})}{(0.4-x_0)^2}\right)\Delta x -$$

$$-160000c\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{0.4-x_0}\right)\Delta m_1$$

que, sustituyendo valores da:

$$(I)\quad \Delta\ddot{x} = -0.5\Delta F - 305\Delta x + 62.83\Delta m_1$$

$$(II)\quad \Delta\dot{m}_1 = 4\cdot 10^6 c\Delta x - 1.6\cdot 10^6 c\Delta m_1$$

Tomando transformadas de Laplace (suponiendo nulas las condiciones iniciales), y despejando se obtiene la función de transferencia aproximada:

$$(II)\quad s\Delta m_1(s) = 4\cdot 10^6 c\Delta x(s) - 1.6\cdot 10^6 c\Delta m_1(s)$$

$$\Rightarrow \Delta m_1(s) = \frac{4\cdot 10^6 c}{s + 1.6\cdot 10^6 c}\Delta x(s)$$

$$(I)\quad s^2\Delta x(s) = -0.5\Delta F(s) + 9.075\Delta x(s) + 62.83\Delta m_1(s) =$$

$$= -0.5\Delta F(s) - 305\Delta x(s) + 62.83\frac{4\cdot 10^6 c}{s + 1.6\cdot 10^6 c}\Delta x(s)$$

$$G(s) = \frac{\Delta x(s)}{\Delta F(s)} = \frac{-0.5(s + 1.6\cdot 10^6 c)}{s^2(s + 1.6\cdot 10^6 c) + 305(s + 1.6\cdot 10^6 c) - 251.32\cdot 10^6 c}$$

$$G(s) = \frac{\Delta x(s)}{\Delta F(s)} = -\frac{0.5s + 0.8\cdot 10^6 c}{s^3 + 1.6\cdot 10^6 cs^2 + 305s + 236.7\cdot 10^6 c}$$

c) *La retirada de la fuerza de 10N es equivalente a una señal escalón de valor –10 para ΔF, por lo que la evolución de $\Delta x(t)$ es la respuesta ante un escalón de valor –10 de la función de transferencia anterior. Si la altura máxima que alcanza el émbolo es de x_{max}=0.245m, eso implica un valor máximo para Δx:*

$$\Delta x_{max} = x_{max} - x_0 = 0.045 \quad m$$

Este dato permite obtener la sobreoscilación de la respuesta ante escalón, pues el valor en que se estabiliza Δx tras el escalón se obtiene sin más que multiplicar el valor del escalón por la ganancia estática de G(s):

$$\delta = \frac{\Delta x_{max} - \Delta x(\infty)}{\Delta x(\infty)} = \frac{0.045 - (-10G(0))}{(-10G(0))} = \frac{0.045 - 0.0338}{0.0338} = 0.331$$

Por otra parte, el tiempo en que tarda en llegar a ese valor máximo es el tiempo de pico, que es:

$$t_p = 0.23 \quad seg$$

Si el sistema fuera de segundo orden estándar, los dos parámetros anteriores permitirían calcular la función de transferencia. Como el sistema es de orden 3, habrá que hacer una aproximación: se supondrá que el polo real es mucho más rápido que los polos complejos, de forma que el comportamiento del sistema de orden 3 se aproxima al de un sistema de orden 2. Según esto, la función de transferencia se puede escribir como:

$$G(s) = \frac{\Delta x(s)}{\Delta F(s)} = -\frac{0.5s + 0.8 \cdot 10^6 c}{s^3 + 1.6 \cdot 10^6 cs^2 + 305s + 236.7 \cdot 10^6 c} =$$

$$= -\frac{0.5s + 0.8 \cdot 10^6 c}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2)(s + \alpha)}$$

Si el comportamiento del sistema se puede aproximar al de los polos complejos, se pueden utilizar las ecuaciones del sistema de segundo orden estándar para calcular el amortiguamiento y la frecuencia natural:

$$\delta = 0.331 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(\delta)}\right)^2}} = 0.332$$

$$t_p = 0.23 = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\pi}{0.23\sqrt{1-0.332^2}} = 14.48 \quad rad/s$$

Igualando los denominadores se tiene:

$$s^3 + 1.6 \cdot 10^6 cs^2 + 305s + 236.7 \cdot 10^6 c = (s^2 + 9.615s + 209.68)(s + \alpha)$$

De donde igualando término a término se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$1.6 \cdot 10^6 c = \alpha + 9.615$$

$$305 = 9.615\alpha + 209.68$$

$$236.7 \cdot 10^6 c = 209.68\alpha$$

Se podría resolver por mínimos cuadrados, puesto que se tienen 3 ecuaciones y solo 2 incógnitas. El resultado que se obtiene es

$$\alpha = 9.9384$$

$$c = 0.8804 \cdot 10^{-5}$$

Sin embargo en este caso no está claro que esta sea la solución más correcta. Otra posibilidad es despejar de la segunda ecuación, de donde se obtiene

$$\alpha = 9.914$$

De la primera ecuación se obtiene

$$c = 1.22 \cdot 10^{-5}$$

De la tercera ecuación se obtiene

$$c = 0.878 \cdot 10^{-5}$$

por lo que se podría tomar el valor medio:

$$c = 1.05 \cdot 10^{-5}$$

En todo caso no deja de ser una aproximación, puesto que el sistema no es de 2º orden estándar.

Tomando por ejemplo este último valor, la función de transferencia queda:

$$G(s) = -\frac{0.5s + 8.4}{s^3 + 16.8s^2 + 305s + 2485} = \frac{0.5(s + 16.8)}{s\left((s + 3.19)^2 + 15.11^2\right)(s + 10.4)}$$

Con este resultado se puede comprobar la validez de la suposición inicial. El polo real es –10.4, mientras los polos complejos tienen una parte real de –3.19, por lo que son ligeramente dominantes respecto el polo real. La suposición de que el sistema se aproxima a uno de segundo orden no es del todo exacta, pero puede ser razonable.

d*) Para calcular la evolución con el tiempo del émbolo bastará calcular la transformada de Laplace y realizar la transformada inversa. En este caso ΔF es un escalón de valor –10, por lo que:*

$$\Delta x(s) = -\frac{0.5s + 8.4}{s^3 + 16.8s^2 + 305s + 2485} \cdot \frac{-10}{s} = \frac{5s + 84}{s\left((s + 3.19)^2 + 15.11^2\right)(s + 10.4)}$$

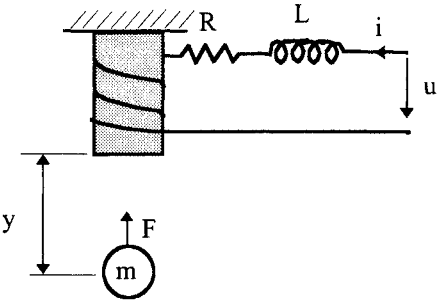
$$\Delta x(t) = 0.0338 - 0.0109e^{-10.4t} - 0.026e^{-3.19t}\cos(15.11t - 0.495)$$

Por lo que la evolución de la posición absoluta del émbolo será:

$$x(t) = \Delta x(t) + x_0 = 0.2338 - 0.0109e^{-10.4t} - 0.026e^{-3.19t}\cos(15.11t - 0.495)$$

PROBLEMA 55. Levitación magnética

La figura muestra un sistema de levitación magnética:



donde la fuerza F de atracción magnética depende de la corriente que circula por la bobina y de la distancia de la bola al electroimán según: $F = \frac{i^2}{y}$, con F en N, i en A e y en m. Sabiendo que el aire produce un rozamiento viscoso sobre la bola de coeficiente c=10Ns/m:

a) Obtener las ecuaciones diferenciales que definen el sistema y expresarlas en forma de ecuaciones de estado válidas (para ello elegir las variables de estado de forma correcta).

b) Obtener las ecuaciones de estado lineales aproximadas y la función de transferencia aproximada entre u e y en función del punto de funcionamiento u_0.

c) Si se mide la altura y con un sensor y se define la tensión de entrada como $u=u_0+k(y-y_0)$, ¿Cuál es el rango de valores de u_0 en los que existe algún valor de k para el que el sistema es estable?. ¿Y si se mide también la corriente i, definiendo la entrada como $u=u_0+k_1(y-y_0)+k_2(i-i_0)$?

d) Si se mide la altura y con un sensor, y se define la tensión de entrada como $u=ky$, ¿Existe algún valor de k para el que el sistema sea estable?

Datos: m=1kg, L=0.01H, R=1Ω.

Solución

a) *La ecuación el movimiento es:*

$$m\ddot{y} = mg - F - c\dot{y} = mg - \frac{i^2}{y} - c\dot{y}$$

Mientras que la ecuación del circuito eléctrico es:

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Definiendo los estados como $y, \dot{y}, i$ *, y despejando de las ecuaciones anteriores se expresan las ecuaciones en representación interna:*

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g - \frac{i^2}{my} - \frac{c}{m}\dot{y}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u$$

que, sustituyendo los valores quedan:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = 9.8 - \frac{i^2}{y} - 10\dot{y}$$

$$\frac{di}{dt} = -100i + 100u$$

b*) Para linealizar las ecuaciones anteriores se calcula en primer lugar el punto de funcionamiento:*

$$0 = -100i_0 + 100u_0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = u_0$$

$$0 = 9.8 - \frac{i_0^{\ 2}}{y_0} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{u_0^{\ 2}}{9.8}$$

Las ecuaciones aproximadas lineales son:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta\dot{y}$$

$$\frac{d\Delta\dot{y}}{dt} = \frac{i_0^{\ 2}}{y_0^{\ 2}}\Delta y - 2\frac{i_0}{y_0}\Delta i - 10\Delta\dot{y} = \frac{9.8^2}{u_0^2}\Delta y - 10\Delta\dot{y} - \frac{19.6}{u_0}\Delta i$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} = -100\Delta i + 100\Delta u$$

Para obtener la función de transferencia se toman transformadas de Laplace:

$$s\Delta i(s) = -100\Delta i(s) + 100\Delta u(s) \quad \Rightarrow \quad \Delta i(s) = \frac{100}{s+100}\Delta u(s)$$

$$s^2\Delta y(s) = \frac{9.8^2}{u_0^2}\Delta y(s) - 10s\Delta y(s) - \frac{19.6}{u_0}\Delta i(s) =$$

$$= \frac{9.8^2}{u_0^2}\Delta y(s) - 10s\Delta y(s) - \frac{19.6}{u_0}\frac{100}{s+100}\Delta u(s)$$

de donde se obtiene:

$$G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{\dfrac{-1960}{u_0}}{\left(s^2 + 10s - \dfrac{96.04}{u_0^2}\right)(s+100)}$$

c) *Si se define la entrada como una realimentación de la salida Δu=-k(Δr-Δy) (donde en este caso Δr=0) la función de transferencia aproximada en bucle cerrado es:*

$$M(s)=\frac{-kG(s)}{1-kG(s)}=\frac{\dfrac{1960k}{u_0}}{\left(s^2+10s-\dfrac{96.04}{u_0^2}\right)(s+100)+\dfrac{1960k}{u_0}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1960k}{u_0}}{s^3+110s^2+(1000-\dfrac{96.04}{u_0^2})s+\dfrac{1960k}{u_0}-\dfrac{9604}{u_0^2}}$$

Otra forma de obtener el polinomio característico en bucle cerrado en este caso es sustituir en la ecuación de estado aproximada Δu=kΔy, obteniendo la matriz del sistema y sus valores propios. El resultado es el denominador de M(s). Para comprobar la estabilidad se estudia en primer lugar el caso en que el sistema es críticamente estable. Habrá un polo en s=0 si:

$$\frac{1960k}{u_0}-\frac{9604}{u_0^2}=0 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{4.9}{u_0}$$

Para ese valor de k, los otros dos polos serán:

$$s^2+110s+(1000-\frac{96.04}{u_0^2})=0$$

$$\Rightarrow \quad s=\frac{-110\pm\sqrt{110^2-4(1000-\dfrac{96.04}{u_0^2})}}{2}$$

Estos dos polos serán estables siempre que:

$$1000-\frac{96.04}{u_0^2}>0 \quad\Rightarrow\quad u_0>0.31$$

En ese caso existirá un valor de k para el que el sistema es estable, pues para k ligeramente menor o ligeramente mayor que 4.9/u_0 los tres polos serán estables. Para comprobar si k debe ser mayor o menor se toma por ejemplo u_0=1 y k=5, obteniéndose unos polos: -101.0758, -8.7013, -0.2229.

Si el punto de funcionamiento es u_0<0.31 cuando se tiene un polo críticamente estable hay otro que es inestable, luego el sistema es inestable. En este caso habría que comprobar la segunda posibilidad en la que se pueden tener polos críticamente estables, es decir, polos imaginarios con parte real cero. La ecuación sería:

$$s^3 + 110s^2 + (1000 - \frac{96.04}{u_0^2})s + \frac{1960k}{u_0} - \frac{9604}{u_0^2} =$$
$$= (s^2 + \omega^2)(s + a) = s^3 + as^2 + \omega^2 s + a\omega^2$$

que no tiene ninguna solución posible si $u_0<0.31$, pues ω^2 es siempre positivo.

El rango de puntos de funcionamiento en que el sistema se puede estabilizar con la realimentación de la salida es $u_0>0.31$.

Si se mide también la corriente y se define la entrada como: $\Delta u=k_1\Delta y+k_2\Delta i$ el polinomio característico en bucle cerrado se puede obtener a partir de la matriz del sistema en bucle cerrado:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta\dot{y}$$

$$\frac{d\Delta\dot{y}}{dt} = \frac{9.8^2}{u_0^2}\Delta y - 10\Delta\dot{y} - \frac{19.6}{u_0}\Delta i$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} = -100\Delta i + 100\left(k_1\Delta y + k_2\Delta i\right)$$

Con lo que el polinomio característico es:

$$|sI - A| = \left|\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -\frac{96.04}{u_0^2} & s+10 & \frac{19.6}{u_0} \\ -100k_1 & 0 & s+100(1-k_2) \end{bmatrix}\right| =$$

$$= s^3 + (110 - 100k_2)s^2 + (1000 - 1000k_2 - \frac{96.04}{u_0^2})s +$$
$$+ \frac{1960k_1}{u_0} - \frac{9604(1-k_2)}{u_0^2}$$

Si $u_0>0.31$ es evidente que el sistema se puede estabilizar (basta con hacer $k_2=0$ y se tiene el caso anterior). Así pues se considerará el caso $u_0<0.31$. El sistema será críticamente estable (con polo en $s=0$) si:

$$\frac{1960k_1}{u_0} - \frac{9604(1-k_2)}{u_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{4.9(1-k_2)}{u_0}$$

En ese caso los otros dos polos son las raíces de:

$$s^2 + (110 - 100k_2)s + (1000 - 1000k_2 - \frac{96.04}{u_0^2}) = 0$$

Las raíces de este polinomio son:

$$s = \frac{-110 + 100k_2 \pm \sqrt{(110 - 100k_2)^2 - 4(1000 - 1000k_2 - \frac{96.04}{u_0^2})}}{2}$$

Para que estas raíces sean estables (parte real negativa) se debe cumplir que:

$$-110 + 100k_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 < 1.1$$

y además

$$(1000 - 1000k_2 - \frac{96.04}{u_0^2}) > 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 < 1 - \frac{0.09604}{u_0^2}$$

que se resume en

$$k_2 < 1 - \frac{0.09604}{u_0^2}$$

Como conclusión, para cualquier valor de u_0 distinto de cero existen los valores de k_2 y k_1 tales que el sistema en bucle cerrado es estable, ya que basta tomar k_2 de forma que se cumpla la condición anterior, y tomar después k_1 ligeramente mayor que $\frac{4.9(1-k_2)}{u_0}$ Como ejemplo, si se toma u_0=0.1, k_2=-10, k_1=600, los polos en bucle cerrado son: (-1109.7, -0.14355+ 32.823i,-0.14355- 32.823i).

d*) Si se define u=ky las ecuaciones exactas en bucle cerrado son:*

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = 9.8 - \frac{i^2}{y} - 10\dot{y}$$

$$\frac{di}{dt} = -100i + 100ky$$

El punto de funcionamiento es ahora:

$$0 = 9.8 - \frac{i_0^{\;2}}{y_0} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{i_0^{\;2}}{9.8}$$

$$0 = -100i_0 + 100ky_0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = ky_0 = k\frac{i_0^2}{9.8} \quad \Rightarrow i_0 = \frac{9.8}{k} \quad \Rightarrow y_0 = \frac{9.8}{k^2}$$

Para comprobar la estabilidad se calcula el sistema lineal aproximado:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta\dot{y}$$

$$\frac{d\Delta\dot{y}}{dt} = \frac{i_0^2}{y_0^2}\Delta y - 2\frac{i_0}{y_0}\Delta i - 10\Delta\dot{y} = k^2\Delta y - 10\Delta\dot{y} - 2k\Delta i$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} = -100\Delta i + 100k\Delta y$$

Los valores propios de la matriz de estado en bucle cerrado son las raíces del polinomio:

$$|sI - A| = \left\| \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -k^2 & s+10 & 2k \\ -100k & 0 & s+100 \end{bmatrix} \right\| =$$

$$= s^3 + 110s^2 + (1000 - k^2)s + 100k^2$$

Para comprobar la estabilidad se estudia la posibilidad de que el sistema sea críticamente estable. No puede haber un polo real en s=0, porque en ese caso k=0, lo cual no es una solución válida (u sería cero). La otra posibilidad es que haya un par de polos complejos con parte real nula:

$$s^3 + 110s^2 + (1000 - k^2)s + 100k^2 = (s^2 + \omega^2)(s + a) =$$

$$= s^3 + as^2 + \omega^2 s + a\omega^2$$

de donde se obtiene:

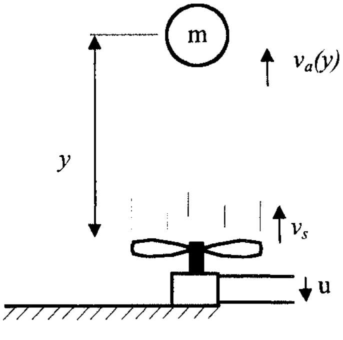
$$a = 110$$

$$\omega^2 = 1000 - k^2 = \frac{100k^2}{a} = \frac{100k^2}{110} \quad \Rightarrow \quad k = 22.887$$

Para este valor de k, el polo real es estable por lo que el sistema sí se podrá estabilizar. Si se toma un valor de k menor que 22.887 se comprueba que los polos son todos estables.

PROBLEMA 56. Levitación en chorro de aire

El sistema siguiente modela la levitación de una bola en un flujo de aire vertical:



donde u es la tensión que se aplica al motor de continua, v_s es la velocidad del aire cuando sale de la hélice y $v_a(y)$ es la velocidad del aire a una altura y (que disminuye con la distancia a la hélice). Sabiendo que:

- La relación entre la señal u y la señal v_s^2 ha sido determinada experimentalmente quedando definida por la función de transferencia $G(s) = \dfrac{5}{s+10}$.
- La función que define la relación de la velocidad del aire con la altura es $v_a(y) = v_s \cdot e^{-2y}$.
- La fuerza de rozamiento viscoso entre el flujo de aire y la bola es proporcional a la velocidad relativa entre éstos y el coeficiente es c=1.

Calcular:

a) Las ecuaciones diferenciales que definen el sistema.

b) Las ecuaciones lineales aproximadas. Expresarlas en forma de función de transferencia aproximada entre u e y, en función del punto de funcionamiento u_0.

c) Si se mide la altura y con un sensor, y se define la entrada como $u=u_0+100(\Delta r-(y-y_0))$ (donde Δr es la altura de referencia respecto del punto de equilibrio y_0), obtener el mínimo valor de u_0 para el que el sistema aproximado en bucle cerrado es estable. Obtener la frecuencia con que oscilaría el sistema en bucle cerrado en ese punto de funcionamiento.

d) Si en lugar de definir la realimentación con incrementos, se define directamente $u=100(r-y)$ (en las ecuaciones exactas), obtener el valor de r_0 que da lugar al mismo punto de funcionamiento anterior (es decir al mismo valor de y_0). Determinar si el sistema realimentado es estable en ese punto de funcionamiento.

Datos: m=0.1kg. Todos los datos en unidades del S.I.

Solución

a) *La ecuación diferencial que relaciona la velocidad de salida del aire del ventilador con la tensión de entrada es:*

$$\frac{d}{dt}\left(v_s^2\right) + 10v_s^2 = 5u$$

$$2v_s\dot{v}_s + 10{v_s}^2 = 5u \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_s = -5v_s + \frac{5u}{2v_s} \qquad (I)$$

La ecuación diferencial del movimiento vertical de la bola es:

$$m\ddot{y} = -mg - c(\dot{y} - v_a(y)) = -mg - c\dot{y} + cv_s e^{-2y}$$

que sustituyendo valores queda:

$$\ddot{y} = -10 - 10\dot{y} + 10v_s e^{-2y} \qquad (II)$$

b) El punto de funcionamiento queda definido por:

$$0 = -5v_{s0} + \frac{5u_0}{2v_{s0}} \quad \Rightarrow \quad v_{s0} = \sqrt{\frac{u_0}{2}}$$

$$0 = -10 + 10v_{s0}e^{-2y_0} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{4}\ln(\frac{u_0}{2})$$

Las ecuaciones lineales aproximadas son:

$$\Delta\dot{v}_s = \left(-5 - \frac{5u_0}{2v_{s0}^2}\right)\Delta v_s + \frac{5}{2v_{s0}}\Delta u = -10\Delta v_s + \frac{5}{\sqrt{2u_0}}\Delta u$$

$$\Delta\ddot{y} = -10\Delta\dot{y} - 20v_{s0}e^{-2y_0}\Delta y + 10e^{-2y_0}\Delta v_s = -10\Delta\dot{y} - 20\Delta y + \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{u_0}}\Delta v_s$$

Tomando transformadas de Laplace en las ecuaciones anteriores y despejando se obtiene:

$$s\Delta v_s(s) = -10\Delta v_s(s) + \frac{5}{\sqrt{2u_0}}\Delta u(s) \quad \Rightarrow \Delta v_s(s) = \frac{\frac{5}{\sqrt{2u_0}}}{(s+10)}\Delta u(s)$$

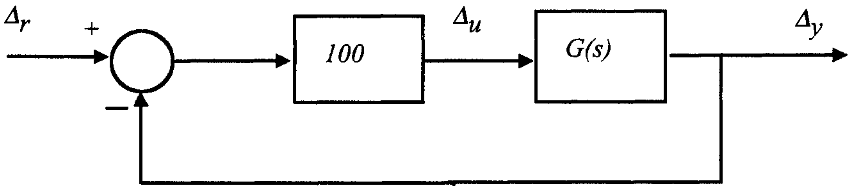
$$s^2\Delta y(s) = -10s\Delta y(s) - 20\Delta y(s) + \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{u_0}}\Delta v_s(s)$$

$$\Rightarrow \Delta y(s) = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{u_0}}}{(s^2 + 10s + 20)}\Delta v_s(s)$$

por lo que la función de transferencia entre la tensión y la altura de la bola es:

$$G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{\frac{50}{u_0}}{(s^2 + 10s + 20)(s+10)}$$

c) Si se define la entrada como $u=u_0+100(\Delta r-(y-y_0))$ se tiene en realidad $\Delta u=100(\Delta r-\Delta y)$, es decir, una realimentación de la salida con ganancia 100.



La función de transferencia en bucle cerrado es:

$$M(s) = \frac{100G(s)}{1+100G(s)} = \frac{\dfrac{5000}{u_0}}{(s^2+10s+20)(s+10)+\dfrac{5000}{u_0}} =$$

$$= \frac{\dfrac{5000}{u_0}}{s^3+20s^2+120s+200+\dfrac{5000}{u_0}}$$

Para que el sistema sea estable todos los polos deben tener parte real negativa. El límite de estabilidad se dará cuando haya un polo con parte real nula. Si fuera un polo real en s=0, se tendría que

$$200+\frac{5000}{u_0}=0$$

que no da ninguna solución válida (si u_0 es negativa el ventilador aspiraría la bola hacia abajo). La otra posibilidad es un par de polos complejos conjugados con parte real cero. En ese caso se tiene:

$$s^3+20s^2+120s+200+\frac{5000}{u_0} = (s^2+\omega^2)(s+a) =$$

$$= s^3+as^2+\omega^2 s+a\omega^2$$

de donde igualando término a término se obtiene:

$$a = 20$$

$$\omega^2 = 120$$

$$a\omega^2 = 200+\frac{5000}{u_0} = 2400 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 2.2727\ V$$

Para valores mayores que éste el sistema sería estable. Para comprobarlo basta con calcular los polos para un valor ligeramente mayor de 2.2727.

En el punto de funcionamiento u_0=2.2727 el sistema tendría dos polos imaginarios puros de parte imaginaria ω=10.954 rad/s, por lo que ésta es la frecuencia con la que oscilaría.

Para u_0=2.2727, el valor del punto de funcionamiento es y_0=0.032.

d) *Si se define la realimentación sin incrementos u=100(r-y), las ecuaciones diferenciales del sistema quedan:*

$$v_s = -5v_s + \frac{500(r-y)}{2v_s} \qquad (I)$$

$$y = -10 - 10y + 10v_s e^{-2y} \qquad (II)$$

El punto de funcionamiento quedará definido ahora por:

$$0 = -10 + 10v_{s0}e^{-2y_0}$$

$$0 = -5v_{s0} + \frac{500(r_0 - y_0)}{2v_{s0}}$$

Para que el punto de funcionamiento sea igual al anterior (y_0=0.032) se tiene:

$$v_{s0} = 1.06609 \quad \Rightarrow \quad r_0 = 0.05473$$

Para comprobar si el sistema es estable en ese punto de funcionamiento hay qye obtener el sistema lineal aproximado:

$$\Delta v_s = \left(-5 - \frac{250}{v_{s0}^2}(r_0 - y_0)\right)\Delta v_s + \frac{250}{v_{s0}}\Delta r - \frac{250}{v_{s0}}\Delta y =$$
$$= -10\Delta v_s - 234.5\Delta y + 234.5\Delta r$$

$$\Delta y = -10\Delta y - 20v_{s0}e^{-2y_0}\Delta y + 10e^{-2y_0}\Delta v_s = -10\Delta y - 20\Delta y + 9.3809\Delta v_s$$

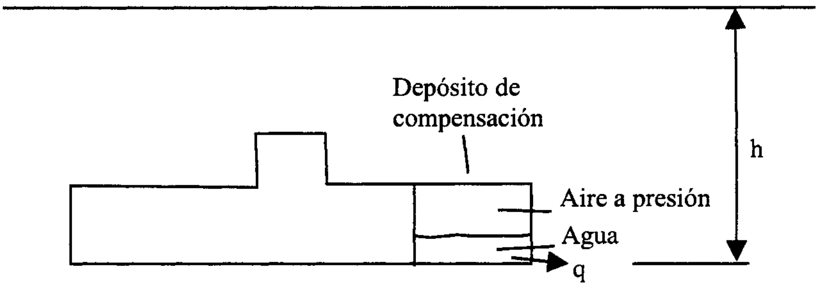
Tomando transformadas de Laplace y despejando se obtiene:

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta r(s)} = \frac{2200}{s^3 + 20s^2 + 120s + 2400} = \frac{2200}{(s^2 + 10.954^2)(s+20)}$$

por lo que el sistema tiene dos polos imaginarios con parte real cero, es decir, es críticamente estable, lo que significa que no es estable desde el punto de vista BIBO.

PROBLEMA 57. Submarino

El sistema de control de profundidad de un submarino está formado por un depósito de compensación, que puede llenarse parcialmente de agua para compensar el empuje y el peso, y de esta forma hacer que el submarino suba o baje. El volumen total del submarino es constante e igual a 15 m³. La masa total del submarino (con el depósito de compensación vacío) es de 14000 kg. La forma de modificar la fuerza es hacer que el depósito de compensación se llene más o menos de agua, con lo que el peso supera al empuje o al revés. Para poder hacer esto, se dispone de un potente compresor de aire que permite fijar a voluntad la presión en el depósito (p_i). El caudal de agua desde el depósito al mar (o viceversa) depende de la diferencia entre esta presión y la presión exterior p_e, de forma que $q = 10^{-6}(p_i - p_e)$, estando en unidades internacionales. La presión exterior depende de la profundidad $p_e = \rho g h$, con $\rho = 1000 kg/m^3$



a) Obtener las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del sistema, considerando como entrada la presión p_i. Expresarlas en representación interna.

b) Obtener las ecuaciones linealizadas en representación interna en función de la profundidad de equilibrio h_0.

c) Obtener la función de transferencia aproximada entre la entrada (p_i) y la salida (h), estudiando su estabilidad en función de h_0.

d) Para controlar la profundidad del submarino alrededor del punto de funcionamiento h_0=500m se decide medir la profundidad h y realimentar de forma que $\Delta p_i = k(\Delta r - \Delta h)$. ¿Es posible estabilizar el submarino de esta forma? Si no es así, ¿cómo se podría estabilizar?

Solución

a) *Por una parte se tendrá la ecuación del movimiento vertical:*

$$\frac{d}{dt}\left(m_T \dot{h}\right) = m_T g - E$$

donde m_T=14000+m_a es la masa total del submarino (incluida el agua del depósito), y donde el empuje es constante E=15000g (el volumen desalojado por el submarino es constante). Desarrollando la ecuación se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left((14000+m_a)\dot{h}\right) = (14000+m_a)\ddot{h} + \dot{m}_a\dot{h} =$$

$$= (14000+m_a)g - 15000g = m_a g - 1000g$$

despejando la derivada más alta se obtiene:

$$\ddot{h} = -\frac{\dot{m}_a\dot{h}}{(14000+m_a)} + \frac{9.8m_a - 9800}{(14000+m_a)}$$

Por otra parte se tiene la ecuación de llenado del depósito de compensación. El caudal volumétrico es $q = 10^{-6}(p_i - p_e)$ *, por lo que la ecuación de la evolución del volumen de agua es:*

$$\dot{V}_a = -10^{-6}(p_i - p_e) = -10^{-6}(p_i - 9800h)$$

donde el signo negativo indica que el depósito se vacía si la presión interna es mayor que la externa.

Si se define como variable la masa de agua en lugar del caudal se tendrá:

$$\dot{m}_a = \rho\dot{V}_a = -10^{-3}(p_i - 9800h)$$

que es la segunda ecuación diferencial que define el sistema. Para expresar las ecuaciones en representación interna se definen los estados: h, $\dot{h}$, m_a *. Las ecuaciones en representación interna serán:*

$$\frac{dh}{dt} = \dot{h}$$

$$\frac{d\dot{h}}{dt} = -\frac{\dot{m}_a\dot{h}}{(14000+m_a)} + \frac{9.8m_a - 9800}{(14000+m_a)} =$$

$$= \frac{10^{-3}(p_i - 9800h)\dot{h}}{(14000+m_a)} + \frac{9.8m_a - 9800}{(14000+m_a)}$$

$$\frac{dm_a}{dt} = -10^{-3}(p_i - 9800h)$$

b) *El punto de funcionamiento es:*

$$p_{i0} = 9800h_0$$

$$m_{a0} = 1000$$

Las ecuaciones linealizadas son:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \Delta\dot{h}$$

$$\frac{d\Delta\dot{h}}{dt} \approx \frac{10^{-3}(p_{i0} - 9800h_0)}{(14000 + m_{a0})}\Delta\dot{h} + 0\Delta p_i + \frac{9.8 \cdot 14000 + 9800}{(14000 + m_{a0})^2}\Delta m_a + 0\Delta h$$

que, sustituyendo queda:

$$\frac{d\Delta\dot{h}}{dt} \approx 6.533 \cdot 10^{-4}\Delta m_a$$

$$\frac{d\Delta m_a}{dt} = -10^{-3}\Delta p_i + 9.8\Delta h$$

c) *Tomando transformadas de Laplace y despejando se obtiene la función de transferencia:*

$$s\Delta m_a(s) = -10^{-3}\Delta p_i(s) + 9.8\Delta h(s)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta m_a(s) = \frac{-10^{-3}\Delta p_i(s) + 9.8\Delta h(s)}{s}$$

$$s^2\Delta h(s) = 6.533 \cdot 10^{-4}\Delta m_a(s) = 6.533 \cdot 10^{-4}\frac{-10^{-3}\Delta p_i(s) + 9.8\Delta h(s)}{s}$$

por lo que la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{\Delta h(s)}{\Delta p_i(s)} = \frac{-6.533 \cdot 10^{-7}}{s^3 - 6.4023 \cdot 10^{-3}}$$

Para estudiar la estabilidad, como la función de transferencia es constante (no depende de h_0) bastará con calcular los polos:

$$s^3 - 6.4023 \cdot 10^{-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \begin{cases} 0.1857 \\ -0.09285 \pm 0.1608j \end{cases}$$

por lo que hay un polo con parte real positiva, y el sistema es inestable.

d) Se define el sistema en bucle cerrado como: $\Delta p_i = k(\Delta r - \Delta h)$, *es decir, una realimentación de la salida con controlador k. La función de transferencia en bucle cerrado será por tanto:*

$$M(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{-6.533 \cdot 10^{-7}k}{s^3 - 6.4023 \cdot 10^{-3} - 6.533 \cdot 10^{-7}k}$$

Para comprobar si existe algún valor de k para el que el sistema en bucle cerrado es estable se comprobará en primer lugar el caso críticamente estable (un polo con parte real nula). Para tener un polo en s=0 la condición es:

$$-6.4023 \cdot 10^{-3} - 6.533 \cdot 10^{-7}k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -9800$$

En ese caso el sistema tiene los 3 polos en s=0. Se puede comprobar que para *un valor de k inmediatamente superior o inmediatamente inferior a éste hay siempre al menos un polo con parte real positiva, por lo que el submarino no se puede estabilizar.*

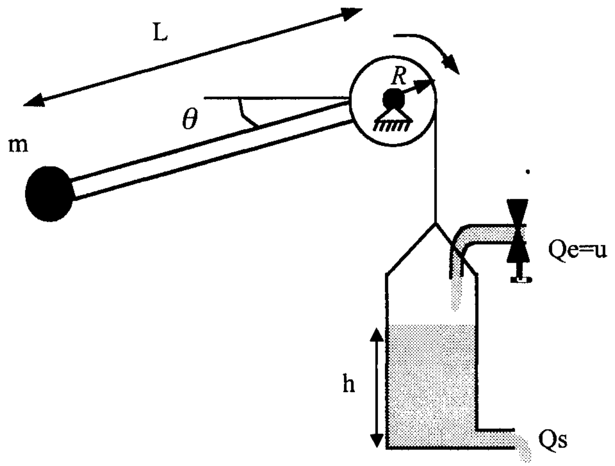
Para estabilizar el submarino sería necesario medir alguna otra variable de estado. Si se mide además de h, su derivada y la masa de agua en el depósito se puede definir una realimentación del estado de la forma:

$$\Delta p_i = k_1 \Delta h + k_2 \Delta \dot{h} + k_3 \Delta m_a + k_{ref} \Delta r$$

Con esta realimentación se puede conseguir los polos en bucle cerrado que se deseen, por lo que el submarino sí se puede estabilizar (basta con elegir los 3 polos con parte real negativa).

PROBLEMA 58. Polea con depósito

El sistema de la figura consta de un cilindro que gira alrededor de un eje fijo. Dicho cilindro tiene una cuerda enrollada, en cuyo extremo cuelga un depósito. Solidaria al cilindro hay una barra de longitud L y peso despreciable, que tiene en un extremo una masa m. Por efecto del peso del depósito, el cilindro gira con lo que la masa m se eleva. La variable de entrada al sistema es el caudal de entrada al depósito, y la variable de salida es el ángulo θ.



a) Obtener las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del sistema.

b) Expresar las ecuaciones anteriores en representación interna.

c) Obtener la función de transferencia aproximada entre la entrada u y el ángulo θ, en función del punto de funcionamiento θ_0.

d) Estudiar la estabilidad del sistema en función de θ_0.

Datos: L=2m, m=100kg, R=0.1m, Sección depósito: S=1m², Orificio de salida: A_s=0.001m². Peso del depósito despreciable.

Solución

a) Si se llama T a la tensión del cable, las ecuaciones del movimiento son:

$$mgL\cos(\theta) - TR = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_{agua}\dot{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(Sh\rho\dot{y}\right) = -T + Sh\rho g$$

donde y representa la posición vertical del depósito desde la polea hacia abajo (la variable y aumenta conforme el depósito desciende).

Si se supone que el cable es rígido se tiene que:

$$y = -R\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -R\dot{\theta}$$

por lo que sustituyendo se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left(Sh\rho\dot{y}\right) = -S\rho R\frac{d}{dt}\left(h\dot{\theta}\right) = -T + Sh\rho g \quad \Rightarrow \quad T = Sh\rho g + S\rho R\frac{d}{dt}\left(h\dot{\theta}\right)$$

Con lo que la ecuación final del movimiento es:

$$mgL\cos(\theta) - SRh\rho g - S\rho R^2\left(\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta}\right) = mL^2\ddot{\theta}$$

Sustituyendo los valores y simplificando queda:

$$(I) \quad \ddot{\theta} = \frac{2000\cos(\theta) - 1000h - 10\dot{h}\dot{\theta}}{400 + 10h}$$

Para completar las ecuaciones que describen el sistema falta la ecuación de llenado del depósito:

$$S\dot{h} = u - A_s\sqrt{2gh}$$

que sustituyendo valores queda:

$$(II) \quad \dot{h} = u - 4.472 \cdot 10^{-3}\sqrt{h}$$

b*) La expresión de las ecuaciones anteriores en representación interna se obtiene sin más que definir los estados:* $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = h$, *y expresar las ecuaciones anteriores de la forma:*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, u)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u)\\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, u)\end{aligned}$$

En este caso se tiene:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2000\cos(x_1) - 1000x_3 - 10x_2\left(u - 4.472\cdot 10^{-3}\sqrt{x_3}\right)}{400 + 10x_3}$$

$$\dot{x}_3 = u - 4.472\cdot 10^{-3}\sqrt{x_3}$$

donde se ha sustituido la expresión de la derivada de h para tener una representación interna correcta.

c) *Para obtener la función de transferencia aproximada entre la entrada y el ángulo hay que linealizar las ecuaciones. El punto de funcionamiento es:*

$$0 = \frac{2000\cos(\theta_0) - 1000h_0}{400 + 10h_0} \quad \Rightarrow \quad h_0 = 2\cos(\theta_0)$$

$$0 = u_0 - 4.472\cdot 10^{-3}\sqrt{h_0} \quad \Rightarrow \quad u_0 = 6.324\cdot 10^{-3}\sqrt{\cos(\theta_0)}$$

Se linealizarán las ecuaciones (I) y (II) por separado, para tomar después transformadas de Laplace, y despejar más fácilmente la función de transferencia pedida.

$$(I) \quad \Delta\ddot{\theta} = \frac{-2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400 + 10h_0}\Delta\theta + \\ + \frac{-1000(400 + 10h_0) - 10(2000\cos(\theta_0) - 1000h_0)}{\left(400 + 10h_0\right)^2}\Delta h$$

que simplificando da:

$$(I) \quad \Delta\ddot{\theta} = \frac{-2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400 + 20\cos(\theta_0)}\Delta\theta + \frac{-400000 - 20000\cos(\theta_0)}{\left(400 + 20\cos(\theta_0)\right)^2}\Delta h$$

$$(II) \quad \Delta\dot{h} = \Delta u - \frac{4.472\cdot 10^{-3}}{2\sqrt{h_0}}\Delta h = \Delta u - \frac{1.581\cdot 10^{-3}}{\sqrt{\cos(\theta_0)}}\Delta h$$

Tomando transformadas de Laplace (suponiendo condiciones iniciales nulas) y despejando se obtiene:

$$(II) \quad \Delta h(s) = \frac{1}{s + \dfrac{1.581\cdot 10^{-3}}{\sqrt{\cos(\theta_0)}}}\Delta u(s)$$

$$(I) \quad \Delta\theta(s) = \frac{\dfrac{-400000 - 20000\cos(\theta_0)}{\left(400 + 20\cos(\theta_0)\right)^2}}{s^2 + \dfrac{2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400 + 20\cos(\theta_0)}}\Delta h(s)$$

Con lo que la función de transferencia final es:

$$(I)\quad G(s)=\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta u(s)}=\frac{\dfrac{-400000-20000\cos(\theta_0)}{\left(400+20\cos(\theta_0)\right)^2}}{\left(s^2+\dfrac{2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400+20\cos(\theta_0)}\right)\left(s+\dfrac{1.581\cdot 10^{-3}}{\sqrt{\cos(\theta_0)}}\right)}$$

d*) Para analizar la estabilidad hay que estudiar la parte real de los polos de la función de transferencia. El sistema será estable si todos los polos tienen parte real menor que cero. Si hay un polo con parte real positiva el sistema será inestable.*

Uno de los polos es siempre estable, pues

$$Polo1=-\frac{1.581\cdot 10^{-3}}{\sqrt{\cos(\theta_0)}}<0\quad \forall\theta_0$$

Los otros dos polos dependen del valor de θ_0.

Si

$$\frac{2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400+20\cos(\theta_0)}>0\quad\Leftrightarrow\quad\theta_0>0$$

Hay dos polos imaginarios puros:

$$Polos2y3=\pm\sqrt{\frac{2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400+20\cos(\theta_0)}}\,j$$

Por lo que el sistema es críticamente estable.

Si

$$\frac{2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400+20\cos(\theta_0)}<0\quad\Leftrightarrow\quad\theta_0<0$$

Hay dos polos reales diferentes:

$$Polo2=-\sqrt{-\frac{2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400+20\cos(\theta_0)}}<0$$

$$Polo3=+\sqrt{-\frac{2000\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{400+20\cos(\theta_0)}}>0$$

Por lo que el sistema es inestable (hay un polo con parte real positiva).

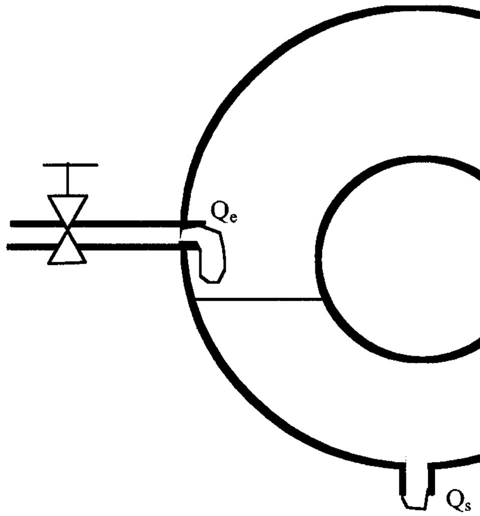
El resumen del análisis de estabilidad es:

INESTABLE si $-90<\theta_0<0$

CRÍTICAMENTE ESTABLE si $0<\theta_0<90$

PROBLEMA 59. Depósito con flotador

El sistema siguiente representa una esfera flotando dentro de un tanque esférico de agua.



La entrada al sistema es el caudal entrante, Q_e, que se puede variar mediante una electroválvula.

a) Obtener las ecuaciones diferenciales que relacionan el caudal de entrada con el nivel de agua en el depósito y la posición vertical de la esfera, expresándolas en representación interna.

b) Obtener la función de transferencia aproximada entre el caudal de entrada y la posición de la esfera para el punto de funcionamiento $Q_{e0}=0.06\ m^3/s$.

c) Calcular la evolución con el tiempo de la posición de la esfera si estando en el punto de funcionamiento anterior se abre la válvula pasando el caudal al valor 0.065 m^3/s. A la vista de la evolución temporal, ¿Se podría aproximar esta respuesta a la de un sistema de orden menor? Definir ese sistema de orden reducido.

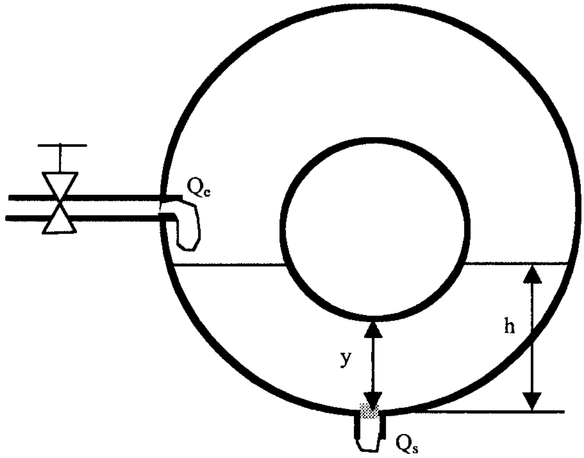
d) Si se mide la posición de la esfera con un sensor y se define la entrada como $\Delta Q_e=k\Delta y$. ¿Considerando el sistema reducido anterior, se puede conseguir que el sistema en bucle cerrado sea estable y sobreamortiguado? ¿Y si se considera el sistema total?

Datos:

- Tanque esférico: $R=2m$, orificio de salida $A_s=0.01m^2$.
- Esfera flotando: radio $r=1m$, masa $m=1000$ kg
- Volumen de un casquete esférico de altura h: $V=\pi h^2(R-h/3)$, donde R es el radio de la esfera.

Solución

a) *Se define y como la posición de la parte inferior de la esfera, y h como el nivel del agua en el depósito,*



La ecuación de llenado del depósito es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\pi h^2(R - \frac{h}{3}) - \pi(h-y)^2(r - \frac{h-y}{3})\right\} =$$

$$= Q_e - Q_s = Q_e - A_s\sqrt{2gh}$$

Desarrollando la derivada se obtiene

$$\left[2\pi Rh - \pi h^2 - 2\pi r(h-y) + \pi(h-y)^2\right]\dot{h} + \left[2\pi r(h-y) - \pi(h-y)^2\right]\dot{y} =$$

$$= Q_e - A_s\sqrt{2gh}$$

que se simplifica, sustituyendo valores:

$$(I) \qquad \left[2\pi h + 2\pi y + \pi y^2 - 2\pi hy\right]\dot{h} + \left[2\pi(h-y) - \pi(h-y)^2\right]\dot{y} =$$

$$= Q_e - 0.01\sqrt{19.6h}$$

La ecuación del movimiento vertical de la bola es:

$$m \cdot \ddot{y} = E - mg = \rho g\pi(h-y)^2(r - \frac{h-y}{3}) - mg$$

que se simplifica a:

$$(II) \qquad \ddot{y} = 9.8\pi(h-y)^2(1 - \frac{h-y}{3}) - 9.8$$

Para expresar las ecuaciones en representación interna se definen los estados como h, y, dy/dt, quedando:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2\pi(h-y)-\pi(h-y)^2}{2\pi h+2\pi y+\pi y^2-2\pi hy}\dot{y}+\frac{Q_e-0.01\sqrt{19.6h}}{2\pi h+2\pi y+\pi y^2-2\pi hy}$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = 9.8\pi(h-y)^2(1-\frac{h-y}{3})-9.8$$

b) *El punto de funcionamiento es:*

$$0 = Q_{e0}-0.01\sqrt{19.6}\sqrt{h_0} \quad \Rightarrow \quad h_0 = 1.8367m$$

$$0 = 9.8\pi(h_0-y_0)^2(1-\frac{h_0-y_0}{3})-9.8$$

$$\Rightarrow \quad h_0-y_0 = 0.6355 \quad \Rightarrow y_0 = 1.2012m$$

Linealizando las ecuaciones se obtiene:

$$\Delta\dot{h} =$$

$$-\frac{2\pi(h_0-y_0)-\pi(h_0-y_0)^2}{2\pi h_0+2\pi y_0+\pi {y_0}^2-2\pi h_0 y_0}\Delta\dot{y}+\frac{1}{2\pi h_0+2\pi y_0+\pi {y_0}^2-2\pi h_0 y_0}\Delta Q_e+$$

$$+\left\{\frac{-\left(Q_{e0}-0.01\sqrt{19.6h_0}\right)\left(2\pi+2\pi y_0-2\pi h_0\right)}{\left(2\pi h_0+2\pi y_0+\pi {y_0}^2-2\pi h_0 y_0\right)^2}\right\}\Delta y+$$

$$+\left\{\frac{-0.01\sqrt{4.9/h_0}\left(2\pi h_0+2\pi y_0+\pi {y_0}^2-2\pi h_0 y_0\right)}{\left(2\pi h_0+2\pi y_0+\pi {y_0}^2-2\pi h_0 y_0\right)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(Q_{e0}-0.01\sqrt{19.6h_0}\right)\left(2\pi-2\pi y_0\right)}{\left(2\pi h_0+2\pi y_0+\pi {y_0}^2-2\pi h_0 y_0\right)^2}\right\}\Delta h$$

$$\Delta\ddot{y} = \left\{-19.6\pi(h_0-y_0)+9.8\pi(h_0-y_0)^2\right\}\Delta y+$$

$$+\left\{19.6\pi(h_0-y_0)-9.8\pi(h_0-y_0)^2\right\}\Delta h$$

que sustituyendo valores queda:

$$\Delta\dot{h} = -0.2792\Delta\dot{y}+0.1025\Delta Q_e-0.001674\Delta h$$

$$\Delta\ddot{y} = -26.697\Delta y+26.697\Delta h$$

Para obtener la función de transferencia basta con tomar transformadas de Laplace y despejar:

$$s\Delta h(s) = -0.2792s\Delta y(s) + 0.1025\Delta Q_e(s) - 0.001674\Delta h(s)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta h(s) = \frac{-0.2792s\Delta y(s) + 0.1025\Delta Q_e(s)}{s + 0.001674}$$

$$s^2\Delta y(s) = -26.697\Delta y(s) + 26.697\Delta h(s) =$$

$$= -26.697\Delta y(s) + 26.697\frac{-0.2792s\Delta y(s) + 0.1025\Delta Q_e(s)}{s + 0.001674}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta Q_e(s)} = \frac{2.7364}{s^2(s + 0.001674) + 26.697(s + 0.001674) + 7.4538s} =$$

$$= \frac{2.7364}{s^3 + 0.001674s^2 + 34.150s + 0.04469}$$

c*) Si el caudal pasa a ser 0.065 se tiene un escalón de valor 0.005 para la señal ΔQ_e, por lo que la evolución es la transformada inversa de:*

$$\Delta y(s) = \frac{0.005 \cdot 2.7364}{s(s^3 + 0.001674s^2 + 34.150s + 0.04469)} =$$

$$= \frac{0.013682}{s(s + 0.001308)\left((s + 0.0001827)^2 + 5.8438^2\right)}$$

$$\Delta y(t) =$$

$$A + Be^{-0.001308t} + Ce^{-0.0001827t}\,\mathrm{sen}(5.8438t) + De^{-0.0001827t}\cos(5.8438t)$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtiene:

A= 0.3063

B= –0.3063

C= –6.8559 10^{-5}

D= –1.1058 10^{-8}

A la vista de los valores calculados, los términos senoidales de la respuesta son muy pequeños por lo que la respuesta se puede aproximar a:

$$\Delta y(t) \approx 0.3063(1 - e^{-0.001308t})$$

que es la respuesta de un sistema de primer orden de ganancia estática K=0.3063/0.005 y de constante de tiempo 1/0.001308:

$$G(s) \approx \frac{61.26}{1 + 764.5s}$$

d*) Si se define $\Delta Q_e = k\Delta y$ considerando el sistema reducido de orden 1 se tiene un sistema en bucle cerrado:*

$$\Delta y(s)(1+764.5s) \approx 61.26\Delta Q_e = 61.26k\Delta y(s)$$

$$\Rightarrow \quad (764.5s+1-61.26k)\Delta y(s) = 0$$

por lo que el único polo en bucle cerrado sería:

$$s = \frac{61.26k-1}{764.5}$$

Para que sea estable basta con que sea negativo. En este caso también será sobreamortiguado, por ser un solo polo real:

$$61.26k-1<0 \quad \Rightarrow \quad k<0.01632$$

La misma conclusión se obtiene si se plantea directamente la función de transferencia en bucle cerrado (suponiendo que ΔQ_e=-k(Δr -Δy), aunque Δr sea cero en este caso), es decir:

$$M(s) = \frac{-kG(s)}{1-kG(s)} = \frac{-61.26k}{764.5s+1-61.26k}$$

Si se considera la función de transferencia total de orden 3 siguiendo el mismo razonamiento se obtiene el polinomio del denominador en bucle cerrado siguiente:

$$s^3+0.001674s^2+34.150s+0.04469-2.7364k$$

Para que el sistema sea estable y sobreamortiguado el polinomio anterior debe tener 3 polos reales negativos. Para comprobar si esto es posible se considera en primer lugar el caso en que se tiene un polo real críticamente estable. En ese caso se tiene:

$$0.04469-2.7364k=0 \quad \Rightarrow \quad k=0.0163$$

Para este valor de k los otros 2 polos son $-0.000837 \pm 5.8438j$, *es decir son estables, pero muy oscilatorios (amortiguamiento casi cero). Para que el sistema sea sobreamortiguado se necesita que la parte imaginaria de esos polos sea cero. Para ver si existe un valor de k en el que se cumple ésto se considera el caso límite en que se tiene un par de polos complejos conjugados con parte imaginaria cero y un tercer polo real, es decir:*

$$s^3+0.001674s^2+34.150s+0.04469-2.7364k =$$

$$=(s+a)^2(s+b) = s^3+(2a+b)s^2+(a^2+2ab)s+a^2b$$

de donde se obtiene

$$2a+b=0.001674 \quad \Rightarrow \quad b=0.001674-2a$$

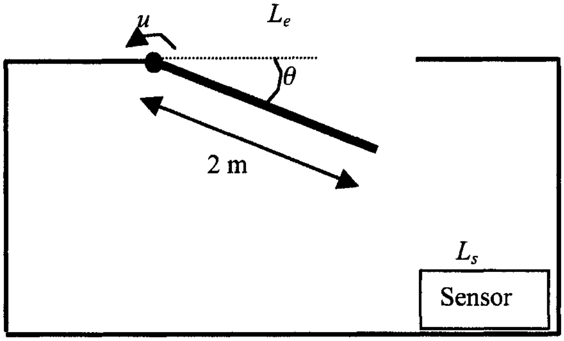
$$a^2+2ab=34.15 \quad \Rightarrow \quad a^2+2a(0.001674-2a)=34.15$$

$$\Rightarrow \quad a=0.000558 \pm 3.374j$$

es decir, no existe ninguna solución real para a, por lo que no existe ningún valor de k en el que todos los polos tengan parte imaginaria cero.

PROBLEMA 60. Invernadero

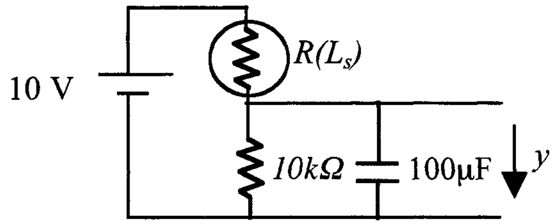
Un invernadero dispone de una compuerta para regular la intensidad luminosa según la figura:



En el interior se tiene un sensor para medir la luminosidad interior (L_s), que depende de la luminosidad exterior y de la posición de la compuerta según la ecuación:

$$L_s = L_e \operatorname{sen}(\theta)$$

El sensor es el circuito eléctrico de la figura:



donde el elemento sensor es una LDR (resistencia variable en función de la luz que recibe). La relación entre la luminosidad y la resistencia de este elemento es:

$$R(L_s) = \frac{100}{1 + L_s} \quad k\Omega$$

La entrada manipulada (u) es el par en el eje de la compuerta. La salida a controlar es la medida del sensor (y). La compuerta se supone homogénea, de masa 10 kg y momento de inercia respecto del eje de J=20 kg m^2.

a) Obtener las ecuaciones que definen el sistema (incluyendo el sensor), y expresarlas en representación interna.

b) Obtener las ecuaciones lineales aproximadas y la función de transferencia entre la entrada y la salida en el punto de funcionamiento definido por $y_0=8\ V$ (suponiendo la luminosidad exterior constante e igual a $L_e=100$) .

c) Si se define una realimentación del estado en el sistema aproximado. ¿Es posible estabilizar el sistema en bucle cerrado midiendo únicamente uno de los estados?

Solución

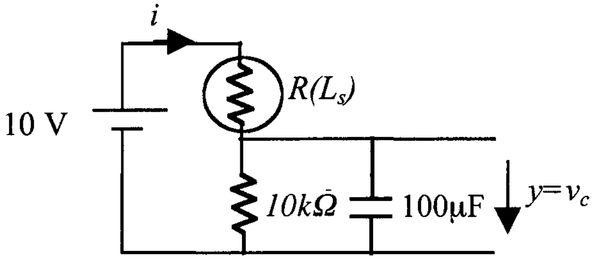
a) *Las ecuaciones del movimiento de la compuerta son:*

$$J\ddot{\theta} = mg\frac{l}{2}\cos(\theta) - u \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 4.9\cos(\theta) - 0.05u$$

Por otra parte las ecuaciones eléctricas del sensor son:

$$\left.\begin{aligned} 10 &= Ri + v_c \\ i &= \frac{v_c}{10^4} + 10^{-4}\dot{v}_c \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_c = -\left(1 + \frac{10^4}{R}\right)v_c + \frac{10^5}{R}$$

donde se han definido las corrientes y tensiones:



Sustituyendo la resistencia variable en función de la luminosidad se tiene:

$$R(L_s) = \frac{100000}{1 + L_s} \quad \Omega = \frac{10^5}{1 + L_e \,\mathrm{sen}(\theta)} \quad \Omega$$

por lo que la ecuación eléctrica queda:

$$\dot{v}_c = -\left(1 + \frac{1 + L_e \,\mathrm{sen}(\theta)}{10}\right)v_c + 1 + L_e \,\mathrm{sen}(\theta)$$

Tomando como variables de estado la tensión en el condensador, la posición θ y su derivada (la velocidad angular) se tienen las ecuaciones en representación interna:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 4.9\cos(\theta) - 0.05u$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -\left(1 + \frac{1 + L_e \,\mathrm{sen}(\theta)}{10}\right)v_c + 1 + L_e \,\mathrm{sen}(\theta)$$

siendo al salida:

$$y = v_c$$

b) *Si la luminosidad exterior es constante (L_e=100), el punto de funcionamiento definido por y_0=8 V es:*

$$0 = -\left(1 + \frac{1+100\operatorname{sen}(\theta_0)}{10}\right)8 + 1 + 100\operatorname{sen}(\theta_0) \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 0.4 \quad rad$$

$$0 = 4.9\cos(\theta_0) - 0.05u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 90.24 \quad Nm$$

Las ecuaciones lineales aproximadas son:

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = \Delta\dot{\theta}$$

$$\frac{d\Delta\dot{\theta}}{dt} = -4.9\operatorname{sen}(\theta_0)\Delta\theta - 0.05\Delta u = -1.911\Delta\theta - 0.05\Delta u$$

$$\frac{d\Delta v_c}{dt} = -\left(1 + \frac{1+100\operatorname{sen}(\theta_0)}{10}\right)\Delta v_c + \left(-10v_{c0} + 100\right)\cos(\theta_0)\Delta\theta =$$

$$= -5\Delta v_c + 18.42\Delta\theta$$

siendo la salida

$$\Delta y = \Delta v_c$$

Para obtener la función de transferencia entre Δu y Δy basta con tomar transformadas de Laplace y despejar:

$$\left.\begin{aligned} s^2\Delta\theta(s) &= -1.911\Delta\theta(s) - 0.05\Delta u(s) \\ s\Delta y(s) &= -5\Delta y(s) + 18.42\Delta\theta(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{-0.921}{(s^2+1.911)(s+5)}$$

c) *Si se define una realimentación del estado de la forma:*

$$\Delta u = k_1\Delta\theta + k_2\Delta\dot{\theta} + k_3\Delta v_c + \alpha r$$

la ecuación del sistema en bucle cerrado es:

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = \Delta\dot{\theta}$$

$$\frac{d\Delta\dot{\theta}}{dt} = -1.911\Delta\theta - 0.05\left(k_1\Delta\theta + k_2\Delta\dot{\theta} + k_3\Delta v_c + \alpha r\right)\Delta u$$

$$\frac{d\Delta v_c}{dt} = -5\Delta v_c + 18.42\Delta\theta$$

por lo que los polos (valores propios) en bucle cerrado son las raíces del polinomio:

$$\left\|\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 1.911+0.05k_1 & s+0.05k_2 & 0.05k_3 \\ -18.42 & 0 & s+5 \end{bmatrix}\right\| =$$

$$= s^3 + (5+0.05k_2)s^2 + (0.25k_2 + 1.911 + 0.05k_1)s +$$
$$+ 0.921k_3 + 9.555 + 0.25k_1$$

Medir únicamente uno de los estados equivale a hacer cero las constantes correspondientes a los otros dos estados. Si se mide únicamente la posición, el polinomio resultante será:

$$s^3 + 5s^2 + (1.911 + 0.05k_1)s + 9.555 + 0.25k_1 =$$
$$= (s^2 + 1.911 + 0.05k_1)(s + 5)$$

El sistema tiene un polo en s=-5, mientras que los otros dos polos son:

$$s = \pm\sqrt{1.911 + 0.05k_1}\,j \quad si \quad 1.911 + 0.05k_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 > -38.22$$
$$s = \pm\sqrt{-1.911 - 0.05k_1} \quad si \quad 1.911 + 0.05k_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 < -38.22$$

En el primer caso se tienen dos polos con parte real cero, por lo que el sistema es inestable. En el segundo caso se tiene un polo con parte real positiva, por lo que el sistema también es inestable. Por tanto no se puede estabilizar midiendo únicamente la posición.

Si se mide únicamente la velocidad el polinomio resultante es:

$$s^3 + (5 + 0.05k_2)s^2 + (0.25k_2 + 1.911)s + 9.555$$

Para ver si se puede estabilizar se calculará en primer lugar el valor de k_2 que hace el sistema críticamente estable. No puede haber un polo en s=0, pues el término independiente es constante. La única opción es pues que haya un par de polos complejos conjugados de parte real nula:

$$s^3 + (5 + 0.05k_2)s^2 + (0.25k_2 + 1.911)s + 9.555 =$$
$$= (s^2 + \omega^2)(s + a) = s^3 + as^2 + \omega^2 s + a\omega^2$$

Igualando coeficientes se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} a &= 5 + 0.05k_2 \\ \omega^2 &= 0.25k_2 + 1.911 \\ a\omega^2 &= 9.555 \end{aligned}\right\}$$

cuya única solución válida (con $\omega^2>0$) es $k_2=0$, $a=5$, $\omega^2=1.911$. En este caso hay dos polos complejos de parte real cero, y el tercer polo es estable (s=-5). Modificando ligeramente el valor de k_2 se conseguirá que los tres polos sean estables. Por ejemplo, con $k_2=1$ se tienen los polos s=-5, s=-0.025+-1.38j, que son estables. Luego sí se puede estabilizar el sistema midiendo únicamente la velocidad.

Si se mide únicamente la tensión de salida del sensor v_c el polinomio sería:

$$s^3 + 5s^2 + 1.911s + 0.921k_3 + 9.555$$

En este caso se tiene un polo en s=0 si

$$0.921k_3 + 9.555 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_3 = -10.3746$$

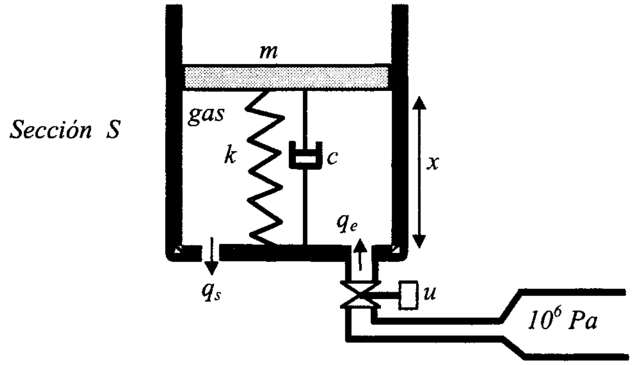
Para este valor los otros dos polos son:

$$s = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1.911}}{2} = \begin{cases} -4.583 \\ -0.417 \end{cases}$$

es decir, son estables, por lo que variando ligeramente el valor de k_3 se puede conseguir que los tres polos sean estables. Por ejemplo para k_3=-9 los polos son -4.6474, -0.1763 +- 0.4913j, es decir estables. Luego también se puede estabilizar el sistema midiendo únicamente la tensión del condensador.

PROBLEMA 61. Cilindro neumático de simple efecto

El sistema siguiente representa un cilindro neumático de simple efecto.



El funcionamiento es como sigue. La electroválvula recibe como señal de entrada una tensión u que regula la apertura de la misma. El caudal másico de gas q_e que entra en el cilindro a través de la válvula depende de la caída de presión en la misma y de la tensión, según la ecuación:

$$q_e = 3 \cdot 10^{-8} u^2 \Delta P_v$$

Estando todas las variables en unidades internacionales. La presión de suministro a la electroválvula se supone constante e igual a 10^6 Pa.

Por otra parte el cilindro tiene un orificio al exterior por el que sale un caudal másico q_s que es función de la caída de presión en el orificio:

$$q_s = \alpha \Delta P_o$$

también en unidades internacionales. El gas se supone que se comporta como un gas perfecto. Además, para simplificar se supone que la transmisión de calor es tan rápida que la temperatura del gas es constante e igual a la temperatura exterior. La masa de un gas es igual al número de moles por el peso molecular del mismo:

$$m_g = n \cdot p_m$$

a) Obtener las ecuaciones que modelan el sistema en función de α, expresándolas en representación interna.

b) Obtener las ecuaciones lineales aproximadas del sistema alrededor del punto de funcionamiento $x_0=0.4$, calculando la función de transferencia aproximada entre la tensión de la electroválvula y la posición del émbolo.

c) Estudiar la estabilidad del sistema en función de α. Explicar cómo se comporta el sistema si $\alpha=0$, dando una justificación física de ese comportamiento.

Datos: $P_{ext}=10^5$Pa, $T_{ext}=300$°K, $S=0.01$ m^2, $m=100$ kg, $c=30$ Ns/m, $k=150$ N/m, longitud en reposo del muelle $l_0=0.2$m, $p_m=30$gr, constante de los gases R=10.

Solución

a*) La ecuación del movimiento del émbolo es:*

$$m\ddot{x} = PS - P_{ext}S - mg - k(x - l_0) - c\dot{x}$$

donde la presión del gas en el interior depende de la masa de gas y del volumen según la ley de los gases perfectos:

$$PV = PSx = nRT = m_g \frac{RT}{p_m} \Rightarrow P = \frac{m_g}{x}\frac{RT}{Sp_m} = 10^7 \frac{m_g}{x}$$

donde se han sustituido los valores y se ha tenido en cuenta que la temperatura se supone constante. Sustituyendo valores se obtiene la ecuación:

$$\ddot{x} = \frac{PS}{m} - \frac{P_{ext}S}{m} - g - \frac{k}{m}(x - l_0) - \frac{c}{m}\dot{x} =$$

$$= 10^3 \frac{m_g}{x} - 10 - 9.8 - 1.5(x - 0.2) - 0.3\dot{x}$$

La masa de gas dentro del cilindro cambia en función del caudal másico entrante y saliente según la ecuación:

$$\dot{m}_g = q_e - q_s = 3 \cdot 10^{-8} u^2 (10^6 - P) - \alpha(P - 10^5)$$

donde se ha sustituido la presión de alimentación y la presión exterior por sus respectivos valores constantes. Sustituyendo la expresión de la presión obtenida antes se tiene:

$$\dot{m}_g = 3 \cdot 10^{-8} u^2 (10^6 - 10^7 \frac{m_g}{x}) - \alpha(10^7 \frac{m_g}{x} - 10^5) =$$

$$= 0.03u^2(1 - 10\frac{m_g}{x}) - 10^5\alpha(100\frac{m_g}{x} - 1)$$

Definiendo las variables de estado como la posición, la velocidad, y la masa de gas dentro del cilindro se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 10^3 \dfrac{m_g}{x} - 10 - 9.8 - 1.5(x - 0.2) - 0.3v \\ \dot{m}_g = 0.03u^2(1 - 10\dfrac{m_g}{x}) - 10^5\alpha(100\dfrac{m_g}{x} - 1) \end{cases}$$

que son las ecuaciones en representación interna del sistema.

b*) El punto de funcionamiento queda definido por:*

$$\begin{cases} 0 = v_0 \\ 0 = 10^3 \dfrac{m_{g0}}{x_0} - 10 - 9.8 - 1.5(x_0 - 0.2) - 0.3v_0 \\ 0 = 0.03u_0^{\,2}(1 - 10\dfrac{m_{g0}}{x_0}) - 10^5\alpha(100\dfrac{m_{g0}}{x_0} - 1) \end{cases}$$

de donde, teniendo en cuenta que x_0=0.4, se obtiene:

$$m_{g0} = 8.04 \cdot 10^{-3} \quad kg$$

$$u_0 = 2052.7\sqrt{\alpha}$$

Las ecuaciones lineales aproximadas se obtienen linealizando las ecuaciones anteriores alrededor del punto de funcionamiento:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = \Delta v \\ \Delta\dot{v} = \dfrac{10^3}{x_0}\Delta m_g - \left(1.5 + \dfrac{10^3 m_{g0}}{x_0^{\,2}}\right)\Delta x - 0.3\Delta v \\ \Delta\dot{m}_g = -\dfrac{0.3u_0^{\,2} + 10^7\alpha}{x_0}\Delta m_g + \dfrac{(0.3u_0^{\,2} + 10^7\alpha)m_{g0}}{x_0^{\,2}}\Delta x + \\ \qquad + 0.06u_0(1 - 10\dfrac{m_{g0}}{x_0})\Delta u \end{cases}$$

que sustituyendo valores da:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = \Delta v \\ \Delta\dot{v} = 2500\Delta m_g - 51.75\Delta x - 0.3\Delta v \\ \Delta\dot{m}_g = -2.816 \cdot 10^7\alpha\Delta m_g + 566019\alpha\Delta x + 98.4\sqrt{\alpha}\Delta u \end{cases}$$

Para obtener la función de transferencia aproximada se toman transformadas de Laplace:

$$\begin{cases} s^2\Delta X(s) = 2500\Delta M_g(s) - 51.75\Delta X(s) - 0.3s\Delta X(s) \\ s\Delta M_g(s) = -2.816\cdot 10^7\alpha\Delta M_g(s) + 566019\alpha\Delta X(s) + 98.4\sqrt{\alpha}\Delta U(s) \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$\Delta M_g(s) = \frac{566019\alpha}{s+2.816\cdot 10^7\alpha}\Delta X(s) + \frac{98.4\sqrt{\alpha}}{s+2.816\cdot 10^7\alpha}\Delta U(s)$$

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene:

$$s^2\Delta X(s) = 2500\left(\frac{566019\alpha}{s+2.816\cdot 10^7\alpha}\Delta X(s) + \frac{98.4\sqrt{\alpha}}{s+2.816\cdot 10^7\alpha}\Delta U(s)\right) -$$
$$- 51.75\Delta X(s) - 0.3s\Delta X(s)$$

de donde se despeja la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{246000\sqrt{\alpha}}{(s+2.816\cdot 10^7\alpha)(s^2+0.3s+51.75) - 14.15\cdot 10^8\alpha} =$$
$$= \frac{246000\sqrt{\alpha}}{s^3 + (2.816\cdot 10^7\alpha + 0.3)s^2 + (51.75 + 8.448\cdot 10^6\alpha)s + 42.28\cdot 10^6\alpha}$$

c) *Para estudiar la estabilidad en función de α se analizará en primer lugar el caso en que el sistema está en el límite de estabilidad, es decir, los valores de α para los que el sistema tiene algún polo con parte real cero. Existen dos posibilidades: que el polo sea un polo real ($s=0$), o que haya un par de polos complejos conjugados con parte real cero.*

El primer caso es que exista un polo real igual a cero. En ese caso el término independiente del polinomio del denominador de la función de transferencia debe ser nulo:

$$42\cdot 10^7\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

Es decir, si el parámetro $\alpha=0$, el sistema tiene un polo en $s=0$. Los otros dos polos para ese caso son las raíces del polinomio:

$$s^2 + 0.3s + 51.75 = (s+0.15)^2 + 7.2^2$$

es decir, son estables, aunque muy oscilatorios. El parámetro α se sabe que no puede ser negativo (indica la relación entre la caída de presión en el orificio y el caudal. De hecho $\alpha=0$ representa un orificio totalmente cerrado. Para valores pequeños de α los tres polos son estables (para comprobarlo basta con calcularlos para un valor cualquiera de α).

El segundo caso límite posible es aquel en que se tienen dos polos complejos conjugados de parte real cero. En ese caso se cumple la ecuación:

$$s^3 + (2.816 \cdot 10^7 \alpha + 0.3)s^2 + (51.75 + 8.448 \cdot 10^6 \alpha)s + 42.28 \cdot 10^6 \alpha =$$
$$= (s^2 + b^2)(s + d) = s^3 + ds^2 + b^2 s + b^2 d$$

Para obtener α se iguala término a término:

$$d = 2.816 \cdot 10^7 \alpha + 0.3$$
$$b^2 = 51.75 + 8.448 \cdot 10^6 \alpha$$
$$b^2 d = 42.28 \cdot 10^6 \alpha = (2.816 \cdot 10^7 \alpha + 0.3)(51.75 + 8.448 \cdot 10^6 \alpha)$$

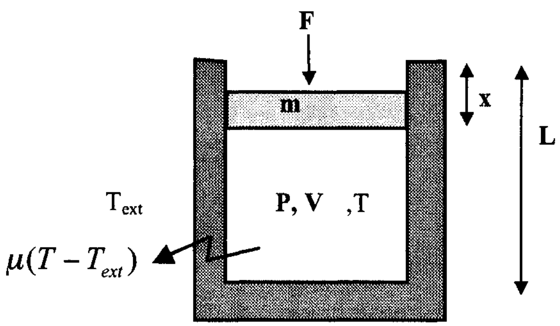
La ecuación anterior no tiene ninguna solución positiva para α, por lo que no existe ningún valor que haga que el sistema tenga dos polos conjugados de parte real cero.

La conclusión es que el sistema es estable para cualquier valor de α, siendo críticamente estable (polo en s=0) únicamente en el caso α=0.

El significado físico del caso α=0 es que el orificio de salida no existe (está totalmente cerrado). Esto produce que todo el gas que entra al cilindro se acumule en él. Esto representa una integral (la masa de gas es la integral del caudal entrante, que es función de la entrada u). El polo en s=0 de la función de transferencia representa esa integral.

PROBLEMA 62. Émbolo con gas con transmisión de calor

Considérese el sistema de la figura, que representa un émbolo con gas con transmisión de calor:



Suponiendo que el gas se comporta como un gas perfecto, y que su temperatura es uniforme, se pide:

a) Obtener las ecuaciones diferenciales que relacionan la fuerza con la posición y la temperatura, expresándolas en representación interna.

b) Linealizar las ecuaciones, obteniendo la función de transferencia entre la fuerza y la posición del émbolo en función de μ para el punto de funcionamiento x_0=L/2.

c) Analizar cualitativamente el comportamiento del sistema en función del coeficiente de transmisión de calor, μ, para m=1 y para los casos límite en que μ=0 (cilindro adiabático), y $\mu=\infty$ (cilindro isotermo).

Datos: S=0.1 m^2 (sección del émbolo), m=10 kg, L=0.4 m, Text=25°C, m_g=0.1 kg (masa del gas), C_v=1 J/kg°K (calor específico del gas). La posición en reposo del émbolo (con F=0) es de x=0.1 m.

Solución

a) *Las ecuaciones de movimiento vertical del émbolo son*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F + mg - P \cdot S$$

Por otra parte las ecuaciones del gas perfecto son:

$$PV = P(L - x)S = nRT$$

donde el volumen se ha expresado en función del desplazamiento vertical.

Para obtener el valor de la constante nR se utiliza el dato de la posición en reposo del émbolo con fuerza nula. En ese estado la temperatura es constante e igual a la exterior.

$$P_0S = \frac{nRT_{ext}}{(L - x_0)} = mg \quad \Rightarrow \quad nR = \frac{98 \cdot 0.3}{298} = 0.09866$$

La ecuación térmica es un balance de energía: el incremento de energía del gas por unidad de tiempo es igual a la potencia mecánica suministrada al gas por la fuerza PS menos el calor perdido al exterior:

$$m_g \cdot C_v \frac{dT}{dt} = PS\dot{x} - \mu(T - T_{ext}) = \frac{nRT}{L - x}\dot{x} - \mu(T - T_{ext})$$

donde m_g es la masa del gas, y C_v es el calor específico del gas.

Si se toman como variables de estado la posición (x), la velocidad (v=dx/dt) y la temperatura (T), se obtienen las ecuaciones diferenciales en representación interna que definen el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F + m - \frac{nRT}{m(L - x)}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{nRT}{m_gC_v(L - x)}v - \frac{\mu(T - T_{ext})}{m_gC_v}$$

ecuaciones no lineales que se pueden linealizar alrededor de un valor F_0, x_0, T_0.

b) *En primer lugar, se calcula el valor en reposo de F_0 y de T_0 para $x_0=L/2=0.2$, $v_0=0$, haciendo nulas las derivadas. De la ecuación térmica se obtiene de forma inmediata que $T_0=T_{ext}=298°K$:*

$$m_g C_p \frac{dT}{dt} = \frac{nRT}{L-x_0} v_0 - \mu(T_0 - T_{ext}) = 0 \Rightarrow \quad T_0 = T_{ext} = 298°K$$

La ecuación de la velocidad permite obtener F_0:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} + g - \frac{nRT}{m(L-x_0)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_0 = -mg + \frac{nRT}{L-x_0} = 49N$$

En segundo lugar, se obtiene el sistema lineal aproximado alrededor del punto de funcionamiento anterior:

$$\frac{dx}{dt} = \Delta\dot{x} \approx \Delta v$$

$$\frac{dv}{dt} = \Delta\dot{v} \approx \frac{1}{m}\Delta F - \frac{nRT_0}{m(L-x_0)^2}\Delta x - \frac{nR}{m(L-x_0)}\Delta T$$

$$\frac{dT}{dt} = \Delta\dot{T} \approx \left(-\frac{\mu}{m_g C_v} + \frac{nRv_0}{m_g C_v (L-x_0)}\right)\Delta T + \frac{nRT_0}{m_g C_v (L-x_0)}\Delta v +$$

$$+ \frac{nRT_0 v_0}{m_g C_v (L-x_0)^2}\Delta x$$

que, sustituyendo valores queda:

$$\Delta\dot{x} = \Delta v$$

$$\Delta\dot{v} \approx 0.1\Delta F - 73.5\Delta x - 0.04933\Delta T$$

$$\Delta\dot{T} \approx -10\mu\Delta T + 1470\Delta v$$

Para obtener la f.d.t entre la fuerza y la posición se toman transformadas de Laplace suponiendo nulas las condiciones iniciales:

$$s\Delta T(s) = -10\mu\Delta T(s) + 1470 s\Delta x(s) \quad \Rightarrow \quad \Delta T(s) = \frac{1470s}{s+10\mu}\Delta x(s)$$

$$s^2\Delta x(s) = 0.1\Delta F(s) - 73.5\Delta x(s) - 0.04933\left[\frac{1470s}{s+10\mu}\right]\Delta x(s)$$

$$G(s) = \frac{\Delta x(s)}{\Delta F(s)} = \frac{0.1(s+10\mu)}{s^2(s+10\mu) + 72.515s + 73.5(s+10\mu)} =$$

$$= \frac{0.1(s+10\mu)}{s^3 + 10\mu s^2 + 146.015s + 735\mu}$$

c) *Para analizar el comportamiento del sistema se deben obtener los polos y ceros del mismo en función del coeficiente* μ. *Resulta más sencillo estudiar en primer lugar los casos límite.*

En primer lugar se considera el caso adiabático ($\mu=0$*). Para este caso límite la función de transferencia resultante es:*

$$G(s)=\frac{\Delta x(s)}{\Delta F(s)}=\frac{0.1s}{s^3+146.015s}=\frac{0.1}{s^2+146.015}$$

cuyos polos son $s=\pm 12.08j$*, es decir son imaginarios puros. Esto significa que el sistema es críticamente estable por lo que su respuesta ante cualquier entrada tendrá una componente senoidal de frecuencia 12.08 rad/s que no se amortiguará con el tiempo. La justificación física de este hecho es que no se pierde nada de energía hacia el exterior (debido al aislamiento térmico perfecto).*

En segundo lugar se considera el caso isotermo ($\mu=\infty$*). En ese caso la función de transferencia límite que se obtiene es (tomando límites cuando* $\mu\to\infty$*):*

$$G(s)=\frac{\Delta x(s)}{\Delta F(s)}=\frac{0.1\cdot 10}{10s^2+735}=\frac{0.1}{s^2+73.5}$$

cuyos polos son $s=\pm 8.57j$*, es decir, también son imaginarios puros, por lo que la respuesta del sistema siempre tendrá una componente senoidal de frecuencia 8,57 rad/s que no se amortigua con el tiempo. En este caso la justificación física también es que no se pierde nada de energía, aunque el mecanismo es diferente. Cuando se comprime el gas se pierde calor al exterior, pero cuando se expande éste el calor se recupera, por lo que en un ciclo la energía perdida es nula. Comparando con el caso adiabático se observa que la ganancia estática es menor en aquel caso. La razón es que cuando se comprime con una fuerza constante en el caso adiabático la temperatura aumenta, por lo que la presión aumenta más para el mismo desplazamiento que en el caso isotermo, por lo que el gas compensa la fuerza ejercida con un desplazamiento menor.*

Para terminar falta analizar el caso intermedio, es decir, $\mu=1$*. La función de transferencia resultante es:*

$$G(s)=\frac{0.1(s+10)}{(s+6.02)\left((s+1.99)^2+10.87^2\right)}$$

Es decir, el sistema tiene como polos dominantes un par de polos complejos conjugados de pare real -1.99 *y parte imaginaria 10.87. El sistema es, pues, bastante oscilatorio, pero es estable, pues todos los polos tiene parte real negativa. La sobreoscilación aproximada se puede estimar mediante la fórmula correspondiente a un sistema de segundo orden estándar, pues, aunque tiene un cero y un polo adicionales, éstos son más rápidos que los dominantes, además de estar parcialmente cancelados entre sí:*

$$\xi = \cos(\text{arctg}(\frac{10.87}{1.99})) = 0.18$$

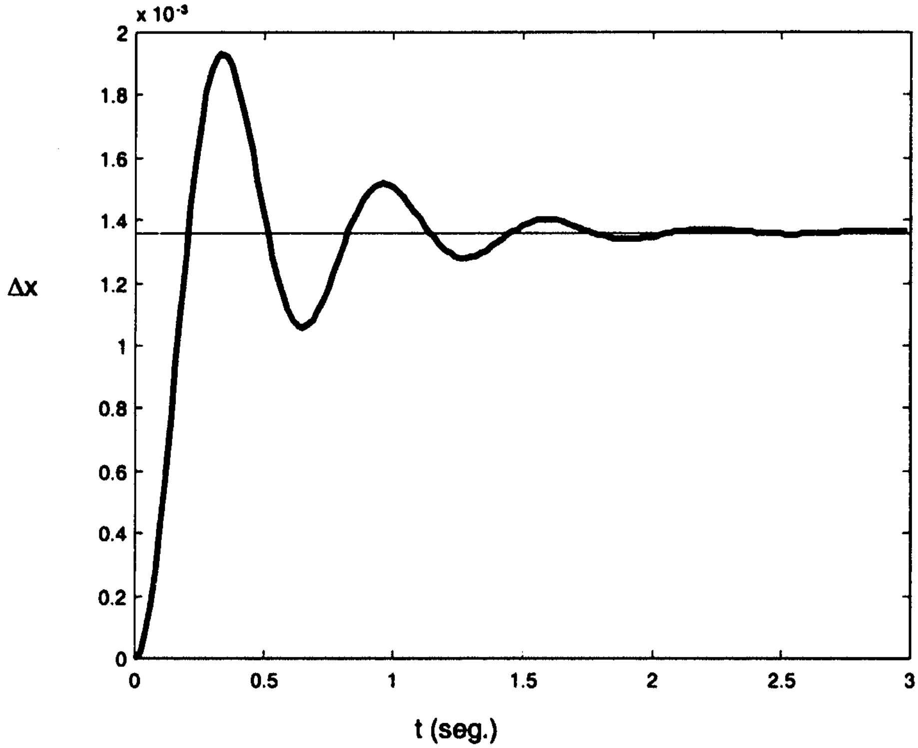
$$\delta \approx e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.56 = 56\%$$

El tiempo de establecimiento aproximado será:

$$t_{s,98} \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.18\sqrt{1.99^2 + 10.87^2}} = 2\ seg$$

Por otra pare la ganancia estática es de $1.36 \cdot 10^{-3}$ por lo que un incremento de la fuerza de 1 N producirá un desplazamiento del émbolo de 1.36 mm.

La respuesta ante escalón unitario del sistema con μ=1 es:



6 MODELADO DE SISTEMAS DISCRETOS

Esta sección contiene problemas en los que se debe obtener el modelo (las ecuaciones en diferencias) de diferentes sistemas discretos. El enunciado del problema describe las características del sistema. La resolución del problema suele incluir la obtención de las ecuaciones en diferencia, la linealización de dichas ecuaciones (cuando no son lineales), y el análisis del sistema lineal aproximado (estabilidad, respuesta ante determinadas entradas, etc.).

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 2 de [Sala00].

PROBLEMA 63. Modelo de utilización de transporte público

Se quiere obtener un modelo matemático de la evolución mensual de los usuarios de la autopista, la nacional y el tren entre Castellón y Valencia, y su relación con el precio de la autopista. Tras hacer una encuesta se dispone de los siguientes datos:

- El 30% de los usuarios de autopista de un mes pasan a ser usuarios de la nacional el mes siguiente, independientemente del precio.

- El 20% de los usuarios de la nacional pasan a la autopista el mes siguiente, independientemente del precio.

- El 5% de los usuarios de la nacional pasan al tren el mes siguiente.

- El 10% de los usuarios del tren pasan a la nacional el mes siguiente.

- El efecto del precio de la autopista sobre los usuarios es el siguiente: para un precio de 800 ptas, los usuarios no se ven influenciados. Un aumento (o reducción) de este precio en un mes, produce una reducción (o aumento) del número de usuarios de autopista en el mes siguiente en un valor de 100*(Precio-800). El 20% de estos usuarios proceden del tren, o pasan a éste.

Sabiendo que el número total de usuarios permanece constante e igual a 20000:

a) Obtener las ecuaciones de estado del sistema tomando como estados los usuarios de cada medio de transporte.

b) ¿Es correcto el conjunto de variables de estado tomado antes?. ¿Por qué?. Obtener las ecuaciones de estado para un conjunto de variables de estado que sea correcto según la definición de estado.

c) Cuál es el valor constante del precio de la autopista que habría que fijar para que se igualase el número de usuarios de autopista y de nacional en régimen permanente.

d) Supóngase que el sistema está en equilibrio con un precio de 795 pts. Se desea que en 2 meses se pase a la situación en la que los usuarios de autopista igualan a los de nacional. Calcular los valores de los precios que hay que fijar en esos 2 meses y en los siguientes para que se mantenga esa situación.

Solución

a) *Definiendo los estados como a_k n_k y t_k las ecuaciones serían:*

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 0.2n_k - 0.3a_k - 100(u_k - 800) = \\
&= 0.7a_k + 0.2n_k - 100u_k + 80000 \\
n_{k+1} &= n_k + 0.3a_k + 0.1t_k - 0.25n_k + 80(u_k - 800) = \\
&= 0.3a_k + 0.75n_k + 0.1t_k + 80u_k - 64000 \\
t_{k+1} &= t_k + 0.05n_k - 0.1t_k + 20(u_k - 800) = \\
&= 0.05n_k + 0.9t_k + 20u_k - 16000
\end{aligned}
$$

b) *El conjunto de variables de estado no es correcto pues las 3 variables no son independientes, ya que el número total de usuarios es constante, es decir:*

$$a_k + n_k + t_k = 20000 \quad \forall k$$

Esto quiere decir que solo se necesitan 2 variables de estado para definir completamente el sistema. Si nos quedamos con las variables a_k y n_k para obtener las ecuaciones de estado basta con sustituir en las ecuaciones anteriores el valor de t_k:

$$t_k = 20000 - a_k - n_k$$

quedando:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 0.7a_k + 0.2n_k - 100u_k + 80000 \\ n_{k+1} &= 0.3a_k + 0.75n_k + 0.1(20000 - a_k - n_k) + 80u_k - 64000 = \\ &= 0.2a_k + 0.65n_k + 80u_k - 62000 \end{aligned}$$

c) *Para que en régimen permanente se tenga a_k=n_k se debe cumplir:*

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 0.7\bar{a} + 0.2\bar{n} - 100\bar{u} + 80000 \\ \bar{n} &= 0.2\bar{a} + 0.65\bar{n} + 80\bar{u} - 62000 \\ \bar{a} &= \bar{n} \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 791.304 \\ \bar{a} = \bar{n} &= 8695.65 \end{aligned}$$

d) *Si el sistema está en equilibrio con un precio de 795 pts, los valores de a_k y n_k en ese equilibrio son:*

$$\left.\begin{aligned} \bar{a} &= 0.7\bar{a} + 0.2\bar{n} - 100 \cdot 795 + 80000 \\ \bar{n} &= 0.2\bar{a} + 0.65\bar{n} + 80 \cdot 795 - 62000 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{a} &= 7615.4 \\ \bar{n} &= 8923.1 \end{aligned}$$

Si se quiere que en 2 periodos se pase a la situación calculada en el apartado c, permaneciendo después en ese estado, se deberán cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.7a_0 + 0.2n_0 - 100u_0 + 80000 \\ n_1 &= 0.2a_0 + 0.65n_0 + 80u_0 - 62000 \\ a_2 &= 0.7a_1 + 0.2n_1 - 100u_1 + 80000 \\ n_2 &= 0.2a_1 + 0.65n_1 + 80u_1 - 62000 \end{aligned}$$

donde se cumple que a_0=7615.4, n_0=8923.1, a_2=n_2=8695.65, por lo que se tienen 4 ecuaciones y 4 incógnitas, u_0, u_1, a_1, n_1. Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} u_0 &= 738.14 \\ u_1 &= 814.9 \\ a_1 &= 13301 \\ n_1 &= 4375 \end{aligned}$$

A partir del instante 2 el precio debe ser $u_2=u_3=...=791.304$ para mantener la situación de equilibrio en la que el número de usuarios de nacional y autopista es el mismo.

PROBLEMA 64. Modelo de préstamo hipotecario

Se quiere pedir un préstamo hipotecario de 10 millones de pesetas. Si el interés anual es del 6%, calcular

a) La cuota mensual constante que se pagaría para amortizar el préstamo en 15 años.

b) La cuota mensual del primer mes, si ésta aumenta mensualmente con la inflación, que se supone del 2.4% anual (también para amortizar en 15 años).

Nota: Para resolver el problema establecer un modelo discreto con periodo mensual que relacione la cantidad total amortizada hasta el mes k+1 con la cantidad total amortizada hasta el mes k, teniendo en cuenta que la cantidad total amortizada se incrementa cada mes en la cuota pagada menos los intereses mensuales de la deuda actual (la deuda actual son los 10 millones menos la cantidad total amortizada).

Solución

a) Si se define x_k como la cantidad total amortizada hasta el mes k, y se llama u_k a la cuota pagada el mes k, la ecuación en diferencias es:

$$x_{k+1} = x_k + u_k - \frac{0.06}{12}(10000000 - x_k)$$

donde 0.06/12=0.005 es el interés mensual, 10000000-x_k es la deuda en el mes k, y 0.005(10000000-x_k) son los intereses de la deuda en el mes k.

Tomando transformadas en z se obtiene:

$$zx(z) - zx_0 = zx(z) = x(z) + u(z) + 0.005x(z) - \frac{50000}{1 - z^{-1}}$$

Si la cuota es constante e igual a c su transformada en z es:

$$u(z) = \frac{c}{1 - z^{-1}}$$

Sustituyendo se obtiene x(z):

$$x(z) = \frac{(c - 50000)z}{(z-1)(z-1.005)} = \frac{(c - 50000)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 1.005z^{-1})}$$

La transformada inversa es:

$$x_k = A + B(1.005)^k$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtiene:

$$x_k = 200(c - 50000)\left((1.005)^k - 1\right)$$

Para amortizar todo el préstamo en 15 años=180 meses se tiene que cumplir que $x_{180}=10000000$*:*

$$x_{180} = 200(c - 50000)\left((1.005)^{180} - 1\right) = 10000000$$

$$\Rightarrow \quad c = 84385.68 \ pts$$

El modelo también podría haberse planteado tomando como variable la deuda restante en el mes k. En ese caso la ecuación en diferencias sería:

$$d_{k+1} = d_k - u_k + 0.005 d_k$$

donde habría que tener en cuenta que la condición inicial es $d_0=10000000$*, y la ecuación para obtener la cuota sería* $d_{180}=0$*. El resultado es el mismo.*

b*) Si la cuota aumenta cada mes en un porcentaje igual a la inflación (2.4%), la ecuación que cumple la cuota es:*

$$u_{k+1} = u_k + \frac{0.024}{12} u_k = 1.002 u_k$$

Llamando c a la cuota del primer mes y tomando transformadas se obtiene u(z):

$$zu(z) - zu_0 = 1.002u(z) \quad \Rightarrow \quad u(z) = \frac{cz}{z - 1.002}$$

con lo que la transformada de la cantidad amortizada es:

$$zx(z) = 1.005x(z) + u(z) - \frac{50000}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad x(z) = \frac{\dfrac{cz}{z - 1.002} - \dfrac{50000z}{z - 1}}{z - 1.005}$$

$$x(z) = \frac{(c - 50000)z^2 + (50100 - c)z}{(z - 1)(z - 1.002)(z - 1.005)} =$$

$$= \frac{(c - 50000)z^{-1} + (50100 - c)z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 1.002z^{-1})(1 - 1.005z^{-1})}$$

La transformada inversa es:

$$x_k = A + B(1.002)^k + D(1.005)^k$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtiene:

$$x_k = 10000000 - \frac{1000c}{3}(1.002)^k + \left(\frac{1000c}{3} - 10000000\right)(1.005)^k$$

La condición de amortización en 180 meses es:

$$x_{180} = 10000000 - \frac{1000c}{3}(1.002)^{180} + \left(\frac{1000c}{3} - 10000000\right)(1.005)^{180} =$$
$$= 10000000$$

de donde se obtiene:

$$c = 72088.8 \; pts$$

De la misma forma que el apartado a) el problema se podría plantear utilizando como variable la deuda en lugar de la cantidad amortizada.

PROBLEMA 65. Modelo de proceso químico

Un proceso químico parte de un reactivo a que al reaccionar produce reactivo b (4 moles de b por cada uno de a) que a su vez reacciona para dar reactivo c (1 mol de c por cada 2 de b). Cada minuto el 10% de los moles del reactivo a reaccionan para dar lugar a reactivo b. Por otra parte, cada minuto el 5% de los moles de b reaccionan para dar reactivo c. Si inicialmente se tienen únicamente 500 moles de a, obtener:

a) Las ecuaciones discretas que definen el sistema a periodo 1 minuto.

b) Cuál es el número de moles total máximo y en qué instante se da.

Solución

a) *Las ecuaciones son:*

$$a_{k+1} = a_k - 0.1a_k$$
$$b_{k+1} = b_k + 0.4a_k - 0.05b_k$$
$$c_{k+1} = c_k + 0.025b_k$$

b) *Para obtener el número de moles máximo es necesario obtener la evolución en el tiempo del número de moles. Para ello se toman transformadas en z en las ecuaciones anteriores:*

$$za(z) - za_0 = za(z) - 500z = 0.9a(z)$$
$$zb(z) - zb_0 = zb(z) = 0.95b(z) + 0.4a(z)$$
$$zc(z) - zc_0 = zc(z) = c(z) + 0.025b(z)$$

de la primera ecuación se obtiene:

$$a(z) = \frac{500z}{z - 0.9}$$

de la segunda se obtiene:

$$b(z) = \frac{0.4}{z - 0.95} a(z) = \frac{200z}{(z - 0.95)(z - 0.9)}$$

y de la tercera:

$$c(z) = \frac{0.025}{z - 1} b(z) = \frac{5z}{(z - 1)(z - 0.95)(z - 0.9)}$$

El número total de moles es la suma de los tres:

$$n(z) = a(z) + b(z) + c(z) = \frac{500z(z-1)(z-0.95) + 200z(z-1) + 5z}{(z-1)(z-0.95)(z-0.9)} =$$

$$= \frac{500 - 775z^{-1} + 280z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.95z^{-1})(1 - 0.9z^{-1})}$$

cuya transformada inversa es:

$$n_k = A + B(0.95)^k + C(0.9)^k$$

Tomando transformadas, sumando e igualando numeradores se obtiene:

$$n_k = 1000 + 2000(0.95)^k - 2500(0.9)^k$$

Para obtener el valor máximo se iguala a cero la derivada:

$$\frac{dn_k}{dk} = 2000 \ln(0.95)(0.95)^k - 2500 \ln(0.9)(0.9)^k = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1.05555^k = 2.5676 \quad \Rightarrow \quad k = 17.44$$

El máximo se dará por tanto en el periodo k=17 ó en el k=18:

$$n_{17} = 1000 + 2000(0.95)^{17} - 2500(0.9)^{17} = 1419.3$$

$$n_{18} = 1000 + 2000(0.95)^{18} - 2500(0.9)^{18} = 1419.2$$

es decir, el número de moles total máximo es 1419.3 y se da en el periodo k=17.

PROBLEMA 66. Modelo de préstamo hipotecario II

Se quiere pedir un préstamo hipotecario de 5 millones de pesetas. El interés anual es del 6%.

a) Si se quiere empezar pagando el primer mes 40000 pts, de forma que la cuota aumente después un porcentaje cada mes, calcular ese porcentaje de aumento si se quiere amortizar el préstamo en 10 años.

b) Si se quiere empezar pagando el primer mes 40000 pts, de forma que la cuota aumente después una cantidad fija cada mes, calcular esa cantidad fija de aumento si se quiere amortizar el préstamo en 10 años.

Solución

a) *Si se define d_k como la deuda que queda por pagar el mes k y u_k la cuota pagada ese mes, la ecuación en diferencias que da la evolución de la deuda es:*

$$d_{k+1} = d_k + \frac{0.06}{12} d_k - u_k$$

donde la cantidad $0.06/12*d_k$ son los intereses de la deuda durante el mes k. Para obtener la evolución de la deuda basta tomar transformadas en z (teniendo en cuenta que la deuda inicial es d_0=5000000):

$$zd(z) - zd_0 = 1.005d(z) - u(z)$$

Si se llama a al porcentaje de aumento mensual de la cuota (en tanto por uno), la ecuación en diferencias que define la cuota es:

$$u_{k+1} = u_k + a \cdot u_k = (1+a)u_k$$

Tomando transformadas en z (teniendo en cuenta la condición inicial u_0=40000) se tiene:

$$zu(z) - zu_0 = (1+a)u(z) \quad \Rightarrow \quad u(z) = \frac{40000z}{z-(1+a)}$$

Sustituyendo en la ecuación de la deuda se obtiene:

$$d(z) = \frac{5000000z}{z-1.005} - \frac{40000z}{(z-1.005)(z-(1+a))} =$$

$$= \frac{5000000 - (5000000(1+a) + 40000)z^{-1}}{(1-1.005z^{-1})(1-(1+a)z^{-1})}$$

La transformada inversa en z dará la evolución con el tiempo.

$$d_k = A(1.005)^k + B(1+a)^k$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtiene:

$$d_k = \frac{4985000 - 5000000(1+a)}{1.005-(1+a)}(1.005)^k + \frac{40000}{1.005-(1+a)}(1+a)^k$$

La condición para que se amortice la deuda en 10 años=120 meses es que d_{120}=0:

$$d_{120} = \frac{4985000 - 5000000(1+a)}{1.005-(1+a)}(1.005)^{120} + \frac{40000}{1.005-(1+a)}(1+a)^{120} = 0$$

de donde se obtiene a=0.005768, es decir, la cuota se aumenta en un 0.5768% cada mes.

b) *Si la cuota se aumenta cada mes en una cantidad constante, y se llama x a esa cantidad, la ecuación en diferencias será:*

$$u_{k+1} = u_k + x$$

donde tomando transformadas en z se obtiene:

$$zu(z) - zu_0 = u(z) + \frac{x}{1 - z^{-1}}$$

de donde se obtiene:

$$u(z) = \frac{zu_0}{z-1} + \frac{xz}{(z-1)^2} = \frac{40000z^2 + (x - 40000)z}{(z-1)^2}$$

La ecuación de la deuda es la misma:

$$zd(z) - zd_0 = 1.005d(z) - u(z)$$

de donde se obtiene:

$$d(z) = \frac{5000000z}{z - 1.005} - \frac{40000z^2 + (x - 40000)z}{(z-1.005)(z-1)^2} =$$

$$= \frac{5000000 - (10040000)z^{-1} + (5040000 - x)z^{-2}}{(1 - 1.005z^{-1})(1 - z^{-1})^2}$$

La transformada inversa es:

$$d_k = A + Bk + C(1.005)^k$$

donde tomando transformadas, sumando e igualando numeradores se obtiene:

$$d_k = 8000000 + 39800x + 200xk - (3000000 + 40000x)(1.005)^k$$

La condición de que d_{120}=0 da el valor de x:

$$d_{120} = 8000000 + 39800x + 200x120 - (3000000 + 40000x)(1.005)^{120} = 0$$

de donde se obtiene x=283.18 pts (la cuota se aumenta 283.18 pts cada mes).

PROBLEMA 67. Modelo de comedor universitario

Se pretende obtener un modelo discreto de la utilización de un comedor universitario.

El funcionamiento es como sigue: En primer lugar los comensales buscan sitio en las mesas. Cuando lo encuentran dejan la carpeta para reservarlo y pasan a la cola de comidas. Una vez salen de la cola de comidas van al sitio que habían reservado y comen. Después de comer se marchan y dejan el sitio libre.

Las características del modelo son:

- Se considera un periodo discreto de 1 minuto para el modelo.
- La entrada al sistema u_k es la cantidad de gente que llega al comedor cada minuto.

- El número de plazas total del comedor es de ***200***.
- La gente que sale cada minuto de la cola de la comida depende del tamaño de esa cola (a más cola, más personal sirviendo), y se modeliza como $5\dfrac{cola}{5+cola}$.
- La gente que encuentra sitio cada minuto depende de la gente que hay buscándolo y del sitio libre que queda y viene dado por la función: $\xi \cdot \dfrac{gente\_buscando}{200+gente\_buscando}$ donde ξ es el número de sitios libres.
- Por último, la cantidad de gente que acaba de comer cada minuto es proporcional a la cantidad de gente que hay comiendo: $\dfrac{gente\_comiendo}{30}$ donde *30* representa el tiempo medio que tarda la gente en comer.

a) Definir las variables de estado del sistema y obtener las ecuaciones en representación interna.

b) Suponiendo que el sistema está en equilibrio con $\tilde{u}=4$, calcular de forma aproximada la evolución del número de sitios ocupados con carpetas si la entrada pasa de 4 a 7 y se mantiene en 7 durante 15 minutos, pasando después otra vez a 4.

Solución

a*) Las variables de estado necesarias para definir completamente el sistema son:*
c_k=gente en la cola=sitios ocupados con carpetas en las mesas.
b_k=gente buscando sitio para dejar la carpeta
g_k=gente comiendo
Las ecuaciones son:

$$b_{k+1} = b_k + u_k - (200 - g_k - c_k)\frac{b_k}{200+b_k}$$

$$c_{k+1} = c_k + (200 - g_k - c_k)\frac{b_k}{200+b_k} - 5\frac{c_k}{5+c_k}$$

$$g_{k+1} = g_k + 5\frac{c_k}{5+c_k} - \frac{g_k}{30}$$

b*) Para calcular la evolución aproximada es necesario obtener unas ecuaciones lineales aproximadas en el punto de funcionamiento u=4:*

$$\bar{b} = \bar{b} + \bar{u} - (200 - \bar{g} - \bar{c})\frac{\bar{b}}{200+\bar{b}}$$

$$\bar{c} = \bar{c} + (200 - \bar{g} - \bar{c})\frac{\bar{b}}{200 + \bar{b}} - 5\frac{\bar{c}}{5 + \bar{c}}$$

$$\bar{g} = \bar{g} + 5\frac{\bar{c}}{5 + \bar{c}} - \frac{\bar{g}}{30}$$

Despejando se obtiene el punto de funcionamiento:

$$\bar{c} = 20$$

$$\bar{g} = 120$$

$$\bar{b} = 14.3$$

Las ecuaciones linealizadas son:

$$\Delta b_{k+1} = \left\{1 - (200 - \bar{g} - \bar{c})\frac{200}{(200 + \bar{b})^2}\right\}\Delta b_k + \frac{\bar{b}}{200 + \bar{b}}\Delta c_k +$$

$$+ \frac{\bar{b}}{200 + \bar{b}}\Delta g_k + \Delta u_k$$

$$\Delta c_{k+1} = \left\{1 - \frac{\bar{b}}{200 + \bar{b}} - \frac{25}{(5 + \bar{c})^2}\right\}\Delta c_k - \frac{\bar{b}}{200 + \bar{b}}\Delta g_k +$$

$$+ (200 - \bar{g} - \bar{c})\frac{200}{(200 + \bar{b})^2}\Delta b_k$$

$$\Delta g_k = \frac{29}{30}\Delta g_k + \frac{25}{(5 + \bar{c})^2}\Delta c_k$$

que sustituyendo valores queda:

$$\Delta b_{k+1} = 0.7387\Delta b_k + 0.06673\Delta c_k + 0.06673\Delta g_k + \Delta u_k$$

$$\Delta c_{k+1} = 0.8933\Delta c_k - 0.06673\Delta g_k + 0.2613\Delta b_k$$

$$\Delta g_k = 0.9667\Delta g_k + 0.04\Delta c_k$$

Si la entrada pasa de 4 a 7 y se mantiene en 7 durante 15 minutos, la señal Δu_k es:

$$\Delta u_k = \{3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,0,0,\ldots\} = 3u_0(k) - 3u_0(k - 15)$$

La variable que se pide es el número de carpetas, o sea el tamaño de la cola, Δc_k. Para obtenerlo se toman transformadas en Z en las ecuaciones anteriores y se obtiene esta variable:

$$z\Delta b(z) = 0.7387\Delta b(z) + 0.06673\Delta c(z) + 0.06673g(z) + \Delta u(z)$$

$$z\Delta c(z) = 0.8933\Delta c(z) - 0.06673\Delta g(z) + 0.2613\Delta b(z)$$

$$z\Delta g(z) = 0.9667\Delta g(z) + 0.04\Delta c(z)$$

Despejando se tiene:

$$\Delta g(z) = \frac{0.04}{z - 0.9667}\Delta c(z)$$

$$\Delta b(z) = \frac{0.06673\Delta c(z) + 0.06673 g(z) + \Delta u(z)}{z - 0.7387} =$$

$$= \frac{0.06673\left(1 + \frac{0.04}{z - 0.9667}\right)\Delta c(z) + \Delta u(z)}{z - 0.7387}$$

$$(z - 0.8933)\Delta c(z) = -0.06673\frac{0.04}{z - 0.9667}\Delta c(z) +$$

$$+ 0.2613\frac{0.06673\left(\frac{z - 0.9267}{z - 0.9667}\right)\Delta c(z) + \Delta u(z)}{z - 0.7387}$$

$$(z - 0.8933)(z - .9667)(z - 0.7387)\Delta c(z) =$$

$$= -0.0026692(z - 0.7387)\Delta c(z) + 0.01744(z - 0.9267)\Delta c(z) +$$

$$+ 0.2613(z - 0.9667)\Delta u(z)$$

$$\frac{\Delta c(z)}{\Delta u(z)} = \frac{0.2613(z - 0.9667)}{z^3 - 2.5987z^2 + 2.22276z - 0.62371} =$$

$$= \frac{0.2613(z - 0.9667)}{(z-.6734591)(z-.9400564)(z-.9851844)}$$

La respuesta ante escalón unitario es:

$$y_e(z) = \frac{0.2613(z - 0.9667)z}{(z-.6735)(z-.9401)(z-.9852)(z-1)}$$

cuya transformada inversa es:

$$y_e(k) =$$

$$= 30u_0(k) + 2.8236\cdot(0\ .6735)^k - 9.6536\cdot(0.9401)^k - 23.1745\cdot(0.9852)^k$$

La evolución de la cola será por tanto:

$$c_k = 20 + \Delta c_k = 20 + 3y_e(k) - 3y_e(k - 15)u_0(k - 15) =$$

$$= 20 + 3\left(30 + 2.8236\cdot(0\ .6735)^k - 9.6536\cdot(0.9401)^k\right)u_0(k) +$$

$$+ 3(-23.1745\cdot(0.9852)^k)u_0(k) -$$

$$- 3\left(30 + 2.8236\cdot(0\ .6735)^{k-15} - 9.6536\cdot(0.9401)^{k-15}\right)u_0(k - 15) -$$

$$- 3\left(-23.1745\cdot(0.9852)^{k-15}\right)u_0(k - 15)$$

7 CONVOLUCIÓN CONTINUA Y DISCRETA

Esta sección contiene problemas en los que se calcula la respuesta de un sistema continuo o discreto por medio de la integral o la suma de convolución.

Algunos de los problemas coinciden con problemas resueltos en otras secciones del libro, pero resueltos utilizando la integral de convolución en lugar de la transformada de Laplace (para sistemas continuos), o la suma de convolución en lugar de la transformada en Z (para sistemas discretos).

La resolución de estos problemas suele realizarse según las siguientes fases:

1. Obtención de la función de transferencia del sistema.
2. Obtención de la respuesta impulsional mediante la transformada de Laplace (o transformada en Z) inversa.
3. Obtención de la respuesta del sistema mediante la aplicación de la integral de convolución (sistemas continuos) o la suma de convolución (sistemas discretos).

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 4 de [Sala00].

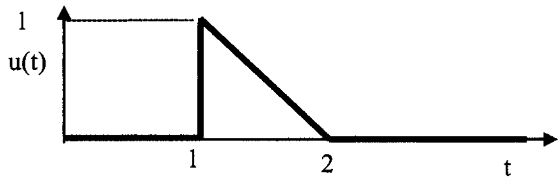
También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [Meade93] (capítulo 2), [Solyman99] (capítulos 5 y 8), y [Oppenheim98] (capítulo 2).

PROBLEMA 68. Respuesta de sistema continuo

Obtener la salida del sistema:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=u$$

en el instante t=4 segundos ante la entrada u definida como:



Solución

Este problema se puede resolver de 2 formas, por convolución, o mediante transformada de Laplace.

Para hacerlo por convolución, hay que obtener en primer lugar la respuesta impulsional. La f.d.t. del sistema es:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s}=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\xrightarrow{T.L.I.}g(t)=1-e^{-t}$$

La señal de entrada está definida por:

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2-t & 1<t<2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

Aplicando la integral de convolución:

$$y(4)=\int_0^4 u(\tau)g(4-\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^1 u(\tau)g(4-\tau)d\tau+\int_1^2 u(\tau)g(4-\tau)d\tau+\int_2^4 u(\tau)g(4-\tau)d\tau=$$

$$=\int_1^2 u(\tau)g(4-\tau)d\tau=\int_1^2(2-\tau)(1-e^{-(4-\tau)})d\tau=\frac{1}{2}-e^{-2}+2e^{-3}\approx 0.464$$

PROBLEMA 69. Respuesta de sistema continuo

Obtener la respuesta del sistema cuya ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=u$$

ante la entrada $u = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 \le t \le 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$

Solución

El problema se puede resolver por convolución o mediante la transformada de Laplace. Por convolución, habría que resolver la ecuación para cada tramo. Previamente se necesita la respuesta impulsional:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2} \xrightarrow{TLI} g(t) = t e^{-t}$$

<u>*t<1:*</u>

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau = 0$$

<u>*1< t<3:*</u>

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^1 u(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_1^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau =$$

$$= 0 + \int_1^t (t-\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \overset{x=t-\tau}{=} \int_{t-1}^0 -x e^{-x} dx = \int_0^{t-1} x e^{-x} dx =$$

$$= \left[-x e^{-x}\right]_0^{t-1} - \int_0^{t-1} (-e^{-x}) dx = -(t-1) e^{-(t-1)} - (e^{-(t-1)} - 1) =$$

$$= 1 - e^{-(t-1)} - (t-1) e^{-(t-1)}$$

<u>*t≥3:*</u>

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^1 u(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_1^3 u(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_3^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau =$$

$$= 0 + \int_1^3 (t-\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau + 0 \overset{x=t-\tau}{=} \int_{t-1}^{t-3} -x e^{-x} dx =$$

$$= \int_{t-3}^{t-1} x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x}\right]_{t-3}^{t-1} - \int_{t-3}^{t-1} (-e^{-x}) dx =$$

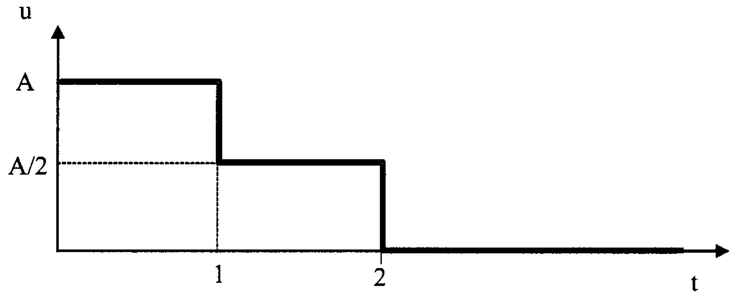
$$= -(t-1) e^{-(t-1)} + (t-3) e^{-(t-3)} - (e^{-(t-1)} - e^{-(t-3)})$$

PROBLEMA 70. Respuesta de sistema continuo

Mediante un computador se controla la entrada de un sistema de función de transferencia: $G(s) = \dfrac{s+1}{s(s+2)}$. El periodo con el que el computador actualiza la entrada es de 1 segundo. Se quiere que la salida valga y=1 en el instante t=3 segundos. Para ello se decide dar a la entrada un valor de A durante el primer periodo, cambiándolo por un valor de A/2 en el segundo periodo, haciendo nula la entrada a partir de entonces. Obtener el valor de A para que se cumpla lo anterior.

Solución

La entrada al sistema es constante en cada periodo, según la figura:



La salida del sistema en el instante t=3 se puede calcular por convolución.
La respuesta impulsional es:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{0.5}{s} + \frac{0.5}{s+2} \quad \Rightarrow \quad g(t) = 0.5u_0(t) + 0.5e^{-2t}$$

Aplicando la integral de convolución para t=3 se tiene:

$$y(3) = \int_0^3 u(\tau)g(3-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^1 A\cdot\left(0.5 + 0.5e^{-2(3-\tau)}\right)d\tau + \int_1^2 \frac{A}{2}\cdot\left(0.5 + 0.5e^{-2(3-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= 0.5A + 0.5Ae^{-6}\frac{(e^2-1)}{2} + 0.5\frac{A}{2} + 0.5\frac{A}{2}e^{-6}\frac{(e^4-e^2)}{2} = 0.7686A = 1$$

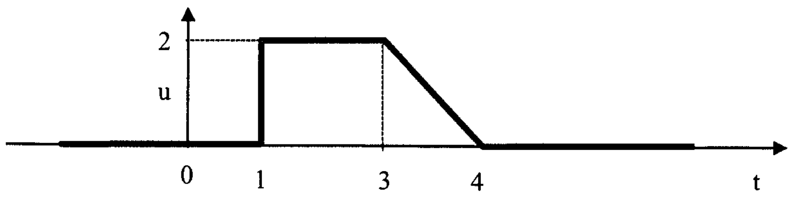
$$\Rightarrow \quad A = 1.3$$

PROBLEMA 71. Respuesta de sistema continuo

Obtener la respuesta del sistema cuya ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4u$$

ante la entrada:



Solución

La función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4}{(s+2)(s+1)}$$

La respuesta impulsional es:

$$g(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtiene:

$$g(t) = -4e^{-2t} + 4e^{-t}$$

La entrada es:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 3 \\ 8 - 2t & 3 \leq t < 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$

La salida se puede calcular por convolución, para lo cual se planteará la integral de convolución para cada intervalo:

t<1

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} u(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0$$

1<t<3

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau=$$
$$=\int_0^1 0g(t-\tau)d\tau+\int_1^t 2\left(4e^{-(t-\tau)}-4e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau=$$
$$=8\left[e^{-(t-\tau)}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_1^t=8\left(1-\frac{1}{2}-e^{-(t-1)}+\frac{e^{-2(t-1)}}{2}\right)=$$
$$=4-8e^{-(t-1)}+4e^{-2(t-1)}$$

<u>$3<t<4$</u>

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau=$$
$$=\int_0^1 0g(t-\tau)d\tau+\int_1^3 2\left(4e^{-(t-\tau)}-4e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau+$$
$$+\int_3^t (8-2\tau)\left(4e^{-(t-\tau)}-4e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau=$$
$$=8\left[e^{-(t-\tau)}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_1^3+32\left[e^{-(t-\tau)}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_3^t-$$
$$-8\left[\tau\left(e^{-(t-\tau)}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right)-e^{-(t-\tau)}+\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_3^t=$$
$$=8\left(e^{-(t-3)}-\frac{e^{-2(t-3)}}{2}-e^{-(t-1)}+\frac{e^{-2(t-1)}}{2}\right)+40\left(\frac{1}{2}-e^{-(t-3)}+\frac{e^{-2(t-3)}}{2}\right)-$$
$$-8\left(\frac{1}{2}t-3e^{-(t-3)}+3\frac{e^{-2(t-3)}}{2}\right)=$$
$$=20-4t-8e^{-(t-1)}+4e^{-2(t-1)}-8e^{-(t-3)}+4e^{-2(t-3)}$$

<u>$t>4$</u>

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau=$$
$$=\int_0^1 0g(t-\tau)d\tau+\int_1^3 2\left(4e^{-(t-\tau)}-4e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau+$$
$$+\int_3^4 (8-2\tau)\left(4e^{-(t-\tau)}-4e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau+\int_4^t 0g(t-\tau)d\tau=$$
$$=8\left[e^{-(t-\tau)}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_1^3+32\left[e^{-(t-\tau)}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_3^4-$$
$$-8\left[\tau\left(e^{-(t-\tau)}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right)-e^{-(t-\tau)}+\frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_3^4=$$

$$= 8\left(e^{-(t-3)} - \frac{e^{-2(t-3)}}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{e^{-2(t-1)}}{2}\right) +$$

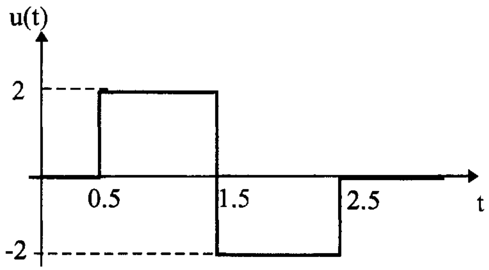
$$+ 40\left(e^{-(t-4)} - \frac{e^{-2(t-4)}}{2} - e^{-(t-3)} + \frac{e^{-2(t-3)}}{2}\right) -$$

$$- 8\left(4e^{-(t-4)} - 4\frac{e^{-2(t-4)}}{2} - 3e^{-(t-3)} + 3\frac{e^{-2(t-3)}}{2}\right) =$$

$$= -8e^{-(t-1)} + 4e^{-2(t-1)} - 8e^{-(t-3)} + 4e^{-2(t-3)} + 8e^{-(t-4)} - 4e^{-2(t-4)}$$

PROBLEMA 72. Respuesta de sistema continuo

Obtener la salida en el instante 10 del sistema definido por la ecuación diferencial $\ddot{y} + y = \dot{u} + u$ ante la entrada definida por:



Solución

La función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+1}{s^2+1}$$

Para aplicar convolución se necesita obtener la respuesta impulsional:

$$g(t) = A\,\text{sen}(t) + B\cos(t)$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtiene:

$$g(t) = \text{sen}(t) + \cos(t)$$

La salida en el instante 10 será:

$$y(10) = \int_0^{10} u(\tau)g(10-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{0.5}^{1.5} 2(\text{sen}(10-\tau) + \cos(10-\tau))d\tau +$$

$$+ \int_{1.5}^{2.5} (-2)(\text{sen}(10-\tau) + \cos(10-\tau))d\tau =$$

$$= 2[\cos(10-\tau) - \text{sen}(10-\tau)]_{0.5}^{1.5} - 2[\cos(10-\tau) - \text{sen}(10-\tau)]_{1.5}^{2.5} =$$

$$= 2(\cos(8.5) - \text{sen}(8.5) - \cos(9.5) + \text{sen}(9.5)) -$$

$$- 2(\cos(7.5) - \text{sen}(7.5) - \cos(8.5) + \text{sen}(8.5)) = -2.5752$$

PROBLEMA 73. Respuesta de sistema continuo

Dado un sistema cuya respuesta impulsional es:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ 3 - t & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

obtener la respuesta del mismo en el instante t=4 ante la entrada definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Solución

Utilizando la integral de convolución se tiene que:

$$y(4) = \int_0^4 g(\tau)u(4-\tau)d\tau$$

Para calcular la integral hay que dividir el intervalo de integración en varios subintervalos, de forma que en cada uno la definición de las dos funciones sea única. En primer lugar se expresa la función u(4-τ):

$$u(4-\tau) = \begin{cases} 1 & 0 < 4-\tau < 2 \;\Rightarrow\; 2 < \tau < 4 \\ 0 & 4-\tau > 2 \;\Rightarrow\; \tau < 2 \end{cases}$$

Por lo que los intervalos de integración quedan [0,1], [1,2], [2,3],[3,4] y la integral final es:

$$y(4) = \int_0^4 g(\tau)u(4-\tau)d\tau = \int_0^1 0\cdot 0 + \int_1^2 2\cdot 0 d\tau + \int_2^3 (3-\tau)\cdot 1 d\tau + \int_3^4 0\cdot 1 d\tau =$$

$$= \int_2^3 (3-\tau)d\tau = \left[\frac{-(3-\tau)^2}{2}\right]_2^3 = 0.5$$

La integral de convolución también se puede plantear de la forma:

$$y(4) = \int_0^4 u(\tau)g(4-\tau)d\tau$$

En este caso habría que plantear en primer lugar la función g(4-τ):

$$g(4-\tau) = \begin{cases} 0 & 0 < 4-\tau < 1 \ \Rightarrow \ 3 < \tau < 4 \\ 2 & 1 < 4-\tau < 2 \ \Rightarrow \ 2 < \tau < 3 \\ 3-(4-\tau) & 2 < 4-\tau < 3 \ \Rightarrow \ 1 < \tau < 2 \\ 0 & 4-\tau > 3 \ \Rightarrow \ \tau < 1 \end{cases}$$

Por lo que los intervalos de integración quedan [0,1], [1,2], [2,3],[3,4] y la integral final es:

$$y(4) = \int_0^4 u(\tau)g(4-\tau)d\tau = \int_1^2 (\tau-1)d\tau = 0.5$$

PROBLEMA 74. Motor de continua

Las ecuaciones de un motor de continua controlado por armadura son:

$$T = K_m \cdot i_a$$

$$\varepsilon = K_b \cdot \omega$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + \varepsilon = u$$

$$J\frac{d\omega}{dt} + b\cdot\omega = T$$

Estando el motor inicialmente en reposo, se le somete a una entrada de la forma:

Se ha medido la distancia angular total recorrida por el eje del motor, que ha sido de 20 rad.

Obtener el valor de u_0 despreciando el efecto de la inductancia, y considerando la entrada exacta.

Datos: K_m=0.028 Nm/A, K_b=0.0029V/rpm, J=23.5 gcm^2, L_a=1.27mH, R_a=11.4 Ω, b =10^{-6} Nm/rpm.

Solución

En primer lugar se obtiene la función de transferencia del motor de continua tomando transformadas de Laplace y despejando:

$$L_a s i_a(s) + R_a i_a(s) + \varepsilon(s) = u(s) \quad \Rightarrow \quad i_a(s) = \frac{u(s) - K_b s\theta(s)}{L_a s + R_a}$$

$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = T(s) = K_m i_a(s) = K_m \frac{u(s) - K_b s\theta(s)}{L_a s + R_a}$$

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{K_m}{(Js^2 + bs)(L_a s + R_a) + K_m K_b s}$$

Si se desprecia el efecto de la inductancia (L_a=0), la función de transferencia queda:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{K_m}{s(JR_a s + bR_a + K_m K_b)} =$$

$$= \frac{0.028}{s(2.679\cdot 10^{-5}s + 8.8426\cdot 10^{-4})} = \frac{1045}{s(s+33)}$$

Como las condiciones iniciales son nulas (el motor parte del reposo), la salida del sistema se puede obtener por convolución. Para ello se obtiene en primer lugar la respuesta impulsional:

$$G(s) = \frac{1045}{s(s+33)} = \frac{31.67}{s} + \frac{-31.67}{s+33} \quad \Rightarrow \quad g(t) = 31.67(1 - e^{-33t})$$

La respuesta del sistema será:

$$\theta(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau = 31.67u_0\int_0^{0.01}(1 - e^{-33(t-\tau)})d\tau =$$

$$= 31.67u_0\left(0.01 - e^{-33t}\int_0^{0.01} e^{33\tau}d\tau\right)$$

El ángulo total recorrido es el límite cuando el tiempo tiende a infinito:

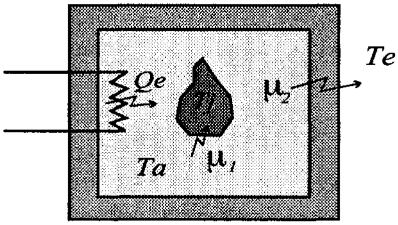
$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \lim_{t\to\infty}\left\{31.67u_0\left(0.01 - e^{-33t}\int_0^{0.01} e^{33\tau}d\tau\right)\right\} = 0.3167u_0$$

Como el ángulo total recorrido ha sido de 20 rad, el valor de u_0 es:

$$0.3167u_0 = 20 \quad\Rightarrow\quad u_0 = 63.15\ V$$

PROBLEMA 75. Temperatura de jamón

Obtener **por convolución** la temperatura del jamón en el instante t=2000 seg, si partiendo de temperatura ambiente se le da un calor de entrada de 5000 W durante 1000 segundos, pasando después a cero.



Datos: T_e=25°C, m_1=100 W/°C, m_2=20 W/°C, c_a=4000 J/kg°C , c_j=6000 J/kg°C, m_a=20 kg , m_j=5 kg

Solución

Las ecuaciones de transmisión de calor son:

$$m_j c_j \frac{dT_j}{dt} = \mu_1(T_a - T_j)$$

$$m_a c_a \frac{dT_a}{dt} = Q_e - \mu_1(T_a - T_j) - \mu_2(T_a - T_e)$$

Como T_e es constante, se toman incrementos ($\Delta T_j=T_j-T_e$, $\Delta T_a=T_a-T_e$), y se obtiene un sistema lineal. Esto es equivalente a linealizar el sistema alrededor del punto de funcionamiento $Q_{e0}=0$, $T_{a0}=T_{j0}=25°C$. El resultado es:

$$m_j c_j \frac{d\Delta T_j}{dt} = \mu_1(\Delta T_a - \Delta T_j)$$

$$m_a c_a \frac{d\Delta T_a}{dt} = Q_e - \mu_1(\Delta T_a - \Delta T_j) - \mu_2\Delta T_a$$

donde se ha puesto Q_e por ser $Q_e=\Delta Q_e$, al ser $Q_{e0}=0$.

Tomando transformadas de Laplace se tiene:

$$m_j c_j s\Delta T_j(s) = \mu_1 \Delta T_a(s) - \mu_1 \Delta T_j(s)$$

$$m_a c_a s\Delta T_a(s) = Q_e(s) - (\mu_1 + \mu_2)\Delta T_a(s) + \mu_1 \Delta T_j(s)$$

ya que las condiciones iniciales de las variables incrementales son nulas. Despejando de las ecuaciones se obtiene la función de transferencia entre Q_e y ΔT_j.

$$G(s) = \frac{\Delta T_j(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{\dfrac{m_a c_a m_j c_j}{\mu_1} s^2 + \left[m_a c_a + \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} m_j c_j\right] s + \mu_2}$$

que, sustituyendo valores queda:

$$G(s) = \frac{4167 \cdot 10^{-8}}{s^2 + 4.833 \cdot 10^{-3} s + 8.333 \cdot 10^{-7}}$$

Aplicando la integral de convolución se tiene que

$$\Delta T_j(2000) = \int_0^{2000} Q_e(\tau) g(2000-\tau)d\tau = \int_0^{1000} 5000 g(2000-\tau)d\tau$$

ya que la entrada vale 5000 hasta el instante 1000 seg y después vale 0. Para resolver la integral anterior es necesario obtener la respuesta impulsional:

$$G(s) = \frac{4.167 \cdot 10^{-8}}{(s + 4.654 \cdot 10^{-3})(s + 1.7905 \cdot 10^{-4})}$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = Ae^{-4.654 \cdot 10^{-3} t} + Be^{-1.7905 \cdot 10^{-4} t}$$

Tomando transformadas, sumando e igualando los numeradores se obtiene $A= -9.31*10^{-6}$, $B=9.31*10^{-6}$, por lo que la integral queda:

$$\Delta T_j(2000) =$$

$$5000 \int_0^{1000} (-9.31 \cdot 10^{-6} e^{-4.654 \cdot 10^{-3}(2000-\tau)} + 9.31 \cdot 10^{-6} e^{-1.7905 \cdot 10^{-4}(2000-\tau)}) d\tau =$$

$$0.04655 \left[-\frac{e^{-9.308}}{4.654 \cdot 10^{-3}} e^{4.654 \cdot 10^{-3} \tau} + \frac{e^{-0.3581}}{1.7905 \cdot 10^{-4}} e^{1.7905 \cdot 10^{-4} \tau} \right]_0^{1000} = 35.54°C$$

Por lo que la temperatura en el instante t=2000 seg será:

$$T_j(2000) = T_e + \Delta T_j(2000) = 60.54°C$$

PROBLEMA 76. Respuesta de sistema discreto

La respuesta ante escalón unitario de un sistema discreto es: {0,1,1.5,1.75,1.875,...}. Obtener la ecuación en diferencias y la función de transferencia. Obtener la respuesta del sistema en el instante 6 ante la entrada u_k=k (es decir, u={0,1,2,3,...}).

Solución

A partir de la respuesta ante escalón se obtendrá la respuesta impulsional, que nos define directamente la f.d.t. Se cumple que la respuesta impulsional se obtiene a partir de la respuesta ante escalón sin más que restar los valores. De esta forma:

$g_0=0$

$g_1=1-0=1$

$g_2=1.5-1=0.5$

$g_3=1.75-1.5=0.25$

$g_4=1.875-1.75=0.125$

etc.

es decir, $g_k = 0.5^{k-1}u_o(k-1)$, *cuya transformada en Z es*

$$G(z) = z^{-1}\frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{1}{z-0.5}$$

La ecuación en diferencias es:

$$y_k - 0.5y_{k-1} = u_{k-1}$$

Para obtener la respuesta del sistema en el instante 6 ante la entrada rampa unitaria se utiliza la suma de convolución:

$$y_6 = \sum_{j=0}^{6} g_j u_{6-j} = g_0u_6 + g_1u_5 + g_2u_4 + g_3u_3 + g_4u_2 + g_5u_1 + g_6u_0 =$$

$$= 5 + 0.5*4 + 0.25*3 + 0.125*2 + 0.0625*1 = 8.0625$$

PROBLEMA 77. Respuesta de sistema discreto

La función de transferencia de un sistema discreto es

$$G(z) = \frac{2z^2 + z - 0.5}{z^2}$$

Obtener la respuesta del sistema ante una secuencia de entrada de la forma

$$u_k = \begin{cases} 2^k \operatorname{sen}(3k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Solución

Al tratarse de un sistema discreto con todos los polos en 0, su respuesta impulsional es finita. La salida se podrá obtener entonces de forma muy simple sin más que aplicar la suma de convolución:

Respuesta impulsional:

$$G(z) = 2 + z^{-1} - 0.5z^{-2} \quad \Rightarrow \quad g_k = \{2, 1, -0.5, 0, 0, \ldots\}$$

Salida:

$$y_k = \sum_{j=0}^{k} g_j u_{k-j} = g_0 u_k + g_1 u_{k-1} + g_2 u_{k-2} =$$

$$= 2 \cdot 2^k \operatorname{sen}(3k) + 2^{k-1} \operatorname{sen}(3(k-1)) - 0.5 \cdot 2^{k-2} \operatorname{sen}(3(k-2))$$

Obviamente lo anterior solo es válido si $k \geq 2$, pues si $k<2$ la suma tiene menos términos:

$$y_0 = g_0 u_0 = 2 \cdot 2^0 \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$y_1 = g_0 u_1 + g_1 u_0 = 2 \cdot 2^1 \operatorname{sen}(3) + 2^0 \operatorname{sen}(0) = 3\operatorname{sen}(3)$$

Esto se puede contemplar en la expresión general de y_k sin más que multiplicar los términos retrasados por escalones unitarios retrasados:

$$y_k = 2 \cdot 2^k \operatorname{sen}(3k) + 2^{k-1} \operatorname{sen}(3(k-1)) u_0(k-1) -$$

$$- 0.5 \cdot 2^{k-2} \operatorname{sen}(3(k-2)) u_0(k-2)$$

PROBLEMA 78. Respuesta de sistema discreto

Los 4 primeros valores de la respuesta del sistema discreto cuya función de transferencia es $G(z) = \dfrac{1}{z - 0.8}$ frente a una entrada desconocida son $\{0, 0, 1, 2.8\}$. Además se conoce el valor de la respuesta en el instante 20, y_{20}=0.01. Sabiendo que la entrada vale 0 a partir del instante 4 ($u_4 = u_5 = \ldots = 0$), obtener los valores de la entrada hasta el instante 3 (u_0, u_1, u_2, u_3).

Solución

La ecuación en diferencias del sistema es:

$$y_{k+1} = 0.8 y_k + u_k$$

Con los datos que se tienen se pueden plantear varias ecuaciones:

$$y_1 = 0.8y_0 + u_0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.8\cdot 0 + u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 0$$
$$y_2 = 0.8y_1 + u_1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0.8\cdot 0 + u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1$$
$$y_3 = 0.8y_2 + u_2 \quad \Rightarrow \quad 2.8 = 0.8\cdot 1 + u_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 2$$

Para obtener u_3 se dispone del dato y_{20}=0.01. Para poder utilizar este dato se plantea la suma de convolución:

$$y_{20} = \sum_{k=0}^{20} u_k g_{20-k} = u_0 g_{20} + u_1 g_{19} + u_2 g_{18} + u_3 g_{17}$$

La respuesta impulsional es:

$$g_k = (0.8)^{k-1} u_0(k-1)$$

por lo que la ecuación queda:

$$y_{20} = 0.01 = (0.8)^{18} + 2(0.8)^{17} + u_3(0.8)^{16} \quad \Rightarrow \quad u_3 = -1.8847$$

PROBLEMA 79. Respuesta de sistema discreto

Calcular la salida del sistema de función de transferencia

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - 1.5z + 0.54}$$

en el instante 100 ante una entrada definida como:

$$u_k = \begin{cases} 0 & k < 5 \\ 3 & 5 \le k < 25 \\ 1 & k \ge 25 \end{cases}$$

Solución

Como se pide únicamente la salida en el instante 100 se plantea el cálculo por convolución. Para ello se necesita la respuesta impulsional:

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - 1.5z + 0.54} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.54z^{-2}} =$$
$$= 3.7037 + \frac{6.555z^{-1} - 3.7037}{(1-0.9z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

donde se ha dividido por tener el numerador el mismo orden (en z^{-1}) que el denominador. La transformada inversa es:

$$g_k = 3.7037\delta_k + A(0.9)^k + B(0.6)^k$$

Para calcular los coeficientes A y B se toman transformadas, se suma y se igualan los numeradores:

$$G(z) = 3.7037 + A\frac{1}{1-0.9z^{-1}} + B\frac{1}{1-0.6z^{-1}} =$$
$$= 3.7037 + \frac{6.555z^{-1} - 3.7037}{(1-0.9z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

$$A(1-0.6z^{-1}) + B(1-0.9z^{-1}) = 6.555z^{-1} - 3.7037$$

de donde se obtiene A=10.7407, B=-14.44444, es decir:

$$g_k = 3.7037\delta_k + 10.7407(0.9)^k - 14.444(0.6)^k$$

La salida en el instante 100 será:

$$y_{100} = \sum_{i=0}^{100} u_i g_{100-i} = \sum_{i=5}^{24} 3g_{100-i} + \sum_{i=25}^{100} g_{100-i} = 3\cdot 10.7407\sum_{i=5}^{24}(0.9)^{100-i} -$$
$$-3\cdot 14.444\sum_{i=5}^{24}(0.6)^{100-i} + 10.7407\sum_{i=25}^{100}(0.9)^{100-i} -$$
$$-14.444\sum_{i=25}^{100}(0.6)^{100-i} + 3.7037$$

donde el término 3.7037 se debe a que $g_0=3.7037+10.7407(0.9)^0-14.444(0.6)^0$, ya que el impulso unitario es una secuencia que vale 1 en el instante 0 y cero en los demás instantes. Simplificando las sumas anteriores se obtiene:

$$y_{100} = 3.7037 + 31.4121\sum_{76}^{95}(0.9)^i - 43.332\sum_{i=76}^{95}(0.6)^i +$$
$$+10.7407\sum_{i=0}^{75}(0.9)^i - 14.444\sum_{i=0}^{75}(0.6)^i$$

Para realizar el cálculo se necesita obtener la suma de una serie geométrica de la forma:

$$S = a^k + a^{k+1} + \cdots + a^{k+N}$$
$$aS = a^{k+1} + a^{k+2} + \cdots + a^{k+N} + a^{k+N+1}$$
$$S - aS = a^k - a^{k+N+1} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{a^k - a^{k+N+1}}{1-a}$$

por lo que la salida pedida es:

$$y_{100} = 3.7037 + 31.4121\frac{0.9^{76} - 0.9^{96}}{1-0.9} - 43.332\frac{0.6^{76} - 0.6^{96}}{1-0.6} +$$

$$+10.7407\frac{1-0.9^{76}}{1-0.9} - 14.444\frac{1-0.6^{76}}{1-0.6} = 75.058$$

8 REPRESENTACIÓN INTERNA

Esta sección contiene problemas relacionados con la representación interna de sistemas, tanto continuos como discretos.

Los problemas van desde la obtención de las ecuaciones en representación interna de un sistema físico hasta la obtención de representaciones internas equivalentes, o el cálculo de una realimentación del estado para que el sistema cumpla unas determinadas especificaciones (de estabilidad u oscilación).

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 5 de [Sala00].

También puede encontrarse la teoría necesaria en [Solyman99] (capítulos 2 y 6), [Franklin91] (capítulo 6), [Ogata93] (capítulo 9), [Phillips93] (capítulo 2), [Phillips96] (capítulos 3 y 11), y [Ogata95] (capítulo 5).

PROBLEMA 80. Realimentación del estado discreta

Dado el sistema en representación interna:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8 & 1.6 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

calcular los coeficientes de la realimentación del estado:

$$u_k = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} x_k + \alpha \cdot r_k$$

para que la función de transferencia entre r_k e y_k sea de respuesta impulsional finita. Conseguir además que la ganancia estática sea 1 (es decir, ante referencia escalón unitario, la salida tenga un valor final 1).

Solución

Sustituyendo la entrada por su expresión en el sistema queda:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8 & 1.6 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha \cdot r_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

La f.d.t. entre la referencia r y la salida y se obtiene sin más que tomar T.Z. y despejar, quedando:

$$Y(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(z) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8 & 1.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha \cdot R(z)$$

Operando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(z - 0.8)\alpha}{z^2 - z(1.6 + L_1 + L_2) + 0.8 + 0.6L_1 + 0.8L_2}$$

Para que esta f.d.t. sea de respuesta impulsional finita los polos deben ser todos cero, ya que, expresándola en función de z^{-1} queda:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\alpha z^{-1} - 0.8\alpha z^{-2}}{1 - (1.6 + L_1 + L_2)z^{-1} + (0.8 + 0.6L_1 + 0.8L_2)z^{-2}} =$$
$$= \alpha z^{-1} - 0.8\alpha z^{-2} = \frac{(z - 0.8)\alpha}{z^2}$$

para que sea de respuesta impulsional finita. Las 2 ecuaciones que se obtienen son pues:

$$L_1 + L_2 + 1.6 = 0$$
$$0.6L_1 + 0.8L_2 + 0.8 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$L_1 = -2.4$$
$$L_2 = 0.8$$

Si además se desea que la ganancia estática sea 1, se tiene que, ante referencia escalón, la salida es:

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\frac{(z-0.8)}{z^2}\alpha$$

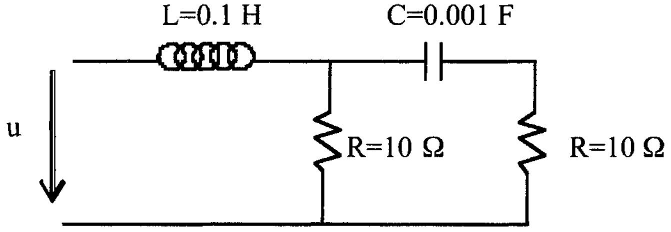
y, aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-0.8)\alpha}{z^2} = 0.2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 5$$

PROBLEMA 81. Circuito eléctrico

Dado el circuito de la figura, obtener las ecuaciones en representación interna, tomando como estados la tensión en el condensador, y la corriente en la bobina, y siendo la entrada la tensión u. Suponiendo que esos dos estados se miden mediante sensores, obtener qué condición deben cumplir las ganancias de realimentación del estado (K_1 y K_2) para que la respuesta del sistema no sea oscilatoria.



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

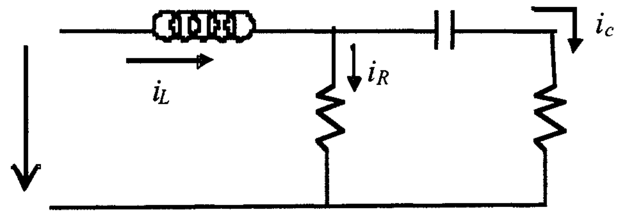
realimentación:

$$u = K\,x = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} x$$

Tomando $K_1=5$, obtener el mínimo valor de K_2 que satisfaga la condición de no oscilación.

Solución

Definiendo:



se tiene:

$$(I)\ u = L\frac{di_L}{dt} + Ri_R$$

$$(II)\ Ri_R = v_C + Ri_C$$

$$(III)\ i_L = i_R + i_C$$

$$(IV)\ i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

despejando de (II) y (III) se tiene:

$$i_R = \frac{i_L}{2} + \frac{v_C}{2R}$$

$$i_C = \frac{i_L}{2} - \frac{v_C}{2R}$$

con lo que despejando las derivadas de los estados se tiene:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{2L}i_L - \frac{1}{2L}v_C + \frac{1}{L}u$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{2C}i_L - \frac{1}{2RC}v_C$$

sustituyendo los valores numéricos se tiene:

$$\frac{di_L}{dt} = -50i_L - 5v_C + 10u$$

$$\frac{dv_C}{dt} = 500i_L - 50v_C$$

Si se realimenta el estado ($u = Kx = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} x$ *) se tendrá la ecuación:*

$$\frac{di_L}{dt} = -50i_L - 5v_C + 10\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L \\ v_C\end{bmatrix} = (-50+10K_1)i_L + (-5+10K_2)v_C$$

$$\frac{dv_C}{dt} = 500i_L - 50v_C$$

Para que el sistema no sea oscilatorio, los valores propios de la matriz del estado

$$\begin{bmatrix}-50+10K_1 & -5+10K_2 \\ 500 & -50\end{bmatrix}$$

no deben tener parte imaginaria (deben ser reales):

$$\left|\lambda I - \begin{bmatrix}-50+10K_1 & -5+10K_2 \\ 500 & -50\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}\lambda+50-10K_1 & 5-10K_2 \\ -500 & \lambda+50\end{bmatrix}\right| =$$

$$= (\lambda+50-10K_1)(\lambda+50) + 500(5-10K_2) =$$

$$= \lambda^2 + (100-10K_1)\lambda + 5000 - 500K_1 - 5000K_2 = 0$$

$$\lambda = \frac{10K_1 - 100 \pm \sqrt{(100-10K_1)^2 - 4(5000-500K_1-5000K_2)}}{2}$$

Para que los valores propios sean reales es necesaria la condición:

$$(100-10K_1)^2 - 4(5000-500K_1-5000K_2) \geq 0$$

que es la condición pedida.

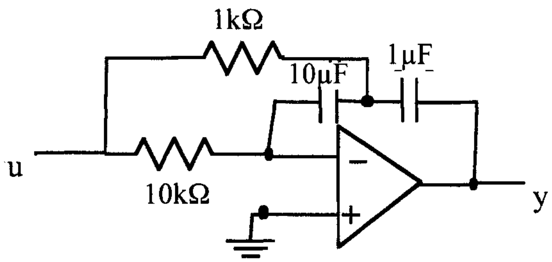
Si K_1=5 la ecuación queda:

$$-7500 + 20000K_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 \geq \frac{7500}{20000} = 0.375$$

que es el valor mínimo pedido de K_2.

PROBLEMA 82. Circuito con operacionales

Obtener las ecuaciones en representación interna del sistema de la figura tomando como estados las tensiones en los condensadores. Las tensiones u e y van referidas a masa.

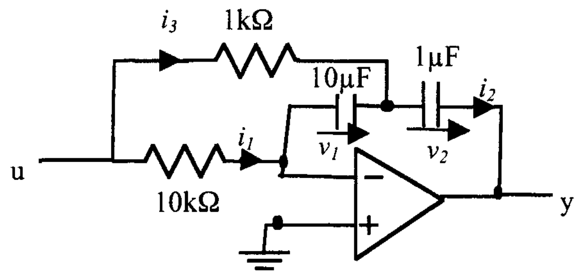


Si las tensiones en los condensadores se miden mediante sensores, y la entrada se define como una realimentación del estado, calcular el valor de la matriz de realimentación para que la salida y sea senoidal pura de frecuencia 50Hz.

¿Se puede conseguir lo mismo si la entrada se define como una realimentación de la salida (es decir, $u=K\cdot y$)?.

Solución

Definimos las tensiones y corrientes como:



Las variables de estado serán las tensiones en los condensadores, v_1 y v_2. Aplicando las leyes de Kirchoff se tiene:

$$u = 10^4 i_1 = 10^4 \cdot 10^{-5} \dot{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_1 = 10u$$

que es la primera ecuación de estado. Por otra parte:

$$u + v_1 = 10^3 i_3 \quad \Rightarrow \quad i_3 = 10^{-3} v_1 + 10^{-3} u$$

$$i_2 = 10^{-6} \dot{v}_2 = i_1 + i_3 = 10^{-4} u + 10^{-3} u + 10^{-3} v_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_2 = 1000 v_1 + 1100u$$

que es la segunda ecuación de estado. La ecuación de salida es:

$$y = -v_1 - v_2$$

Expresadas en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 1100 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

La realimentación del estado se define como $u=k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_{ref} r$. La ecuación en bucle cerrado resultante es:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1000 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 1100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 1100 \end{bmatrix} k_{ref} r$$

Para que la salida sea una señal senoidal pura de 100π rad/s los valores propios (polos) del sistema en bucle cerrado deben ser imaginarios puros de valor 100π, es decir:

$$\left|\begin{bmatrix} s-10k_1 & -10k_2 \\ -1000-1100k_1 & s-1100k_2 \end{bmatrix}\right| =$$

$$= (s-10k_1)(s-1100k_2)-10k_2(1000+1100k_1) = s^2+(100\pi)^2$$

Igualando coeficientes se tiene:

$$-10^4 k_2 = (100\pi)^2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -9.8696$$

$$-10k_1 - 1100k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1085.656$$

Si se define una realimentación de la salida $u=ky=k[-1 \;\; -1]x$, la ecuación diferencial en bucle cerrado sería:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1000 & 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 10 \\ 1100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 1100 \end{bmatrix} k_{ref} r$$

La ecuación característica sería:

$$\left|\begin{bmatrix} s+10k & 10k \\ -1000+1100k & s+1100k \end{bmatrix}\right| =$$

$$= (s+10k)(s+1100k)-10k(-1000+1100k) = s^2+(100\pi)^2$$

Igualando coeficientes se obtiene:

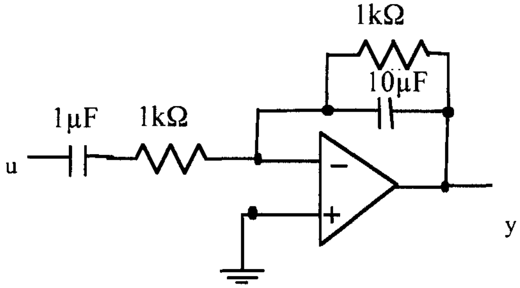
$$10k + 1100k = 0$$

$$10000k = (100\pi)^2$$

que es un sistema de 2 ecuaciones y una incógnita que no tiene solución. Por lo tanto con la realimentación de la salida no se puede conseguir una respuesta senoidal pura de 50 Hz.

PROBLEMA 83. Circuito con operacionales

Obtener las ecuaciones en representación interna del sistema de la figura tomando como estados las tensiones en los condensadores. Las tensiones *u* e *y* van referidas a masa.



Si las tensiones en los condensadores se miden mediante sensores, y la entrada se define como una realimentación del estado, calcular el valor de la matriz de realimentación para que la salida y sea senoidal pura de frecuencia 100Hz.

¿Se puede conseguir lo mismo si la entrada se define como una realimentación de la salida (es decir, $u=K{\cdot}y$)?

Solución

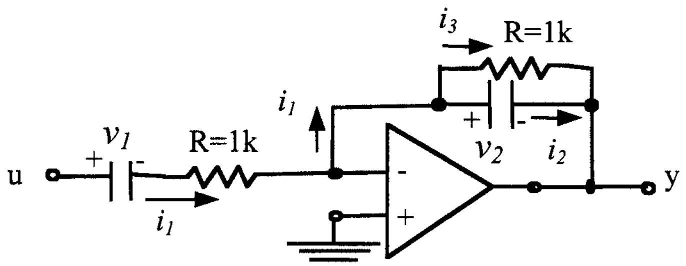
La representación interna del sistema anterior tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = A_{2x2}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + B_{2x1}u$$

$$y = C_{1x2}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + D_{1x1}u$$

En nuestro caso, tenemos que las variables internas son las tensiones en los condensadores, de forma que $x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$

Se tomarán las siguientes intensidades y referencias de tensión:



Teniendo en cuenta la condición del operacional realimentado ($v^+ = v^- = 0$), aplicando las leyes de Kirchoff se obtienen las dos ecuaciones de estado:

$$u = v_1 + Ri_1 = v_1 + RC_1\frac{dv_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_1 = -\frac{1}{RC_1}v_1 + \frac{1}{RC_1}u \qquad (I)$$

$$i_1 = \frac{u - v_1}{R} = i_2 + i_3 = C_2\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v}_2 = -\frac{1}{RC_2}v_1 - \frac{1}{RC_2}v_2 + \frac{1}{RC_2}u \qquad (II)$$

La ecuación de la salida es simplemente:

$$y = -v_2$$

Escribiéndolo en forma matricial y sustituyendo valores se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Para que la salida sea senoidal pura de 100Hz los polos en bucle cerrado deben ser imaginarios puros con parte imaginaria $200\pi j$. Si se define una realimentación del estado $u=k_1v_1+k_2v_2$, la ecuación en bucle cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Por lo que la ecuación característica (que define los polos ó valores propios) es:

$$\left| sI - \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| =$$

$$(s + 1000(1 - k_1))(s + 100(1 - k_2)) + 10^5(1 - k_1)k_2 = s^2 + (200\pi)^2$$

donde igualando término a término se obtiene:

$$1000(1 - k_1) + 100(1 - k_2) = 0$$

$$10^5 - 10^5 k_2 - 10^5 k_1 + 10^5 = (200\pi)^2$$

de donde se obtiene:

$$k_1 = -2.9478$$

$$k_2 = 40.4784$$

Si únicamente se mide la salida de forma que $u=ky$, la ecuación en bucle cerrado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} k \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Por lo que la ecuación característica (que define los polos ó valores propios) es:

$$\left| sI - \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$(s + 1000)(s + 100(1 + k)) - 10^5 k = s^2 + (200\pi)^2$$

donde igualando término a término se obtiene:

$$1000 + 100(1 + k) = 0$$
$$10^5 + 10^5 k + 10^5 = (200\pi)^2$$

que es un sistema de 2 ecuaciones y 1 incógnita que no tiene solución, por lo que con la realimentación de la salida no se puede conseguir que la salida sea senoidal pura de 100 Hz.

PROBLEMA 84. Transformación de estado

Las siguientes ecuaciones representan la dinámica de una reacción química, donde x_1 es la concentración del componente 1 y x_2 es la concentración del componente 2. La entrada u es la cantidad de reactivo que se introduce por unidad de tiempo.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u$$

Obtener unas ecuaciones de estado equivalentes a éstas en las que las dos variables de estado sean independientes entre sí. Definir esas dos variables de estado nuevas en función de x_1 y x_2.

Solución

Para que las dos variables de estado sean independientes la matriz de la ecuación debe ser diagonal. Para conseguir una representación del sistema con matriz diagonal se pueden aplicar dos métodos, que en realidad son equivalentes. Una opción es calcular la función de transferencia y obtener una representación interna basada en la descomposición en fracciones simples. La otra opción es diagonalizar directamente la matriz para obtener la matriz de transformación.

a) Mediante la función de transferencia. Como la salida no está definida, podría tomar un valor cualquiera (por ejemplo $y=x_1+x_2$). Sin embargo no es necesario en realidad calcular la función de transferencia, puesto que lo único que se requiere son los polos, y éstos no son más que los valores propios de la matriz:

$$\begin{vmatrix}\lambda + 4 & -1\\ 0 & \lambda + 2\end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda + 2)$$

es decir, los polos son -4 y -2. La descomposición en fracciones simples de la función de transferencia dará como resultado una expresión de la forma:

$$G(s) = \frac{\alpha}{s+2} + \frac{\beta}{s+4}$$

donde α y β son dos constantes que no se conocen. Los estados se pueden definir entonces como:

$$w_1(s) = \frac{1}{s+2}u(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{w}_1 = -2w_1 + u$$

$$w_2(s) = \frac{1}{s+4}u(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{w}_2 = -4w_2 + u$$

La ecuación de estado para las nuevas variables w_1 y w_2 es, por tanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

únicamente falta obtener la relación entre éstas variables y las variables originales x_1 y x_2. Una forma sencilla de hacerlo es obtener la transformada de Laplace de x_1 y x_2. Tomando transformadas en la ecuación de estado y despejando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(s)$$

de donde operando se obtiene:

$$x_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}u(s)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{(s+2)}u(s)$$

Se observa por tanto que $w_1 = x_2$. Por otra parte w_2 se puede poner como una combinación lineal de x_1 y x_2 (esto siempre se cumple para dos representaciones del mismo sistema):

$$w_2 = \frac{s+2}{(s+4)(s+2)}u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 \frac{1}{(s+4)(s+2)}u + \alpha_2 \frac{1}{(s+2)}u$$

Sumando e igualando los numeradores se obtiene que:

$$\alpha_1 + \alpha_2(s+4) = s+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = -2 \end{cases}$$

es decir,

$$w_1 = x_2$$

$$w_2 = -2x_1 + x_2$$

b) La segunda alternativa para la resolución del problema es la obtención directa de la matriz de transformación que diagonaliza la matriz del proceso.

Si se define la matriz de transformación T de forma que:

$$w = Tx \quad \Rightarrow \quad \dot{w} = T\dot{x} = TAx + Tbu = TAT^{-1}w + Tbu$$

basta calcular la matriz T que hace que la nueva matriz de la ecuación del proceso (TAT^{-1}) sea una matriz diagonal. La matriz de transformación que logra lo anterior tiene en sus columnas los vectores propios de la matriz A. Los valores propios son –4 y –2. El vector propio asociado al valor propio λ_1=–4 es la solución de:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} v_1 = -4v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde α es una constante arbitraria. El vector propio asociado al valor propio λ_2=–2 es la solución de:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} v_2 = -2v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donde β es una constante arbitraria. La matriz T^{-1} se forma con los vectores propios, es decir:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix}^{-1}$$

donde cualquier valor de α y β da una matriz válida. Si por ejemplo se toma α=1 y β=1 se tiene la matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La ecuación resultante en las nuevas variables es:

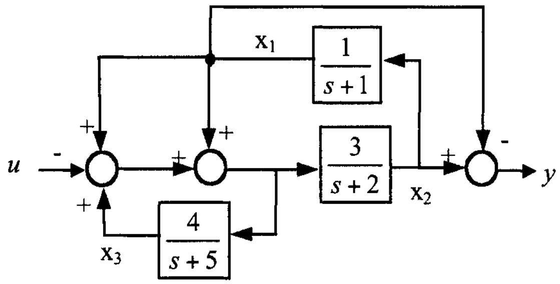
$$\dot{w} = TAT^{-1}w + Tbu = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} u$$

mientras que la relación entre las nuevas variables y las originales es:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Tx = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 0.5x_2 \\ 0.5x_2 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 85. Diagrama de bloques

Obtener las ecuaciones en representación interna del sistema siguiente



Solución

Para la variable x_1 se cumple:

$$x_1(s) = \frac{1}{s+1} x_2(s) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_1 + x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

Par la variable x_2 se tiene:

$$x_2(s) = \left(x_1(s) + x_1(s) + x_3(s) - u\right)\frac{3}{s+2} \Leftrightarrow \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + 6x_1 + 3x_3 - 3u$$

Y por último para la variable x_3:

$$x_3(s) = \left(x_1(s) + x_1(s) + x_3(s) - u\right)\frac{4}{s+5} \Leftrightarrow \quad \dot{x}_3 = -5x_3 + 8x_1 + 4x_3 - 4u$$

La variable de salida es:

$$y = x_2 - x_1$$

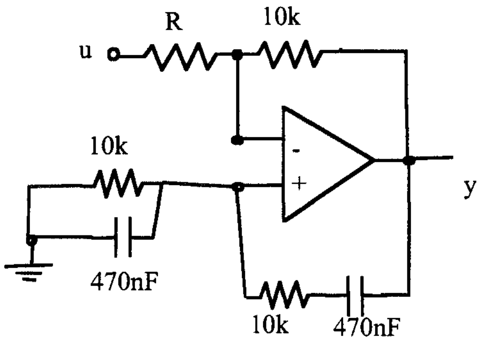
Agrupando las 3 ecuaciones en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 86. Circuito con operacionales

Dado el siguiente sistema:

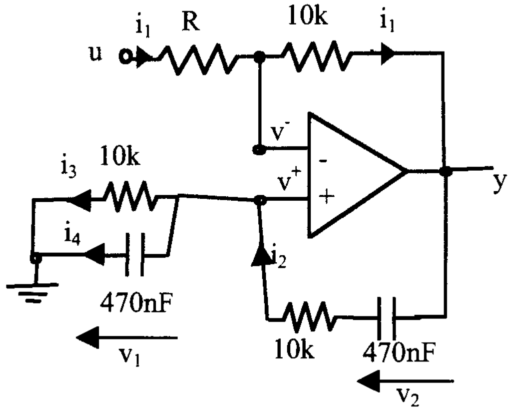


a) Obtener las ecuaciones en representación interna tomando como estados las tensiones de los condensadores.

b) Obtener el valor de R para que ante entrada escalón, la salida en régimen permanente tenga un término senoidal, calculando su frecuencia.

Solución

a) *Definimos las corrientes y tensiones siguientes:*



Donde las flechas de las tensiones indican la caída de tensión. Las ecuaciones del operacional realimentado en funcionamiento lineal son $v^+ = v^-$*, además de las corrientes nulas absorbidas por las entradas positiva y negativa.*

Aplicando las leyes de Kirchoff a los distintos elementos del circuito se obtienen las ecuaciones de donde se tratará de despejar dos relaciones de la forma:

$$\dot{v}_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + b_1u$$

$$\dot{v}_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + b_2u$$

En primer lugar tenemos que:

$$v_1 = v^+ - 0 = v^+ = v^-$$

Por otra parte se tiene que:

$$i_1 = \frac{u - v_1}{R} = \frac{v_1 - y}{10^4} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{10^4}{R}u + \left(1 + \frac{10^4}{R}\right)v_1$$

que representa la ecuación de salida. En la otra rama se tiene:

$$i_2 = 470 \cdot 10^{-9}\dot{v}_2 = \frac{y - v_1 - v_2}{10^4} = \frac{1}{R}v_1 - \frac{1}{10^4}v_2 - \frac{1}{R}u$$

De aquí sale la primera ecuación de estado:

$$\dot{v}_2 = \frac{10^8}{47R}v_1 - \frac{10^4}{47}v_2 - \frac{10^8}{47R}u$$

Para la segunda ecuación de estado se tiene que:

$$i_2 = i_3 + i_4 = \frac{v_1}{10^4} + 470 \cdot 10^{-9}\dot{v}_1 = \frac{1}{R}v_1 - \frac{1}{10^4}v_2 - \frac{1}{R}u$$

de donde se obtiene:

$$\dot{v}_1 = \frac{10^8 - 10^4 R}{47R}v_1 - \frac{10^4}{47}v_2 - \frac{10^8}{47R}u$$

Las matrices del sistema en representación interna son:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{10^8 - 10^4 R}{47R} & -\dfrac{10^4}{47} \\ \dfrac{10^8}{47R} & -\dfrac{10^4}{47} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -\dfrac{10^8}{47R} \\ -\dfrac{10^8}{47R} \end{bmatrix} \quad ; \quad c = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{10^4}{R} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad d = -\frac{10^4}{R}$$

b) Para que la salida tenga un término senoidal los valores propios (polos) del sistema deben ser imaginarios puros, es decir, deben tener parte real nula. El polinomio que da los valores propios es:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \dfrac{10^8 - 10^4 R}{47R} & \dfrac{10^4}{47} \\ -\dfrac{10^8}{47R} & \lambda + \dfrac{10^4}{47} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda - \frac{10^8 - 10^4 R}{47R}\right)\left(\lambda + \frac{10^4}{47}\right) + \frac{10^8}{47R} \cdot \frac{10^4}{47} =$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{10^4}{47} - \frac{10^8 - 10^4 R}{47R}\right)\lambda + \frac{10^8}{47^2}$$

Para que las raíces sean imaginarias puras el término de λ debe ser cero, por lo que:

$$\frac{10^4}{47} - \frac{10^8 - 10^4 R}{47R} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{10^4}{2} = 5\ k\Omega$$

En ese caso los polos (valores propios) son:

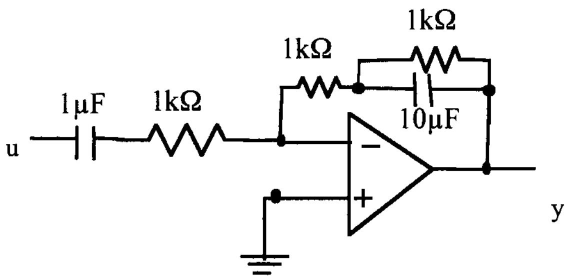
$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{10^8}{47^2}} = \pm\frac{10^4}{47}j$$

La frecuencia de la salida es la parte imaginaria de los polos, por lo que esa frecuencia es:

$$\omega = \frac{10^4}{47} = 221.76\ rad/s$$

PROBLEMA 87. Circuito con operacionales

Dado el siguiente circuito donde las tensiones *u* e *y* van referidas a masa.



Obtener:

a) Las ecuaciones en representación interna del sistema tomando como estados las tensiones en los condensadores.

b) Si la salida se mide mediante un sensor y se realimenta definiendo $u=k(r-y)$, ¿existe algún valor de $k>0$ para el que el sistema en bucle cerrado (con la nueva entrada r) tenga una respuesta ante escalón no acotada?

c) Si las tensiones en los condensadores se miden mediante sensores, y la entrada se define como una realimentación del estado, $u=Kx+r$, calcular el valor de la matriz de realimentación para que las ecuaciones de estado en bucle cerrado sean desacopladas.

Solución

a) La representación interna del sistema anterior tiene la siguiente estructura:

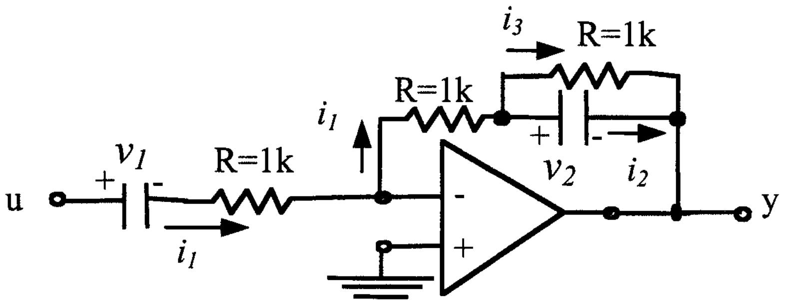
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = A_{2x2}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + B_{2x1}u$$

$$y = C_{1x2}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + D_{1x1}u$$

En nuestro caso, tenemos que las variables internas son las tensiones en los condensadores, de forma que

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Se tomarán las siguientes intensidades y referencias de tensión:



Teniendo en cuenta la condición del operacional realimentado ($v^+ = v^- = 0$), aplicando la s leyes de Kirchoff se obtienen las dos ecuaciones de estado:

$$u = v_1 + Ri_1 = v_1 + RC_1\frac{dv_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_1 = -\frac{1}{RC_1}v_1 + \frac{1}{RC_1}u \qquad (I)$$

$$i_1 = \frac{u - v_1}{R} = i_2 + i_3 = C_2\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v}_2 = -\frac{1}{RC_2}v_1 - \frac{1}{RC_2}v_2 + \frac{1}{RC_2}u \qquad (II)$$

La ecuación de la salida es:

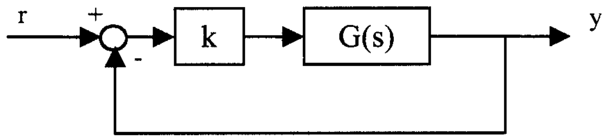
$$y = -v_2 - Ri_1 = v_1 - v_2 - u$$

Escribiéndolo en forma matricial y sustituyendo valores se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ -100 & -100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - u$$

b) En este apartado se realiza una realimentación de la salida. Una respuesta ante escalón no acotada quiere decir un comportamiento inestable del sistema. El diagrama de bloques que representa el bucle cerrado del sistema es el que se muestra a continuación:



G(s) es la función de transferencia del sistema, cuya equivalencia con la representación interna es:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1000 & 0 \\ 100 & s+100 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} - 1 =$$

$$= \frac{-s^2 - 200s}{s^2 + 1100s + 10^5} = \frac{-s(s+200)}{(s+100)(s+1000)}$$

La función de transferencia en bucle cerrado es:

$$M(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)}$$

La ecuación característica será:

$$1 + kG(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s+100)(s+1000) - ks(s+200) = 0$$

$$(1-k)s^2 + (1100 - 200k)s + 10^5 = 0$$

Para que el sistema sea inestable es necesario que al menos un polo (raíz de la ecuación característica) tenga parte real positiva. Los polos son:

$$\frac{-1100 + 200k \pm \sqrt{(1100-200k)^2 - 4(1-k)10^5}}{2(1-k)}$$

Esto se cumplirá si

$$\frac{-1100 + 200k}{2(1-k)} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1\text{-}k > 0 \quad y \quad -1100 + 200k > 0 & \Rightarrow \text{No hay solución} \\ 1\text{-}k < 0 \quad y \quad -1100 + 200k < 0 & \Rightarrow 1 < k < 5.5 \end{cases}$$

También habrá un polo con parte real positiva si

$$-4(1-k)10^5 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > 1$$

Se concluye que sí hay valores de k>0 tales que el sistema en bucle cerrado es inestable (cualquier valor k>1).

c) En el presente apartado se procede a realimentar el estado, de forma que las nuevas ecuaciones de estado se hallen desacopladas. La entrada se define como:

$$u = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + r$$

Las ecuaciones en bucle cerrado son:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} r$$

Para que el sistema en bucle cerrado sea desacoplado la matriz de estado debe ser diagonal. Por lo tanto, se deben seleccionar k_1 y k_2 de modo que cumplan:

$$1000k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{k_2 = 0}$$

$$-100 + 100k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{k_1 = 1}$$

PROBLEMA 88. Representación interna discreta

El modelo de un sistema discreto está definido por la ecuación en diferencias:

$$y_k - 1.72y_{k-1} + 0.81y_{k-2} = 10u_k + 10u_{k-2}$$

Obtener una representación interna válida para el sistema.

Solución

La de función de transferencia es:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{10 + 10z^{-2}}{1 - 1.72z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

Para obtener una representación interna del sistema se definen las variables de estado x_1 y x_2 como aquellas señales cuya transformada en Z es:

$$X_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.72z^{-1} + 0.81z^{-2}} U(z)$$

$$X_1(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 1.72z^{-1} + 0.81z^{-2}} U(z) = z^{-1} X_2(z)$$

se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = 1.72x_2(k) - 0.81x_2(k-1) + u_k = 1.72x_2(k) - 0.81x_1(k) + u_k$$

La salida se puede expresar en función de los estados como:

$$Y(z) = 10\frac{1}{1-1.72z^{-1}+0.81z^{-2}}U(z) + 10\frac{z^{-2}}{1-1.72z^{-1}+0.81z^{-2}}U(z)$$

$$y_k = 10x_2(k+1) + 10x_1(k) = 10\left(1.72x_2(k) - 0.81x_1(k) + u_k\right) + 10x_1(k) =$$
$$= 1.9x_1(k) + 17.2x_2(k) + 10u_k$$

Es decir, las matrices que definen el sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.81 & 1.72 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \ C = \begin{bmatrix} 1.9 & 17.2 \end{bmatrix} \ ; \ D = 10$$

Esta solución evidentemente no es única.

PROBLEMA 89. Representación interna discreta

Dado un proceso modelado por la ecuación en diferencias

$$y_k = 0.4u_{k-1} + u_{k-2} + 0.6u_{k-3}$$

Obtener un modelo en representación interna correcto del sistema.

Solución

Partiendo de la función de transferencia:

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = 0.4z^{-1} + z^{-2} + 0.6z^{-3} = \frac{0.4z^2 + z + 0.6}{z^3}$$

se pueden definir los 3 estados (el sistema es de orden 3) como:

$$x_1(z) = z^{-1}u(z) \quad \Rightarrow \quad x_1(k) = u_{k-1} \quad \Rightarrow \quad x_1(k+1) = u_k$$

$$x_2(z) = z^{-2}u(z) = z^{-1}x_1(z)$$
$$\Rightarrow \quad x_2(k) = u_{k-2} = x_1(k-1) \quad \Rightarrow \quad x_2(k+1) = x_1(k)$$

$$x_3(z) = z^{-3}u(z) = z^{-1}x_2(z)$$
$$\Rightarrow \quad x_3(k) = u_{k-3} = x_2(k-1) \quad \Rightarrow \quad x_3(k+1) = x_2(k)$$

quedando la salida definida como:

$$y_k = 0.4x_1(k) + x_2(k) + 0.6x_3(k)$$

Las ecuaciones en representación interna serán por tanto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.6 \end{bmatrix} x_k$$

9 SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

Esta sección contiene problemas relativos a sistemas continuos de segundo orden. Los problemas están relacionados con las características de la respuesta de estos sistemas ante entrada escalón, como la ganancia estática, la sobreoscilación, el tiempo de pico, el tiempo de establecimiento o la frecuencia de oscilación.

En algunos problemas se plantea la obtención de la función de transferencia del sistema a partir de la respuesta ante escalón del mismo, o a partir de algunos datos de dicha respuesta.

En otros problemas se debe calcular alguna de las características de la respuesta del sistema a partir de información de la función de transferencia.

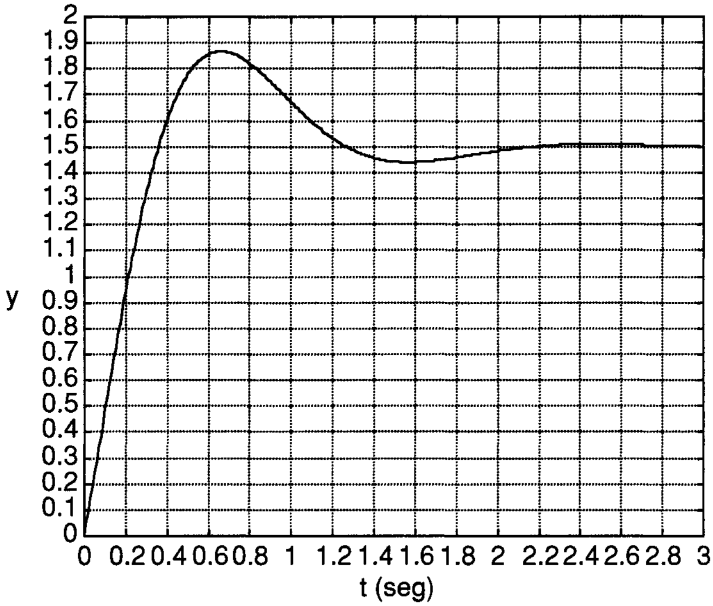
Los problemas hacen referencia tanto a sistemas de segundo orden estándar (ningún cero), como sistemas con cero adicional, o sistemas de orden superior con un par de polos complejos conjugados dominantes.

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 7 de [Sala00].

También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [Oppenheim98] (capítulo 6), [Phillips96] (capítulo 4), [Franklin91] (capítulo 2) y [Ogata93] (capítulo 4).

PROBLEMA 90. Identificación de sistema

Obtener la f.d.t. aproximada del sistema cuya respuesta ante una entrada escalón de valor 3 es:



¿Se trata de un sistema de 2° orden estándar?. Si no es así, ¿qué tipo de sistema puede ser, y por qué?.

Solución

Midiendo sobre la gráfica la sobreoscilación y el tiempo de pico se tienen datos suficientes para obtener ξ y ω_n. La ganancia estática se obtiene sin más que leer el valor en el que se estabiliza la entrada, teniendo en cuenta que la entrada es un escalón de 3 unidades:

$$K = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

$$\delta = \frac{1.87 - 1.5}{1.5} = 0.247 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\ln(0.247) = \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow (1-\xi^2) = \pi^2\xi^2 \frac{1}{(\ln(0.247))^2}$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln(0.247))^2}{\pi^2 + (\ln(0.247))^2}} = 0.406$$

$$t_p = 0.65 = \frac{\pi}{\omega_p} \Rightarrow \omega_p = \frac{\pi}{0.65} = 4.83 = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_n = 5.29$$

luego el sistema de 2º orden estándar es:

$$G(s) = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2} = \frac{0.5\cdot 5.29^2}{s^2 + 2\cdot 0.406\cdot 5.29s + 5.29^2} \approx \frac{14}{s^2 + 4.3s + 28}$$

Para comprobar si realmente se trata de un sistema de 2º orden estándar, hay que medir alguna otra característica de la respuesta, por ejemplo la frecuencia de oscilación. Midiendo el semiperiodo de oscilación (distancia entre el máximo y el mínimo) da aproximadamente 0.9 segundos, luego la frecuencia de oscilación medida es:

$$\omega_{osc} = \frac{2\pi}{T_{osc}} = \frac{2\pi}{2\cdot 0.9} = 3.5 \quad rad/s$$

si fuera un sistema de 2º orden estándar, esa frecuencia de oscilación debería ser igual a ω_p. Sin embargo, el valor calculado de ω_p es 4.83 rad/s, por lo que no es un sistema de 2º orden estándar.

Se puede averiguar qué tipo de sistema puede ser, haciendo el cálculo de manera diferente. Si se trata de un sistema de 2º orden (aunque no sea estándar), la frecuencia de oscilación coincide con ω_p, pues es el término que aparece dentro del factor senoidal de la respuesta. Así pues, de la frecuencia de oscilación medida se puede tomar ω_p en lugar de calcularlo a partir del tiempo de pico. De esta forma: $\omega_p = \omega_{osc} = 3.5$ rad/s. Para este valor de ω_p, el tiempo de pico (si fuera de 2º orden estándar) sería de $t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{3.5} = 0.9$. Sin embargo, el t_p del sistema real es de 0.65 (bastante menor), con lo que se puede concluir que podría tratarse de un sistema con un cero adicional negativo (constante τ positiva). Por otra parte el cero adicional produce un aumento de la sobreoscilación respecto de la que tendría el sistema de segundo orden estándar con los mismos polos. Esto implica que el amortiguamiento del sistema será en realidad mayor que el valor calculado al principio del problema, es decir, $\xi > 0.406$. Esto encaja también en el hecho de que la frecuencia propia sea menor que la calculada inicialmente a partir del tiempo de pico. El cálculo exacto de los valores es complicado, pues tanto el tiempo de pico como la sobreoscilación dependen de τ, ω_n y ξ.

PROBLEMA 91. Identificación de sistema

Un sistema es sometido a una entrada escalón de valor 3. La salida en cada instante se puede leer en un display (de números). Se dispone también de un cronómetro. El valor inicial del display es cero. El valor máximo que llega a marcar el display durante la respuesta transitoria al escalón es de 15.8. Cuando pasa mucho tiempo la lectura del display se estabiliza en 12. Mediante el cronómetro se ha medido también el tiempo que ha pasado desde que el display llegó al primer valor máximo hasta que llegó al segundo valor máximo. Este tiempo es de 25 segundos. Obtener la función de transferencia del sistema. ¿Podemos saber si se trata o no de un sistema de 2° orden estándar?. ¿Qué medida adicional podríamos haber tomado para comprobarlo?

Solución

Supondremos que se trata de un sistema de 2º orden estándar.

Ganancia estática: $k = \dfrac{12}{3} = 4$

Sobreoscilación: $\delta = \dfrac{15.8 - 12}{12} = 0.317$

Frecuencia propia: $\omega_p = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{25} = 0.25$

De la sobreoscilación se puede obtener el amortiguamiento:

$$\delta = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\pi}{\ln(\delta)})^2 + 1}} = 0.343$$

De la frecuencia propia se puede obtener la natural:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.266$$

La función de transferencia del sistema (suponiéndolo de 2º orden estándar) sería:

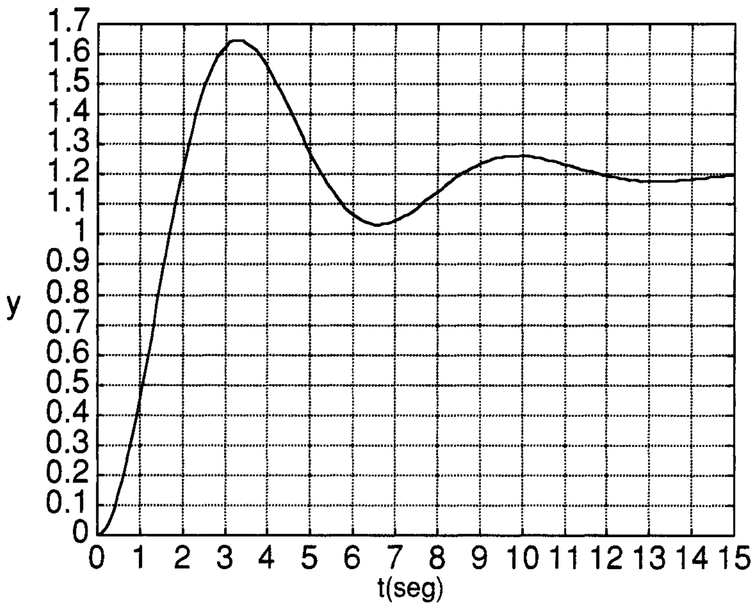
$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.28}{s^2 + 0.182s + 0.07}$$

Con los datos que tenemos no podemos saber si se trata o no de un sistema de 2º orden estándar. Para comprobarlo hubiera bastado con medir el tiempo de pico, y comprobar si coincide con el valor teórico para un sistema de 2º orden estándar:

$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_p} = 12.57$ *. Si el tiempo medido coincide con éste, se trata de un sistema estándar. Si no coincide no sería un sistema estándar.*

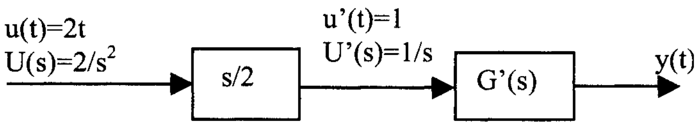
PROBLEMA 92. Identificación de sistema

La siguiente gráfica muestra la salida de un sistema ante una entrada en rampa de pendiente 2 ($u(t)=2t$). Obtener la función de transferencia del sistema. ¿Cuál es la ganancia estática del mismo?



Solución

La gráfica medida tiene un aspecto simular a la respuesta ante escalón de un sistema de segundo orden. Debido a esto, en primer lugar supondremos que el sistema se descompone en dos bloques en serie:



de forma que la respuesta medida es la respuesta ante escalón unitario de un sistema G'(s). Para calcular este sistema se supondrá que es de segundo orden están-

dar, y se aplicarán las ecuaciones conocidas de las características de la respuesta ante escalón de este tipo de sistemas: ganancia estática, tiempo de pico, frecuencia de oscilación y sobreoscilación.

La ganancia estática de G'(s) es K=1.2, pues el escalón es unitario, y la salida se estabiliza en 1.2. La sobreoscilación es:

$$\delta = \frac{1.64 - 1.2}{1.2} = 0.367 = 36.7\%$$

De este valor obtenemos el amortiguamiento:

$$\delta = 0.367 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.305$$

El tiempo de pico es:

$$t_p = 3.3 = \frac{\pi}{\omega_p} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = 0.95\, rad/s$$

Si el sistema es de segundo orden estándar, ésta debe ser la frecuencia de oscilación. Midiendo el periodo se obtiene aproximadamente:

$$T \approx 6.5 \quad \Rightarrow \quad \omega_{osc} = \frac{2\pi}{T} = 0.966 \approx \omega_p$$

por lo que sí encaja con la respuesta de un sistema de 2º orden estándar.

Para calcular la función de transferencia basta calcular la frecuencia natural:

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{0.95}{\sqrt{1-0.305^2}} = 1$$

con lo que tenemos:

$$G'(s) = \frac{1.2}{s^2 + 0.61s + 1}$$

La función de transferencia total del sistema que buscamos serán los dos bloques en serie:

$$G(s) = \frac{s}{2}G'(s) = \frac{1.2s}{2(s^2 + 0.61s + 1)}$$

La ganancia estática de este sistema es nula ya que:

$$G(0) = 0$$

lo cual significa que ante una entrada escalón (constante) la salida del sistema tendería a cero con el tiempo.

PROBLEMA 93. Características de la respuesta

El sistema de 2° orden G(s) tiene ganancia 0.5, frecuencia natural 2 y coeficiente de amortiguamiento 0.3. Dibujar la respuesta ante escalón unitario, indicando las características fundamentales. Superponer a esa gráfica la respuesta de los sistemas siguientes, indicando la diferencia fundamental respecto a la respuesta de G:

a) Igual que G, pero con un coeficiente de amortiguamiento de ξ=0.5 (G_2).

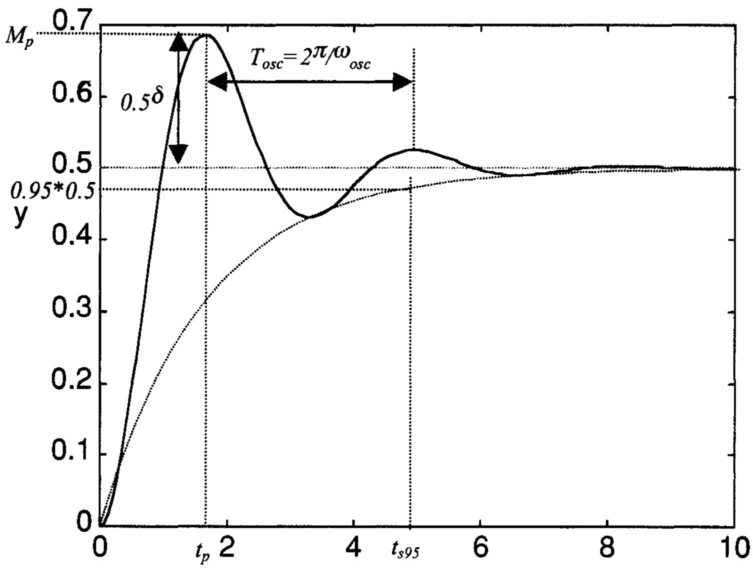
b) Con ξ=0.15, y ω_n=4 (G_3).

c) Igual que G, pero con un cero adicional en 2 (G_4).

d) Igual que G, pero con un polo adicional en -0.25 (G_5).

Solución

La respuesta ante escalón de G(s) es:



Los valores de las distintas especificaciones de la respuesta son:

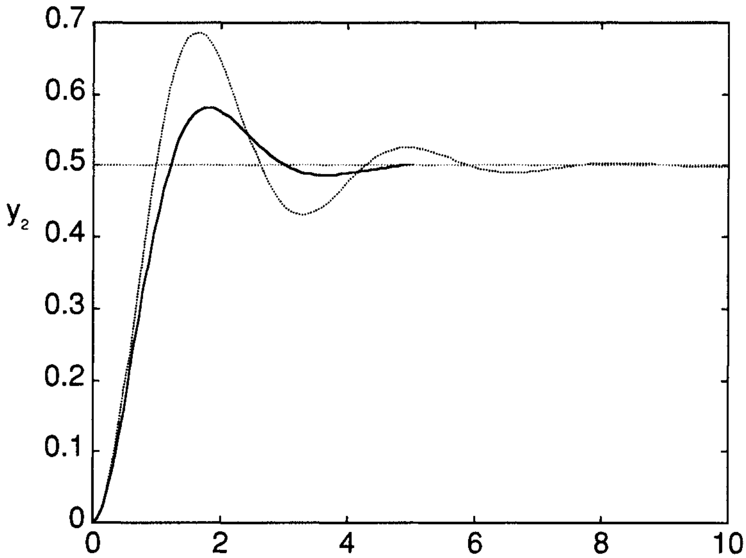
$$\delta = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.3723$$

$$M_p = 0.5(1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}) = 0.68616$$

$$t_p = \frac{T_{osc}}{2} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 1.6466$$

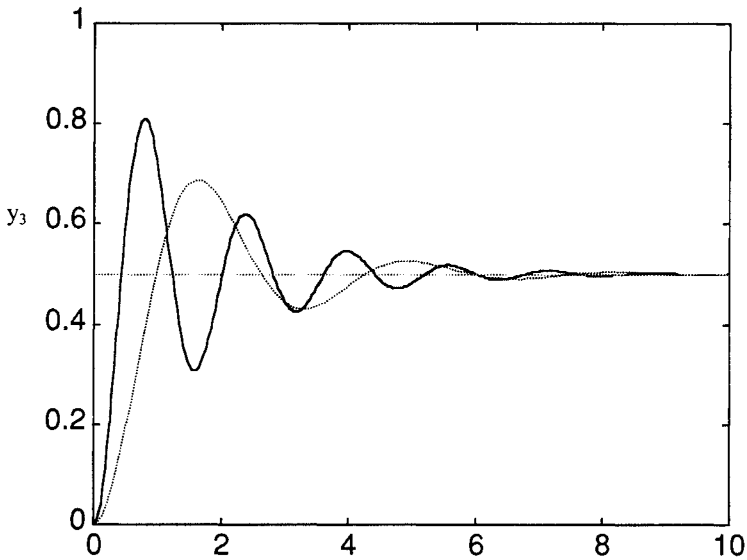
$$t_{s,95} = \frac{3}{\xi\omega_n} = 5$$

La respuesta de G_2 es:



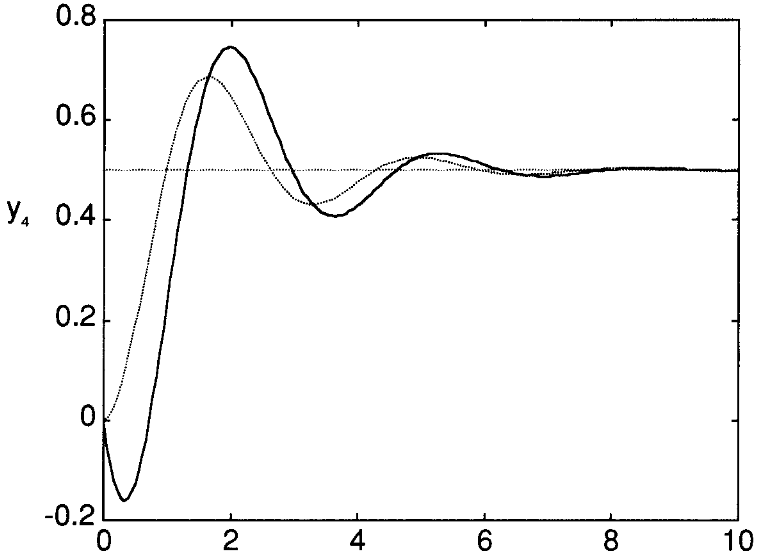
La diferencia fundamental es la menor sobreoscilación y el menor tiempo de establecimiento. El tiempo de pico y el periodo de oscilación son algo mayores.

La respuesta de G_3 es:



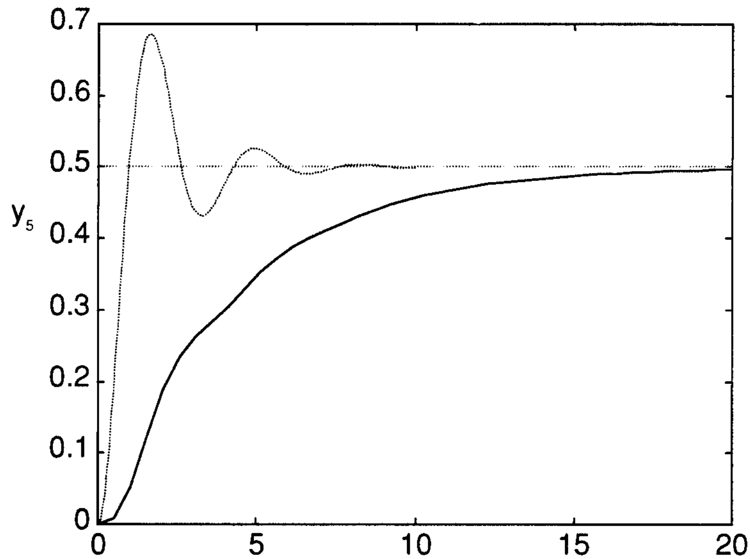
Es más rápida y más sobreoscilatoria, sin embargo el tiempo de establecimiento es el mismo (la exponencial que envuelve a las oscilaciones es la misma por tener los polos la misma parte real).

La respuesta de G_4 es:



Debido al cero positivo (τ<0) la respuesta tiene una oscilación inicial contraria. Además tiene una sobreoscilación algo mayor, y un tiempo de pico también mayor. El tiempo de establecimiento es similar.

La respuesta de G_5 es:



El polo adicional tiene una parte real de un valor más pequeño que los polos complejos (0.25 frente a 0.6), por lo que ese polo es ligeramente dominante. La respuesta se parece por tanto más a la de un sistema de primer orden (no hay sobreoscilación). En este caso la dominación no es muy clara, por lo que el efecto de los polos complejos en la respuesta no es despreciable.

PROBLEMA 94. Identificación de sistema

Para obtener el modelo de un sistema continuo se han hecho dos experimentos. En el primero se le ha dado una entrada escalón de valor 5 y se ha ido midiendo la salida en el display del sensor. El valor máximo que alcanzó la salida es de 8, mientras que el valor en el que se estabilizó es de 7. El segundo experimento ha consistido en una entrada senoidal de amplitud 2 y frecuencia 10 rad/s. El valor mínimo leído en el display del sensor ha sido de −1.5 y el valor máximo de 1.5. Calcular el modelo del sistema.

Solución

En primer lugar, suponemos que el sistema es de segundo orden estándar, ya que su respuesta ante un escalón es subamortiguada. La expresión general de la función de transferencia de un sistema de segundo orden estándar es la siguiente:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Del primer experimento podemos obtener los siguientes parámetros:

$$k = \frac{y_\infty}{u} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$\delta = \frac{y_{max} - y_\infty}{y\infty} = \frac{8-7}{7} = 0.143$$

$$\delta = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{(\ln\delta)^2}{\pi^2 + (\ln\delta)^2}} = 0.526$$

Únicamente falta determinar el valor de ω_n. Pero como en el primer experimento no se dan datos de los tiempos (de pico, de establecimiento), se emplearán los datos aportados por el segundo experimento para la determinación de dicho parámetro. Las medidas realizadas nos indican únicamente la amplitud de la salida para una frecuencia de 10 rad/s.

$$|G(j\omega)| = \frac{k\omega_n^2}{|\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n\omega j|} = \frac{k\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

$$|G(10j)| = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

$$\frac{1.4\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - 100)^2 + (2 \cdot 0.526 \cdot 10 \cdot \omega_n^2)^2}} = 0.75$$

$$2.484\omega_n^4 + 89.33\omega_n^2 - 10000 = 0 \Rightarrow \omega_n = 6.93 rad/s$$

Ya se dispone de los parámetros necesarios para completar la función de transferencia. De este modo el sistema objeto de identificación posee la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{67.235}{s^2 + 7.3s + 48}$$

PROBLEMA 95. Características de la respuesta

Un sistema de 2° orden G(s) tiene ganancia 0.5, frecuencia natural 1.5 y coeficiente de amortiguamiento 0.5. Dibujar la respuesta ante escalón unitario, indicando las características fundamentales. Superponer a esa gráfica la respuesta de los sistemas siguientes, indicando la diferencia fundamental respecto a la respuesta de G:

a) Igual que G, pero con un coeficiente de amortiguamiento de ξ=0 (G_2).

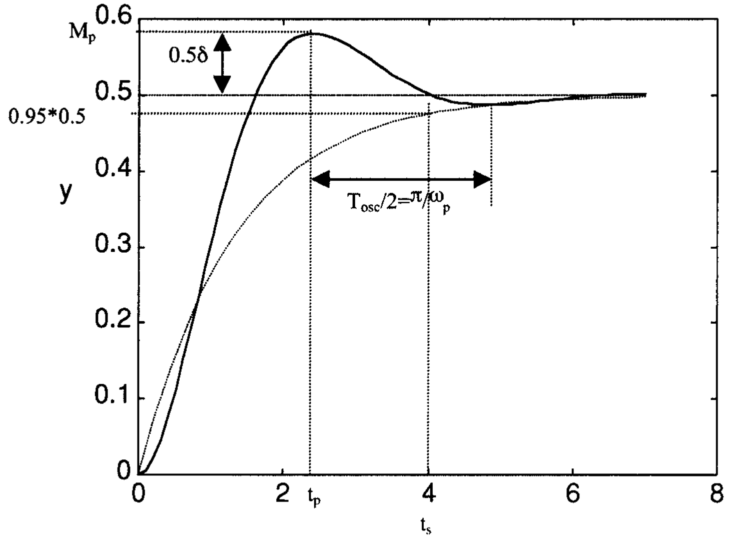
b) Con ξ=0.25, y ω_n=3 (G_3).

c) Igual que G, pero con un cero adicional en -3 (G_4).

d) Igual que G, pero con un polo adicional en -6 (G_5).

Solución

La respuesta ante escalón de G es:



donde los valores son:

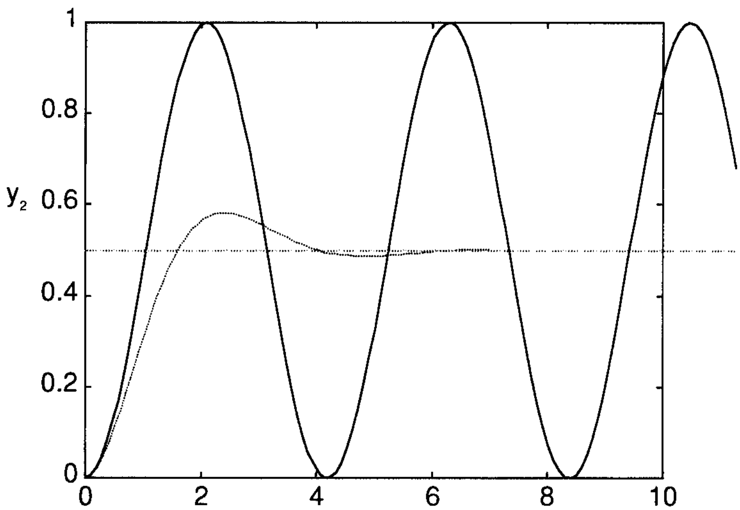
$$\delta = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.163$$

$$M_p = 0.5(1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}) = 0.5815$$

$$t_p = \frac{T_{osc}}{2} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 2.418$$

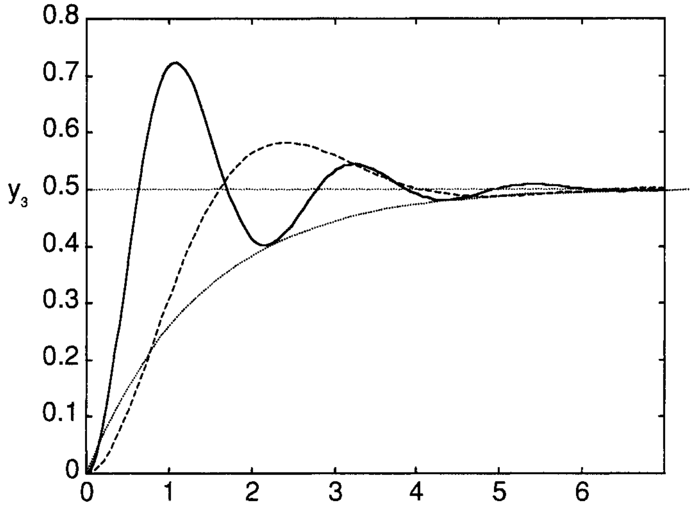
$$t_{s,95} = \frac{3}{\xi\omega_n} = 4$$

El sistema G_2 con ξ=0 tiene una respuesta:



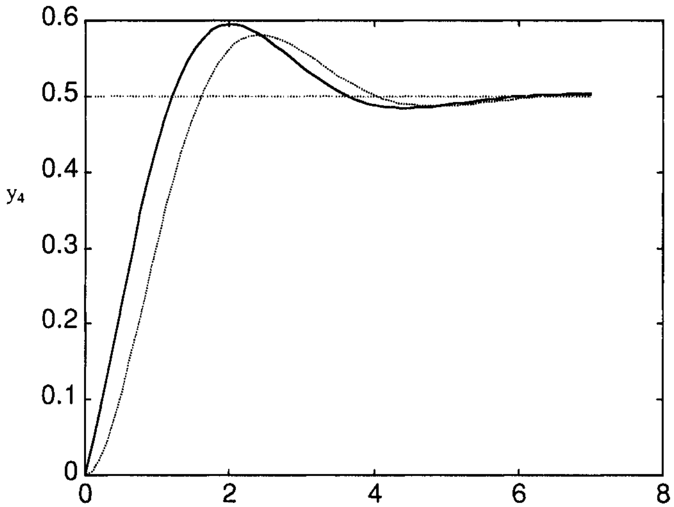
La característica fundamental de este sistema es que la sobreoscilación vale 1 (100%), y el tiempo de establecimiento infinito. El tiempo de pico es algo menor.

La respuesta del sistema G_3 es:



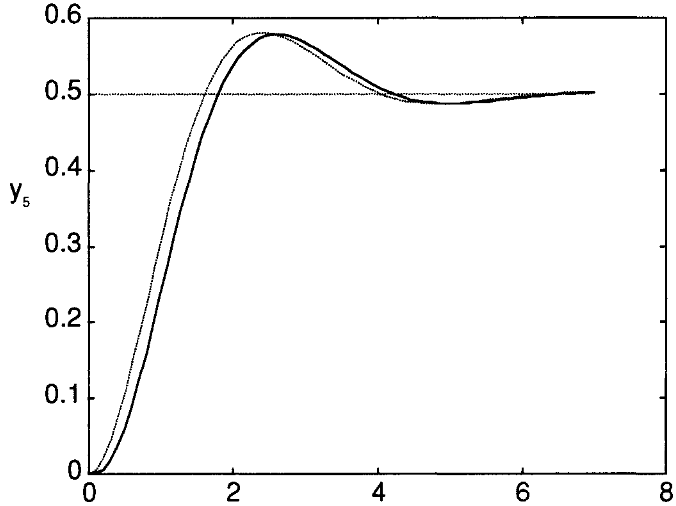
La exponencial que envuelve las oscilaciones es la misma, por lo que el tiempo de establecimiento es el mismo. Esto se debe a que la parte real de los polos es la misma. El tiempo de pico es menor, y la sobreoscilación mayor, debido al menor amortiguamiento. La frecuencia de oscilación también es mayor.

La respuesta del sistema G_4 es:



Al ser un cero negativo (τ>0) el sistema es más rápido (tiempo de pico menor) y tiene más sobreoscilación. El tiempo de establecimiento es similar, y la frecuencia de oscilación es la misma.

La respuesta de G_5 es:



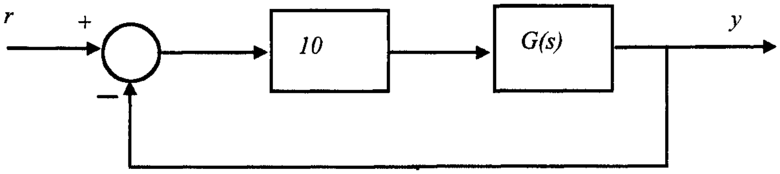
Al ser un polo estable y de parte real bastante mayor que la de los polos complejos, éstos dominan, por lo que la respuesta es parecida a la del sistema de 2º orden estándar. El efecto del polo adicional es hacer el sistema algo más lento (tiempo de pico mayor) y algo menos oscilatorio (sobreoscilación ligeramente menor). El tiempo de establecimiento es similar, y la frecuencia de oscilación es la misma.

PROBLEMA 96. Identificación de sistema

Un sistema continuo lineal se encuentra en bucle cerrado con la entrada definida por una realimentación de la salida de la forma $u=10(r-y)$. Estando en equilibrio en un punto de funcionamiento definido por $r_0=15$, $y_0=14$, $u_0=10$ se produce un cambio en la señal de referencia que pasa a valer $r=20$. Midiendo la salida se ha observado que el valor máximo que alcanza es $y_{max}=22$, en un tiempo de 2 segundos. Calcular la función de transferencia del sistema en bucle abierto haciendo las suposiciones que se consideren oportunas.

Solución

Como se tiene una realimentación de la salida estándar la función de transferencia en bucle cerrado es:



$$\frac{y(s)}{r(s)} = M(s) = \frac{10G(s)}{1+10G(s)}$$

Como el sistema es lineal, si con r_0=15 el sistema se estabiliza (está en equilibrio) en y_0=14, la ganancia estática es:

$$M(0) = \frac{14}{15}$$

Al ser el sistema lineal la función de transferencia es válida para incrementos, por lo que ante un incremento escalón en la referencia de valor 5 el valor final que alcanzará el incremento de la salida es:

$$\Delta y(\infty) = 5M(0) = \frac{14}{3}$$

De los datos medidos (valor máximo de la respuesta y tiempo en el que se da) se tienen la sobreoscilación y el tiempo de pico. Si se supone que el sistema en bucle cerrado M(s) es de segundo orden estándar se tiene que:

$$\delta = \frac{\Delta y_{max} - \Delta y(\infty)}{\Delta y(\infty)} = \frac{22-14-14/3}{14/3} = 0.7143 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.1065$$

$$t_p = 2 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1.5798 \quad rad/s$$

Con lo que el sistema en bucle cerrado es:

$$M(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2.3293}{s^2 + 0.3365s + 2.4957} = \frac{10G(s)}{1+10G(s)}$$

de donde se obtiene despejando:

$$G(s) = \frac{M(s)}{10(1-M(s))} = \frac{0.23293}{s^2 + 0.3365s + 0.1664}$$

PROBLEMA 97. Identificación de sistema

Un sistema mecánico se encuentra en equilibrio con una fuerza de entrada de 100 N, y una posición de 0.6 m. En un instante determinado se aumenta la fuerza, pasando a 150 N, y se registra la evolución de la posición con el tiempo. De este registro se han obtenido los siguientes datos:

- La posición máxima alcanzada fue de 1.2 m, alcanzándose en t=1.5 segundos.
- La posición alcanzó un mínimo local en el instante t=2.9 segundos.
- El sistema quedó en reposo en una posición de de 1 m.

Obtener de forma aproximada la función de transferencia del sistema. ¿Qué variables relaciona esta función de transferencia, y qué representa?

Solución

Si la fuerza se incrementa pasando de 100 a 150 N, se tiene una señal de entrada escalón de valor 50 N para la señal Δu. Por otra parte la salida del sistema (posición) pasa del valor de equilibrio de 0.6 m a un valor final de 1 m, pasando por un valor máximo de 1.2 m. Esto significa que la variación de la posición respecto del punto de funcionamiento ha alcanzado un valor final de $\Delta y(\infty) = 1 - 0.6 = 0.4m$, y un valor máximo de $\Delta y(t_p)=1.2-0.6=0.6$ m, donde el tiempo de pico ha sido $t_p=1.5$ segundos. Con estos datos, si se supone que el sistema se puede aproximar a uno de segundo orden estándar, se pueden calcular los parámetros del mismo:

$$K = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta u} = \frac{0.4}{50} = 0.008$$

$$\delta = \frac{0.6 - 0.4}{0.4} = 0.5 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.215$$

$$t_p = 1.5 = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 2.145 \quad rad/s$$

La función de transferencia estimada del sistema mecánico es:

$$G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{0.0368}{s^2 + 0.922s + 4.6}$$

El dato del tiempo que tardó en alcanzar el primer mínimo local sirve para comprobar la validez de la suposición de que el sistema es de segundo orden estándar. El tiempo transcurrido entre el primer máximo y el primer mínimo es el semiperiodo de oscilación, por lo que la frecuencia de oscilación es:

$$\frac{T}{2} = 2.9 - 1.5 = 1.4 = \frac{\pi}{\omega_{osc}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{osc} = 2.244 \approx \omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2.095$$

Se observa que hay una ligera discrepancia, ya que si el sistema fuera exactamente de segundo orden estándar la frecuencia de oscilación debería coincidir con la frecuencia propia. Este pequeño error puede deberse a la presencia de polos o *ceros adicionales que no son totalmente despreciables. Una forma de estudiar cuál puede ser el caso es tomar como frecuencia propia la frecuencia de oscilación (esto es válido aunque el sistema no sea estándar). Con esta frecuencia propia el tiempo de pico teórico sería:*

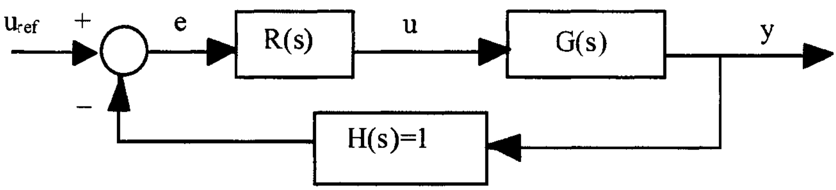
$$t_{p,teorico} = \frac{\pi}{2.244} = 1.4\ seg$$

Ahora bien, el tiempo de pico real (medido) ha sido mayor, lo que puede deberse a la presencia de un polo adicional o de un cero positivo. En este último caso la respuesta hubiera tenido un transitorio inicial contrario al escalón de entrada.

La función de transferencia obtenida relaciona la variación de la entrada (fuerza) respecto del punto de funcionamiento con la variación de la salida (posición) respecto del punto de funcionamiento. Esta función de transferencia representa una ecuación diferencial lineal que aproxima el comportamiento del sistema mecánico alrededor del punto de funcionamiento definido por u_0=100N, y_0=0.6 m.

PROBLEMA 98. Sistema en bucle cerrado

Dado el sistema de control realimentado:



donde $R(s)=k_p(1+0.22s)$ y donde $G(s)$ es un sistema de 2° orden estándar, ¿Se puede decir que la sobreoscilación del sistema en bucle cerrado es $\delta = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, donde ξ es el amortiguamiento de la función de transferencia $M(s) = \dfrac{Y(s)}{U_{ref}(s)}$?

Solución

No sería correcto, pues esa fórmula solo es válida para sistemas de 2º orden estándar, y la función de transferencia global en bucle cerrado M(s) no es de 2º orden estándar, ya que:

$$M(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{k_p(1+0.22s)\dfrac{b}{s^2+a_1s+a_2}}{1+k_p(1+0.22s)\dfrac{b}{s^2+a_1s+a_2}} =$$

$$= \frac{k_p(1+0.22s)b}{s^2+a_1s+a_2+k_p(1+0.22s)b} = \frac{k_p(1+0.22s)b}{s^2+(a_1 0.22bk_p)s+a_2+bk_p}$$

por lo que M(s) es un sistema de 2º orden con un cero adicional negativo (τ positiva) pudiendo afirmarse que la sobreoscilación real será mayor que la que predice la fórmula.

PROBLEMA 99. Características de la respuesta

Describe las diferencias y semejanzas entre las respuestas ante escalón de dos sistemas de 2° orden estándar con la misma ganancia y factor de amortiguamiento σ, pero diferente frecuencia natural y amortiguamiento, es decir:

$$k_1 = k_2$$
$$\sigma_1 = \xi_1\omega_{n,1} = \sigma_2 = \xi_2\omega_{n,2}$$
$$\xi_1 < \xi_2$$
$$\omega_{n,1} > \omega_{n,2}$$

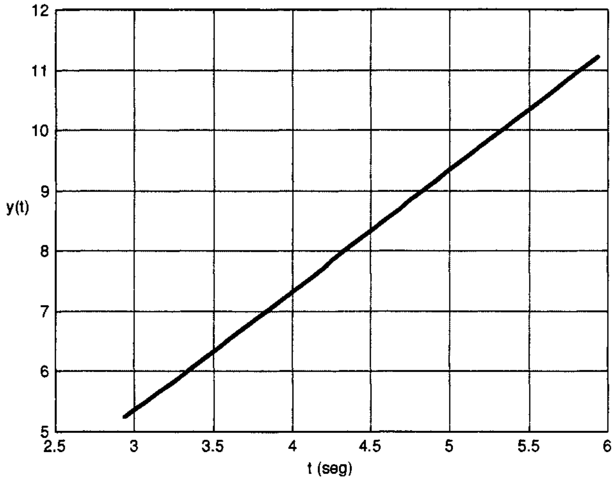
Solución

El sistema 1 tiene mayor sobreoscilación (ξ menor), menor tiempo de pico y mayor frecuencia de oscilación ($\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ *mayor).*

Los dos sistemas tienen el mismo tiempo de establecimiento, pues la envolvente exponencial de la respuesta es la misma (mismo valor de $\sigma = \xi\omega_n$*).*

PROBLEMA 100. Identificación de sistema

Un sistema de segundo orden estándar recibe como entrada una señal rampa unitaria partiendo de condiciones iniciales nulas. Se ha medido la salida a partir del instante 3 segundos, obteniéndose la gráfica de la figura. Obtener toda la información posible de la función de transferencia del sistema.



Solución

La función de transferencia de un sistema de segundo orden estándar es:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

La transformada de Laplace de la respuesta ante rampa será:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Si se hace la descomposición en fracciones simples (suponiendo en principio que el sistema es subamortiguado, es decir que tiene polos complejos) se obtiene:

$$\frac{k\omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{k(\sigma^2 + \omega_p^2)}{s^2((s+\sigma)^2 + \omega_p^2)} =$$

$$= \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + c\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_p^2} + d\frac{\omega_p}{(s+\sigma)^2 + \omega_p^2} =$$

$$= \frac{as((s+\sigma)^2 + \omega_p^2) + b((s+\sigma)^2 + \omega_p^2) + cs^2(s+\sigma) + ds^2\omega_p}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Igualando los numeradores se obtiene:

$$b(\sigma^2 + \omega_p^2) = k(\sigma^2 + \omega_p^2) \quad \Rightarrow \quad b = k$$

$$a(\sigma^2 + \omega_p{}^2) + 2b\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-2b\sigma}{\sigma^2 + \omega_p{}^2} = \frac{-2k\sigma}{\sigma^2 + \omega_p{}^2} = \frac{-2k\xi}{\omega_n}$$

$$a + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -a = \frac{2k\xi}{\omega_n}$$

$$2a\sigma + b + c\sigma + d\omega_p = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{-b - a\sigma}{\omega_p} = \frac{-k - \dfrac{2k\xi\sigma}{\omega_n}}{\omega_p} = -k\frac{1 + 2\xi^2}{\omega_p}$$

Es decir, la salida del sistema es:

$$y(t) = \frac{-2k\xi}{\omega_n} + kt + \frac{2k\xi}{\omega_n} e^{-\sigma t} \cos(\omega_p t) - k\frac{1 + 2\xi^2}{\omega_p} e^{-\sigma t} \operatorname{sen}(\omega_p t)$$

Como solo se dispone de la salida a partir del instante t=3 segundos aproximadamente, y el tramo de y(t) que se observa es una línea recta, se puede concluir que los términos exponenciales ya se han hecho prácticamente cero en ese instante, por lo que el trozo de y(t) que se tiene en la gráfica se puede aproximar a:

$$y(t) \cong \frac{-2k\xi}{\omega_n} + kt \qquad t > 3seg$$

Esta respuesta no depende de que el sistema sea sobreamortiguado o subamortiguado, porque los parámetros a y b de la descomposición en fracciones simples dan el mismo resultado.

De la gráfica se pueden tomar dos puntos, por ejemplo (t=4, y=7.3), y (t=5, y=9.3) por lo que se pueden plantear dos ecuaciones:

$$y(4) \cong \frac{-2k\xi}{\omega_n} + 4k = 7.3$$

$$y(5) \cong \frac{-2k\xi}{\omega_n} + 5k = 9.3$$

Restando las dos ecuaciones se obtiene:

$$5k - 4k = 9.3 - 7.3 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

De la ecuación de arriba se obtiene:

$$\frac{-2k\xi}{\omega_n} + 4k = 7.3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\xi}{\omega_n} = 0.175$$

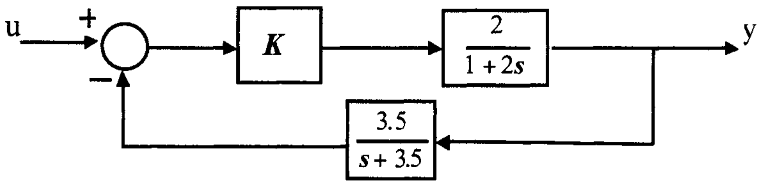
Es decir, no se puede obtener la función de transferencia, sino solo la ganancia estática y la relación entre ξ y ω_n. Ni siquiera se puede saber si el sistema es subamortiguado o sobreamortiguado.

De la respuesta se puede concluir también que el tiempo de establecimiento es menor de 3 segundos, pues los términos exponenciales ya han desaparecido.

Aunque intentáramos medir más puntos de la respuesta para tener más ecuaciones no conseguiríamos más información, pues la gráfica que se tiene es una línea recta que queda totalmente definida por dos puntos (si se toma otro punto se obtiene una ecuación que no es independiente de las dos anteriores, por lo que no se obtiene información adicional).

PROBLEMA 101. Sistema en bucle cerrado

Obtener el valor mínimo de la constante K para que en régimen permanente la diferencia entre la salida y y la entrada u sea menor del 10% de la entrada cuando ésta es un escalón.



Para ese valor de K, definir la característica de la respuesta del sistema ante escalón.

¿Existe algún valor de K para el que se cumpla la condición del 10% y el sistema no sea oscilatorio?.

Solución

La función de transferencia en bucle cerrado es:

$$M(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\dfrac{1}{s+0.5}}{1+K\dfrac{1}{(s+0.5)}\dfrac{3.5}{(s+3.5)}}=\frac{K(s+3.5)}{s^2+4s+1.75+3.5K}$$

Para que se cumpla la condición del enunciado, la ganancia estática del sistema en bucle cerrado (función de transferencia entre u e y) debe ser mayor o igual a 0.9:

$$M(0)=\frac{K(3.5)}{1.75+3.5K}\geq 0.9 \quad\Rightarrow\quad K\geq 4.5$$

Para K=4.5 el sistema en bucle cerrado es:

$$M(s)=\frac{4.5(s+3.5)}{s^2+4s+17.5}$$

es decir es un sistema de 2º orden con cero adicional. Las características son:

$$\omega_n = \sqrt{17.5} = 4.1833$$

$$\xi = \frac{4}{2\omega_n} = 0.4781$$

$$k = M(0) = 0.9$$

Es decir, el sistema es oscilatorio (tiene polos complejos conjugados). Si el cero no estuviera la sobreoscilación y el tiempo de pico serían:

$$\delta = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.1808 = 18.08\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.855$$

Debido a la presencia del cero negativo, que además tiene una parte real no mucho mayor que la de los polos complejos (3.5 frente a 2) la repuesta real tendrá una sobreoscilación bastante mayor, y un tiempo de pico menor a los calculados.

El tiempo de establecimiento al 95% será:

$$t_{s,95} = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{2} = 1.5\ seg$$

ya que el cero adicional prácticamente no afecta al tiempo de establecimiento.

Para que el sistema no sea oscilatorio los polos de M(s) deben ser reales, es decir:

$$4^2 - 4(1.75 + 3.5K) > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 0.6428$$

por lo que no existe ningún valor de K de forma que el sistema no sea oscilatorio y se cumpla la condición del error menor del 10%.

10 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS CONTINUOS

Esta sección contiene problemas relacionados con la respuesta en frecuencia de sistemas continuos lineales.

Fundamentalmente se trata de problemas en los que se maneja el diagrama de Bode de magnitud, utilizando los conceptos de aproximación asintótica del mismo.

En algunos problemas se pide dibujar el diagrama de magnitud de un sistema. En otros se pide definir algún parámetro de un sistema para que una característica de la respuesta en frecuencia (por ejemplo el ancho de banda) cumpla unos requisitos determinados. En otros problemas se tienen que obtener los polos del sistema aproximando la gráfica por líneas rectas de pendientes múltiplos de 20 db/dec.

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el capítulo 8 de [Sala00].

También puede encontrarse la teoría necesaria en los libros [Meade93] (capítulo 3), [Oppenheim98] (capítulo 6), [D'azzo92] (capítulo 9), [Ogata93] (capítulo 6), [Phillips96] (capítulo 8) y [Franklin91] (capítulo 5).

Índice

PROBLEMA 102. Filtro paso bajo

Obtener la función de transferencia del filtro necesario para filtrar la señal:

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}\,\text{sen}(6t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

de manera que el contenido en frecuencias de la salida quede amplificado (multiplicado) por 10 para frecuencias menores de 2 rad/s, y el ancho de banda de la señal de salida sea aproximadamente de 3 rad/s. Para el cálculo suponer que la aproximación asintótica (por rectas) de la respuesta en frecuencia del filtro es exacta (no así la de la señal de entrada).

Solución

En primer lugar se calculará el contenido en frecuencias de la señal de entrada:

$$U(j\omega) = U(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{6}{(j\omega+1)^2+6^2}$$

La primera información de la G(s) del filtro nos dice que debe amplificar por 10 para frecuencias menores de 2 rad/s. Eso significa que:

$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |U(j\omega)| = 10 \cdot |U(j\omega)|$ *para* $\omega<2$ *rad/s.*

es decir, $|G(j\omega)| = 10$ *para* $\omega<2$ *rad/s.*

o pasando a decibelios:

$|G(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}(10) = 20$ *db para* $\omega < 2$ *rad/s.*

De esta forma, ya tenemos que el diagrama de bode de G será una recta horizontal de 20 db hasta la frecuencia de 2 rad/s (por lo menos). Para completarlo habrá que ver cuantos polos (o ceros) hay que ponerle a esa frecuencia, para que se cumpla la segunda condición del problema. Ésta condición es que el ancho de banda de la ***señal de salida*** *sea de 3 rad/s. Aplicando la definición de ancho de banda:*

$$|Y(j\omega_a)|_{db} = |Y(j0)|_{db} - 3$$

ahora bien:

$$|Y(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}(|Y(j\omega)|) = 20\log_{10}(|G(j\omega)|) + 20\log_{10}(|U(j\omega)|) =$$
$$= |G(j\omega)|_{db} + |U(j\omega)|_{db}$$

por lo que tenemos:

$$|Y(j\omega_a)|_{db} = |Y(3j)|_{db} = |G(3j)|_{db} + |U(3j)|_{db} = |Y(j0)|_{db} - 3 =$$
$$= |G(j0)|_{db} + |U(j0)|_{db} - 3$$

de la ecuación anterior la única incógnita es $|G(3j)|_{db}$ *, ya que:*

$$|U(j0)|_{db} = \left| \frac{6}{(j0+1)^2+36} \right|_{db} = -15.8 \quad db$$

$$|U(3j)|_{db} = \left| \frac{6}{(j3+1)^2+36} \right|_{db} = -13.57 \quad db$$

y además: $|G(j0)|_{db} = 20$ *db (ya obtenido).*

Despejando entonces de la ecuación se obtiene:

$$|G(3j)|_{db} = 20 - 15.8 - 3 + 13.57 = 14.77$$

Como se ve, es menor que 20 db, por lo que habrá que añadir polos. El número de polos dependerá de la pendiente requerida para que de 2 rad/s a 3 rad/s el diagrama de bode baje 20-14.77=5.23 db.

El número de décadas que hay entre 2 y 3 rad/s es: $log_{10}(3/2)=0.176$*, por lo que la pendiente requerida es:* $pendiente = \frac{-5.23}{0.176} = -29.7\ db/dec$.

Como no es múltiplo de -20 db, no se puede conseguir lo que se pide colocando polos en 2 rad/s. En lugar de eso, se colocarán 2 polos (pendiente -40 db/dec) en la frecuencia adecuada (mayor de 2 rad/s), para que $|G(3j)|_{db} = 14.77$. *Para bajar 5.23 db con pendiente de -40 db/dec, el número de décadas es:*

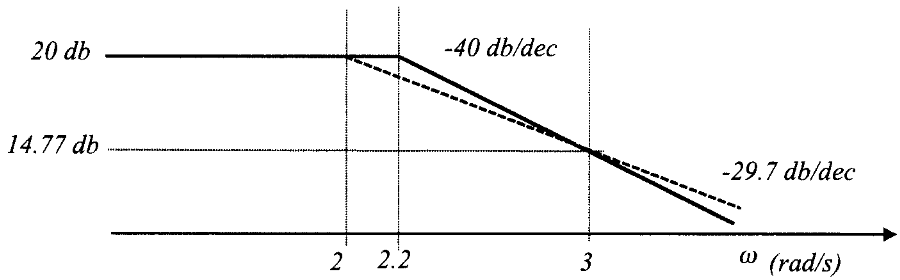
$$decadas = \frac{5.23}{40} = 0.13 = \log(3) - \log(polo) \Rightarrow polo = 2.22 \quad rad/s$$

luego habrá que poner 2 polos en -2.22, quedando la G(s) total como:

$$G(s) = \frac{10}{(1 + \frac{1}{2.22}s)^2} = \frac{10}{(1+0.45s)^2} = \frac{49.284}{(s+2.22)^2}$$

ya que la ganancia estática tiene que ser G(s=0)=10.

El diagrama de $|G(j\omega)|$ *queda:*

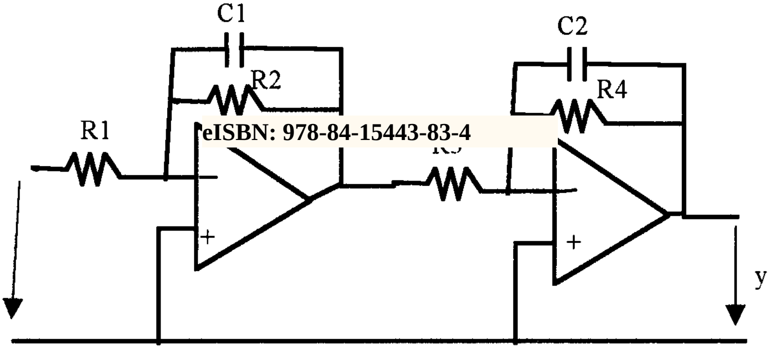


El filtro obtenido amplifica por 10 las frecuencias menores de 2.22 rad/s, y por tanto también las menores de 2 rad/s, por lo que cumple las condiciones del problema.

Esta solución no es única, pues se podría haber colocado por ejemplo 3 polos (-60 db/dec) en una frecuencia mayor, o haber introducido algún cero, etc.

PROBLEMA 103. Filtro paso bajo II

Se desea construir un filtro que elimine las altas frecuencias de una señal, de forma que las frecuencias menores de 1 kHz no se modifiquen, mientras a la frecuencia de 2 kHz, la atenuación debe ser de 12 dB. Este filtro se construye mediante amplificadores operacionales, según la figura. Obtener los valores de los componentes (la solución no es única), utilizando la aproximación asintótica de la respuesta en frecuencia. ¿Cuál es el ancho de banda del filtro? ¿Se cumple realmente la 1ª condición del filtro? Si no es así, ¿Cuál es la atenuación a 1 kHz?



eISBN: 978-84-15443-83-4

Solución:

En primer lugar se obtendrá la f.d.t. del circuito de operacionales. Llamando x a la salida del primer operacional tenemos:

$$\frac{u}{R_1} = -\frac{x}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + C_1 s}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R_2}{R_1(1 + R_2 C_1 s)} u$$

$$\frac{x}{R_3} = -\frac{y}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_4} + C_2 s}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{R_4}{R_3(1 + R_4 C_2 s)} x$$

Con lo que:

$$\frac{y}{u} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3(1+R_4C_2s)(1+R_2C_1s)}$$

*Se desea que a frecuencias menores de 1 kHz la ganancia sea 1 (0 db), por lo que se colocarán los polos en esa frecuencia (1kHz=1000Hz=2*π*1000rad/s=6283 rad/s).*

La pendiente que debe tener la respuesta en frecuencia se calcula sabiendo que a 2kHz la ganancia debe ser 12 db menor que a frecuencias bajas, es decir, de -12 db. El número de décadas entre 1kHz y 2 kHz es $log_{10}(2/1)=0.3$ décadas, por lo que la pendiente es: -12/0.3=-39.86 db/decada. Como la pendiente requerida es de aproximadamente -40 db serán necesarios 2 polos en la frecuencia de 6283 rad/s, es decir:

$$R_2C_1 = R_4C_2 = \frac{1}{6283}$$

La ganancia unidad a bajas frecuencias (señal no modificada para frecuencias menores de 1kHz) se consigue haciendo que la ganancia estática sea 1, es decir:

$$\frac{R_2R_4}{R_1R_3} = 1$$

Una de las infinitas posibilidades sería seleccionar:

$$C_1=C_2=1\mu F=10^{-6}F$$
$$R_1=R_2=R_3=R_4=159\Omega$$

El ancho de banda del filtro se calcula como la frecuencia a la cual la ganancia ha decrecido 3 db o se ha reducido por $1/\sqrt{2}$ respecto del valor a bajas frecuencias (1 en este caso). Con los datos anteriores, la G(s) queda:

$$G(s) = \frac{1}{(1+0.000159s)^2}$$

por lo que el ancho de banda es:

$$|G(j\omega_a)| = \left|\frac{1}{(1+0.000159j\omega_a)^2}\right| = \frac{1}{1+0.000159^2\omega_a^{\ 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\Rightarrow \omega_a = 4047.8 rad/s = 644 Hz$$

Como se ve no se cumple la primera condición del filtro, debido a que el cálculo de los polos se ha realizado utilizando la aproximación asintótica. La atenuación a 1kHz será:

$$|G(j6283)| = \left|\frac{1}{(1+0.000159j6283)^2}\right| = \frac{1}{1+0.000159^2 6283^2} = 0.5$$

o bien en decibelios:

$$|G(j6283)|_{db} = 20\log_{10}\left(\left|\frac{1}{(1+0.000159j6283)^2}\right|\right) = 20\log_{10}(0.5) = -6db$$

PROBLEMA 104. Decodificador analógico

Un decodificador de señal analógico consiste en un sistema continuo que modifica el contenido en frecuencias de la señal codificada para dar como salida la señal original. Con el objeto de copiar el decodificador se han hecho experimentos introduciéndole señales senoidales de distintas frecuencias y de amplitud 1, midiéndose la amplitud de la salida en régimen permanente:

ω=1000 rad/s $\Rightarrow$ amplitud=10
ω=2500 rad/s $\Rightarrow$ amplitud=9.97
ω=518000 rad/s $\Rightarrow$ amplitud=0.3633
ω=910000 rad/s $\Rightarrow$ amplitud=0.123
ω=$8.3\cdot10^7$ rad/s $\Rightarrow$ amplitud=0.004015
ω=$10\cdot10^7$ rad/s $\Rightarrow$ amplitud=0.00401

Obtener con estos datos la función de transferencia aproximada del decodificador, sabiendo que es de orden 2.

Solución

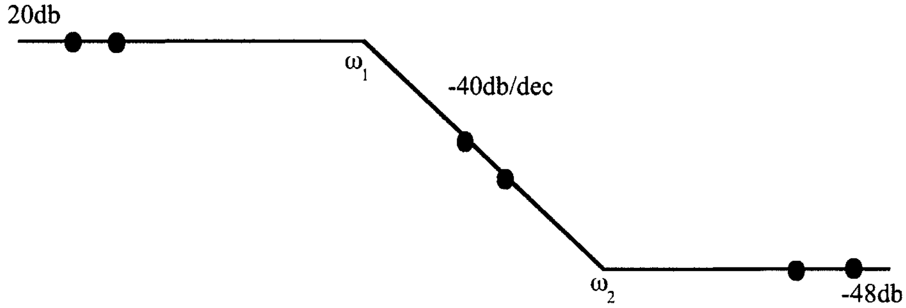
Los datos de frecuencias menores (1000 y 2500 rad/s) nos indican 2 cosas: por una parte el diagrama es prácticamente horizontal para frecuencias bajas, y por otra parte, ***la ganancia estática del sistema es 10*** *(la magnitud a frecuencias bajas).*

Los datos de frecuencias más altas ($8.3\cdot10^7$ y 10^8) indican que el diagrama es prácticamente horizontal para frecuencias altas. Esto nos indica que habrá el mismo número de polos que de ceros, ya que de lo contrario habría una pendiente múltiplo de ±20db/dec. Por lo tanto sabemos que el sistema tiene 2 polos y 2 ceros.

Lo único que queda por determinar es la situación de los 2 polos y los 2 ceros para que el diagrama de bode pase por los puntos que se han medido. Si se calcula la pendiente entre los dos puntos de frecuencias intermedias se tiene:

$$Pend = \frac{20\log(0.3633) - 20\log(0.123)}{\log(518000) - \log(910000)} = -38.44\ db/dec$$

Como la pendiente es próxima a -40db/dec es evidente que los 2 polos deben estar situados antes de la frecuencia de 518000, y los 2 ceros después de la frecuencia de 910000. Llegado este punto hay infinitas posibilidades. La más simple es suponer que *los 2 polos son iguales, introduciendo por tanto una pendiente de -40 db/dec a partir de su valor (ω_1), y que los 2 ceros también lo son, reduciendo la pendiente a 0 después de su valor (ω_2)*



El valor ω_1 se obtiene de plantear la pendiente entre ese punto y el de frecuencia 518000:

$$-40 = \frac{20\log(10) - 20\log(0.3633)}{\log(\omega_1) - \log(518000)} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 10^5\, rad/s$$

El valor de ω_2 se obtiene de plantear la pendiente entre el punto de ω_1 y el de ω_2:

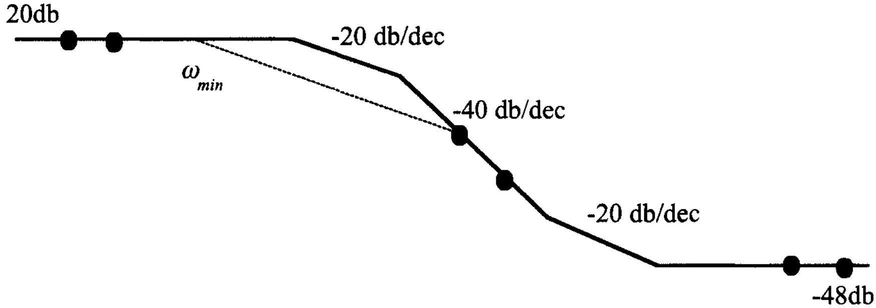
$$-40 = \frac{20\log(10) - 20\log(0.00401)}{\log(\omega_1) - \log(\omega_2)} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 5\cdot 10^6\, rad/s$$

Con esta solución la curva no pasa exactamente por el punto de frecuencia 910000, ya que la pendiente medida era -38.44 y no -40. Sin embargo hay que tener en cuenta que las rectas no son más que aproximaciones asintóticas que llevan implícito un error de partida relativamente grande.

La función de transferencia quedaría:

$$G(s) = 10\frac{\left(1+\dfrac{s}{5\cdot 10^6}\right)^2}{\left(1+\dfrac{s}{10^5}\right)^2} = \frac{0.004(s+5\cdot 10^6)^2}{(s+100000)^2}$$

Como se ha comentado la solución no es única. También sería válida cualquier solución que colocara los dos polos en lugares diferentes, siempre que estuvieran antes de la frecuencia de 518000 y que las pendientes fueran compatibles (lo mismo es válido para los ceros):



El valor más pequeño del polo se daría en el caso de que el otro polo estuviera exactamente en 518000 (línea a trazos). Este valor mínimo se puede obtener a partir de la pendiente de -20db/dec entre el polo y el punto 518000:

$$-20 = \frac{20\log(10) - 20\log(0.3633)}{\log(\omega_{min}) - \log(518000)} \quad \Rightarrow \quad \omega_{min} = 18819 rad/s$$

De todas formas es más probable la primera solución, ya que si las frecuencias 518000 o 910000 estuvieran cerca de algún polo o cero (puntos de ruptura), el diagrama real se alejaría bastante de la aproximación por rectas, y la pendiente medida en esa zona no hubiera sido tan próxima a -40 db/dec.

PROBLEMA 105. Diagrama de Bode y ancho de banda

Calcular el ancho de banda del sistema cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 4}$$

Dibujar el diagrama de Bode asintótico de la magnitud de la respuesta en frecuencia y calcular mediante esa aproximación el ancho de banda. Compararlo con el obtenido antes justificando el resultado obtenido.

¿Si la entrada al sistema es una señal senoidal de amplitud 2, cuál será la amplitud máxima de la salida en régimen permanente y a qué frecuencia se producirá?.

Solución

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{4 - \omega^2 + 4\omega j} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{(4-\omega^2)^2 + 4^2\omega^2}}$$

El ancho de banda es la frecuencia ω_a tal que

$$|G(j\omega_a)| = \frac{|G(j0)|}{\sqrt{2}}$$

por lo que es la solución de:

$$\sqrt{\frac{1+\omega_a^2}{(4-\omega_a^2)^2+4^2\omega_a^2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

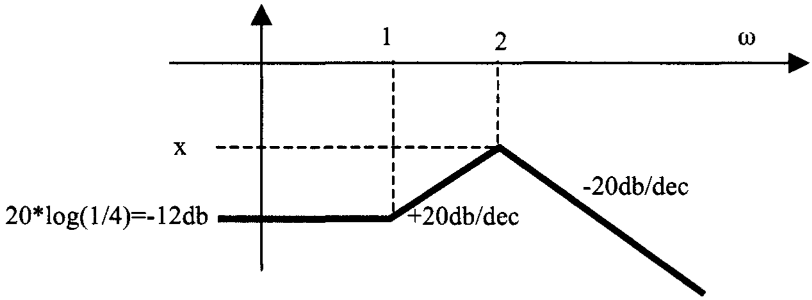
Elevando al cuadrado en ambos lados y reordenando se obtiene una ecuación de segundo grado para ω_a^2, cuya única solución positiva es:

$$\omega_a^2 = 24.65 \quad \Rightarrow \quad \omega_a = 4.96 \quad rad/s$$

El diagrama asintótico de la respuesta en frecuencia se obtiene sin más que factorizar la función de transferencia en términos con ganancia estática unitaria:

$$G(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+4}=\frac{1}{4}\frac{(1+s)}{\left(1+\frac{s}{2}\right)^2}$$

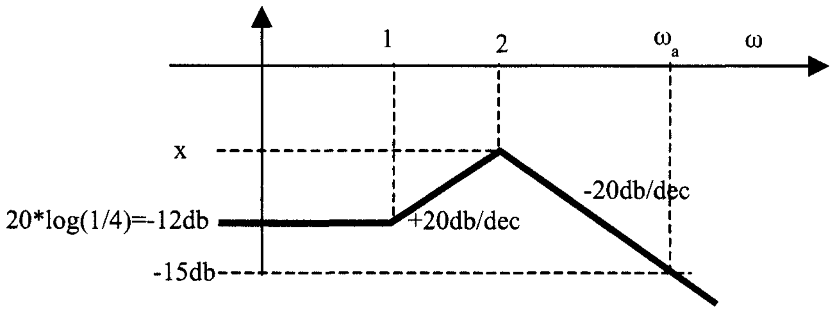
Se tiene por tanto un diagrama de bode aproximado:



La magnitud en el pico superior (x) se puede obtener mediante la pendiente de la recta:

$$20=\frac{x-(-12)}{\log\left(\frac{2}{1}\right)} \quad \Rightarrow \quad x = 10\log(2)-12 = -6db$$

Para medir el ancho de banda en el diagrama aproximado hay que buscar la frecuencia en la que la magnitud vale –12-3=-15 db:



Para calcular el valor del ancho de banda se aplica de nuevo la pendiente de la recta:

$$-20 = \frac{-15 - x}{\log\left(\frac{\omega_a}{2}\right)} = \frac{-15-(-6)}{\log\left(\frac{\omega_a}{2}\right)} \Rightarrow \omega_a = 2 \cdot 10^{\frac{-9}{-20}} = 5.64\ rad/s$$

Como se observa el ancho de banda medido con el diagrama asintótico es mayor que el real. Esto indica que la gráfica real está por debajo de la recta asintótica de pendiente –20 db/dec.

Si la entrada al sistema es una señal senoidal de amplitud 2, la amplitud máxima de la salida se producirá a la frecuencia de resonancia (donde $|G(j\omega)|$ es máximo). Para calcular esta frecuencia basta con derivar e igualar a cero. Se derivará $|G(j\omega)|^2$, puesto que el máximo se da a la misma frecuencia:

$$\frac{d|G(j\omega)|^2}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1+\omega^2}{(4-\omega^2)^2 + 4^2\omega^2}\right) =$$

$$= \frac{2\omega((4-\omega^2)^2 + 4^2\omega^2) - (1+\omega^2)\left(32\omega - 4(4-\omega^2)\omega\right)}{\left((4-\omega^2)^2 + 4^2\omega^2\right)^2} = 0$$

de donde se obtiene una ecuación de segundo grado para ω^2, cuya única solución positiva es:

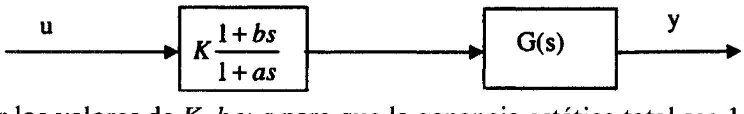
$$\omega^2 = 2 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{2}\ rad/s$$

La amplitud de la salida será 2 veces la magnitud máxima de la respuesta en frecuencia, es decir:

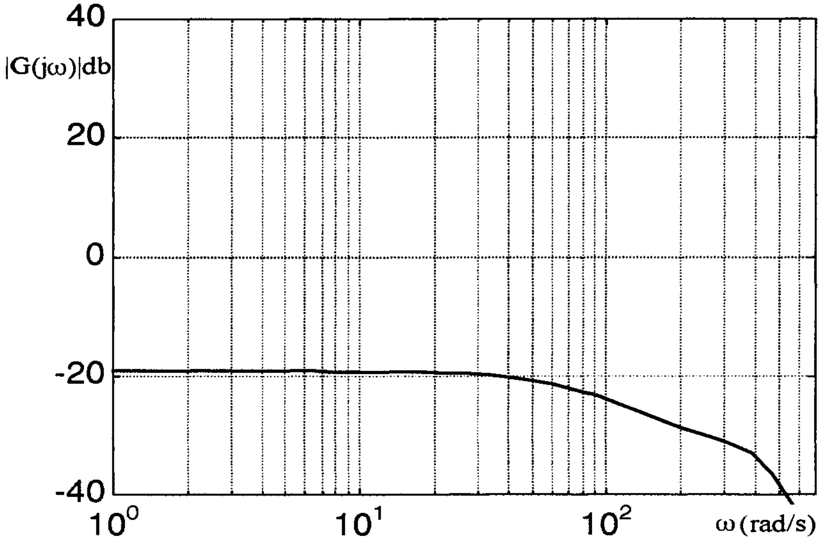
$$Amp = 2\left|G(j\sqrt{2})\right| = 2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}^2}{(4-\sqrt{2}^2)^2 + 16\sqrt{2}^2}} = 2\sqrt{\frac{3}{36}} = 0.577$$

PROBLEMA 106. Compensador en cascada

Se desea modificar la respuesta en frecuencia de un sistema G(s) de forma que la ganancia estática sea unitaria, y que el ancho de banda sea de 300 rad/seg. Para ello se va a poner en serie con el sistema un compensador según la figura:



Definir los valores de K, b y a para que la ganancia estática total sea 1 y el ancho de banda del sistema total sea de 300 rad/seg, sabiendo que la respuesta en frecuencia de G(s) es:



Solución

La función de transferencia total es el producto, por estar los bloques en serie:

$$G'(s) = K\frac{1+bs}{1+as}G(s)$$

En primer lugar la ganancia estática del sistema total es 1, por lo que se cumple:

$$G'(0) = KG(0) = 1$$

Para obtener K basta con medir el valor de G(0) en la gráfica. Midiendo en la parte de bajas frecuencias se obtiene:

$$|G(0)|_{db} \approx -19.5 = 20\log(|G(0)|) \quad \Rightarrow |G(0)| = 10^{\frac{-19.5}{20}} = 0.106$$

por lo que:

$$K = \frac{1}{G(0)} = \frac{1}{0.106} = 9.43$$

Por otra parte se desea que el ancho de banda sea de 300 rad/s, lo que implica que:

$$|G'(300j)|_{db} = |G'(0)|_{db} - 3 = -3$$

Ahora bien, la magnitud total en decibelios se descompone en la suma de cada término, por lo que:

$$|G'(300j)|_{db} = 10\log(K) + \left|\frac{1+b300j}{1+a300j}\right|_{db} + |G(300j)|_{db} = -3$$

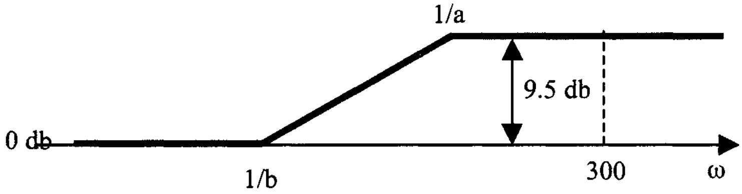
La magnitud de G a 300 rad/s se mide de la gráfica, obteniéndose aproximadamente:

$$|G(300j)| = -33db$$

Despejando se obtiene:

$$\left|\frac{1+b300j}{1+a300j}\right|_{db} = -3+32-19.5 = 9.5db$$

Ahora basta seleccionar los valores a y b para que la respuesta en frecuencia del término formado por el cero y el polo tenga una magnitud de 9.5 db a la frecuencia de 300 rad/s. Para ello es necesario que el cero (1/b) sea más pequeño que el polo (1/a), es decir, que se tenga una respuesta de la forma:



Sabiendo que la pendiente es de +20 db/dec, se cumple que:

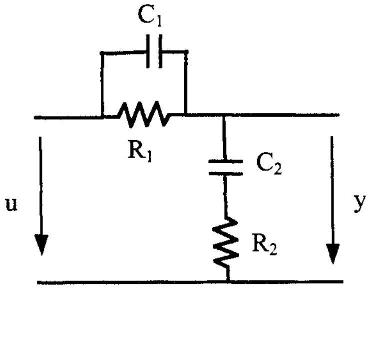
$$20 = \frac{9.5}{\log(1/a) - \log(1/b)} = \frac{9.5}{\log(b/a)} \quad \Rightarrow \quad b = 10^{\frac{9.5}{20}} a = 2.985a$$

Para que la magnitud en 300 rad/s sea efectivamente de 9.5 es necesario que el polo 1/a sea mucho más pequeño que 300 (de esta forma la gráfica real estará muy próxima a la recta asintótica horizontal. Hay infinitas soluciones. Tomamos por ejemplo 1/a=10, con lo que quedaría:

$$a = 0.1$$
$$b = 0.2985$$

PROBLEMA 107. Filtro para banda

El siguiente circuito se utiliza para filtrar una señal *u* dando lugar a la señal y



Se desea que el contenido de la señal *u* entre las frecuencias de 100Hz y 1kHz quede reducido a la cuarta parte (todo ese rango de frecuencias por igual).

Calcular los valores de R_1, R_2, C_1 y C_2 utilizando la aproximación asintótica, sabiendo que las frecuencias mucho menores de 100Hz y mucho mayores de 1kHz deben quedar inalteradas.

¿Cuál es el rango de frecuencias que queda prácticamente inalterada?

Solución

La función de transferencia del sistema se obtiene aplicando las leyes de Kirchoff y el concepto de impedancia compleja:

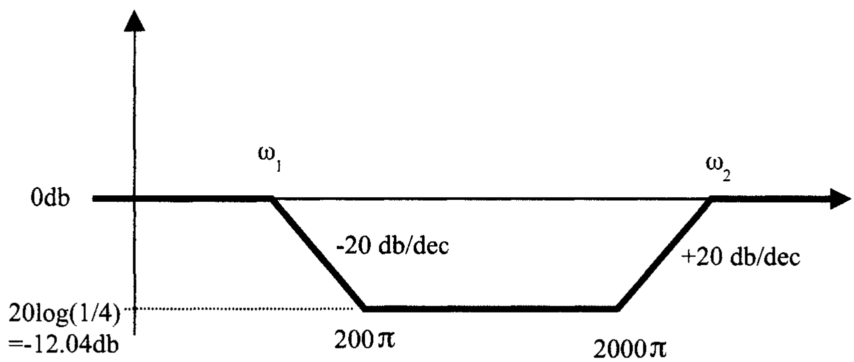
$$u(s) = \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1} + C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} + R_2 \right) i(s) =$$

$$= \left(\frac{R_1 C_2 s + 1 + R_1 C_1 s + (1 + R_1 C_1 s) R_2 C_2 s}{(1 + R_1 C_1 s) C_2 s} \right) i(s)$$

$$y(s) = \left(\frac{1}{C_2 s} + R_2 \right) i(s) = \frac{\frac{1 + R_2 C_2 s}{C_2 s}}{\frac{1 + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2) s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}{(1 + R_1 C_1 s) C_2 s}} u(s) =$$

$$= \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{1 + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2) s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} u(s)$$

El sistema tiene, por tanto dos ceros y dos polos. Según el enunciado del problema, y teniendo en cuenta que se tienen dos ceros y dos polos la magnitud de la respuesta en frecuencia será de la forma:



donde se observa que habrá un polo en ω_1, un cero en 200π, otro cero en 2000π, y otro polo en ω_2. La constante que multiplica a los polos y ceros vale 1, pues para frecuencias bajas se tienen 0 db. Para calcular los polos se aplica la ecuación de la pendiente:

$$-20 = \frac{-12.04 - 0}{\log(200\pi) - \log(\omega_1)} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 157.1 \quad rad/s$$

$$20 = \frac{0 - (-12.04)}{\log(\omega_2) - \log(2000\pi)} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 25129.27 \quad rad/s$$

La función de transferencia será por tanto:

$$G(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{200\pi}\right)\left(+\frac{s}{2000\pi}\right)}{\left(1 + \frac{s}{157.1}\right)\left(1 + \frac{s}{25129.27}\right)}$$

Para obtener los valores de las resistencias y condensadores basta igualar término a término

$$G(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{200\pi}\right)\left(1 + \frac{s}{2000\pi}\right)}{\left(1 + \frac{s}{157.1}\right)\left(1 + \frac{s}{25129.27}\right)} =$$

$$= \frac{(1 + R_1C_1s)(1 + R_2C_2s)}{1 + (R_1C_2 + R_1C_1 + R_2C_2)s + R_1C_1R_2C_2s^2}$$

Del numerador se obtiene:

$$R_1C_1 + R_2C_2 = \frac{1}{200\pi} + \frac{1}{2000\pi} = 0.0017507$$

$$R_1C_1R_2C_2 = \frac{1}{200\pi} \cdot \frac{1}{2000\pi} = 2.533 \cdot 10^{-7}$$

Del denominador se obtiene:

$$R_1C_2 + R_1C_1 + R_2C_2 = \frac{1}{157.1} + \frac{1}{25129.27} = 0.006405$$

$$R_1C_1R_2C_2 = \frac{1}{151.7} \cdot \frac{1}{25129.27} = 2.533 \cdot 10^{-7}$$

Se observa por tanto que solo hay tres ecuaciones independientes, mientras que se tiene 4 incógnitas. Esto indica que hay infinitas soluciones. De las dos primeras ecuaciones se pueden despejar los productos R_1C_1 y R_2C_2:

$$R_1C_1 = \frac{1}{200\pi}$$

$$R_2C_2 = \frac{1}{2000\pi}$$

de la tercera ecuación se obtiene el producto R_1C_2:

$$R_1C_2 = -(R_1C_1 + R_2C_2) + 0.006405 = 0.0046543$$

definiendo por ejemplo $R_1=1000\Omega=1k$ se despejaría C_1, C_2 y R_2, quedando:

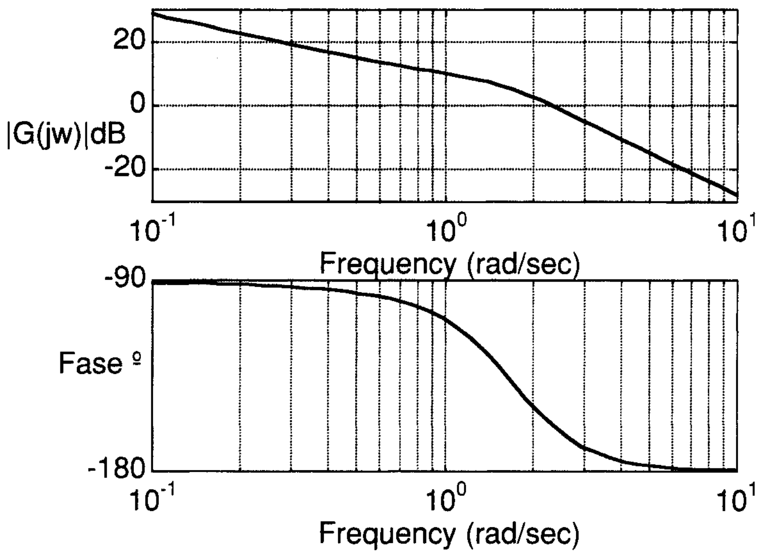
$$C_1 = 1.5915\mu F$$

$$C_2 = 4.6543\mu F$$

$$R_2 = 34.19\Omega$$

PROBLEMA 108. Medición en diagrama de Bode

El diagrama siguiente muestra la respuesta en frecuencia (magnitud y fase) de un sistema G(s).



a) Determinar de forma totalmente exacta un polo del sistema.
b) Justificar de qué orden puede ser el sistema y por qué.
c) Obtener la ganancia estática del sistema en bucle cerrado:

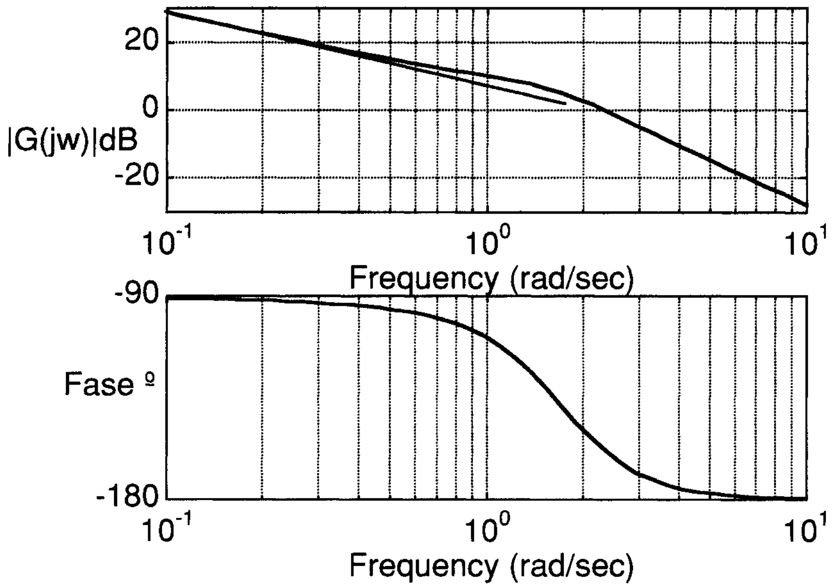
$$M(s) = G(s)/(1 + G(s))$$

d) Calcular de forma aproximada el ancho de banda del sistema en bucle cerrado: $M(s) = G(s) / (1 + G(s))$. Para ello tener en cuenta el valor aproximado de la fase.

Solución

a) *se observa que para bajas frecuencias la pendiente de la magnitud es de –20 db/dec, lo que indica que hay un polo en s=0. Si no lo hubiera, para bajas frecuencias la pendiente sería cero (o +20 si hubiera un cero en s=0).*

b) *La pendiente para altas frecuencias es de –40 db/dec. Esto indica que hay 2 polos más que ceros. En principio esto significa que podría haber 2 polos y ningún cero, ó 3 polos y 1 cero, ó 4 polos y 2 ceros. La primera posibilidad no es viable, ya que si se traza una recta tangente a la magnitud para bajas frecuencias se observa que la gráfica sube por encima de la recta, lo que indica la presencia de al menos 1 cero:*



Se puede concluir que el sistema puede ser de orden 3 con 1 cero ó de orden mayor con 2 polos más que ceros.

c) *La ganancia estática en bucle cerrado será:*

$$M(0) = \frac{G(0)}{1 + G(0)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{G(0)}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\infty}} = 1$$

ya que G(0)=infinito, por tener un polo en s=0.

d) *El ancho de banda en bucle cerrado será aquella frecuencia ω_a tal que:*

$$|M(j\omega_a)| = \left|\frac{G(j\omega_a)}{1+G(j\omega_a)}\right| = \frac{|G(j\omega_a)|}{|1+G(j\omega_a)|} = \frac{M(0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como solo se tiene la magnitud de G, es necesario despejar de alguna forma de la ecuación anterior un valor para $|G(j\omega_a)|$. Para poder abordar esta idea hay que hacer una suposición sobre el argumento de $G(j\omega_a)$, ya que $|1+G(j\omega_a)|$ depende de qué argumento tiene $G(j\omega_a)$. La suposición que parece más razonable es que ω_a es grande (en esa frecuencia la magnitud debe ser pequeña, por lo que el argumento de $G(j\omega_a)$ puede estar cercano a –180°(tal y como se observa en la gráfica). En ese caso se tendría:

$$G(j\omega_a) \approx -|G(j\omega_a)| \quad \Rightarrow \quad |1+G(j\omega_a)| \approx 1-|G(j\omega_a)|$$

por lo que se podría despejar:

$$\frac{|G(j\omega_a)|}{|1+G(j\omega_a)|} \approx \frac{|G(j\omega_a)|}{1-|G(j\omega_a)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega_a)| = 0.4142 = -7.655dB$$

De la gráfica se obtiene aproximadamente ω_a=3.7 rad/s. Observando el diagrama de la fase se comprueba que la suposición era correcta, pues el argumento de G a esa frecuencia es cercano a –180°.

PROBLEMA 109. Dibujo de diagrama de Bode

Obtener utilizando la aproximación asintótica los valores de a y k para que el sistema de función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k(s+a)(s+1)}{(s^2+s+4)(s+4)}$$

tenga un ancho de banda de 8 rad/s y una magnitud a bajas frecuencias de 10 dB.

Solución

En primer lugar se obtendrá la aproximación asintótica del diagrama de magnitud. Para ello se factoriza en primer lugar la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k(s+a)(s+1)}{(s^2+s+4)(s+4)} = \frac{k\cdot a}{16}\frac{\left(1+\frac{s}{a}\right)(1+s)}{\left(1+\frac{s}{4}\right)\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)}$$

Se tiene por tanto 5 términos:

Valor constante: $20\log(\frac{ka}{16}) = 10db$, *ya que la magnitud a bajas frecuencias debe valer 10 db (por enunciado).*

Cero en s=-1.

Cero en s=-a.

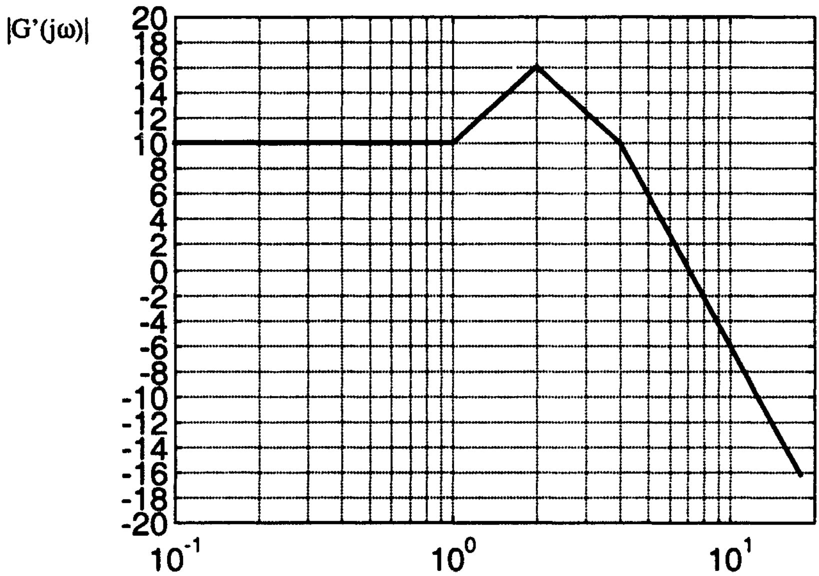
Polo simple en s=-4.

Polo doble (par de polos complejos) en /polo/=2 (el módulo de los polos es 2).

Para dibujar el diagrama se conocen todos los términos excepto el cero en –a. Debido a esto se dibujará únicamente la función de transferencia:

$$G'(s) = \frac{k \cdot a}{16} \frac{(1+s)}{\left(1+\frac{s}{4}\right)\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)}$$

en la que sí se conocen todos los términos:



Para que el ancho de banda de G(s) sea 8 rad/s se debe cumplir que:

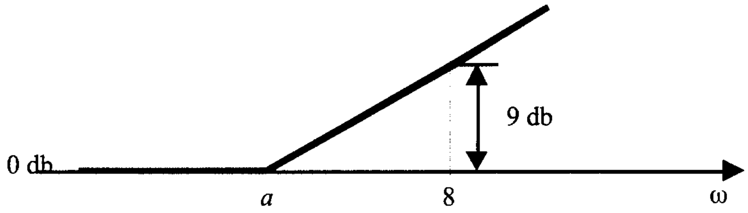
$$|G(j8)|_{db} = |G(j0)|_{db} - 3 = 10 - 3 = 7db$$

Ahora bien:

$$|G(j8)|_{db} = |G'(j8)|_{db} + \left|1+\frac{j8}{a}\right|_{db} = -2 + \left|1+\frac{j8}{a}\right|_{db} = 7$$

$$\Rightarrow \quad \left|1+\frac{j8}{a}\right|_{db} = 9$$

donde se ha medido el valor de |G'(j8)| en la gráfica obtenida anteriormente. Se concluye que el término del cero en –a debe contribuir con una magnitud de 9 db a la frecuencia de 8 rad/s. La gráfica de magnitud del cero en –a es:



Sabiendo que la pendiente es de +20 db/dec, se cumple que:

$$20 = \frac{9}{\log(8) - \log(a)} = \frac{9}{\log(8/a)} \quad \Rightarrow \quad a = 8 \cdot 10^{-\frac{9}{20}} = 2.838 \quad rad/s$$

Para concluir el problema basta con calcular el valor de k:

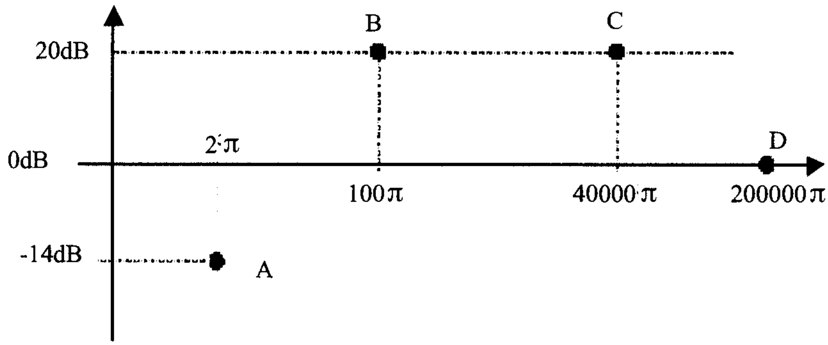
$$20\log\left(\frac{ka}{16}\right) = 10db \quad \Rightarrow \quad k = 17.83$$

PROBLEMA 110. Filtro pasa banda

- Obtener la función de transferencia de un filtro pasa banda que cumpla:
- Entre 50Hz y 20 kHz, magnitud constante e igual a 20 dB.
- Pendiente constante para frecuencias bajas, de forma que para 1 Hz se tengan –14 dB.
- Pendiente constante para frecuencias altas, de forma que para 100 kHz se tengan 0 dB.
- El orden de la función de transferencia sea mínimo.

Solución

Se pide que entre 100π y 40000π rad/s la magnitud sea constante e igual a 20dB. Por otra parte se tiene que a 2π rad/s la magnitud debe valer –14 dB, y a 200000π rad/s la magnitud debe valer 0 dB. Todos estos datos se resumen en la gráfica siguiente:



Como se trata de un filtro paso bajo se necesita al menos un cero en s=0, para que a frecuencias bajas se tenga una pendiente positiva.

La pendiente entre los puntos A y B es:

$$pend_{A,B} = \frac{20-(-14)}{\log(100\pi)-\log(2\pi))} = 20.01 \quad db/dec$$

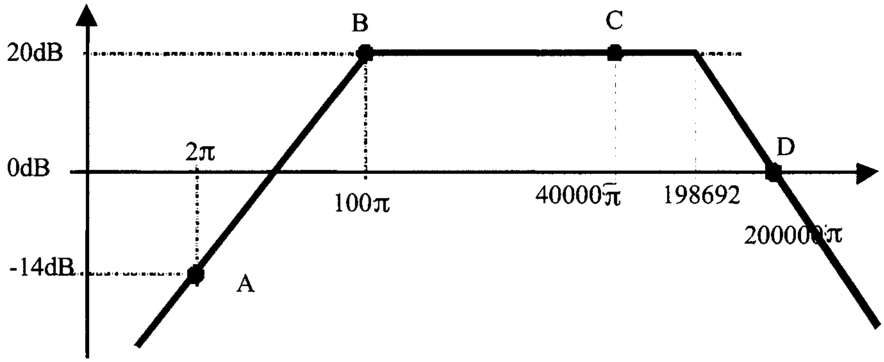
es decir, es exactamente 20 db/dec por lo que podemos poner un solo cero en s=0 y un polo en 100π. En la parte de frecuencia alta, la pendiente entre los puntos C y D es:

$$pend_{C,D} = \frac{0-(20)}{\log(200000\pi)-\log(40000\pi))} = -28.61 \quad db/dec$$

Como esta pendiente no es múltiplo exacto de –20 db/dec, no podemos situar simplemente un polo en 40000π. Será necesario poner al menos 2 polos, ya que con un solo polo, si pasa por D no se cumpliría la condición de que la magnitud sea constante entre 50Hz y 20KHz. Las soluciones son infinitas. La posibilidad más simple será situar 2 polos iguales en una frecuencia mayor que 20KHz, de forma que con la pendiente de –40db/dec la gráfica pase por el punto D. La condición será por tanto:

$$-40 = \frac{0-(20)}{\log(200000\pi)-\log(p)} \quad \Rightarrow \quad p = 198692 \quad rad/s$$

De esta forma se tendría un diagrama de magnitud de la forma:



que cumple todos los requisitos pedidos. La función de transferencia del filtro será pues:

$$G(s) = K\frac{s}{\left(1+\dfrac{s}{100\pi}\right)\left(1+\dfrac{s}{198.692}\right)^2}$$

Para terminar el cálculo falta obtener la constante K. Para ello se puede considerar por ejemplo la frecuencia 100π en la que los únicos términos de la magnitud que son distintos de cero son el cero en el origen y la constante K:

$$|G(j100\pi)|_{db} = 20\log(K) + 20\log(100\pi) = 20 \quad \Rightarrow \quad K = 0.0318$$

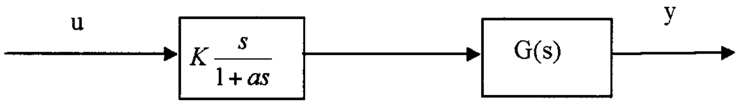
Lo mismo se podría haber hecho con la frecuencia 2π, obteniéndose el mismo resultado:

$$|G(j2\pi)|_{db} = 20\log(K) + 20\log(2\pi) = -14 \quad \Rightarrow \quad K = 0.0318$$

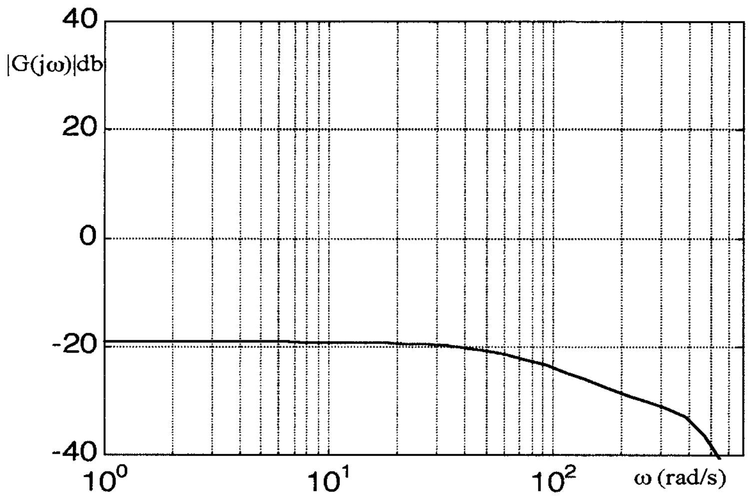
La solución propuesta no es única, ya que por ejemplo se podría haber situado un polo en el punto C, y otro polo intermedio entre C y D.

PROBLEMA 111. Compensador en serie

Se desea modificar la respuesta en frecuencia de un sistema G(s) para convertirlo en un filtro pasa banda, de forma que la ganancia estática sea nula, que la magnitud sea unitaria en la banda de paso, y la frecuencia de corte inferior sea de 2 rad/seg. Para ello se va a poner en serie con el sistema un compensador según la figura:



Definir los valores de K y a para cumplir lo anterior, y obtener la frecuencia de corte superior del filtro total resultante, sabiendo que la respuesta en frecuencia de G(s) es:



Solución

La magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema completo es:

$$|M(j\omega)|_{db} = \left|\frac{kj\omega}{1+aj\omega}\right|_{db} + |G(j\omega)|_{db}$$

Esta respuesta en frecuencia consta de la suma de dos términos. La magnitud de G es el término paso bajo, mientras que el término que se añade es el término paso alto (la magnitud tiende a cero cuando la frecuencia tiende a cero).

Para que la frecuencia de corte inferior sea de 2 rad/s, sabiendo que la magnitud en la banda de paso es de 0db (magnitud unitaria), se debe cumplir:

$$|M(2j)|_{db} = \left|\frac{2kj}{1+2aj}\right|_{db} + |G(j2)|_{db} =$$

$$= 20\log(k) + 20\log(2) - 20\log(\sqrt{1+4a^2}) - 19 = -3$$

Por otra parte se tiene que en la banda de paso la magnitud es unitaria. La banda de paso son aquellas frecuencias en las que tanto la magnitud de G como la magnitud del término paso alto son prácticamente constantes. Para el término paso alto esto quiere decir que $a\omega >>> 1$ en esta banda de paso. La magnitud en la banda de paso será por tanto:

$$|M(j\omega)|_{db} = \left|\frac{kj\omega}{1+aj\omega}\right|_{db} + |G(j\omega)|_{db} \approx 20\log(\frac{k}{a}) - 19 = 0$$

Despejando de las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$a = 0.5$$

$$k = 4.456$$

La frecuencia de corte superior dependerá únicamente de G, ya que el término paso alto tiene una magnitud constante a esas frecuencias. Debido a esto, la frecuencia de corte superior es aquella en la que la magnitud de G ha bajado 3 db respecto de su valor en la banda de paso:

$$|G(j\omega_{cs})|_{db} = -19 - 3 = -22db \quad \Rightarrow \quad \omega_{cs} = 70 rad/s$$

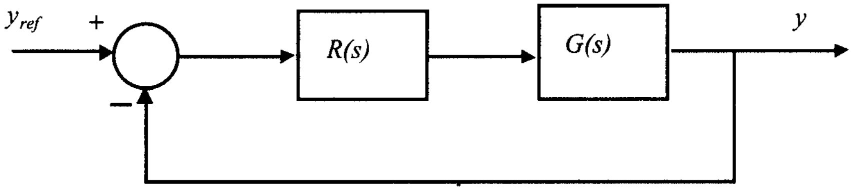
De la misma forma se podría haber planteado que la frecuencia de corte inferior queda determinada únicamente por la parte pasa alto, por lo que:

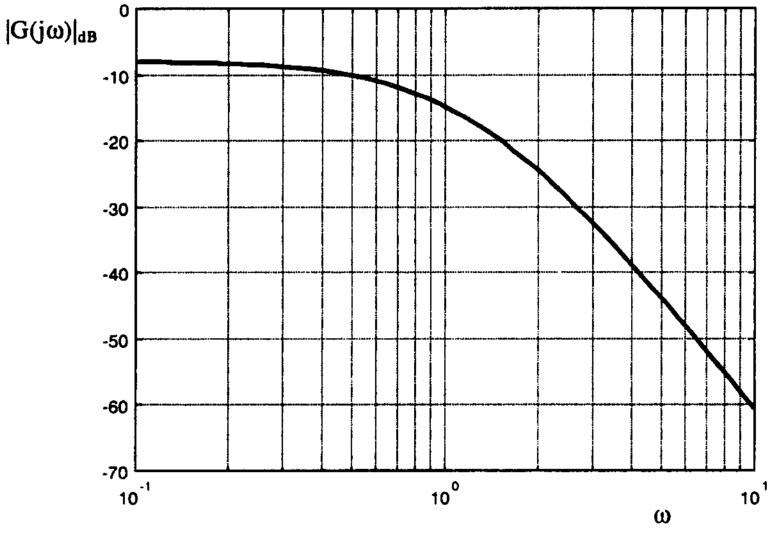
$$\left|\frac{kj2}{1+aj2}\right|_{db} \approx 20\log(\frac{k}{a}) - 3$$

de donde se obtiene directamente $a=0.5$.

PROBLEMA 112. Compensador en bucle cerrado

Definir la función de transferencia del regulador *R(s)* para que el sistema en bucle cerrado tenga una ganancia estática 1, y para que el sistema en bucle abierto *R(s)G(s)* tenga una magnitud de 0 dB a la frecuencia 3 rad/s.





Solución

Para que en bucle cerrado la ganancia estática sea 1 se debe cumplir que:

$$M(0) = \frac{R(0)G(0)}{1 + R(0)G(0)} = 1$$

Como G(0) es un número finito (aproximadamente $10^{-8/20}$), la única posibilidad para que la ganancia estática en bucle cerrado sea unitaria (el error en régimen permanente sea cero) es que la ganancia estática del controlador R(s) sea infinita, es decir, que tenga un polo en s=0. Por lo tanto tendremos:

$$R(s) = \frac{1}{s}R'(s)$$

Como además se pide que R(s)G(s) tenga una magnitud de 0 dB a la frecuencia 3 rad/s, la forma más sencilla es definir:

$$R(s) = \frac{k}{s}$$

y calcular k para que se cumpla esa condición:

$$|R(j3)G(j3)|_{db} = 20\log(k) - 20\log(3) + |G(j3)|_{db} =$$
$$= 20\log(k) - 9.54 - 32 = 0$$

*De donde se obtiene **k=119.4.***

PROBLEMA 113. Filtro pasa banda

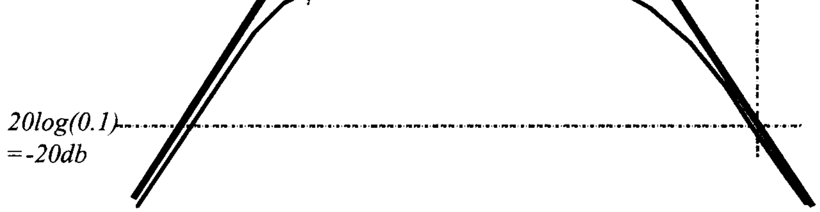
Obtener la función de transferencia del filtro pasa banda más sencillo posible que tenga una frecuencia de corte inferior de 1 rad/s, una magnitud unidad a frecuencias medias, una pendiente de caída de 40 db/dec, y de forma que a 200 rad/s la magnitud sea de 0.1 unidades.

Solución

Para tener una pendiente de caída a frecuencias bajas de 40 db/dec es necesario situar dos ceros en s=0. Por otra parte, para tener una pendiente de caída de 40 db/dec a frecuencias altas, el sistema más sencillo deberá tener 4 polos (dos más que ceros). La forma más sencilla de lograr esto (aunque no la única) es colocar los polos iguales dos a dos, es decir:

$$G(s) = \frac{Ks^2}{\left(1+\dfrac{s}{a}\right)^2\left(1+\dfrac{s}{b}\right)^2}$$

La respuesta en frecuencia del filtro anterior (teniendo en cuenta que la magnitud a frecuencias medias es unitaria) es de la forma:



Donde se ha dibujado con línea gruesa la aproximación asintótica, y con línea fina la forma aproximada de la gráfica real. Los datos del filtro que se pide se han dibujado también de forma aproximada. Para calcular las 3 incógnitas se podrían plantear 3 ecuaciones (una para cada condición), resolviendo después el sistema de ecuaciones resultante. Las 3 ecuaciones podrían ser:

$$|G(j)| = \frac{K}{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|G(200j)| = \frac{K200^2}{\left(1+\frac{200^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{200^2}{b^2}\right)} = 0.1$$

$$\left|G(\sqrt{ab}\,j)\right| = \frac{Kab}{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)} = 1$$

donde la magnitud a frecuencias medias se ha expresado en el punto medio del diagrama logarítmico entre a y b, es decir $\omega = \sqrt{ab}$.

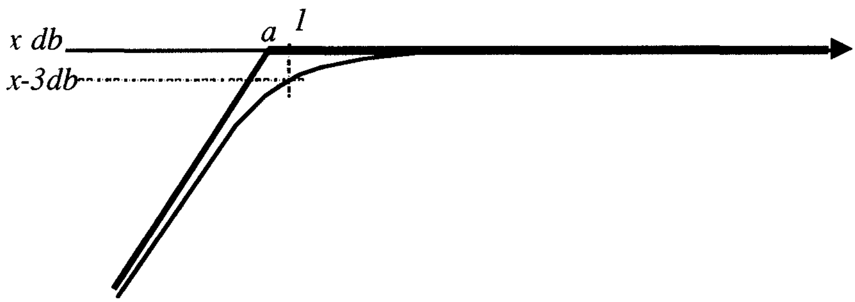
Una forma más razonable de obtener los valores de a, b y K es realizar un cálculo aproximado. En primer lugar se tiene que a la frecuencia de 200 rad/s la curva real estará muy próxima a la asíntota, pues la magnitud es mucho menor que la que se tiene en la frecuencia de corte. Así pues se puede calcular el polo b tomando la gráfica asintótica, sin más que plantear la pendiente de –40 db/dec:

$$-40 = \frac{-20-0}{\log(200)-\log(b)} \quad \Rightarrow \quad b = 63.25\ rad/s$$

Para la frecuencia de corte inferior no sirve la aproximación asintótica, pues alrededor de la frecuencia de corte la diferencia entre la curva real y la asintótica es grande. Sin embargo se puede hacer el siguiente razonamiento. Se descompone la función de transferencia del filtro en 3 partes, la parte paso alto, la parte paso bajo, y la ganancia:

$$G(s) = K\cdot\frac{s^2}{\left(1+\frac{s}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{s}{b}\right)^2} = K\cdot G_{pa}(s)\cdot G_{pb}(s)$$

La frecuencia de corte inferior solo depende de la parte paso alto del filtro (no depende de K, por ser solo una línea horizontal, ni depende tampoco de b, pues la contribución de la parte baso bajo a frecuencias bajas es de 0 db). La gráfica del término paso alto $G_{pa}(s)$ *es:*



donde x es igual a:

$$x = \left|G_{pa}(j\infty)\right|_{db} = \lim_{\omega \to \infty} 20\log\left(\frac{\omega^2}{1+\dfrac{\omega^2}{a^2}}\right) = 20\log(a^2)$$

La ecuación que da la frecuencia de corte inferior se puede simplificar a:

$$\left|G_{pa}(j)\right|_{db} = \left|G_{pa}(j\infty)\right|_{db} - 3$$

que expresada en unidades es:

$$\left|G_{pa}(j)\right| = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)} = \frac{\left|G_{pa}(j\infty)\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\infty^2}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\infty^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad a = 0.6436\ rad/s$$

Por último se puede obtener la ganancia K aplicando la condición de que la magnitud sea unitaria en la banda de paso. Razonando de forma aproximada, la contribución de la parte paso bajo es de 0 db en las frecuencias medias, mientras que la contribución de la parte paso alto es aproximadamente $\left|G_{pa}(j\infty)\right| = a^2$*, por lo que se tendrá:*

$$\left|G(j\omega)\right| \approx Ka^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 2.414$$

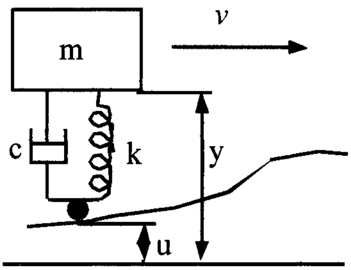
De forma más exacta se podría aplicar la ecuación:

$$\left|G(\sqrt{ab}\,j)\right| = \frac{Kab}{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 2.463$$

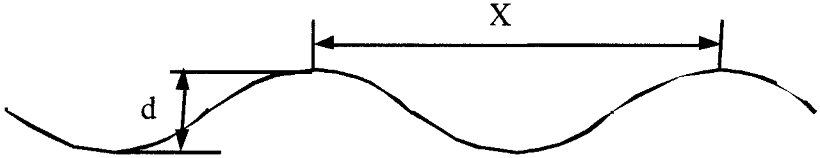
donde se ha aplicado a la frecuencia $\sqrt{ab}$ *por ser el punto medio en la escala logarítmica entre los puntos a y b.*

PROBLEMA 114. Resonancia de amortiguador de coche

El dibujo representa el modelo de un amortiguador de automóvil:



Se desea poner en una calle una superficie en forma de badenes senoidales según el dibujo



El objeto de esta superficie es que los coches reduzcan su velocidad. Calcular el valor de X que produzca en el coche la máxima oscilación (se supone que la rueda no se despega del suelo en ningún momento), y obtener la amplitud de ésta.

Datos (para los dos apartados):

v=20km/h, m=1000 kg, d=10cm, k=40000 N/m, c= 8000 Ns/m, longitud en reposo del muelle l_o*=50cm.*

Solución

La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$m\ddot{y} = -mg - k(y - u - 0.5) - c(\dot{y} - \dot{u})$$

Suponemos que el coche está circulando en régimen permanente por el suelo (antes del bache). El punto de funcionamiento será por tanto:

$$0 = -mg - k(y_0 - u_0 - 0.5) \quad \Rightarrow \quad y_0 = u_0 + 0.255$$

donde u_0 *es la altura del suelo respecto de una referencia de altitud absoluta. Tomando incrementos (linealizando) se tendría:*

$$\Delta\ddot{y} = -\frac{k}{m}(\Delta y - \Delta u5) - \frac{c}{m}(\Delta\dot{y} - \Delta\dot{u})$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{8s + 40}{s^2 + 8s + 40}$$

Con los badenes senoidales la señal de entrada será de la forma:

$$u(t) = 0.05\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

donde la frecuencia está relacionada con la velocidad horizontal y la distancia entre los picos de los badenes según:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ v &= \frac{20000}{3600} = \frac{X}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{X}5.555 = \frac{34.9}{X}$$

Ante entrada senoidal la amplitud de la oscilación del coche en régimen permanente queda definida por la magnitud de la respuesta en frecuencia. Ésta será máxima por tanto cuando la magnitud sea máxima:

$$|G(j\omega)|^2 = \left|\frac{8\omega j + 40}{-\omega^2 + 8\omega j + 40}\right|^2 = \frac{1600 + 64\omega^2}{(40-\omega^2)^2 + 64\omega^2}$$

$$\frac{d\left(|G(j\omega)|^2\right)}{d\omega} = 0 =$$

$$\frac{128\omega\left((40-\omega^2)^2 + 64\omega^2\right) - (1600 + 64\omega^2)\left(2(40-\omega^2)(-2\omega) + 128\omega\right)}{\left((40-\omega^2)^2 + 64\omega^2\right)^2}$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene:

$$\omega^4 + 50\omega^2 - 2000 = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = 26.2347 \quad \Rightarrow \quad \omega = 5.122 \quad rad/s$$

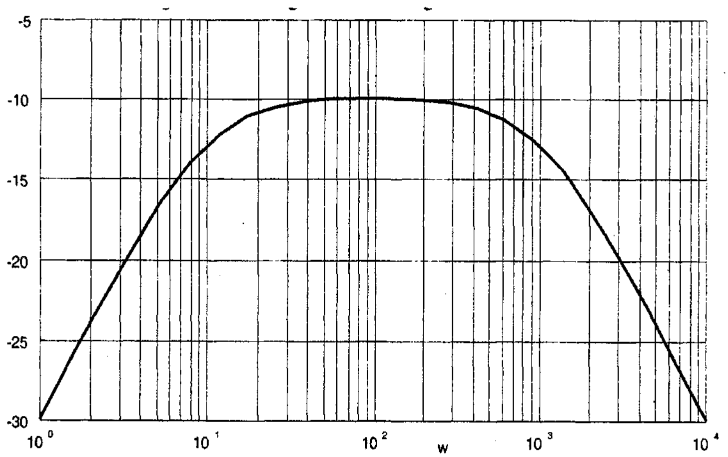
$$X = \frac{34.9}{\omega} = 6.81\ m$$

La amplitud de la oscilación de la salida en régimen permanente será:

$$0.05|G(5.122j)| = 0.05 \cdot 1.3247 = 0.06624\ m$$

ROBLEMA 115. Filtro pasa banda

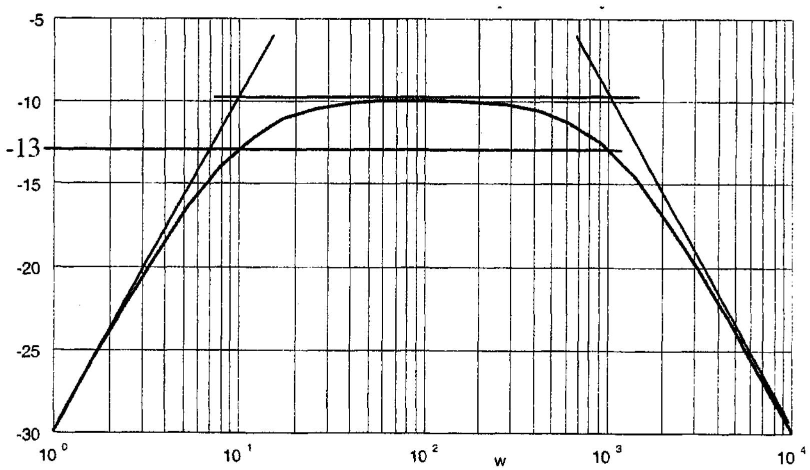
Un filtro pasa banda tiene el diagrama de magnitud de la figura:



Se desea colocar en serie con este filtro una función de transferencia de forma que el filtro pasa banda resultante total tenga una frecuencia de corte inferior de 2 rad/s y una magnitud unitaria en la banda de paso, manteniendo la misma frecuencia de corte superior. Obtener la función de transferencia más sencilla que permita lo anterior.

Solución

El filtro pasa banda inicial tiene una pendiente de +20db/dec a bajas frecuencias, y una pendiente de –20 db/dec a altas frecuencias. Eso indica que tiene un cero en s=0 y dos polos. Trazando las aproximaciones asintóticas se obtienen aproximadamente los polos del filtro:



Es decir, tiene un polo en 10 y otro polo en 1000. Se puede comprobar que efectivamente el filtro tiene dos polos porque a la frecuencia del polo la magnitud es 3 db *menor que en la banda de paso, lo cual concuerda exactamente con un solo polo. La función de transferencia del filtro es por tanto:*

$$G(s) = c\frac{s}{(1 + s/10)(1 + s/1000)}$$

La frecuencia de corte actual es de 10 rad/s (es decir, la posición del primer polo). Para cambiarla a 2 rad/s es necesario introducir un polo a esa frecuencia. Para que siga siendo un filtro pasa banda, la forma más sencilla es introducir también un cero que cancele al polo en –10. Así pues, la función de transferencia a introducir en serie será:

$$k\frac{1 + s/10}{1 + s/2}$$

Para que la magnitud del sistema total sea de 0 db en la banda de paso se toma por ejemplo la frecuencia media ω=100 rad/s:

$$\left| k\frac{1 + 100j/10}{1 + 100j/2} \right|_{db} + |G(j100)|_{db} = 0$$

donde la magnitud del filtro original se mide en la gráfica, quedando:

$$20\log(k) = -20\log\left| \frac{1 + 100j/10}{1 + 100j/2} \right| - (-10) = 23.98 \quad \Rightarrow \quad k = 15.8$$

11 CUESTIONES TEÓRICAS

Esta sección contiene cuestiones cortas diversas. Desde cuestiones puramente teóricas, hasta pequeños problemas que no encajan bien en otras secciones.

La teoría necesaria básica para resolver los problemas de este capítulo puede encontrarse en el libro [Sala00].

CUESTIÓN 116. Clasificación de sistemas

Poner un ejemplo de sistema que sea:
a) Recurrente, discreto, y no realizable.
b) No lineal, continuo, de orden 2 y variante con el tiempo.
c) Continuo, lineal y estático
d) Discreto, inestable.
e) No lineal y no linealizable.

Solución:

a) $y_k = y_{k-1} + u_{k+1}$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + t \cdot \sqrt{\dfrac{dy}{dt}} - y = u$

c) $y = 2u$

d) $G(z) = \dfrac{1}{z-2}$

e) $\dfrac{dy}{dt} + |y| = u$ *(no linealizable en $y_0=0$, al ser la función $|y|$ no derivable en ese punto).*

CUESTIÓN 117. Equivalente discreto

Dado un sistema continuo de f.d.t. G(s), se calcula el equivalente discreto mediante la ecuación:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

¿La aproximación entre la salida del sistema discreto (ante la secuencia obtenida al muestrear la entrada), y los valores muestreados de la salida del sistema continuo, depende del periodo de muestreo? En qué condiciones y por qué.

Solución

La exactitud de la aproximación depende de la forma de la entrada. Si la entrada es constante entre muestreos, entonces el equivalente anterior es matemáticamente exacto, y la aproximación es exacta, por lo que no depende del periodo de muestreo.

Si la entrada no es constante entre muestreos, entonces el equivalente anterior es solo una aproximación, y la exactitud de la misma sí depende del periodo de muestreo (a menor periodo mejor aproximación).

CUESTIÓN 118. Linealización

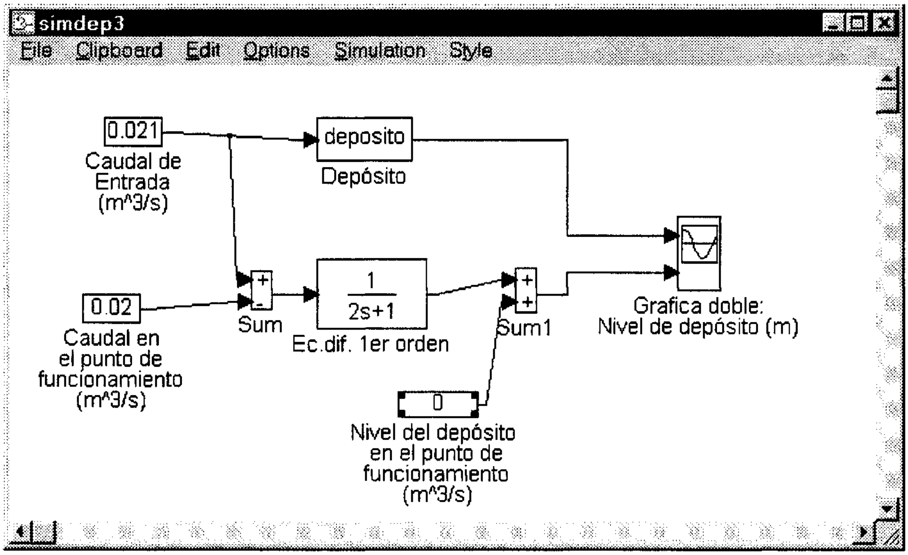
La función de transferencia que se obtiene al linealizar el sistema $\frac{dy}{dt} = f(y,u)$ alrededor de un punto de funcionamiento determinado es $G(s)$. ¿Es correcto afirmar que $Y(s) \approx G(s)U(s)$? ¿Por qué?

Solución

No es correcto, pues la f.d.t. que resulta al linealizar relaciona incrementos de las variables respecto al punto de funcionamiento, y no valores absolutos. Lo correcto sería: $\Delta Y(s) \approx G(s)\Delta U(s)$, *siendo* $\Delta y = y - y_0$, $\Delta u = u - u_0$. *El símbolo de aproximado en lugar de igual se debe a que los términos de orden mayor del desarrollo de Taylor se han despreciado.*

CUESTIÓN 119. Modelo de simulación

La siguiente figura muestra el modelo de Simulink utilizado para comparar la respuesta de un depósito no lineal con la respuesta del modelo lineal aproximado. Explicar qué sucedería al proceder a la simulación con el modelo tal como muestra la figura.



Solución

Las dos gráficas de las respuestas no se parecerían, pues la variable superior es la altura del depósito real, mientras que la variable inferior no es más que el incremento de la altura respecto del punto de funcionamiento, ya que el nivel del depósito en el punto de funcionamiento está a cero. Para que la comparación entre la salida real y la del modelo linealizado fuera correcta habría que introducirle el valor adecuado de la altura en el punto de funcionamiento. Además, en el bloque del depósito habría que modificar el valor de la altura inicial, para que los dos sistemas empezaran en el mismo punto.

CUESTIÓN 120. Clasificación de sistemas

De los siguientes sistemas determinar cuáles son recurrente/no recurrente, estático/dinámico, causal/no causal, lineal/no lineal, estable/inestable, variante con el tiempo/invariante con el tiempo:

a) $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}$

b) $\dot{y} + 2 = \ddot{u} + 2u$

c) $y_k = 0.5^k u_k$

d) $y_k = u_k + u_{k-1} - u_{k-2}$

e) $\dot{y} + \mathrm{sen}(y) = u/t$

Solución

a*) Recurrente, dinámico, causal, lineal, estable, invariante con el tiempo.*
b*) Recurrente, dinámico, no causal, lineal, estable, invariante con el tiempo.*
c*) No recurrente, estático, causal, lineal, estable, variante con el tiempo.*
d*) No recurrente, dinámico, causal, lineal, estable, invariante con el tiempo.*
e*) Recurrente, dinámico, causal, no lineal, variante con el tiempo. La estabilidad depende del punto de funcionamiento. Para un punto de funcionamiento $y_0=0$ sería estable, mientras que para $y_0=\pi$ sería inestable.*

CUESTIÓN 121. Filtros discretos

Diferencias entre filtro discreto de respuesta impulsional finita y de respuesta impulsional infinita. Poner un ejemplo de filtro de cada tipo para obtener la tendencia de la evolución de una secuencia discreta como el índice de la bolsa.

Solución

Un filtro discreto de respuesta impulsional finita (FIR) es no recurrente, es decir, la salida en un instante depende de un número finito de entradas pasadas, o dicho de otra forma la salida en un instante no depende de salidas pasadas. Su función de transferencia es un polinomio finito en z^{-1} *(es decir, todos los polos son* $z=0$*).*

Un filtro de respuesta impulsional infinita (IIR) es recurrente, es decir, la salida en un instante depende de salidas en instantes anteriores, o lo que es lo mismo la salida depende de todas las entradas pasadas hasta tiempo infinito. Su función de transferencia es un cociente de polinomios en z^{-1} *y sus polos son distintos de* $z=0$.

Ejemplos:

Filtro FIR para calcular la tendencia de la evolución del índice de la bolsa: filtro promediador con ponderación:

$$y_k = \frac{u_k + 0.8u_{k-1} + 0.6u_{k-2} + 0.4u_{k-3} + 0.2u_{k-4}}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad G(z) = \frac{1 + 0.8z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4}}{3}$$

Filtro IIR: Si la media se hace de todos los valores pasados, ponderados de forma exponencial, se obtiene un filtro IIR, por ejemplo:

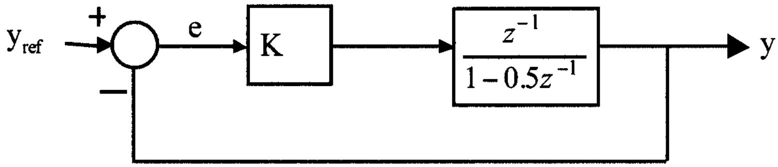
$$y_k = (1-a)\left(u_k + au_{k-1} + a^2u_{k-2} + a^3u_{k-3}\right) + \cdots$$

$$\Rightarrow \qquad G(z) = \left(1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots\right)(1-a) = \frac{1-a}{1-az^{-1}}$$

$$\Rightarrow \quad y_k = ay_{k-1} + (1-a)u_k$$

CUESTIÓN 122. Sistema en bucle cerrado

Obtener el valor del regulador constante K para que la salida del sistema ante referencia escalón sea igual al 95 % de la referencia en régimen permanente, es decir el error sea del 5 %. ¿Es correcta esta solución?



Solución

La función de transferencia en bucle cerrado es:

$$M(z) = \frac{Y(z)}{Y_{ref}(z)} = \frac{K\dfrac{1}{z-0.5}}{1+K\dfrac{1}{z-0.5}} = \frac{K}{z-0.5+K}$$

Para que ante referencia escalón unitario en régimen permanente la diferencia entre y_{ref} y la salida sea menor de 0.05, la ganancia estática en bucle cerrado debe ser mayor o igual a 0.95, es decir:

$$M(1) = \frac{K}{1-0.5+K} \geq 0.95 \quad \Rightarrow \quad K \geq 9.5$$

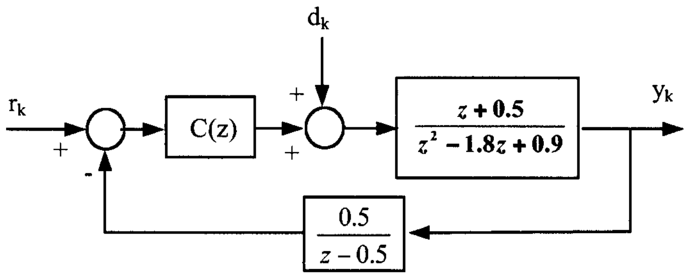
El polo del sistema en bucle cerrado es:

$$Polo = 0.5 - K$$

Si K>9.5, el polo tiene módulo mayor que 1 por lo que el sistema en bucle cerrado es inestable, y el cálculo realizado con la ganancia estática no es válido. La solución, por tanto no es correcta, es decir, no hay ningún valor de K para el que se cumpla el enunciado de forma que el sistema en bucle cerrado sea estable.

CUESTIÓN 123. Sistema en bucle cerrado

El siguiente diagrama de bloques representa un sistema de control discreto



Definir una función de transferencia del regulador C(z) que sea realizable, de forma que en régimen permanente la diferencia entre la salida y_k y una referencia escalón r_k

sea menor de 0.01 teniendo en cuenta que la perturbación d_k es constante (escalón) pero de valor desconocido.

Solución

Aplicando el principio de superposición la transformada en z de la salida se puede obtener como la producida por r_k (suponiendo d_k=0) más la producida por d_k (suponiendo r_k=0):

$$Y(z) = \frac{C(z)\dfrac{z+0.5}{z^2-1.8z+0.9}}{1+C(z)\dfrac{(z+0.5)0.5}{(z^2-1.8z+0.9)(z-0.5)}}\frac{r}{1-z^{-1}} +$$

$$+\frac{\dfrac{z+0.5}{z^2-1.8z+0.9}}{1+C(z)\dfrac{(z+0.5)0.5}{(z^2-1.8z+0.9)(z-0.5)}}\frac{d}{1-z^{-1}}$$

Ya que tanto la entrada como la perturbación son escalones. El valor de y_k en régimen permanente se obtiene por el teorema del valor final:

$$y_\infty = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) = \frac{15C(1)}{1+15C(1)}r + \frac{15}{1+15C(1)}d$$

Si se quiere que la diferencia entra la referencia y la salida sea menor de 0.01 independientemente del valor desconocido d es necesario que:

$$\frac{15}{1+15C(1)} = 0 \quad\Rightarrow\quad C(1) = \infty$$

condición que solo puede cumplirse si el controlador tiene un polo en z=1, es decir:

$$C(z) = \frac{1}{z-1}C'(z)$$

Con esta condición se cumple que $y_\infty = r$, por lo que se cumplen las dos condiciones pedidas. Para terminar el problema es necesario definir C'(z) para que el sistema en bucle cerrado sea estable (todos los polos con módulo menor que 1). Para simplificar el problema se define C'(z) para que el denominador en bucle cerrado sea lo más sencillo posible, teniendo en cuenta que debe ser realizable:

$$C(z) = k\frac{(z^2-1.8z+09)(z-0.5)}{z(z-1)(z+0.5)}$$

De esta forma el denominador en bucle cerrado que define los polos es:

$$1+k\frac{(z^2-1.8z+09)(z-0.5)}{z(z-1)(z+0.5)}\frac{(z+0.5)0.5}{(z^2-1.8z+0.9)(z-0.5)}=1+k\frac{0.5}{z(z-1)}$$

Por lo que los polos son:

$$1+k\frac{0.5}{z(z-1)}=0 \quad\Rightarrow\quad z^2-z+0.5k=0 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}$$

Tomando por ejemplo k=1 los polos son: z = 0.5 ±0.5 j cuyo módulo es 0.707 por lo que el sistema en bucle cerrado es estable.

ANEXOS

I TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición de transformada de Laplace

Dada la señal continua

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ y(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

se define su transformada de Laplace como

$$Y(s) = \mathfrak{L}\left[y(t)\right] = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt$$

donde s es una variable compleja. La integral existe para ciertos valores de $s=s+j\omega$, siempre que la señal no sea más rápida que una exponencial.

Propiedades

Operador lineal:

$$\mathfrak{L}\left[a \cdot f(t) + b \cdot y(t)\right] = a\ \mathfrak{L}\left[f(t)\right] + b\ \mathfrak{L}\left[y(t)\right] = aF(s) + bY(S)$$

Derivada:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\ \mathfrak{L}\left[f(t)\right] - f(0^+) = s \cdot F(s) - f(0^+)$$

Aplicando la propiedad sucesivas veces:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = s^k F(s) - s^{k-1}f(0^+) - s^{k-2}\dot{f}(0^+) - \mathrm{L}\ - f^{(k-1)}(0^+)$$

Integral:

$$\mathfrak{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s} + \frac{\mathfrak{L}\left[f(t)\right]}{s} = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$$

Retardo en el tiempo:

$$\mathfrak{L}\left[f(t-T)\right] = e^{-sT}F(s)$$

Traslación compleja:

$$\mathfrak{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$$

Teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Teorema de Convolución:

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = \mathfrak{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

Derivada respecto a s:

$$\mathfrak{L}\left[t\cdot f(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Otra propiedad:

$$\mathfrak{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$$

Transformada de Laplace de señales básicas

$y(t)$	$Y(s)$
$\delta(t)$ (impulso)	1
1 (escalón)	$\frac{1}{s}$
t (rampa)	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\,sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\,cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$te^{at}\,sen(\omega t)$	$-\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right)=\frac{2\omega(s-a)}{\left((s-a)^2+\omega^2\right)^2}$
$te^{at}\,cos(\omega t)$	$-\frac{d}{ds}\left(\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right)=\frac{(s-a)^2-\omega^2}{\left((s-a)^2+\omega^2\right)^2}$

II TRANSFORMADA EN Z

Definición de transformada en Z

Dada una secuencia de valores (señal discreta) definida de 0 a ∞:

$$\{y_k\} = \{y_0, y_1, \ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots\}$$

se define la transformada en Z de esa secuencia como:

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \mathrm{L}$$

Donde z es una variable compleja. Existirá la transformada en Z si el sumatorio converge para algún complejo z.

Propiedades

1. Es un operador lineal.

$$\mathcal{Z}\{a \cdot y_k + b \cdot u_k\} = a \cdot \{y_k\} + b \cdot \mathcal{Z}\{u_k\} = aY(z) + bU(z)$$

2. Operador retardo z^{-1}.

$$\mathcal{Z}\{y_{k-1}\} = \mathcal{Z}\{0, y_0, y_1, \mathrm{K}\} = z^{-1} \cdot \mathcal{Z}\{y_0, y_1, \mathrm{K}\} = z^{-1}Y(z)$$

Retardo de l periodos (aplicar sucesivamente la propiedad anterior):

$$\mathcal{Z}(y_{k-l}) = \mathcal{Z}\{0, \ldots, 0, y_0, y_1, \ldots\} = z^{-l}Y(z).$$

3. Adelanto: si $y_0=0$, $\mathcal{Z}(y_{k+1}) = \mathcal{Z}\{y_1, y_2, \ldots\} = zY(z)$.

Si $y_0 \neq 0$, hay que restar el término de potencia positiva de z:

$$\mathcal{Z}(y_{k+1}) = zY(z) - z\,y_0$$

4. Producto por potencial:

$$\mathcal{Z}(a^k y_k) = Y\left(\frac{z}{a}\right)$$

5. Derivada respecto de z:

$$\mathcal{Z}(k \cdot y_k) = -z\frac{dY(z)}{dz}$$

6. Teorema del valor final:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z)$$

7. Teorema del valor inicial:

$$y_0 = \lim_{z\to\infty} Y(z)$$

8. Convolución:

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{j=0}^{k} f_{k-j} \cdot g_j\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{j=0}^{k} g_{k-j} \cdot f_j\right] = F(z)G(z)$$

Transformada en Z de señales básicas

y_k	$Y(z)$
δ_k *(impulso)*	1
δ_{k-1}	z^{-1}
1 (escalón)	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
k (rampa)	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
a^k	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
ka^k	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
sen(bk)	$\dfrac{z\,\mathrm{sen}(b)}{z^2-2z\cos(b)+1}$
cos(bk)	$\dfrac{z(z-\mathrm{eos}(b))}{z^2-2z\cos(b)+1}$
a^k *sen(bk)*	$\dfrac{a\,\mathrm{sen}(b)z}{z^2-2a\cos(b)z+a^2}$
a^k *cos(bk)*	$\dfrac{z(z-a\cos(b))}{z^2-2a\cos(b)z+a^2}$
ka^k *sen(bk)*	$-z\dfrac{d}{z}\left\{\dfrac{a\,\mathrm{sen}(b)z}{z^2-2a\cos(b)z+a^2}\right\}=\dfrac{a\,\mathrm{sen}(b)z(z^2-a^2)}{\left(z^2-2a\cos(b)z+a^2\right)^2}$
ka^k *cos(bk)*	$-z\dfrac{d}{z}\left\{\dfrac{z(z-a\cos(b))}{z^2-2a\cos(b)z+a^2}\right\}=\dfrac{a\cos(b)z(z^2+a^2)-2a^2z^2}{\left(z^2-2a\cos(b)z+a^2\right)^2}$

III PROBLEMAS PROPUESTOS

INTRODUCCIÓN

En esta segunda edición del libro, la colección de problemas resueltos se ha ampliado con un conjunto de problemas propuestos clasificados en capítulos, siguiendo la misma estructura. Dichos problemas son el fruto de la recopilación de los exámenes realizados entre 2001 y 2006 en la asignatura de Teoría de Sistemas de segundo curso de Ingeniería Industrial de la Universitat Jaume I de Castellón.

1. RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS CONTINUOS

1.1. Respuesta de sistema térmico

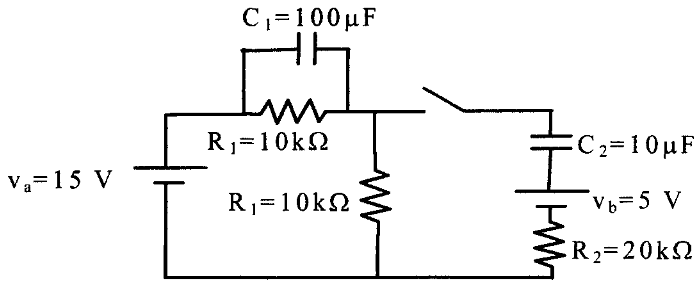
La ecuación siguiente modela el comportamiento dinámico de un sistema térmico en el que Q es la potencia calorífica entrante, T_1 es la temperatura de un cuerpo, T_2 es la temperatura del otro cuerpo, y T_e es la temperatura exterior:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.04 \\ 0.004 & -0.006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.002 \end{bmatrix} T_e$$

Estando el sistema en equilibrio con Q=10 W y T_e=25°C, en un momento dado la temperatura exterior cambia bruscamente de 25 a 35 °C y al mismo tiempo se apaga la entrada de calor (Q pasa a valer 0). Obtener la evolución de la temperatura T_2.

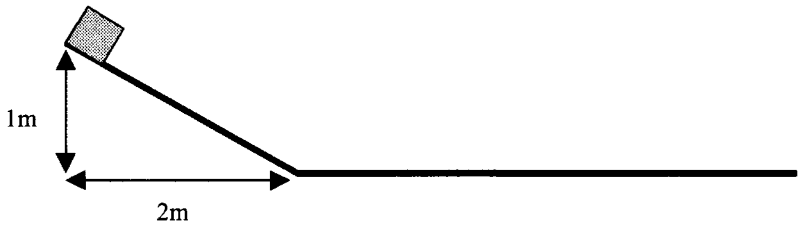
1.2. Respuesta de circuito eléctrico

Se supone que el circuito de la figura se encuentra en equilibrio (en régimen permanente) con el interruptor abierto (y el condensador C_2 descargado). En un momento dado se cierra el interruptor. Obtener la evolución con el tiempo de la tensión en los condensadores a partir de ese momento.



1.3. Caída por plano inclinado

El cuerpo de la figura, de masa 10 kg, puede deslizar sobre la superficie estando sometido a una fuerza de rozamiento viscosa de coeficiente c=10Ns/m y a una fuerza de rozamiento de Coulomb de coeficiente μ=0.1 (la fuerza de rozamiento de Coulomb es el producto del coeficiente por la fuerza normal a la superficie). Estando en reposo se deja caer por la rampa de la figura. Obtener la distancia total que recorre en la zona llana.



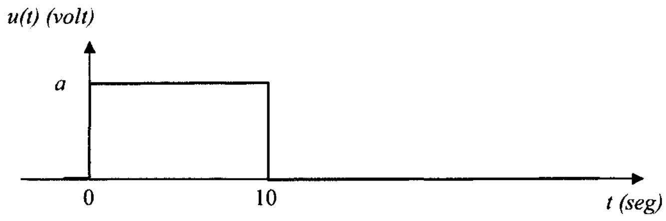
1.4. Llenado de depósito con bomba

La función de transferencia que relaciona la tensión aplicada a una bomba con el caudal que proporciona es:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{10^{-5}}{1+5s} \quad \frac{m^3/s}{volt}$$

El caudal se vierte a un depósito estanco (sin orificio de salida) de sección constante A=0.02 m^2.

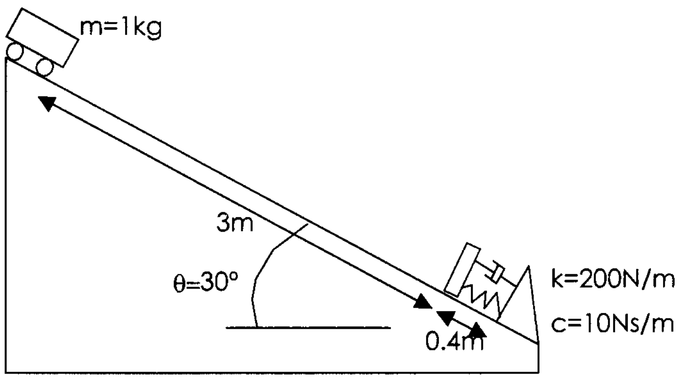
Estando el depósito inicialmente vacío se le aplica a la bomba una tensión de la forma:



Se ha medido el nivel máximo al que ha llegado el depósito, siendo éste de 1.5 metros. Obtener el valor de a.

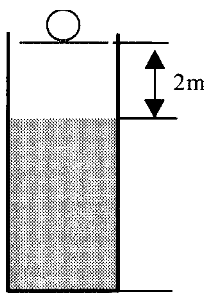
1.5. Caída por plano inclinado con tope elástico

El carro de la figura se deja caer por la rampa con velocidad inicial nula. El rozamiento del carro con el aire y con la rampa se supone despreciable. Cuando llega al tope elástico inferior (que se supone en su posición de reposo) éste se comprime y después se expande, lo que hace que el carro vuelva a subir por la rampa. Calcular la altura máxima alcanzada tras el rebote. La masa del tope se supone despreciable.



1.6. Inmersión de bola

Se deja caer la bola de la figura con una velocidad inicial v_0 =5 m/s, cayendo dentro del agua. Calcular la profundidad máxima alcanzada por la bola en el agua, y el tiempo que tarda en salir a la superficie.



Datos: Volumen de la bola=0.001 m^3, Densidad de la bola=800 kg/m^3, densidad del agua=1000 kg/m^3, coeficiente de rozamiento viscoso con el aire=1Ns/m, coeficiente de rozamiento viscoso con el agua=10Ns/m.

Nota: No se debe olvidar el empuje del agua sobre la bola (principio de Arquímedes).

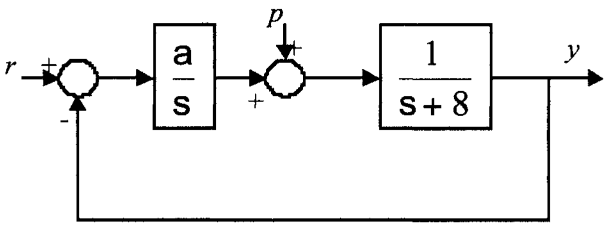
1.7. Lanzamiento de cohete desde submarino

Un submarino lanza un cohete en dirección vertical hacia arriba. El cohete parte del reposo desde una profundidad de 20 metros. Sabiendo que la fuerza que propulsa al cohete es constante e igual a 200 N, pero solo actúa durante los primeros 10 segundos (después pasa a valer 0), calcular la altura máxima que alcanza.

Datos: masa del cohete=10 kg, volumen del cohete=2 litros, coeficiente de rozamiento viscoso en el agua = 20 Ns/m, coeficiente de rozamiento en el aire = 2 Ns/m.

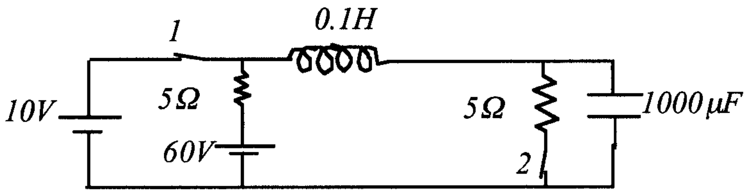
1.8. Respuesta de un sistema

Obtener la expresión de la transformada de Laplace de la señal *y*, así como los términos que aparecen en la expresión temporal de dicha señal (sin calcular los coeficientes), sabiendo que la señal *r* es una rampa de pendiente 8, y la señal *p* es de la forma $p(t)=e^{-2t}$. Calcular las distintas posibilidades en función de los posibles valores del parámetro a.



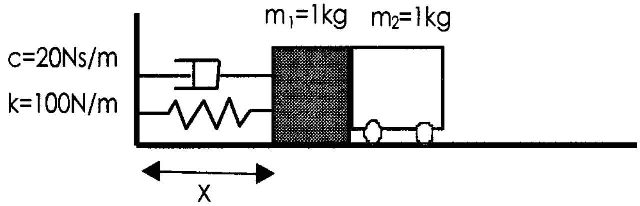
1.9. Transitorio de circuito eléctrico

Estando el circuito de la figura en régimen permanente (con los dos interruptores cerrados) se abre el interruptor 1. El interruptor 2 es automático, y se abre cuando la corriente a su través supera los 4 A (quedándose abierto a partir de ese instante). Calcular la evolución con el tiempo de la tensión del condensador.



1.10. Transitorio de sistema mecánico

En la figura se muestra una masa (m_1) unida a un muelle y un amortiguador, que empuja un carrito (m_2). El movimiento del carrito se supone sin ningún tipo de rozamiento, mientras que el de la masa m_1 presenta un rozamiento de Coulomb con el suelo de coeficiente μ=0.2. La longitud en reposo del muelle es de 0.5 metros. Se empuja con la mano el carrito contra la masa m_1 hasta que la posición de la misma (x) es de 0.1 metros. En esa posición, y partiendo del reposo, se deja libre el sistema. Calcular la evolución con el tiempo de la posición de la masa m_1.



Nota: la masa m_1 empujará al carrito (y por tanto las dos masas estarán unidas) hasta que se alcance la velocidad máxima, momento en el cual el carrito se separará de la masa m_1 .

1.11. Transitorio de cazuela con agua

Se dispone de una cazuela vacía colocada sobre un quemador. En este quemador se puede controlar el flujo de calor suministrado a la cazuela, q. Estando el sistema en régimen permanente con un calor constante q_0=500W, se introduce en la cazuela 1 kg de agua a 5°C sin cambiar el quemador. Obtener la evolución con el tiempo de

	Masa (kg)	Calor específico (J/kg/°C)
Cazuela	0.6	8000
Agua	1 kg	4180

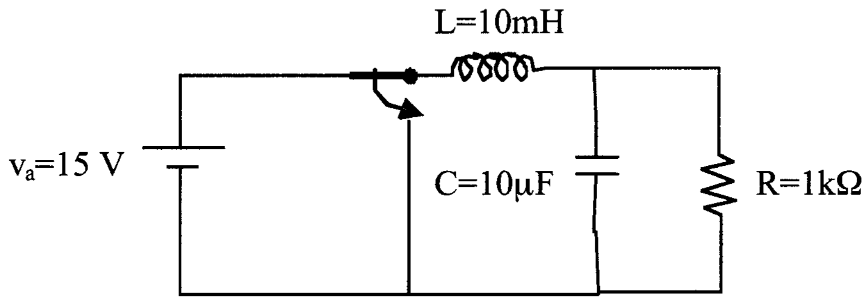
	Coeficientes de transmisión (W/°C)
Cazuela-exterior	4
Cazuela-agua	20
Agua-exterior	5

la temperatura de la cazuela, calculando el valor mínimo que alcanza. Obtener también la temperatura que alcanzará el agua en régimen permanente.

Datos: Temperatura exterior=25ºC.

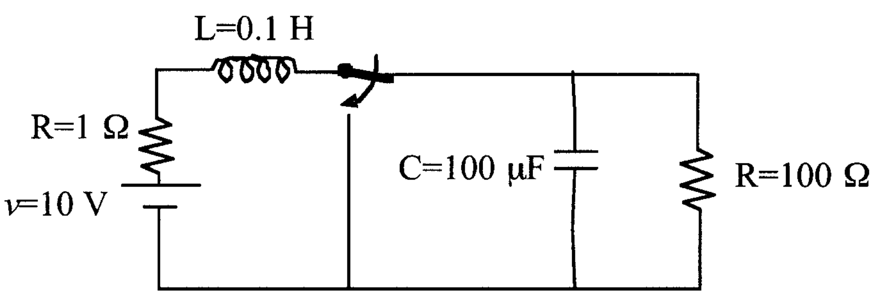
1.12. Transitorio de circuito eléctrico

Se supone que el circuito de la figura se encuentra en equilibrio (en régimen permanente) con el conmutador en la posición de la figura. En un momento dado se gira el conmutador pasando a la posición vertical. Obtener la evolución con el tiempo de la tensión en el condensador a partir de ese momento.



1.13. Transitorio de circuito eléctrico

Estando el conmutador en la posición horizontal (con el circuito en régimen permanente), se cambia a la posición vertical en un momento dado. Al cabo de 0.2 segundos se vuelve el conmutador a la posición horizontal. Obtener la evolución de la tensión en el condensador, calculando el valor máximo que alcanza.



1.14. Respuesta de sistema no lineal

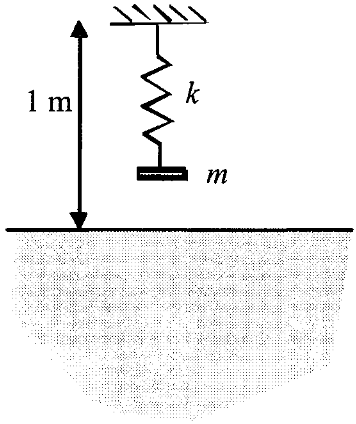
La ecuación siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema continuo:

$$\ddot{y} + \sqrt{y} = 2sen(u) + \dot{u}$$

Obtener la función de transferencia aproximada del sistema alrededor del punto de equilibrio definido por u=1, y escribir los términos que aparecen en la evolución de la salida del sistema (sin calcular los coeficientes) si a partir del equilibrio la entrada se incrementa en 0.1 unidades.

1.15. Inmersión de masa con muelle

El sistema de la figura representa una masa unida a un muelle y que según su posición puede estar o no sumergida en el agua:



Se supone que en el aire no hay rozamiento, mientras que en el agua hay un rozamiento viscoso de coeficiente c=7 Ns/m.

Si inicialmente se suelta la masa desde la posición de reposo del muelle, con velocidad inicial nula, obtener la evolución con el tiempo de la posición de la masa, obteniendo la máxima profundidad que alcanza y la posición de equilibrio final de la misma.

Datos:

- masa: m=1kg, $volumen$=0.0001m^3
- muelle: k=10 N/m, longitud en reposo l_0=0.5m

1.16. Respuesta de sistema no lineal

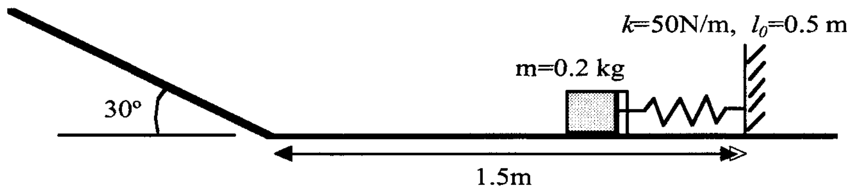
La ecuación siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema continuo:

$$\ddot{y} + \frac{16}{y} = 2\sqrt{u} + sen(\dot{u})$$

Obtener la función de transferencia aproximada del sistema alrededor del punto de equilibrio definido por y=2, y escribir los términos que aparecen en la evolución de la salida del sistema (sin calcular los coeficientes) si a partir del equilibrio la entrada se decrementa en 0.3 unidades.

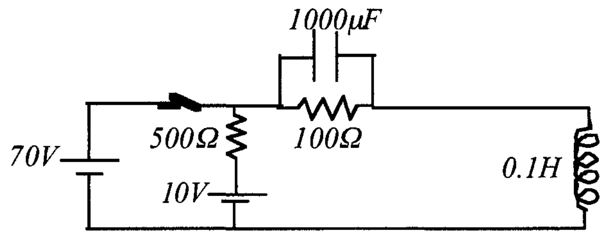
1.17. Transitorio de sistema mecánico (ascenso por rampa)

La masa de la figura puede deslizar sobre la superficie, estando sometida a un rozamiento de Coulomb de coeficiente μ=0.2. Además, el aire produce un rozamiento viscoso de coeficiente c=1Ns/m. Se empuja la masa contra el muelle hasta que éste queda con una longitud de 0.2 m, soltándola después. Se supone que la masa del tope del muelle es despreciable. Obtener la posición más elevada alcanzada por la masa en la rampa.



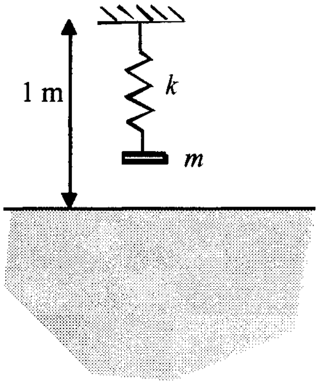
1.18. Transitorio eléctrico

Estando el circuito de la figura en régimen permanente (con el interruptor abierto), en un momento dado se cierra el interruptor. Dicho interruptor es automático, y se abre cuando la corriente a su través supera los 5 A (quedándose abierto a partir de ese instante). Calcular la evolución con el tiempo de la corriente de la bobina.



1.19. Inmersión de masa con muelle

El sistema de la figura representa una masa unida a un muelle y que según su posición puede estar o no sumergida en el agua:



Se supone que en el aire hay un rozamiento viscoso de coeficiente c=1 Ns/m., mientras que en el agua el coeficiente es de c=10 Ns/m.

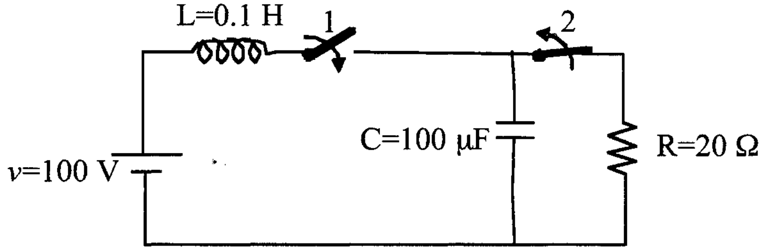
Si se estira el muelle y se suelta la masa desde una posición sumergida 0.5 metros, con velocidad inicial nula, obtener la evolución con el tiempo de la posición de la masa, obteniendo la máxima altura que alcanza. ¿Cuál sería la posición final de la masa?

Datos:

- masa: m=1kg, *volumen*=0.0001m^3
- muelle : k=50 N/m, longitud en reposo l_0=0.5m

1.20. Transitorio eléctrico

Estando el circuito de la figura en equilibrio (en régimen permanente), con el interruptor 1 abierto y el 2 cerrado, en un momento dado se cierra el interruptor 1. Cuando la tensión en el condensador alcanza los 90 voltios, se abre el interruptor 2. Calcular la evolución con el tiempo de la tensión del condensador y el valor máximo que alcanza.



1.21. Respuesta de sistema no lineal

La ecuación siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema continuo:

$$\ddot{y} + 2sen(\dot{y}) - \frac{16}{y} = -2\sqrt{u} + 0.2\dot{u}$$

a) Obtener la función de transferencia aproximada del sistema alrededor del punto de equilibrio definido por y=2, y escribir los términos que aparecen en la evolución de la salida del sistema (sin calcular los coeficientes) si a partir del equilibrio la entrada se incrementa en 0.3 unidades.

b) Obtener toda la información posible de la sobreoscilación, tiempo de pico y tiempo de establecimiento, así como la frecuencia de oscilación, dibujando de forma aproximada la evolución de la salida.

1.22. Respuesta de sistema no lineal

La ecuación siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema continuo:

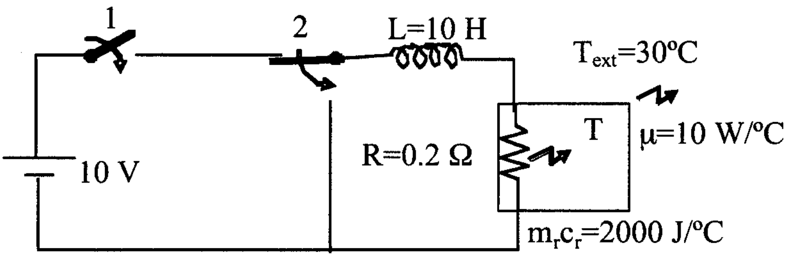
$$0.1\dddot{y} + 1.2\ddot{y} + 4.8\cos(\dot{y} - \frac{\pi}{6}) + 8\sqrt{y} = 2u^2 + 3 \cdot sen(\dot{u})$$

a) Obtener la función de transferencia aproximada del sistema alrededor del punto de equilibrio definido por y=1, y escribir los términos que aparecen en la evolución de la salida del sistema (sin calcular los coeficientes) si a partir del equilibrio la entrada pasa a valer 2 unidades, permaneciendo en ese valor.

b) Obtener toda la información posible de la sobreoscilación, tiempo de pico y tiempo de establecimiento, así como de la frecuencia de oscilación, dibujando de forma aproximada la evolución de la salida en el caso anterior.

1.23. Transitorio de calefactor eléctrico

El sistema de la figura representa un calefactor eléctrico. El calor disipado en la resistencia calienta la masa del radiador, que a su vez disipa calor al exterior. El conmutador 2 es un termostato, que cuando la temperatura del radiador es baja, se encuentra en la posición horizontal. Cuando la temperatura alcanza los 70ºC, el conmutador pasa a la posición vertical, quedándose en esa posición a partir de entonces. Estando el sistema en régimen permanente con el interruptor 1 abierto, se cierra dicho interruptor. Obtener la evolución con el tiempo de la corriente y de la temperatura.



2. RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DISCRETOS

2.1 Respuesta de sistema discreto

Un sistema discreto se describe mediante la ecuación en diferencias:

$$y_k = 2 + 0.8y_{k-1} + 0.5u_{k-1} + u_{k-2}$$

Se supone que el sistema está en equilibrio con u=0. Si en un momento dado se cambia la entrada según la secuencia:

$$\{u_k\} = \{1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots\}$$

Obtener el valor de y en el instante 100 desde que se cambia la entrada.

2.2. Evolución alumnos en escuela

La siguiente ecuación en diferencias modela el número de alumnos que se licencian cada año en una escuela en función del número de alumnos que entran en primer curso:

$$y_k = 0.4y_{k-1} + 0.4u_{k-4}$$

Si únicamente entran alumnos durante los 30 primeros años (100 alumnos al año):

a) Obtener la expresión de la secuencia de alumnos totales licenciados hasta el año k (escribir únicamente los términos que aparecen sin calcular el valor de los coeficientes).

b) Obtener el número total de alumnos que se licenciarán en toda la historia de la escuela.

2.3. Respuesta de sistema discreto no lineal

Se sabe que la ecuación en diferencias que modela un sistema discreto es de la forma:

$$y_k = a y_{k-1}^2 + b\, y_{k-2} u_{k-1}$$

Se han medido algunos valores de las secuencias de entrada y de salida, siendo: $\{u_k\}=\{...,1,2,0,-1,-2,1,...\}$, $\{y_k\}=\{...,0,1,5,4,2,-4,...\}$.

a) Obtener los valores de *a* y *b* utilizando todos los datos disponibles.

b) Obtener un modelo lineal aproximado alrededor del punto de funcionamiento definido por y=5.

2.4. Respuesta de sistema discreto

Un sistema discreto está modelado por la ecuación en diferencias:

$$y_k - 1.8 y_{k-1} + 0.81 y_{k-2} = u_{k-1} - u_{k-2}$$

Si, estando en equilibrio con un valor de u=10, en un momento dado la entrada pasa a valer {...,10,20,30,40,50,40,30,20,10,0,-10,-20,-30,...}, obtener la transformada en Z de la secuencia de salida y la expresión temporal de dicha secuencia.

2.5. Respuesta de sistema discreto

Obtener la respuesta del sistema cuya función de transferencia es:

$$G(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

en el instante 50 ante la entrada $\{u_k\} = \{0,2,3,2,1,0,0,\ldots\}$.

2.5. Respuesta de sistema discreto

Obtener la respuesta del sistema cuya función de transferencia es:

$$G(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{4z^4}$$

en el instante 100 ante la entrada $u_k = sen(2k)$.

2.7. Respuesta de sistema discreto (proceso de fabricación)

La siguiente ecuación modela la relación entre el número de piezas que entra y el número de piezas que salen cada minuto de un proceso de fabricación:

$$y_k = 1.2y_{k-1} - 0.36y_{k-2} + 0.48u_{k-2}$$

Si el proceso se encuentra en equilibrio con un valor u=10, y en un momento dado se cambia a u=15, manteniéndose constante a partir de ese momento, obtener la evolución del número de piezas que salen.

2.8. Respuesta de sistema discreto

La ecuación en diferencias siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema discreto:

$$y_k = 10 + 0.81y_{k-2} + 2u_{k-1} + u_{k-2}$$

Estando el sistema en equilibrio con una entrada igual a 2, se cambia dicha entrada en un momento dado, pasando a valer 3 durante 10 periodos, para pasar después a valer 1 y permanecer constante en ese valor. Obtener la evolución de la salida del sistema.

2.9. Respuesta de sistema discreto

La ecuación en diferencias siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema discreto:

$$y_k = 1 + 1.8y_{k-1} - 0.81y_{k-2} + 0.5u_{k-2}$$

Estando el sistema en equilibrio con una salida igual a 200, se cambia el valor de la entrada en un momento dado, pasando a valer 0 durante 5 periodos, para pasar después a valer 2 y permanecer constante en ese valor. Obtener la evolución de la salida del sistema.

2.10. Respuesta de sistema discreto

La ecuación en diferencias siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema discreto:

$$y_k = 5 + 1.8y_{k-1} - 0.8y_{k-2} + u_{k-1}$$

Estando el sistema en equilibrio con una salida igual a 100, se cambia el valor de la entrada en un momento dado, pasando a valer 0 durante 6 periodos, para pasar después a valer 1 y permanecer constante en ese valor. Obtener la evolución de la salida del sistema.

2.11. Respuesta de sistema discreto

La ecuación en diferencias siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema discreto:

$$y_k = -4 - 0.3y_{k-1} + 0.7y_{k-2} + u_{k-2}$$

Estando el sistema en equilibrio en una situación tal que la entrada es igual a la salida, se cambia el valor de la entrada en un momento dado, pasando a valer -3 durante 4 periodos, para pasar después a valer 0 y permanecer constante en ese valor. Obtener la evolución de la salida del sistema.

2.12. Evolución de número de estudiantes

Las siguientes ecuaciones en diferencias modelan la relación entre el número de alumnos nuevos que entran cada año en una escuela (u_k) y el número de alumnos que se licencian (w_k), suponiendo que no abandona nadie:

$$w_k - 0.64w_{k-2} = 0.12u_{k-2} + 0.24u_{k-3}$$

Si partiendo de la escuela vacía, se admite a 100 alumnos cada año, calcular el número de alumnos que habrá en la escuela en régimen permanente (cuando pase mucho tiempo).

Si estando el sistema en equilibrio en la situación anterior (con una entrada constante igual a 100), en un momento dado se reduce la entrada a 70 alumnos por año, obtener la evolución del número de estudiantes que hay en la escuela cada año (obtener la expresión de los términos de la respuesta sin calcular los coeficientes).

2.13. Evolución de piezas fabricadas y almacenadas

Las ecuaciones siguientes modelan la cantidad de piezas en bruto almacenadas (x), y la cantidad de piezas acabadas almacenadas (y) en función de las piezas en bruto que entran cada día en un proceso:

$$x_k = 0.99x_{k-1} + u_{k-1}$$

$$y_k = 0.96y_{k-1} + 0.01x_{k-1}$$

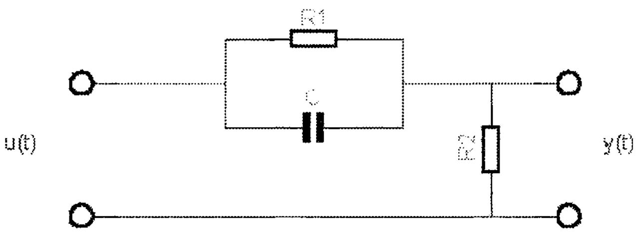
Estando el sistema en equilibrio con u=100, un día determinado llega un camión con 1000 piezas acabadas procedentes de otra planta, que se añaden al almacén de piezas acabadas. Calcular la evolución con el tiempo del número de piezas acabadas a partir de ese día.

3. SISTEMAS CONTINUOS MUESTREADOS

3.1. Identificación de circuito eléctrico

La siguiente tabla muestra los datos obtenidos al realizar un ensayo de identificación mediante computador al circuito electrónico de la figura.

Tiempo	Entrada	Salida
0	6.165	6.171
0.002	5.627	5.482
0.004	5.075	4.814
0.006	5.352	4.978
0.008	4.304	3.832
0.010	6.696	6.143
...	...	...

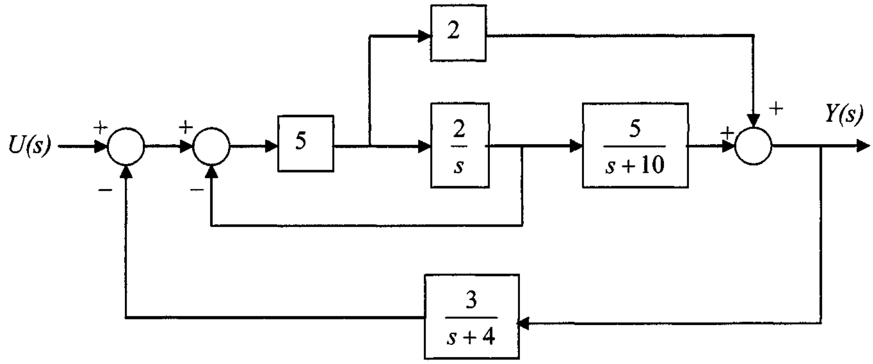


Calcular el valor de las resistencias del circuito anterior teniendo en cuenta que el valor de la entrada se ha mantenido constante entre periodos de muestreo, y que la capacidad del condensador es de 100nF. Tener en cuenta que se trata de un sistema continuo poco habitual en lo que respecta a los grados del numerador y del denominador.

4. SIMPLIFICACIÓN DE DIAGRAMAS DE BLOQUES

4.1. Diagrama de bloques

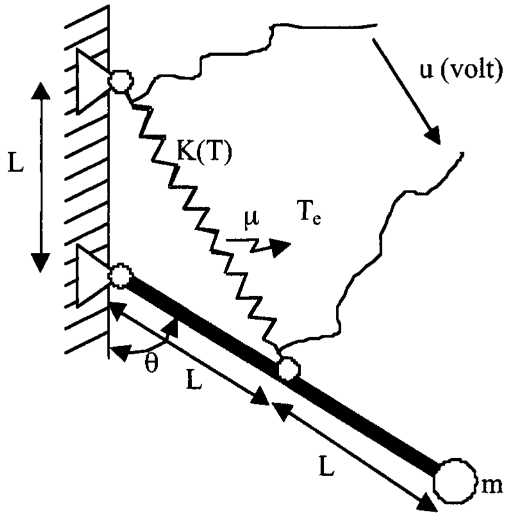
Simplificar el diagrama de bloques de la figura, obteniendo la función de transferencia $G(s) = Y(s)/U(s)$.



5. MODELADO DE SISTEMAS FÍSICOS. LINEALIZACIÓN

5.1. Brazo articulado

El sistema de la figura representa un modelo de brazo articulado.



El brazo (que puede girar alrededor de un punto fijo) se mueve gracias a la acción de un muelle construido de un material especial de manera que su constante elástica varía con su temperatura según la ecuación: $K(T)=K_0 T^3$, con T en ° C.

A través del muelle (que tiene una resistencia constante R) se hace circular una corriente eléctrica que produce su calentamiento. La entrada al sistema es la tensión aplicada. Entre el muelle y el exterior se produce una transmisión de calor con coeficiente μ. Conforme el muelle se calienta o enfría su constante elástica cambia, y por tanto cambia la fuerza aplicada sobre el brazo, moviéndose éste.

El brazo se supone con toda su masa m concentrada en el extremo. El muelle tiene una longitud de reposo l_0, y una capacidad calorífica $m_l c_l$. La temperatura exterior (T_e) se supone constante.

a) Obtener las ecuaciones del sistema y expresarlas en representación interna.

b) Obtener las ecuaciones lineales aproximadas en representación interna en función del punto de funcionamiento θ_0. Obtener la función de transferencia entre la tensión y el ángulo.

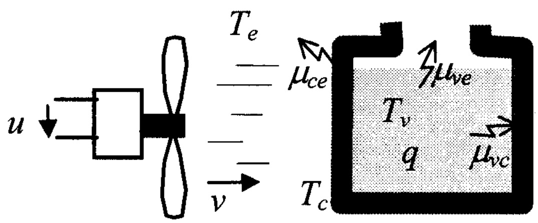
c) Estudiar la estabilidad del sistema en función del punto de funcionamiento θ_0. ¿Es el funcionamiento del brazo articulado razonable? ¿Qué elemento se tendría que añadir para que funcionara correctamente?

d) Comprobar si existe algún punto de funcionamiento donde el sistema oscile de forma natural a una frecuencia de 10 rad/s.

Datos: R=10 Ω, L=0.5m, l_0=0.2m, T_e=25°C, K_0=0.001 N /m°C³, μ=0.5 W/°C, m=1 kg, $m_l c_l$=2 J/°C

5.2. Cuba de fermentación

El sistema de la figura representa una cuba de fermentación de vino de laboratorio. El vino al fermentar produce una cantidad de calor por unidad de tiempo q, que hace que éste se caliente. El vino transmite calor por convección y conducción a la cuba y al exterior. Por otra parte la cuba transmite calor al exterior.



Para regular la temperatura de fermentación se utiliza un ventilador cuya tensión de alimentación u se puede variar para modificar la velocidad del aire soplado sobre la cuba, v, lo que a su vez modifica los coeficientes de transmisión de calor. Sabiendo que:

- La relación entre la señal u (en voltios) y la señal $z=v^2$ (en m²/s²) ha sido determinada experimentalmente quedando definida por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1}$$

- Los coeficientes de transmisión de calor entre la cuba y el exterior y entre el vino y el exterior dependen de la velocidad del aire. Las relaciones (obtenidas experimentalmente) son:

$$\mu_{ce} = 5\sqrt{2+v} \qquad \frac{W}{^{\circ}C}$$

$$\mu_{ve} = 2\sqrt{3+\frac{v}{4}} \qquad \frac{W}{^{\circ}C}$$

- El coeficiente de transmisión entre el vino y la cuba se supone constante $\mu_{vc} = 15 \;\; {}^{W}\!/_{^{\circ}C}$
- El calor generado por la fermentación por unidad de tiempo, $q(t)$, es una señal de perturbación.
- La temperatura exterior se supone constante: T_e=15 °C.
- La temperatura del vino y de la cuba se suponen uniformes en toda la masa del vino y de la cuba respectivamente.
- La masa de vino es m_v=10 kg, y el calor específico c_v=4000 J/°Ckg.
- La masa de la cuba es m_c=1 kg, y el calor específico c_c=8000 J/°Ckg.

Obtener:

a) Las ecuaciones del sistema y expresarlas en representación interna.

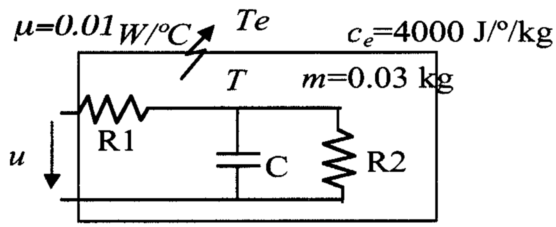
b) Las ecuaciones lineales aproximadas en representación interna para el punto de funcionamiento u_0=100V, q_0=100 W.

c) La función de transferencia entre la tensión y la temperatura del vino, y la función de transferencia entre el calor generado y la temperatura del vino.

d) ¿Se pueden simplificar las funciones de transferencia anteriores?. ¿Por qué?. Obtener la función de transferencia simplificada en caso de que sea posible.

5.3. Batería recargable

La siguiente figura representa el modelo de una batería recargable.



El calor disipado por las resistencias calienta el líquido de la batería, cuya temperatura se supone uniforme. Se considera la transmisión de calor al exterior a través de las paredes de la batería. Las resistencias y el condensador varían con la temperatura y con la tensión según las funciones:

$$C = \frac{100}{1 - \frac{v_c^{\,2}}{100}} \ F \ ; \quad R2 = 10^5\left(1 - \frac{v_c^{\,2}}{100}\right) \ \Omega \ ; \quad R1 = 10 + \frac{T}{10} \ \ \Omega$$

donde T está en grados centígrados.

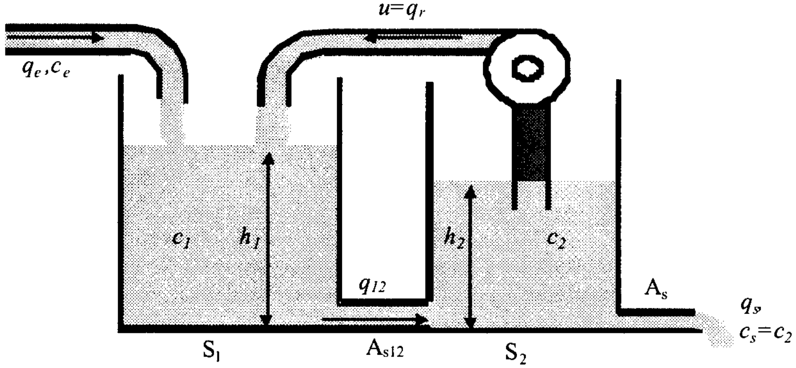
a) Obtener el modelo del sistema y expresarlo en representación interna, considerando que la entrada de control es la tensión aplicada, y que la temperatura exterior es una entrada de perturbación.

b) Obtener la función de transferencia aproximada entre la tensión y la temperatura en el punto de funcionamiento definido por $v_{c,0}$=9.9 V, $T_{e,0}$=25ºC.

c) Obtener la evolución aproximada de la temperatura si estando en equilibrio en el punto de funcionamiento anterior se incrementa la tensión de entrada en un valor de 1 volt. ¿Cuál es la temperatura máxima que se alcanza?

5.4. Planta depuradora

La figura muestra una planta depuradora formada por dos depósitos en serie en los que se produce una reacción de descomposición del contaminante del agua de entrada.



El agua que entra tiene un caudal q_e que se considera constante, y una concentración de contaminante c_e que puede variar (entrada de perturbación). En el primer depósito se produce una reacción que elimina parte del contaminante. En el segundo depósito se produce otra reacción que también elimina parte del contaminante. Se supone para simplificar que la concentración en cada tanque es uniforme (la misma en todo el tanque). La señal de entrada al sistema es el caudal de recirculación, $u=q_r$, que se puede variar a voluntad mediante una bomba. Esa agua recirculada tiene una concentración igual a c_2.

a) Obtener las ecuaciones del sistema y expresarlas en representación interna, considerando como variable de salida la concentración del agua de salida.
b) Obtener un modelo lineal aproximado en representación interna alrededor del punto de funcionamiento definido por u_0=0.002 m3/s, $c_{e,0}$=10 kg/m^3.
c) Obtener la función de transferencia que relaciona la variable de perturbación (concentración del agua entrante) con la de salida en el punto anterior. ¿Qué hay de extraño en esta función de transferencia, visto el modelo del sistema?

Datos: S_1=30 m^2, S_2=10 m^2, A_{12}=0.001m^2, A_s=0.001, q_e=0.005 m^3/s, K_1=0.0005 s^{-1}, K_2=0.002 s^{-1}

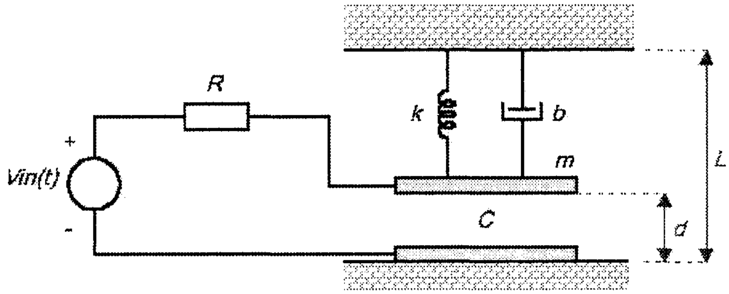
Notas:
- La ecuación de la reacción en cada depósito es la de conservación de la masa (la variación con el tiempo de la masa total de contaminante en un depósito es igual a la masa de contaminante que entra por unidad de tiempo menos la que sale menos la que se elimina por reacción).
- La masa eliminada por reacción por unidad de tiempo es proporcional a la masa total de contaminante en el depósito (constante de proporcionalidad K_1 y K_2)

5.5. Actuador electrostático

El sistema electromecánico de la figura representa un actuador electrostático controlado por tensión empleado para provocar desplazamientos verticales de alta precisión (hasta 10 μm).

La salida del sistema es la distancia, d, que separa las placas de un condensador variable. La entrada del sistema es la tensión aplicada con la fuente variable (v_{in}). La placa superior se suspende del bastidor del actuador por medio de un resorte y un amortiguador.

Índice



La capacidad de un condensador plano es función de la separación existente entre placas, $C=\alpha/d$, donde α es una constante que depende del medio dieléctrico, ε, y de la geometría de las placas, S. A su vez, la fuerza con la que se atraen las placas del condensador, cuyo origen está en la distribución de cargas de diferente signo que se establece, es función de la tensión en bornes del condensador, V_C, de la capacidad existente, C, y de la distancia que las separa. Esto es $F = C \cdot V_c^2 / d$.

Datos: masa de la placa superior, m=1Kg; k=1000N/m; longitud en reposo del resorte, l_0=38cm; b=10Ns/m; R=470 Ω;; $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}\, Nm^2 / V^2$; L=40cm.

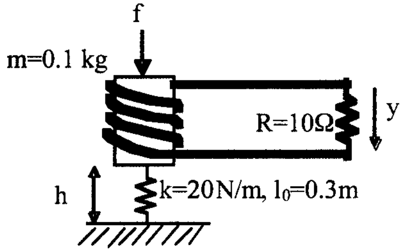
a) Obtener las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico del sistema de forma exacta, considerando el efecto de la gravedad y expresarlas en representación interna.

b) Obtener una representación en espacio de estados lineal aproximada del sistema alrededor de un punto de funcionamiento genérico d_0, expresando las ecuaciones en función de d_0. Representar en un diagrama la estructura interna del sistema linealizado empleando los bloques más simples.

c) Estudiar la estabilidad del sistema linealizado en función del punto de funcionamiento d_0.

5.6. Transductor electromagnético

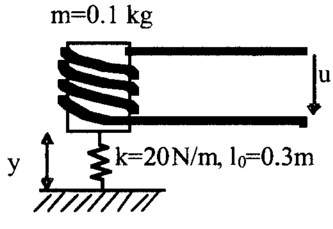
El sistema de la figura representa un transductor formado por un imán de masa m unido a un muelle, que puede moverse libremente en el interior de una bobina, sometido a un rozamiento viscoso de constante c=2 Ns/m. La entrada al sistema es la fuerza aplicada al imán, f. Como consecuencia del movimiento del imán, se produce una fuerza electromotriz en la bobina, que es función de la posición del imán y de su derivada: $\varepsilon = 10\dot{h} \cdot e^{-100(h-0.1)^2}$ volt. La inductancia de la bobina, L, depende de la posición de la masa: $L = 0.2e^{-100(h-0.1)^2}$ H. Por otra parte, el campo magnético generado por la corriente que circula por la bobina produce una fuerza sobre el imán, que tiende a atraerlo al centro de la bobina, y que es función de la posición relativa del mismo respecto de la bobina, y de la corriente: $F_{mag} = i^2(h-0.1)e^{-100(h-0.1)^2}$ N. La señal de salida del sistema es la tensión en la resistencia R.



a) Obtener el modelo del sistema en representación interna.
b) Linealizar el modelo anterior y obtener la función de transferencia entre la fuerza y la tensión, alrededor del punto de equilibrio definido por h_0=0.2.
c) Analizar (sin calcularla) cómo sería la respuesta del sistema ante una pequeña variación en escalón en la fuerza aplicada.

5.7. Actuador electromagnético (electroimán)

El sistema de la figura representa un solenoide formado por una masa m unida a un muelle, que puede moverse libremente en el interior de una bobina, sometida a un rozamiento viscoso de constante $c=2$ Ns/m. El comportamiento eléctrico de la bobina es equivalente a una resistencia $R=2$ Ω en serie con una inductancia L que depende de la posición de la masa: $L = 0.2e^{-100(y-0.1)^2}$ H. El campo magnético generado por la corriente que circula por la bobina produce una fuerza sobre la masa m, que tiende a atraerla al centro de la bobina, y que es función de la posición relativa de la masa respecto de la bobina, y de la corriente: $F = i^2 (y-0.1)e^{-100(y-0.1)^2}$ N. La señal de entrada al sistema es la tensión aplicada a la bobina, u.



a) Obtener el modelo del sistema en representación interna.
b) Linealizar el modelo anterior y obtener la función de transferencia entre la tensión y la posición de la masa, alrededor del punto de equilibrio definido por y_0=0.2.

c) Analizar (sin calcularla) cómo sería la respuesta del sistema ante una pequeña variación en escalón en la tensión de entrada.

5.8. Depósitos acoplados

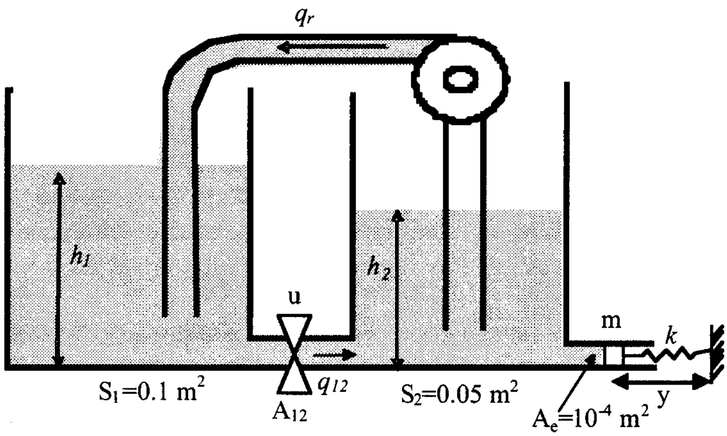
El sistema de la figura representa dos depósitos acoplados entre los que se recircula agua. El volumen total de agua es constante e igual a 0.15 m^3. El caudal que recircula la bomba depende de la diferencia de niveles de los depósitos, según la ecuación:

$$h_1 - h_2 = 2 - 2\cdot 10^6 q_r^{\,2} \text{ (con } q_r \text{ en m}^3\text{/s, } h \text{ en m)}$$

La entrada u es la tensión aplicada a la electroválvula, de tal forma que la sección del orificio de la válvula que comunica los depósitos depende de dicha tensión:

$$A_{12} = 10^{-5} u \text{ (con } A_{12} \text{ en m}^2\text{, y } u \text{ en volt)}$$

El émbolo de masa $m=10$ *kg* puede moverse debido a la presión del agua, habiendo un rozamiento viscoso de constante $c=1$ Ns/m. El muelle tiene una longitud en reposo $l_0=0.5$ m y una constante elástica $k=3$ N/m.

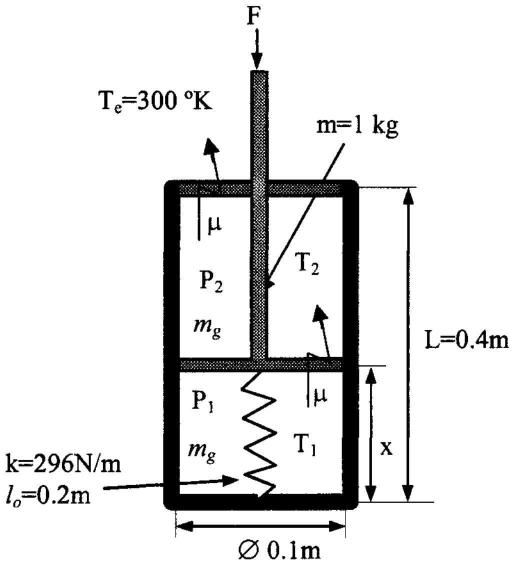


a) Obtener el modelo del sistema en representación interna.

b) Linealizar el modelo anterior y obtener la función de transferencia entre la tensión de la electroválvula y la posición del émbolo, alrededor del punto de equilibrio definido por h_{20}=0.6 m.

5.9. Cilindro con émbolo semiaislado

El sistema de la figura representa un cilindro con un émbolo que divide el interior en dos partes herméticas. La masa de gas en cada parte es constante. El émbolo se puede mover mediante la aplicación de una fuerza F en el vástago, que es la entrada de control del sistema. El exterior del cilindro está aislado térmicamente excepto por el extremo superior, por lo que solo hay transmisión de calor entre los dos gases a través del émbolo y entre el gas 2 y el exterior, ambos con coeficiente de transmisión μ=1.



a) Obtener el modelo exacto del sistema en representación interna.

b) Obtener el modelo lineal aproximado en representación interna y la función de transferencia entre la fuerza y la posición del émbolo, alrededor del punto de equilibrio definido por x_0=0.2 m.

Datos de los gases (los dos igual): m_g=0.01 kg, C_p=4000, n=0.3, R=8.3145 (constante de los gases perfectos), μ=1.

5.10. Circuito cerrado de agua

El sistema de la figura representa un circuito cerrado de agua de sección constante. La bomba produce un incremento de presión que es función del caudal circulante y de la tensión aplicada (u), de la forma:

$$\Delta P_b = 10^4 u - 5 \cdot 10^{11} Q^2$$

El conducto produce una caída de presión por rozamiento:

$$\Delta P_c = 10^{11} \cdot Q^2$$

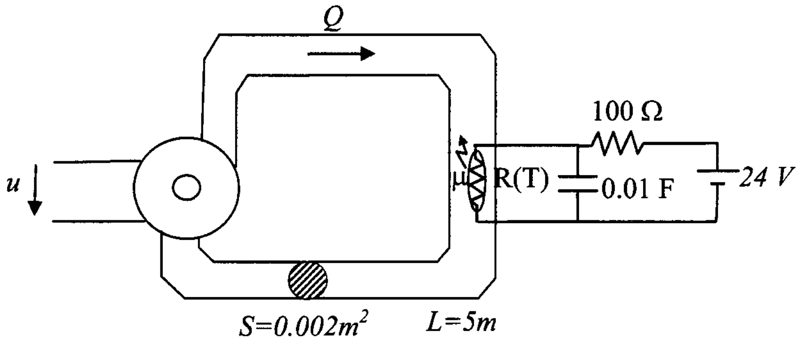
Con objeto de medir el caudal que circula se inserta en la tubería una resistencia variable con la temperatura:

$$R(T) = 100(1 + T), \text{ con } T \text{ en °C}$$

Dicha resistencia está conectada al circuito de la figura. Como consecuencia de la corriente que circula por ella, ésta se calienta, y transmite calor al fluido (que se supone a temperatura constante). El coeficiente de transmisión de calor depende de la velocidad del fluido, v, según la ecuación:

$$\mu = 0.01\sqrt{1 + 10v}$$

La señal de salida del sistema es la tensión en la resistencia sensora.



Datos: m_R=0.01kg, c_R=5000 J/kg°C, T_{agua}=20°C (constante). Todas las ecuaciones en unidades internacionales.

a) Obtener un modelo en representación interna del sistema.
b) Obtener un modelo lineal aproximado en representación interna, y la función de transferencia alrededor del punto de equilibrio definido por un caudal $Q_0 = 0.5 \cdot 10^{-3} m^3/s$.

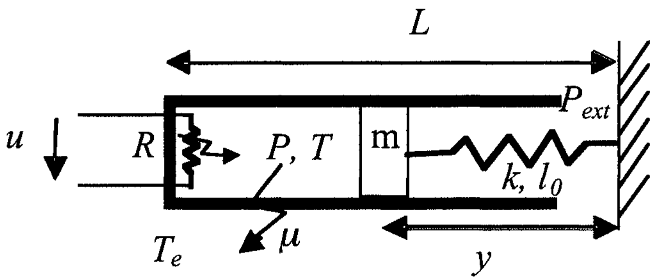
5.11. Cilindro neumático de accionamiento termoeléctrico

El sistema de la figura representa un cilindro neumático con accionamiento termoeléctrico. La señal de entrada (u) es la tensión aplicada a la resistencia calefactora. Dicha resistencia se supone de capacidad calorífica despreciable, por lo que la potencia disipada en ella se transmite directamente al gas del interior del cilindro. Dicho gas puede perder calor al exterior por conducción-convección a través de la pared del cilindro, con coeficiente de transmisión μ.

Como consecuencia del calentamiento y aumento de presión del gas, éste ejerce una fuerza sobre el émbolo de masa m, superior a la ejercida por la presión exterior, de tal forma que éste se mueve.

La señal de salida del sistema es la posición del émbolo, y.

Se sabe que en régimen permanente, con la entrada u=0 volt, la posición de equilibrio del émbolo es y=0.3 m.



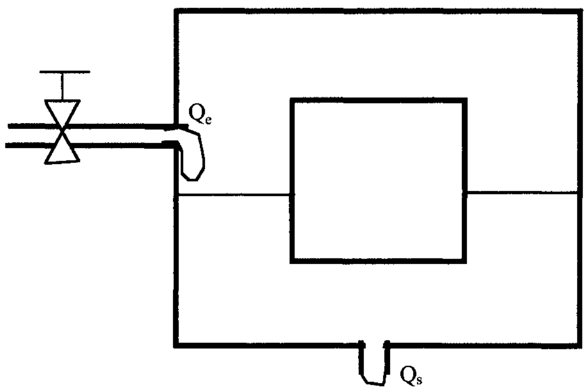
Datos: R=10 Ω, m=2kg, k=500 N/m, l_0=0.4m, L=0.5 m, S=0.001 m^2, μ=1 W/°K, T_e=290 °K (constante), P_{ext}=10^5 Pa (constante), m_gC_g=0.2 J/°K.

a) Obtener un modelo en representación interna del sistema.

b) Obtener un modelo lineal aproximado en representación interna, y la función de transferencia alrededor del punto de equilibrio definido por una tensión u=30V.

5.12. Depósito con flotador

El sistema siguiente representa un cilindro flotando dentro de un tanque cilíndrico de agua (ambos cilindros con las caras planas horizontales):



La entrada al sistema es el caudal entrante, $Q_e=u$, que se puede variar mediante una electroválvula.

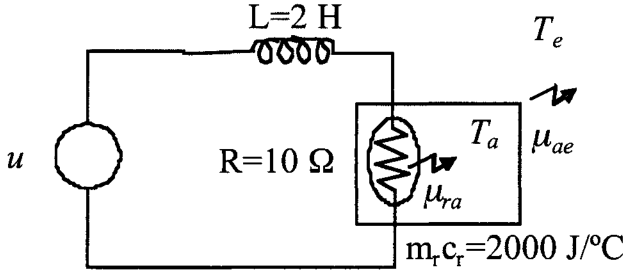
a) Obtener las ecuaciones diferenciales que relacionan el caudal de entrada con el nivel de agua en el depósito y la posición vertical del cilindro, expresándolas en representación interna.

b) Obtener la función de transferencia aproximada entre el caudal de entrada y la posición del cilindro para el punto de funcionamiento $Q_{e0}=0.06\ m^3/s$.

Datos: Tanque cilíndrico: R=2m, orificio de salida A_s=0.01m². Cilindro flotando: radio r=1m, masa m=1000 kg

5.13.Calentador de agua

El sistema siguiente representa un calentador de agua:



La entrada al sistema es la tensión u aplicada al circuito. La resistencia (que tiene una masa no despreciable) se calienta por efecto Joule, y transmite calor por convección al agua, que a su vez transmite calor al exterior. Los coeficientes de transmisión dependen de la temperatura del agua:

$$\mu_{ra} = 10(1+\frac{T_a}{100}) \quad W/°C \qquad\qquad \mu_{ae} = (1+\frac{T_a}{80}) \quad W/°C$$

donde T_a está en °C. Las capacidades caloríficas del calefactor y del agua son: $m_r c_r$=2000 J/°C, $m_a c_a$=100000 J/°C

Obtener un modelo en representación interna del sistema, suponiendo que la variable de salida es la temperatura del agua, y que la temperatura exterior es una entrada de perturbación.

a) Obtener un modelo lineal aproximado en representación interna alrededor del punto de equilibrio definido por T_a=80°C, T_e=20°C y expresarlo en formato matricial.

b) Obtener la función de transferencia que relacione la variación de la temperatura exterior con la variación de la temperatura del agua alrededor del punto de equilibrio anterior.

6. MODELADO DE SISTEMAS DISCRETOS

6.1. Cuenta bancaria

Se quiere calcular la evolución del saldo de una cuenta bancaria bajo varios supuestos. El interés mensual que paga el banco es del 0.4% en todos los casos. En todos los casos se parte de una cuenta vacía inicialmente. Calcular la transformada en Z de la evolución mensual del saldo y la expresión de la secuencia correspondiente (dejar indicados los coeficientes de los distintos términos que aparecen en la transformada inversa, sin calcularlos), en los siguientes casos:

a) Se ingresa una cantidad constante de 100 euros cada mes, y el banco paga los intereses cada mes.

b) Se ingresan 200 euros cada dos meses (en los meses intermedios no se ingresa nada), y el banco paga los intereses cada mes.

6.2. Estudiantes en escuela

Se quiere utilizar un modelo para estudiar la evolución del número de estudiantes en una escuela. La escuela tiene 2 cursos. Al primer curso entra un número de estudiantes cada año fijado por el límite de admisión (variable de entrada que se define cada año para el siguiente curso). En primer curso cada año aprueba una fracción a_1 del total de matriculados, que pasa a segundo, y abandona la escuela una fracción b_1. En segundo aprueba el curso una fracción de los matriculados a_2, que se licencian, y no abandona nadie. En principio no se conocen los valores de esos parámetros, pero se dispone de datos de la evolución de alumnos en cada curso desde que se abrió la escuela:

Año	0	1	2	3	4	5
Alumnos nuevos	100	100	100	100	100	-
Alumnos en 1°	0	100	158	198	220	230
Alumnos en 2°	0	0	29	61	82	99

a) Expresar las ecuaciones que representen el modelo de la escuela y expresarlas en representación interna

b) Calcular las constantes que definen el modelo a partir de los datos anteriores utilizando todos los datos disponibles.

c) Calcular el número de alumnos aproximado en 1° y en 2° al que se llegaría en régimen permanente si se mantiene la entrada en 100.

d) Si en el año 5 se decide reducir la entrada de alumnos a 80 y mantenerla constante en ese valor a partir de entonces, obtener la transformada en Z de la evolución de los alumnos totales de la escuela y expresar su transformada inversa.

6.3. Empresa de Trabajo Temporal

Se pretende obtener un modelo matemático que represente la evolución mensual de la situación de los trabajadores de una empresa de trabajo temporal (ETT). Los trabajadores pueden estar, o bien en la bolsa esperando que los manden a una empresa a trabajar (esperando que los alquilen), o trabajando alquilados en alguna empresa. El funcionamiento de la ETT es el siguiente:

- Cada mes, la bolsa de la ETT se ve incrementada en una cantidad de trabajadores (que se apuntan a la ETT) que depende del precio (u_k) que paga la ETT al trabajador por hora trabajada (el precio se decide para aplicarlo el mes siguiente). Esto es:

$$200\frac{precio}{a + precio} \quad \text{con } a = 9 \; euros$$

- Cada mes, un porcentaje de la bolsa de espera pasa a ser alquilado en una empresa. Este porcentaje, expresado en tanto por 1, es una función del precio (cuanto más cara es la hora, más difícil es alquilarle un trabajador a una empresa):

$$\frac{0.4b}{b + precio} \quad \text{con } b = 12 \; euros$$

- El 5% de los trabajadores que están alquilados en alguna empresa, pasan a ser contratados directamente por la misma el siguiente mes, por lo que dejan la ETT.
- El 25% de los trabajadores que están alquilados en alguna empresa, pasan a la bolsa el mes siguiente.
- Finalmente, una proporción de la bolsa abandona la ETT cada mes por no estar conforme con el precio que van a cobrar:

$$\frac{0.6precio}{c + precio} \quad \text{con } c = 8 \; euros$$

Se desea:

a) Obtener las ecuaciones de estado del sistema.

b) Suponiendo que el sistema se encuentra en equilibrio con un precio de 5 euros, calcular de forma aproximada la transformada en Z del número mensual de trabajadores alquilados si se realiza una campaña de promoción subiendo el precio a 7 euros durante 3 meses, bajando después a 3 euros durante otros 3 meses, volviendo después a 5 euros. Obtener también la expresión de los términos que aparecen en la transformada inversa (sin calcular los coeficientes).

6.4. Estudiantes en escuela

La siguiente ecuación en diferencias modela el número de alumnos que se licencian cada año en una escuela en función del número de alumnos nuevos que entran en primer curso:

$$y_k = 0.4y_{k-1} + 0.4u_{k-3}$$

Mientras que la siguiente ecuación modela el número de alumnos que abandonan la escuela cada año sin terminar sus estudios, también en función del número de alumnos nuevos que entran en primer curso:

$$x_k = 0.4x_{k-1} + 0.1u_{k-1} + 0.1u_{k-2}$$

a) Obtener la función de transferencia y la ecuación en diferencias que relaciona el número de alumnos nuevos que entran en primer curso cada año con el número de alumnos total que hay en la escuela cada año.

b) Si durante los 10 primeros años entran 80 alumnos al año, y en los siguientes años entran 100 cada año, obtener la expresión genérica de la cantidad de alumnos que hay en la escuela en el año k (escribir únicamente los términos que aparecen en la transformada inversa sin calcular el valor de los coeficientes).

c) Obtener el número máximo de alumnos que llegará a tener la escuela.

6.5. Estudiantes en escuela

Se quiere utilizar un modelo para estudiar la evolución del número de estudiantes en una escuela. La escuela tiene 2 cursos. Al primer curso entra un número de estudiantes cada año fijado por el límite de admisión (variable de entrada que se define cada año al principio del curso para ese mismo curso). De los alumnos que cursan por primera vez primero, un 50% pasa a segundo, un 30% repiten y un 20% abandonan. De los alumnos que cursan por segunda vez primero, un 60% pasan a segundo, y el resto abandonan la escuela (no se les permite seguir). De los alumnos que cursan por primera vez segundo, el 70% aprueban y se licencian, mientras que el 30% repite. De los alumnos repetidores de segundo, el 90% aprueba y se licencia y el 10% sigue repitiendo.

a) Obtener un modelo en representación interna del sistema.

b) Expresar las ecuaciones anteriores en forma de diagrama de bloques con los bloques más sencillos que sea posible.

c) Calcular la transformada en Z y la expresión de la secuencia (sin calcular los coeficientes) de la evolución del número de alumnos que se licencian cada año si entran 300 alumnos nuevos cada año durante 20 años y a partir de entonces ya no entra ninguno.

6.6. Estudiantes en escuela

Se quiere utilizar un modelo para estudiar la evolución del número de estudiantes en una escuela. La escuela tiene 2 cursos. Al primer curso entra un número de estudiantes cada año fijado por el límite de admisión (variable de entrada que se define cada año al principio del curso para ese mismo curso). De los alumnos que cursan por primera vez primero, un 40% pasa limpio a segundo, un 40% aprueban solo algunas asignaturas, matriculándose al curso siguiente en asignaturas de primero y de segundo, y un 20% no aprueba nada y abandona. De los alumnos que cursan asignaturas de primero y segundo, un 60% aprueban todas las de primero, quedándoles solo asignaturas de segundo, un 10% aprueba todas las de primero y segundo que le quedaban y se licencian, un 20% aprueban solo algunas de primero y de segundo, quedándoles asignaturas de los dos cursos, y un 10% abandona. De los alumnos que solo tienen asignaturas de segundo, el 80% las aprueban todas y se licencian, mientras que al 20% le quedan algunas asignaturas para el curso siguiente.

a) Obtener un modelo en representación interna del sistema, que incluya además una variable de estado que defina el número de licenciados total de la escuela desde que se inauguró hasta el año actual.

b) Expresar las ecuaciones anteriores en forma de diagrama de bloques, de tal forma que haya un bloque de primer orden para cada ecuación de estado.

c) Estando la escuela en equilibrio, con la entrada igual a 150, en un momento dado se decrementa dicha entrada a un valor de 100. Calcular la transformada en Z y la expresión de la secuencia (sin calcular los coeficientes) de la evolución del número de alumnos que abandonan cada año a partir de ese instante.

6.7. Comedor universitario

Se pretende obtener un modelo discreto de la utilización de un comedor universitario.

El funcionamiento es como sigue: En primer lugar los comensales se incorporan a la cola de la comida (llevando la bolsa a cuestas). Una vez salen del autoservicio con la bandeja de comida, se incorporan al grupo de personas con bandeja que están buscando un sitio en las mesas para comer. Una vez encuentran un sitio, se sientan a comer. Finalmente cuando terminan de comer se marchan y dejan el sitio libre.

Las características del modelo son:

- Se considera un periodo discreto de 1 minuto para el modelo.
- La entrada al sistema u_k es la cantidad de gente que llega al comedor cada minuto.
- El número de plazas total del comedor es de ***200***.
- La gente que sale cada minuto de la cola de la comida depende del tamaño de esa cola (a más cola, más personal sirviendo), y se modela como: $5\dfrac{cola}{5+cola}$.

- La gente que encuentra sitio cada minuto depende de la gente que hay buscándolo y del sitio libre que queda y viene dado por la función:

$$\xi \cdot \frac{gente\_buscando}{200 + gente\_buscando},$$

donde ξ es el número de sitios libres.
- Por último, la cantidad de gente que acaba de comer cada minuto es proporcional a la cantidad de gente que hay comiendo:

$$\frac{gente\_comiendo}{30}$$

donde 30 representa el tiempo medio que tarda la gente en comer.

a) Definir las variables de estado del sistema y obtener las ecuaciones en representación interna.

b) Suponiendo que el sistema está en equilibrio con una entrada $\bar{u} = 4$, calcular de forma aproximada la evolución del número de sitios ocupados por personas comiendo si la entrada pasa de 4 a 6 y se mantiene en 6 durante 10 minutos, pasando después a 2 (obtener la transformada en z y los términos de la transformada inversa sin calcular los coeficientes).

6.8. Empresa de Trabajo Temporal

Se pretende obtener un modelo matemático que represente la evolución mensual de la situación de los trabajadores de una empresa de trabajo temporal (ETT). Los trabajadores pueden estar, o bien en la bolsa esperando que los manden a una empresa a trabajar (esperando que los alquilen), o trabajando alquilados en alguna empresa. Los que están trabajando pueden estar a tiempo parcial o a tiempo completo. El funcionamiento de la ETT es el siguiente:

- Cada mes, la bolsa de la ETT se ve incrementada en una cantidad de trabajadores (que se apuntan a la ETT) que depende del precio (u_k) que paga la ETT al trabajador por hora trabajada (el precio se decide un mes para aplicarlo el mes siguiente). Esto es:

$$200 \frac{precio}{9 + precio}$$

- Cada mes, un porcentaje de la bolsa de espera pasa a ser alquilado a tiempo completo en una empresa. Este porcentaje, expresado en tanto por 1, es una función del precio (cuanto más cara es la hora, más difícil es alquilarle un trabajador a una empresa):

$$\frac{4.8}{12 + precio}$$

- Cada mes, un porcentaje de la bolsa de espera pasa a ser alquilado a tiempo parcial en una empresa. Este porcentaje, expresado en tanto por 1, es una función del precio:

$$\frac{3}{10 + precio}$$

- Un 20% de los trabajadores que están a tiempo parcial pasan a tiempo completo el mes siguiente.
- El 5% de los trabajadores que están alquilados en alguna empresa (a tiempo parcial o completo), pasan a ser contratados directamente por la misma el siguiente mes, por lo que dejan la ETT.
- El 25% de los trabajadores que están alquilados en alguna empresa, pasan a la bolsa el mes siguiente.
- El 10% de los trabajadores a tiempo parcial, dejan la ETT al mes siguiente.
- Finalmente, una proporción (en tanto por 1) de la bolsa abandona la ETT cada mes por no estar conforme con el precio que van a cobrar:

$$\frac{1}{1 + precio}$$

Se desea:

a) Obtener un modelo en representación interna del sistema, suponiendo que la salida es el número total de trabajadores empleados por la ETT.

b) Obtener un modelo lineal aproximado alrededor del punto de equilibrio definido por un precio de 10 euros.

6.9. Proceso de fabricación

A un proceso de fabricación de piezas entran bloques para ser mecanizados. Se tienen 4 estaciones de mecanizado: una de corte, una de ranurado, una de pulido y una de taladrado. Los bloques pasan en primer lugar a la estación de corte, donde se cortan por la mitad, formando dos partes iguales. Después se pasan a la estación de ranurado donde se les mecaniza una ranura. El 60 % de las piezas ranuradas pasan a la estación de taladrado, donde se les hace un taladro. El 30% de las piezas ranuradas deben pasar a una estación intermedia de pulido, donde se pulen las rebabas. El 90% de las piezas pulidas pasan después a la estación de taladrado. El 90% de las piezas taladradas salen del proceso para ser envasadas (el 10% es defectuoso). Cada estación dispone de un buffer donde se almacenan las piezas que llegan a la estación a la espera de ser procesadas. Cada 10 minutos cada estación procesa un porcentaje de las piezas almacenadas en su buffer respectivo, siendo estos porcentajes: corte: 30%, ranurado: 20%, pulido: 15%, taladro: 25%. La entrada son los bloques que llegan al proceso cada 10 minutos. La salida son las piezas correctas que salen de la estación de taladrado.

Obtener un modelo en representación interna del sistema.

7. CONVOLUCIÓN CONTINUA Y DISCRETA

7.1 Respuesta de sistema discreto

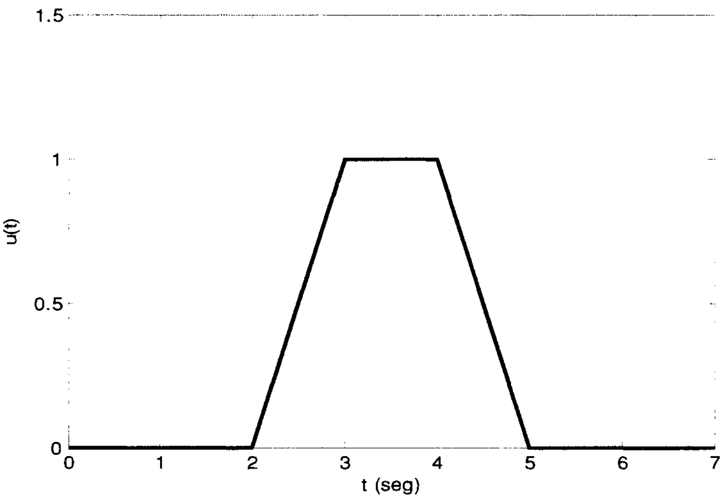
La secuencia de entrada $u(k)=\{3,1,2,-1,0,0\ldots\}$ se aplica a un procesador de tiempo discreto cuya respuesta impulsional es $g(k)=\{1,2,1,0,0\ldots\}$. ¿Cuál es la secuencia de salida del procesador?

7.2. Respuesta de sistema continuo

El comportamiento dinámico de un sistema viene descrito por la siguiente ecuación diferencial:

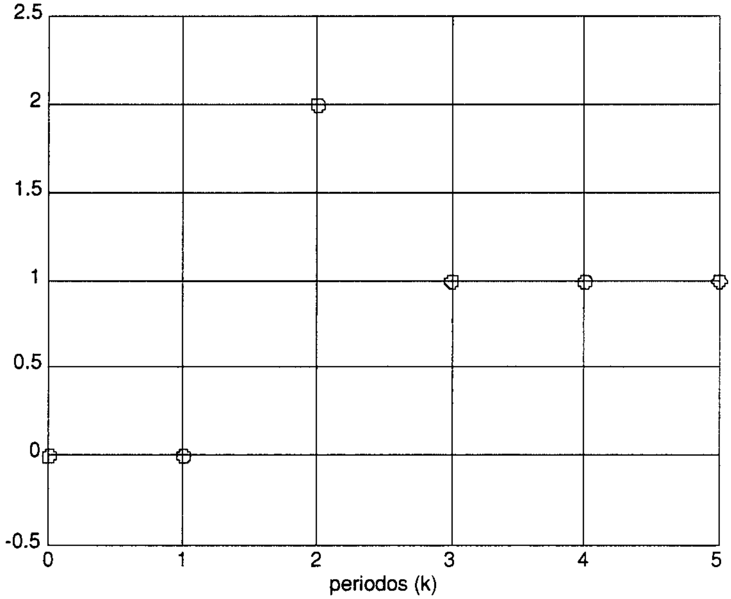
$$0.025\cdot y+0.35\cdot \dot{y}+\ddot{y}=u$$

Obtener por convolución la respuesta en el instante t=10 s. si se le aplica la siguiente entrada al sistema.



7.3. Respuesta de sistema discreto ante rampa

En la siguiente figura se muestra la respuesta de un sistema discreto ante una rampa unitaria:



Obtener utilizando convolución:

a) La función de transferencia del sistema.

b) La secuencia de valores que tomaría la salida si la entrada fuera la secuencia $\{1,1,2,2,2,2,2,2,...\}$.

7.4. Respuesta de sistema discreto

Un sistema discreto se describe mediante la ecuación en diferencias:

$$y_k = 0.8y_{k-1} + 0.5u_{k-1} + u_{k-2} - 2v_{k-1}$$

donde tanto u como v son señales de entrada. Si se dispone de las secuencias

$$\{u_k\} = \{1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots\} \;, \quad \{v_k\} = \{-2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots\}$$

Obtener mediante convolución el valor de y en el instante 20.

7.5. Respuesta de sistema discreto en representación interna

La ecuación siguiente modela el comportamiento de un sistema discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

Obtener mediante convolución el valor del estado 1 en el instante 6 si, partiendo de condiciones iniciales nulas, la entrada es la secuencia $u_k=\{0,2,2,2,0,0,\ldots\}$.

7.6. Aproximación de respuesta de sistema discreto

La ecuación en diferencias siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema

$$y_k = 0.3 y_{k-1} + 10 u_{k-1}$$

Se sabe que la señal de entrada en los 4 periodos anteriores al periodo actual ha sido 10, 12, 8,7, desconociéndose los valores de periodos anteriores. Obtener una aproximación del valor de la salida en el periodo actual. ¿Es buena esta aproximación?

7.7. Respuesta de sistema discreto

La ecuación siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema discreto:

$$y_k = 0.5 y_{k-2} + u_k + 2 v_k$$

Obtener mediante convolución la salida del sistema si las secuencias u_k y v_k son de la forma: $u_k=\{0,2,2,0,0,\ldots\}$, $v_k=\{1,0,0,1,1,0,0,\ldots\}$.

7.8. Respuesta de sistema discreto

La ecuación siguiente modela la relación entre la entrada y la salida de un sistema discreto:

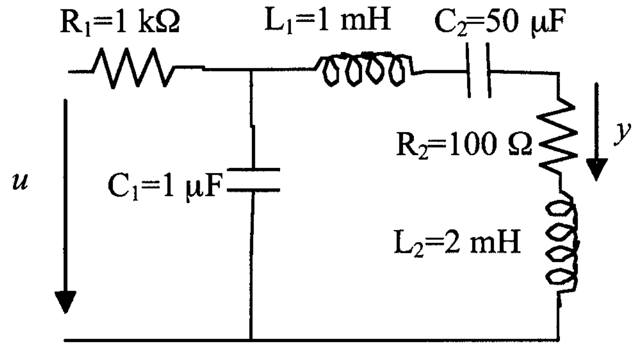
$$y_k = 1.6 y_{k-1} - 0.64 y_{k-2} + u_k + 2 u_{k-1}$$

Obtener mediante convolución la salida del sistema en todos los instantes (desde k=0 hasta infinito) si la secuencia u_k es de la forma: $u_k=\{0,2,0,3,0,2,0,0,0,\ldots\}$.

8. REPRESENTACIÓN INTERNA

8.1 Modelo de circuito eléctrico

Dado un sistema eléctrico formado por los componentes de la figura:



Desarrollar un modelo de representación interna tomando como variables de estado:

a) Las tensiones en los condensadores y las corrientes en las bobinas.

b) La suma y diferencia de tensiones en los condensadores y la caída de tensión en R_2. Determinar la matriz de la transformación lineal correspondiente.

c) Desarrollar un modelo entrada-salida a partir de la transformación realizada.

8.2. Modelo se sistema continuo

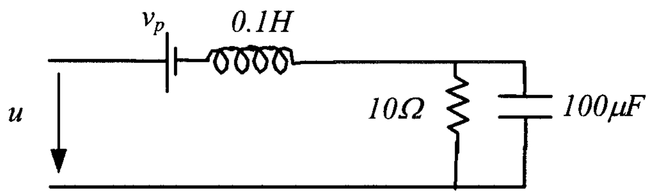
Dado el sistema de ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 3\dot{u} + u$$

Obtener un modelo en representación interna válido de forma que uno de los estados sea la salida del sistema.

8.3. Modelo de circuito eléctrico

En el circuito de la figura la tensión de entrada (u) se puede variar a voluntad. La fuente v_p representa una perturbación de valor desconocido.



a) Obtener un modelo en representación interna del sistema.

b) Representar el modelo anterior del sistema mediante un diagrama de bloques en el que se utilicen los bloques más simples que sea posible.

8.4. Modelo de proceso químico

Un proceso químico parte de un reactivo a que al reaccionar produce reactivo b (4 moles de b por cada uno de a) que a su vez reacciona para dar reactivo c (1 mol de c por cada 2 de b). Cada minuto un porcentaje (α) de los moles del reactivo a reaccionan para dar lugar a reactivo b. Por otra parte, cada minuto otro porcentaje (β) de los moles de b reaccionan para dar reactivo c. Se ha realizado un experimento partiendo de 500 moles de reactivo a, midiéndose cada minuto las cantidades de cada reactivo:

Minuto	0	1	2	3	4	5	6
Moles de a	500	452	408	364	329	298	262
Moles de b	0	?	372	517	638	730	812
Moles de c	0	0	?	14.5	28	45.2	60.2

a) Obtener un modelo en representación interna del sistema utilizando todos los datos disponibles.

b) Utilizando el modelo, calcular la transformada en Z y la expresión de la secuencia (sin calcular los coeficientes) de la evolución del número de moles del reactivo b.

c) Obtener el número de moles de reactivo b cuando pase mucho tiempo.

8.5. Modelo de sistema continuo

Obtener un modelo en representación interna del sistema modelado por las ecuaciones diferenciales (y es la salida del sistema):

$$\ddot{w} + 2w = 3u$$

$$\dot{y} + 3y = w + u$$

8.6. Modelo de sistema discreto

Obtener un modelo en representación interna del sistema modelado por las ecuaciones en diferencias (y es la salida del sistema):

$$w_k + 0.5w_{k-2} = 2u_{k-1}$$

$$y_k + 3y_{k-1} = w_k + u_{k-1}$$

8.7. Respuesta de sistema continuo en representación interna

Describir cómo será la respuesta ante impulso unitario del sistema siguiente, sin calcular la expresión de dicha respuesta, dando valores numéricos aproximados de las especificaciones que la caracterizan:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -4 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 100 & -10 & 0 \end{bmatrix} \cdot x$$

8.8. Modelo de proceso de fabricación de piezas

La siguiente ecuación modela la relación entre el número de piezas que entran y el número de piezas que salen cada minuto de un proceso de fabricación:

$$y_k = 1.2y_{k-1} - 0.36y_{k-2} + 0.48u_{k-2}$$

Escribir un modelo en representación interna válido del sistema. ¿Se podría obtener un modelo con estados desacoplados? ¿Por qué?

9. SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

9.1. Identificación de sistema mecánico

Estando un sistema mecánico en equilibrio, con la entrada igual a 100 N y la salida igual a 10 m, se reduce la entrada a 60 N y se registran los valores que va tomando la salida a lo largo del tiempo. Los valores medidos han sido:

t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y(m)	10	9.901	9.414	8.541	7.456	6.365	5.428	4.737	4.320	4.151	4.177

t (s)	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	3
y(m)	4.328	4.538	4.754	4.938	5.072	5.150	5.178	5.168	5.134	5.089	5

Obtener toda la información posible del modelo del sistema.

9.2. Identificación de sistema mecánico

Estando un sistema mecánico en equilibrio, con la entrada igual a 100 N y la salida igual a 3 m, se cambia la entrada a 140 N, manteniéndose en ese valor durante 0.1 segundos, volviendo después a 100 N. Tomando como origen de tiempos el instante en que se cambia la entrada, los valores medidos de la salida del sistema han sido:

t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y(m)	3	3.099	3.487	3.873	4.085	4.091	3.937	3.691	3.414	3.169	2.974

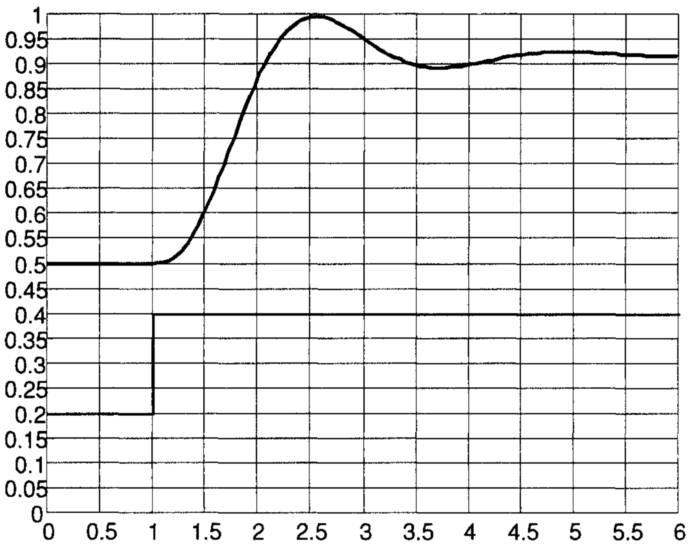
t (s)	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	
y(m)	2.849	2.790	2.784	2.816	2.866	2.922	2.972	3.010	3.034	3.045	

a) Si en lugar de volver la entrada a 100 N al cabo de 0.1 segundos, se hubiera mantenido en 140 N, ¿cuáles serían los valores de la salida en los instantes de la tabla anterior? (Nota: recordar el concepto de equivalente discreto de un sistema continuo).

b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior obtener toda la información posible del modelo del sistema continuo.

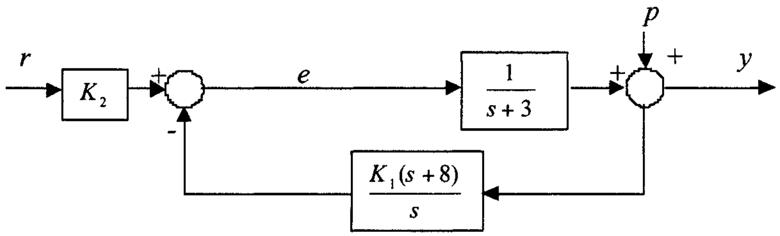
9.3. Identificación de sistema continuo

La figura muestra la entrada y la salida de un sistema. Obtener todos los datos posibles del modelo del mismo:



9.4. Sistema en bucle cerrado

El sistema de la figura representa un proceso controlado por un controlador en bucle cerrado.

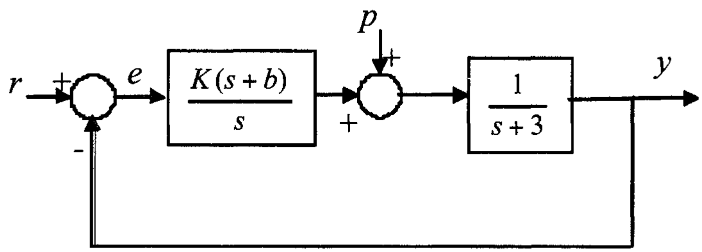


a) Obtener el valor de K_1 para que en bucle cerrado la respuesta del sistema ante referencia escalón (supuesta nula la perturbación p) tenga una sobreoscilación del 5%, obteniendo el tiempo de establecimiento al 98%.

b) Si la referencia r es constante y la perturbación p también lo es, obtener el valor de K_2 para que el error (señal e) en régimen permanente sea nulo.

9.5. Sistema en bucle cerrado

El sistema de la figura representa un proceso controlado por un controlador en bucle cerrado.



a) Obtener los parámetros del controlador (K y b) si se quiere que en bucle cerrado la respuesta del sistema ante referencia escalón (supuesta nula la perturbación p) tenga una sobreoscilación del 10% y un tiempo de establecimiento al 95% de 1 segundo.

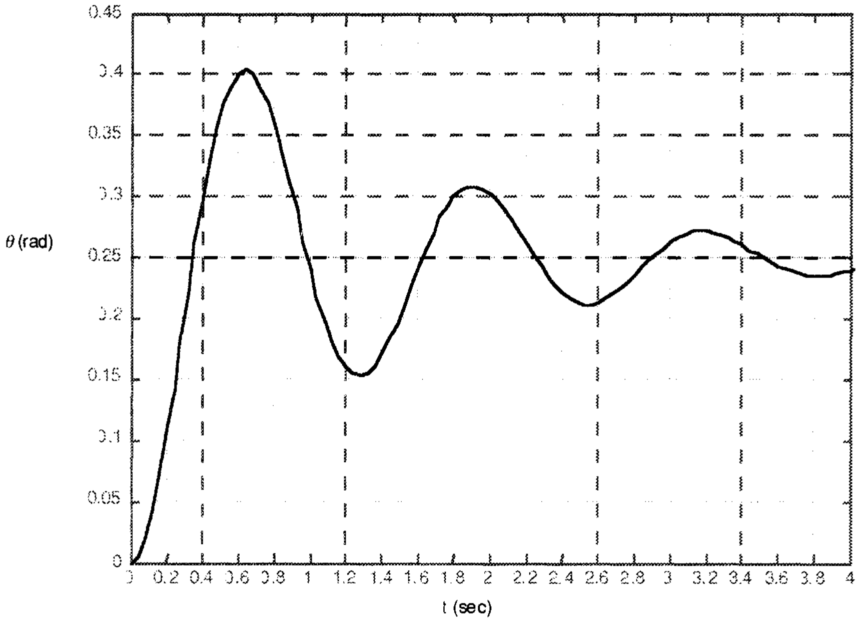
b) Si la referencia r es constante y la perturbación p también lo es, ¿cuál es el valor del error (e=r-y) en régimen permanente?

9.6. Identificación de péndulo con motor de continua

La siguiente ecuación modela el comportamiento de un péndulo con un motor de continua

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = K_m \frac{u - K_b \cdot \dfrac{d\theta}{dt}}{R_a} - mgLsen(\theta)$$

Partiendo de la posición de equilibrio definida por *u=0* se le da a la tensión de entrada al motor un valor de *u=10* voltios, midiéndose la evolución del ángulo. Ésta ha sido:



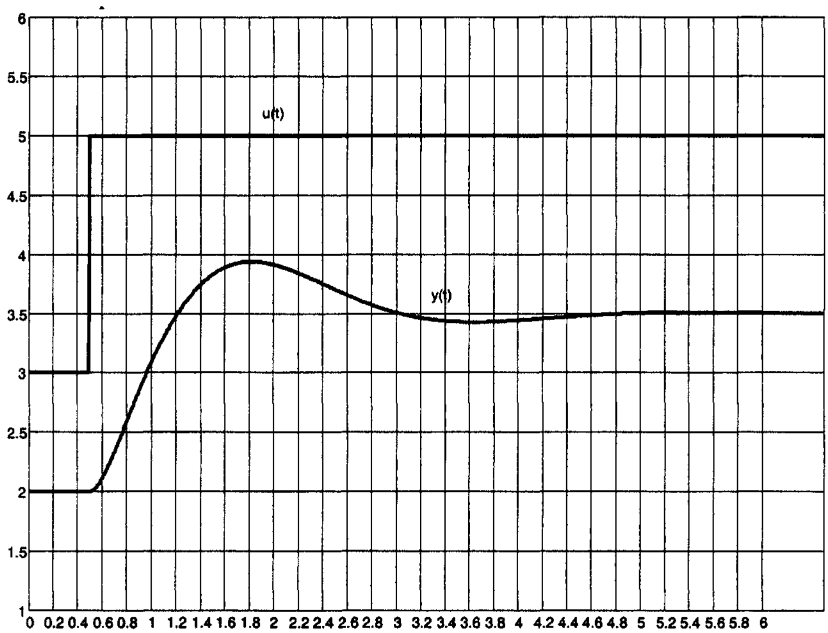
Obtener toda la información posible del modelo del sistema.

9.7. Identificación de sistema continuo

La figura siguiente muestra la evolución de la señal de entrada y la señal de salida de un sistema. Obtener toda la información posible del modelo del mismo.

9.8. Identificación de sistema continuo

La figura siguiente muestra la evolución de la señal de entrada y la señal de salida de un sistema. Obtener toda la información posible del modelo del mismo.



9.9. Características de la respuesta

Describir (sin calcular la transformada inversa) cómo sería la respuesta del sistema siguiente ante entrada escalón, dando toda la información posible:

$$G(s) = \frac{3s + 30}{(s^2 + s + 2)(s + 3)}$$

9.10. Características de la respuesta

Describir y esbozar (sin calcular la transformada inversa) cómo sería la respuesta del sistema siguiente ante entrada escalón, dando toda la información posible sobre las especificaciones de dicha respuesta:

$$G(s) = \frac{2s + 20}{(s^2 + s + 1)(s + 0.05)}$$

9.11. Sistema en bucle cerrado

La ecuación siguiente modela el comportamiento dinámico de un sistema térmico en el que Q es la potencia calorífica entrante, T_1 es la temperatura de un cuerpo, y T_e es la temperatura exterior:

$$\dot{T}_1 = -0.1T_1 + 2Q + 0.1T_e$$

Si se mide la temperatura T_1 con un sensor y se define la entrada como una realimentación de la salida según la ecuación: $Q(t) = k\int_0^t (T_{ref} - T_1(\tau))d\tau$.

a) Obtener el valor de k para que la sobreoscilación de la respuesta ante escalón del sistema en bucle cerrado sea del 10%.

b) Obtener el valor de k para que el tiempo de establecimiento al 98% sea de 500 segundos.

c) ¿Cuál es el valor de la temperatura T_1 *en* régimen permanente si la referencia T_{ref} y la temperatura exterior T_e son constantes?

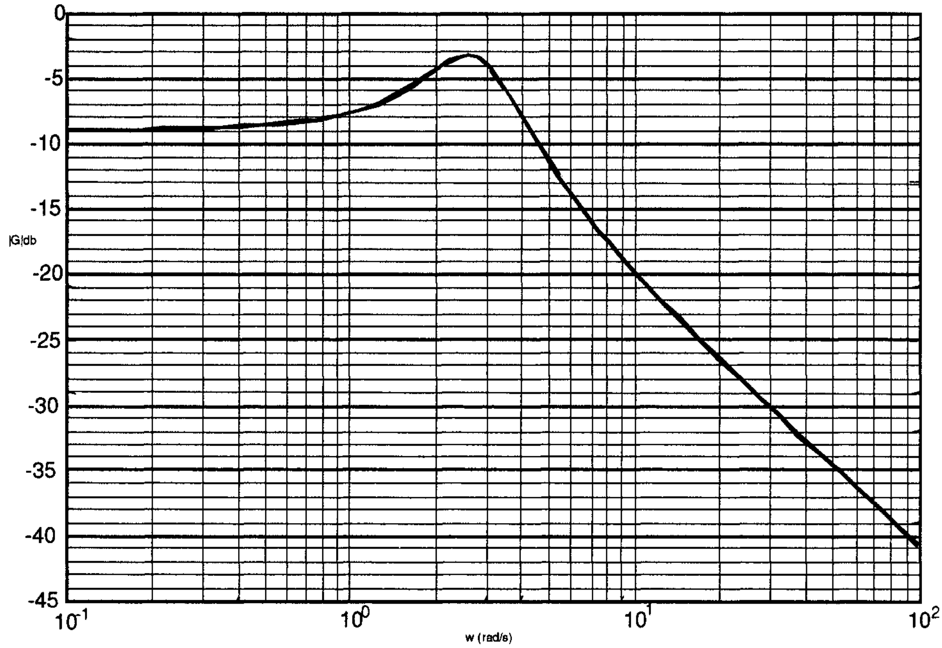
RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS CONTINUOS

10.1. Compensador en serie

Dada la respuesta en frecuencia de un sistema, obtener la función de transferencia de un compensador (C(s)), de orden lo más pequeño posible, de forma que al ponerlo en serie con el sistema se cumpla:

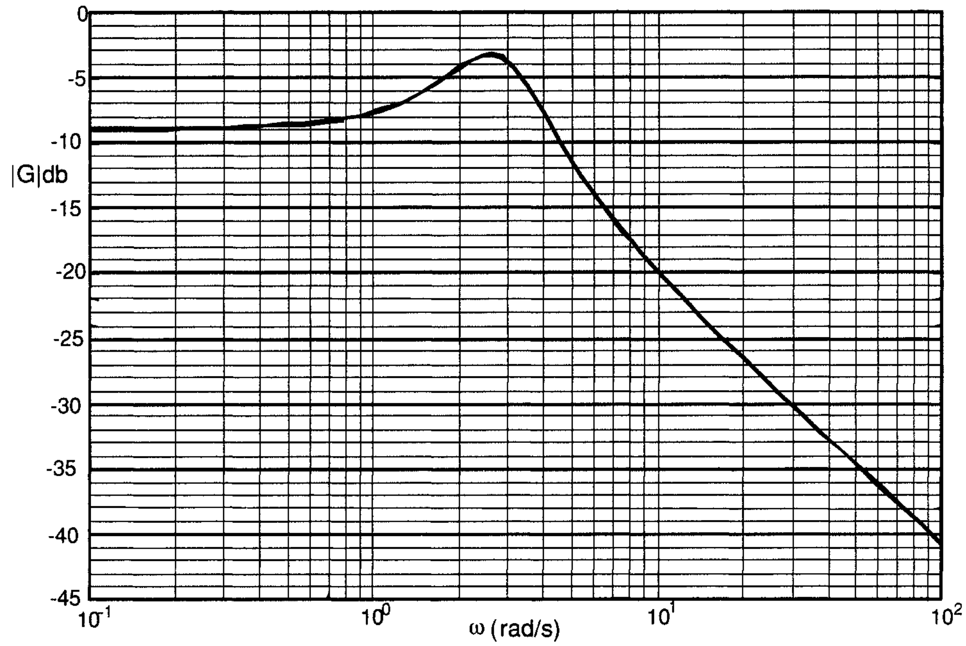
- La ganancia estática total sea unitaria.
- La magnitud total sea menor que 1 para todas las frecuencias.
- El ancho de banda total sea el mismo que el del sistema original.

Nota: Operar con los valores exactos de la respuesta del sistema (obtenidos de la gráfica), pero utilizar la aproximación asintótica para $C(s)$.



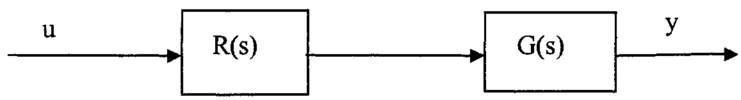
10.2. Identificación de sistema

Dada la magnitud de la respuesta en frecuencia de un sistema, y sabiendo que es de segundo orden, obtener la función de transferencia del mismo. Calcular el ancho de banda de la función de transferencia obtenida y compararlo con el medido directamente en la gráfica.

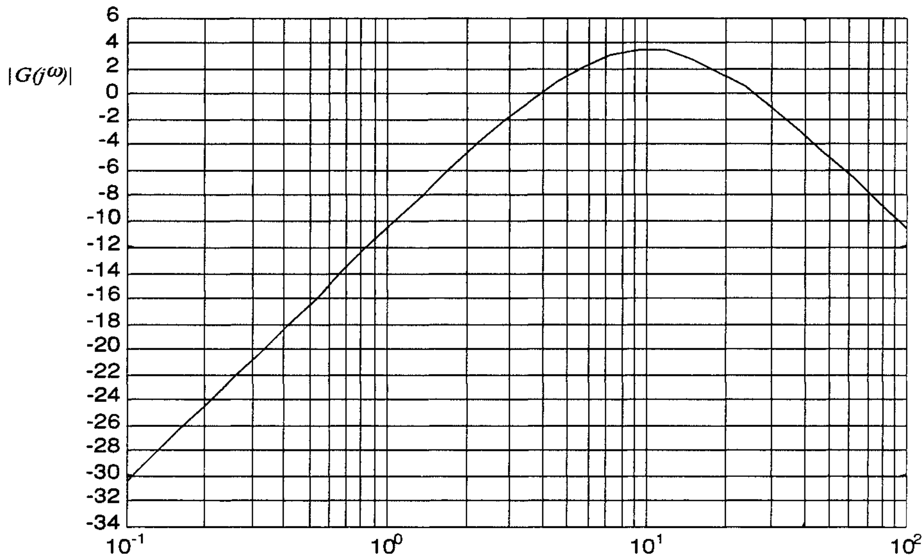


10.3. Compensador en serie

Se desea modificar la respuesta en frecuencia de un sistema $G(s)$ de forma que la ganancia estática sea unitaria, y que el ancho de banda sea de 10 rad/seg. Para ello se va a poner en serie con el sistema un compensador según la figura:



Definir una función de transferencia $R(s)$ lo más sencilla posible para que la ganancia estática total sea 1 y el ancho de banda del sistema total sea de 10 rad/seg, sabiendo que la respuesta en frecuencia de $G(s)$ es:



10.4. Identificación de sistema

En las siguientes figuras se observa la respuesta de un sistema obtenida ante la entrada que se muestra, y la respuesta en frecuencia del mismo sistema. Obtener el modelo del sistema.

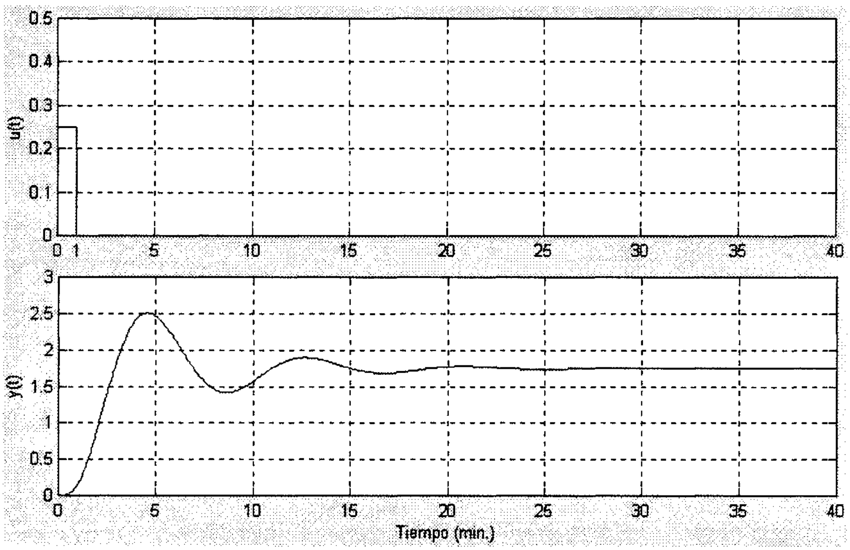


Figura 1-a. Ensayo de respuesta temporal

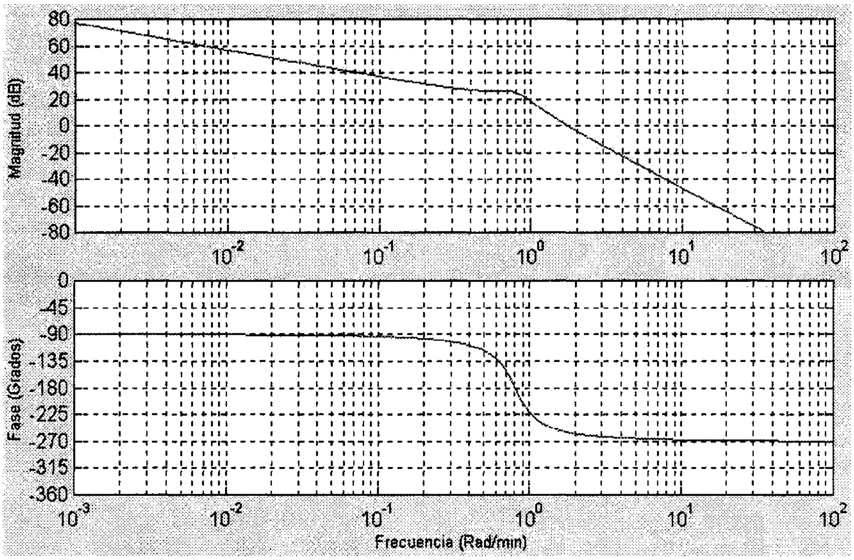


Figura 1-b. Respuesta en frecuencia

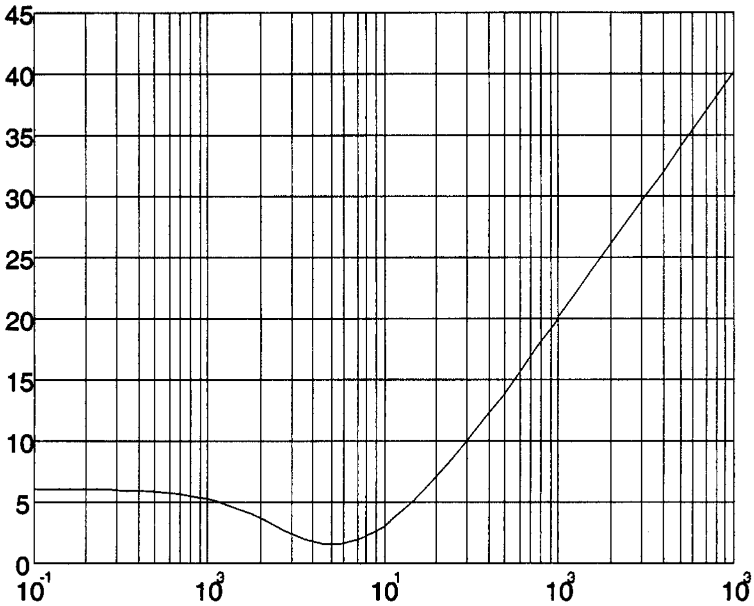
10.5. Diagrama de Nyquist

Trazar el diagrama de Nyquist del proceso.

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 8}$$

10.6. Compensador en serie

Dada la magnitud de la respuesta en frecuencia de un sistema,

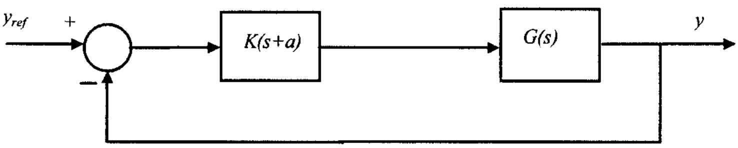


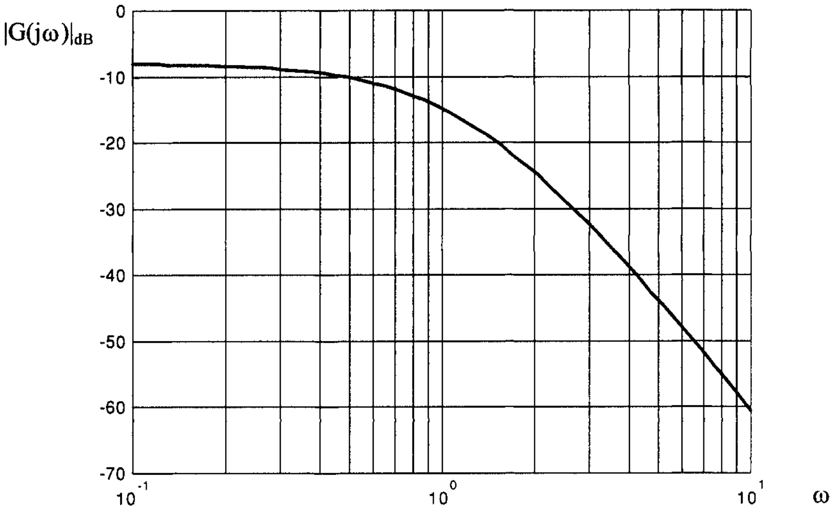
obtener la función de transferencia de otro sistema, lo más sencillo posible, de forma que al ponerlo en serie con el anterior en el sistema total se cumpla:

- La ganancia estática sea nula.
- La magnitud a frecuencias altas sea unitaria.
- La frecuencia de corte inferior sea de 1 rad/s.

10.7. Compensador en serie

Obtener los valores de a y K para que el sistema en bucle cerrado tenga una ganancia estática igual a 0.9, y para que el sistema en bucle abierto $K(s+a)G(s)$ tenga una magnitud de 20 dB a la frecuencia 5 rad/s.



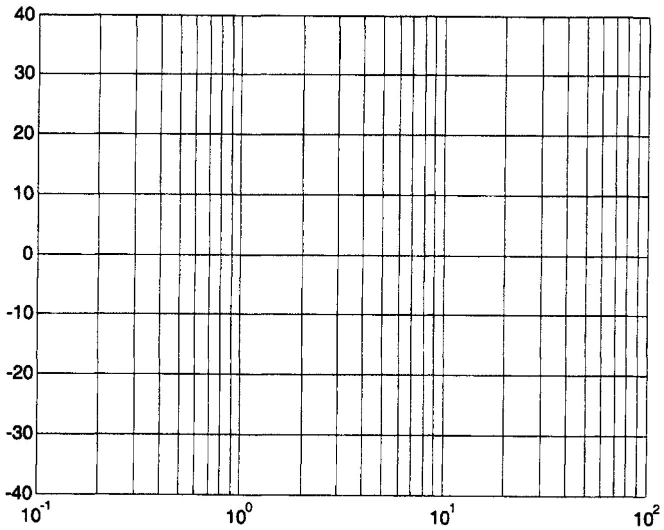


10.8. Sistema resonante

Obtener el valor de a para que el sistema de función de transferencia

$$G(s)=\frac{K(s+10)^2}{(s^2+s+a)}$$

tenga una frecuencia de resonancia de 1 rad/s y una magnitud a altas frecuencias de 0.1 unidades, y dibujar la aproximación asintótica y el diagrama real aproximado de magnitud.

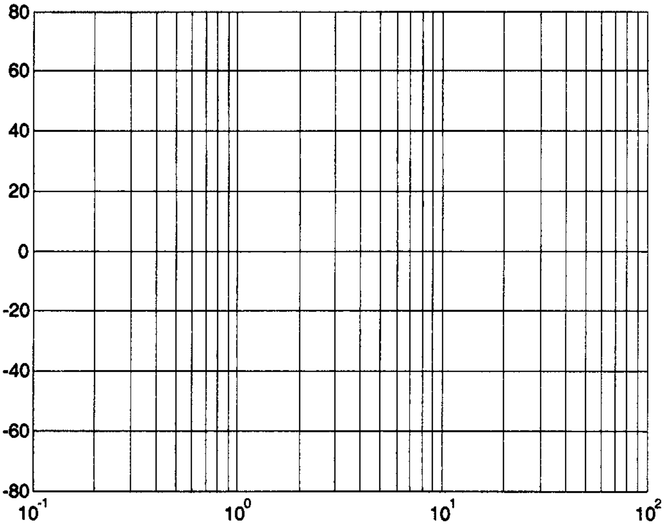


10.9. Filtro paso alto

Obtener el valor de a para que el sistema de función de transferencia

$$G(s) = \frac{s(s+60)}{(s+a)(s+10)}$$

tenga una frecuencia de corte inferior igual a1 rad/s y dibujar la aproximación asintótica del diagrama de bode de magnitud.



10.10. Compensador en serie

Dado el sistema de función de transferencia $G(s) = \dfrac{5000s}{(s+1000)(s+10000)}$, definir (utilizando la aproximación asintótica) un compensador $R(s)$ tal que al ponerlo en serie se consiga aproximadamente que:

- La ganancia estática total sea nula.
- La magnitud a las frecuencias entre 500 y 800 rad/s sea de 2 unidades.
- La magnitud entre 4000 y 20000 rad/s sea de 1 unidad.
- La pendiente de caída a partir de 30000 rad/s sea de -20 db/década.

10.11. Compensador en serie

Dado el sistema $G(s) = \dfrac{0.01(s+70000)}{(s+1000)}$, definir (utilizando la aproximación asintótica) un compensador *R(s)* lo más simple posible tal que al ponerlo en serie se consiga aproximadamente que:

- La ganancia estática total sea unitaria.
- La magnitud a las frecuencias entre 2000 y 8000 rad/s sea de 2 unidades.
- La magnitud a frecuencias superiores a 80000 rad/s sea constante e igual a -6 decibelios.

10.12. Compensador en serie

Dado el sistema $G(s) = \dfrac{5}{s^2+s+1}$, obtener un compensador *R*(s), lo más simple posible, tal que al ponerlo en serie con el sistema se consiga de forma aproximada:

- Magnitud de 4 unidades para frecuencias menores de 0.8 rad/s.
- Magnitud de 2 unidades para frecuencias mayores de 30 rad/s.
- Magnitud de 1 unidad para frecuencias entre 2 y 10 rad/s.

Dibujar la aproximación asintótica del diagrama de Bode de magnitud del sistema total resultante, y esbozar por dónde iría la gráfica exacta de dicho diagrama.

11. REALIMENTACIÓN

11.1. Realimentación en sistema térmico

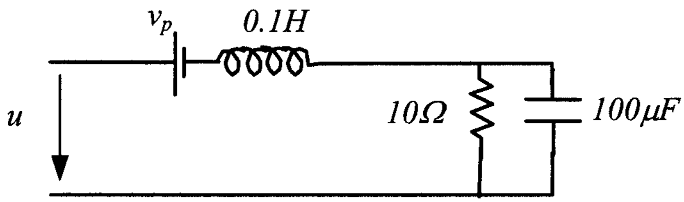
La ecuación siguiente modela el comportamiento dinámico de un sistema térmico en el que Q es la potencia calorífica entrante, T_1 es la temperatura de un cuerpo, T_2 es la temperatura del otro cuerpo, y T_e es la temperatura exterior:

$$\begin{bmatrix}\dot{T}_1\\ \dot{T}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.05 & 0.04\\ 0.004 & -0.006\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}Q + \begin{bmatrix}0.01\\ 0.002\end{bmatrix}T_e$$

Si se mide la temperatura T_2 con un sensor y se define la entrada como una realimentación de la salida ($Q=k(50-T_2)$), obtener el valor de k que hace que en régimen permanente la temperatura T_2 sea de 49.9 ºC, suponiendo una T_e =25ºC constante. ¿Es correcta esta realimentación? ¿Por qué?

11.2. Realimentación en circuito eléctrico

En el circuito de la figura la tensión de entrada (u) se puede variar a voluntad. La fuente v_p representa una perturbación de valor desconocido.



Se mide la tensión del condensador y se define la entrada como una realimentación de la salida ($u=k(10\text{-}v_C)$), donde 10 es la tensión de referencia. Obtener el rango de valores de k de forma que el error ($e=10\text{-}v_C$) en régimen permanente sea menor de 1 voltio, sabiendo que v_p es un valor constante comprendido entre 2 y 4 voltios. ¿Se puede lograr al mismo tiempo que la respuesta no sea oscilatoria?. En caso de respuesta negativa, ¿cómo podrían lograrse los dos objetivos?

11.3. Realimentación en sistema térmico

La ecuación siguiente modela el comportamiento dinámico de un sistema térmico en el que Q es la potencia calorífica entrante, T_1 es la temperatura de un cuerpo, y T_e es la temperatura exterior:

$$\ddot{T}_1 = -0.2\dot{T}_1 - 0.01T_1 + 20Q + 0.01T_e$$

Si se mide la temperatura T_1 con un sensor y se define la entrada como una realimentación de la salida según la ecuación:

$$Q(t) = k(T_{ref}(t) - T_1(t) - 2\dot{T}_1(t))$$

a) Obtener el valor de k para que el tiempo de establecimiento al 98% de la respuesta ante escalón del sistema en bucle cerrado sea de 8 segundos.

b) ¿Cuál es el valor de la temperatura T_1 *en* régimen permanente si la referencia T_{ref}=20 y la temperatura exterior T_e =30?.

12. CUESTIONES TEÓRICAS

12.1. Clasificación de sistemas

Clasifica los sistemas descritos por las siguientes relaciones de entrada-salida:

(a) $y(t) = \dot{u}(t)$

(b) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 0.1^k \cdot u(n-k)$

(c) $y(k) = k \cdot u_1(k-1) - 3 \cdot u_2(k+4)$

(d) $y(k+1) = 0.5^k \cdot y(k) + 0.2 \cdot u(k)$

(e) $\beta_{io}^i \cdot y_i + \beta_{i1}^i \cdot \dot{y}_i = u_i, \quad i = 1, 2$

Sistemas Variantes en el Tiempo:
Sistemas Invariantes en el Tiempo:
Sistemas Estáticos:
Sistemas Dinámicos:
Sistemas Causales:
Sistemas No Causales:

12.2. Clasificación de sistemas

Clasifica los sistemas descritos por las siguientes relaciones de entrada-salida:

(a) $y_{k+1} = -5^{2 \cdot k} \cdot y(k) - \frac{y_{k-1}}{u_{k-1}} \cdot (3 - y_{k-1})$

(b) $\beta_{io}^i \cdot y_i + \beta_{i1}^i \cdot \dot{y}_i = u_i, \quad i = 1, 2$

(c) $y(k) = k \cdot u_1(k-1) - 4 \cdot u_2(k+3)$

(d) $y(k+1) = 0.5^k \cdot y(k) + 0.2 \cdot u(k)$

(e) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 0.8^k \cdot u(n-k)$

(f) $y(t) = \dot{u}(t)$

Sistemas Estáticos:
Sistemas Dinámicos:
Sistemas Lineales:

Índice

Sistemas No lineales:
Sistemas Variantes en el Tiempo:
Sistemas Invariantes en el Tiempo:
Sistemas Causales:
Sistemas No Causales:

12.3. Clasificación de sistemas

Clasifica los sistemas descritos por las siguientes relaciones de entrada-salida:

(a) $y(t) = u(t)$

(b) $y(k) = k \cdot u(k-1) - 3$

(c) $y(k) = k^{-1} \cdot y(k-1) + u(k-1)$

(d) $\ddot{y} + 6\dot{y} + y \cdot u = -2 \cdot \dot{u}$

(e) $y(k) = k \cdot u(k-1) - \dfrac{2}{y(k+1)} \cdot u(k-2)$

Sistemas Lineales:
Sistemas No Lineales:
Sistemas Estáticos:
Sistemas Dinámicos:
Sistemas Causales:
Sistemas No Causales:
Sistemas Variantes en el Tiempo:
Sistemas Invariantes en el Tiempo:

BIBLIOGRAFIA

En los libros enumerados a continuación se puede encontrar la teoría necesaria para poder resolver los problemas contenidos en este libro. El primer libro es el que más se ajusta, pues es un libro de apuntes de una asignatura muy similar a la que ha dado lugar a la elaboración de este libro, por lo que contiene toda la teoría en que se basa la resolución de los problemas. Los cuatro siguientes son libros sobre señales y sistemas, por lo que todo su contenido se adapta también bastante bien a los conocimientos requeridos para la resolución de los problemas. Los libros restantes son libros generales de control automático, por lo que solo los primeros capítulos se adaptan a la materia. No obstante estos últimos son especialmente interesantes para el tema de modelado de sistemas físicos, puesto que este tema no está cubierto por los libros de señales y sistemas.

[Sala00] Comportamiento Dinámico de Sistemas. Sala, A. y Bondia, J. Servicio de Publicaciones U. Politécnica Valencia. 2000.

[Meade93] Señales y Sistemas. M.L. Meade y C.R. Dillon. Ed. Addison-Wesley. 1993

[Papoulis89] Sistemas y circuitos. A. Papoulis y M. Bertran. Ed. Marcombo. 1989

[Solyman99] Señales y Sistemas continuos y discretos. Samir S. Solyman y Mandyam D. Srinath. Ed. Prentice Hall Iberia S.R.L. 1999.

[Oppenheim98] Señales y Sistemas. Segunda edición. Oppenheim, A.V., Willsky, A.S. y S. Hamid Nawab. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana . 1998.

[Balmer91] Signals and Systems, an introduction. L. Balmer. De. PrenticeHall International. 1991

[Ogata93] Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata. Ed. Prentice-Hall. 1993

[Dorf89] Sistemas modernos de control. R.Dorf. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1989

[Phillips96] Feedback Control Systems. C.L.Phillips, R.D. Harbor. Ed. Prentice Hall. 1996

[Franklin91] Control de Sistemas Dinámicos con Realimentación. G.F. Franklin, J.D. Powell, A.Emami-Naeini. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1991

[D'Azzo92] Sistemas realimentados de Control. J.J. D'Azzo, C.H. Houpis. Ed. Paraninfo. 1992

[Phillips93] Sistemas Controlados por Computador. Análisis y Diseño. Phillips, C.L. y Nagle, H.T. Ed. Gustavo Gili. 1993

[Ogata95] Discrete-Time Control Systems. K. Ogata. Ed. Prentice-Hall International. 1995