Federico Alicarte

LECCIONES DE MATEMATICAS

CUARTO CURSO

Lecciones de Matemáticas

(CUARTO CURSO)

por

FEDERICO ALICART

Catedrático del Instituto «Nebrija»

Madrid-Chamartín

CASTELLON

Imp. Hijo de J. Armengot

1935

Advertencias preliminares

Destinado el presente libro a los alumnos de cuarto año de Bachillerato hemos procurado adaptarlo a este grado de formación intelectual y, desde luego, supone el conocimiento previo de las materias relativas a los cursos anteriores que detalla el cuestionario oficial.

Los temas que desarrollamos en nuestras LECCIONES siguen fielmente dicho cuestionario. En rigor, no son preceptivas las lecciones 18, 19, 22 y 23, que tratan muy sumariamente asuntos reservados para el quinto año. Sin embargo, creemos conveniente anticipar estos conocimientos que el alumno utilizará en el estudio, inmediato, de la Física.

Los ejercicios que acompañan a cada lección servirán para afianzar la parte doctrinal. Algunos constituyen verdaderas ampliaciones de dicha doctrina y puede prescindirse de ellos. No los omitimos, para que los buenos alumnos, con la ayuda inteligente del Profesor, puedan afinar, precisamente en ellos, el temple de su voluntad y la agudeza de su ingenio.

Al final del libro se insertan unas tablas goniométricas naturales con cinco cifras decimales exactas que, aparte de su utilidad práctica, constituyen un excelente entrenamiento para el manejo de las tablas logarítmicas.

FEDERICO ALICART

Lucena del Cid, verano de 1935.

ARITMETICA

Y

NOCIONES DE ALGEBRA

Primera Parte

LECCION 1

LOS NUMEROS FRACCIONARIOS

1. Las unidades fraccionarias.—Si dividimos la unidad simple en un cierto número de partes iguales se obtienen las llamadas unidades fraccionarias. Por ejemplo, dividiendo la unidad simple en dos partes iguales cada una de éstas constituye una unidad fraccionaria que se representa con el símbolo $\frac{1}{2}$.

En general, si dividimos la unidad simple en n partes iguales aparece la unidad fraccionaria que se representa por $\frac{1}{n}$. El número natural n se llama denominador de la unidad fraccionaria.

De esta definición se deducen las igualdades siguientes:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \overset{(\text{n veces})}{\cdots\cdots} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \qquad (1)$$

EL PRODUCTO DE UNA UNIDAD FRACCIONARIA POR SU DENOMINADOR ES LA UNIDAD SIMPLE O ENTERA.

2. Los números fraccionarios.—Del mismo modo que los números naturales se forman por la agrupación de unidades enteras, podemos formar los números fraccionarios agrupando unidades fraccionarias.

Reuniendo 3 unidades fraccionarias de denominador 5, se forma el número fraccionario $\frac{3}{5}$.

Por consiguiente:

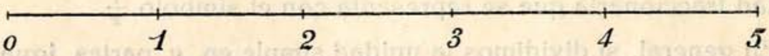
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5}$$

Reuniendo *m* unidades fraccionarias de denominador *n* se forma el número fraccionario $\frac{m}{n}$, que se lee así: *eme eneavos*. Por consiguiente:

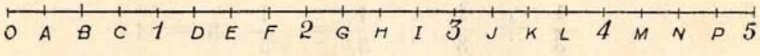
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \overset{(m\ veces)}{\cdots\cdots} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n} \quad (2)$$

Todo número fraccionario consta de dos términos que son dos números naturales: *m* se llama numerador y *n* denominador.

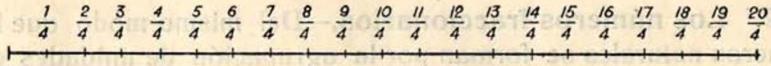
3. Representación geométrica.—Si sobre una escala de números naturales



llevamos repetidamente, a partir del origen 0, la unidad fraccionaria $\frac{1}{4}$ aparecerán, sobre dicha escala, nuevos puntos, que llamaremos A, B, C, D, etc.



Representando cada punto de la nueva escala por su abcisa, es decir, por su distancia al origen 0, tendremos la figura siguiente



que constituye la escala de los números fraccionarios de denominador 4.

De dicha figura se deducen las igualdades siguientes,

$$\frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{8}{4} = 2 \qquad \frac{12}{4} = 3 \text{ ...etcétera.}$$

Si suponemos formadas todas las escalas de números fraccionarios cuyos denominadores son sucesivamente 2, 3, 4, 5, etc. y reunimos en una sola figura todas las representaciones parciales obtendremos una imagen geométrica de todos los números fraccionarios.

4. El cociente exacto de dos números enteros.—Si repetimos n veces, como sumando, el segmento representativo de la fracción $\frac{m}{n}$ se obtiene el segmento de longitud m.

En efecto:

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \overset{(n\ veces)}{\cdots\cdots} + \frac{m}{n} = \frac{1}{n}m + \frac{1}{n}m + \overset{(n\ veces)}{\cdots\cdots}$$

$$+ \frac{1}{n}m = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \overset{(n\ veces)}{\cdots\cdots} + \frac{1}{n}\right) m = 1 \cdot m = m$$

Esto significa que

$$\frac{m}{n} \cdot n = m \qquad (3)$$

EL PRODUCTO DE UN NUMERO FRACCIONARIO POR SU DENOMINADOR ES IGUAL AL NUMERADOR DE LA FRACCION.

Dicho con otras palabras:

TODO NUMERO FRACCIONARIO REPRESENTA EL COCIENTE EXACTO DE SU NUMERADOR POR SU DENOMINADOR.

Y expresado con símbolos matemáticos

$$\frac{m}{n} = m : n \qquad (4)$$

EJERCICIOS

1 *Expresar numéricamente un dia tomando como unidad simple la semana.*

2 *Expresar numéricamente una hora tomando como unidad simple la semana.*

3 *Expresar numéricamente un año bisiesto tomando como unidad simple la semana.*

4 *Expresar el valor de una peseta tomando como unidad simple el duro.*

5 *Expresar el valor de un real tomando como unidad simple la peseta.*

6 *Expresar el valor de una moneda de diez céntimos tomando como unidad simple el real.*

7 *La torre Eiffel mide 312 m de altura y el Empire State Building (edificio de la Quinta Avenida de Nueva York) mide 380 m. Expresar la altura de la torre tomando como unidad simple la altura del Empire.*

8 *La torre Eiffel pesa 7.000 toneladas y el Empire 53.000 t. Expresar el peso de la torre tomando como unidad simple el peso del Empire.*

9 *Construir la escala de números fraccionarios de denominador 3.*

10 *Construir la escala de números fraccionarios, de denominador 5.*

11 *Superponer las dos escalas anteriores.*

12 *Expresar el cociente exacto de 15 por 7.*

LECCION 2

ADICION Y SUSTRACCION DE FRACCIONES

5. Números fraccionarios positivos y negativos.—Hasta ahora hemos supuesto que, en la expresión de un número fraccionario, *m* y *n* eran dos números enteros y positivos, pero no hay inconveniente en que uno de ellos o ambos sean negativos desde el momento en que se admite la igualdad (4).

Aplicando la regla de los signos de la división entre números enteros podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\frac{+m}{+n} = +\frac{m}{n} \qquad \frac{-m}{+n} = -\frac{m}{n}$$

$$\frac{+m}{-n} = -\frac{m}{n} \qquad \frac{-m}{-n} = +\frac{m}{n}$$

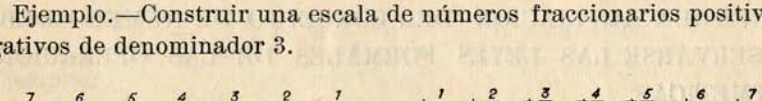
De este modo aparecen los números fraccionarios divididos en dos grupos: los positivos y los negativos. Estos se destacan porque les precede el signo menos.

Ejemplos:

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}\text{ ,, }\frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}\text{ ,, }\frac{-4}{-7} = +\frac{4}{7}$$

Los números fraccionarios negativos se representan geométricamente del mismo modo que los positivos, sin otra diferencia que estar situados a la izquierda del origen.

Ejemplo.—Construir una escala de números fraccionarios positivos y negativos de denominador 3.



Observación.—Del mismo modo que, al estudiar la operación de dividir, se excluye el caso de que el divisor sea cero, también, desde ahora, quedan excluídos de nuestro estudio los números fraccionarios cuyo denominador sea cero. En el curso próximo, no obstante, dedicaremos una lección especial a este caso singular.

6. Forma fraccionaria de los números enteros.—La propiedad (4) nos permite expresar cualquier número entero bajo forma fraccionaria. Basta observar que un entero, por ejemplo 7, es el cociente de dividirlo por la unidad.

Podremos escribir

$$\frac{7}{1} = 7$$

y en general

$$\frac{m}{1} = m$$

Regla:

PARA EXPRESAR UN NUMERO ENTERO EN FORMA FRACCIONARIA SE ESCRIBE DICHO NUMERO COMO NUMERADOR Y SE PONE LA UNIDAD SIMPLE COMO DENOMINADOR.

7. El principio de permanencia.—Al introducir las fracciones en la Aritmética se ha enriquecido el concepto de número. Además de los números enteros nos encontramos ahora con los números fraccionarios. Todos ellos reunidos, enteros y fraccionarios, constituyen los llamados números racionales. Por otra parte, el hecho de que los números enteros se presten a adoptar la forma externa de las fracciones indica que puede existir una armonía entre aquellos números y los que acabamos de introducir.

Esta idea ha sido expresada por el matemático alemán Hankel (año 1867) en su principio de permanencia del siguiente modo:

EN TODA AMPLIACION DEL CONCEPTO DE NUMERO DEBEN CONSERVARSE LAS LEYES FORMALES DE LAS OPERACIONES ARITMETICAS.

Este principio se aplica constantemente, de manera implícita, al establecer las operaciones aritméticas con números racionales.

8. Adición de dos fracciones.

Regla:

LA SUMA DE DOS FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR ES OTRA FRACCION DEL MISMO DENOMINADOR Y CUYO NUMERADOR ES LA SUMA DE LOS NUMERADORES.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \qquad (6)$$

Demostración:

En virtud de lo dicho en el párrafo 4, bastará demostrar que el producto de $\frac{a}{n} + \frac{b}{n}$ por n vale $a + b$.

En efecto:

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) n = \frac{a}{n}\, n + \frac{b}{n}\, n = a + b$$

Ejemplos:

$$\frac{+2}{+4} + \frac{+3}{+4} = \frac{+5}{+4} = +\frac{5}{4} \text{ ,, } \frac{-4}{-9} + \frac{+7}{-9} = \frac{+3}{-9} = -\frac{3}{9}$$

$$\frac{-6}{+5} + \frac{-3}{+5} = \frac{-9}{+5} = -\frac{9}{5}$$

9. Sustracción de dos fracciones.

Regla:

LA DIFERENCIA DE DOS FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR ES OTRA FRACCION DEL MISMO DENOMINADOR Y CUYO NUMERADOR ES LA DIFERENCIA DE LOS NUMERADORES.

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \qquad (7)$$

Demostración:

Aplicando el método expuesto en el caso de la suma tendremos

$$\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n}\right) n = \frac{a}{n}\, n - \frac{b}{n}\, n = a - b$$

Ejemplos:

$$\frac{+8}{+11} - \frac{+6}{+11} = \frac{+2}{+11} = +\frac{2}{11}\text{ ; } \frac{-3}{+7} - \frac{+5}{+7} = \frac{-8}{+7} = -\frac{8}{7}$$

$$\frac{+2}{-8} - \frac{-3}{-8} = \frac{+5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

10. Sumas y restas combinadas.—También del mismo modo se demuestra que

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \frac{d}{m} - \frac{e}{m} = \frac{a+b-c+d-e}{m} \quad (8)$$

En efecto:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \frac{d}{m} - \frac{e}{m}\right) m = \frac{a}{m} m + \frac{b}{m} m - \frac{c}{m} m$$

$$+ \frac{d}{m} m - \frac{e}{m} m = a + b - c + d - e$$

EJERCICIOS

1. *Representar los puntos que tienen por abcisas*

$$\frac{1}{-4} \quad \frac{-3}{4} \quad \frac{-1}{4} \quad \frac{6}{-3}$$

Efectuar las adiciones siguientes:

2. $\frac{+5}{+3} + \frac{+4}{+3}$ „ $\frac{+1}{+8} + \frac{+2}{+8}$ „ $\frac{+12}{+10} + \frac{+9}{+10}$

$\frac{+4}{+5} + \frac{+9}{+5} + \frac{+6}{+5}$ „ $\frac{+1}{+16} + \frac{+4}{+16} + \frac{+11}{+16}$

3. $\frac{+7}{-2} + \frac{+3}{-2}$ „ $\frac{+5}{-9} + \frac{+13}{-9}$ „ $\frac{+1}{-11} + \frac{+3}{-11}$

$\frac{+4}{-3} + \frac{+5}{-3} + \frac{+6}{-3}$ „ $\frac{+10}{-14} + \frac{+20}{-14} + \frac{+30}{-14}$

4. $\frac{-3}{+50} + \frac{-4}{+50}$ „ $\frac{-12}{+15} + \frac{-16}{+15}$ „ $\frac{-10}{+22} + \frac{-1}{+22}$

$\frac{-7}{+4} + \frac{-8}{+4} + \frac{-9}{+4}$ „ $\frac{-5}{+7} + \frac{-11}{+7} + \frac{-1}{+7}$

5. $\frac{-2}{-3} + \frac{-5}{-3}$ „ $\frac{-7}{-9} + \frac{-3}{-9}$ „ $\frac{-14}{-100} + \frac{-24}{-100}$

$\frac{-1}{-5} + \frac{-2}{-5} + \frac{-3}{-5}$ „ $\frac{-7}{-12} + \frac{-5}{-12} + \frac{-3}{-12}$

6. $\frac{+14}{+25} + \frac{-4}{+25}$ „ $\frac{+5}{+8} + \frac{-7}{+8}$ „ $\frac{-3}{-4} + \frac{+1}{-4}$

7. $\frac{+3}{-13} + \frac{-8}{-13} + \frac{-4}{-13}$ „ $\frac{-1}{+30} + \frac{+6}{+30} + \frac{+10}{+30} + \frac{-12}{+30}$

Efectuar las sustracciones siguientes:

8. $\frac{+5}{+3} - \frac{+4}{+3}$ „ $\frac{+1}{+8} - \frac{+2}{+8}$ „ $\frac{+12}{+10} - \frac{+9}{+10}$

9. $\frac{+7}{-2} - \frac{+3}{-2}$ „ $\frac{+5}{-9} - \frac{+13}{-9}$ „ $\frac{+1}{-11} - \frac{+3}{-11}$

10. $\frac{-3}{+50} - \frac{-4}{+50}$ „ $\frac{-12}{+15} - \frac{-16}{+15}$ „ $\frac{-10}{+22} - \frac{-1}{+22}$

11. $\frac{-2}{-3} - \frac{-5}{-3}$ „ $\frac{-7}{-9} - \frac{-3}{-9}$ „ $\frac{-14}{-100} - \frac{-24}{-100}$

12. $\frac{+14}{+25} - \frac{-4}{+25}$ „ $\frac{+5}{+8} - \frac{-7}{+8}$ „ $\frac{-3}{-4} - \frac{+1}{-4}$ „ $\frac{-6}{-10} - \frac{-2}{-10}$

13. *Efectuar las siguientes sumas algebraicas:*

$$\frac{+5}{-8} + \frac{+3}{-8} - \frac{+6}{-8} + \frac{+4}{-8} - \frac{+1}{-8}$$

$$\frac{-4}{+11} - \frac{-9}{+11} - \frac{-7}{+11} + \frac{-2}{+11} - \frac{-5}{+11}$$

$$\frac{-2}{-5} + \frac{+1}{-5} - \frac{-3}{-5} - \frac{+6}{-5} + \frac{-4}{-5}$$

LECCIÓN 3

PRODUCTO Y COCIENTE DE UNA FRACCION POR UN ENTERO

11. Producto de una fracción por un entero.

Regla:

PARA MULTIPLICAR UNA FRACCION POR UN ENTERO SE MULTIPLICA EL NUMERADOR POR EL ENTERO Y SE DEJA EL MISMO DENOMINADOR.

Dicho más brevemente

$$\frac{a}{n} \cdot b = \frac{a\,b}{n} \tag{9}$$

Demostración:

Basta observar que

$$\frac{a}{n} \cdot b \cdot n = \frac{a}{n} \cdot n \cdot b = a\,b$$

Ejemplos:

$$\frac{+2}{-3} \cdot (-4) = \frac{-8}{-3} = +\frac{8}{3} \quad ,, \quad \frac{-6}{-5} \cdot (-3) = \frac{+18}{-5} = -\frac{18}{5}$$

12. Producto de un entero por una fracción.—Como en las operaciones aritméticas entre números racionales deben conservarse las leyes formales que ya conocemos, se podrá aplicar la propiedad conmutativa del producto al primer miembro de la igualdad (9) y tendremos

$$b \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n}\, b = \frac{a\,b}{n} \tag{10}$$

que expresa la misma regla enunciada en el párrafo anterior.

13. Cociente de una fracción por un entero.

Regla:

PARA DIVIDIR UNA FRACCION POR UN ENTERO SE MULTI-

PLICA EL DENOMINADOR POR EL ENTERO Y SE DEJA EL MISMO NUMERADOR.

Dicho más brevemente

$$\frac{a}{n} : b = \frac{a}{nb} \qquad (11)$$

Demostración:

Multiplicando la expresión $\frac{a}{n} : b$ por el denominador $b\ n$ tendremos

$$\left(\frac{a}{n} : b\right) \cdot b\ n = \left[\left(\frac{a}{n} : b\right) \cdot b\right] . n = \frac{a}{n} \cdot n = a$$

Ejemplos:

$$\frac{+9}{-4} : (+5) = \frac{+9}{-20} = -\frac{9}{20} ,, \quad \frac{-1}{+7} : (-2) = \frac{-1}{-14} = +\frac{1}{14}$$

14. Operaciones que no alteran el valor de una fracción. – La fórmula (9) nos dice que si multiplicamos el numerador de una fracción por un entero, esta fracción queda multiplicada por dicho entero. Por otra parte, la fórmula (11) nos dice que si multiplicamos el denominador de una fracción por un entero, esta fracción queda dividida por el entero.

Aplicando simultáneamente ambas propiedades se deduce la siguiente

Regla:

SI SE MULTIPLICAN LOS DOS TERMINOS DE UNA FRACCION POR UN ENTERO, NO SE ALTERA EL VALOR DE LA FRACCION.

Dicho más brevemente

$$\frac{a}{b} = \frac{a\ n}{b\ n} \qquad (12)$$

Si escribimos invertida la igualdad anterior

$$\frac{a\ n}{b\ n} = \frac{a}{b}$$

se comprueba la siguiente:

Regla:

EL VALOR DE UNA FRACCION NO SE ALTERA DIVIDIENDO SUS DOS MIEMBROS POR UN ENTERO QUE SEA FACTOR DE AMBOS.

Ejemplos:

1.° Multiplicando los dos términos de la fracción $\frac{+3}{-8}$ por 4 resulta

$$\frac{+3}{-8} = \frac{+12}{-32}$$

2.° Multiplicando los dos términos de la fracción $\frac{-4}{-7}$ por -10 resulta

$$\frac{-4}{-7} = \frac{+40}{+70}.$$

3.° Dividiendo por 5 los dos términos de la fracción $\frac{-15}{+50}$ tendremos

$$\frac{-15}{+50} = \frac{-3}{+10}.$$

15. Simplificación de fracciones.—Simplificar una fracción es formar otra equivalente a ella y que tenga sus términos más sencillos. Para ello basta dividir el numerador y el denominador de la fracción por un divisor común.

Ejemplos:

Simplificar la fracción $\frac{-1080}{-1728}$

Como el numerador y el denominador son números pares podemos dividir por 2 y tendremos

$$\frac{-1080}{-1728} = \frac{-540}{-864}$$

16. Fracciones irreducibles.—Si dividimos los dos términos de la fracción $\frac{1080}{1728}$ por 216, que es su máximo común divisor, tendremos

$$\frac{1080}{1728} = \frac{5}{8}$$

Esta nueva fracción es equivalente a la fracción propuesta y como tiene sus términos primos entre sí, no es susceptible de nuevas simplificaciones; por eso recibe el nombre de fracción irreducible.

Regla:

PARA SIMPLIFICAR EN FORMA IRREDUCIBLE UNA FRACCION DADA BASTA DIVIDIR AMBOS TERMINOS POR SU MAXIMO COMUN DIVISOR.

EJERCICIOS

Calcular los productos siguientes:

1. $\dfrac{+25}{+80} \cdot (+4) \;,,\; \dfrac{+35}{+77} \cdot (-10) \;,,\; (-6) \cdot \dfrac{+150}{+486} \;,,\; (+18) \cdot \dfrac{+3}{+7}$

2. $\dfrac{-14}{+24} \cdot (+7) \;,,\; \dfrac{-20}{+38} \cdot (-2) \;,,\; (-15) \cdot \dfrac{-44}{+50} \;,,\; (+106) \cdot \dfrac{-5}{+360}$

3. $\dfrac{+5}{-9} \cdot (-8) \;,,\; \dfrac{+17}{-21} \cdot (+20) \;,,\; (+11) \cdot \dfrac{+32}{-45} \;,,\; (-99) \cdot \dfrac{+141}{-200}$

4. $\dfrac{-3}{-7} \cdot (+12) \;,,\; \dfrac{-13}{-17} \cdot (-10) \;,,\; (-8) \cdot \dfrac{-5}{-60} \;,,\; (-999) \cdot \dfrac{-12}{-100}$

Efectuar las divisiones siguientes:

5. $\dfrac{+2}{+5} : (+3) \;,,\; \dfrac{+16}{+24} : (+6) \;,,\; \dfrac{+210}{+43} : (-15) \;,,\; \dfrac{+118}{+312} : (-10)$

6. $\dfrac{-4}{+13} : (+7) \;,,\; \dfrac{+33}{-22} : (+11) \;,,\; \dfrac{-18}{+30} : (-20) \;,,\; \dfrac{+29}{-12} : (-12)$

7. $\dfrac{-1}{-5} : (-1) \;,,\; \dfrac{-14}{-1} : (+11) \;,,\; \dfrac{-7}{-6} : (-7) \;,,\; \dfrac{-10}{-1000} : (+1000)$

8. *Trasformar* $\frac{3}{20}$ *en otra fracción equivalente de denominador 100.*

9. *Simplificar, en forma irreducible, las fracciones*

$$\frac{735}{1715} \quad ,, \quad \frac{480}{1320} \quad ,, \quad \frac{1443}{2442}$$

LECCION 4

LA REDUCCION A COMUN DENOMINADOR

17. Reducción de fracciones a común denominador.— Para reducir dos o más fracciones a común denominador se hace uso de la propiedad demostrada en el párrafo 14.

Ejemplo:

Reducir a común denominador las fracciones

$$\frac{5}{8}, \frac{7}{12} \text{ y } \frac{11}{18}$$

Multiplicando los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores restantes tendremos

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12 \times 18}{8 \times 12 \times 18} = \frac{1080}{1728}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \times 8 \times 18}{12 \times 8 \times 18} = \frac{1008}{1728}$$

$$\frac{11}{18} = \frac{11 \times 8 \times 12}{18 \times 8 \times 12} = \frac{1056}{1728}$$

Sin embargo este procedimiento no es el más ventajoso. Observemos que el mínimo común múltiplo de 8, 12 y 18 es 72. Entonces podremos escribir

$$8 \times 9 = 72 \quad ; \quad 12 \times 6 = 72 \quad ; \quad 18 \times 4 = 72$$

y por consiguiente

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \frac{45}{72}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \times 6}{12 \times 6} = \frac{42}{72}$$

$$\frac{11}{18} = \frac{11 \times 4}{18 \times 4} = \frac{44}{72}$$

Así quedan reducidas a común denominador las fracciones propuestas y en la forma más sencilla, puesto que el nuevo denominador es él mínimo común múltiplo de los denominadores antiguos. Si hay denominadores negativos, se prescinde de su signo para hallar el mínimo común múltiplo.

Regla:

PARA REDUCIR VARIAS FRACCIONES AL MINIMO DENOMINADOR COMUN SE TOMA COMO NUEVO DENOMINADOR EL MINIMO COMUN MULTIPLO DE LOS DENOMINADORES Y SE FORMAN LOS NUEVOS NUMERADORES MULTIPLICANDO CADA UNO DE LOS ANTIGUOS POR EL COCIENTE DE DIVIDIR DICHO MINIMO COMUN MULTIPLO POR EL DENOMINADOR RESPECTIVO.

Observación.—Como resultado de la regla anterior puede suceder que las fracciones trasformadas tengan denominadores opuestos. En este caso para reducir a común denominador basta multiplicar los dos términos de una de las fracciones o de varias por -1.

Ejemplo:

Reducir a común denominador $\frac{+4}{-9}$ y $\frac{-2}{+9}$

Multiplicando por -1 lo dos términos de la primera fracción tendremos como resultado

$$\frac{-4}{+9} \text{ y } \frac{-2}{+9}$$

18. Adición y sustracción de números fraccionarios.—

En los párrafos 8, 9 y 10 se han explicado los procedimientos para sumar y restar fracciones de igual denominador. En el caso de que los denominadores fuesen diferentes debe hacerse primero la reducción a común denominador; después se efectúa la operación del modo indicado en dichos párrafos y finalmente se simplifica el resultado obtenido.

Ejemplos:

1. $$\frac{+2}{-3}+\frac{+5}{+7}+\frac{+8}{+21}=\frac{+14}{-21}+\frac{+15}{+21}+\frac{+8}{+21}=$$
$$\frac{-14}{+21}+\frac{+15}{+21}+\frac{+8}{+21}=\frac{+9}{+21}=+\frac{9}{21}=+\frac{3}{7}$$

2. $$\frac{+4}{-5}-\frac{-2}{+9}=\frac{+36}{-45}-\frac{+10}{-45}=\frac{+26}{-45}=-\frac{26}{45}$$

3. $$\frac{-3}{+4}-\frac{-1}{-12}=\frac{+9}{-12}-\frac{-1}{-12}=\frac{+10}{-12}=-\frac{10}{12}=-\frac{5}{6}$$

19. Caso particular de los números enteros.—Los procedimientos expuestos para efectuar la adición o sustracción de fracciones son aplicables a toda clase de números racionales y en particular a los enteros. Esto quiere decir que la adición o sustracción de números enteros pueden efectuarse de dos maneras: 1.ª Con arreglo al cálculo de números enteros, y 2.ª Con arreglo al cálculo de fracciones. Los resultados obtenidos aplicando estos criterios están siempre de acuerdo.

Ejemplo:

La adición $(+5)+(-3)$ puede efectuarse de dos maneras:

1.ª Como los números enteros

$$(+5)+(-3)=+2$$

2.ª Como los números fraccionarios

$$(+5)+(-3)=\frac{+5}{+1}+\frac{-3}{+1}=\frac{(+5)+(-3)}{+1}=\frac{+2}{+1}=+2$$

Ambos resultados son iguales.

20. Suma de un entero y una fracción.—De lo dicho en el párrafo anterior se deduce que la suma de un número entero *a* y de un fraccionario $\frac{m}{n}$ puede obtenerse del siguiente modo:

$$a+\frac{m}{n}=\frac{a}{1}+\frac{m}{n}=\frac{a\,n}{n}+\frac{m}{n}=\frac{a\,n+m}{n}$$

Regla:

PARA SUMAR UN ENTERO CON UNA FRACCION, O VICEVERSA, SE MULTIPLICA EL ENTERO POR EL DENOMINADOR DE LA FRACCION; A ESTE PRODUCTO SE LE AÑADE EL NUMERADOR Y, FINALMENTE, COMO DENOMINADOR DEL RESULTADO SE PONE EL MISMO DENOMINADOR DE LA FRACCION DADA.

Ejemplo:

$$(-4)+\frac{-8}{+3}=\frac{(-4)\cdot(+3)+(-8)}{+3}=\frac{(-12)+(-8)}{+3}=\frac{-20}{+3}=-\frac{20}{3}$$

21. Sustracción de un número entero y un fraccionario.—Del mismo modo expuesto en el párrafo anterior, podemos escribir

$$a-\frac{m}{n}=\frac{a}{1}-\frac{m}{n}=\frac{a\,n}{n}-\frac{m}{n}=\frac{a\,n-m}{n}$$

Regla:

PARA RESTAR DE UN NUMERO ENTERO UNA FRACCION, SE MULTIPLICA EL ENTERO POR EL DENOMINADOR DE LA FRACCION; DE ESTE PRODUCTO SE RESTA EL NUMERADOR Y, FINALMENTE, COMO DENOMINADOR DEL RESULTADO SE ESCRIBE EL MISMO DENOMINADOR QUE TIENE EL SUSTRAENDO.

Ejemplo:

$$(+9) - \frac{-5}{-6} = \frac{(+9)\,.\,(-6)-(-5)}{-6} = \frac{(-54)-(-5)}{-6} = \frac{-49}{-6} = +\frac{49}{6}$$

Observación.—Si el minuendo fuese fraccionario y el sustraendo entero la regla sería la siguiente:

$$\frac{m}{n} - a = \frac{m - a\,n}{n}$$

Ejemplo:

$$\frac{-5}{-6} - (+9) = \frac{(-5)-(+9)\,.\,(-6)}{-6} = \frac{(-5)-(-54)}{-6} = \frac{+49}{-6} = -\frac{49}{6}$$

EJERCICIOS

Reducir al mínimo denominador común las fracciones siguientes

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ **2.** $\frac{x}{2}, \frac{3x}{4}, \frac{5x}{8}$

3. $\frac{+1}{-2}, \frac{-2}{+3}, \frac{+3}{-4}, \frac{-4}{+5}$ **4.** $\frac{a}{xy}, \frac{b}{yz}, \frac{c}{zx}$

5. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, \frac{1}{a^2-b^2}$ **6.** $\frac{x}{x-y}, \frac{y}{x^2+y^2-2xy}$

Efectuar las operaciones siguientes

7. $\frac{-11}{+14} + \frac{+5}{-24}$ **8.** $\frac{-9}{-20} + \frac{+7}{+15}$

9. $\frac{+5}{-18} + \frac{-8}{+42} + \frac{-11}{-66}$ **10.** $\frac{-2}{+21} - \frac{-10}{-28}$

11. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ **12.** $\frac{x}{ab} - \frac{y}{ac}$

13. $\frac{x}{4} - \frac{5x}{6} + \frac{3x}{5}$ **14.** $\frac{2x+3}{2} + \frac{6x-2}{5} + \frac{x-1}{10}$

15. $\frac{2x}{a} + \frac{3y}{ab} - \frac{4x}{a^2}$ **16.** $m - \frac{p}{q}$

17. $a + \frac{a-b}{3}$ **18.** $\frac{3x+y-z}{4} - \frac{x-y+z}{10}$

19. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$ **20.** $\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}$

LECCIÓN 5

PRODUCTO Y COCIENTE DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

22. Producto de fracciones.—El principio de permanencia (párrafo 7) y la fórmula (3) nos indican el modo de efectuar el producto de fracciones.

Regla:

PARA MULTIPLICAR DOS O MAS FRACCIONES SE ESCRIBE COMO NUMERADOR EL PRODUCTO DE LOS NUMERADORES Y COMO DENOMINADOR EL PRODUCTO DE LOS DENOMINADORES.

Dicho más claramente:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a\,m}{b\,n} \qquad (13)$$

Para comprobar esta regla basta ver que

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}\right) \cdot (b \,.\, n) = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot \left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = a \,.\, m$$

Ejemplo:

Efectuar el producto de $\frac{-3}{+4}$ por $\frac{+7}{-2}$

$$\frac{-3}{+4} \cdot \frac{+7}{-2} = \frac{(-3)\,.\,(+7)}{(+4)\,.\,(-2)} = \frac{-21}{-8} = +\frac{21}{8}$$

23. Potencia de una fracción.—De la regla anterior se deduce

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a}{b\,.\,b\,.\,b\,.\,b} = \frac{a^4}{b^4}$$

y en general cuando el exponente sea un número natural *n*, cualquiera, tendremos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (14)$$

Regla:

PARA ELEVAR UNA FRACCION A UNA POTENCIA SE FORMAN LAS POTENCIAS CORRESPONDIENTES DE SUS DOS TERMINOS.

24.—Producto de dos potencias de un número racional.— Representando por *x* un número racional cualquiera, tendremos

$$x^3 . x^5 = (x . x . x) . (x . x . x . x . x) = x^{3+5} = x^8$$

y, en general, si *m* y *n* representan dos numeros naturales cualesquiera, tendremos

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \qquad (15)$$

Regla.

PARA MULTIPLICAR DOS POTENCIAS DE UN NUMERO RACIONAL SE FORMA OTRA POTENCIA DE LA MISMA BASE Y CUYO EXPONENTE SEA LA SUMA DE LOS EXPONENTES DE LOS FACTORES.

25. Números recíprocos. — Consideremos las fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{n}{m}$ que tienen los mismos términos pero en orden invertido. Efectuando su producto, tendremos

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{m\,n}{n\,m} = 1 \qquad (16)$$

Definición:

SE DICE QUE DOS NUMEROS SON RECIPROCOS, CUANDO SU PRODUCTO VALE LA UNIDAD.

Ejemplos:

1.° El recíproco de $\frac{-9}{+17}$ es $\frac{+17}{-9}$

2.° El recíproco de -4 es $\frac{+1}{-4} = -\frac{1}{4}$

26. División de fracciones.—El cociente de dos números fraccionarios $\frac{a}{b}$ y $\frac{m}{n}$ se obtiene del modo que indica la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a\,n}{b\,m} \qquad (17)$$

Demostración:

Basta multiplicar el cociente $\frac{an}{bm}$ por el divisor $\frac{m}{n}$ y ver si resulta el dividendo $\frac{a}{b}$; y en efecto, se verifica

$$\frac{a\,n}{b\,m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}\right) =$$

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

Regla:

PARA DIVIDIR DOS NUMEROS FRACCIONARIOS BASTA MULTIPLICAR EL DIVIDENDO POR EL RECIPROCO DEL DIVISOR.

Ejemplo:

$$\frac{-3}{+2} : \frac{-7}{-5} = \frac{-3}{+2} \cdot \frac{-5}{-7} = \frac{+15}{-14} = -\frac{15}{14}$$

27. Cociente de dos potencias de un número racional.— De la igualdad 15 (párrafo 24) se deduce inmediatamente

$$x^{m+n} : x^m = x^n \tag{18}$$

lo cual nos permite formular la siguiente

Regla:

EL COCIENTE DE DOS POTENCIAS DE UN NUMERO RACIONAL ES OTRA POTENCIA DE LA MISMA BASE QUE TIENE POR EXPONENTE LA DIFERENCIA DE LOS EXPONENTES DEL DIVIDENDO Y DEL DIVISOR.

Ejemplo:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^6 : \left(\frac{9}{5}\right)^4 = \left(\frac{9}{5}\right)^{6-4} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$$

28. Potencia de una potencia de un número racional.— Sean *x* un número racional, *m* y *n* dos números naturales.

En virtud del concepto de elevación a potencias podremos escribir

$$(x^m)^n = x^m . x^m . x^m . \overset{(n \text{ veces})}{\cdots\cdots\cdots} x^m . = x^{m+m+m+\overset{(n \text{ veces})}{\cdots\cdots\cdots}+m} = x^{mn}$$

Regla:

PARA ELEVAR A UNA POTENCIA OTRA POTENCIA DE UN NUMERO RACIONAL, SE FORMA OTRA POTENCIA QUE TENGA POR BASE DICHO NUMERO Y POR EXPONENTE EL PRODUCTO DE LOS EXPONENTES.

Ejemplo:

$$(x^4)^3 = x^{12}$$

EJERCICIOS

Calcular los productos siguientes:

1. *a)* $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3}$,, *b)* $\frac{a}{5} \cdot \frac{7}{b}$,, *c)* $\frac{a}{-4b} \cdot \frac{-2m}{n}$

ya están hechos

2. a) $\dfrac{6x}{-5y} \cdot \dfrac{15x^2}{-42y^2}$ b) $\dfrac{-3ax}{4z} \cdot \dfrac{8ab}{2x}$ c) $\dfrac{48xyz}{ab} \cdot \dfrac{a^2b}{9xy}$

3. a) $\dfrac{-8}{3} \cdot \dfrac{5}{-7} \cdot \dfrac{18}{15}$ b) $\dfrac{30a}{7b} \cdot \dfrac{2b}{5} \cdot \dfrac{4}{a}$ c) $\dfrac{xy}{z} \cdot \dfrac{x}{yz} \cdot \dfrac{xz}{y}$

4. a) $\dfrac{4u+z}{3} \cdot \dfrac{2x}{5}$ b) $\dfrac{6}{x+y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{7}$ c) $\dfrac{3a-b}{a+b} \cdot \dfrac{a+3b}{4}$

5. a) $\left(\dfrac{a}{5} + \dfrac{b}{6}\right) \cdot \dfrac{x}{7}$ b) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right)$

c) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \cdot \dfrac{xyz}{a}$

Calcular las potencias siguientes:

6. a) $\left(\dfrac{-a}{2b}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{4xy^2}{5z+3}\right)^2$ c) $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^2$

7. a) $\left(\dfrac{-a^2d}{6uv}\right)^3$ b) $\left(a - \dfrac{1}{a}\right)^3$ c) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)^3$

8. *Simplificar las expresiones siguientes:*

a) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

Efectuar las divisiones siguientes:

9. a) $\dfrac{30ab}{7x} : 3a$ b) $(-24x) : \dfrac{18y}{5}$ c) $h : \dfrac{-4m}{-3n}$

10. a) $\dfrac{16c^2d}{k} : \dfrac{8kc}{d}$ b) $\dfrac{2,3x}{5y^2} : \dfrac{9x}{1,4y}$ c) $\dfrac{0,45ab^2}{0,02xy} : \dfrac{0,1b}{0,3y^2}$

11. a) $\dfrac{x}{x-y} : \dfrac{y}{x+y}$ b) $\dfrac{xy}{x^2-y^2} : \dfrac{x}{x+y}$ c) $\dfrac{a+b}{a-b} : \dfrac{a-b}{a+b}$

12. a) $\left(\dfrac{3}{a} - \dfrac{5}{c}\right) : \dfrac{4}{b}$ b) $\left(\dfrac{12}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right) : \dfrac{z}{xy}$ c) $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) : \dfrac{3}{abc}$

13. a) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2} : \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} : \dfrac{x-y}{x+y}$

Efectuar las operaciones siguientes:

14. a) $\left[\left(\dfrac{5}{7}\right)^3\right]^2$ ” b) $\left[\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2\right]^5$

15. a) $\left[\left(-\dfrac{1}{10}\right)^4\right]^1$ ” b) $\left[\left(\dfrac{1}{100}\right)^8\right]^4$

LECCIÓN 6

EXPONENTES CERO Y NEGATIVO

29. Potencias de exponente cero.—La regla enunciada en el párrafo 27 exige que el exponente del dividendo sea mayor que el exponente del divisor. Cuando no se cumple esta condición surgen algunas dificultades.

Si los exponentes del dividendo y del divisor son iguales es porque n vale cero y entonces la fórmula (18) dirá:

$$x^m : x^m = x^0$$

En este caso la citada regla no es cierta, porque x^0 es un símbolo que carece de significado. Pero como el valor del cociente, en este caso, es la unidad, podemos admitir desde ahora en adelante el convenio

$$x^0 = 1 \qquad (19)$$

y de este modo la regla del párrafo 27 seguirá siendo cierta.

Convenio:

TODO NUMERO RACIONAL ELEVADO AL EXPONENTE CERO VALE LA UNIDAD.

30. Potencias de exponente negativo.—Si el exponente $m + n$ del dividendo es menor que el exponente m del divisor, será porque el valor de n es negativo. En este caso tampoco es aplicable la regla del párrafo 27, puesto que elevar un número x a un exponente negativo es una operación que carece de significado propio.

Ejemplo:

Aplicando la citada regla para dividir 3^5 por 3^7, resulta como cociente

$$3^{5-7} = 3^{-2}$$

Pero 3^{-2} es un símbolo que carece de significado y por eso el método expuesto no sirve para efectuar la división propuesta.

Otro método es el siguiente:

$$3^5 : 3^7 = \frac{3^5}{3^7} = \frac{3^5 : 3^5}{3^7 : 3^5} = \frac{1}{3^2}$$

Pues bien, si desde ahora en adelante admitimos que el símbolo 3^{-2} significa lo mismo que $\frac{1}{3^2}$, tendremos que es cierta la igualdad

$$3^5 : 3^7 = 3^{-2}$$

y la regla del párrafo 27 será aplicable sin excepción si, además del convenio del párrafo 29, establecemos otro

Convenio

TODO NUMERO RACIONAL ELEVADO A UNA POTENCIA DE EXPONENTE ENTERO Y NEGATIVO ES IGUAL A UNA FRACCION CUYO NUMERADOR ES LA UNIDAD Y CUYO DENOMINADOR ES LA MISMA POTENCIA PERO CON EXPONENTE POSITIVO.

Dicho más brevemente

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (20)$$

31. Operaciones con potencias de exponente entero y negativo.—Una vez definido el concepto de potencia de exponente entero y negativo es preciso comprobar si éstas se comportan, en las operaciones aritméticas, del mismo modo que las potencias de exponente entero y positivo.

Por ejemplo, queremos efectuar el producto de x^{-m} por x^{-n}. Si aplicamos la regla del párrafo 24, resulta

$$x^{-m} . x^{-n} = x^{-(m+n)} \qquad (21)$$

pero como dicha regla se ha obtenido suponiendo que los exponentes eran positivos, es preciso comprobar si es también válida en el caso de ser negativos los exponentes. La comprobación se efectúa del siguiente modo

$$x^{-m}. x^{-n} = \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^m . x^n} = \frac{1}{x^{m+n}} = x^{-(m+n)}$$

En general, todas las propiedades del cálculo de potencias con exponentes enteros y positivos son aplicables al cálculo de potencias de exponentes enteros y negativos.

Ejemplos:

1.° $x^{-m} : x^{-n} = x^{-m+n}$ (22)

En efecto

$$x^{-m} : x^{-n} = \frac{1}{x^m} : \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = x^{-m+n}$$

2.° $(xy)^{-m} = x^{-m} y^{-m}$ (23)

En efecto

$$(xy)^{-m} = \frac{1}{(xy)^m} = \frac{1}{x^m\,y^m} = x^{-m}.\,y^{-m}$$

3.º $$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \frac{x^{-m}}{y^{-m}} \qquad (24)$$

En efecto

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = 1 : \left(\frac{x}{y}\right)^{m} = 1 : \frac{x^m}{y^m} = \frac{1}{x^m} : \frac{1}{y^m} = \frac{x^{-m}}{y^{-m}}$$

4.º $$\left(x^{-m}\right)^{-n} = x^{m\,n} \qquad (25)$$

En efecto

$$(x^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{x^m}\right)^{-n} = \frac{1}{x^{-m\,n}} = x^{-m\,n}$$

EJERCICIOS

Efectuar las operaciones siguientes

1. *a)* 7^0 *b)* 25^0 *c)* 1000^0

2. *a)* x^0 *b)* $x^0\,y^0$ *c)* $\dfrac{3x^0\,y^0}{z^0}$

3. *a)* $\dfrac{-24\,u^0 + v^0}{(t^0)^2}$ *b)* $(a^0 + b^0)^3$ *c)* t^{0^0}

4. *a)* 2^{-3} *b)* 10^{-5} *c)* 137^{-2}

5. *a)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ *b)* $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$ *c)* $\left(\dfrac{10}{11}\right)^{-4}$

6. *a)* $16 \cdot 2^{-1}$ *b)* $27 \cdot 3^{-2}$ *c)* $125 \cdot 5^{-2}$

7. *a)* $1 : 2^{-4}$ *b)* $1 : x^{-3}$ *c)* $1 : a^{-m}$

8. *a)* $36 : 6^{-2}$ *b)* $28 : 2^{-3}$ *c)* $2^6 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$

9. *a)* t^{-2} *b)* $(-t)^{-2}$ *c)* $(-t^3)^{-2}$

10. *a)* $(x^{-2})^3$ *b)* $(x^{-3})^2$ *c)* $(x^{-3})^{-2}$

11. *a)* $a^5 \cdot a^{-2}$ *b)* $a^4 \cdot a^{-9}$ *c)* $a^{-3} \cdot a^{-7}$

12. *a)* $a^3\,b^{-2} \cdot a^{-2}\,b$,, *b)* $a^{-1}\,b^3 \cdot a^{-1}\,b^{-3}$ *c)* $a^{-2}\,b^{-3} \cdot a^{-4}\,b^{-5}$

13. *a)* $\dfrac{4}{5}\,x^{-5}\,y^{-4}\,z \,.\, \dfrac{10}{8}\,x^{-1}\,y^{-2}\,z^{-3}$,,

b) $\dfrac{7}{10}\,a^3\,b^3\,c^{-2} \cdot \dfrac{5}{14}\,.\,a^2\,b^{-3}\,c^{-2}$

14. *a)* $-\dfrac{3}{4}\,u^{-4}\,v^{-5t^2} : \dfrac{3}{28}\,u^{-7}\,v^{-6t^4}$,,

b) $-\dfrac{3x^{-m}\,y^n\,z^2}{11\,u^{-4}} : 9\,x^n\,y^{-m}\,z\,u^5$

15. *a)* $(x^{-2} + y)^2$ *b)* $(3\,x^{-1} - 2\,y^{-3})^2$ *c)* $(a^{-4} + b^{-3})^{-2}$

LECCIÓN 7

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

32. Definiciones.—Se llama razón de dos números al cociente, indicado o efectuado, de dichos números. El dividendo se llama antecedente y el divisor consecuente. La razón del antecedente *a* al consecuente *b*, se expresa así:

$$\frac{a}{b} \text{ o bien } a : b$$

Se llama proporción numérica a la igualdad de dos razones numéricas.

33. Propiedad fundamental de las proporciones.—En los cursos anteriores se han estudiado algunas propiedades de las proporciones cuyos términos son números positivos. Ahora vamos a ampliar dicho estudio suponiendo, además, que los términos de la proporción son números racionales cualesquiera distintos de cero.

Sea la proporción a : b = c : d que puede ponerse en la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (26)$$

Multiplicando sus dos miembros por el producto de los consecuentes, *b d*, tendremos

$$\frac{a}{b}\, b\, d = \frac{c}{d}\, b\, d$$

y simplificando resulta

$$ad = cb \qquad (27)$$

EN TODA PROPORCION EL PRODUCTO DE LOS EXTREMOS ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS MEDIOS.

34. Cálculo de un extremo.—Dividiendo los dos miembros de la igualdad (27) por *d* o por *a*, tendremos respectivamente

$$a = \frac{b\,c}{d} \qquad d = \frac{b\,c}{a}$$

UN EXTREMO DE UNA PROPORCION ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS MEDIOS DIVIDIDO POR EL OTRO EXTREMO.

35. Cálculo de un medio.—Dividiendo los dos miembros de la igualdad (27) por *c* o por *b*, tendremos respectivamente

$$b = \frac{a\,d}{c} \qquad\qquad c = \frac{a\,d}{b}$$

UN MEDIO DE UNA PROPORCION ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS EXTREMOS DIVIDIDO POR EL OTRO MEDIO.

36. Cuartos y medios proporcionales.—Cada término de una proporción se dice que es cuarto proporcional de los otros tres. Esta denominación se aplica más especialmente al segundo consecuente.

Por ejemplo en la proporción

$$2 : 3 = 10 : 15$$

15 es el cuarto proporcional a 2, 3 y 10.

Puede ocurrir que los medios de la proporción sean iguales, por ejemplo

$$a : b = b : c$$

Estas proporciones se llaman contínuas y entonces se dice que *c* es el tercero proporcional de *a* y *b*. También, en ese caso, se dice que *b* es medio proporcional a *a* y *c*.

Ejemplo:

La proporción $2 : 4 = 4 : 8$ es contínua.

8 es tercero proporcional de 2 y 4.

4 es medio proporcional de 2 y 8.

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones a la proporción contínua

$$a : b = b : c$$

resulta $b^2 = a\,c$ de donde $b = \sqrt{a\,c}$

Regla:

PARA OBTENER EL MEDIO PROPORCIONAL DE DOS NUMEROS SE EXTRAE LA RAIZ CUADRADA DEL PRODUCTO DE DICHOS NUMEROS.

37. Propiedad recíproca de las proporciones.—Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, puede formarse con ellos una proporción que tenga por extremos uno de los pares de números y por medios el otro par.

En efecto, si se verifica

$$a\,d = b\,c$$

podemos dividir ambos miembros por el producto *a b* y tendremos

$$\frac{a\,d}{a\,b} = \frac{b\,c}{a\,b}$$

y simplificando queda la proporción

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Consecuencias:

De esta propiedad se deducen diversas consecuencias que interesa conocer.

I. Los términos de una proporción pueden ordenarse de ocho modos distintos sin que desaparezca la proporción.

En efecto, si se verifica la proporción

$$a : b = c : d$$

también se verifican las proporciones siguientes

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

pues en todas ellas se cumple la propiedad recíproca de las proporciones.

Cualquiera de estas siete proporciones se deduce de la proporción inicial permutando, sus extremos, o sus medios, o sus dos miembros o cada antecedente con su consecuente.

II. En toda proporción podemos multiplicar un extremo y un medio por un número sin que desaparezca la proporción.

En efecto, de la proporción

$$a : b = c : d$$

se deduce

$$n\,a : b = n\,c : d \quad \text{y también} \quad n\,a : n\,b = c : d$$

puesto que de aquella proporción se deduce la igualdad

$$n\,a\,d = n\,b\,c$$

III. En toda proporción podemos dividir un extremo y un medio por un número sin que desaparezca la proporción.

En efecto, de las proporciones

$$n\,a : n\,b = c : d \quad \text{o bien} \quad n\,a : b = n\,c ; d$$

se deduce

$$a : b = c : d$$

puesto que de aquellas proporciones se deduce la igualdad

$$a\,d = b\,c$$

EJERCICIOS

Comprobar la exactitud de las proporciones siguientes:

1. *a*) $2 : 3 = 10 : 15$ *b*) $(-4) : 7 = 8 : (-14)$

2. *a*) $(-8) : (-6) = 12 : 9$ *b*) $12 : (-18) = (-10) : 15$

Calcular el valor de x *en las proporciones siguientes:*

3. *a*) $(-6) : 9 = (-14) : x$ *b*) $5 : x = (-2) : (-10)$

4. *a*) $(-x) : 4 = 11 : (-3)$ *b*) $22 : (-6) = x : (-18)$

Formar proporciones con las igualdades siguientes:

5. *a*) $4 \cdot 9 = 12 \cdot 3$ *b*) $2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$

6. *a*) $0{,}6 \cdot 2 = 4 \cdot 0{,}3$ *b*) $5 \cdot 1{,}2 = 2 \cdot 3$

Hallar un medio proporcional entre los números siguientes:

7. *a*) $8 ; 18$ *b*) $48 ; 12$

8. *a*) $20 ; 320$ *b*) $25 ; 500$

9. *a*) $1\frac{3}{8} ; 2\frac{10}{11}$ *b*) $\frac{5}{9} ; \frac{1}{5}$

Determinar un cuarto proporcional a los números siguientes:

10. *a*) $5xy ; z ; y$ *b*) $2a ; 3b ; 2c$

11. *a*) $xz ; \frac{z}{x} ; \frac{x}{yz}$ *b*) $a^2b ; \frac{c}{ab^2} ; \frac{c}{ab}$

Ordenar de todas las maneras posibles los términos de la proporción

12. *a*) $(-6) : 8 = 9 : (-12)$ *b*) $m : n = x : y$

Calcular un tercero proporcional a los números siguientes

13. *a*) $9 ; 6$ *b*) $8 ; 60$

14. *a*) $4x ; 3y$ *b*) $x^2yz ; xy^2z^3$

15. *Demostrar que multiplicando miembro a miembro dos proporciones se obtiene otra proporción.*

LECCION 8

TRASFORMACIONES DE UNA PROPORCION

38. Sucesión de razones iguales.—Si tenemos una sucesión de dos o más razones iguales, la nueva razón que tiene por antecedente la suma de todos los antecedentes y por consecuente la suma de todos los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones dadas.

En efecto, sean las tres razones iguales

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$$

Representando por q su valor tendremos

$$a : a_1 = q \quad .. \quad b : b_1 = q \quad .. \quad c : c_1 = q$$

De estas igualdades se deduce

$$\begin{aligned} a &= a_1, q \\ b &= b_1, q \\ c &= c_1, q \end{aligned} \qquad (28)$$

y sumando miembro a miembro estas tres igualdades resulta

$$a + b + c = a_1 q + b_1 q + c_1 q$$

y sacando el factor común q del segundo miembro tendremos

$$a + b + c = (a_1 + b_1 + c_1)\, q$$

de donde se deduce, finalmente

$$(a + b + c) : (a_1 + b_1 + c_1) = q$$

Observación:

Si en vez de sumar aritméticamente las igualdades (28) las sumamos algébricamente se deducen, según el modo de efectuar esta suma, otras tantas igualdades de los tipos siguientes

$$\begin{aligned} a + b - c &= (a_1 + b_1 - c_1)\, q \\ a - b + c &= (a_1 - b_1 + c_1)\, q \\ a - b - c &= (a_1 - b_1 - c_1)\, q \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

de las cuales se deduce

$$\begin{aligned} (a + b - c) &: (a_1, + b_1, - c_1,) = q \\ (a - b + c) &: (a_1, - b_1, + c_1,) = q \\ (a - b - c) &: (a_1, - b_1, - c_1,) = q \end{aligned}$$

Regla:

SI TENEMOS UNA SUCESION DE DOS O MAS RAZONES IGUALES, LA NUEVA RAZON QUE TIENE POR ANTECEDENTE UNA SUMA ALGEBRICA CUALQUIERA FORMADA CON LOS ANTECEDENTES Y POR CONSECUENTE LA SUMA ALGEBRICA ANALOGA FORMADA CON LOS CONSECUENTES ES IGUAL A UNA CUALQUIERA DE LAS RAZONES DADAS.

39. Proporciones que se derivan de una proporción dada.—En el párrafo 37 hemos visto como, de una proporción, se deducen otras siete que tienen los mismos elementos que la primera pero en distinto orden. Ahora vamos a deducir otras proporciones en las que intervienen nuevos elementos.

Aplicando a la proporción $a : b = c : d$ la propiedad demostrada en el párrafo anterior se deduce inmediatamente que

$$(a + c) : (b + d) = a : b \quad \text{y también} \quad (a + c) : (b + d) = c : d$$

Es decir:

I. En toda proporción, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Del mismo modo pueden deducirse estas nuevas proporciones

$$(a - c) : (b - d) = a : b \qquad (a - c) : (b - d) = c : d$$

Es decir:

II. En toda proporción la diferencia de los antecedentes es a la diferencia de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

De la proporción $a : b = c : d$ se deduce $a : c = b : d$ y aplicando a ésta la propiedad que acabamos de enunciar resultará

$$(a + b) : (c + d) = a : c \quad \text{o bien} \quad (a + b) : (c + d) = b : d$$
$$(a - b) : (c - d) = a : c \quad \text{o bien} \quad (a - b) : (c - d) = b : d$$

Es decir:

III. En toda proporción la suma de los dos términos de la primera razón es a la suma de los otros dos, como un término de la primera razón es a su homólogo de la segunda.

IV. En toda proporción la diferencia de los dos términos de la primera razón es a la diferencia de los otros dos como un término de la primera razón es a su homólogo de la segunda.

Observando que los dos pares de proporciones últimamente escritas tienen sus segundos miembros iguales se deducen otras nuevas

$$(a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$$
$$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$$

Y esta última referida a la proporción $a:b=c:d$ nos dice:

V. En toda proporción la suma de los términos de la primera razón es a su diferencia como la suma de los dos términos de la segunda razón es a su diferencia.

Y refiriéndola a la proporción $a:b=c:d$ tendremos:

VI. En toda proporción la suma de los antecedentes es a su diferencia como la suma de los consecuentes es a su diferencia.

40. Proporciones progresivas.—Si tenemos dos proporciones

$$3:8=6:16$$
$$8:5=16:10$$

tales que los consecuentes de la primera sean los antecedentes de la segunda, diremos que estas proporciones forman una proporción progresiva, la cual se escribe así:

$$3:8:5=6:16:10$$

Recíprocamente, de toda proporción progresiva se deducen varias proporciones simples; por ejemplo, la proporción

$$2:7:9=6:21:27$$

supone que se verifican las proporciones simples

$$2:7=6:21$$
$$7:9=21:27$$

y permutando los medios en cada una de éstas se obtiene

$$2:6=7:21$$
$$7:21=9:27$$

de donde se deduce finalmente

$$2:6=7:21=9:27$$

Regla:

EN TODA PROPORCION PROGRESIVA LA RAZON DE UN TERMINO CUALQUIERA DEL PRIMER MIEMBRO A SU HOMOLOGO EN EL SEGUNDO MIEMBRO ES CONSTANTE.

Por consiguiente, la proporción progresiva

$$a : b : c = x : y : z$$

significa, también, que se cumplen las relaciones

$$a : x = b : y = c : z$$

y aplicando a esta sucesión de razones iguales la primera regla del párrafo 38 tendremos que

EN TODA PROPORCION PROGRESIVA LA SUMA DE TODOS LOS TERMINOS DE LA IZQUIERDA ES A LA SUMA DE TODOS LOS TERMINOS DE LA DERECHA COMO UN TERMINO CUALQUIERA DE LA IZQUIERDA ES A SU HOMOLOGO DE LA DERECHA.

Cuando se conocen las razones entre un número y otros dos pueden expresarse dichas razones en forma de proporción progresiva.

Ejemplo:

Expresar mediante una proporción progresiva las razones

$$x : y = 3 : 7$$

$$y : 2 = 2 : 5$$

Si multiplicamos los términos de la primera razón por 2 y los de la segunda por 7, tendremos

$$x : y = 6 : 14$$

$$y : 2 = 14 : 35$$

de donde se obtiene la proporción progresiva.

$$x : y : z = 6 : 14 : 35$$

EJERCICIOS

1 Comprobar todas las reglas expuestas en el párrafo 39, aplicando la propiedad recíproca de las proporciones.

2 Trasformar las proporciones

$$8 : 6 = 20 : 15 \quad ,, \quad 10 : 8 = 35 : 28$$

aplicando las reglas del párrafo 39.

3 Descomponer el número 25 en dos sumandos cuya razón sea $\frac{2}{3}$

4 Calcular dos números cuya diferencia sea 35 y su razón $\frac{9}{5}$

5 Comprobar si se verifican las proporciones progresivas

$$2 : 4 : 11 = 10 : 20 : 50$$

$$43 : 19 : 72 = 129 : 57 : 216$$

$$8 : 420 : 173 = 56 : 2940 : 1211$$

Formar una proporción progresiva con las proporciones simples

6. $a : b = 1 : 3$ $\qquad$ $a : b = 2 : 3$

$b : c = 3 : 8$ $\qquad$ $b : c = 6 : 7$

7. $x : y = 1 : 2$ $\qquad$ $x : y = 1 : 2$

$y : z = 2 : 3$ $\qquad$ $y : z = 3 : 4$

$z : u = 3 : 4$ $\qquad$ $z : u = 5 : 6$

8. $i_1 : i_2 = w_2 : w_1$

$i_2 : i_3 = w_3 : w_2$

9. $k_1 : k_2 = r_2^2 : r_1^2$

$k_2 : k_3 = r_3^2 : r_2^2$

10. $a_1 : a_2 = m_2 : m_1$

$a_2 : a_3 = m_3 : m_2$

11. $l_1 : l_2 = k_2 : k_1$

$l_2 : l_3 = k_3 : k_2$

12. $p_1 : p_2 = v_2 : v_1$

$p_2 : p_3 = v_3 : v_2$

13. $z_1 : z_2 = r_2 : r_1$

$z_2 : z_3 = r_3 : r_2$

LECCION 9

FRACCIONES DECIMALES

41. Expresión decimal de una fracción ordinaria.—Entre los números fraccionarios merecen destacarse aquellos cuyo denominador es una potencia de 10. Estas fracciones se llaman decimales para distinguirlas de las restantes, que se llaman fracciones ordinarias.

Si queremos trasformar una fracción ordinaria en decimal, habrá que multiplicar los dos términos de aquélla por un número entero elegido convenientemente para que el nuevo denominador sea una potencia de 10.

Ejemplos:

1.º Convertir en decimal la fracción ordinaria $\frac{7}{40}$

Observando que el denominador descompuesto en sus factores primos vale

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

se ve facilmente que el producto de 40 por 5^2 es una potencia de 10, pues

$$40 \cdot 5^2 = 2^3 \cdot 5 \cdot 5^2 = 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$$

Multiplicando los dos términos de la fracción propuesta por 25 tendremos

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$$

2.º Convertir en decimal la fracción ordinaria $\frac{5}{12}$

Descomponiendo el denominador en sus factores primos resulta

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

y como las potencias de 10 solo tienen como factores primos 2 y 5, resulta que no existe ningún número entero que multiplicado por 12 nos de una potencia de 10.

Consecuencias:

1.ª Toda fracción ordinaria, cuyo denominador contenga como factores primos, solamente, 2 y 5, puede expresarse exactamente en forma decimal.

2.ª Toda fracción ordinaria, cuyo denominador contenga algún factor primo distinto de 2 y 5, no puede expresarse exactamente en forma decimal.

42. Fracciones decimales periódicas.—También puede convertirse una fracción ordinaria en decimal, recordando que toda fracción ordinaria representa el cociente exacto de sus dos términos. Bastará, pues, efectuar esta división calculando, además de la parte entera, la parte decimal del cociente.

Ejemplos:

1.° Convertir en decimal la fracción ordinaria $\frac{7}{40}$.

Efectuando la división tendremos

$$\begin{array}{l|l} 7{,}0 & 40 \\ \hline 3\ 00 & 0{,}174 \\ \ \ 200 & \\ \ \ \ 00 & \end{array}$$

y por consiguiente

$$\frac{7}{40} = 0{,}175$$

2.° Convertir en decimal la fracción $\frac{5}{3}$.

Efectuando la división

$$\begin{array}{l|l} 5 & 3 \\ \hline 20 & 1{,}666... \\ \ 20 & \\ \ 20 & \end{array}$$

se ve que la cifra 6 del cociente se repite constantemente y nunca podremos llegar a un resto cero, lo cual está de acuerdo con lo dicho en la consecuencia 2.ª del párrafo anterior.

Como valores aproximados de $\frac{5}{3}$, en forma decimal, podemos tomar cualquiera de los siguientes:

1,6 1,66 1,666 1,6666 1,66666 etc.

La expresión decimal exacta de $\frac{5}{3}$ se obtendrá repitiendo infinitas veces la cifra 6, llamada período por esta repetición.

Como no es posible materialmente escribir infinitas veces una cifra, emplearemos el símbolo $\overset{\frown}{6}$ para significar esta repetición incesante del período. Entonces tendremos la igualdad

$$\frac{5}{3} = 1{,}\overset{\frown}{6}$$

3.° Convertir en decimal la fracción ordinaria $\frac{39}{44}$.

Efectuando la división

$$\begin{array}{r|l} 39{,}0 & 44 \\ \cline{2-2} 3\,80 & 0{,}886363... \\ 2\,80 & \\ 160 & \\ 280 & \\ 180 & \end{array}$$

se ve que el grupo de cifras 63 se repite constantemente y forma el periodo. Valores aproximados de $\frac{39}{44}$, en forma decimal son,

0,8 0,88 0,886 0,8863 0,88636 0,886363
0,8863636 0,88636363 0,886363636 0,8863636363 etc.

con toda la aproximación que queramos.

Como expresión exacta podemos escribir

$$\frac{39}{44} = 0{,}88\overparen{63}$$

Los resultados obtenidos en los dos últimos ejemplos se llaman fracciones decimales periódicas. Son decimales por su forma exterior y periódicas porque existe en ellas un grupo de cifras, llamado periodo, que se repite incesantemente.

Estas fracciones pueden ser de dos clases: 1.ª periódicas puras, cuando el periodo empieza en la cifra de las décimas. 2.ª periódicas mixtas, cuando el periodo no empieza en la cifra de las décimas.

Ejemplos:

$1{,}\overparen{6}$ $0{,}\overparen{45}$ $36{,}\overparen{567}$ son fracciones decimales periódicas puras.

$0{,}88\overparen{63}$ $107{,}4\overparen{9}$ $7{,}3\overparen{586}$ son fracciones decimales periódicas mixtas.

43. La fracción generatriz.—Al convertir una fracción ordinaria en decimal, empleando el método de la división que acabamos de explicar, pueden ocurrir dos casos: 1.º, que se llegue a un resto cero. 2.º, que nunca se llegue a un resto cero.

En el primer caso la fracción ordinaria es equivalente a un decimal exacto.

En el segundo caso, como todos los restos parciales que se obtengan han de ser menores que el divisor, tiene que repetirse algún dividendo parcial y desde ese momento se repetirá indefinidamente un grupo de cifras del cociente.

Consecuencia:

Toda fracción ordinaria es equivalente a un decimal exacto o periódico. Esta fracción ordinaria se llama generatriz del decimal.

Ejemplos:

1.° La fracción generatriz de 0,175 es $\frac{7}{40}$

2.° La fracción generatriz de $1,\overset{\frown}{6}$ es $\frac{3}{5}$

3.° La fracción generatriz de $0,88\overset{\frown}{63}$ es $\frac{39}{44}$

EJERCICIOS

Convertir en fracción decimal

1. $\frac{3}{5}$,, $\frac{5}{8}$,, $\frac{7}{16}$,, $\frac{11}{25}$,, $\frac{17}{625}$,, $\frac{123}{8}$,, $\frac{261}{150}$

2. $\frac{1}{9}$,, $\frac{4}{9}$,, $\frac{20}{9}$,, $\frac{1}{99}$,, $\frac{1}{999}$,, $\frac{1}{9999}$,, $\frac{30}{150}$

3. $\frac{1}{3}$,, $\frac{2}{3}$,, $\frac{4}{7}$,, $\frac{4}{11}$,, $\frac{5}{13}$,, $\frac{12}{37}$,, $\frac{48}{73}$

4. $\frac{5}{6}$,, $\frac{7}{12}$,, $\frac{13}{15}$,, $\frac{19}{24}$,, $\frac{35}{36}$,, $\frac{16}{75}$,, $\frac{11}{150}$

Efectuar las operaciones indicadas y comprobar sus resultados con los obtenidos manejando los números decimales equivalentes.

5. $\frac{21}{5} + \frac{7}{40}$,, $3\frac{11}{16} + 8\frac{9}{64}$,, $\frac{1}{3} + \frac{2}{9}$

6. $\frac{13}{4} - \frac{3}{80}$,, $6\frac{4}{25} - 2\frac{7}{20}$,, $\frac{5}{6} - \frac{9}{80}$

7. $\frac{4}{125} \times \frac{3}{8}$,, $\frac{7}{4} \times \frac{41}{512}$,, $\frac{3}{37} \times 4$

8. $\frac{29}{20} : \frac{5}{16}$,, $\frac{49}{50} : \frac{7}{625}$,, $\frac{7}{9} : 8$

Expresar directamente en forma decimal el resultado de las operaciones siguientes:

9. $3 . 10^2 + 7 . 10 + 1 + 4 . \frac{1}{10} + 8 . \frac{1}{100}$

10. $2 + \frac{1}{10} + 6 . \frac{1}{1000}$

11. $5 . \frac{1}{100} + 4 . \frac{1}{1000} + 8 . \frac{1}{10\,000}$

12. $425 + \frac{1}{1\,000\,000}$

LECCION 10

SUCESIONES DE NUMEROS

44. Concepto de sucesión.—Recibe el nombre de sucesión todo conjunto de números considerados en un cierto orden. Estos números se llaman elementos de la sucesión.

En toda sucesión hay dos cosas esenciales: sus elementos y el orden en que están colocados dichos elementos.

Ejemplos:

1.° Los números dígitos considerados de menor a mayor forman la sucesión

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

2.° Los números dígitos considerados de mayor a menor forman otra sucesión

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

3.° Los números dígitos considerados en el orden

6, 9, 1, 5, 4, 2, 3, 10, 8, 7

forman otra sucesión distinta de las dos anteriores

45. Sucesiones finitas e infinitas.-Consideremos la sucesión

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

formada por todos los números primos inferiores a 20 en su orden natural de aparición y veremos que a todo elemento sigue otro, excepto el 19 al cual no le sigue ninguno; este es el último elemento de la sucesión. Al propio tiempo vemos que a todo elemento de la sucesión precede otro excepto al elemento 1 al cual no le precede ninguno; este es el primer elemento de la sucesión.

Las sucesiones que poseen un primer elemento y un último elemento se llaman finitas. Todas las sucesiones citadas en los ejemplos anteriores son finitas. Pero existen también sucesiones, por ejemplo la de los números naturales

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8....

que poseen primer elemento y carecen de último. Estas sucesiones se llaman infinitas.

Ejemplos:

1.º La sucesión de los números pares

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14....$$

es infinita

2.º La sucesión de los números impares

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15....$$

es infinita.

3.º La sucesión de unidades

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$$

es infinita.

46. Sucesiones monótonas.—Cuando todo elemento de una sucesión es siempre mayor o igual, o, siempre menor o igual que el elemento siguiente se dice que la sucesión es monótona. Según los casos, las sucesiones monótonas se llaman crecientes o decrecientes, no crecientes o no decrecientes.

Ejemplos:

1.º La sucesión 1,2,3,4,5,6,7,8, es monótona creciente.
2.º La sucesión 8,7,6,5,4,3,2,1, es monótona decreciente.
3.º La sucesión 5,7,9,9,9,9,9, es monótona no decreciente.
4.º La sucesión 8,4,3,3,3,3,3, es monótona no creciente.
5.º La sucesión 5,7,3,18,11 no es monótona.

47. Sucesiones monótonas convergentes.—La sucesión de unidades

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

tiene las siguientes propiedades:

1.ª Es infinita.

2.ª Es monótona.

3.ª Sus términos se acercan cada vez más al valor cero.

4.ª El valor absoluto de la diferencia entre un elemento cualquiera de la sucesión y el número cero puede llegar a ser tan pequeño como se quiera.

Las tres primeras propiedades son evidentes. Para comprobar la cuarta elijamos un número muy pequeño, por ejemplo $\frac{1}{10^{45}}$. Pues bien, el valor absoluto de la diferencia entre el término que ocupa, en la sucesión, el lugar $10^{45} + 1$ y el número cero es

$$\left| \frac{1}{10^{45}+1} - 0 \right| < \frac{1}{10^{45}} .$$

Abreviadamente se dice que los términos de la sucesión convergen hacia el valor cero.

Definición:

TODA SUCESION INFINITA Y MONOTONA CUYOS TERMINOS CONVERGEN HACIA UN CIERTO NUMERO SE DICE QUE ES CONVERGENTE.

Ejemplos:

1.º La sucesión infinita

$$1 + 1 = 2$$
$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$
$$1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$
$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
$$\vdots$$
$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$
$$\vdots$$

es monótona decreciente y sus términos convergen hacia el valor 1.

2.º En el párrafo 42, ejemplo 2.º, hemos obtenido la sucesión

1,6 1,66 1,666 1,6666 ....

que es monótona creciente y, según lo expuesto en dicho lugar, converge hacia su fracción generatriz $\frac{5}{3}$.

3.º La sucesión infinita

5,9 5,99 5,999 5,9999 ....

es monótona creciente y converge hacia el valor 6.

4.º La sucesión de los números enteros y negativos

$-1 , -2 , -3 , -4 , \ldots\ldots , -n , \ldots\ldots$

es monótona decreciente, pero no es convergente, pues sus términos no se acercan indefinidamente hacia ningún número.

48. Límite de una sucesión.

EL NUMERO AL CUAL SE ACERCAN INDEFINIDAMENTE LOS TERMINOS DE UNA SUCESION MONOTONA CONVERGENTE SE LLAMA LIMITE DE LA SUCESION.

Ejemplos: 1.º El límite de la sucesión de unidades

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

es cero, lo cual, en términos matemáticos se expresa así:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

2.º El límite de la sucesión

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\ldots$$

es 1 y por consiguiente escribiremos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

EJERCICIOS

1. *Citar ejemplos de sucesiones finitas e infinitas.*
2. *¿Qué dificultad surje cuando se quiere formar una sucesión monótona creciente con todos los números racionales positivos?*
3. *¿Qué clase de sucesión van formando las edades de una persona?*
4. *¿Qué clase de sucesiòn van formando los dias que le quedan de vida a una persona?*

Determinar el carácter de las sucesiones que a continuación se expresan y, en caso de convergencia, calcular su límite.

Hallar los términos generales de las sucesiones siguientes

5. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\ldots$
6. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\ldots$
7. $\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{192}, \frac{243}{768}, \frac{729}{3072}, \ldots\ldots$
8. $1, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{4}}, \frac{5}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \ldots\ldots$
9. $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{4}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \ldots\ldots$
10. $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots\ldots$

Estudiar el carácter de las sucesiones deducidas de las siguientes expresiones cuando x adquiere, sucesivamente, los valores 1, 2, 3, 4, 5 ....

11. $a + x$ **12.** $a - x$ **13.** $a\,x$

14. $\dfrac{a}{x}$ **15.** 6^x **16.** $\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$

17. $\sqrt[x]{10}$ **18.** $\dfrac{\sqrt[x]{1}}{10}$ **19.** $\sqrt[x]{0}$

20. *Estudiar el carácter de las sucesiones deducidas de las expresiones indicadas en los ejercicios 11 ÷ 14 cuando x adquiere sucesivamente los valores*

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ .....$$

Calcular los límites siguientes:

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+1}$ **22.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)$

LECCION 11

CONVERSION DE FRACCIONES DECIMALES EN ORDINARIAS

49. Convertir un decimal exacto en fracción ordinaria. —Según se ha estudiado en cursos anteriores y hemos recordado en el párrafo 41, toda fracción decimal es equivalente a una fracción ordinaria que tiene por denominador una potencia de 10. El exponente de esta potencia es el número de cifras decimales que tiene la fracción y el numerador de esta fracción ordinaria es el entero que se obtiene suprimiendo la coma en el decimal.

Ejemplos:

1.º Convertir en fracción ordinaria el decimal 14,6.

$$14{,}6 = \frac{146}{10} = \frac{73}{5}$$

2.º Convertir en fracción ordinaria el decimal 0,1875.

$$0{,}1875 = \frac{1875}{10000} = \frac{3}{16}$$

Como ejercicio exponemos la siguiente comprobación de lo dicho: Sea una fracción decimal exacta *e,abc* donde *e* representa la parte entera, *a* las décimas, *b* las centésimas y *c* las milésimas. Llamando *f* a su fracción generatriz tendremos

$$f = e{,}abc$$

y multiplicando por 1000 los dos miembros de esta igualdad resulta

$$1000\ f = eabc$$

de donde

$$f = \frac{e\,a\,b\,c}{1000}$$

de acuerdo con lo dicho anteriormente.

50. Significado de una fracción decimal periódica.—Las fracciones decimales periódicas carecen de significado propio, pues al aplicar el procedimiento del párrafo anterior aparecen, tanto en el numerador como en el denominador del resultado, infinitas cifras lo cual es inadmisible; pero, en los párrafos siguientes demostraremos que todo decimal periódico posee una fracción generatriz de significado perfectamente claro. Pues bien, diremos que el decimal periódico vale lo mismo que su fracción generatriz.

51. Calcular la fracción generatriz de un decimal periódico puro.—Sea el decimal periódico puro, sin parte entera, $0,\widehat{45}$. Representando por *f* su fracción generatriz tendremos

$$f = 0,45454545\ldots \text{ de donde}$$
$$100\,f = 45,45454545\ldots$$

y restando miembro a miembro estas dos igualdades resulta

$$99f = 45 \quad \text{o sea} \quad f = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Este es el valor de la fracción generatriz, según puede comprobarse fácilmente.

Regla:

LA FRACCION GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIODICO PURO, QUE CAREZCA DE PARTE ENTERA, TIENE POR NUMERADOR EL PERIODO Y POR DENOMINADOR TANTOS NUEVES COMO CIFRAS TENGA ESTE PERIODO.

Ejemplos:

$$0,\widehat{074} = \frac{74}{999} = \frac{2}{27} \qquad 0,\widehat{4059} = \frac{4059}{9999} = \frac{41}{101}$$

Si el decimal periódico puro posee parte entera se aplica la regla anterior prescindiendo de la parte entera y a la fracción obtenida se le agrega dicha parte entera.

Ejemplos:

$$3,\widehat{8} = 3 + 0,\widehat{8} = 3 + \frac{8}{9} = \frac{35}{9}$$

$$14,\widehat{302} = 14 + 0,\widehat{302} = 14 + \frac{302}{999} = \frac{14288}{999}$$

52. Calcular la fracción generatriz de un decimal periódico mixto.—Sea el decimal periódico mixto $0,208\widehat{3}$, cuya fracción generatriz, *f* queremos calcular.

Tendremos las igualdades siguientes

$$f = 0{,}20833333\ldots\ldots$$
$$10000f = 2083{,}33333\ldots\ldots$$
$$1000f = 208{,}33333\ldots\ldots$$

y restando miembro a miembro las dos últimas resulta

$$9000\,f = 2083 - 208 \quad \text{o sea} \quad f = \frac{2083 - 208}{9000}$$

Regla:

LA FRACCION GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIODICO MIXTO QUE CARECE DE PARTE ENTERA TIENE POR NUMERADOR LA PARTE NO PERIODICA SEGUIDA DEL PERIODO, MENOS LA PARTE NO PERIODICA Y POR DENOMINADOR TANTOS NUEVES COMO CIFRAS TENGA EL PERIODO SEGUIDOS DE TANTOS CEROS COMO CIFRAS TENGA LA PARTE NO PERIODICA.

Ejemplos:

$$0{,}3\overset{\frown}{18} = \frac{318 - 3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$$

$$0{,}001\overset{\frown}{7} = \frac{17 - 1}{9000} = \frac{16}{9000} = \frac{2}{1125}$$

Si el decimal periodico mixto posee parte entera, por ejemplo $2{,}1\overset{\frown}{473}$, bastará correr la coma un cierto número de lugares a la izquierda para que desaparezca dicha parte entera.

En nuestro ejemplo resulta el decimal $0{,}21\overset{\frown}{473}$ que es diez veces menor que el número propuesto.

Según la regla anterior

$$0{,}21\overset{\frown}{473} = \frac{21473 - 21}{99900} = \frac{21452}{99900}$$

y entonces

$$2{,}1\overset{\frown}{473} = 10\,.\,0{,}21\overset{\frown}{473} = 10\,.\,\frac{21452}{99900} = \frac{21452}{9990}$$

53. Fracciones decimales no periódicas con infinitas cifras decimales.—Si consideramos una fracción periódica cualquiera, por ejemplo 0,55555....., y detrás del primer período añadimos un cero, detrás del segundo período añadimos dos ceros, detrás del tercer período tres ceros y así indefinidamente vamos aumentando el número de ceros a cada avance, habremos formado una expresión de forma decimal, no periódica, con infinitas cifras

$$0{,}505005000500005\ldots\ldots\ldots$$

Esta expresión no tiene fracción generatriz pues ya sabemos que éstas producen decimales exactos o periódicos. Por consiguiente el valor de dicha expresión no puede representarse por una fracción ordinaria, o sea por una razón de dos enteros. Por este motivo se dice que dicha expresión equivale a un número irracional.

EJERCICIOS

Convertir en fracción ordinaria

1. $0{,}35$,, $0{,}84$,, $0{,}125$,, $3{,}15$,, $6{,}25$
$0{,}875$,, $0{,}075$,, $0{,}0032$,, $0{,}6125$,, $0{,}54375$

2. $0{,}\widehat{35}$,, $0{,}\widehat{09}$,, $0{,}\widehat{90}$,, $0{,}\widehat{814}$,, $0{,}\widehat{50}$
$0{,}\widehat{1621}$,, $0{,}\widehat{10203}$,, $3{,}\widehat{5}$,, $8{,}\widehat{14}$,, $20{,}\widehat{045}$

3. $0{,}3\widehat{5}$,, $0{,}3\widehat{50}$,, $0{,}708\widehat{3}$,, $0{,}0\widehat{009}$,, $0{,}1\widehat{701}$
$1{,}4\widehat{324}$,, $10{,}16\widehat{100}$,, $4{,}0\widehat{123}$,, $6{,}000\widehat{135}$,, $21{,}6\widehat{143}$

Efectuar las operaciones

4. $0{,}\widehat{40} + \left(2\frac{1}{4} : 3\frac{3}{4}\right) - 0{,}\widehat{31}$

5. $3{,}\widehat{14} + \left(\frac{4}{7} : 1\frac{1}{6}\right) + 0{,}\widehat{06}$

6. $\dfrac{1{,}2\widehat{1}}{3} - \dfrac{2{,}\widehat{48}}{2}$

7. $\dfrac{3}{0{,}\widehat{56}}$

8. $\dfrac{10}{1{,}0\widehat{2}}$

9. $\dfrac{2{,}\widehat{3}}{3{,}\widehat{2}}$

10. $(0{,}\widehat{4})^2$

11. $\dfrac{0{,}2\widehat{5} + 1{,}\widehat{25}}{0{,}0\widehat{25}}$

12. $\sqrt{0{,}694}$

13. $\left(\dfrac{1}{5{,}\widehat{50}}\right)^{-2}$

14. $\dfrac{2\frac{3}{5} \times 0{,}\widehat{63} \times 1{,}25}{0{,}4\widehat{6} \times \left(2{,}\widehat{31}\right)^{-1}}$,,

15. $\left(1{,}\widehat{21} + 4{,}\widehat{78}\right)^2$

LECCION 12

LA RADICACION

54. Definición.—En la extracción de raíces, o radicación, intervienen dos datos llamados radicando e índice. La operación consiste en calcular un tercer número, llamado raíz, que elevado a la potencia señalada por el índice nos reproduzca el radicando.

La igualdad

$\sqrt[3]{125} = 5$ expresa lo mismo que esta otra $5^3 = 125$

y, en general, podemos escribir la igualdad

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad (29)$$

En lo sucesivo supondremos que el radicando es un número positivo en cuyo caso, según demostraremos más adelante, existe siempre un valor positivo de la raíz, el cual recibe el nombre de valor principal o determinación aritmética de la raíz para distinguirlo de otros resultados de esta operación.

Por ejemplo, $\sqrt{4}$ tiene dos valores, que son 2 y —2, pues

$$2^2 = 4 \quad \text{y} \quad (-2)^2 = 4$$

pero el valor principal de la raíz es 2.

En todos los razonamientos siguientes nos referiremos siempre al valor principal.

Observaciones:

1.ª El índice de toda raíz ha de ser un número entero positivo o negativo. De momento carece de significado para nosotros una expresión del tipo

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{16}$$

2.ª Cuando el índice es la unidad, la raíz es igual al radicando.

$$\sqrt[1]{a} = a \quad \text{puesto que} \quad a^1 = a$$

55. Raíz de un producto.

Regla:

LA RAIZ DE UN PRODUCTO DE DOS O MAS FACTORES ES IGUAL AL PRODUCTO DE LAS RAICES DE DICHOS FACTORES.

Esto es

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad (30)$$

En efecto, elevando el segundo miembro de esta igualdad a la potencia n debe obtenerse como resultado ab y así sucede pues

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[b]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a\,b$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{5^3 \times 4^6} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{4^6} = 5 \times 4^2 = 80$$

Escribiendo la igualdad (30) con sus miembros invertidos resulta

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$$

lo cual nos dice que

EL PRODUCTO DE DOS O MAS RAICES DEL MISMO INDICE ES IGUAL A UNA RAIZ DEL MISMO INDICE CUYO RADICANDO ES EL PRODUCTO DE LOS RADICANDOS.

Ejemplo:

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2 . a} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

56. Raíz de un cociente.

Regla:

LA RAIZ DE UN COCIENTE O DE UNA FRACCION ES IGUAL AL COCIENTE DE LAS RAICES DEL DIVIDENDO Y DEL DIVISOR.

Esto es

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (31)$$

En efecto, elevando el segundo miembro a la potencia n debe resultar $\frac{a}{b}$ y así sucede, pues

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{11^2}{6^4}} = \frac{\sqrt{11^2}}{\sqrt{6^4}} = \frac{11}{6^2} = \frac{11}{36}$$

Escribiendo la igualdad (31) con sus miembros invertidos resulta

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

lo cual nos dice que

EL COCIENTE DE DOS RAICES DEL MISMO INDICE ES IGUAL A LA RAIZ DEL COCIENTE DE SUS RADICANDOS.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3.$$

57. Raíz de una potencia.

Regla:

LA RAIZ DE UNA POTENCIA ES IGUAL A LA POTENCIA DE DICHA RAIZ.

Esto es

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad (32)$$

En efecto, elevando el segundo miembro a la potencia *n* debe resultar a^m y así sucede, pues, según lo dicho en el párrafo 28,

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m\,n} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{125^2} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$$

Escribiendo la igualdad (32) con sus miembros invertidos resulta

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

lo cual nos dice que

LA POTENCIA DE UNA RAIZ ES IGUAL A LA RAIZ DEL RADICANDO ELEVADO AL EXPONENTE DE AQUELLA POTENCIA.

Ejemplo:

$$\left(\sqrt[5]{7}\right)^2 = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$$

58. Operaciones que no alteran la raíz de una potencia.

Regla:

LA RAIZ DE UNA POTENCIA NO SE ALTERA MULTIPLICANDO EL INDICE Y EL EXPONENTE POR UN NUMERO.

Esto es

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nh]{a^{mh}} \qquad (33)$$

En efecto, elevando el primer miembro a la potencia *nh* debe resultar a^{mh} y así sucede, pues

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nh} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^h = (a^m)^h = a^{mh}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{11^2} = \sqrt[30]{11^{20}} \qquad \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^1} = \sqrt[8]{a^2}$$

Escribiendo la igualdad (33) con sus miembros invertidos resulta

$$\sqrt[nh]{a^{mh}} = \sqrt[n]{a^m}$$

lo cual nos dice que

LA RAIZ DE UNA POTENCIA NO SE ALTERA DIVIDIENDO EL INDICE Y EL EXPONENTE POR UNO CUALQUIERA DE SUS DIVISORES COMUNES.

Ejemplos:

$$\sqrt[6]{23^8} = \sqrt[3]{23^4} \qquad \sqrt[5]{a^{15}} = \sqrt[1]{a^3} = a^3$$

Observaciones:

1.ª Para aplicar esta última propiedad es indispensable, como hemos dicho, que se tome un divisor común del índice y del exponente. Solo así evitaremos resultados que carezcan de significado.

Ejemplos:

Podemos dividir por 2 el índice y el exponente del radical $\sqrt[10]{7^8}$ y escribir la igualdad

$$\sqrt[10]{7^8} = \sqrt[5]{7^4}$$

pero si dividimos por 3 ya no podemos escribir

$$\sqrt[10]{7^8} = \sqrt[\frac{10}{3}]{7^{\frac{8}{3}}}$$

pues el segundo miembro carece de significado, según lo dicho en el párrafo 54, obs. 1.ª

2.ª En particular, si el exponente m es un múltiplo del índice n tendremos

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[1]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}} \qquad (34)$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{16^{20}} = 16^{\frac{20}{4}} = 16^5 \quad ,, \quad \sqrt[3]{7^{24}} = 7^{\frac{24}{3}} = 7^8$$

3.ª Toda raíz de índice negativo se convierte fácilmente en otra de índice positivo multiplicando aquel índice y el exponente del radicando por -1.

Ejemplos:

$$\sqrt[-4]{a} = \sqrt[-4]{a^1} = \sqrt[4]{a^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a}} \quad ,, \quad \sqrt[-6]{20^{18}} = \sqrt[6]{20^{-18}} = 20^{-3} = \frac{1}{20^3}$$

59. Raíz de una raíz.

Regla:

LA RAIZ DE UNA RAIZ ES IGUAL A OTRA RAIZ QUE TIENE EL MISMO RADICANDO QUE LA PRIMERA Y CUYO INDICE ES EL PRODUCTO DE LOS INDICES.

Esto es

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (35)$$

En efecto, elevando el segundo miembro a la potencia m debe resultar $\sqrt[n]{a}$ y así sucede, pues

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^m = \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[6]{\sqrt[8]{172}} = \sqrt[48]{172}$$

Escribiendo la igualdad (35) con sus miembros invertidos resulta

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

lo cual nos dice que

TODA RAIZ CUYO INDICE ES EL PRODUCTO DE DOS FACTORES ENTEROS ES IGUAL A LA RAIZ QUE TIENE POR INDICE A UNO DE LOS FACTORES Y POR RADICANDO A OTRA RAIZ CON INDICE IGUAL AL OTRO FACTOR Y CON EL RADICANDO IGUAL AL PRIMITIVO.

Ejemplos.

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2 \quad ,, \quad \sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

60. Interpretación de las potencias de exponente fraccionario.—Si en la igualdad (34) suponemos que m no es múltiplo de n nos encontramos con un exponente fraccionario al cual podemos dar la siguiente interpretación:

TODA POTENCIA DE EXPONENTE FRACCIONARIO ES IGUAL A LA RAIZ DE UNA POTENCIA DE LA MISMA BASE QUE TIENE POR EXPONENTE EL NUMERADOR DE LA FRACCION Y POR INDICE EL DENOMINADOR.

Ejemplos:

$$6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3} \quad ,, \quad \left(\frac{8}{11}\right)^{\frac{-2}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{8}{11}\right)^{-2}}$$

Observación:

Lo mismo que se hizo en el párrafo 31 con las potencias de exponente entero y negativo debemos comprobar, si las potencias de exponente fraccionario, según la interpretación que acabamos de exponer, se comportan, en las operaciones aritméticas, del mismo modo que las potencias de exponente entero. Esta comprobación será efectuada en uno de los cursos próximos.

EJERCICIOS

1. Determinar el signo de cualquier raiz de índice impar de un número negativo.

2. Determinar el signo de cualquier raiz de índice par de un número negativo.

Simplificar las expresiones siguientes:

3. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$,, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{26}$,, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$,, $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}$

4. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{126}$,, $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{343}$,, $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$,, $\sqrt[7]{9} \cdot \sqrt[7]{243}$

5. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}$,, $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{3x}$,, $\sqrt[3]{4y^2} \cdot \sqrt[3]{2y}$,, $\sqrt[4]{z^6} \cdot \sqrt[4]{z^2}$

6. $\sqrt{18}$ $\qquad \sqrt{48}$ $\qquad \sqrt{180}$ $\qquad \sqrt{147}$

7. $\sqrt{ab^2}$ $\qquad \sqrt{x^3 y^2}$ $\qquad \sqrt[3]{x^{10}}$ $\qquad \sqrt[3]{a^6 b^4}$

8. $\sqrt{3} \, . (\sqrt{27} - \sqrt{72} + \sqrt{243})$,, $(2 + 4\sqrt{5}) \cdot (3 - 6\sqrt{5})$

9. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

10. $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{b}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[n]{x^{n+2}}}{\sqrt[n]{x^2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[n]{y^{3n-1}}}{\sqrt[n]{y^{n-1}}}$

11. $\sqrt{9^3}$ $\qquad \sqrt[3]{64^2}$ $\qquad \sqrt[4]{16^5}$ $\qquad \sqrt[5]{32^2}$

12. $\left(\sqrt[6]{a^2}\right)^3$ $\qquad \left(\sqrt[4]{25}\right)^2$ $\qquad \left(\sqrt[3]{9}\right)^4$ $\qquad \left(\sqrt[6]{a\,x^2}\right)^7$

13. $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$ $\qquad \sqrt{\sqrt[3]{100}}$ $\qquad \sqrt[6]{81}$ $\qquad \sqrt[3]{\sqrt{8}}$

14. $3^{\frac{1}{3}} \, . \, 3^{\frac{1}{2}}$ $\qquad x^{\frac{1}{4}} \, . \, x^{\frac{2}{5}}$ $\qquad a^{\frac{1}{2}} \, . \, b^{\frac{1}{4}}$ $\qquad \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

15. $64^{\frac{2}{3}} : 32^{\frac{3}{4}}$ $\qquad x^{\frac{1}{4}} : x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad a^{\frac{2}{5}} : a^{-\frac{2}{5}}$ $\qquad b^{-\frac{3}{4}} : b^{\frac{4}{3}}$

16. $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^4$ $\qquad \left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\qquad \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}$ $\qquad \left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{4^{\frac{1}{5}}}\right).$

LECCIÓN 13

EL NUMERO REAL

61. Raíz de un número entero.— Los números enteros tienen la propiedad notable de que sus raíces de índice entero y positivo no pueden ser números fraccionarios.

En efecto, sea *a* un número entero y supongamos que su raíz de índice natural, *n*, sea la fracción irreducible $\frac{p}{q}$.

De la igualdad

$$\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q} \qquad (36)$$

se deduce

$$\frac{p^n}{q^n} = a$$

y como, por otra parte, toda potencia, de exponente entero, de una fracción irreducible es otra fracción irreducible, tendremos que $\frac{p^n}{q^n}$ es también irreducible y por consiguiente no puede ser igual al número entero *a*. Esto significa que la igualdad (36) no es cierta.

62. La raíz cuadrada de 2.—Observemos, ahora, que $\sqrt{2}$ no puede ser un número entero, puesto que

$$1^2 < 2 < 2^2 \qquad \text{o sea} \qquad 1 < \sqrt{2} < 2$$

y, como según lo dicho en el párrafo anterior, tampoco puede ser fraccionario, no podremos expresar exactamente su valor mediante un número racional,

Observemos, por otra parte, que

$$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$$

o sea

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

También se verifican las relaciones

$$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2$$

o sea

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

Del mismo modo se verifica

$$1{,}414^2 = 1{,}999396 < 2 < 2{,}002225 = 1{,}415^2$$

o sea

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

Análogamente, podemos comprobar las siguientes desigualdades

$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 14143 \qquad 1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

De todas ellas, se deduce que

1		una unidad
1,4		una décima
1,41		una centésima
1,414	son valores aproximados de	una milésima
1,4142	$\sqrt{2}$ con error menor que	una diezmilésima
1,41421		una cienmilésima
.		.
.		.
.		.

En general, siguiendo esta marcha podremos expresar $\sqrt{2}$ con toda la aproximación que queramos, mediante números racionales. Para expresar exactamente $\sqrt{2}$ haría falta emplear infinitas cifras decimales.

Podemos escribir

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$

Esta expresión decimal no puede ser periódica, pues entonces $\sqrt{2}$ sería igual a la fracción generatriz. Si recordamos que hemos llamado irracionales a los números de forma decimal de infinitas cifras aperiódicas (párrafo 53), podremos afirmar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

63. Representación geométrica de $\sqrt{2}$. Si, tomando la unidad de longitud como cateto, construímos un triángulo rectángulo isósceles (fig. 1)

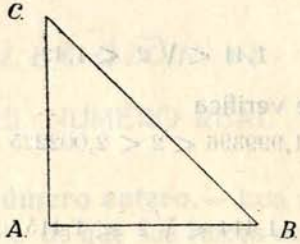


fig. 1

tendremos, en virtud del teorema de Pitágoras

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

o sea

$$\overline{BC} = \sqrt{2}$$

Llevando, pues, este segmento sobre un eje (fig. 2) donde se

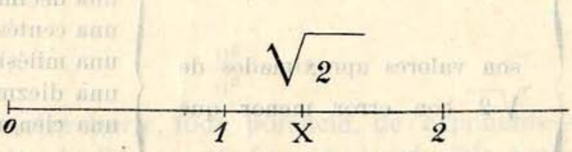


fig. 2

representen los números racionales, obtendremos un punto X al cual le corresponde la abscisa $\sqrt{2}$, por ser ésta su distancia al origen O.

64. El número irracional como límite.—Si representamos sobre una recta la sucesión de puntos que tienen por abscisas los elementos de la sucesión 1,4 1,41 1,414 1,4142, etc., veremos que dichos puntos se acercan indefinidamente al punto X que tiene por abscisa $\sqrt{2}$. Esto quiere decir que $\sqrt{2}$ es el límite de aquella sucesión.

De aquí se deduce una interpretación de las fracciones decimales aperiódicas, que hasta ahora no han tenido significado para nosotros.

TODO NUMERO DECIMAL APERIODICO CON INFINITAS CIFRAS EXPRESA EL LIMITE DE LA SUCESION DE FRACCIONES DECI-

MALES EXACTAS QUE SE OBTIENEN DEL PRIMERO, TOMANDO, SUCESIVAMENTE, UNA CIFRA, DOS CIFRAS, TRES CIFRAS,... ETC., DE SU PARTE DECIMAL.

Ejemplo:

La expresión decimal del número π contiene infinitas cifras decimales y es aperiódica. Por consiguiente π es un número irracional y su valor exacto es el límite de la sucesión

3,1 3,14 3,141 3,1415 3,14159 3,141592......

Cualquiera de estos elementos representa un valor aproximado de π.

65. Los números reales.—Del mismo modo que para el caso de $\sqrt{2}$ podemos demostrar que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, etcétera, son también números irracionales. En general, la extracción de la raíz cuadrada de un número natural, que no sea cuadrado perfecto, da origen a un número irracional.

Extrayendo la raíz cúbica de los números enteros, que no sean cubos perfectos aparecen, también, infinitos números irracionales. Y todavía podemos recurrir a las raíces cuartas, quintas, etc., para obtener un caudal inagotable de números irracionales.

De este modo el concepto de número se ha enriquecido extraordinariamente.

LA REUNION DE TODOS LOS NUMEROS RACIONALES E IRRACIONALES CONSTITUYE EL CAMPO DE LOS NUMEROS REALES.

Estudiando la representación geométrica de este campo resulta que los números reales llenan por completo todo el eje sin dejar, sobre él, hueco alguno.

Es verdaderamente notable observar cómo los números racionales pueden adoptar la forma externa de los números irracionales; en efecto, el número racional 2,45 es el límite de la sucesión monótona de números racionales

2,4 2,45 2,450 2,4500 2,45000.......

Observemos, ahora que el número racional $0,\widehat{7}$ es el límite de la sucesión monótona de números racionales

0,7 0,77 0,777 0,7777 0,77777 0,777777......

Finalmente el número irracional $\sqrt{3}$ es el límite de la sucesión monótona de números racionales

1,7 1,73 1,732 1,7320 1,73205......

En resumen:

TODO NUMERO REAL, ES DECIR, RACIONAL O IRRACIONAL, PUEDE EXPRESARSE COMO EL LIMITE DE UNA SUCESION MONOTONA DE NUMEROS RACIONALES.

De esta definición común se deduce la posibilidad de que exista una armonía, entre todos los números reales, a base del principio de Hankel o de permanencia de las leyes formales, enunciado en el párrafo 7.

Las operaciones aritméticas con los números reales tiene gran importancia en la Matemática pura y por eso se estudian con todo rigor en los cursos universitarios, sin embargo en las aplicaciones prácticas de dicha ciencia carecen de interés estas teorías, pues cuando hay que efectuar algún cálculo aritmético con un número irracional se le sustituye por un valor racional, tan aproximado como se quiera.

Ejemplo:

El área del círculo se obtiene multiplicando el cuadro del radio por el número π, pero en la práctica se toma en vez de π uno de los valores aproximados, 3,14 o 3,1416 o 3,141592, según la exactitud con que se quiera obtener el área pedida.

EJERCICIOS

1. *Indicar el modo de obtener una sucesión cuyo límite sea el número irracional* $\sqrt{5}$ *y calcular algunos términos de dicha sucesión.*
2. *Calcular términos de una sucesión cuyo límite sea* $\sqrt[3]{2}$
3. *La sucesión cuyo término general es*

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

define un número real que se representa por la letra e. *Calcular algunos valores aproximados del número* e.

(Con el símbolo n !, que se lee: factorial de ene, se expresa el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n).

4. *La sucesión*

$$a_1 = 1 - \frac{1}{3} \;,,\; a_2 = a_1 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \;,,\; a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \ldots$$

tiene por límite el número real $\frac{\pi}{4}$.

Formar nuevos términos de esta sucesión y calcular algunos valoresaproximados de π.

5. *Determinar la naturaleza del número real definido por la sucesión*
1 1,0 1,00 1,000 1,0000 etc.

6. *Formar una sucesión cuyo límite sea* $1 + \sqrt{2}$

7. *Expresar en forma de número real el número racional* $\frac{1}{4}$

8. *Formar una sucesión cuyo límite sea* $\sqrt{2} - \frac{1}{4}$

9. *Expresar en forma de número real el producto irracional* $3\sqrt{2}$

10. *Expresar en forma de número real el producto* $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

11. *Interpretar la expresión* $3^{\sqrt{2}}$

12. *Estudiar el significado de la expresión* $(\sqrt{3}\,)^{\sqrt{2}}$

LECCION 14

RAZON DE DOS MAGNITUDES

66. Concepto de magnitud.—Dentro de los estudios matemáticos y de sus aplicaciones reciben el nombre de magnitudes los segmentos rectilíneos, los arcos, los ángulos, las superficies, los volúmenes, los pesos, los tiempos, las velocidades, las aceleraciones, las fuerzas, las masas, etc. Así se dice que dos volúmenes son magnitudes de la misma especie u homogéneas. Un ángulo y una fuerza son dos magnitudes de distinta especie o heterogéneas.

Lo característico de un conjunto de magnitudes homogéneas es: 1.° La posibilidad de compararlas entre sí y llegar a saber cuando son iguales o desiguales. 2.° La posibilidad de realizar con ellas la operación de sumar.

Por ejemplo, tratándose de segmentos rectilíneos o de ángulos o de pesos es muy fácil averiguar si son iguales o desiguales.

También es muy sencillo determinar el segmento, o el ángulo, o el peso, suma de los dos elementos dados. Otras veces, si se trata de áreas o de volúmenes o de fuerzas no suelen ser tan fáciles estas determinaciones, pero siempre son posibles.

En cambio, un dolor o una alegría no son magnitudes, pues, por una parte, no es posible, en la actualidad, comprobar científicamente si los dolores o las alegrías que experimentan dos personas son iguales o desiguales y, por otra parte, tampoco se sabe definir el estado de ánimo que debe corresponder a la suma de dos alegrías o de dos tristezas.

67. Razón de dos magnitudes.—Hemos dicho que con dos magnitudes homogéneas se forma siempre una tercera que es su suma. En particular, sumando repetidamente una magnitud A se forman sus múltiplos.

Así, por ejemplo, la suma de $A + A$ es una nueva magnitud que representaremos por $2A$. Del mismo modo, la suma $2A + A$ es otra magnitud que representaremos por 3A, y así sucesivamente se forman las magnitudes 4A, 5A, 6A,... es decir, todos los múltiplos de A.

Definición:

SE DICE QUE LA RAZON DE DOS MAGNITUDES A Y B ES EL NUMERO $\frac{m}{n}$, CUANDO SE VERIFICA LA IGUALDAD n A = m B.

La razón de las magnitudes A y B también se expresa simbólicamente en las formas A : B y $\frac{A}{B}$ de manera que cualquiera de las tres igualdades

$$n\,A = m\,B \quad ,, \quad A : B = m : n \quad ,, \quad \frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

expresa que la razón de la magnitud A y la magnitud B vale $\frac{m}{n}$, siendo A el antecedente y B el consecuente.

Ejemplo:

Calcular la razón entre el mes y la semana.

Para ello hemos de encontrar un múltiplo del mes que sea igual a un múltiplo de la semana.

Observando que

7 meses son 210 días

y que 30 semanas son 210 días

tendremos la igualdad

7 meses = 30 semanas

y por consiguiente la razón pedida es $\frac{30}{7}$

Podremos escribir

un mes : una semana = 30 : 7

que se lee así: un mes es a una semana como 30 es a 7.

68. Procedimiento para determinar la razón de dos magnitudes homogéneas.—Para mayor claridad expondremos el procedimiento sobre un ejemplo concreto.

Se trata de calcular la razón de dos segmentos rectilíneos *a* y *b*,

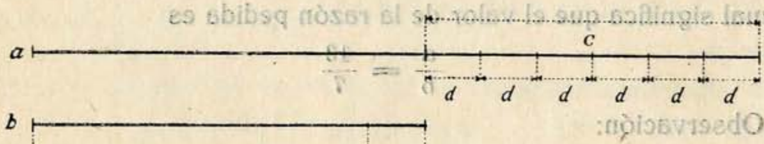


fig. 3

que miden, respectivamente, 26 cm y 14 cm.

Si llevamos el segmento *b* sobre el segmento *a* tantas veces como sea posible, veremos que el primero está contenido en el otro una vez y sobra un resto *c*.

Podremos escribir la igualdad

$$a = b + c$$

Si ahora llevamos este resto sobre el segmento *b* cuantas veces sea posible, veremos que el segmento *c* está contenido una vez en *b* y sobra un resto *d*.

Podremos escribir la igualdad

$$b = c + d$$

Llevando el nuevo resto sobre *c* resulta que el segmento *d* está contenido seis veces en el segmento *c* y no sobra resto alguno.

Podremos escribir la igualdad

$$c = 6\,d$$

De las dos últimas igualdades se deduce

$$b = 6\,d + d = 7\,d$$

y sustituyendo, en la primera igualdad, en vez de *b* y *c* sus valores 7 d y 6 d, tendremos

$$a = 7\,d + 6\,d = 13\,d$$

De los anteriores razonamientos se deduce, en resumen, que

$$a = 13\,d$$
$$b = 7\,d$$

y por consiguiente

$$7\,a = 7\,.\,13\,d$$
$$13\,b = 13\,.\,7\,d$$

En definitiva, se llega a la conclusión

$$7\,a = 13\,b$$

lo cual significa que el valor de la razón pedida es

$$\frac{a}{b} = \frac{13}{7}$$

Observación:

Para dar mayor claridad a la explicación hemos empezado suponiendo conocidas las longitudes de los segmentos cuya razón se quiere calcular; pero, obsérvese que la esencia del método está precisamente en calcular la razón sin conocer esas longitudes; en caso contrario el problema sería trivial, porque, como veremos en la lección próxima, la razón de dos magnitudes es igual a la de sus medidas expresadas con una misma unidad.

EJERCICIOS

1. *¿Es el dinero una magnitud?*
2. *¿Son magnitudes las edades de las personas?*
3. *¿Son magnitudes las temperaturas?*
4. *Calcular la razón entre el kilómetro y el decámetro.*
5. *Calcular la razón entre el ángulo llano y el ángulo recto.*
6. *Calcular la razón entre el ángulo recto y el ángulo llano.*
7. *Calcular la razón entre el hectómetro cuadrado y la centiárea.*
8. *Calcular la razón entre el radio y el diámetro de una circunferencia.*
9. *Calcular la razón entre el perímetro y el lado de un cuadrado.*
10. *Calcular la razón entre el radio y el lado de un exágono regular.*
11. *Calcular la razón entre el metro cúbico y el litro.*
12. *Calcular la razón entre el gramo y la tonelada.*

LECCION 15

MEDIDA DE UNA MAGNITUD

69. Medida de una magnitud: definición.— Se llama medida de una magnitud a la razón de ésta con una de sus homogéneas, que se elige como unidad.

Esto significa que para medir una magnitud cualquiera es preciso elegir antes la unidad de medida.

En el ejemplo del párrafo 68, la medida del segmento *a* es 26 si se toma como unidad el centímetro, por ser

$$1 \cdot a = 26 \cdot 1 \text{ cm}$$

Pero si tomamos como unidad el segmento *b* entonces, la medida de dicho segmento *a* es $\frac{13}{7}$.

Consecuencia:

LA MEDIDA DE UNA MAGNITUD PUEDE ALCANZAR DIVERSOS VALORES SEGUN SEA LA UNIDAD ELEGIDA.

70. Magnitudes conmensurables.—Hay magnitudes, como los segmentos *a* y *b* del párrafo 68, de tal naturaleza que es posible encontrar una unidad de medida que esté contenida un número exacto de veces en cada una de ellas. Así, por ejemplo, tomando como unidad el segmento *d*, vemos que el segmento *a* contiene 13 veces a la unidad y el segmento *b* la contiene 7 veces.

SE DICE QUE DOS O MAS MAGNITUDES HOMOGENEAS SON CONMENSURABLES CUANDO ES POSIBLE ENCONTRAR UNA UNIDAD DE MEDIDA QUE ESTE CONTENIDA UN NUMERO EXACTO DE VECES EN CADA UNA DE ELLAS.

Ejemplo:

Las magnitudes siguientes

$$A = 3 \text{ kg} \qquad B = 0,12 \text{ dg} \qquad C = 15 \text{ g}$$

son conmensurables, pues, si tomamos como unidad el decigramo, tendremos

$$A = 30\,000 \text{ dcg} \quad ,, \quad B = 12 \text{ dcg} \quad ,, \quad C = 150 \text{ dcg}$$

Como existe una unidad de medida que está contenida un número exacto de veces en las magnitudes A, B y C, éstas son conmensurables.

Consecuencia:

LA RAZON DE DOS MAGNITUDES CONMENSURABLES ES UN NUMERO RACIONAL.

71. Magnitudes inconmensurables.—Cuando se determina la razón de dos magnitudes, no siempre suceden las cosas tan sencillas como en el párrafo 68. Veamos otro ejemplo: Determinar

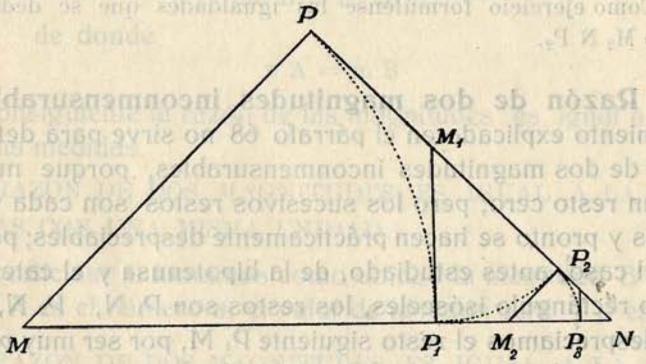


fig. 4

la razón de la hipotenusa al cateto de un triángulo rectángulo isósceles.

Siguiendo el procedimiento explicado en dicho párrafo, llevaremos el cateto MP sobre la hipotenusa MN, en la cual está contenida una vez y sobra un resto P_1 N. Llevando este resto sobre el cateto PN resulta que está contenido dos veces $(PM_1 + M_1 P_2)$ y sobra un resto P_2 N. Llevando este resto sobre el segmento P_1 N resulta que está contenido dos veces $(P_1 M_2 + M_2 P_3)$ y sobra un resto P_3 N. Así hay que razonar indefinidamente, pues siempre sobra un resto. No existe una unidad de medida común a la hipotenusa y al cateto de un triángulo rectángulo isósceles. Ambas magnitudes son inconmensurables.

NOTA:

Para interpretar claramente la figura anterior haremos las siguientes indicaciones:

1.ª El segmento $M_1 P_1$ se ha trazado perpendicular a la hipotenusa; como el ángulo en N vale 45° también será isósceles el triángulo $M_1 P_1 N$ y por consiguiente

$$P_1 N = P_1 M_1$$

2.ª $P P_1$ es un arco de circunferencia al cual son tangentes las rectas $P M_1$ y $P_1 M_1$ como perpendiculares a los radios en sus extremos. Por consiguiente

$$P M_1 = P_1 M_1$$

3.ª Aplicando estos mismos razonamientos al triángulo $M_1 N P_1$ resulta

$$P_2 N = P_2 M_2 \qquad P_2 M_2 = P_1 M_2$$

4.ª Como ejercicio formúlense las igualdades que se deducen del triàngulo $M_2 N P_2$.

72. Razón de dos magnitudes inconmensurables.—El procedimiento explicado en el párrafo 68 no sirve para determinar la razón de dos magnitudes inconmensurables, porque nunca se llega a un resto cero; pero los sucesivos restos son cada vez más pequeños y pronto se hacen prácticamente despreciables; por ejemplo, en el caso, antes estudiado, de la hipotenusa y el cateto de un triángulo rectángulo isósceles, los restos son $P_1 N$, $P_2 N$, $P_3 N$, etc. Si despreciamos el resto siguiente $P_4 M$, por ser muy pequeño, es como si la hipotenusa y el cateto fuesen conmensurables y obtendremos un número racional que será un valor aproximado de la razón de dichos segmentos. Mayor exactitud lograremos si despreciamos los restos a partir de $P_5 N$; entonces obtendremos otro valor más aproximado de la razón. Repitiendo indefinidamente este proceso, formaremos una sucesión monótona de números racionales cuyo límite es el valor exacto de la razón pedida.

LA RAZON DE DOS MAGNITUDES INCONMENSURABLES ES UN NUMERO IRRACIONAL.

Por este motivo, algunos autores llaman, también, inconmensurables a estos números irracionales.

Ejemplos:

1.° La razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles y su cateto es el número irracional $\sqrt{2}$.

2.° La longitud de una circunferencia y su diámetro son dos magnitudes inconmensurables. Su razón es el número irracional π.

73. La razón de dos magnitudes como razón de sus medidas.—Sean A y B dos magnitudes, cuyas medidas, con la unidad U, son dos números, racionales o irracionales, *m* y *n*, respectivamente.

Entonces podremos escribir

$$A = m\,U$$
$$B = n\,U$$

de las cuales se deduce

$$n.\ A = n.\ m.\ U$$
$$m.\ B = n.\ m.\ U$$

de donde

$$n\,A = m\,B$$

y por consiguiente la razón de las magnitudes es igual a la razón $\frac{m}{n}$ de sus medidas.

LA RAZON DE DOS MAGNITUDES ES IGUAL A LA DE SUS MEDIDAS CON UNA MISMA UNIDAD.

En particular si tomamos como unidad la magnitud B y la medida de A es el número *a*, el valor de la razón será $\frac{a}{1}$, es decir *a*.

LA RAZON DE DOS MAGNITUDES ES IGUAL A LA MEDIDA DE LA PRIMERA CUANDO SE TOMA COMO UNIDAD LA SEGUNDA.

Ejemplos:

1. El dólar se cotiza a 7,32 ptas. El franco a 0,48 ptas. Por consiguiente, la razón del dólar al franco es 7,32 : 0,48 = 15,25.

2. El valor del dólar tomando como unidad el franco es, en la fecha de la cotización anterior, 15,25.

EJERCICIOS

1. *Expresar la medida del km^2 tomando como unidad la hectárea.*
2. *Hallar la medida del siglo tomando como unidad el lustro.*
3. *Hallar la medida o valor del duro tomando como unidad el real.*
4. *Determinar la medida de una circunferencia tomando por unidad el radio.*
5. *¿Son conmensurables el lado y la altura de un triángulo equilátero?*
6. *¿Son magnitudes conmensurables el miligramo y la tonelada métrica.*

7. *¿Son conmensurables el perímetro y el área de un rombo?*
8. *Un caracol avanza 1 mm por segundo y un avión recorre 200 km por hora. Calcular la razón de sus velocidades.*
9. *La Tierra da una vuelta alrededor de su eje en 24 horas y un ventilador da 2000 revoluciones por minuto. Calcular la razón entre las velocidades de giro de ambos.*
10. *Expresar el área de un círculo tomando como unidad el cuadrado que tiene por lado el diámetro de dicho círculo.*

LECCION 16

MAGNITUDES PROPORCIONALES

74. Proporcionalidad directa.—Supongamos un vehículo que avanza sobre una pista con velocidad constante de 40 kilómetros por hora.

Al cabo de una hora habrá recorrido 40 km.
Al cabo de dos horas habrá recorrido 80 km.
Al cabo de tres horas habrá recorrido 120 km.
etcétera

La marcha del vehículo establece una correspondencia entre dos conjuntos de magnitudes, que son los tiempos trascurridos y las distancias recorridas. Esta correspondencia posee tres propiedades: 1.ª Las magnitudes pertenecientes al primer conjunto son homogéneas y las del segundo también lo son. 2.ª A cada magnitud de uno de los conjuntos corresponde una sola magnitud del otro conjunto (correspondencia uniforme). 3.ª La razón de dos magnitudes cualesquiera del primer conjunto es igual a la razón de sus correspondientes en el segundo conjunto.

Ejemplo:

2 horas : 3 horas = 80 km : 120 km
4 horas : 2 horas = 160 km : 80 km
etcétera

SIEMPRE QUE DOS CONJUNTOS DE MAGNITUDES

A B C D......... H........
A' B' C' D'.........H'.......

ESTEN RELACIONADAS POR UNA CORRESPONDENCIA QUE CUMPLA LAS TRES CONDICIONES CITADAS, DIREMOS QUE LAS MAGNITUDES DEL PRIMER CONJUNTO SON DIRECTAMENTE PROPORCIONALES A LAS DEL SEGUNDO CONJUNTO.

Consecuencia:

Si los dos conjuntos antes citados son proporcionales se verificarán las proporciones

A : B = A' : B' A : C = A' : C'......... A : H = A' : H'.......
B : C = B' : C'......... B : H = B' : H'.......

75. Proporcionalidad inversa.—Algunas veces sucede que la correspondencia entre los dos conjuntos de magnitudes satisface a las dos primeras condiciones del párrafo anterior, pero la razón de dos magnitudes cualesquiera del primer conjunto es igual a la razón inversa de las magnitudes correspondientes en el segundo conjunto. Es decir, que en vez de las proporciones escritas en la consecuencia del párrafo 74 se verifican las siguientes:

$A : B = B' : A' \qquad A : C = C' : A' \ldots\ldots\ldots \qquad A : H = H' : A' \ldots\ldots\ldots$

$B : C = C' : B' \ldots\ldots\ldots \qquad B : H = H' : B' \ldots\ldots\ldots$

etcétera

Entonces diremos que las magnitudes del primer conjunto son inversamente proporcionales a las del segundo conjunto.

Ejemplos:

Sobre una pista, que tiene 1 km de longitud, avanzan varios vehículos a diversas velocidades.

El vehículo que marcha a 40 km por hora recorre la pista en $\frac{1}{40}$ de hora.

» » » 50 » » » » $\frac{1}{50}$ de hora.

» » » 60 » » » » $\frac{1}{60}$ de hora.

etcétera

Nos encontramos, pues, con dos conjuntos de magnitudes (velocidades y tiempos) relacionados por una correspondencia que cumple con las condiciones 1.ª y 2.ª del párrafo 74. Además, la razón de dos magnitudes cualesquiera del primer conjunto es igual a la razón inversa de las magnitudes correspondientes en el segundo conjunto, puesto que, por ejemplo,

$$40 \text{ km por hora} : 50 \text{ km por hora} = 4 : 5$$

$$\frac{1}{50} \text{ horas} : \frac{1}{40} \text{ horas} = \frac{1}{50} : \frac{1}{40} = 40 : 50 = 4 : 5$$

Observación:

En lo sucesivo, cuando hablemos de magnitudes proporcionales, sin especificar la clase de proporcionalidad, nos referiremos siempre a la directa.

76. Correspondencia en la igualdad.—Supongamos los conjuntos de magnitudes proporcionales A, B, C,... y A', B', C',... donde las magnitudes C y H del primer conjunto son iguales. En este caso, las dos magnitudes correspondientes C' y H' en el segundo conjunto, también son iguales.

En efecto, por ser proporcionales las magnitudes, tendremos

$$C : H = C' : H'$$

y como es C = H la primera razón vale la unidad, de manera que

$$C' : H' = 1$$

de donde

$$C' = H'$$

EN DOS CONJUNTOS DE MAGNITUDES PROPORCIONALES A VALORES IGUALES DEL PRIMER CONJUNTO CORRESPONDEN VALORES IGUALES EN EL SEGUNDO CONJUNTO.

Esta propiedad se expresa abreviadamente diciendo que, en las magnitudes proporcionales existe correspondencia en la igualdad.

77. Correspondencia en la suma.—Si la magnitud A es suma de B y C, también su correspondiente A' es suma de B' y C'

En efecto, de la proporción

$$B : C = B' : C'$$

se deduce, según lo dicho en el párrafo 39-III.

$$(B + C) : C = (B' + C') : C'$$

y sustituyendo en vez de B + C su valor A, tendremos

$$A : C = (B' + C') : C'$$

lo cual nos dice que la magnitud correspondiente a A' es B' + C' o sea

$$A' = B' + C'$$

SI DOS CONJUNTOS DE MAGNITUDES SON PROPORCIONALES SE CORRESPONDEN EN LA SUMA.

78. Criterio general de proporcionalidad.

SI TENEMOS DOS CONJUNTOS DE MAGNITUDES

$$A, B, C, D, \ldots H, \ldots$$
$$A', B', C', D', \ldots H', \ldots$$

RELACIONADOS DE MANERA QUE A CADA ELEMENTO DE UN CONJUNTO CORRESPONDA UN ELEMENTO EN EL OTRO CONJUNTO Y ADEMAS EXISTE CORRESPONDENCIA EN LA IGUALDAD Y LA SUMA, LAS MAGNITUDES DE DICHOS CONJUNTOS SON PROPORCIONALES.

En efecto, si se verifica la desigualdad

$$A > B \quad \text{o sea} \quad A = B + P$$

en virtud de la correspondencia en la suma, tendremos

$$A' = B' + P' \quad \text{o sea} \quad A' > B'$$

Además, a la magnitud *n* A del primer conjunto corresponde la *n* A' en el segundo conjunto y a la *m* B corresponde la *m* B'.

Por consiguiente, si se verifica la desigualdad

$$n\,A > m\,B \quad \text{o sea} \quad \frac{A}{B} > \frac{m}{n}$$

también se verificará

$$n\,A' > m\,B' \quad \text{o sea} \quad \frac{A'}{B'} > \frac{m}{n}$$

Por el contrario si se verifica

$$n\,A < m\,B \quad \text{o sea} \quad \frac{A}{B} < \frac{m}{n}$$

también se verificará

$$n\,A' < m\,B' \quad \text{o sea} \quad \frac{A'}{B'} < \frac{m}{n}$$

De lo dicho se deduce que las razones

$$A : B \quad \text{y} \quad A' : B'$$

son tales que cualquier número racional menor que una de ellas es también menor que la otra y cualquier número racional mayor que una de ellas también es mayor que la otra, lo cual sólo puede suceder siendo

$$A : B = A' : B'$$

en cuyo caso las magnitudes son proporcionales.

NOTA:

En la parte de este curso dedicada a la Geometría expondremos ejemplos de aplicación del criterio general de proporcionalidad.

EJERCICIOS

Examinar si existe relación de proporcionalidad entre las magnitudes siguientes:

1. *Los pesos y los volúmenes de una sustancia.*
2. *Las edades y las estaturas de una persona.*
3. *Los diámetros y las longitudes de varias circunferencias.*
4. *El tiempo empleado en ejecutar un trabajo y el número de personas que lo realizan.*
5. *Las alturas de un triángulo y los lados respectivos.*

6. *El consumo de una lámpara eléctrica y el tiempo que ha estado encendida.*
7. *Los arcos de una circunferencia y sus ángulos centrales correspondientes.*
8. *El tiempo empleado en una excursión y el número de excursionistas.*
9. *El área de un círculo y su radio.*
10. *El lado de un cuadrado y su diagonal.*
11. *Expresar que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza que actúa sobre él.*
12. *Expresar que la intensidad de la corriente eléctrica que atraviesa un conductor es proporcional a la tensión entre sus extremos.*
13. *Expresar que la energía cinética de un cuerpo es proporcional al cuadrado de su velocidad.*
14. *Expresar que la fuerza de atracción de dos cuerpos materiales es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.*

LECCION 17

LA REGLA DE TRES

79. Fundamento del método.—Cuando se conoce la razón de dos magnitudes homogéneas y el valor de una de ellas es muy fácil calcular la otra.

En efecto, si la razón entre las magnitudes A y B es $\frac{m}{n}$ tendremos, en virtud de lo dicho en el párrafo 67,

$$n\,A = m\,B$$

de donde

$$A = \frac{m}{n}\,B \quad ,, \quad B = \frac{n}{m}\,A$$

Ejemplos:

1.° La razón entre la extensión de la zona regable en España y la extensión total del territorio es $\frac{3}{100}$. Calcular la extensión de dicha zona regable sabiendo que España tiene una superficie total de 50 000 000 Ha.

Solución:

Representando por *x* el valor pedido tendremos

$$x : 50\,000\,000 \text{ Ha} = 3 : 100$$

y escribiendo que el producto de extremos es igual al producto de medios resulta

$$100\,x = 3 \,.\, 50\,000\,000 \text{ Ha}$$

de donde

$$x = \frac{3}{100} \cdot 50\,000\,000 \text{ Ha} = 1\,500\,000 \text{ Ha}$$

2.° La razón entre las longitudes de vía electrificada en Italia y España es $\frac{13}{6}$. La longitud que corresponde a Italia es 1950 km. Calcular la longitud electrificada en los ferrocarriles españoles.

Solución:

Representando por *y* el valor pedido tendremos

$$1950 \text{ km} : y = 13 : 6$$

o sea

$$6 \,.\, 1950 \text{ km} = 13\,y$$

de donde

$$y = \frac{6}{13} \cdot 1950 \text{ km} = 900 \text{ km}$$

80. La regla de tres simple.—Todos los problemas referentes a la regla de tres consisten en calcular una magnitud sabiendo el valor de su razón con otra magnitud homogénea conocida. Cuando los términos de la razón son datos del problema, la regla de tres se llama simple y se resuelve según hemos visto en el párrafo anterior.

Ejemplos:

1.° Para la combustión completa de 3 kg de antracita se necesitan 66 m^3 de aire. ¿Qué volumen de aire se necesitará para la combustión de 1 000 kg de antracita?

Solución:

Representemos por x el volumen de aire necesario; como los volúmenes de aire son directamente proporcionales a los pesos de antracita, tendremos que la razón entre las magnitudes x y 66 m^3 debe ser igual a $\frac{1\,000}{3}$ que es la razón entre sus magnitudes correspondientes. Por lo tanto, escribiremos

$$x : 66 \text{ m}^3 = 1000 : 3 \text{ de donde } x = \frac{1000}{3} \cdot 66 \text{ m}^3 = 22\,000 \text{ m}^3$$

2.° Un avión a 220 km por hora hace un trayecto en 3 horas. ¿Cuánto tardará en recorrer dicho trayecto otro avión que navega a 165 km por hora?

Solución:

Representando por z el tiempo pedido tendremos que la razón entre z y las 3 horas, que tarda el primer avión vale $\frac{220}{165}$ por ser las velocidades inversamente proporcionales a los tiempos.

De la proporción

$$z : 3 \text{ horas} = 220 : 165$$

se deduce

$$z = \frac{220}{165} \cdot 3 \text{ horas} = 4 \text{ horas}$$

81. La regla de tres compuesta.—Algunos problemas referentes a magnitudes proporcionales se resuelven aplicando, dos o más veces, la regla de tres simple. Esto acontece siempre que en el enunciado del problema intervienen más de dos sistemas de magnitudes. El método de resolución, expuesto en el ejemplo siguiente, recibe el nombre de regla de tres compuesta.

Ejemplo:

20 obreros ganan 3600 ptas. en 15 días. ¿En cuantos días ganarán 1046 ptas. 8 obreros?

Solución:

Formemos el siguiente esquema

20	obreros	ganan	3600	pesetas	en	15	días
8	,,	,,	3600	,,	,,	x	,,
8	,,	,,	1056	,,	,,	y	,,

Como, a ganancias iguales, el número de obreros es inversamente proporcional al número de días de trabajo, tendremos

$$20 : 8 = x : 15 \text{ días} \quad \text{de donde} \quad x = \frac{20}{8} \cdot 15 \text{ días}$$

Como, mientras no varíe el número de obreros, las ganancias son directamente proporcionales a los días de trabajo, tendremos

$$3600 : 1056 = x : y$$

y sustituyendo en vez de *x* el valor calculado anteriormente, resulta

$$3600 : 1056 = \frac{20}{8} \cdot 15 \text{ días} : y$$

de donde

$$y = \frac{20.1056}{8.3600} \cdot 15 \text{ días} = 11 \text{ días}$$

82. La fórmula del interés simple.—Una consecuencia inmediata de la regla de tres es, según se ha visto en cursos anteriores, la fórmula del interés simple

$$i = \frac{c\,p\,t}{100}$$

donde *c* representa el capital, *i* su interés o ganancia, *p* el tanto por cien anual y *t* el tiempo en años. Estas cuatro magnitudes están relacionadas por dicha fórmula de tal manera que, conocidos los valores de tres de ellas, es muy fácil calcular el valor de la cuarta. En efecto, basta sustituir en la fórmula las tres letras por sus valores conocidos para obtener una ecuación de primer grado con una incógnita que, resuelta, nos dará el valor buscado.

La misma fórmula permite resolver multitud de problemas en que figuran, como datos, ciertas relaciones particulares entre algunas de aquellas cantidades.

Ejemplos:

1.° Averiguar a que tanto por cien debe imponerse un capital para que, al cabo de 10 años, los intereses asciendan a la cuarta parte de dicho capital.

Solución:

Si en la fórmula del interés simple hacemos

$$i = \frac{C}{4} \qquad t = 10$$

resulta la igualdad

$$\frac{C}{4} = \frac{C\,p \times 10}{100}$$

que, después de dividir sus dos miembros por C, nos da la ecuación de primer grado con una incógnita

$$\frac{1}{4} = \frac{10\,p}{100}$$

de la cual se deduce el resultado

$$p = 2{,}5$$

2.° Averiguar cuál es el capital que, impuesto al 3 °/₀ durante tres años y al 4 °/₀ durante cuatro años, ha producido, en total, 2 500 ptas. de intereses.

Solución:

Durante los tres años el capital C, habrá producido un interés de $\frac{C \times 3 \times 3}{100}$ ptas. Del mismo modo, los intereses producidos durante los cuatro años son $\frac{C \times 4 \times 4}{100}$ ptas.

Como la suma de ambas cantidades debe ser igual al interés total, tendremos la ecuación

$$\frac{9\,C}{100} + \frac{16\,C}{100} = 2500 \quad \text{o sea} \quad \frac{25\,C}{100} = 2500$$

de donde C = 10.000. Por consiguiente el capital pedido es de 10.000 ptas.

EJERCICIOS

1. ¿Cuantos grados Reamur son 30 grados Celsius?

2. Aplicando a los extremos de un conductor una tensión de 120 voltios es atravesado por una corriente de 3 amperios. ¿Cual será la intensidad correspondiente a una tensión de 220 voltios?

3. La energía cinética de un automóvil que marcha a 20 km por *hora es de 900 kilográmetros. Calcular la energía cinética del mismo vehículo cuando alcanza la velocidad de 100 km por hora.*

4. *La pendiente media de un trozo de carretera ha de ser el 4 por cien. Calcular el desarrollo necesario para ganar una altura de 240 m.*

5. *Desde Pola de Lena al puerto de Pajares sube el tren 852 m en un recorrido de 50 km. ¿Cual es la pendiente media del trazado?*

6. *Un panecillo pesa 125 gramos, cuesta 8 céntimos de peseta y proporciona a nuestro organismo 270 calorías. Calcular el precio a que debía venderse el kilogramo de jamón teniendo en cuenta solamente su valor nutritivo que es de 2930 calorías.*

7. *48 mecheros consumen, en 15 horas, 96 m^3 de gas que cuesta a 0,30 ptas. el metro cúbico. ¿Cuánto costará mensualmente el gas consumido por 120 mecheros que funcionan 4 horas diarias?*

8. *Determinar el capital que, impuesto al 5 % durante 4 años, se convierte en 1800 ptas.*

9. *Cual es el capital que, impuesto al 6 % durante 10 años, produce el mismo interés que un capital de 14 400 ptas. al 5 % durante 15 años.*

10. *La renta anual de una persona asciende a 8 000 ptas. Determinar su capital sabiendo que la tercera parte de él está impuesto al 3,5 % y el resto al 4 %.*

11. *Una persona presta a un amigo 12000 ptas. al 4 %. Posteriormente amplía el préstamo en otras mil pesetas sin aumento de intereses. Calcular el tanto por cien efectivo de la operación.*

12. *Un capital de 10 000 ptas. produce una renta anual de 530 ptas. estando impuesto, en parte, al 5 % y, en parte, al 6 %. Calcular estos capitales parciales.*

13. *Por la venta de una finca se pide 22 550 ptas. pagaderas en un plazo de 18 meses o bien 20 000 ptas. al contado. El tipo de descuento es el 7 %. ¿Cual es la oferta más ventajosa?*

14. *El vencedor en una carrera de 200 m ha invertido 19,4 segundos en alcanzar la meta. Calcular la velocidad de este corredor en km por hora.*

15. *Para proyectar una película sonora de 550 m se invierten 24 minutos. Calcular la longitud de una cinta cuya proyección ha requerido una hora y cuarenta minutos.*

LECCION 18

EQUIVALENCIA DE ECUACIONES

83. Aplicación de las ecuaciones.—Hemos visto que los problemas de interés simple se resuelven mediante sencillas ecuaciones. En general, podemos afirmar que la solución de una gran parte de problemas matemáticos consiste en saber plantear y resolver ecuaciones. Por este motivo el estudio de las ecuaciones es uno de los capítulos más importantes de la Matemática.

84. Solución de una ecuación.—Según se ha dicho en el curso anterior, se llama solución o raíz de una ecuación con una incógnita todo número que sustituído en lugar de dicha incógnita satisface la ecuación.

Ejemplo:

La ecuación $2x + 3 = 4x - 7$

tiene la solución $x = 5$, pues sustituído este valor numérico en dicha ecuación resulta la identidad

$$2 . 5 + 3 = 4 . 5 - 7 \quad \text{o sea} \quad 13 = 13$$

En cambio $x = 0$ no representa una solución, pues sustituyendo este valor se obtiene

$$2 . 0 + 3 = 4 . 0 - 7 \quad \text{o sea} \quad 3 = -7$$

lo cual no es cierto.

Si la ecuación tiene varias incógnitas cada solución está formada por un conjunto de tantos valores como incógnitas, de manera que sustituídos en la ecuación conviertan a esta en una identidad.

Ejemplos:

La ecuación

$$x + y = 2x + 5$$

tiene la solución $x = 3$

$y = 8$ pues al sustituir estos

valores, resulta

$$3 + 8 = 2 . 3 + 5$$

que es una identidad.

Del mismo modo puede comprobarse que el conjunto de valores

$$x = 4$$
$$y = -1$$
$$z = 2$$

constituye una solución de la ecuación

$$3x - y + 4 = 2y - x - z + 25$$

85. Ecuaciones equivalentes. — Lo que interesa de una ecuación son sus soluciones; por eso dos ecuaciones que tengan las mismas soluciones son, para nosotros, equivalentes.

Dada una ecuación es muy fácil obtener nuevas ecuaciones equivalentes a ella. Basta utilizar los principios que a continuación se explican.

86. Principios de equivalencia.

1.^{er} principio: SI SE AÑADE A LOS DOS MIEMBROS DE UNA ECUACION UN NUMERO O EXPRESION LITERAL, SE OBTIENE OTRA ECUACION EQUIVALENTE A LA PRIMERA.

Llamando A al primer miembro de una ecuación y B al segundo podremos escribir esta ecuación en la forma abreviada

$$A = B$$

donde A y B son dos expresiones literales o numéricas.

Representando con el símbolo C otra expresión, numérica o literal, el principio anterior dice que las ecuaciones

$$A = B$$
$$A + C = B + C$$

son equivalentes.

Demostración del principio:

Toda solución de la primera ecuación da valores numéricos iguales a A y a B; por consiguiente, dará valores numéricos iguales a A + C y a B + C, lo cual nos dice que también es solución de la segunda ecuación.

Por otra parte, toda solucion de la ecuación

$$A + C = B + C$$

lo es, porque da valores numéricos iguales a las expresiones A + C y B + C. Ahora bien, si esto sucede también los sumandos A y B habrán alcanzado valores numéricos iguales y por consiguiente aquella solución también satisface a la ecuación

$$A = B$$

En resumen:

Toda solución de la ecuación $A = B$ satisface a la ecuación $A + C = B + C$.

Toda solución de la ecuación $A + C = B + C$ satisface a la ecuación $A = B$.

De aquí se deduce que ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones y son, por tanto, equivalentes.

Consecuencia:

SI SE RESTA DE LOS DOS MIEMBROS DE UNA ECUACION UN NUMERO O EXPRESION LITERAL SE OBTIENE OTRA ECUACION EQUIVALENTE A LA PRIMERA.

Demostración:

Queremos demostrar que las ecuaciones

$$A = B \qquad A - C = B - C$$

son equivalentes.

En efecto, según el principio anterior, las ecuaciones

$$A - C = B - C \quad \text{y} \quad (A - C) + C = (B - C) + C$$

son equivalentes, pero esta última es, precisamente, la primitiva $A = B$, puesto que

$$(A - C) + C \equiv A$$
$$(B - C) + C \equiv B$$

2.º principio: SI SE MULTIPLICAN LOS DOS MIEMBROS DE UNA ECUACION POR UN NUMERO DISTINTO DE CERO SE OBTIENE OTRA ECUACION EQUIVALENTE A LA PRIMERA.

Demostración:

Sea la ecuación $\qquad A = B$

Multiplicando sus dos miembros por un número k, distinto de cero, se obtiene la ecuación

$$k A = k B$$

que es equivalente a aquella.

En efecto, toda solución de $A = B$ da valores numéricos iguales a las expresiones A y B y, por tanto, a los productos kA y kB.

Por otra parte, toda solución de la ecuación $kA = kB$ da valores numéricos iguales a sus dos miembros y como estos tienen un factor común k es preciso que los factores A y B alcancen también valores numéricos iguales.

Consecuencia:

SI SE DIVIDEN LOS DOS MIEMBROS DE UNA ECUACION POR UN NUMERO DISTINTO DE CERO SE OBTIENE OTRA ECUACION EQUIVALENTE A LA PRIMERA.

En efecto, multiplicando los dos miembros de la ecuación $A = B$ por el número $\frac{1}{k}$ resulta la ecuación $A : k = B : k$ que según el principio anterior, es equivalente a aquélla.

EJERCICIOS

1. Determinar si son ecuaciones o identidades las siguientes igualdades:

$$4x + 5 = 2 + x + 3 + 3x \quad ,, \quad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$\frac{x}{3} + 1 = 2x - 4 \quad ,, \quad x + 2y + 3z = 5$$

$$x = 7 \quad ,, \quad y = 0$$

2. Comprobar si entre los números

$$0,\ 1,\ -4,\ -5,\ 9,\ -3$$

hay alguno que sea raíz de la ecuación

$$\frac{x}{2} + 3 - \frac{x}{5} = \frac{x}{3} + \frac{3x}{10}$$

3. Comprobar si entre los sistemas de valores

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = 25 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 25 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 9 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = -1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 9 \end{matrix}\right.$$

hay alguno que sea solución de la ecuación

$$-x + 4y = -9$$

4. Comprobar si $\left\{\begin{matrix} x = \dfrac{14}{37} \\ y = -\dfrac{23}{59} \end{matrix}\right\}$ *es una solución de la ecuación*

$$1432x - 348y = 125 + 3z$$

5. Resolver la ecuación $x = 20$

6. *Comprobar la equivalencia de las dos ecuaciones*

$$x - 6 = 14 \quad ,, \quad x = 20$$

7. *Comprobar la equivalencia de las dos ecuaciones*

$$x + 5 = 3 \quad ,, \quad x = -2$$

8. *Comprobar la equivalencia de las dos ecuaciones*

$$6x = 24 \quad ,, \quad x = 4$$

9. *Comprobar la equivalencia de las dos ecuaciones*

$$\frac{x}{-3} = 9 \quad ,, \quad x = -27$$

10. ***Resolver las ecuaciones siguientes:***

$$7x = 4 + 6x \quad ,, \quad -3x = 5 - 4x$$

$$x = 8 - 7x \quad ,, \quad 2y = 9y - 21$$

11. ***Escribir una ecuación equivalente a***

$$\frac{x + 3y}{1492} = \frac{2y - 7}{1492}$$

y cuyos términos sean más sencillos.

12. *Simplificar la ecuación*

$$1400 + 200x = -100y$$

LECCION 19

TRASFORMACION DE ECUACIONES

87. Trasposición de términos.—Sea la ecuación

$$6x - 2 = 4 + 3x$$

Sumando a sus dos miembros el número 2 se obtiene la nueva ecuación

$$6x = 4 + 3x + 2$$

que, en virtud de lo dicho en la lección anterior, es equivalente a la ecuación dada.

Del mismo modo, si restamos de los dos miembros de aquella ecuación la expresión $3x$, se obtiene

$$6x - 2 - 3x = 4$$

que es otra ecuación equivalente a la primitiva.

Regla:

EN TODA ECUACION PUEDE PASARSE UN TERMINO CUALQUIERA DE UN MIEMBRO A OTRO CAMBIANDOLE DE SIGNO.

Esta operación se llama trasposición de términos.

Ejemplo:

Si en la ecuación

$$-3x + 5 - 2x = 4x + 1 - 10x$$

pasamos el término $+5$ al segundo miembro cambiado de signo se obtiene la ecuación equivalente

$$-3x - 2x = 4x + 1 - 10x - 5$$

Del mismo modo, pasando al primer miembro los términos $4x$ y $-10x$, tendremos la ecuación

$$-3x - 2x - 4x + 10x = 1 - 5$$

también equivalente a la primitiva.

Reduciendo términos semejantes resulta

$$x = -4$$

Esto nos dice que la ecuación propuesta tiene la raíz -4.

88. Supresión de denominadores.

Sea la ecuación

$$\frac{x}{2} - 5 = \frac{3\,x}{7}$$

Multiplicando sus dos miembros por el producto, 2 + 7, de los denominadores se obtiene la ecuación

$$\frac{x}{2} \cdot 2 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \cdot 7 = \frac{3\,x}{7} \cdot 2 \cdot 7$$

que, en virtud de lo dicho en la lección anterior, es equivalente a la ecuación dada

Si efectuamos las operaciones indicadas resulta

$$7\,x - 70 = 6\,x$$

donde han desaparecido los denominadores.

Regla:

PARA SUPRIMIR LOS DENOMINADORES NUMERICOS DE UNA ECUACION BASTA MULTIPLICAR SUS DOS MIEMBROS POR EL PRODUCTO DE TODOS LOS DENOMINADORES O, MEJOR AUN, POR EL MINIMO COMUN MULTIPLO DE ESTOS DENOMINADORES.

Ejemplo:

Suprimir los denominadores de la ecuación

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{x}{15} = 21$$

Multiplicando ambos miembros por 30, que es el mínimo común múltiplo de 3, 6 y 15, resulta la ecuación

$$10\,x - 5\,x + 2\,x = 630$$

89. Forma normal de una ecuación.

– Se llama forma normal de una ecuación a la que se obtiene después de efectuar en esta las siguientes trasformaciones:

1.° Suprimir los denominadores, si los hay.

2.° Efectuar las operaciones indicadas por los paréntesis, si los hay.

3.° Pasar al primer miembro todos los términos que figuren en el segundo.

4.° Reducir términos semejantes.

Ejemplos:

a) Reducir a la forma normal la ecuación

$$\frac{5\,(x - 6)}{2} = \frac{x}{3} + 11$$

1.° Multiplicando los dos miembros por 6 resulta

$$15(x-6)=2x+66$$

2.° Efectuando la multiplicación indicada por el paréntesis tendremo

$$15x-90=2x+66$$

3.° Efectuando la trasposición de términos queda.

$$15x-90-2x-66=0$$

4.° Y reduciendo términos semejantes aparece la forma normal

$$13x-156=0$$

b). Obtener la forma normal de la ecuación

$$\frac{x(x-1)}{3}+\frac{x^2}{4}=5$$

Efectuando las trasformaciones indicadas se obtiene sucesivamente

$$4x(x-1)+3x^2=60$$

$$4x^2-4x+3x^2=60$$

$$4x^2-4x+3x^2-60=0$$

y por último la forma normal

$$7x^2-4x-60=0$$

90. Grado de una ecuación con una incógnita.

—Se llama grado de una ecuación con una incógnita el mayor exponente de dicha incógnita en la forma normal de la ecuación.

Ejemplos:

1.° La ecuación

$$\frac{5(x-6)}{2}=\frac{x}{3}+11$$

es de primer grado.

2.° La ecuación

$$\frac{x(x-1)}{3}+\frac{x^2}{4}=5$$

es de segundo grado.

3.° La ecuación

$$(x^2+2x-7)(x-9)=x^2(x-7)-62$$

es de primer grado, porque su forma normal es

$$-25x+125=0$$

EJERCICIOS

Reducir a la forma normal y determinar el grado de las siguientes ecuaciones:

1. $3x-4-11x=-6$,, $30x=-4x-6-5x+3$

2. $-x + 5 = 8 - 4x$,, $-8 + 14x - 25x - 7 = 13x - 7x - 1$

3. $4x + (2 - x) = 3$,, $6 - (2 - 8x) = 5x - 1$

4. $2(x - 3) - 9 = 12$,, $-(2x - 1) = 4(x + 5) - 3$

5. $5(4 - y + 1) - 3(4y - 3) = 9y - 7 - 4y$

6. $2 \cdot 3 \cdot (y + 4) - 5 \cdot 6 \cdot (y - 7) - 2 \cdot 6 \cdot (2y + 1) = 15$

7. $x + \frac{x}{2} = 1$,, $\frac{y}{5} - 2 = \frac{y}{6} - y$

8. $\frac{u}{3} - \frac{2u}{9} = \frac{10}{12} - \frac{u}{4}$,, $\frac{2}{5}v - \frac{1}{8} = \frac{1}{20}v$

9. $\frac{z + 4}{3} = \frac{2z - 5}{7}$,, $\frac{1}{4}(2t + 3) + \frac{t - 1}{14} = 3(-2 - t)$

10. $(8x - 1)x = (4x + 3)(2x + 1)$

11. $(2x + 5)(12x - 3) = (3x - 1)(8x - 2)$

12. $(x - 3)^2 - x(x + 1) = 0$

13. $(x - 2)^3 + (x + 2)^2 = x(x^2 - 4) + 6 - 5x^2$

14. $\frac{(5y - 1)y}{4} + \frac{y}{6} = (y + 2)(y - 3)$

15. $(z + 1)(z^2 + 3) = 5 - z$

LECCION 20

LA ECUACION DE PRIMER GRADO

91. Forma normal.—Cualquiera que sea la ecuación de primer grado con una incógnita siempre se obtiene la misma forma normal. Esta se compone de dos términos que son: 1.° La incógnita multiplicada por un coeficiente y 2.° Un término independiente de la incógnita.

Representando por *a* dicho coeficiente y por *b* el término independiente, la forma de la ecuación será

$$a x + b = o$$

Los valores de *a* y *b* pueden ser cualesquiera.

92. Resolución de la ecuación de primer grado.—Para resolver una ecuación de primer grado con una incognita la reduciremos, ante todo, a la forma normal

$$a x + b = o$$

Suponiendo, ahora, que *a* es distinto de cero tendremos que la ecuación propuesta es equivalente a

$$x = -\frac{b}{a}$$

pues basta efectuar en la forma normal, la trasposición del término *b* y la división de los dos miembros por *a*.

Con esto tenemos ya resuelta la ecuación.

Ejemplos:

1.° La ecuación

$$8 x + 3 = 0$$

tiene la solución

$$x = -\frac{3}{8}$$

2.° La ecuación

$$-5 x + 0 = 0$$

tiene la solución

$$x = -\frac{0}{-5} = 0$$

CUANDO EL COEFICIENTE DE LA INCOGNITA ES DISTINTO DE CERO LA ECUACION DE PRIMER GRADO POSEE UNA SOLA RAIZ QUE SE CALCULA MEDIANTE LA FORMULA $x = -\frac{b}{a}$

93. Discusión de la ecuación de primer grado.—Si el coeficiente de la incógnita vale cero, la ecuación tiene la forma

$$0 . x + b = 0$$

Entonces, si *b* es distinto de cero la ecuación no tiene solución, pues, cualquiera que sea el valor atribuído a la incógnita, el primer término vale cero y, sumándole *b*, el resultado nunca puede ser cero; dicho de otro modo, la ecuación nunca queda satisfecha.

En cambio, si *b* vale cero la ecuación tiene infinitas soluciones, pues, cualquiera que sea el valor atribuído a la incógnita, el primer miembro siempre vale cero y la ecuación queda en todo momento satisfecha.

CUANDO EL COEFICIENTE DE LA INCOGNITA ES CERO, LA ECUACION CARECE DE SOLUCION SIEMPRE QUE EL TERMINO INDEPENDIENTE SEA DISTINTO DE CERO; EN CAMBIO SI ESTE TERMINO VALE CERO LA ECUACION TIENE INFINITAS SOLUCIONES.

La discusión de la ecuación de primer grado con una incógnita puede resumirse del siguiente modo:

1.° a distinto de cero .... existe una solución y sólo una.
2.° $a = 0$,, b distinto de cero .... no existe solución.
3.° $a = 0$,, $b = 0$ .... existen infinitas soluciones.

94. Ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.— Una ecuación con dos incógnitas *x e y* se dice que es de primer grado, cuando reducida a la forma normal es del tipo

$$a x + b y + c = 0$$

Ejemplos:

1.° La ecuación con dos incógnitas

$$2 x + 2 y^2 = 0$$

no es de primer grado por contener el término y^2

2.° La ecuación

$$6 x - 4 y = 1$$

es de primer grado con dos incógnitas.

Una ecuación con tres incógnitas x, y, z, se dice que es de primer grado cuando su forma normal es del tipo

$$a x + b y + c z + d = 0$$

Ejemplos:

1.° La ecuación

$$4 x - y = 3 z + 6$$

es de primer con tres incógnitas.

2.° La ecuación con tres incógnitas

$$x - y + z = 3 + x y z$$

no es de primer grado por contener el término $x y z$.

95. Resolución de la ecuación de primer grado con dos incógnitas.—Sea la ecuación de primer grado

$$7 x - 4 y = 1$$

Sustituyendo en ella, en lugar de la incógnita y un valor cualquiera, por ejemplo,

$$y = 2$$

dicha ecuación toma la forma

$$7 x - 8 = 1$$

que es de primer grado con una incógnita. Resolviendo esta ecuación se obtiene la raíz

$$x = \frac{9}{7}$$

Entonces, el par de valores

$$x = \frac{9}{7} \quad ,, \quad y = 2$$

constituye una solución de la ecuación propuesta.

Procediendo de este modo obtendremos cuantas soluciones queramos; basta comenzar, dando un valor numérico arbitrario a una de las incógnitas.

TODA ECUACION DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS TIENE INFINITAS SOLUCIONES.

EJERCICIOS

Resolver las ecuaciones

1. $\frac{2 x}{3} + 5 = 2 \frac{1}{4}$,, $- \frac{x}{2} + 1 \frac{1}{3} = x$

2. $3{,}4\,x - \frac{2}{7} = 12{,}1$,, $5{,}2 - \frac{3\,x}{2} = 4\,\frac{2}{3} \cdot x$

3. $4\,\frac{1}{4}\,x - 15 = 1{,}1\,x$,, $-3\,\frac{1}{7} + 0{,}8\,x = \frac{x}{4}$

4. $9\,\frac{1}{5} - 1\,\frac{2}{3} \cdot x = 4 - 3\,\frac{2}{5} \cdot x$

5. $4\,(0{,}60x - \frac{1}{2}) = 6\,\frac{1}{3} + 5{,}6\,x$

Despejar * *el valor de la incógnita* x *en las ecuaciones siguientes:*

6. $7\,x + a = 0$,, $a\,x - 4 = 0$

7. $5\,x - a = 2$,, $3\,x - a = -\,b$

8. $2\,(x - a) = 10 - (x - 4a)$,, $a\,x + a = b\,x - b$

9. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$,, $a - \frac{b - x}{c} = a - x$

10. $x - \frac{x + a}{1 - a} + \frac{x + 1}{1 + a} = 0$

11. $a \cdot \frac{x - a}{b} + b \cdot \frac{x - b}{a} = x$

12. $\frac{x + a}{a - b} + \frac{x - a}{a + b} = \frac{x + b}{a + b} + \frac{2\,(x - b)}{a - b}$

Discutir las siguientes ecuaciones

13. $3\,x + 2 = 3\,(x + 1)$,, $2\,(x - 3) = 5\,x - 6$

14. $(x + 1)^2 - 1 = x\,(x + 2)$,, $(x + 4)^2 = x^2 + 16$

Calcular algunas soluciones de las ecuaciones

15. $x - y = 0$,, $x - 2\,y = 0$

16. $x + y + 1 = 0$,, $x - y = 1$

17. $3\,x = 1 + 2\,y$,, $2\,(x - 1) = y + 2$

18. $2\,x - 0 \cdot y = 4$,, $0 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$

*** Despejar una incógnita en una ecuación es dejarla aislada en el primer miembro mediante operaciones que no alteren las raíces de dicha ecuación.**

LECCION 21

METODO PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ARITMETICOS

96. Enunciado del problema.—La primera condición para resolver un problema es tener idea clara del enunciado.

En el enunciado de todo problema aritmético figuran ciertos números, llamados datos, y ciertas relaciones entre ellos y otros números desconocidos. Estos números constituyen la solución del problema.

Ejemplo:

El duplo de un número menos su tercera parte es igual a 15. Calcular dicho número.

En este enunciado interviene como dato el número 15. También se ve claramente la relación que existe entre este número, el doble de la incógnita y la tercera parte de esta incógnita.

97. Planteo de las ecuaciones.—Una vez que se ha estudiado bien el enunciado debe expresarse cada relación entre los datos y la incógnita, o incógnitas, mediante una ecuación o varias ecuaciones.

En el ejemplo anterior, llamando *x* al número desconocido, se obtiene la ecuación

$$2x - \frac{x}{3} = 15$$

No existe una regla general para plantear las ecuaciones de cada problema; el talento del operador auxiliado por el conocimiento de la materia es la única fuente de recursos en casos difíciles. En los casos sencillos suele ser eficaz la siguiente

Regla:

SE SUPONEN CONOCIDOS EL VALOR O VALORES DE LAS INCOGNITAS Y SE INDICAN TODAS LAS OPERACIONES NECESARIAS PARA COMPROBAR LA EXACTITUD DE DICHOS VALORES.

Vamos a aplicar esta regla al problema indicado en el parrafo anterior:

Número pedido x

su duplo .... $2x$

su tercera parte .... $\frac{x}{3}$

la diferencia de ambos .... $2x - \frac{x}{3}$

valor de esta diferencia .... $2x - \frac{x}{3} = 15$

98. Resolución de la ecuación.—Si el enunciado del problema conduce a una ecuación de primer grado con una incógnita podremos resolverla.

En el ejemplo anterior se obtiene la raíz

$$x = 9$$

Este es el número pedido, como se comprueba fácilmente.

Si el problema conduce a una ecuación de grado superior al primero o a un sistema de ecuaciones con varias incógnitas hay que aplicar procedimientos de resolución que estudiaremos en cursos siguientes.

99. Interpretación del resultado.—No siempre la solución de la ecuación es solución del problema; veamos un caso concreto.

En una fiesta se han recaudado 3 005 ptas. Cada invitado abonó 10 ptas por su tarjeta. ¿Cuántos invitados asistieron al festival?

Llamando x al número de invitados es evidente que los ingresos por la venta de tarjetas habrán sido 10 x ptas. Podemos plantear, pues, la siguiente ecuación

$$10\,x = 3\,005$$

cuya raíz es

$$x = 300,5$$

Esta solución de la ecuación no puede serlo del problema, porque el número de invitados tiene que ser, forzosamente, entero.

Otras veces hay que interpretar de cierto modo la solución de la ecuación para que sea solución del problema.

Aclaremos esta idea con un ejemplo sencillísimo.

Una persona tiene 50 años. ¿Cuánto tiempo ha de trascurrir para que cumpla 40 años?

Llamando x al número de años pedido, resulta la ecuación

$$50 + x = 40$$

que tiene la raíz

$$x = -10$$

El carácter negativo de esta raíz nos dice que la condición pedida se cumplió hace 10 años.

100. Problemas de aligación.—Los problemas referentes a mezclas, estudiados en cursos anteriores, conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Para obtener la ecuación correspondiente a cada problema basta expresar que la suma de los pesos de los cuerpos que se mezclan es igual al peso de la mezcla o aleación resultante, o bien, que la suma de los valores de los cuerpos componentes es igual al valor de dicha mezcla o aleación.

Ejemplos:

1.º En un tonel de 305 litros se vierten 180 litros de vino de 0,70 ptas / l, 114 litros de 0,50 ptas / l y el volumen restante, hasta llenar el barril, se completa con agua. Calcular el precio de la mezcla.

Solución:

Representando por x el precio pedido en pesetas, tendremos que el valor de la mezcla será 305 x ptas; los valores de los líquidos componentes de dicha mezcla son:

$180 \cdot 0{,}70$ ptas y $114 \cdot 0{,}50$ ptas

Según lo dicho en el párrafo anterior tendremos la ecuación

$$305\ x = 180 \cdot 0{,}70 + 114 \cdot 0{,}50$$

que resuelta nos da la raíz

$$x = 0{,}60$$

que representa el precio pedido en pesetas.

2.º Un comerciante adquiere una partida de café de 9,30 ptas / kg y otra de 8,50 ptas / kg. Determinar las cantidades de café que deben mezclarse para obtener 200 kg cuyo precio sea de 9 ptas / kg.

Solución:

Representando por x el número de kilogramos que se toman de la primera partida su valor será 9,30 x pts.

De la segunda partida hay que tomar $(200 - x)$ kg cuyo valor es $8{,}50 \cdot (200 - x)$ ptas.

Como, por otra parte, el valor de la mezcla ha de ser 9 . 200 ptas, podremos escribir la ecuación

$$9{,}30\,x + 8{,}50\,(200 - x) = 9 \cdot 200$$

que resuelta nos da la raíz

$$x = 125$$

Este número representa los kilogramos que han de tomarse de la primera partida. De la segunda partida se tomarán 75 kg.

101. Repartimientos proporcionales.—Hay muchos problemas, por ejemplo los referentes a la regla de compañía, que se resuelven descomponiendo un cierto número en partes proporcionales a otros números también conocidos. En este caso puede plantearse fácilmente la ecuación recordando la primera propiedad de las proporciones progresivas explicada en el párrafo 40.

Ejemplo:

Repartir 84 000 pesetas en cuatro partes proporcionales a los números 3 , 5 , 9 y 11.

Solución:

Llamando *a*, *b*, *c* y *d* a cada una de dichas partes, podremos escribir la proporción progresiva

$$a : b : c : d = 3 : 5 : 9 : 11$$

y por consiguiente si suponemos $a = 3\,x$ se verificará también

$$b = 5\,x \quad ,, \quad c = 9\,x \quad ,, \quad d = 11\,x$$

y como

$$a + b + c + d = 84\,000$$

tendremos la ecuación

$$3\,x + 5\,x + 9\,x + 11\,x = 84\,000$$

que resuelta nos da

$$x = 3\,000$$

Por consiguiente

$$a = 3 \times 3\,000 \quad ,, \quad b = 5 \times 3\,000 \quad ,, \quad c = 9 \times 3\,000 \quad ,, \quad d = 11 \times 3\,000$$

son los valores en pesetas de las cantidades que se piden.

EJERCICIOS

1. *Si al triplo de un número se le suma 4,9 resulta 10. Calcular este número.*
2. *Si a un número se le añade 7 y se halla la quinta parte de esta*

suma el resultado es igual al duplo de dicho número menos 13. Calcular este número.

3. *Si al duplo de un número se le añade 3 y la suma se multiplica por 4, se obtiene el mismo resultado que añadiendo 20 al quíntuplo de dicho número. Calcular su valor.*
4. *La suma de dos enteros consecutivos vale 65. Calcular estos números.*
5. *La suma de tres números pares consecutivos vale — 66. Calcular estos números.*
6. *El perímetro de un rectángulo vale 68 cm. La base tiene 6 cm más que la altura. Calcular las dimensiones de este rectángulo.*
7. *Un poste de telégrafo alcanza una altura de 4,50 m sobre el suelo y tiene empotrado en el terreno $\frac{1}{5}$ de su longitud total. Calcular la longitud del poste.*
8. *A las siete de la mañana salen, de los extremos de una carretera que tiene 9 km de longitud, dos peatones. Uno de ellos recorre 65 m por minuto y el otro 90 m por minuto. ¿Dónde y cuándo se encontrarán?*
9. *Un avión hace un trayecto de 800 km. La mitad de ellos los recorre a la velocidad de 160 km por hora y la otra mitad a 200 km / hora. Determinar la velocidad media del avión.*
10. *En los extremos de una palanca de 80 cm de longitud se aplican dos pesos de 1,5 kg y 0,9 kg. Determinar la posición del punto de apoyo para que exista equilibrio.*
11. *Se han leído, simultáneamente, las escalas de dos termómetros Celsius y Reaumur. La suma de ambas indicaciones es 54. ¿Cual es la temperatura en dicho instante?*
12. *Se tienen 280 g de plata de ley de 0,850. ¿Cuántos gramos deben agregarse de un segundo lingote de ley de 0,500 para que la nueva liga tenga una ley de 0,700?*
13. *Una aligación debe contener 12 partes de niquel, 20 de zinc y 35 de cobre. Calcular las cantidades que se necesitan de estos metales para obtener un lingote de 71 kg.*
14. *Un triángulo tiene sus ángulos proporcionales a 1, 2 y 3. Calcular estos ángulos.*
15. *Se mezclan 3 litros de agua a la temperatura de 8° C con 7 litros a 80° C. Calcular la temperatura de la mezcla.*
16. *Una chapa de latón, que pesa 600 g, se calienta a la temperatura de 100° C y luego se agita en una vasija que contiene 1500 g de agua a 20° C. Calcular la temperatura que alcanzará el agua. (El calor específico del latón es 0,093).*

LECCION 22

REPRESENTACIONES GRAFICAS

102. Representación gráfica de magnitudes.—En la práctica suelen emplearse ciertas representaciones gráficas que, al primer golpe de vista, dan idea de la relación entre los valores de dos o más cantidades. Aunque estas representaciones carecen de interés dentro de la Matemática, merecen ser conocidas por su aplicación práctica.

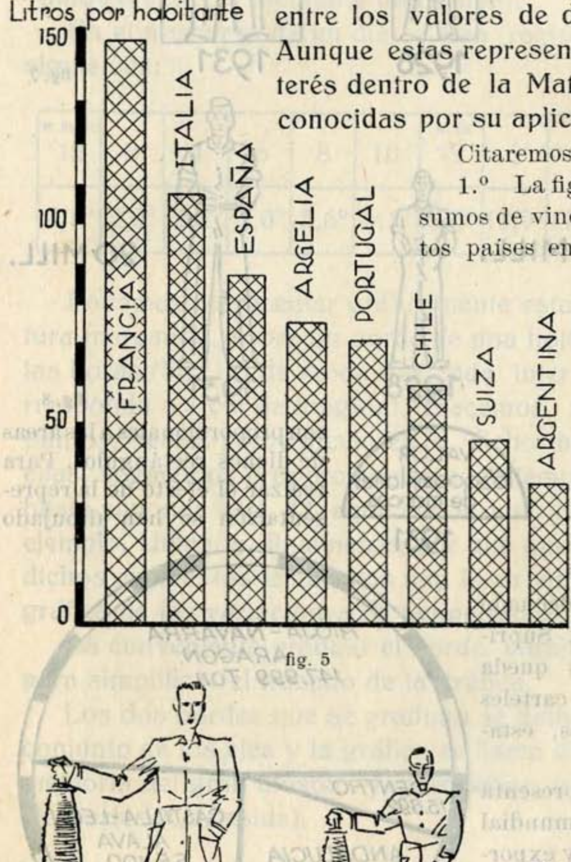


fig. 5

Citaremos algunos ejemplos:

1.° La figura 5 representa los consumos de vino por habitante en distintos países en el año 1932. Todos los rectángulos se construyen sobre bases iguales, pero las alturas son proporcionales a los consumos respectivos, que se miden con una escala que aparece en el borde izquierdo de dicha figura.

2.° La figura 6 representa el volumen del mercado de seda artificial(suma de importacio-

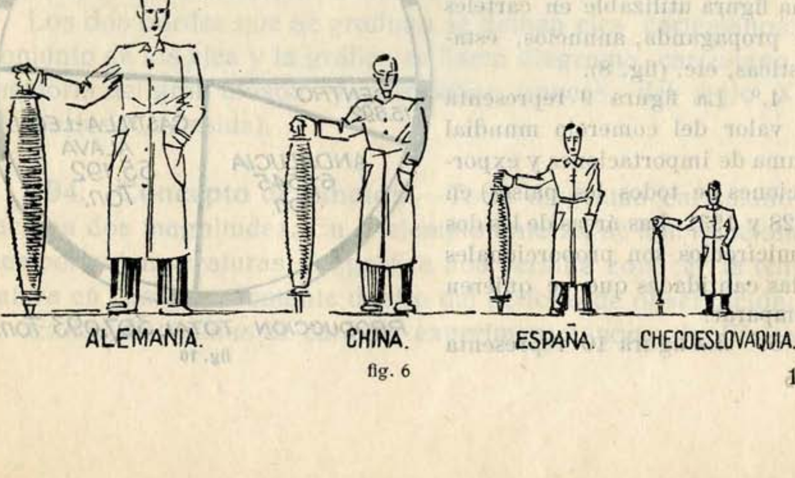


fig. 6

nes y exportaciones) en el año 1932. En vez de rectángulos se utiliza la silueta de un operario que sostiene un carrete. En este ejemplo no hay cifras y solo sirve para dar idea de sus mútuas relaciones.

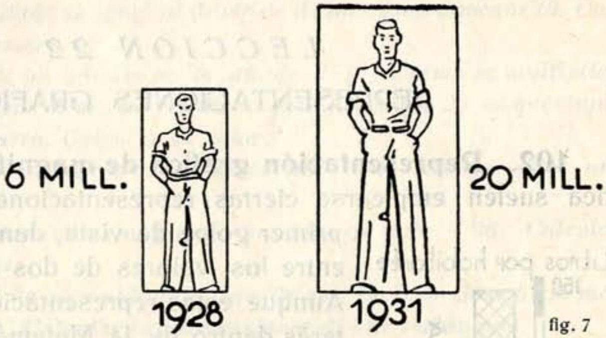


fig. 7

3.º La figura 7 representa el número de obreros parados en el mundo en 1928 y 1931. También se emplean rectángulos pero los valores que se quiere representar son proporcionales a las áreas de dichos rectángulos. Para realzar el efecto de la representación se han dibujado dos obreros de tamaño adecuado al rectángulo respectivo. Suprimiendo los rectángulos queda una figura utilizable en carteles de propaganda, anuncios, estadísticas, etc. (fig. 8).

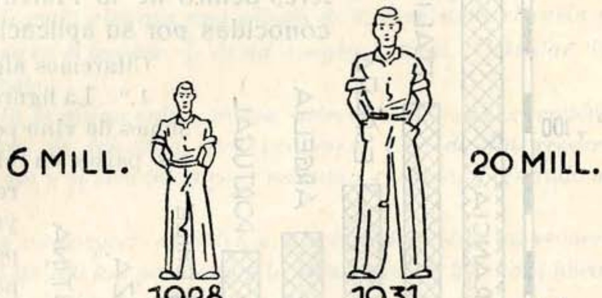


fig. 8

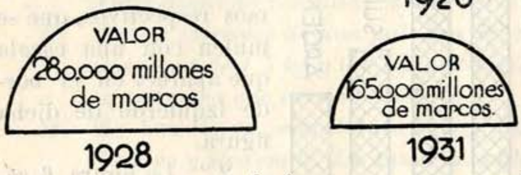


fig. 9

4.º La figura 9 representa el valor del comercio mundial (suma de importaciones y exportaciones de todos los países) en 1928 y 1931. Las áreas de los dos semicírculos son proporcionales a las cantidades que se quieren comparar.

5.º La figura 10 representa

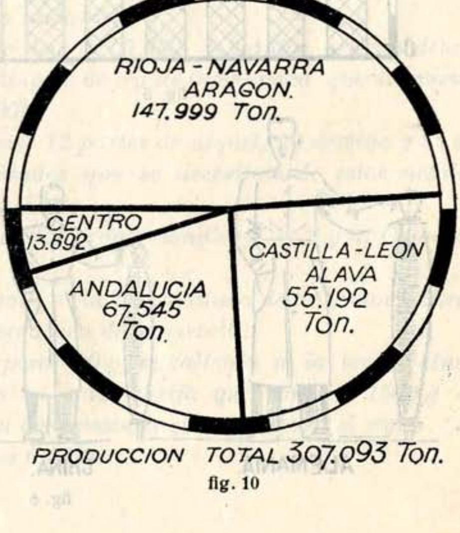


fig. 10

la producción remolachera de las distintas regiones españolas en el año agrícola 1934-35. Las áreas de los sectores son proporcionales a las producciones.

103. Diagramas cartesianos.—En los estudios matemáticos y en sus principales aplicaciones tienen mayor utilidad otros tipos de representación gráfica llamados diagramas cartesianos, que vamos a explicar mediante un ejemplo.

En el trascurso de un día se han registrado las temperaturas siguientes:

m. noche 12	2	4	6	8	10	m. día 12	2	4	6	8	10	m. noche 12
3,1°	2,5°	2,2°	2,0°	3,6°	6,1°	8,3°	11,9°	11,5°	6,5°	4,2°	2,5°	1,2°

Podemos representar gráficamente esta variación de temperatura marcando, sobre un borde de una hoja de papel milimétrico, las horas (fig. 11) de modo que cada intervalo de dos horas corresponda a 1 cm de longitud. Tracemos, por cada uno de estos puntos, rectas perpenticulares a dicho borde y tomemos, sobre ellas, segmentos proporcionales a las temperaturas, para lo cual basta suponer que 1° equivale a una cierta longitud, 1 cm por ejemplo. Uniendo, finalmente, por una quebrada los extremos de dichos segmentos tendremos una línea que es la representación gráfica de las variaciones de temperatura.

Es conveniente graduar el borde paralelo a estos segmentos para simplificar el trazado de la gráfica.

Los dos bordes que se graduan se llaman ejes cartesianos. El conjunto de los ejes y la gráfica se llama diagrama cartesiano en memoria del gran filósofo y matemático francés, del siglo XVII, Descartes (Cartesius).

104. Concepto de función.—Todo diagrama cartesiano relaciona dos magnitudes. En el ejemplo anterior se han relacionado tiempos y temperaturas. La gráfica nos permite conocer la temperatura en cualquier instante dentro del período de observación.

En las disciplinas de carácter experimental como la Física, la

Química, la Biología, la Economía política, etc., tienen gran importancia estos diagramas que son el resumen de una porción de observaciones o experimentos, pero en el campo de la Matemática tienen más interés otras gráficas que se deducen de las ecuaciones.

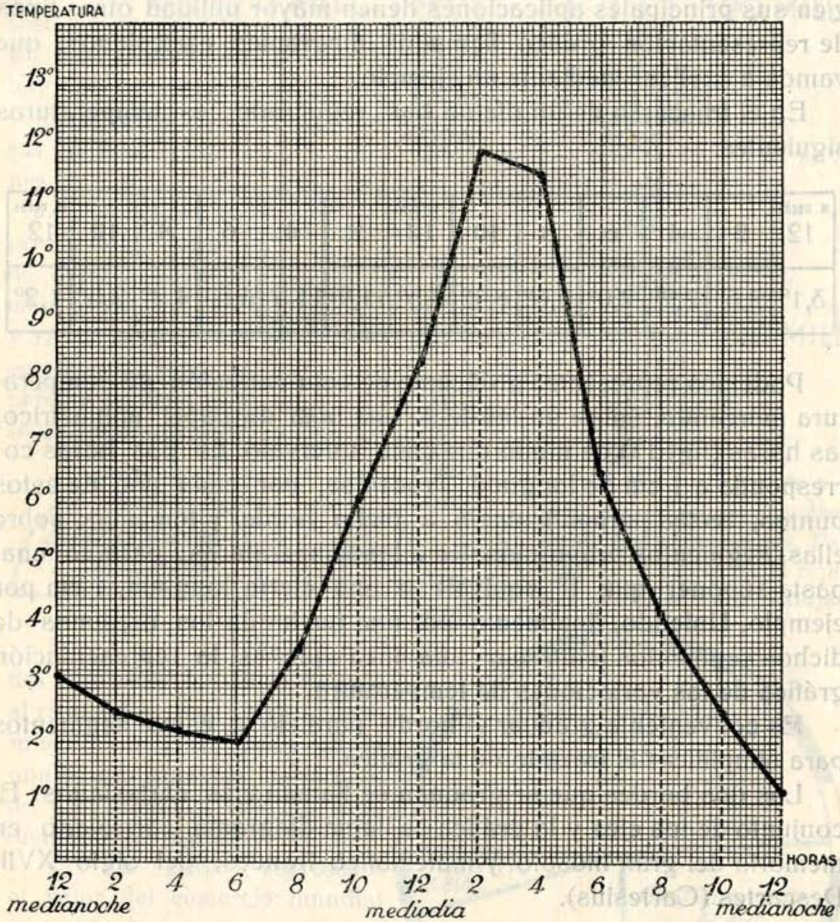


fig. 11

Sea, por ejemplo, la ecuación

$$y = 2x + 1$$

Si damos a x una sucesión de valores arbitrarios, obtendremos otra sucesión de valores para y. Así se ha formado el siguiente cuadro:

x = ...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4 ......
y = ...	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9 ......

Las cantidades x e y no tienen un valor fijo; por eso se llaman CANTIDADES VARIABLES o, simplemente, VARIABLES. Pero, el valor de y no es arbitrario como el de x; por eso se dice que la variable y DEPENDE de x o que es una FUNCIÓN de x. Esta se llama VARIABLE INDEPENDIENTE.

RECIBE EL NOMBRE DE FUNCION TODA VARIABLE CUYOS VALORES DEPENDEN DE LOS VALORES QUE ALCANCE OTRA VARIABLE INDEPENDIENTE.

De acuerdo con estas definiciones podemos decir, refiriéndonos al ejemplo del párrafo 103, que la temperatura es función del tiempo. También el área de un círculo es función del radio. La primera de estas funciones se llama empírica, porque la relación entre sus variables no puede expresarse mediante fórmulas, en cambio la relación entre el área de un círculo y su radio se expresa mediante la fórmula

$$y = \pi x^2$$

Estas funciones se llaman matemáticas y son las que estudiaremos en lo sucesivo.

Observación:

Como ya hemos advertido, la fórmula que expresa una función matemática es una ecuación con dos incógnitas, de modo que la representación gráfica de la función puede también interpretarse como una representación gráfica de dicha ecuación y de todas sus equivalentes.

105. Representación gráfica de una función.—Para representar gráficamente una función se utiliza un diagrama cartesiano, pero, teniendo en cuenta que las dos variables pueden recibir, indistintamente, valores positivos y negativos, no conviene tomar como ejes dos bordes del papel. Trazando los ejes en la posición que indica la fig. 12 pueden tomarse los valores positivos de la

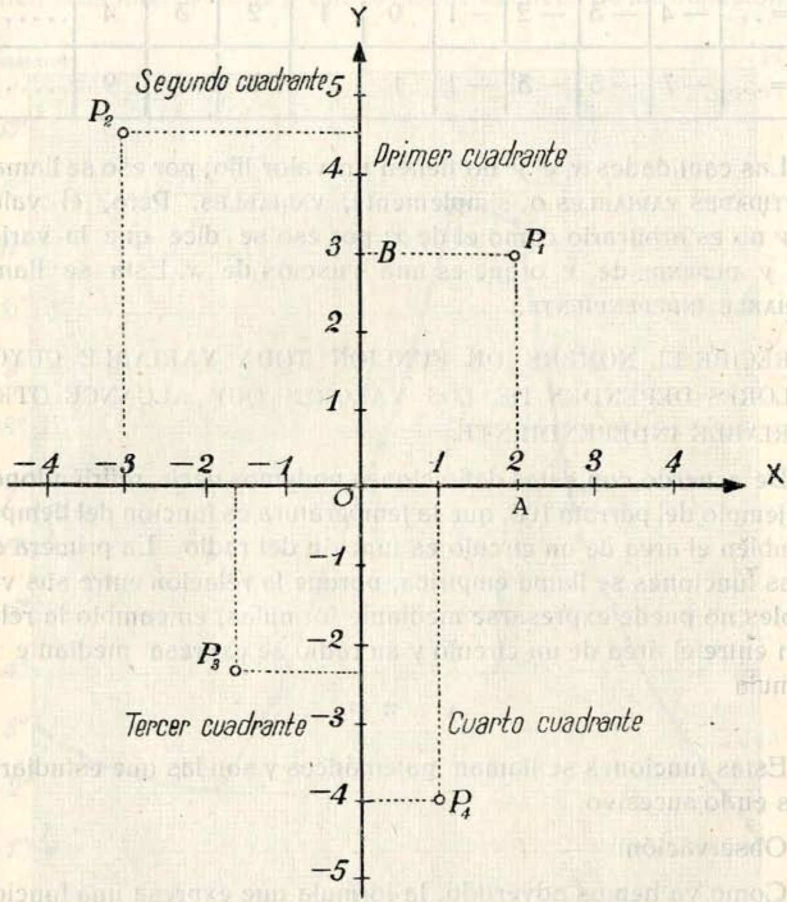


fig. 12

variable x a la derecha del origen, en el eje X (llamado eje de abscisas), y los negativos a la izquierda del origen.

Los valores positivos de la variable y se toman por encima del origen, en el eje Y (llamado eje de ordenadas) y los negativos por debajo del origen.

Los ejes coordenados dividen el plano del dibujo en cuatro cuadrantes según indica la fig. 12.

El punto P_1 tiene la abscisa $O\,A = x_1 = 2$ y la ordenada $O\,B = y_1 = 3$

Al punto P_2 corresponden los valores

$$x_2 = -3$$
$$y_2 = 4{,}5$$

Al punto P_3 corresponden

$$x_3 = -1{,}7$$
$$y_3 = -2{,}3$$

Al punto P_4 corresponde

$$x_4 = 1$$
$$y_4 = -4$$

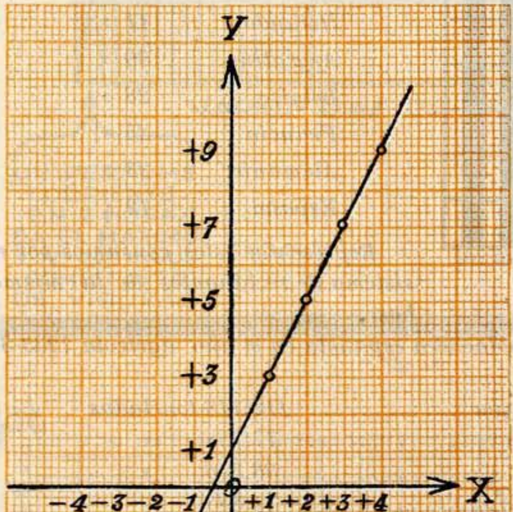


fig. 13

Cualquier punto del eje de abscisas tiene su ordenada nula.

Cualquier punto del eje de ordenadas tiene su abscisa nula.

SE LLAMAN COORDENADAS DE UN PUNTO EL PAR DE NUMEROS FORMADO POR LA ABSCISA Y LA ORDENADA DE DICHO PUNTO.

Las coordenadas del origen son (0, 0).

Ejemplo:

Representar la gráfica de la función

$$y = 2\,x + 1$$

Basta marcar los puntos cuyas coordenadas son los pares de valores que indica el cuadro del párrafo 104. Uniendo dichos puntos se obtiene la gráfica de la fig. 13.

EJERCICIOS

1. *Interpretar el siguiente gráfico (fig. 14) relativo a los capitales ingresados en un Banco español.*

2. *Interpretar el siguiente gráfico (fig. 15) relativo a las toneladas de tabaco importadas en los países expresados.*

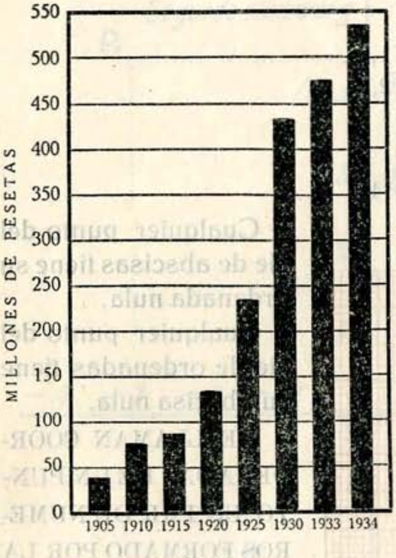


fig. 14

3. *El consumo de azúcar por habitante en los países indicados, durante el año 1933, ha sido el siguiente:*

Dinamarca	*54 kg.*
Estados Unidos	*49* »
Inglaterra	*45* »
Suecia	*42* »
Suiza	*42* »
Holanda	*41* »
Argentina	*30* »
Bélgica	*28* »
Francia	*25* »
Alemania	*23* »
España	*12* »

Representar estos consumos por el sistema de rectángulos de la misma base.

4. *Esta producción remolachera española en el año agrícola 1933-34 ha sido la siguiente:*

Rioja-Navarra-Aragón	*112.118 toneladas*
Castilla-León-Alava	*77.788* »
Andalucía	*36.556* »
Centro	*11.888* »

Construir un gráfico de estas producciones por el sistema de sectores.

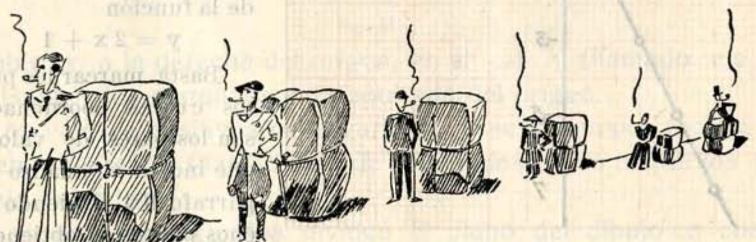


fig. 15

5. *Representar el diagrama de temperaturas de un enfermo de paludismo.*

Cada día se ha tomado tres veces la temperatura del enfermo: a las seis de la mañana, al mediodía y a las seis de la tarde.

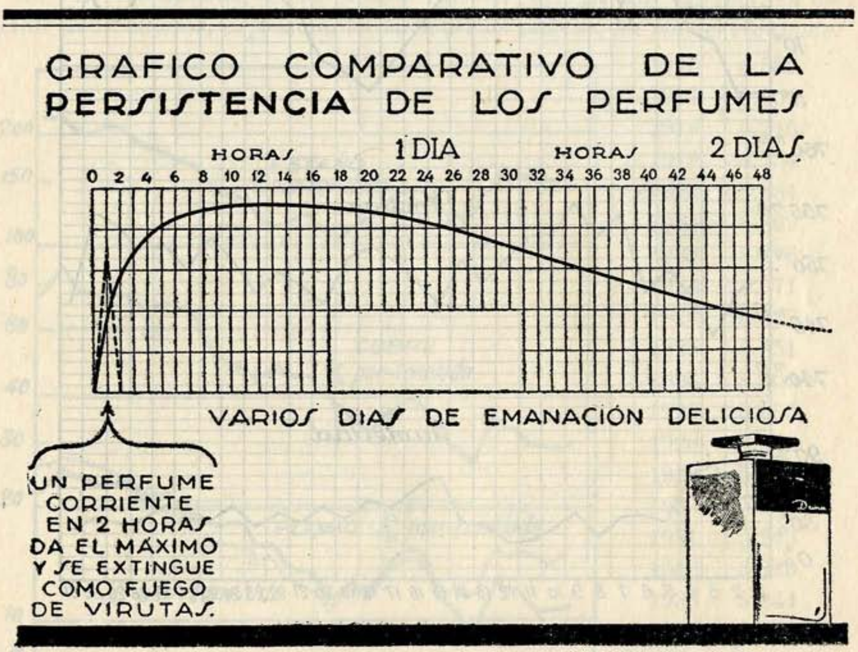


fig. 16

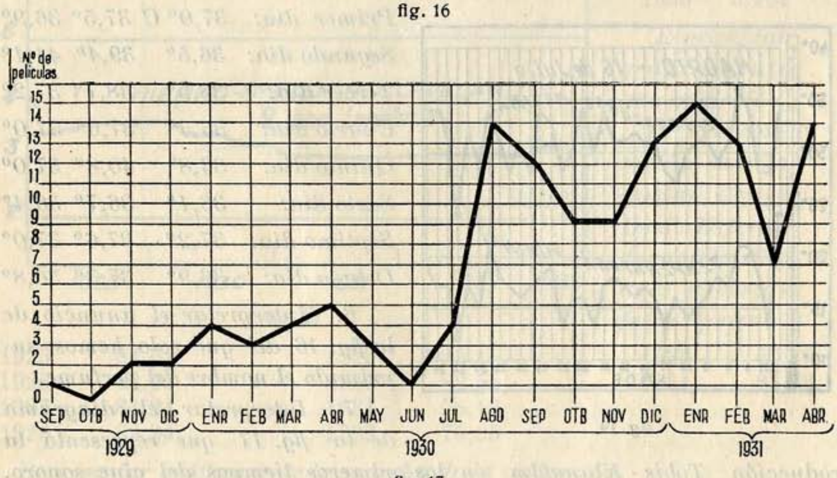


fig. 17

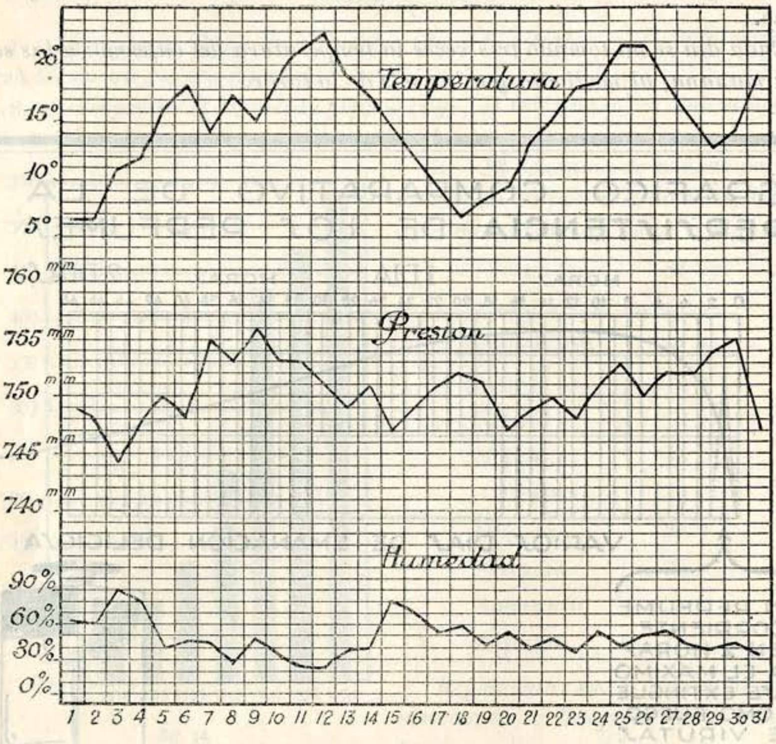


fig. 18

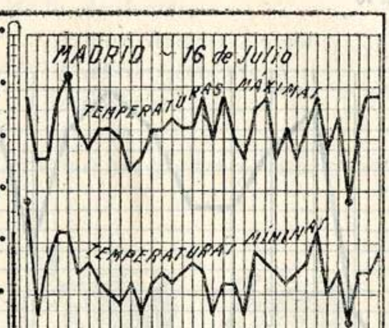


fig. 19

Primer día:	*37,0° C*	*37,5°*	*36,9°*
Segundo día:	*36,5°*	*39,4°*	*41,1°*
Tercer día:	*38,5°*	*38,7°*	*37,2°*
Cuarto día:	*36,3°*	*37,6°*	*37,0°*
Quinto día:	*36,8°*	*40,8°*	*37,0°*
Sexto día:	*36,1°*	*36,7°*	*36,4°*
Séptimo día:	*37,2°*	*37,6°*	*37,0°*
Octavo día:	*36,9°*	*37,3°*	*36,8°*

6. Interpretar el anuncio de la fig. 16 del que solo hemos suprimido el nombre del perfume.

7. Interpretar el diagrama de la fig. 17 que representa la producción Tobis - Klangfilm en los primeros tiempos del cine sonoro.

8. Deducir del diagrama de la fig. 18 las temperaturas, presiones y humedades que corresponden a los distintos días del mes.

9. Deducir del diagrama de la fig. 19, las temperaturas extremas que ha tenido Madrid los días 16 de Julio del siglo actual.

10. El crecimiento de la Deuda Interior del Estado español, en los veinte años últimos, expresada en millones de pesetas, ha sido el siguiente:

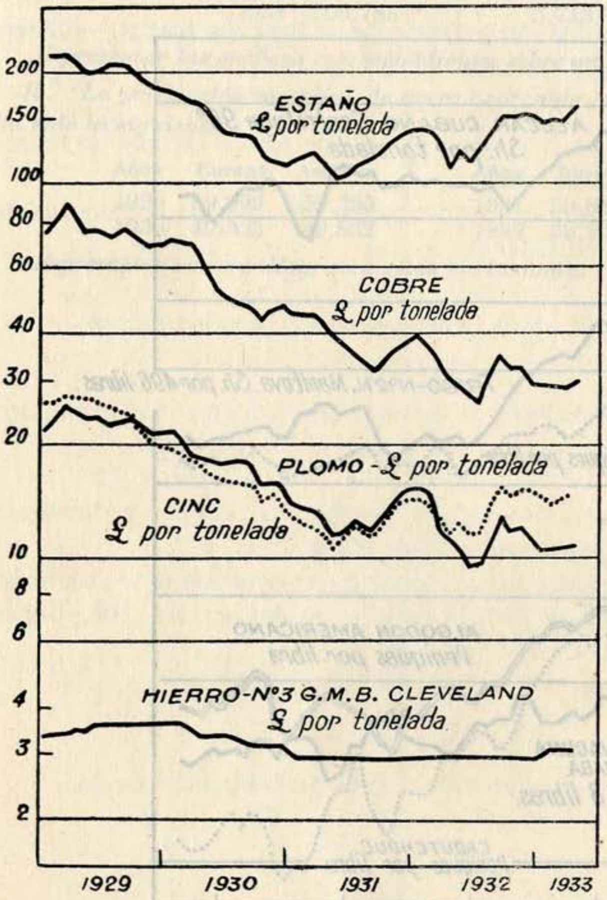


fig. 20

1916	6.582
1917	6.651
1918	6.715
1919	6.734
1920	8.384
1921	8.369
1922	8.376
1923	8.371
1924	8.377
1925	8.351
1926	8.400
1927	8.655
1928	8.658
1929	5.293
1930	5.243
1931	5.243
1932	5.243
1933	5.244
1934	5.244
1935	5.244

Representar gráficamente esta variación.

11. La cotización media anual de la Deuda Exterior durante los diez años últimos fué la siguiente:

1925	84,61	1929	85,18	1933	80,10
1926	82,29	1930	82,55	1934	83,63
1927	84,24	1931	76,12		
1928	89,34	1932	76,35		

Representar gráficamente la marcha de la cotización.

12. La cotización media mensual de la deuda ferroviaria al 5°/₀, en el primer semestre del año 1935, ha sido la siguiente:

Enero	99,77	Abril	101,15
Febrero	100,82	Mayo	101,43
Marzo	101,55	Junio	102,30

Representar gráficamente esta variación.

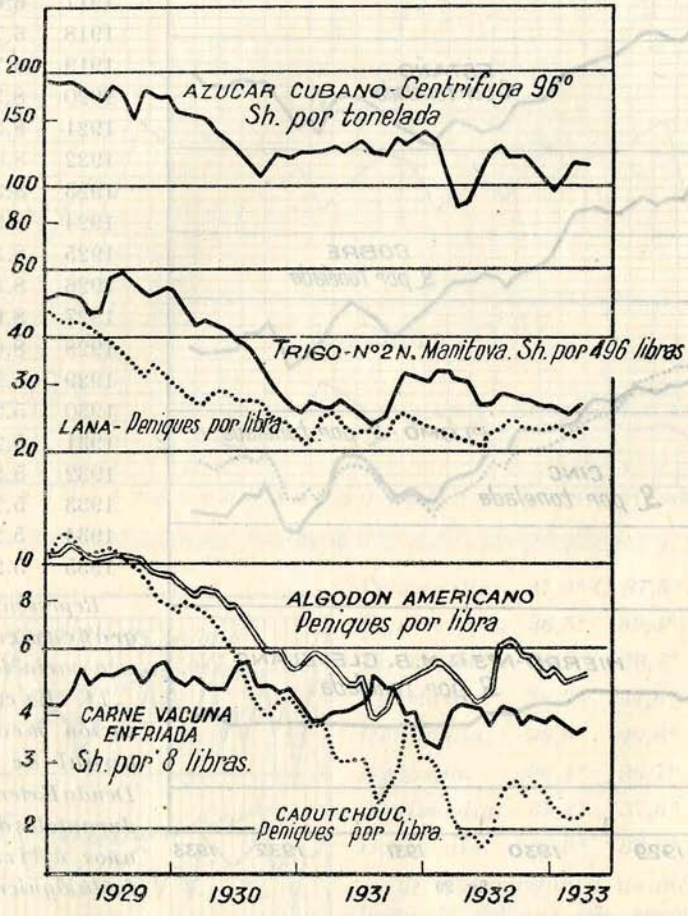


fig. 21

13. Interpretar los diagramas de las figs. 20 y 21 que representan las variaciones de precios de las principales materias primas en el quinquenio 1929-33.

14. La Marina española ha consumido en los años que se indican las siguientes toneladas de carbón nacional y extranjero:

	Nacional	Extranjero
1929	427.105	12.195
1930	431.037	16.332
1931	373.581	14.323
1932	334.977	6.006
1933	206.783	3.743

Representar las gráficas correspondientes sobre un diagrama cartesiano.

15. La producción mundial de acero expresada en miles de toneladas, ha sido la siguiente:

Años	Europa	América	Años	Europa	América
1929	59.069	59.395	1931	39.810	27.800
1930	49.523	42.832	1932	33.174	13.729

Representar con un diagrama estas variaciones.

LECCION 23

PROPIEDADES DE LA FUNCION LINEAL

106. Representación gráfica de la función lineal.—Observando la gráfica de la función

$$y = 2x + 1$$

representada en la fig. 13, surge la sospecha de que dicha representación debe ser una recta.

Para convecernos de ello, tracemos (fig. 22) las ordenadas de los puntos de abscisa entera

$$\ldots\ldots -4\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ldots\ldots$$

y por los extremos de estas ordenadas tracemos las rectas

$$AB\ ,\ CD\ ,\ EF\ ,\ GH\ ,\ IJ\ ,\ KL,$$

paralelas al eje de abscisas, de manera que se formen los triángulos rectángulos

$$ABC\ ,\ CDE\ ,\ EFG\ ,\ GHI\ ,\ IJK\ ,\ KLM$$

Todos estos triángulos tienen iguales los catetos paralelos al eje de abscisas, porque todos ellos miden 1 cm.

También son iguales todos los catetos paralelos al eje de ordenadas, pues, según se deduce de la tabla del párrafo 104, tienen una longitud de 2 cm.

Por consiguiente

$$\hat{A} = \hat{C}$$

lo cual nos dice que el segmento CE es prolongación de AC.

Del mismo modo, por ser

$$\hat{C} = \hat{E}$$

el segmento EG es prolongación de CE.

Y siguiendo este razonamiento quedará demostrado que los puntos A , C , E , G , I , K , M están en una línea recta.

Si representamos cualquier otra función cuyo valor sea, como la anterior, una expresión de primer grado en la variable *x*, también se obtiene una línea recta.

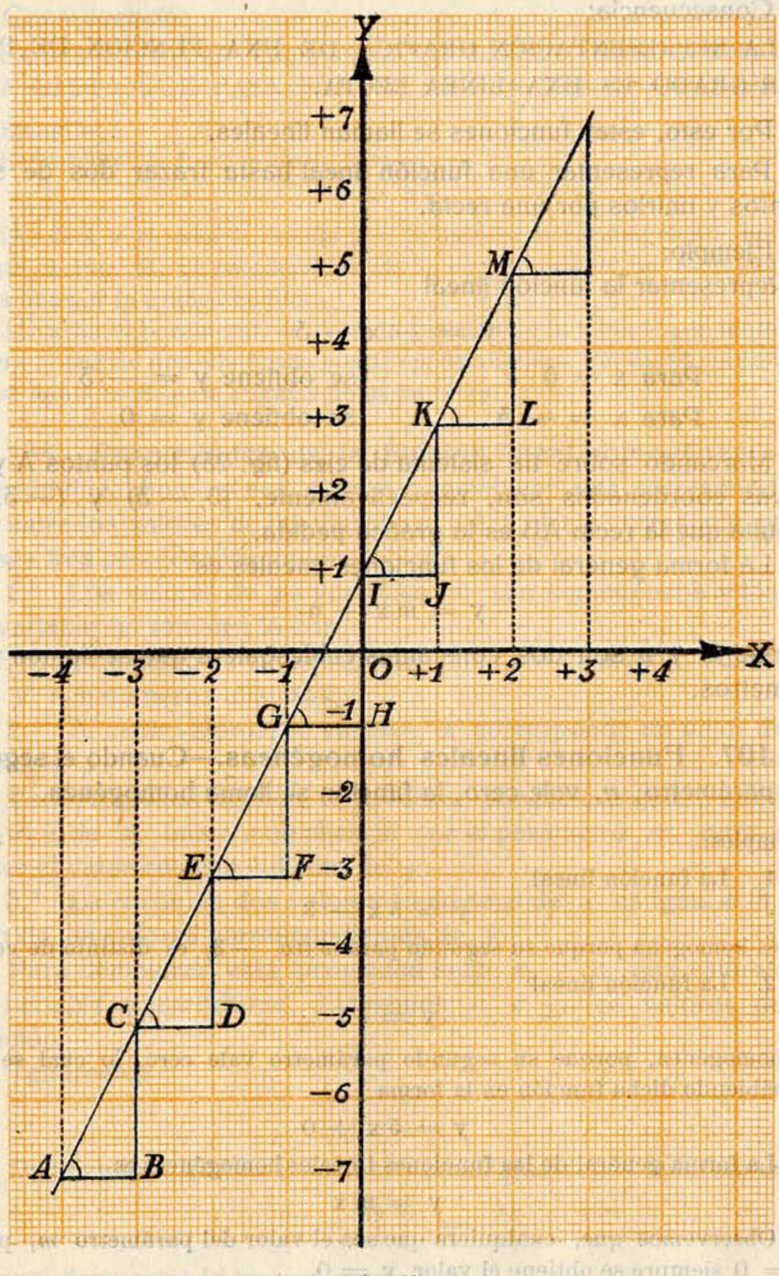


fig. 22

Consecuencia:

LA REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUNCION DE PRIMER GRADO ES UNA LINEA RECTA.

Por esto, estas funciones se llaman lineales.

Para representar una función lineal basta trazar dos de sus puntos y unirlos por una recta.

Ejemplo:

Representar la función lineal

$$y = -x - 3$$

Para $x = 0$ se obtiene $y = -3$

Para $x = -3$ se obtiene $y = 0$

Marcando sobre un sistema de ejes (fig. 23) los puntos A y B cuyas coordenadas son, respectivamente, $(0, -3)$ y $(-3, 0)$ resulta que la recta AB es la gráfica pedida.

La forma general de las funciones lineales es

$$y = mx + n$$

donde *m* y *n* son dos constantes cualesquiera que se llaman parámetros.

107. Funciones lineales homogéneas.—Cuando el segundo parámetro, *n*, vale cero, la función se llama homogénea.

Ejemplos:

1. La función lineal

$$y = 5x - 3$$

no es homogéna porque su segundo parámetro, -3, es distinto de cero.

2. La función lineal

$$y = 5x$$

es homogénea, porque su segundo parámetro vale cero, lo cual se ve escribiendo dicha función en la forma

$$y = 5x + 0$$

La forma general de las funciones lineales homogéneas es

$$y = mx$$

Observemos que, cualquiera que sea el valor del parámetro *m*, para $x = 0$ siempre se obtiene el valor $y = 0$.

Consecuencia:

LA GRAFICA DE UNA FUNCION LINEAL HOMOGENEA ES UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN DE COORDENADAS.

Ejemplo:

Representar la función lineal homogénea

$$y = 3x$$

Dando a x el valor 1, resulta $y = 3$; bastará, por consiguiente, unir el punto A (fig. 24) de coordenadas (1, 3) con el origen de coordenadas para obtener la gráfica pedida.

Al variar el parámetro m varía la posición de la recta y, por tanto, se altera el ángulo que ella forma con el eje de abscisas. Por eso el parámetro m se llama coeficiente angular de dicha recta.

108. Propiedades de la función lineal homogénea.—La función lineal homogénea $y = mx$ establece una correspondencia entre los valores de las variables x é y. Esta correspondencia posee tres propiedades muy notables.

1.ª Los valores de las variables x son homogéneos y los de la variable y también lo son.

Esta propiedad es evidente, pues tanto los valores x como los de y son números abstractos.

2.ª A cada valor de la variable x corresponde un valor de la variable y.

Esta propiedad también es evidente, porque cualquiera que sea el valor de x, basta multiplicarlo por el parámetro m, para obtener el valor correspondiente de y.

3.ª La razón de dos valores cualquiera de x es igual a la razón de los valores correspondientes de y.

Para demostrar esta propiedad sean x_1 y x_2 dos valores de la variable independiente. Llamemos y_1 é y_2 los valores de la función.

Tendremos

$$y_1 = m x_1$$
$$y_2 = m x_2$$

Dividiendo miembro a miembro estas igualdades tendremos

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{m x_1}{m x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

lo cual demuestra la tercera propiedad.

Observemos que estas tres propiedades de la función lineal homogénea son las mismas de la proporcionalidad directa estudiadas en el párrafo 74.

Podemos decir que:

LAS DOS VARIABLES LIGADAS POR LA RELACION $y = m\,x$, SON PROPORCIONALES.

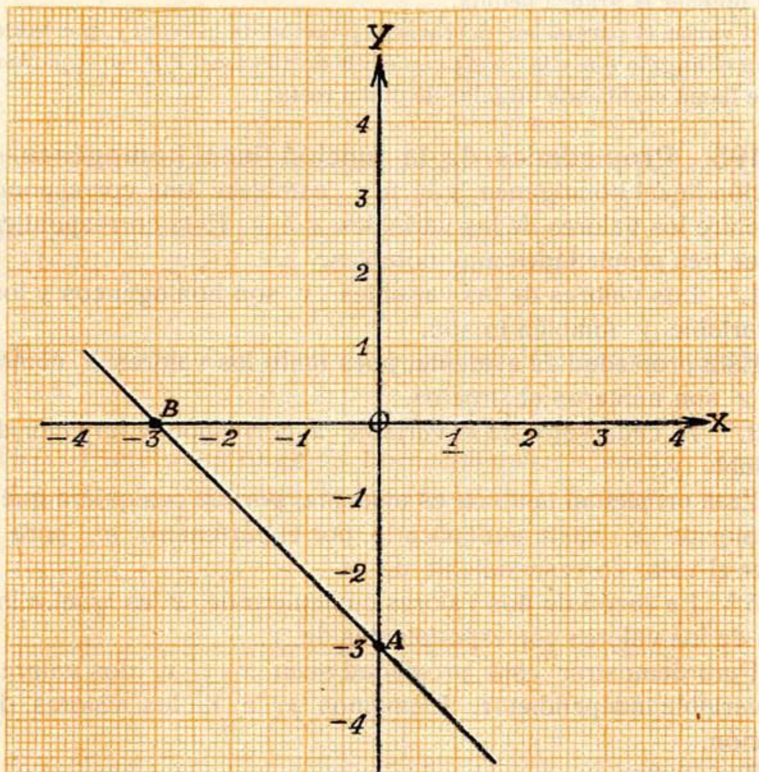


fig. 25

Recíprocamente, si las variables x é y son proporcionales podremos formar con los valores de la primera

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \dots\dots$$

y los correspondientes de la segunda

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad \dots\dots$$

las igualdades siguientes

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} \quad \dots\dots$$

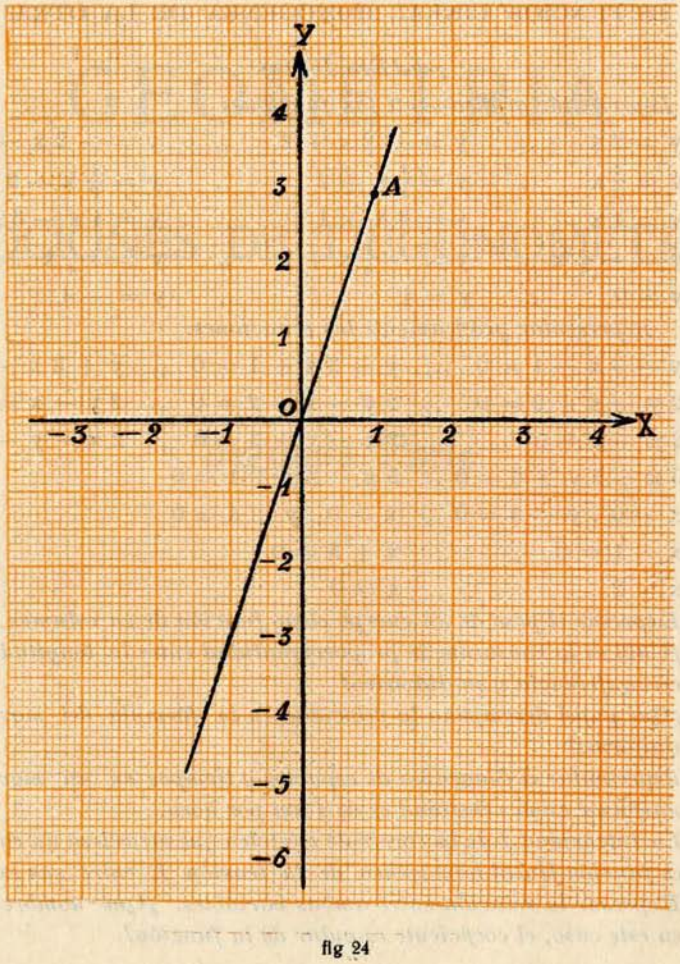


fig 24

Llamando m a la constante de proporcionalidad, o sea, el valor común de estas razones tendremos

$$y_1 = m\,x_1 \quad ,, \quad y_2 = m\,x_2 \quad ,, \quad y_3 = m\,x_3 \quad ,, \quad y_4 = m\,x_4$$

y en general

$$y = m\,x$$

Por consiguiente, si dos variables x é y son proporcionales sus valores están ligados por una relación de la forma

$$y = m\,x$$

Dicho de otro modo:

SI DOS VARIABLES SON PROPORCIONALES, CUALQUIERA DE ELLAS ES FUNCION LINEAL HOMOGENEA DE LA OTRA.

EJERCICIOS

Representar gráficamente las funciones

1. $y = 2x \quad ,, \quad y = -2x + 2 \quad ,, \quad y = -2x - 2$

2. $y = \frac{1}{2}x \quad ,, \quad y = \frac{1}{2}x + 2 \quad ,, \quad y = \frac{1}{2}x - 2$

3. $y = 4x \quad ,, \quad y = 4x + 1 \quad ,, \quad y = 4x - 6$

4. $y = -\frac{1}{4}x \quad ,, \quad y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad ,, \quad y = -\frac{1}{4}x - 6$

5. $y = 0 \quad ,, \quad y = 4 \quad ,, \quad y = -4$

Representar gráficamente las ecuaciones.

6. $y - 3x - 1 = 0 \quad ,, \quad y - 3x + 1 = 0 \quad ,, \quad y + 3x - 1 = 0$

7. $2y - x + 2 = 0 \quad ,, \quad 2y - x - 2 = 0 \quad ,, \quad 2y - x = 0$

8. $2x - y = 0 \quad ,, \quad 2x - y + 3 = 0 \quad ,, \quad 2x - y - 3 = 0$

9. $5x - 3y + 6 = 0 \quad ,, \quad 5x - 3y + 1 = 0$

10. $x - 0 \,.\, y - 3 = 0 \quad ,, \quad x - 0 \,.\, y + 4 = 0$

11. $x - 1 = 0 \quad ,, \quad x + 3 = 0$

12. $x = 2 \quad ,, \quad x = 0$

13. *Expresar el peso de un cuerpo como función de su volumen.*

14. *¿Cual es la constante de proporcionalidad entre la longitud de una circunferencia y su diámetro?*

15. *¿Qué papel desempeña la velocidad en la fórmula del movimiento uniforme?*

16. *Representar el diagrama de espacios y tiempos en un movimiento uniforme cuya velocidad es de 4 km por hora.*

17. *La intensidad I de la corriente eléctrica que atraviesa un conductor es función lineal homogénea de la tensión E entre sus extremos. Expresar la relación entre ambas variables. ¿Qué nombre recibe, en este caso, el coeficiente angular de la función?*

GEOMETRIA

Y

NOCIONES DE TRIGONOMETRIA

Segunda Parte

LECCION 24

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

109. El primer teorema de Tales *.—Si tenemos dos rectas concurrentes *r* y *r'* (fig. 25), las cortamos por un haz de rectas paralelas, *a*, *b*, *c*... *k*... y llamamos correspondientes a cada dos puntos

A y A' , B y B' , C y C' , ... , K y K' , ...

que están sobre una recta del haz, quedará establecida, también, una correspondencia entre los segmentos de las rectas *r* y *r'*. Por ejemplo, al segmento A B corresponde el A' B' ; al B C corresponde el B' C' ; al A C corresponde el A' C' ; al B K corresponde el B' K' , etcétera.

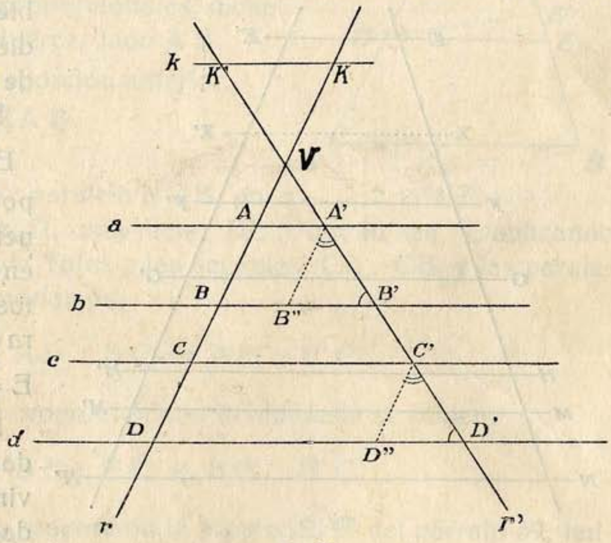


fig. 25

Esta correspondencia tiene dos propiedades notables:

1.ª Es uniforme, pues, cualquiera que sea el segmento de la recta *r*, siempre le corresponde uno solo de la recta *r'* y recíprocamente.

2.ª Si dos segmentos A B y C D son iguales, también son iguales sus segmentos correspondientes A' B' y C' D'.

En efecto: trazando por A' y C' las paralelas a la recta *r* se forman dos triángulos A' B' B'' y C' D' D''.

* Tales de Mileto, filósofo griego (639-548 antes de J. C.)

Estos dos triángulos son iguales por tener

$\hat{B'} = \hat{D'}$ .... por correspondientes entre las paralelas *b*, *d* y la secante *r'*.

$\hat{A'} = \hat{C'}$ .... por correspondientes entre las paralelas A' B", C' D" y la secante *r'*.

A' B" = C' D" por ser $\left\{ \begin{matrix} A' B'' = A B \\ C' D'' = C D \end{matrix} \right\}$ como segmentos de rectas paralelas interceptados por rectas paralelas y como A B = C D, en virtud de la hipótesis, se deduce la igualdad de los segmentos A' B" y C' D".

De la igualdad de los triángulos A' B' B" y C' D' D" se deduce

$$A' B' = C' D'$$

como queríamos demostrar.

3.ª Si un segmento E F (fig. 26) es suma de G H y M N, también su correspondiente E' F' es suma de G' H' y M' N'.

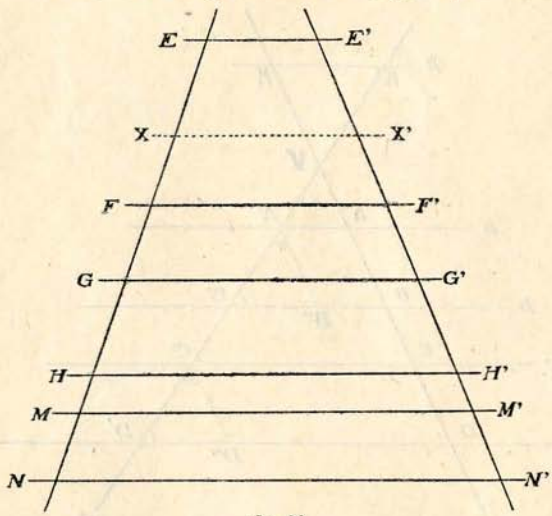


fig. 26

En efecto: por ser

$$E F = G H + M N$$

podremos descomponer el segmento E F en otros dos segmentos, E y F, de manera que

$$E = GH \;,,\; F = M N$$

De estas dos igualdades se deduce, en virtud de la propiedad 2.ª.

$$E' X' = G' H'$$

$$X' F' = M' N'$$

y sumando miembro a miembro, se obtiene

$$E' F' = G' H' + M' N'$$

como se quería demostrar.

Recordando lo dicho en el párrafo 74, vemos que los segmentos situados sobre las rectas *r* y *r'* cuando están relacionados mediante un haz de paralelas, son proporcionales. Esta propiedad constituye el PRIMER TEOREMA DE TALES:

LOS SEGMENTOS QUE DETERMINA UN HAZ DE PARALELAS SOBRE DOS SECANTES SON PROPORCIONALES.

110. Teorema recíproco.—Si en el triángulo A B C (fig. 27) se traza una recta D E, paralela al lado A B, se verifica, en virtud del primer teorema de Tales, la proporción

$$AD : DC = BE : EC$$

Recíprocamente: si suponemos que la recta D E divide a los lados C A y C B en segmentos proporcionales, dicha recta es paralela al tercer lado A B.

Hipótesis: la proporción anterior.

Tesis: $DE \parallel AB$

Demostración:

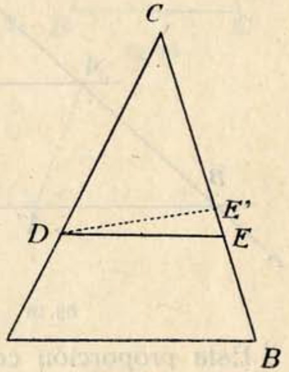


fig. 27

Si DE no fuese paralela a AB, podríamos trazar, por D, una recta, DE', que lo sea, y, aplicando el primer teorema de Tales a las secantes CA, CB y las paralelas AB y DE' tendríamos

$$AD : DC = BE' : E'C$$

y comparando esta proporción con la hipótesis se obtiene

$$BE : EC = BE' : E'C$$

y aplicando a esta proporción la propiedad III del párrafo 39, tendremos

$$(BE + EC) : (BE' + E'C) = BE : BE'$$
$$BC : BC = BE : BE'$$

y como los términos de la primera razón son iguales, también serán iguales BE y BE', lo cual significa que los puntos E y E' coinciden y que la recta DE es paralela a AB.

Consecuencia:

TODA RECTA QUE DIVIDE A DOS LADOS DE UN TRIANGULO EN PARTES PROPORCIONALES ES PARALELA AL TERCER LADO.

111. El segundo teorema de Tales.—Si trazamos por A (fig. 28) la paralela, A A", a la recta *r'* y aplicamos el primer teorema de Tales al triángulo V B B' cortado por la recta A A" se obtiene la proporción

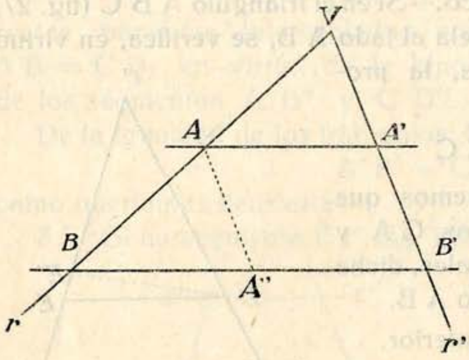


fig. 28

$$B'A'' : B'B = VA : VB$$

y si en vez de B' A" sustituimos A A', ya que ambos son iguales como segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas, resultará

$$AA' : BB' = VA : VB$$

Esta proporción constituye el segundo teorema de Tales, que puede enunciarse así:

LOS SEGMENTOS DE PARALELAS INTERCEPTADOS POR LOS LADOS DE UN ANGULO SON PROPORCIONALES A LAS DISTANCIAS ENTRE DICHAS PARALELAS Y EL VERTICE CONTADAS SOBRE UN LADO DE DICHO ANGULO.

EJERCICIOS

1. *Completar las siguientes proporciones relativas a la fig. 25:*

   $BC : AC =$,, $\qquad VA : VC =$

   $AK : CD =$,, $\qquad BC : AC =$

   $AB : A'B' = BD :$,, $\qquad KV : VA =$

2. *Si A B C D (fig. 29) es un paralelogramo y E G* || *A C demostrar que E F = F G.*

3. *Si* A *B C y A D E (fig. 30) son dos triángulos isósceles demostrar que D E* || *B C.*

4. *Demostrar que las diagonales de un trapecio se descomponen mutuamente en cuatro segmentos proporcionales.*

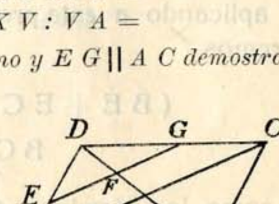


fig. 29

5. *Demostrar que el segmento que une los puntos medios de los lados de un trapecio es paralelo a las bases e igual a la semisuma de éstas.*

6. *Dividir un segmento dado en un cierto número de partes iguales.*

7. *Construir un triángulo conociendo* a, b *y la mediana* m_c.

8. *Construir un triángulo conociendo las alturas* h_a , h_b , *y* m_c .

9. *Construir un triángulo conociendo* c, m_a *y* h_c

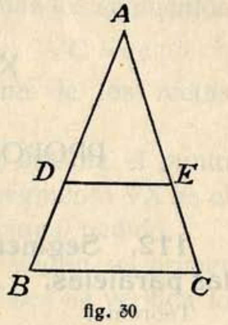


fig. 30

LECCION 25

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

(CONTINUACION)

112. Segmentos proporcionales situados sobre dos rectas paralelas.

Teorema:

UN HAZ DE RECTAS CONCURRENTES DETERMINA, AL CORTAR A DOS RECTAS PARALELAS, SEGMENTOS PROPORCIONALES.

Demostración:

Sean r y r' (fig. 31) las dos rectas paralelas y V el vértice del haz de rectas concurrentes. Aplicando el segundo teorema de Tales al triángulo V A B cortado por la recta r' tendremos

$$AB : A'B' = VB : VB'$$

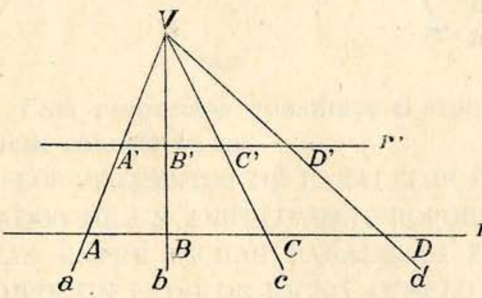


fig. 31

Aplicando el mismo teorema al triángulo VCD, tendremos

$$CD : C'D' = VD : VD'$$

y como, en virtud del primer teorema de Tales se verifica

$$VB : VB' = VD : VD'$$

resulta la proporción

$AB : A'B' = CD : C'D'$ o sea $AB : CD = A'B' : C'D'$

como se quería demostrar.

113. Construcción de cuartos proporcionales.— Se llama cuarto proporcional a tres segmentos dados a, b y c, un nuevo segmento x que forme con ellos la proporción

$$a : b = c : x$$

Para construir el cuarto proporcional puede emplearse la siguiente regla:

Sobre dos rectas concurrentes (fig. 32) se toman los segmentos

$$VA = a \quad ,, \quad VB = b \quad ,, \quad VC = c$$

de manera que los dos primeros estén sobre una de las rectas y el tercero sobre la otra recta.

Trazando por B la paralela a la recta A C se obtiene el punto X, tal que el segmento VX es el cuarto proporcional pedido.

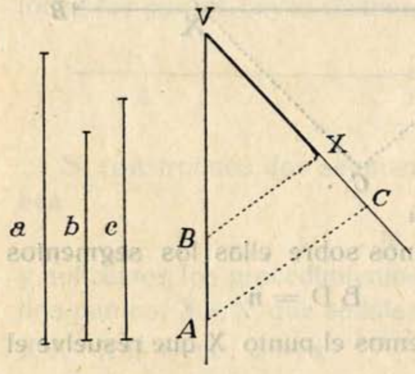


fig 32

En efecto, según el primer teorema de Tales se verifica la proporción

$$V A : V B = V C : V X$$

Observación:

También se obtiene el cuarto proporcional colocando los datos a ambos lados del vértice V (fig. 33) y siguiendo, por lo demás, la regla anterior.

114. Construcción de terceros proporcionales.—Recibe el nombre de tercero proporcional a dos segmentos dados *a* y *b*, un nuevo segmento que forme con aquéllos la proporción

$$a : b = b : x$$

La construcción de un tercero proporcional se hace del mismo modo explicado para obtener los cuartos proporcionales, sin más particularidad que los segmentos *b* y *c* son iguales.

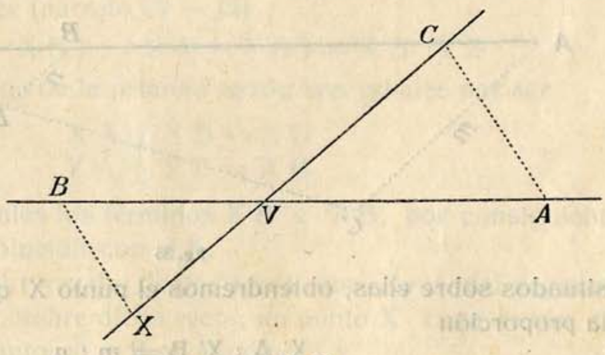


fig. 33

115. Descomposición de un segmento en partes proporcionales a dos segmentos dados.—Sea A B (fig. 34) el segmento que queremos descomponer en dos partes proporcionales a los segmentos *m* y *n*.

Tracemos por los puntos A y B dos semirrectas paralelas diri-

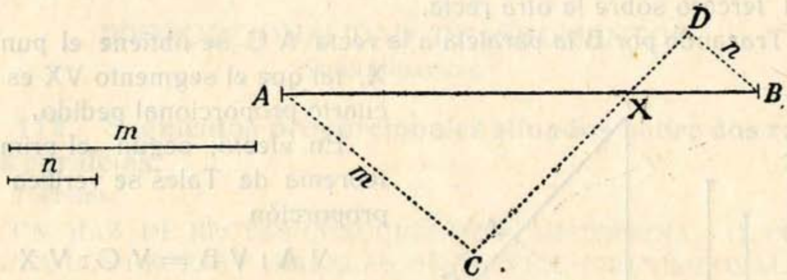


fig. 34

gidas en sentidos opuestos y llevemos sobre ellas los segmentos

$$A\,C = m \quad ,, \quad B\,D = n$$

uniendo los puntos C y D obtendremos el punto X que resuelve el problema

En efecto, aplicando el segundo teorema de Tales se verifica la proporción

$$X\,A : X\,B = m : n$$

Observaciones:

1.ª Si trazamos las semirrectas A C y B D' en el mismo sentido (fig. 35) y unimos los extremos C y D' de los segmentos *m* y *n*

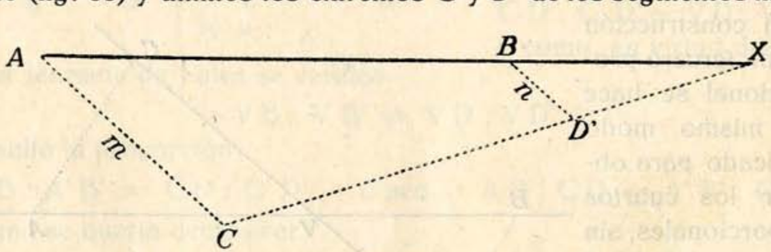


fig. 35

situados sobre ellas, obtendremos el punto X' que también verifica la proporción

$$X'\,A : X'\,B = m : n$$

2.ª En el caso del punto X (fig. 34) la descomposición se llama aditiva porque

$$A\,X + X\,B = A\,B$$

En el caso del punto X' (fig. 35) la descomposición se llama sustractiva porque

$$X'A - X'B = AB$$

116. Puntos que descomponen a un segmento en una razón dada.—Queremos determinar sobre la recta AB (fig. 36) todos los puntos cuyas distancias a A y B están en la razón *x*.

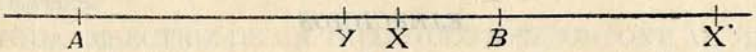


fig. 36

Si construimos dos segmentos cualesquiera *m* y *n* cuya razón sea

$$m : n = x$$

y aplicamos los procedimientos del párrafo anterior encontraremos dos puntos, X y X' que satisfacen la condición exigida, puesto que

$$XA : XB = m : n = x \quad ,, \quad X'A : X'B = m : n = x$$

Dentro del segmento A B no existe otro punto distinto del X cuya razón de distancias a A y B sea *x*, pues si se verificara, también, la igualdad

$$YA : YB = x$$

tendríamos la proporción

$$XA : XB = YA : YB$$

de donde se deduce (párrafo 39 — III)

$$(XA + XB) : (YA + YB) = XB : YB$$

y como los términos de la primera razón son iguales por ser

$$XA + XB = AB$$
$$YA + YB = AB$$

también serán iguales los términos X B e Y B; por consiguiente el punto Y debe coincidir con el X.

Del mismo modo puede demostrarse que fuera del segmento A B solo existe, sobre dicha recta, un punto X' cuya razón de distancias a los puntos A y B es el número *x*.

En resumen:

SI TENEMOS SOBRE UNA RECTA DOS PUNTOS FIJOS A y B, EXISTEN SIEMPRE SOBRE ELLA OTROS DOS PUNTOS X y X' CUYA

RAZON DE DISTANCIAS A AQUELLOS TIENE UN VALOR DADO. UNO DE LOS PUNTOS, X o X', ES INTERIOR AL SEGMENTO A B Y EL OTRO ES EXTERIOR.

Observaciones:

1.º Si el valor de la razón vale cero solo se obtiene el punto A.

2.º Si el valor de la razón vale 1 solo se obtiene el punto medio de A B.

EJERCICIOS

1. *Construir un rectángulo cuya base sea un segmento dado y que sea equivalente a otro rectángulo dado.*
2. *Construir un triángulo isósceles cuya base sea un segmento dado y que sea equivalente a otro triángulo dado.*
3. *Construir dos segmentos conociendo su suma y su razón.*
4. *Construir dos segmentos conociendo su diferencia y su razón.*
5. *Las dos ramas de un compás de reducción (fig. 37) tienen su charnela móvil, de forma que dichas ramas quedan divididas en segmentos cuya razón puede valer 2 : 3 , 1 : 2 , 1 : 3 etc. Determinar en cada caso la razón de las distancias entre las puntas del compás.*

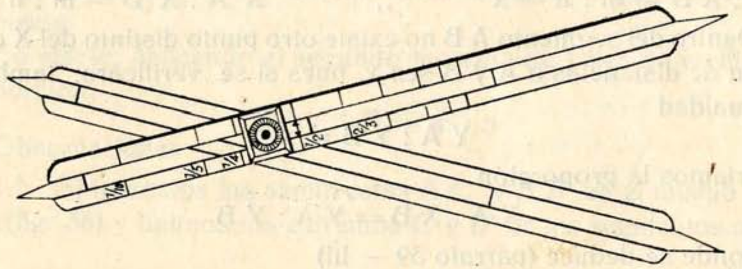


fig. 37

6. *Prolongar o acortar un segmento dado de manera que la razón entre el nuevo segmento y el primitivo tenga un valor dado.*
7. *Trazar por un punto A una recta cuya razón de distancias a dos puntos B y C tenga un valor dado.*
8. *Construir dos segmentos que sean inversamente proporcionales a dos segmentos dados.*
9. *Descomponer un segmento en partes inversamente proporcionales a varios segmentos dados.*

LECCION 26

PROPIEDADES DEL TRIANGULO

117. El teorema de la bisectriz.

Teorema:

TODA BISECTRIZ DE UN TRIANGULO DESCOMPONE AL LADO OPUESTO EN DOS SEGMENTOS PROPORCIONALES A LOS LADOS DE SU ANGULO.

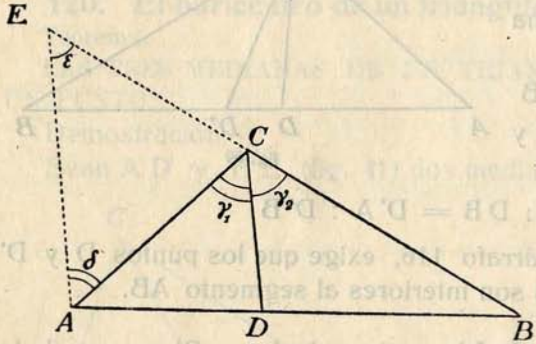


fig. 38

Demostración:

Sea A B C (fig. 38) el triángulo y C D una bisectriz. Trazando la recta A E paralela a esta bisectriz, y aplicando el primer teorema de Tales a las rectas B E y B A cortadas por las paralelas C D y A E tendremos la proporción

$$DA : DB = CE : CB$$

Observemos además, que

$\hat{\delta} = \hat{\gamma}_1$ por alterno-internos entre paralelas.

$\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma}_2$ por correspondientes entre paralelas.

$\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$ por ser C D bisectriz del ángulo γ.

De estas igualdades se deduce

$$\hat{\delta} = \hat{\varepsilon}$$

lo cual significa que el triángulo A E C es isósceles y, por consiguiente,

$$CE = CA$$

Sustituyendo este valor en la proporción anterior tendremos

$$DA : DB = CA : CB$$

cómo se quería demostrar.

118. Teorema recíproco.—Si en el triángulo ABC (fig. 39) se verifica la proporción

$$DA : DB = CA : CB$$

la recta CD es bisectriz del ángulo γ.

En efecto: supongamos que no lo fuese y sea CD' la bisectriz de dicho ángulo.

En virtud del teorema directo tendremos

$D'A : D'B = CA : CB$

De esta proposición y la hipótesis se deduce

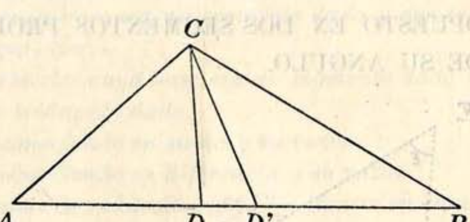


fig. 39

$$DA : DB = D'A : D'B$$

lo cual, en virtud del párrafo 116, exige que los puntos D y D' coincidan, ya que ambos son interiores al segmento AB.

119. Aplicación a la bisectriz exterior.—Si en vez de la bisectriz interior del ángulo γ consideramos la bisectriz exterior CD' (fig. 40), también se verifica la proporcionalidad entre los segmentos D'A y D'B y los lados del ángulo γ.

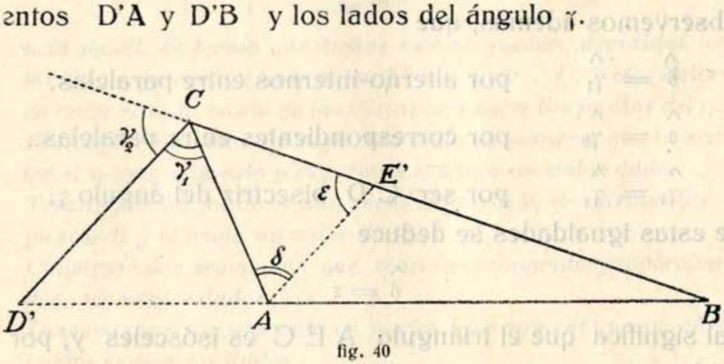


fig. 40

En efecto: trazando la recta AE' paralela a la bisectriz exterior CD' y repitiendo literalmente el razonamiento expuesto en el párrafo 114, se llega a la proporción

$$D'A : D'B = CA : CB$$

y queda demostrado el siguiente

Teorema:

LA BISECTRIZ EXTERIOR DE UN ANGULO DE UN TRIANGULO DESCOMPONE AL LADO OPUESTO EN DOS SEGMENTOS PROPORCIONALES A LOS LADOS DE DICHO ANGULO.

Observación:

El recíproco de este teorema también es cierto y se demuestra del mismo modo expresado para el caso de la bisectriz interior.

120. El baricentro de un triángulo.

Teorema:

LAS TRES MEDIANAS DE UN TRIANGULO CONCURREN EN UN PUNTO.

Demostración:

Sean A D y B E (fig. 41) dos medianas del triángulo A B C.

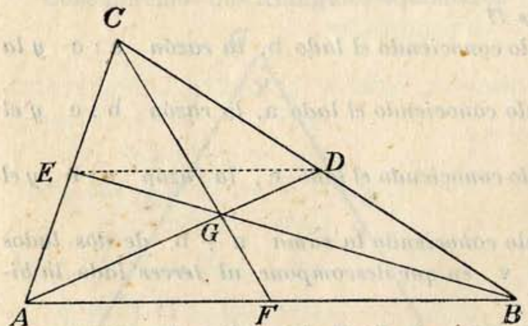


fig. 41

Por ser E y D los puntos medios de los lados A C y B C, respectivamente, tendremos

$$EC : EA = DC : DB$$

y, por el teorema del párrafo 110, resulta que la recta E D es paralela al lado A B.

En virtud del segundo teorema de Tales podemos escribir la proporción

$$AB : ED = AC : EC$$

Aplicando el mismo teorema a las rectas concurrentes A D y B E cortadas por las paralelas A B y E D tendremos

$$AB : ED = GA : GD$$

en consecuencia, $GA : GD = AC : EC$

y como el segundo miembro vale 2, tendremos en definitiva

$$GA : GD = 2$$

Esta igualdad nos dice que la mediana B E corta a la mediana A D en un punto G, interior a aquélla, cuya razón de distancias a los extremos A y D vale 2.

Si repetimos el mismo razonamiento con las medianas A D y C F, veremos que su intersección descompone al segmento A D en dos partes cuya razón es 2.

Por consiguiente (párrafo 116) la mediana C F pasa por el punto G.

Este punto, común a las tres medianas, se llama baricentro del triángulo.

Observación:

Conviene notar que el baricentro dista del vértice C doble que del pie F de la mediana correspondiente a dicho vértice.

EJERCICIOS

1. *Demostrar que el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya razón de distancias a otros dos puntos fijos tiene un valor constante, es una circunferencia.*
2. *¿En qué se convierte la circunferencia del ejercicio anterior cuando el valor de la razón es 1?*
3. *Construir un triángulo conociendo el lado* b, *la razón* a : c *y la altura* h_b.
4. *Construir un triángulo conociendo el lado* a, *la razón* b : c *y el ángulo* γ.
5. *Construir un triángulo conociendo el lado* c , *la razón* a : b *y el ángulo* γ.
6. *Construir un triángulo conociendo la suma* a + b *de dos lados y los segmentos* u *y* v *en que descompone al tercer lado la bisectriz.*
7. *Dados tres puntos alineados A, B, C determinar un cuarto punto X desde el cual se vean los segmentos A B y B C según ángulos iguales.*
8. *Dados cuatro puntos alineados A, B, C, D, determinar un quinto punto X desde el cual se vean los segmentos AB, BC y CD según ángulos iguales.*
9. *Construir un triángulo conociendo las medianas* m_b, m_c *y el lado* a.
10. *Los lados de un triángulo miden 65, 60 y 25 metros. Calcular los segmentos en que quedan descompuestos estos lados por las tres bisectrices interiores.*

LECCION 27

LA SEMEJANZA DE TRIANGULOS

121. Definiciones.—Se dice que dos triángulos son semejantes cuando puede establecerse entre ellos una correspondencia de vértice a vértice, de manera que los ángulos correspondientes sean iguales y los lados correspondientes proporcionales.

Los elementos correspondientes se llaman también homólogos.

La razón constante de cada par de lados homólogos se llama razón de semejanza y nosotros la representaremos por la letra griega ρ.

Para expresar que los triángulos A B C y A' B' C' son semejantes escribiremos

$$\triangle\ A\,B\,C \sim A'\,B'\,C'$$

Ejemplo:

Consideremos dos triángulos equiláteros A B C y A' B' C' (fig. 42).

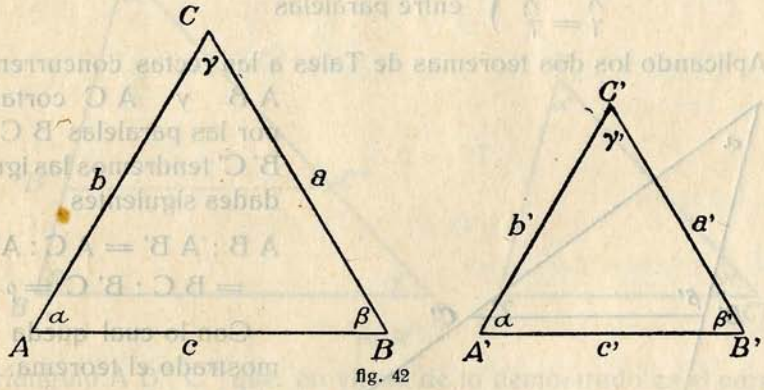


fig. 42

Si hacemos que se correspondan los vértices A y A', B y B', C y C' resultará:

1.º Los ángulos homólogos son iguales:

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}' = 60^\circ$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}' = 60^\circ$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}' = 60^\circ$$

2.º Los lados homólogos son proporcionales:

$$a : a' = b : b' = c : c'$$

puesto que

$$a = b = c \quad ; \quad a' = b' = c'$$

Estas dos observaciones nos permiten afirmar que dos triángulos equiláteros son siempre semejantes.

122. Teorema fundamental de la semejanza.

Teorema:

TODA PARALELA A UN LADO DE UN TRIANGULO DETERMINA OTRO TRIANGULO SEMEJANTE AL PRIMERO.

Demostración:

Sea la recta B' C' (fig. 43) paralela al lado B C. Estableciendo una correspondencia entre los triángulos ABC y A B' C' de manera que sean homólogos los vértices A y A , B y B', C y C', resulta que los ángulos homólogos son iguales

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\beta} = \hat{\beta'} \\ \hat{\gamma} = \hat{\gamma'}\end{array}\right\} \text{por correspondientes entre paralelas}$$

Aplicando los dos teoremas de Tales a las rectas concurrentes

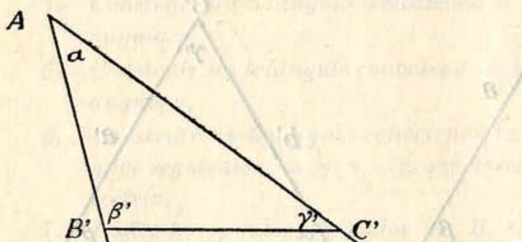


fig. 43

AB y AC cortadas por las paralelas BC y B' C' tendremos las igualdades siguientes

$$AB : AB' = AC : AC'$$
$$= BC : B'C' = \rho$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

Observación:

De la sucesión de razones iguales, que acabamos de escribir, se deduce (párrafo 38).

$$(AB + AC + BC) : (AB' + AC' + B'C') = \rho$$

Lo cual nos dice que los perímetros de dos triángulos semejantes están en la razón de semejanza.

123. Primer caso de semejanza de triángulos.—Según hemos dicho, la semejanza de dos triángulos exige la igualdad de sus tres pares de ángulos homólogos y la proporcionalidad de sus tres pares de lados homólogos, o sea, en total, cinco condiciones. Pues bien, si se cumplen dos de estas condiciones también quedan satisfechas las otras tres. Así aparecen los diversos casos elementales de semejanza de triángulos que vamos a estudiar.

1.º DOS TRIANGULOS SON SEMEJANTES CUANDO DOS ANGULOS DE UNO DE ELLOS SON RESPECTIVAMENTE IGUALES A DOS ANGULOS DEL OTRO.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 44):

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}' \quad ,, \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}'$$

Llevando sobre el lado A B un segmento A B" que sea igual a A' B' y trazando por B" la paralela al lado B C, habremos formado

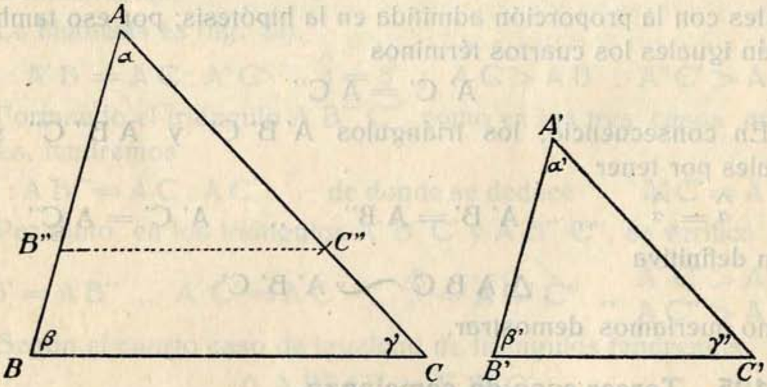


fig. 44

el triángulo A B" C" que, en virtud de lo demostrado en el párrafo 122, es semejante al A B C. Por otra parte, los triángulos A' B' C' y A B" C" son iguales, porque tienen

$$A'B' = AB'' \quad ,, \quad \hat{\alpha}' = \hat{\alpha} \quad ,, \quad \hat{\beta}' = \widehat{AB''C''}$$

Por consiguiente

$$\triangle ABC \sim A'B'C'$$

como se quería demostrar.

124. Segundo caso de semejanza.

2.º DOS TRIANGULOS SON SEMEJANTES CUANDO TIENEN UN ANGULO DE UNO DE ELLOS IGUAL A UN ANGULO DEL OTRO Y PROPORCIONALES LOS LADOS QUE FORMAN DICHOS ANGULOS.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 44).

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}' \quad ,, \quad A\,B : A'\,B' = A\,C : A'\,C'$$

Llevando sobre el lado B A un segmento A B'' que sea igual a A' B' y trazando por B'' la paralela al lado B C, habremos formado el triángulo A B'' C'' que es semejante a A B C, según lo dicho en el párrafo 122.

De esta semejanza se deduce la proporción

$$A\,B : A\,B'' = A\,C : A\,C''$$

que tiene tres términos A B, A B'' (igual a A' B') y A C coincidentes con la proporción admitida en la hipótesis; por eso también serán iguales los cuartos términos

$$A'\,C' = A\,C''$$

En consecuencia, los triángulos A' B' C' y A B'' C'' son iguales por tener

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha} \quad ,, \quad A'\,B' = A\,B'' \quad ,, \quad A'\,C' = A\,C''$$

y en definitiva

$$\triangle\, A\,B\,C \sim A'\,B'\,C'$$

como queríamos demostrar.

125. Tercer caso de semejanza.

3.º LOS TRIANGULOS QUE TIENEN SUS TRES PARES DE LADOS PROPORCIONALES SON SEMEJANTES.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 44).

$$A\,B : A'B' = A\,C : A'\,C' \quad ; \quad A\,B : A'\,B' = B\,C : B'\,C'$$

Formando el triángulo A B'' C'' del mismo modo que en los dos casos anteriores se verificará como entonces

$$\triangle\, A\,B\,C \sim A\,B''\,C''$$

De esta semejanza se deducen las proporciones

$$AB : AB'' = AC : AC'' \quad ; \quad AB : AB'' = BC : B''C''$$

y comparando estas proporciones con las que forman la hipótesis se obtiene

$$A'C' = AC'' \quad ,, \quad B'C' = B''C''$$

y, como hemos tomado $A'B' = AB''$, resulta que los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son iguales; por consiguiente,

$$\triangle ABC \sim A'B'C'$$

como queríamos demostrar.

126. Cuarto caso de semejanza.

4.º DOS TRIANGULOS SON SEMEJANTES CUANDO DOS LADOS DE UNO SON PROPORCIONALES A DOS LADOS DEL OTRO Y LOS DOS ANGULOS OPUESTOS A LOS DOS LADOS MAYORES SON IGUALES.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 44).

$$AB : A'B' = AC : A'C' \;;\; \hat{\beta} = \hat{\beta}' \;;\; AC > AB \;;\; A'C' > A'B'$$

Formando el triángulo $AB''C''$, como en los tres casos anteriores, tendremos

$AB : AB'' = AC : AC''$ de donde se deduce $A'C' = AC''$

Por tanto, en los triángulos $A'B'C'$ y $AB''C''$, se verifica

$$A'B' = AB'' \;,,\; A'C' = AC'' \;,,\; \hat{\beta}' = \widehat{AB''C''} \;,,\; \begin{matrix} A'C' > A'B' \\ AC'' > AB'' \end{matrix}$$

Según el cuarto caso de igualdad de triángulos tendremos

$$\triangle AB''C'' \cong A'B'C'$$

por consiguiente

$$\triangle ABC \sim A'B'C'$$

como se quería demostrar.

EJERCICIOS

1. *Los lados de dos triángulos ABC y DEF tienen las longitudes siguientes:*

$a = 15\ cm$ $\quad d = 10\ cm$
$b = 12\ cm$ $\quad e = 6\ cm$
$c = 9\ cm$ $\quad f = 8\ cm$

Determinar si dichos triángulos son semejantes y en caso afirmativo señalar pares de elementos homólogos.

2. *Un triángulo $A\ B\ C$ tiene los siguientes elementos:*

$$\begin{array}{ll} a = 58\ m & \alpha = 46^\circ \\ b = 28\ m & \beta = 20^\circ \\ c = 74\ m & \gamma = 114^\circ \end{array}$$

Calcular los elementos de un triángulo semejante cuya razón de semejanza sea $1 : 100$.

3. *Los lados de un triángulo miden $a = 27$ cm ; $b = 33$ cm ; $c = 12$ cm. Construir un triángulo semejante al anterior y cuyo perímetro sea 16 cm.*
4. *Construir un triángulo semejante a otro dado conociendo una altura.*
5. *Construir un triángulo semejante a otro dado conociendo una bisectriz.*
6. *Construir un triángulo semejante a otro dado conociendo una mediana.*
7. *Construir un triángulo equilátero conociendo su altura.*
8. *Construir un triángulo conociendo sus tres alturas.*
9. *Determinar la razón entre las medianas homólogas de dos triángulos semejantes.*
10. *Determinar la razón entre las bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes.*

LECCION 28

LA SEMEJANZA DE TRIANGULOS

(CONTINUACION)

127. Semejanza de triángulos isósceles.—Los casos elementales de semejanza de triángulos estudiados en la lección anterior, se simplifican cuando los triángulos ofrecen alguna particularidad.

Por ejemplo, si los dos triángulos son isósceles se verifican los siguientes teoremas:

1.º DOS TRIANGULOS ISOSCELES SON SEMEJANTES CUANDO UN ANGULO EN LA BASE DE UNO DE ELLOS ES IGUAL A UN ANGULO EN LA BASE DEL OTRO.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 45)

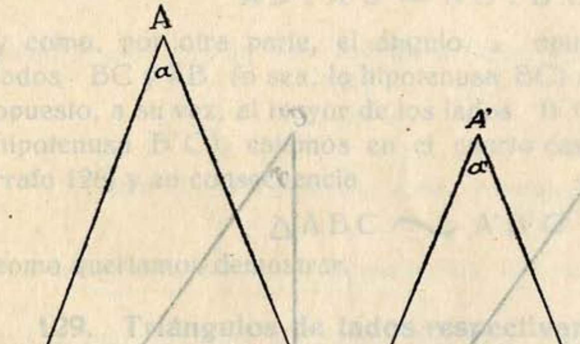


fig. 45

$$\hat{\beta} = \hat{\beta'}$$

Por ser isósceles los triángulos ABC y A′ B′ C′ tendremos

$$\hat{\beta} = \hat{\gamma} \;,, \; \hat{\beta'} = \hat{\gamma'}$$

de donde se deduce

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma'}$$

y en virtud del primer caso de semejanza resulta (párrafo 123).

$$\triangle ABC \sim A'B'C'$$

como queríamos demostrar.

2.º DOS TRIANGULOS ISOSCELES SON SEMEJANTES CUANDO TIENEN IGUALES LOS ANGULOS OPUESTOS A LAS BASES.

La hipótesis es (fig. 45).

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$$

como, por otra parte, se verifica la proporción

$$A\,B : A'\,B' = A\,C : A'\,C' \quad \text{puesto que} \left\{ \begin{array}{l} A\,B = A\,C \\ A'\,B' = A'\,C' \end{array} \right.$$

resulta, en virtud del segundo caso de semejanza (párrafo 124),

$$\triangle\, A\,B\,C \sim A'\,B'\,C'$$

128. Semejanza de triángulos rectángulos.

En el caso de dos triángulos rectángulos se verifican las siguientes propiedades:

1.º DOS TRIANGULOS RECTANGULOS SON SEMEJANTES SI UN ANGULO AGUDO DE UNO DE ELLOS ES IGUAL A UN ANGULO DEL OTRO.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 46)

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}'$$

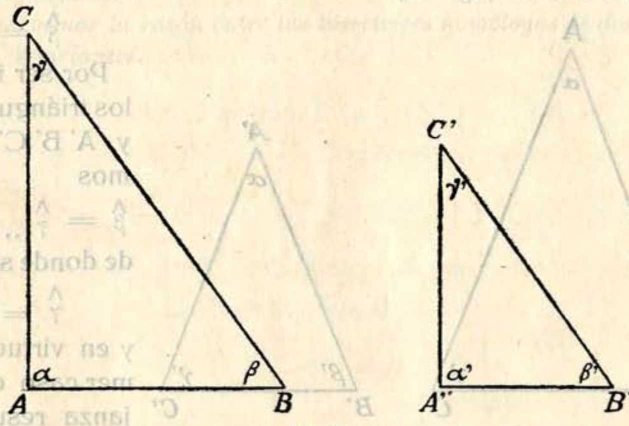


fig. 46

y como, por otra parte, se verifica $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}' = 90^\circ$, estamos en el primer caso de semejanza (párrafo 123) y resulta

$$\triangle\, A\,B\,C \sim A'\,B'\,C'$$

como queríamos demostrar.

2.° DOS TRIANGULOS RECTANGULOS SON SEMEJANTES SI DOS CATETOS DE UNO DE ELLOS SON PROPORCIONALES A LOS CATETOS DEL OTRO.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 46)

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

y teniendo en cuenta que los ángulos formados por dichos catetos son iguales, estamos en las condiciones del segundo caso de semejanza (párrafo 124) y por consiguiente

$$\triangle ABC \sim A'B'C'$$

como queríamos demostrar.

3.° DOS TRIANGULOS RECTANGULOS SON SEMEJANTES SI LA HIPOTENUSA Y UN CATETO DE UNO DE ELLOS SON PROPORCIONALES A LA HIPOTENUSA Y UN CATETO DEL OTRO.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 46)

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

y como, por otra parte, el ángulo α opuesto al mayor de los lados BC y AB (o sea, la hipotenusa BC) es igual al ángulo α' opuesto, a su vez, al mayor de los lados B'C' y A'B' (o sea la hipotenusa B'C'), estamos en el cuarto caso de semejanza (párrafo 126) y en consecuencia

$$\triangle ABC \sim A'B'C'$$

como queríamos demostrar.

129. Triángulos de lados respectivamente paralelos.

Teorema:

DOS TRIANGULOS QUE TIENEN SUS TRES PARES DE LADOS RESPECTIVAMENTE PARALELOS SON SEMEJANTES.

Demostración:

La hipótesis es (fig. 47)

$$AB \parallel A'B' \quad ,, \quad BC \parallel B'C' \quad ,, \quad CA \parallel C'A'$$

Como consecuencia del paralelismo de los lados se obtienen las siguientes conclusiones:

1.ª Los ángulos α y α' son iguales o suplementarios.
2.ª » » β y β' » » » »
3.ª » » γ y γ' » » » »

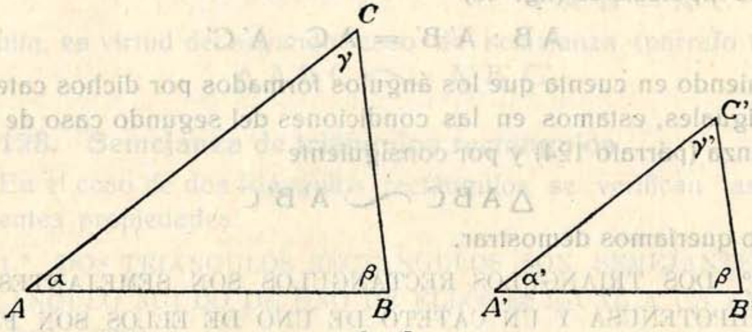


fig. 47

Los tres pares a la vez no pueden ser suplementarios, pues entonces

$$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

lo cual es imposible, pues la suma de estos seis ángulos ha de valer 360°.

Tampoco pueden ser suplementarios dos pares, pues si fuese

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ$$
$$\beta + \beta' = 180^\circ$$
$$\gamma = \gamma'$$

sumando miembro a miembro estas igualdades tendremos

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma = 360^\circ + \gamma'$$

lo cual es imposible, por la misma razón expuesta en el caso anterior.

Ahora es ya evidente que dos pares de ángulos han de ser iguales, pero, entonces, por el primer caso de semejanza de triángulos (párrafo 123) tendremos

$$\triangle ABC \sim A'B'C'$$

como queríamos demostrar.

Consecuencia:

DOS TRIANGULOS QUE TIENEN SUS TRES PARES DE LADOS RESPECTIVAMENTE PERPENDICULARES SON SEMEJANTES.

En efecto, basta aplicar a uno de dichos triángulos un giro de 90° para que sus lados sean paralelos a los del otro.

130. Razón de las alturas de dos triángulos semejantes.

Teorema:

LA RAZON DE DOS ALTURAS HOMOLOGAS DE DOS TRIANGULOS SEMEJANTES ES IGUAL A LA RAZON DE SEMEJANZA.

Demostración:

Sean A B C y A′ B′ C′ (fig. 48) los dos triángulos semejantes.

Al trazar las alturas homólogas C D y C′ D′ se forman los triángulos rectángulos A C D y A′ C′ D′ que son semejantes por tener los ángulos agudos α y α' iguales (párrafo 128-1.°)

De esta semejanza se deducen las igualdades

$$h : h' = b : b' = \rho$$

como se quería demostrar.

Consecuencia:

LA RAZON DE LAS AREAS DE DOS TRIANGULOS SEMEJANSES ES IGUAL AL CUADRADO DE LA RAZON DE SEMEJANZA.

Demostración:

Llamando S y S′ las áreas de los triángulos semejantes A B C y A′ B′ C′ (fig. 48) tendremos

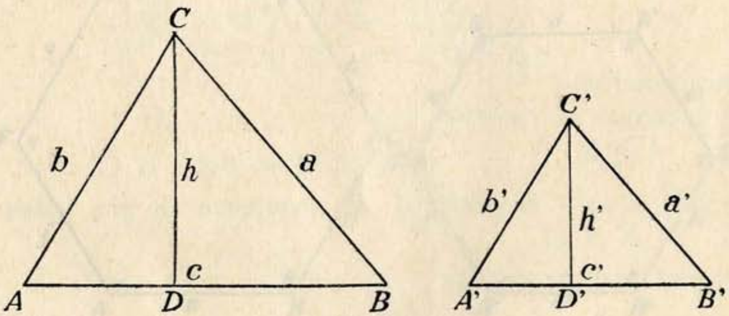


fig. 48

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}\,c\,h}{\frac{1}{2}\,c'\,h'} = \frac{c}{c'} \cdot \frac{h}{h'} = \rho \cdot \rho = \rho^2$$

EJERCICIOS

1. *Construir un triángulo isósceles conociendo una altura y la razón de sus lados desiguales.*
2. *Construir un triángulo rectángulo conociendo la altura y la razón de sus catetos.*

3. *Los catetos de un triángulo rectángulo miden 16 cm y 4 cm. Construir un triángulo semejante a éste y cuya área sea 8 cm².*
4. *Determinar la razón entre los radios de las circunferencias inscritas en dos triángulos semejantes.*
5. *Un lapiz que tiene 15 cm de longitud se coloca, verticalmente, a una distancia del ojo igual a 45 cm, de manera que una de las visuales extremas sea horizontal y la otra pase por la flecha de una torre. Determinar la altura de la torre sabiendo que la distancia del observador a ella es de 85,50 m. (El ojo del observador se supone situado a 1,50 m del suelo).*
6. *El reticulo de un anteojo tiene dos hilos horizontales que interceptan una longitud de 1 m sobre una mira colocada a 100 m del punto de observación. Calcular la distancia entre este punto y la mira cuando el segmento interceptado sea de 75 cm.*
7. *Las áreas de dos triángulos semejantes son 108 cm² y 12 cm². ¿cuánto vale la razón de semejanza?*
8. *Construir un triángulo semejante a otro dado y cuya área sea cuatro veces mayor que la del primero.*

LECCION 29

LA SEMEJANZA DE POLIGONOS

131. Definiciones.—Se dice que dos polígonos son semejantes cuando puede establecerse entre ellos una correspondencia de vértice a vértice, de manera que los ángulos homólogos sean iguales y los lados homólogos proporcionales. El valor constante de la razón de dos lados homólogos se llama razón de semejanza. Para expresar que dos polígonos son semejantes emplearemos el signo $\sim$.

Ejemplo:

Consideremos dos exágonos regulares (fig. 49).

Si hacemos que se correspondan los vértices A y A', B y B', C y C' etc, se obtiene una correspondencia en la cual los ángulos homólogos α y α',

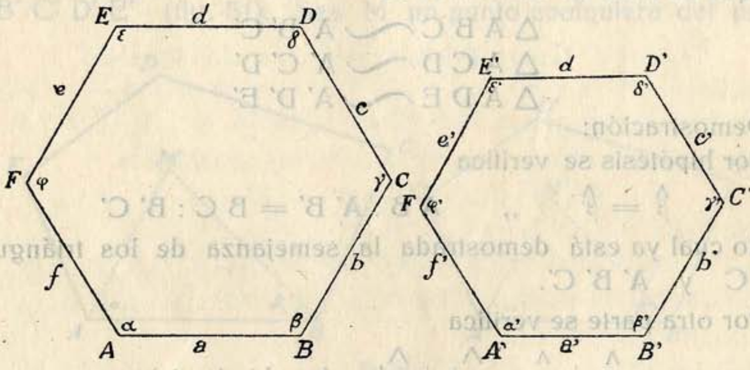


fig. 49

β y β', γ y γ', etc. son iguales, puesto que cada uno de ellos vale 120°.

Los lados homólogos son proporcionales, porque se verifica

$$a : a' = b : b' = c : c' = d : d' = e : e' = f : f'$$

ya que todos los antecedentes son iguales entre sí y todos los consecuentes también.

De este ejemplo se deduce que dos polígonos regulares convexos de igual número de lados son semejantes.

132. Descomposición de dos polígonos semejantes.

Teorema:

DOS POLIGONOS SEMEJANTES SON DESCOMPUESTOS POR LAS DIAGONALES HOMOLOGAS EN TRIANGULOS SEMEJANTES.

Supongamos, por ejemplo, que se verifica (fig. 50)

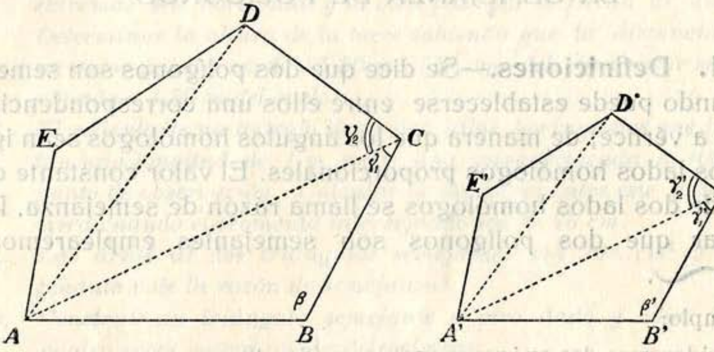


fig. 50

$$A\,B\,C\,D\,E \sim A'\,B'\,C'\,D'\,E'$$

y lo que se trata de demostrar es

$$\triangle\, A\,B\,C \sim A'\,B'\,C'$$
$$\triangle\, A\,C\,D \sim A'\,C'\,D'$$
$$\triangle\, A\,D\,E \sim A'\,D'\,E'$$

Demostración:

Por hipótesis se verifica

$$\hat{\beta} = \hat{\beta'} \quad ,, \quad A\,B : A'\,B' = B\,C : B'\,C'$$

con lo cual ya está demostrada la semejanza de los triángulos $A\,B\,C$ y $A'\,B'\,C'$.

Por otra parte se verifica

$$\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_1' + \hat{\gamma}_2' \quad \text{(por hipótesis)}$$

$$\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_1' \quad \text{(por ser } \triangle\, A\,B\,C \sim A'\,B'\,C'\text{)}$$

y en consecuencia

$$\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_2'$$

Por otra parte

$C\,D : C'\,D' = A\,B : A'\,B'$ (por hipótesis)

$A\,C : A'\,C' = A\,B : A'\,B'$ (por ser $\triangle\, A\,B\,C \sim A'\,B'\,C'$)

y en consecuencia

$$CD : C'E' = AC : A'C'$$

De las dos últimas consecuencias se deduce la semejanza de los triángulos ACD y $A'C'D'$.

Repitiendo el razonamiento demostraremos, finalmente, la semejanza de los triángulos ADE y $A'D'E'$.

Consecuencia:

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

133. Elementos homólogos.—La semejanza de dos polígonos exige, ante todo, una correspondencia de vértice a vértice, de la cual se deducen otras correspondencias; por ejemplo, de lado a lado, de ángulo a ángulo y de diagonal a diagonal. Estas correspondencias pueden ampliarse de manera que un elemento cualquiera de un polígono tenga su homólogo en el otro.

Consideremos dos polígonos semejantes $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ (fig. 51). Sea M un punto cualquiera del primer

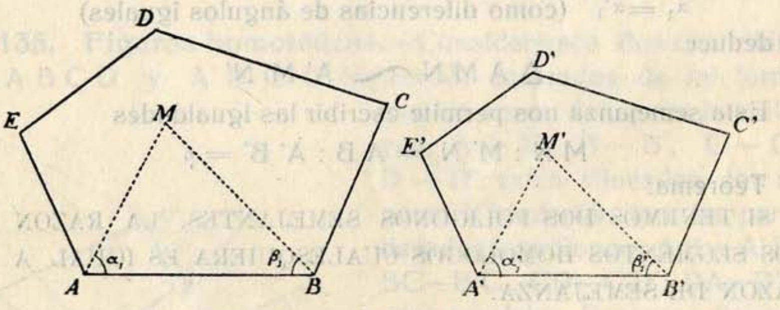


fig. 51

polígono que unido con los vértices A y B origina el triángulo ABM.

Si en el segundo polígono se construyen, sobre $A'B'$, los ángulos α'_1 y β'_1 que sean respectivamente iguales a α_1 y β_1, obtendremos un nuevo punto M'.

Cada dos puntos relacionados entre sí como M y M', diremos que son homólogos.

Consideremos ahora un segmento M N (fig. 52) situado sobre el primer polígono. Si M es homólogo de M' y N homólogo

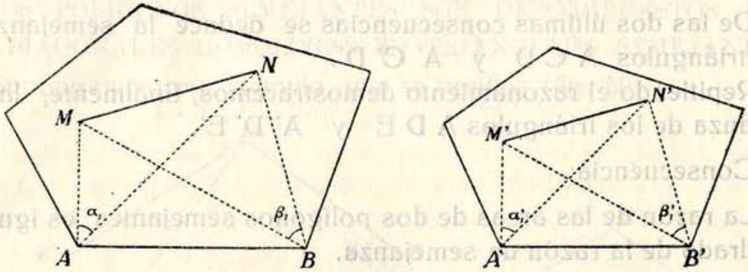


fig. 52

de N', diremos que el segmento M N es homólogo de M' N'.

Escribamos las proporciones

$$A\,M : A'\,M' = A\,B : A'\,B' \quad \text{(por ser } \triangle\, A\,B\,M \sim A'\,B'\,M')$$
$$A\,N : A'\,N' = A\,B : A'\,B' \quad \text{(por ser } \triangle\, A\,B\,N \sim A'\,B'\,N')$$

De estas dos proporciones se deduce

$$A\,M : A'\,M' = A\,N : A'\,N'$$

y teniendo en cuenta que

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}'_1 \quad \text{(como diferencias de ángulos iguales)}$$

se deduce

$$\triangle\, A\,M\,N \sim A'\,M'\,N'$$

Esta semejanza nos permite escribir las igualdades

$$M\,N : M'\,N' = A\,B : A'\,B' = \rho$$

Teorema:

SI TENEMOS DOS POLIGONOS SEMEJANTES, LA RAZON DE DOS SEGMENTOS HOMOLOGOS CUALESQUIERA ES IGUAL A LA RAZON DE SEMEJANZA.

Consecuencias:

1.ª Los triángulos formados por tres puntos cualesquiera del primer polígono y sus homólogos del segundo son semejantes, puesto que tiene sus tres pares de lados proporcionales.

2.ª Los ángulos determinados por dos segmentos del primer polígono y sus homólogos del segundo son iguales, puesto que siempre son ángulos homólogos de dos triángulos semejantes.

3.ª Los polígonos que tienen por vértices puntos cualesquiera del primer polígono y sus homólogos del segundo son semejantes, puesto que tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos homólogos iguales.

4.ª La razón de los perímetros de los polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

134. La semejanza en general.—Las consideraciones precedentes nos permiten dar una definición general de la semejanza de figuras.

Diremos que dos figuras son semejantes cuando puede establecerse entre todos los puntos de la primera y todos los puntos de la segunda una correspondencia uniforme de manera que los ángulos homólogos sean iguales y las líneas homólogas sean proporcionales.

La razón de semejanza de dos figuras semejantes suele llamarse escala.

Observación:

Dos figuras iguales también son semejantes y su razón de semejanza vale la unidad.

135. Figuras homotéticas.—Consideremos dos cuadriláteros A B C D y A' B' C' D' (figura 53) colocados de tal forma que los pares de puntos homólogos, A — A', B — B', C — C', D — D', estén alineados con un punto V y además que los pares de lados homólogos, A B — A' B', BC—B'C', CD—C'D', DA—D'A' sean paralelos. Entonces diremos que los cuadriláteros A B C D y A' B' C' D' son homotéticos. En general,

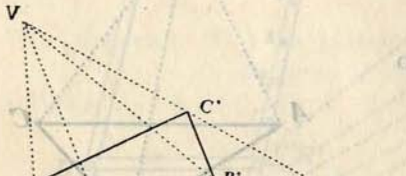


fig. 53

Se dice que dos figuras son homotéticas cuando pueden relacionarse punto a punto y recta a recta de manera que cada dos puntos homólogos estén alineados con un punto llamado centro de homotecia y cada dos rectas homólogas sean paralelas.

Cuando el centro de homotecia está fuera del segmento determinado por un par de puntos homólogos la homotecia se llama directa y si está dentro se llama inversa.

La fig. 53 representa una homotecia directa y la fig. 54 una homotecia inversa.

La propiedad más importante de las figuras homotéticas es la siguiente:

DOS FIGURAS HOMOTETICAS SON SEMEJANTES.

Demostración:

Observemos (fig. 53) que los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D' tienen sus ángulos homólogos iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. También existe proporcionalidad entre los lados homólogos, puesto que en virtud del segundo teorema de Tales se verifican las proporciones

$$AB : A'B' = VB : VB'$$
$$BC : B'C' = VB : VB'$$

de las cuales se deduce

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

Del mismo modo, escribiendo

$$BC : B'C' = VC : VC'$$
$$CD : C'D' = VC : VC'$$

se deduce

$$BC : B'C' = CD : C'D'$$

y por último de las proporciones

$$CD : C'D' = VD : VD'$$
$$DA : D'A' = VD : VD'$$

se deduce

$$CD : C'D' = DA : D'A'$$

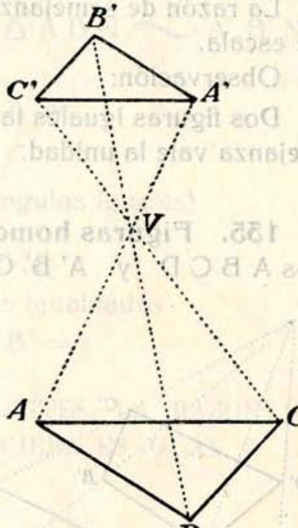


fig. 54

Las tres conclusiones obtenidas pueden refundirse en una sola

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$$

que expresa la proporcionalidad de los lados homólogos, con lo cual queda demostrada la semejanza de dichos cuadriláteros.

La razón de semejanza de dos figuras homotéticas se llama también razón de homotecia y el centro de homotecia se llama centro de semejanza.

Si la homotecia es directa la razón es positiva y si es inversa la razón es negativa.

Dada una figura plana poligonal y un centro de homotecia es muy facil construir otra figura homotética a aquélla. Por eso es conveniente utilizar las propiedades de la homotecia para el trazado de figuras semejantes.

136. El pantógrafo.—El pantógrafo (fig. 55) es un instrumento que se utiliza para ampliar o reducir de tamaño una figura plana.

Se compone de dos rombos articulados A B C D y A B' C' D' cuyo vértice común A es un punto fijo. Si dichos rombos tienen

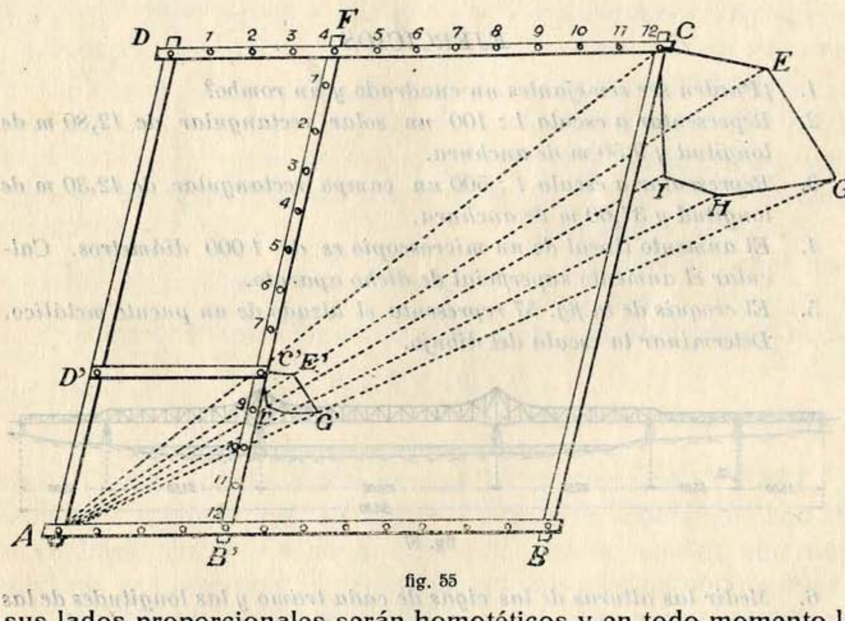


fig. 55

sus lados proporcionales serán homotéticos y en todo momento la recta C C' pasará por el punto A, que es el centro de la homotecia.

Si en el punto C hay un estilete, llamado calcador, y en C' un lápiz, llamado trazador, mientras el calcador recorre el contorno de una figura el trazador irá marcando otra figura semejante a aquélla.

En la práctica se suprimen las barras D' C' y B C; el instrumento completo tiene la forma que indica la fig. 56. El soporte de fundición P da fijeza al punto A, centro de la homotecia, que se llama también polo del pantógrafo. Los orificios abiertos en las barras A B, C D y F B' sirven para modificar la escala de la reproducción.

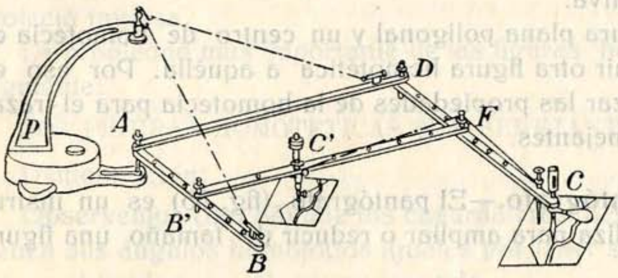


fig. 56

EJERCICIOS

1. *¿Pueden ser semejantes un cuadrado y un rombo?*
2. *Representar a escala 1 : 100 un solar rectangular de 12,80 m de longitud y 9,50 m de anchura.*
3. *Representar a escala 1 : 500 un campo rectangular de 42,30 m de longitud y 37,60 m de anchura.*
4. *El aumento lineal de un microscopio es de 1 000 diámetros. Calcular el aumento superficial de dicho aparato.*
5. *El croquis de la fig. 57 representa el alzado de un puente metálico. Determinar la escala del dibujo.*

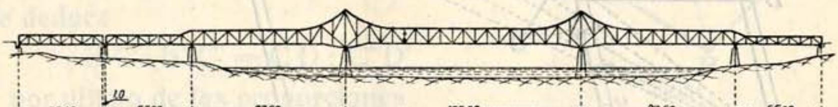


fig. 57

6. *Medir las alturas de las vigas de cada tramo y las longitudes de las distintas barras del puente citado en el ejemplo anterior.*
7. *Demostrar que dos triángulos situados en un plano y que tienen sus lados paralelos dos a dos son homotéticos.*

8. *Trazar una recta que pase por la intersección de otras dos que se cortan fuera de los límites del dibujo.*
9. *Trazar por un punto dado una recta que pase por la intersección de otras dos que se cortan fuera de los límites del dibujo.*
10. *Demostrar que dos circunferencias situadas en un plano son siempre homotéticas.*
11. *Trazar las tangentes comunes a dos circunferencias.*

LECCION 30

RELACIONES METRICAS ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIANGULO

137. El teorema de Euclides.

UN CATETO DE UN TRIANGULO ES MEDIO PROPORCIONAL ENTRE LA HIPOTENUSA Y SU PROYECCION ORTOGONAL SOBRE ELLA.

Demostración:

Sea ABC (fig. 58) el triángulo y h la altura que descompone a la hipotenusa en los segmentos m y n que son proyecciones ortogonales de los catetos.

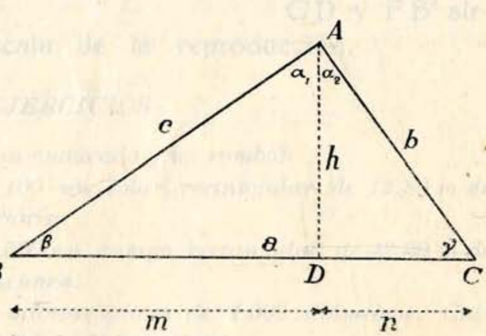


fig. 58

Observemos que

$\triangle ABC \sim DAC$

(por tener común el ángulo γ).

En esta semejanza son lados homólogos a y b, b y n y escribiendo la proporcionalidad entre estos pares de lados tendremos

$$a : b = b : n$$

como queríamos demostrar.

138. El teorema de Pitágoras.—Recordando que la razón de dos magnitudes es igual a la razón de sus medidas obtenidas con una misma unidad, podemos suponer que los términos de la proporción anterior son los números que expresan las medidas de dichos elementos con una unidad previamente establecida.

Entonces podremos escribir la igualdad numérica

$$a\,n = b^2$$

Aplicando el teorema de Euclides al cateto c se deduce

$$a\,m = c^2$$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades y teniendo en cuenta que

$$a\,n + a\,m = a\,(n + m) = a^2$$

resulta

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que constituye una nueva expresión del teorema de Pitágoras.

EL CUADRADO DE LA HIPOTENUSA DE UN TRIANGULO RECTANGULO ES IGUAL A LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS CATETOS.

Consecuencia:

De la anterior igualdad se deduce

$$b^2 = a^2 - c^2$$

lo cual nos dice que el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

Observación:

La expresión correcta del teorema de Pitágoras es ésta: el cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. Sin embargo, por ser más breve, se prefiere el primer enunciado.

139. El teorema de la altura.

EN TODO TRIANGULO RECTANGULO, LA ALTURA RELATIVA A LA HIPOTENUSA ES MEDIO PROPORCIONAL ENTRE LOS SEGMENTOS QUE DETERMINA SOBRE ESTA.

Demostración:

Observemos (fig. 58) que $\triangle$ C D A $\sim$ A D B (por ser $\beta = \alpha_2$, complementarios ambos del ángulo γ). En esta semejanza son pares de lados homólogos

$$m \text{ y } h, \quad h \text{ y } n.$$

Podremos escribir la proporción

$$m : h = h : n$$

que es lo que se quería demostrar.

140. Cuadrado de un lado de un triángulo.—Si en el triángulo A B C (fig. 59) *a* representa un lado opuesto a un ángulo agudo y trazamos la altura *h* relativa al lado *c* habremos formado dos triángulos rectángulos B C D y A C D. Aplicando el teorema de Pitágoras al primero de ellos tendremos

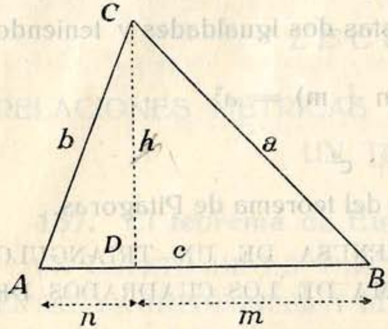


fig. 59

$$a^2 = h^2 + m^2$$

Sustituyendo en vez de h^2 su valor $b^2 - n^2$, obtenido aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo A C D, tendremos

$$a^2 = (b^2 - n^2) + m^2$$

y teniendo en cuenta que $m = c - n$, podremos escribir

$$a^2 = (b^2 - n^2) + (c - n)^2$$

Efectuando operaciones en el segundo miembro resulta

$$a^2 = b^2 - n^2 + c^2 + n^2 - 2\,c\,n$$

y simplificando queda la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,n$$

Esta fórmula nos permite establecer el siguiente

Teorema:

EN TODO TRIANGULO EL CUADRADO DE UN LADO OPUESTO A UN ANGULO AGUDO ES IGUAL A LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS OTROS DOS LADOS MENOS EL DOBLE PRODUCTO DE UNO DE ESTOS LADOS POR LA PROYECCION ORTOGONAL DEL OTRO SOBRE EL.

Observación:

1.ª Si el ángulo opuesto al lado *a* fuese obtuso (fig. 60) podemos reproducir el razonamiento anterior, sin más alteración que sustituir en vez de *m* el valor $c + n$.

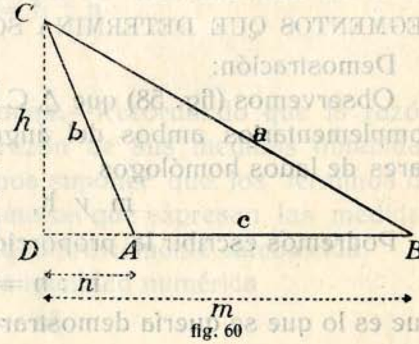


fig. 60

La fórmula final dice

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c\,n$$

la cual nos permite enunciar el siguiente

Teorema:

EN TODO TRIANGULO EL CUADRADO DE UN LADO OPUESTO A UN ANGULO OBTUSO ES IGUAL A LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS OTROS DOS LADOS MAS EL DOBLE PRODUCTO DE UNO DE ESTOS LADOS POR LA PROYECCION DEL OTRO SOBRE EL.

2.ª El teorema de Pitágoras es caso particular de cualquiera de los dos teoremas estudiados en este párrafo, pues si el ángulo opuesto al lado *a* es recto, la proyección ortogonal *n* vale cero y las dos fórmulas anteriores se convierten en la igualdad

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que es el teorema de Pitágoras.

141. Diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo.—Sean O_1 y O_2 dos puntos del plano (fig. 61), 2 p la longitud del segmento rectilíneo que ellos determinan y M su punto medio.

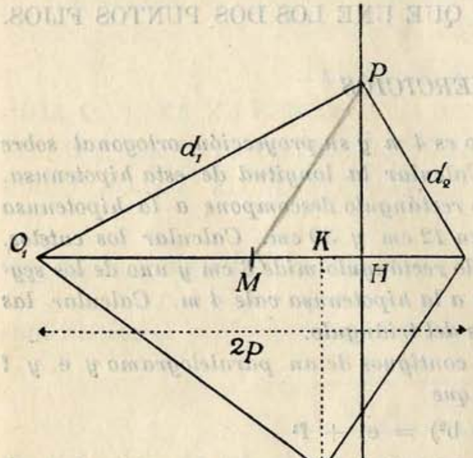


fig. 61

Siendo P un punto cualquiera del plano exterior a la recta O_1 O_2 tendremos dos triángulos O_1 M P y O_2 M P a los cuales podemos aplicar los teoremas del párrafo 140.

Así se obtienen las igualdades

$$d_1^2 = p^2 + MP^2 + 2\,p.\,MH$$

$$d_2^2 = p^2 + MP^2 - 2\,p.\,MH$$

y restando miembro a miembro estas igualdades resulta

$$d_1^2 - d_2^2 = 4\,p\,.\,MH$$

Esta fórmula nos dice que la diferencia entre los cuadrados de las distancias de P a los puntos O_1 y O_2 es igual a cuatro veces el producto del semilado $O_1 O_2$ por la proyección ortogonal de la mediana M P sobre dicho lado. Como todos los puntos de la recta P H dan la misma proyección ortogonal sobre $O_1 O_2$, es evidente que si el punto P se mueve sobre la recta P H variarán las distancias d_1 y d_2 pero la diferencia

$$d^2_1 - d^2_2$$

permanecerá constante, puesto que siempre ha de valer 4 p. M H.

Por el contrario, si tomamos un punto Q exterior a la recta P H tendremos

$$O O_1^2 - O O_2^2 = 4 p . MK$$

que es un valor distinto de los anteriores.

Podemos resumir los razonamientos anteriores del modo siguiente:

EL LUGAR GEOMETRICO DE LOS PUNTOS DE UN PLANO CUYA DIFERENCIA DE CUADRADOS DE DISTANCIAS A DOS PUNTOS FIJOS TIENE UN VALOR CONSTANTE ES UNA RECTA PERPENDICULAR AL SEGMENTO QUE UNE LOS DOS PUNTOS FIJOS.

EJERCICIOS

1. *La longitud de un cateto es 4 m y su proyección ortogonal sobre la hipotenusa vale 2 m. Calcular la longitud de esta hipotenusa.*
2. *La altura de un triángulo rectángulo descompone a la hipotenusa en dos segmentos que miden 12 cm y 30 cm. Calcular los catetos.*
3. *La altura de un triángulo rectángulo mide 6 cm y uno de los segmentos en que descompone a la hipotenusa vale 4 m. Calcular las longitudes de los tres lados del triángulo.*
4. *Si* a *y* b *son los lados contiguos de un paralelogramo y* e *y* f *las diagonales, demostrar que*

$$2 (a^2 + b^2) = e^2 + f^2$$

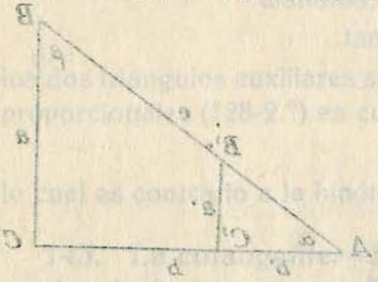
5. *Determinar la naturaleza del triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades.*
6. *Examinar si es rectángulo, acutángulo ú obtusángulo el triángulo cuyos lados miden 30 cm, 25 cm y 10 cm.*
7. *La base de un triángulo isósceles mide 9 m y la altura relativa a uno de los lados iguales vale 6 m. Calcular el área de dicho triángulo.*
8. *Calcular el área de un triángulo equilátero en función de su lado.*

9. *Calcular el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero en función del lado.*

10. *La distancia entre dos puntos A y B vale 7 m. Determinar un punto X que cumpla las dos condiciones siguientes*

$$XA + XB = 7 \text{ m}$$
$$XA^2 + XB^2 = 26{,}5 \text{ m}^2$$

11. *Calcular una altura de un triángulo conociendo sus tres lados.*



LECCION 31

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO

142. La tangente.—Sea el triángulo rectángulo ABC (fig. 62) y consideremos el ángulo agudo α que tiene por cateto opuesto *a* y por cateto adyacente *b*.

Si construimos otro triángulo rectángulo, por ejemplo el A C' B' que tenga el mismo ángulo agudo α, obtendremos otro cateto opuesto *a'* y otro cateto adyacente *b'*, pero observando que ambos triángulos son semejantes (128-1.º) podremos escribir la igualdad

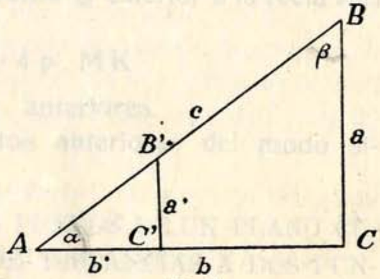


fig. 62

$$a : b = a' : b'$$

de la cual se deduce la siguiente propiedad:

EN TODOS LOS TRIANGULOS QUE POSEEN UN ANGULO AGUDO COMUN α, LA RAZON ENTRE EL CATETO OPUESTO A DICHO ANGULO Y EL CATETO ADYACENTE TIENE UN VALOR CONSTANTE.

Este valor constante se llama tangente del ángulo α y se representa por el símbolo tan α.

En virtud de esta definición podremos escribir la igualdad fundamental:

$$\boxed{\tan \alpha = a : b}$$

Observando que *a* y *b* son dos longitudes se deduce la siguiente consecuencia:

LA TANGENTE DE UN ANGULO ES UN NUMERO ABSTRACTO.

Ejemplos:

1.º Calcular el valor de la tangente de un ángulo de 45º.

Observando que, en este caso, por ser el triángulo auxiliar isósceles se verifica $a = b$, tendremos

$$\tan 45^\circ = 1$$

2.° Construir un ángulo cuya tangente sea igual a $\frac{2}{3}$.

Formemos un triángulo rectángulo A B C (fig. 63) que tenga por catetos $BC = 2$ unidades, $AC = 3$ unidades y el ángulo B A C será el pedido.

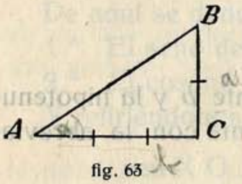


fig. 63

Observación:

Si dos ángulos α y β tienen valores distintos, también sus tangentes tienen valores distintos, pues si fuese

$$\tan \alpha = \tan \beta$$

los dos triángulos auxiliares serían semejantes por tener sus catetos proporcionales (128-2.°) en cuyo caso se verificaría

$$\alpha = \beta$$

lo cual es contrario a la hipótesis.

143. La cotangente.—Se llama cotangente de un ángulo agudo, el número recíproco de la tangente de dicho ángulo.

El símbolo de la cotangente del ángulo α es $\cot \alpha$ lo cual nos permite escribir la siguiente igualdad fundamental:

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}}$$

Recurriendo al triángulo auxiliar A B C (fig. 62) tendremos

$$\boxed{\cot \alpha = b : a}$$

lo cual nos dice que

LA COTANGENTE DE UN ANGULO AGUDO ES LA RAZON ENTRE EL CATETO ADYACENTE Y EL CATETO OPUESTO.

De la fig. 62 se deduce

$$\tan \beta = \tan (90° - \alpha) = b : a$$

que comparada con la igualdad anterior nos dice:

$$\cot \alpha = \tan (90° - \alpha)$$

LA COTANGENTE DE UN ANGULO AGUDO ES IGUAL A LA TANGENTE DE SU COMPLEMENTO.

144. El seno y el coseno.—Si formamos la razón entre el cateto opuesto al ángulo α (fig. 62) y la hipotenusa se obtiene un

11

número abstracto que se llama SENO del ángulo α y se representa con la abreviatura sen α.

La igualdad fundamental es

$$\boxed{\text{sen } \alpha = a : c}$$

Finalmente, la razón entre el cateto adyacente *b* y la hipotenusa *c* se llama COSENO del ángulo α y se representa con la abreviatura cos α.

La igualdad fundamental es

$$\boxed{\cos \alpha = b : c}$$

Observaciones:

1.ª De la figura 62, se deduce

$$\text{sen } \beta = \text{sen } (90^{\circ} - \alpha) = b : c$$

y comparando esta igualdad con la anterior resulta

$$\cos \alpha = \text{sen } (90^{\circ} - \alpha)$$

EL COSENO DE UN ANGULO ES IGUAL AL SENO DE SU COMPLEMENTO.

2.ª Las cuatro razones que acabamos de definir, tienen una importancia capital en la Trigonometría. Por eso se llaman razones trigonométricas.

145. Representación geométrica y variación de estas razones.

a) El seno y el coseno.

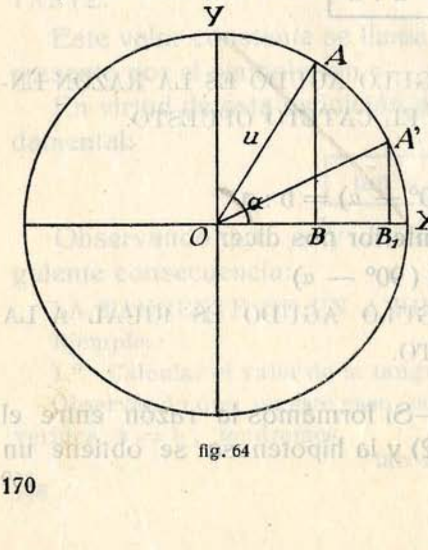


fig. 64

Sean O X y O Y (fig. 64) dos ejes cartesianos rectangulares. Haciendo centro en O, tracemos una circunferencia cuyo radio sea la unidad de longitud y consideremos el ángulo agudo α, colocado precisamente en la forma que indica la figura, esto es con el vértice en el origen, un lado sobre el eje de abscisas y el otro en el primer cuadrante.

Según las definiciones del párrafo 144, tendremos

$$\text{sen}\,\alpha = A\,B : O\,A = A\,B : u = \overline{A\,B}$$
$$\cos\alpha = O\,B : O\,A = O\,B : u = \overline{O\,B}$$

De aquí se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª El seno del ángulo α es igual a la ordenada del punto A.

2.ª El coseno del ángulo α es igual a la abscisa del punto A.

Y refiriéndonos a otro ángulo podremos escribir

$$\text{sen}\,X\,O\,A_1 = \overline{A_1\,B_1} \quad ; \quad \cos X\,O\,A_1 = \overline{O\,B_1}$$

En el caso particular del ángulo recto X O Y se deduce

$$\text{sen}\,90^\circ = \overline{Y\,O} = 1 \quad ; \quad \cos 90^\circ = \overline{O\,O} = 0$$

Análogamente podemos escribir

$$\text{sen}\,0^\circ = \overline{X\,X} = 0 \quad ; \quad \cos 0^\circ = \overline{O\,X} = 1$$

Observemos, finalmente, que mientras el ángulo α crece de 0° a 90° el seno aumenta desde 0 hasta 1 y el coseno disminuye desde 1 hasta 0, pasando ambos por todos los valores intermedios.

b) La tangente.

Trazando por el punto X (fig. 65) la tangente a la circunferencia unidad y teniendo en cuenta la definición del párrafo 142, podremos escribir

$$\tan\alpha = A\,B : O\,B = C\,X : O\,X = C\,X : u = \overline{C\,X}$$

De donde se deduce que la tangente del ángulo α es igual a la longitud del segmento C X que, sobre la semitangente geométrica, intercepta el lado extremo de dicho ángulo.

Refiriéndonos a otro ángulo podremos escribir

$$\tan X\,O\,A_1 = \overline{C_1\,X}$$

En particular

$$\tan 0^\circ = \overline{X\,X} = 0$$

Si el ángulo vale 90°, el lado extremo OY y la semitangente XC son paralelos y no pueden cortar-

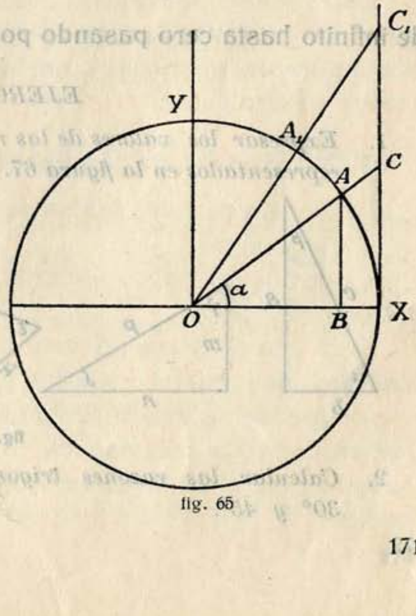


fig. 65

se a distancia finita del punto X; esto se interpreta escribiendo la igualdad siguiente

$$\tan 90^\circ = \infty$$

Observemos, finalmente, que mientras el ángulo α crece de 0° a 90° la tangente crece desde cero hasta infinito pasando por todos los valores intermedios.

c) La cotangente.

Trazando por el punto Y (fig. 66) la tangente a la circunferencia de radio unidad, tendremos

$$\cot \alpha = OB : AB = DA : DO = YC : YO = YC : u = \overline{YC}$$

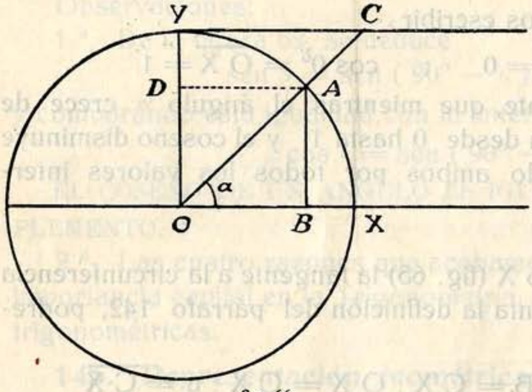


fig. 66

de donde se deduce que la cotangente del ángulo α es igual a la longitud del segmento YC.

Razonando del mismo modo que hemos hecho para el caso de la tangente tendremos

$$\cot 90^\circ = 0 \; ; \; \cot 0^\circ = \infty$$

Mientras el ángulo crece de 0° a 90° la cotangente disminuye desde infinito hasta cero pasando por todos los valores intermedios.

EJERCICIOS

1. *Expresar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos representados en la figura 67.*

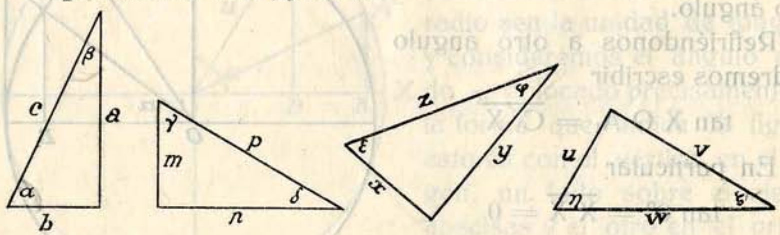


fig. 67

2. *Calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 60°, 30° y 45°.*

3. *Expresar la altura de un triángulo isósceles en función de la base y el ángulo en el vértice.*
4. *Un bastón mide 110 cm de longitud y colocado verticalmente proyecta, en un cierto instante, sobre terreno horizontal, una sombra de 25 cm. Calcular la altura de una torre que, en dicho instante, proyecta una sombra de 3,20 m.*
5. *Demostrar que el seno y el coseno no pueden alcanzar valores mayores que la unidad.*
6. *¿Qué valores pueden alcanzar la tangente y la cotangente?*
7. *¿Cual es el ángulo cuya tangente es igual a la cotangente?*
8. *¿Cual es el ángulo cuyo seno es igual al coseno?*
9. *Construir un ángulo cuyo seno valga* $\frac{1}{4}$.
10. *Construir un ángulo cuyo coseno sea* $0,\widehat{3}$.
11. *Construir un ángulo cuya tangente sea 4.*
12. *Construir un ángulo cuya cotangente sea 2.*

LECCION 32

TABLAS GONIOMETRICAS

146. Objeto de las tablas.—El valor de una cualquiera de las razones trigonometricas define el ángulo con igual exactitud que su graduación sexagesimal o centesimal.

En términos matemáticos, tan riguroso es hablar de un ángulo de 60° sexagesimales como de un ángulo cuyo seno vale 0,5. En cambio, en las cuestiones gráficas tienen ventaja el empleo de dichas razones, pues sin necesidad del transportador se obtiene mayor precisión. También en otros problemas hay que pasar del valor del ángulo al de alguna de sus razones trigonométricas o viceversa. Por todo ello es indispensable disponer de unas tablas llamadas goniométricas que registren, para el mayor número posible de ángulos, los valores de estas razones.

Al final del libro pueden verse unas tablas goniométricas con cinco cifras decimales exactas. Los ángulos varían de 10 en 10 minutos.

Estas tablas se llaman *goniométricas,* y también *naturales* para distinguirlas de otras tablas de uso muy parecido que se llaman trigonométricas y también logarítmicas. De éstas hablaremos en otro curso.

147. Manejo de las tablas.

El manejo de estas tablas supone dos problemas.

1.er problema:

Conocido el ángulo determinar el valor de una de las razones trigonométricas.

Para ello conviene advertir que las tablas son de doble entrada; hay una puerta para los grados y otra para los minutos. Si el nombre de la razón pedida encabeza la tabla, hay que buscar los grados en la columna de la izquierda y los minutos en la fila superior; en el cruce de estas fila y columna se encuentra el valor pedido.

Ejemplos:

$$\text{sen } 15^\circ\ 20' = 0{,}26443 \quad ; \quad \cos 33^\circ\ 10' = 0{,}83708$$
$$\tan\ 50' = 0{,}01455 \quad ; \quad \cot 13^\circ = 4{,}33148$$

Si el nombre de la razón buscada está al pie de la tabla hay que leer los grados en la columna de la derecha y los minutos en la fila inferior.

Ejemplos:

$$\cos 65^\circ\ 40' = 0{,}41204 \quad ; \quad \text{sen } 70^\circ\ 50' = 0{,}94457$$
$$\cot 85^\circ = 0{,}08749 \quad ; \quad \tan 61^\circ\ 10' = 1{,}81649$$

Si el ángulo no está en las tablas hay que efectuar una interpolación.

Ejemplo:

Determinar el valor de sen $25^\circ\ 13'$.

Como este ángulo está comprendido entre $25^\circ\ 10'$ y $25^\circ\ 20'$ escribamos

$$\begin{array}{lr} \text{sen } 25^\circ\ 20' = & 0{,}42788 \\ \text{sen } 25^\circ\ 10' = & 0{,}42525 \\ \hline \text{diferencia} & 0{,}00263 \end{array}$$

Observando que este incremento del seno corresponde a un aumento de 10' en el valor del ángulo, podemos admitir que a un aumento de 1' corresponde la décima parte de dicho incremento o sea 0,000263.

Por consiguiente, a 3' corresponderá el triple:

$$\begin{aligned} \text{sen } 25^\circ\ 13' &= \text{sen } 25^\circ\ 10' + 3 \times 0{,}000263 \\ &= 0{,}42525 + 0{,}000789 = 0{,}42604 \end{aligned}$$

2.° problema.

Conocido el valor de la razón trigonométrica determinar el ángulo.

Para ello se busca en las tablas el valor exacto de dicha razón o los dos valores más aproximados, uno de ellos por defecto y el otro por exceso. En el primer caso se obtiene inmediatamente el valor del ángulo; en el segundo hay que efectuar una interpolación.

Ejemplos:

1.° Determinar β sabiendo que su cotangente vale 2,62791.

En la cuarta tabla se obtiene directamente

$$\beta = 20^\circ\ 50'$$

2.° Determinar α sabiendo que sen $\alpha = 0{,}42604$.

Como en las tablas no se encuentra este valor del seno escribiremos los dos valores más aproximados

$$0{,}42788 \quad \text{que corresponde a} \quad 25^\circ\ 20'$$
$$0{,}42525 \quad \text{que corresponde a} \quad 25^\circ\ 10'$$

por consiguiente el ángulo en cuestión está comprendido entre 25° 10' y 25° 20'.

Calculando las diferencias

$$\begin{array}{r} 0{,}42604 \\ 0{,}42525 \\ \hline 79 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 0{,}42788 \\ -0{,}42525 \\ \hline 263 \end{array}$$

podremos formar la siguiente regla de tres:

Si el seno aumenta 263 cienmilésimas, el ángulo aumenta 10'; si el seno aumenta 79 cienmilésimas el ángulo aumentará x.

Por consiguiente:

$$x = \frac{79 \times 10'}{263} = 3'$$

y finalmente

$$x = 25^\circ\ 10' + 3' = 25^\circ\ 13'$$

EJERCICIOS

1. *Determinar un ángulo cuya tangente sea la mitad de la cotangente.*
2. *Determinar un ángulo cuya tangente sea el doble de la cotangente.*
3. *Calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:*

$$\alpha = 28^\circ\ 16' \quad ; \quad \beta = 12^\circ\ 40'\ 10'' \quad ; \quad \gamma = 65^\circ\ 34'\ 22''$$

4. *Calcular los ángulos conociendo las razones trigonométricas siguientes:*

$$\text{sen}\ \alpha = 0{,}27432 \quad ; \quad \cos \beta = 3{,}15018$$
$$\tan \gamma = 1{,}25 \quad ; \quad \cot \delta = 1{,}0980$$

5. *Resolver la ecuación*

$$\text{sen}\ \alpha + \frac{\text{sen}\ \alpha}{3} = 0{,}8$$

6. *Calcular el ángulo* α *que satisface la condición*

$$2 \tan \alpha - \frac{1}{2} \tan \alpha = 1 + \frac{3}{5} \tan \alpha$$

7. *Representar las gráficas de las funciones seno, coseno, tangente y cotangente haciendo uso de las tablas.*

LECCION 33

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

148. Objeto de la Trigonometría.—La Trigonometría es una rama de la Matemática que tiene por objeto la resolución de triángulos.

Resolver un triángulo es calcular sus elementos conociendo los valores de otros elementos, llamados datos, en número suficiente para que el triángulo esté determinado.

Así, por ejemplo, para resolver un triángulo es preciso conocer tres elementos. En el caso del triángulo rectángulo, bastará conocer dos elementos.

La característica de la Trigonometría es que todos los desarrollos son numéricos. El cálculo aritmético o algébrico desplaza totalmente a las construcciones geométricas.

149. Casos elementales de triángulos rectángulos.—Los casos elementales de resolución de triángulos rectángulos son los que a continuación se expresan.

1er. caso.

Datos.—La hipotenusa c y un ángulo agudo α (fig. 62).

Incógnitas.—El ángulo agudo β

Los catetos a y b

Fórmulas:

Ante todo se verifica

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

De las fórmulas sen $\alpha = a : c$; cos $\alpha = b : c$ (párrafo 144), se deduce inmediatamente

$$a = c \text{ sen } \alpha \quad ; \quad b = c \cos \alpha$$

Bastará calcular los valores de sen α y cos α mediante las tablas goniométricas para obtener enseguida las longitudes de los catetos *a* y *b*.

Ejemplo:

Datos: $c = 5$ m $\quad \alpha = 40^\circ$

De las tablas goniométricas se obtiene

$$\text{sen } 40^\circ = 0{,}64279 \qquad \cos 40^\circ = 0{,}76604$$

y aplicando las fórmulas expuestas tendremos

$$\beta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$
$$a = 5 \text{ m} \times 0{,}64279 = 3{,}214 \text{ m}$$
$$b = 5 \text{ m} \times 0{,}76604 = 3{,}830 \text{ m}$$

2.º caso:

Datos.—Un cateto *a* y un ángulo agudo α (fig. 62).

Incógnitas.—El ángulo agudo β

La hipotenusa c

El cateto b

Fórmulas:

Ante todo se verifica

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

De la fórmula sen α = a : c (párrafo 144), se deduce

$$c = a : \text{sen } \alpha$$

Finalmente de la fórmula cot α = b : a (párrafo 143) se deduce

$$b = a \cot \alpha$$

Ejemplo:

Datos: a = 20,3 cm $\alpha = 31^\circ\ 10'$

De las tablas goniométricas se deduce

$$\text{sen } 31^\circ\ 10' = 0{,}51753 \qquad \cot 31^\circ\ 10' = 1{,}65337$$

y aplicando las fórmulas expuestas tendremos

$$\beta = 90^\circ - 31^\circ\ 10' = 58^\circ\ 50'$$
$$c = 20{,}\ 5 \text{ cm} : 0{,}51753 = 39{,}6 \text{ cm}$$
$$b = 20{,}\ 5 \text{ cm} \times 1{,}65337 = 33{,}9 \text{ cm}$$

3er. caso:

Datos.—Los dos catetos *a* y *b* (fig. 62).

Incógnitas.—La hipotenusa c

Los ángulos agudos α y β

Fórmulas:

Del teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, se deduce

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El cálculo de los ángulos α y β es inmediato en virtud de la fórmula

$$\tan \alpha = a : b \qquad \text{(párrafo 142)}$$

y teniendo en cuenta que α y β son complementarios tendremos

$$\beta = 90^\circ - \alpha \qquad \text{o bien} \qquad \cot \beta = a : b$$

Ejemplo:

Datos: $a = 15$ cm $\quad b = 10$ cm

Aplicando las fórmulas expuestas, tendremos

$$c = \sqrt{225 \text{ cm}^2 + 100 \text{ cm}^2} = \sqrt{325 \text{ cm}^2} = 18{,}0 \text{ cm}$$

$$\tan \alpha = 15 \text{ cm} : 10 \text{ cm} = 1{,}5 \qquad \text{de donde}$$

$$\alpha = 56^\circ\ 19' \qquad \beta = 90^\circ - 56^\circ\ 19' = 33^\circ\ 41'$$

4.° caso:

Datos.—La hipotenusa *c* y el cateto *a* (fig. 62).

Incógnitas.—El cateto *b*

Los ángulos agudos α y β

Fórmulas:

Del teorema de Pitágoras se deduce

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

El cálculo de los ángulos α y β es inmediato en virtud de la fórmula

$$\text{sen } \alpha = a : c \qquad \text{(párrafo 144)}$$

y teniendo en cuenta que α y β son complementarios tendremos

$$\beta = 90^\circ - \alpha \qquad \text{o bien} \qquad \cos \beta = a : c$$

Ejemplo:

Datos: $c = 80$ m $\quad a = 25$ m

Aplicando las fórmulas expuestas tendremos

$$b = \sqrt{6400 \text{ m}^2 - 625 \text{ m}^2} = \sqrt{5775 \text{ m}^2} = 76{,}0 \text{ m}$$

$$\text{sen } \alpha = 25 \text{ m} : 80 \text{ m} = 0{,}31250$$

de donde

$$\alpha = 17^\circ\ 21' \qquad \beta = 90 - 17^\circ\ 21' = 72^\circ\ 39'$$

EJERCICIOS

Resolver un triángulo rectángulo conociendo los siguientes elementos:

1.	$c = 37$ cm	$\alpha = 65^\circ\ 30'$
2.	$a = 1\ 25$ m	$\alpha = 18^\circ\ 20'$
3.	$a = 1\ 210$ m	$b = 670$ m
4.	$c = 500$ m	$a = 230$ m
5.	$b = 92$ cm	$\beta = 28^\circ\ 40'$

6. $a = 2{,}5$ km $\quad \beta = 41^\circ\ 16'$
7. $b = 180$ m $\quad \alpha = 12^\circ\ 50'$
8. $c = 340$ dcm $\quad b = 130$ dm
9. *La pendiente de un tramo de carretera es 0,10. Calcular el ángulo de subida.*
10. *Un funicular salva un desnivel de 200 m; el ángulo de subida es de 30º. Calcular la longitud de la vía.*
11. *La visual dirigida a un campamento, desde la barquilla de un globo de observación, forma un ángulo de 25º con la vertical; el globo está a 2 000 m de altura. Calcular la distancia al campamento.*
12. *La latitud geográfica de Madrid es 49º 24' 29,9". Calcular el radio del paralelo terrestre que pasa por esta capital. (El radio del meridiano terrestre se supone igual a 6 370 km).*

LECCION 34

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

150. El teorema de la cuerda.—Sean AB y CD (fig. 67) dos cuerdas de un una circunferencia que se cortan en el punto interior E. Si trazamos los segmentos auxiliares AD y BC se forman los triángulos AED y BEC que son semejantes, puesto que

$\widehat{AED} = \widehat{CEB}$ (por opuestos por el vértice)

$\widehat{ADE} = \widehat{CBE}$ (por estar inscritos en el arco A C)

De esta semejanza se deduce la proporción

$EA : EC = ED : EB$

y escribiendo que el producto de extremos es igual al producto de medios tendremos

$EA \,.\, EB = EC \,.\, ED$

Así queda demostrado el siguiente

Teorema:

LOS SEGMENTOS EN QUE SE DESCOMPONEN DOS CUERDAS DE UNA CIRCUNFERENCIA SON INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

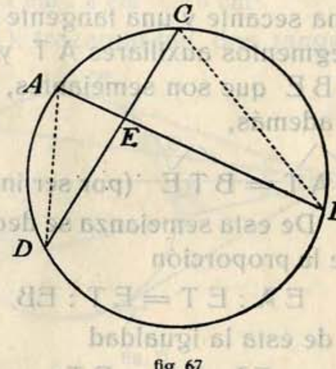


fig. 67

151. El teorema de la secante.—Sean E B y ED (fig. 68) dos secantes a una circunferencia que arrancan del punto exterior E.

Si trazamos los segmentos auxiliares A D y B C se forman los triángulos A E D y C E B, que son semejantes, puesto que tienen común el ángulo en E y además,

$\widehat{EDA} = \widehat{EBC}$ (por estar inscritos en el arco A C)

De esta semejanza se deduce la proporción

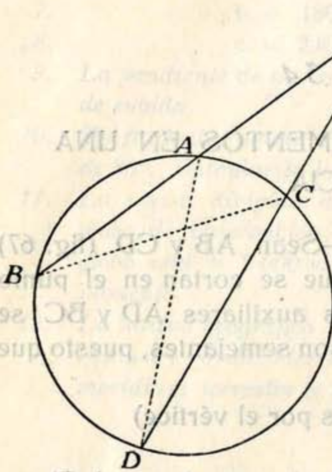


fig. 68

$$EA : EC = ED : EB$$

o lo que es igual

$$EA \,.\, EB = EC \,.\, ED$$

Así queda demostrado el siguiente

Teorema:

SI TENEMOS UNA CIRCUNFERENCIA Y UN PUNTO EXTERIOR, LAS SECANTES COMPLETAS, QUE SALEN DE DICHO PUNTO, SON INVERSAMENTE PROPORCIONALES A SUS SEGMENTOS EXTERIORES.

152. El teorema de la tangente.—Sean E A y E T (fig. 69) una secante y una tangente a una circunferencia. Si trazamos los segmentos auxiliares A T y B T se forman los triángulos A E T y T B E que son semejantes, puesto que tienen común el ángulo E y además,

$\widehat{EAT} = \widehat{BTE}$ (por ser inscrito y semi-inscrito en el arco B T)

De esta semejanza se deduce la proporción

$$EA : ET = ET : EB$$

y de esta la igualdad

$$EA \,.\, EB = ET^2$$

Así queda demostrado el siguiente

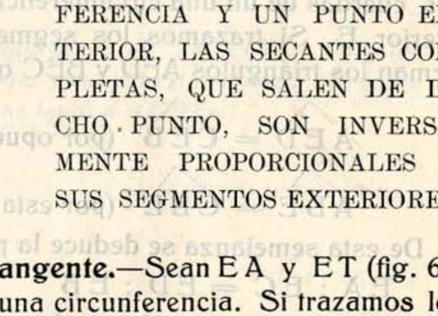


fig. 69

TEOREMA:

SI DESDE UN PUNTO EXTERIOR A UNA CIRCUNFERENCIA SE TRAZAN UNA SECANTE Y UNA TANGENTE, ESTA ES MEDIA PROPORCIONAL ENTRE LA SECANTE COMPLETA Y SU SEGMENTO EXTERIOR.

Consecuencia:

Las longitudes de las dos tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son iguales.

153. Potencia de un punto respecto a una circunferencia.—Si por un punto P (fig. 70) interior a una circunferencia se trazan diversas cuerdas A B, C D, E F, G H, etc, sabemos que se verifican las igualdades siguientes:

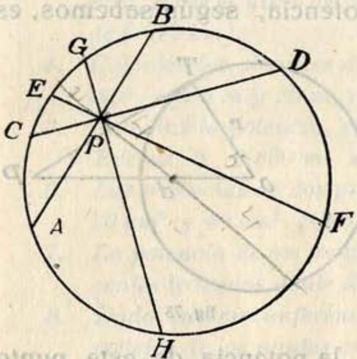


fig 70

$$PA \,.\, PB = PC \,.\, PD = PE \,.\, PF = PH \,.\, PG$$

El valor constante de estos productos se llama potencia del punto P respecto a la circunferencia.

Ejemplo:

Si tenemos una circunferencia de 8 cm de diámetro la potencia de su centro será

$$4 \text{ cm} \,.\, 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$$

Si el punto P fuese exterior (fig. 71), trazando las dos tangentes PT_1, PT_2 y diversas secantes, P A, P C, P E, etc tendremos, en virtud de los teoremas de la secante y la tangente

$$PT_1^2 = PT_2^2 = PA \,.\, PB = PC \,.\, PD = PE \,.\, PF$$

El valor constante de estos productos se llama potencia del punto P respecto a la circunferencia.

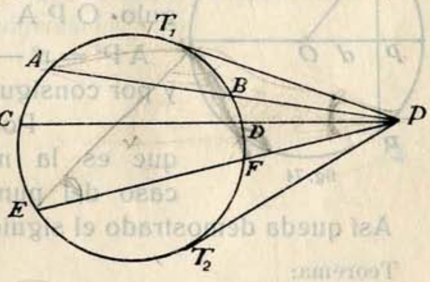


fig. 71

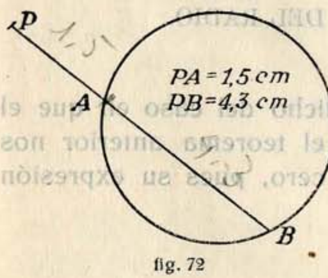


fig. 72

Ejemplo:

La potencia del punto P (fig. 72) es

$$PA \,.\, PB = 1{,}5 \text{ cm} \,.\, 4{,}3 \text{ cm} = 6{,}45 \text{ cm}^2$$

Observación:

Teniendo en cuenta que los dos segmentos P A y P B, cuyo producto determina la potencia del punto P, tienen sentidos opuestos cuando el punto P es interior (fig. 70) y el mismo sentido cuando el punto P es exterior, pondremos signo negativo a las potencias de los puntos interiores y signo positivo a las potencias de los puntos exteriores.

154. Expresión general de la potencia de un punto.—En el caso del punto exterior (fig. 73) la potencia, según sabemos, es el cuadrado de la tangente P T, pero como el triángulo O P T es rectángulo en T, tendremos en virtud del teorema de Pitágoras

Potencia de $P = PT^2 = d^2 - r^2$

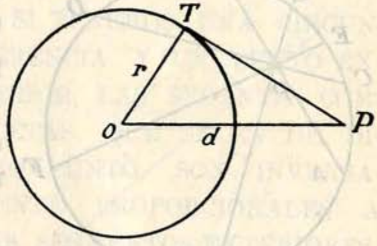


fig. 73

Si el punto fuese interior (fig. 74) trazaremos la cuerda A P B perpendicular al diámetro P O y teniendo en cuenta que P es el punto medio de la cuerda A B, la potencia de este punto valdrá $- AP^2$.

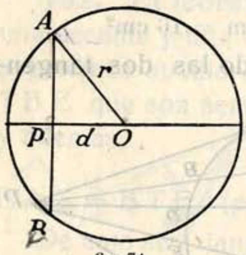


fig. 74

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo O P A se tiene

$AP^2 = r^2 - d^2$ de donde $- AP^2 = d^2 - r^2$

y por consiguiente

Potencia de $P = d^2 - r^2$

que es la misma fórmula obtenida en el caso del punto exterior.

Así queda demostrado el siguiente

Teorema:

LA POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA ES IGUAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA DEL PUNTO AL CENTRO MENOS EL CUADRADO DEL RADIO.

Observación:

Aunque, hasta ahora, nada hemos dicho del caso en que el punto P pertenezca a la circunferencia, el teorema anterior nos dice que en ese caso, la potencia vale cero, pues su expresión toma la forma

$$r^2 - r^2 = 0$$

EJERCICIOS

1. *Construir pares de segmentos cuyo producto sea 16 cm^2.*
2. *Construir dos segmentos inversamente proporcionales a los segmentos* a *y* b *dados.*
3. *Calcular a qué distancia del pico de Peñagolosa empieza a verse, en un día claro, un buque que se acerca a la costa. (La altura de este pico, sobre el nivel del mar, es 1 813 m; el radio terrestre se supone de 6 370 km).*
4. *Calcular los alcances de dos faros cuyas alturas, sobre el nivel del mar, son 5 m y 20 m, respectivamente.*
5. *Calcular la potencia, respecto al meridiano terrestre, del pico del Everest a 8 890 m sobre el nivel del mar.*
6. *Las potencias de dos puntos respecto a una circunferencia valen 20 cm^2 y 40 cm^2. ¿Cual de ellos está más próximo al centro?*
7. *La potencia de un punto es 625 m^2. Calcular la longitud de las tangentes trazadas desde dicho punto a la circunferencia.*
8. *Dada una circunferencia de 5 cm de radio construir el lugar geométrico de los puntos cuya potencia vale — 9 cm^2.*
9. *Una circunferencia tiene 25 cm de diámetro. Calcular la potencia de un punto que dista 6 cm del centro.*
10. *La potencia de un punto es —250 000 cm^2 y dista del centro 2 m. Calcular el radio de la circunferencia.*

LECCIÓN 35

EJE Y CENTRO RADICALES

155. Eje radical de dos circunferencias.—Sean O_1 y O_2 (fig. 75) dos circunferencias y P un punto que tenga igual potencia respecto a cada una de ellas. Recordando la expresión de la potencia, explicada en el párrafo 154, tendremos

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

de donde se deduce

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

Esto significa que cualquier punto del plano que tenga igual potencia respecto a las circunferencias O_1 y O_2 pertenece al lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos O_1 y O_2 vale $r_1^2 - r_2^2$. Según sabemos (párrafo 141) este lugar geométrico es la recta P A perpendicular a $O_1 O_2$.

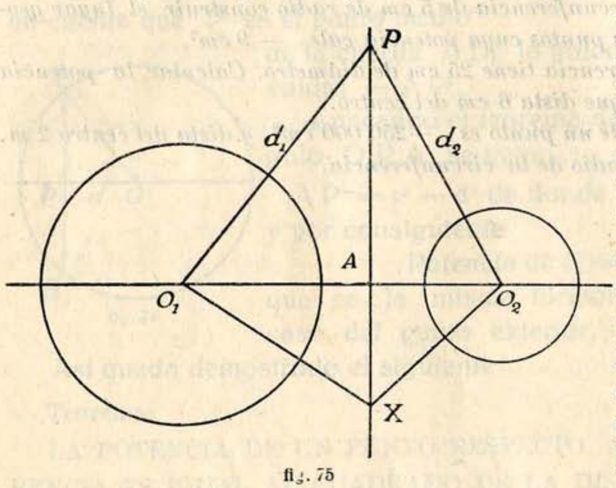


fig. 75

Por otra parte, si X es un punto cualquiera de dicha recta, tiene igual potencia respecto a ambas circunferencias, pues de

$$X O_1^2 - X O_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

se deduce

$$X O_1^2 - r_1^2 = X O_2^2 - r_2^2$$

En resumen:

SI TENEMOS DOS CIRCUNFERENCIAS COPLANARIAS, NO CONCENTRICAS, EXISTEN INFINITOS PUNTOS QUE POSEEN LA MIS-

MA POTENCIA RESPECTO DE AMBAS CIRCUNFERENCIAS Y SU LUGAR GEOMETRICO ES UNA RECTA, LLAMADA EJE RADICAL, QUE ES PERPENDICULAR A LA LINEA DE LOS CENTROS.

156. Caso de dos circunferencias secantes.—Si las dos circunferencias son secantes (fig. 76) los puntos de intersección A y B pertenecen al eje radical, pues sus potencias respecto a ambas circunferencias valen cero (párrafo 154, observación). Por consiguiente en este caso el eje radical es la recta A B.

EL EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS SECANTES ES LA SECANTE COMUN.

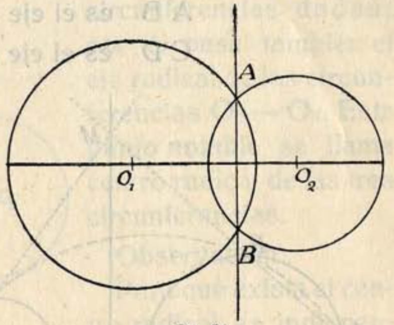


fig. 76

157. Caso de dos circunferencias tangentes.—Si las dos circunferencias son tangentes en el punto A (figs. 77 y 78) el eje

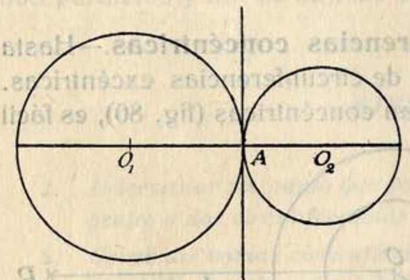


fig. 77

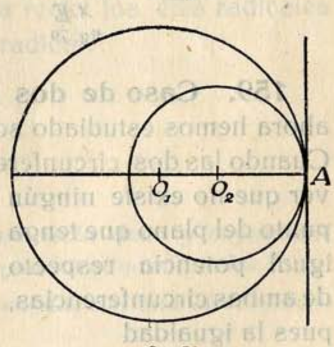


fig. 78

radical tiene que pasar por A y, como ha de ser perpendicular a la línea de los centros, resulta que es la tangente común.

EL EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS TANGENTES ES LA TANGENTE COMUN.

158. Caso de dos circunferencias exteriores o interiores.—En cualquiera de estos dos casos resulta muy fácil trazar el eje radical recurriendo a una circunferencia auxiliar que corte a las dos primeras.

Sean O_1 y O_2 (fig. 79) las dos circunferencias cuyo eje radical queremos construir. Tracemos la circunferencia auxiliar E con la única condición de que corte a O_1 y O_2.

Según lo dicho en el párrafo 156,

A B es el eje radical de O_1 y E

C D es el eje radical de E y O_2

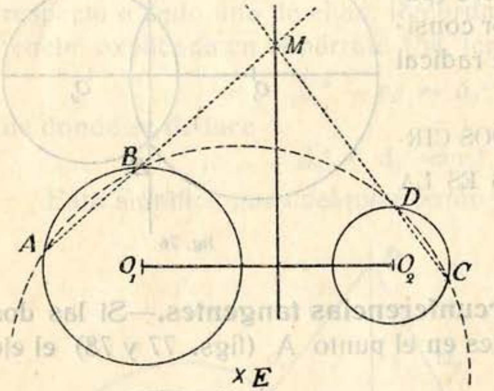


fig. 79

Por consiguiente, el punto M tiene, por una parte, igual potencia respecto a O_1 y E y, por otra, igual potencia respecto a E y O_2. De aquí se deduce que el punto M pertenece al eje radical de O_1 y O_2. Trazando por M la perpendicular a la recta $O_1 O_2$ de los centros, tendremos el eje radical pedido.

159. Caso de dos circunferencias concéntricas.—Hasta ahora hemos estudiado solo casos de circunferencias excéntricas. Cuando las dos circunferencias sean concéntricas (fig. 80), es fácil ver que no existe ningún punto del plano que tenga igual potencia respecto de ambas circunferencias, pues la igualdad

$$d^2 - r_1^2 = d^2 - r_2^2$$

es absurda, por ser distintos los radios r_1 y r_2.

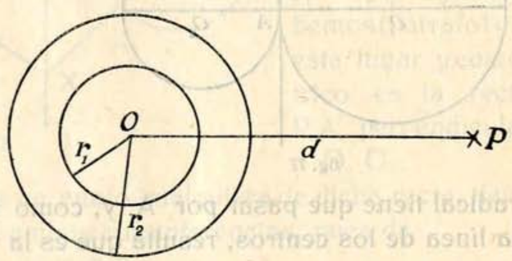


fig. 80

Por consiguiente:

DOS CIRCUNFERENCIAS CONCENTRICAS CARECEN DE EJE RADICAL.

160. Centro radical de tres circunferencias.—Consideremos tres circunferencias cuyos centros, O_1, O_2 y O_3 (fig. 81) sean vértices de un triángulo.

Si A B y C D son los ejes radicales de las circunferencias $O_1 - O_2$ y $O_1 - O_3$, su intersección X es el único punto del plano que tiene igual potencia respecto de las circunferencias dadas; por él pasa también el eje radical de las circunferencias $O_2 - O_3$. Este punto notable se llama centro radical de las tres circunferencias.

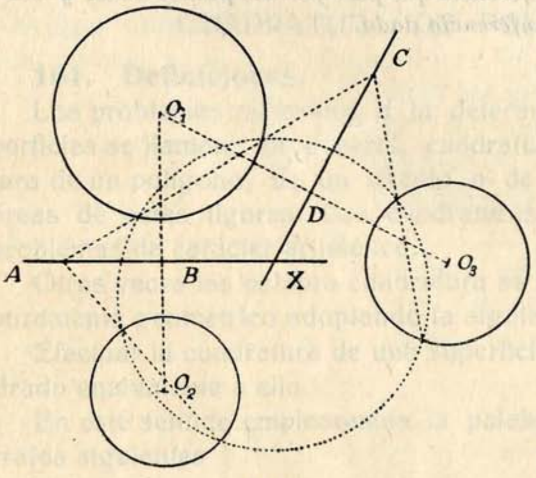


fig. 81

Observación:

Para que exista el centro radical es indispensable que los centros de las tres circunferencias sean vértices de un triángulo, pues si dichos puntos están en línea recta los ejes radicales son paralelos y no se obtiene el centro radical.

EJERCICIOS

1. *Determinar un punto que esté sobre una recta dada y cuyas tangentes a dos circunferencias dadas tengan longitudes iguales.*
2. *Construir varias circunferencias que tengan, con una circunferencia dada, un eje radical dado.*
3. *Determinar la posición relativa de dos circunferencias conociendo una de ellas y el eje radical de ambas.*
4. *Determinar un punto desde el cual las tangentes a tres circunferencias dadas tengan longitudes iguales.*
5. *Dada una circunferencia y una secante construir otra, cuyo centro esté sobre la primera, y de manera que el eje radical de ambas sea dicha secante.*
6. *Se dan un punto y dos circunferencias. Construir otra circunferen-*

cia que, en unión de aquéllas, tenga como centro radical el punto dado.

7. *Construir una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente a una recta dada.*
8. *Construir una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente a otra circunferencia dada.*

LECCION 36

CUADRATURA DE POLIGONOS

161. Definiciones.

Los problemas referentes a la determinación de áreas de superficies se llaman, en general, cuadraturas. Efectuar la cuadratura de un polígono, de un círculo o de un elipse es hallar las áreas de estas figuras. Las cuadraturas, así consideradas, son problemas de carácter aritmético.

Otras veces las palabra cuadratura se interpreta en un sentido puramente geométrico adoptando la siguiente definición:

Efectuar la cuadratura de una superficie es construir un cuadrado equivalente a ella.

En este sentido emplearemos la palabra cuadratura en los párrafos siguientes.

162. Trasformar un polígono en triángulo equivalente. —Para resolver este problema basta saber el modo de construir un polígono equivalente a otro dado y que tenga un lado menos que éste, pues repitiendo la misma construcción con cada uno de los resultados se obtendrá, finalmente, un triángulo que cumple la condición impuesta.

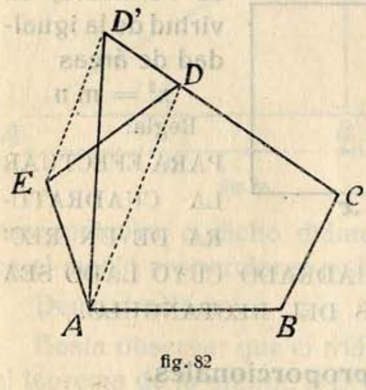


fig. 82

Vamos a explicar la marcha sobre un ejemplo.

Sea A B C D E (fig. 82) un pentágono que queremos trasformar en cuadrilátero equivalente.

Tracemos una diagonal A D que deje un vértice intermedio E. La paralela por este vértice a la diagonal A D corta al lado C D en el punto D'. Observemos que los triángulos A D E y A D D' son equivalentes, pues tienen la misma base y alturas iguales. Por consiguiente, si del pentágono suprimimos el triángulo A D E y añadimos el A D D' se obtiene un cuadrilátero A B C D' equivalente a dicho pentágono. Repitiendo análoga construcción con el cuadrilátero obtendremos un triángulo equivalente al pentágono.

163. Trasformar un triángulo en rectángulo equivalente.—Sea A B C (fig. 83) un triángulo y E D la paralela media a la base A B. Si por los extremos de esta base trazamos las perpendiculares A E y B D se formará un rectángulo A B D E equivalente al triángulo dado.

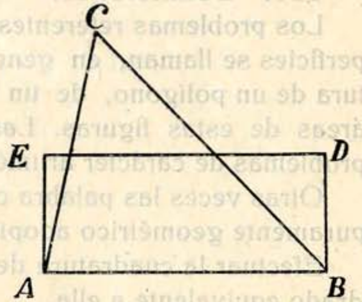


fig. 83

En efecto: ambos tienen la misma base A B, pero si la altura del triángulo es *h*, la del rectángulo será $\frac{h}{2}$.

Por consiguiente:

$$\text{Area del triángulo } ABC = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB$$

$$\text{Area del rectángulo } ABDE = \frac{h}{2} \cdot AB$$

Ambas áreas son iguales, como queríamos demostrar.

164. Cuadratura de un rectángulo.

Sean *m* y *n* (fig. 84) los lados de un rectángulo. Representando por *x* el lado del cuadrado equivalente a dicho rectángulo, se verificará, en virtud de la igualdad de áreas

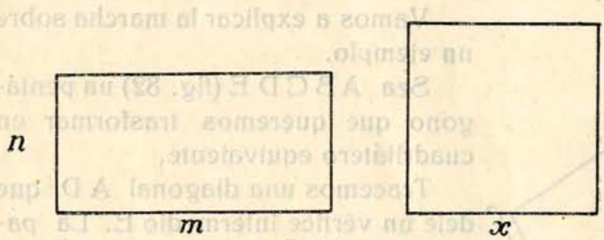


fig. 84

$$x^2 = m\,n$$

Regla:

PARA EFECTUAR LA CUADRATURA DE UN RECTANGULO BASTA CONSTRUIR UN CUADRADO CUYO LADO SEA MEDIO PROPORCIONAL A LOS LADOS DEL RECTANGULO.

165. Construcción de medios proporcionales.

El teorema de Euclides (párrafo 137) y el de la altura (párrafo 139) nos enseñan dos procedimientos para construir el medio proporcional a dos segmentos dados *m* y *n*.

1.er método.

Se construye (fig. 85) la diferencia C B de los segmentos *m* y *n*. Tomando como diámetro A B se describe una semicir-

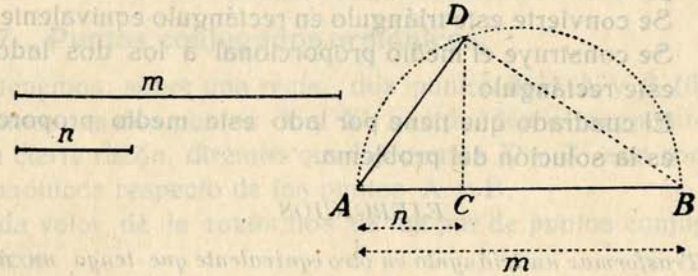


fig. 85

cunferencia y trazando por C la perpendicular a este diámetro se obtiene el punto D que unido con A nos da el segmento A D, que es el medio proporcional pedido.

Demostración:

Observemos que el triángulo A D B es rectángulo en D y, según el teorema de Euclides, el cateto A D es medio proporcional entre la hipotenusa *m* y la proyección ortogonal *n* de dicho cateto sobre la hipotenusa.

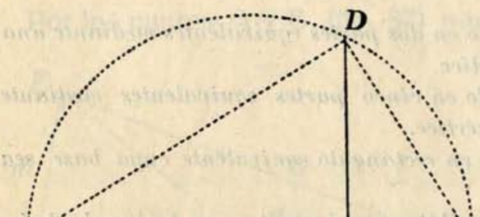


fig. 86

2.º método.

Sobre el segmento A C (fig. 86), suma de *m* y *n*, como diámetro, se construye una semicircunferencia. Trazando por B la perpendicular a dicho diámetro se obtiene el segmento B D, que es el medio proporcional pedido.

Demostración:

Basta observar que el triángulo A C D es rectángulo y, según el teorema de la altura, B D es medio proporcional entre los segmentos, *m* y *n*, en que descompone a la hipotenusa.

166. Cuadratura de polígonos.—De lo dicho se deduce el siguiente procedimiento para efectuar la cuadratura de un polígono.

1.° Se convierte el polígono en otro equivalente que tenga un lado menos.

2.° Se repite la construcción anterior sobre cada nuevo polígono hasta obtener un triángulo.

3.° Se convierte este triángulo en rectángulo equivalente.

4.° Se construye el medio proporcional a los dos lados de este rectángulo.

5.° El cuadrado que tiene por lado este medio proporcional es la solución del problema.

EJERCICIOS

1. *Trasformar un triángulo en otro equivalente que tenga un ángulo dado.*
2. *Trasformar un triángulo en otro equivalente que sea isósceles y tenga por altura un segmento dado.*
3. *Trasformar un triángulo en otro equivalente que sea rectángulo y tenga por cateto una altura de aquél.*
4. *Trasformar un triángulo en otro equivalente que sea rectángulo y tenga por cateto un segmento dado.*
5. *Trasformar un paralelogramo en otro equivalente cuyos lados tengan dimensiones dadas.*
6. *Descomponer un triángulo en dos partes equivalentes mediante una recta que pase por un vértice.*
7. *Descomponer un triángulo en cinco partes equivalentes mediante rectas que pasen por un vértice.*
8. *Trasformar un triángulo en rectángulo equivalente cuya base sea un segmento dado.*
9. *Construir un triángulo equilátero equivalente a un triángulo dado.*
10. *Construir un triángulo equivalente a un triángulo dado y cuyos vértices estén sobre rectas dadas.*
11. *Dados una circunferencia y un triángulo interior, construir un triángulo equivalente a éste y cuyos vértices estén situados en la circunferencia.*
12. *Construir un segmento cuya longitud sea* $\sqrt{3}$
13. *Construir un segmento cuya longitud sea* $\sqrt{5}$
14. *Construir un segmento cuya longitud sea* $\sqrt{8}$
15. *Construir un segmento cuya longitud sea* $\sqrt{80}$

LECCION 37

DIVISION ARMONICA Y SECCION AUREA DE SEGMENTO

167. Puntos conjugados armónicos.

Si tenemos, sobre una recta, dos puntos fijos A y B (fig. 36) y trazamos los dos puntos X y X' que dividen al segmento AB en una cierta razón, diremos que los puntos X y X' son conjugados armónicos respecto de los puntos A y B.

Cada valor de la razón nos dá un par de puntos conjugados armónicos.

Consecuencia:

Sobre la recta AB existen infinitos pares de puntos conjugados armónicos respecto de A y B.

168. Construcción del conjugado armónico de un punto dado.

Método geométrico:

Por los puntos A y B (fig. 87) tracemos dos rectas paralelas cualesquiera y por C una secante cualquiera y tomemos sobre aquellas los segmentos AE = m y FB = n. En la prolongación de éste, tomemos BG = n y trazando, finalmente, la recta EG obtendremos el punto D, que es el conjugado armónico de C, pues, según lo dicho en el párrafo 111, se tiene

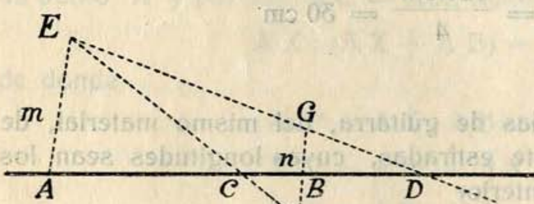


fig 87

$$CA : CB = DA : DB = m : n$$

Método aritmético:

Explicaremos este método sobre un ejemplo.

Sean $AB = 24$ cm y $AC = 20$ cm (fig. 88) y queremos calcular la distancia AD.

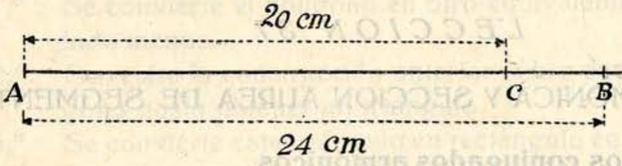


fig. 88

Para ello, escribamos la proporción

$$AC : BC = AD : BD$$

y por ser

$$AC : BC = 20 \text{ cm} : 4 \text{ cm} = 5$$

y

$$BD = AD - 24 \text{ cm}$$

tendremos

$$AD : (AD - 24 \text{ cm}) = 5$$

de donde

$$AD = 5\,(AD - 24 \text{ cm})$$

$$AD = 5 \,.\, AD - 120 \text{ cm}$$

$$4 \,.\, AD = 120 \text{ cm}$$

$$AD = \frac{120 \text{ cm}}{4} = 30 \text{ cm}$$

Observación:

Si tenemos tres cuerdas de guitarra, del mismo material, de igual espesor, igualmente estiradas, cuyas longitudes sean los segmentos del ejemplo anterior

$$AC = 20 \text{ cm} \quad ; \quad AB = 24 \text{ cm} \quad ; \quad AD = 30 \text{ cm}$$

y pulsamos estas cuerdas, producirán tres sonidos cuyas frecuencias, según se estudia en Física, son inversamente proporcionales a las longitudes de las cuerdas y formarán la proporción progresiva

$$\frac{1}{30} : \frac{1}{24} : \frac{1}{20} = \frac{120}{30} : \frac{120}{24} : \frac{120}{20} = 4 : 5 : 6$$

De aquí se deduce que al pulsar las tres cuerdas se producirá el acorde perfecto *do—mi—sol*.

Por este motivo se llama armónica la figura formada por los cuatro puntos A, B, C y D (fig. 88).

169. Sección áurea de un segmento.

Sea A B un segmento rectilíneo (fig. 89) y O la circunferencia tangente en B a dicho segmento cuyo diámetro es igual a este segmento.

Trazando la secante AD que pasa por el centro O, tendremos en virtud del teorema de la tangente (párrafo 152)

$$AC \,.\, AD = AB^2$$

y por ser

$$AD = AC + CD = AC + AB$$

tendremos

$$AC \,.\, (AC + AB) = AB^2$$

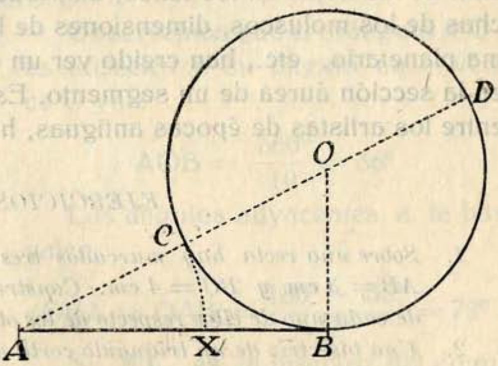


fig. 89

Llevando la distancia A C sobre el segmento A B se obtiene un punto X y por ser $AC = AX$, tendremos

$$AX \,.\, (AX + AB) = AB^2$$

de donde

$$AX^2 + AX \,.\, AB = AB^2$$

$$AX^2 = AB^2 - AX \,.\, AB$$

$$AX^2 = AB \,.\, (AB - AX)$$

y finalmente

$$AX^2 = AB \,.\, XB$$

En resumen:

El punto X descompone al segmento A B en los segmentos A X y X B, de manera que el mayor de estos A X, es medio proporcional entre el otro, X B, y el segmento completo A B.

Esta descomposición de un segmento dado se llamó, antiguamente, SECTIO AUREA y también SECTIO DIVINA. En los libros actuales suele llamarse «división en media y extrema razón». Más breves y de mejor sonoridad son las traducciones SECCION AUREA y SECCION DIVINA. La primera ha logrado mayor difusión y es la que nosotros empleamos.

Observación:

Algunos autores, como consecuencia de sus estudios sobre las proporciones del cuerpo humano en sus más bellos tipos, colocación de las hojas en los tallos, distribución de espiras en las conchas de los moluscos, dimensiones de las órbitas de nuestro sistema planetario, etc., han creido ver un canon de belleza y armonía en la sección áurea de un segmento. Este principio, muy difundido entre los artistas de épocas antiguas, ha caido hoy en desuso.

EJERCICIOS

1. *Sobre una recta hay marcados tres puntos A, B y C, tales que $AB = 3$ cm y $BC = 4$ cm. Construir los conjugados armónicos de cada uno de ellos respecto de los otros dos.*
2. *Una bisectriz de un triángulo corta al lado opuesto en un punto D; determinar el conjugado armónico de este punto respecto a los vértices de dicho lado.*
3. *¿Qué le sucede al conjugado armónico del punto C cuando éste se acerca al punto medio del segmento AB?*
4. *Los puntos C y D son conjugados armónicos respecto de A y B. ¿Cual es el conjugado de A respecto de C y D?*
5. *Cuatro rectas a, b, c, d, concurrentes en un punto V, determinan sobre una recta r una figura armónica. Demostrar que las intersecciones de aquellas rectas con otra cualquiera r', que no pase por V, forman otra figura armónica.*
6. *Por un punto P, interior a una circunferencia, se trazan varias secantes. Construir los conjugados armónicos de P respecto a los puntos de intersección de cada secante con la circunferencia.*
7. *Calcular las longitudes de los dos segmentos en que divide la sección áurea a un segmento que tiene 1 m de longitud.*
8. *Calcular las longitudes de los dos segmentos en que divide la sección áurea a un segmento cuya longitud es l.*
9. *La sección áurea de un segmento le descompone en dos partes* x *é* y. *Calcular las longitudes de los segmentos en que divide la sección áurea a la mayor de dichas partes.*

LECCION 38

POLIGONOS REGULARES

170. Inscripción del decágono regular.

Sea A B (fig. 90) el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia dada de centro O.

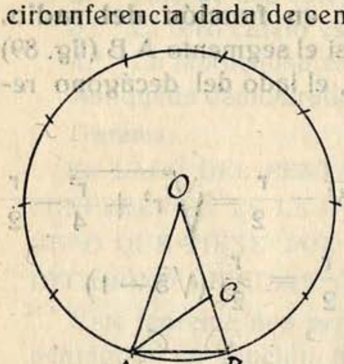


fig. 90

Observemos que el triángulo A O B es isósceles y su ángulo en el vértice O vale

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

Los ángulos adyacentes a la base valen

$$\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Si A C es la bisectriz del ángulo O A C tendremos

$$\widehat{CAB} = 36^\circ$$

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{CAB} = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$$

Por consiguiente el triángulo A B C es isósceles y A C = A B.

Observemos, también, que los triángulos A B C y O A B son semejantes, pues ambos son isósceles y tienen un ángulo en la base común (párrafo 127, caso 1.°). De esta semejanza se deduce la proporción

$$OB : AB = AB : BC$$

Considerando, por otra parte, que $\widehat{CAO} = 36^\circ$ se ve que también el triángulo C A O es isósceles y por consiguiente

$$OC = CA = AB$$

Sustituyendo, en la proporción anterior, en vez de A B el valor O C, tendremos

$$OB : OC = OC : BC$$

En resumen, si sobre el radio O B tomamos un segmento O C igual al lado del decágono regular inscrito, dicho radio se descompone de igual modo que por una sección áurea.

Así queda demostrado el siguiente

Teorema:

EL LADO DEL DECAGONO REGULAR INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA ES EL MAYOR DE LOS SEGMENTOS EN QUE LA SECCION AUREA DESCOMPONE AL RADIO.

171. Lado del decágono regular en función del radio.

Del teorema anterior se deduce que si el segmento A B (fig. 89) es el radio *r* de la circunferencia dada, el lado del decágono regular inscrito será A C.

De dicha figura resulta

$$AC = AO - OC = \sqrt{AB^2 + OB^2} - \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

En resumen

$$l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

172. Lado del pentágono regular.

Sea A B el lado del decágono regular inscrito en la circunferencia O (fig. 91).

Prolonguemos este lado hasta obtener el segmento A C igual al radio.

Según hemos demostrado en el párrafo 170, A B es medio proporcional entre A C y B C, de modo que si trazamos la tangente C D tendremos (párrafo 152) $AB = CD$

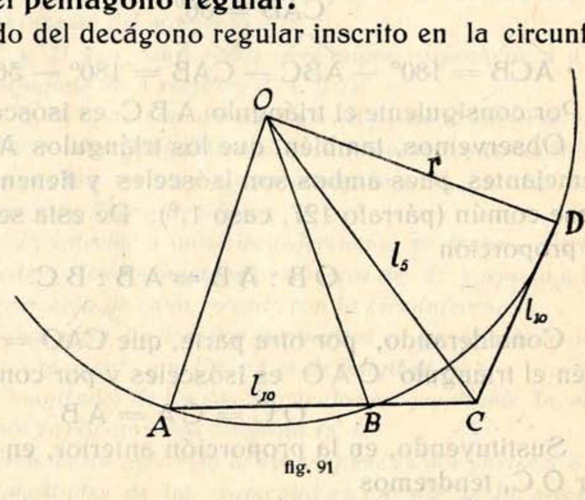


fig. 91

Por otra parte, el triángulo C A O es isósceles, por ser AC=AO y como el ángulo en el vértice A vale 72° (párrafo 170) o sea $\frac{360°}{5}$, resulta que C O es precisamente el lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia dada.

Trazando el radio O D que va al punto de contacto de la tangente C D se forman el triángulo O C D que tiene las siguientes propiedades:

1.ª Es rectángulo.

2.ª Uno de sus catetos es el radio de la circunferencia.

3.ª El otro cateto es el lado del decágono regular inscrito.

4.ª La hipotenusa es el lado del pentágono regular inscrito.

Así queda demostrado el siguiente

Teorema:

EL LADO DEL PENTAGONO REGULAR INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA ES LA HIPOTENUSA DE UN TRIANGULO RECTANGULO QUE TIENE POR CATETOS EL RADIO Y EL LADO DEL DECAGONO REGULAR INSCRITO.

Este teorema nos permite calcular la expresión del lado del pentágono en función del radio, pues del triángulo rectángulo O D C (fig. 91) se deduce

$$l^2_5 = OC^2 = OD^2 + DC^2$$

y sustituyendo los valores

$$OD = r$$

$$DC = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

tendremos

$$l^2_5 = r^2 + \frac{r^2}{4}\left(5 + 1 - 2\sqrt{5}\right) = \frac{4r^2 + r^2\left(6 - 2\sqrt{5}\right)}{4} =$$

$$= \frac{r^2\left(10 - 2\sqrt{5}\right)}{4}$$

de donde

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

173. Construcción práctica.—Para dividir una circunferencia en diez partes iguales se trazan (fig. 92) un diámetro A B y el radio perpendicular O C. Desde el punto medio de A O, como centro, se traza el arco CD. El segmento OD es el lado del decágono regular inscrito y CD el lado del pentágono.

Demostración:

En virtud del teorema de Pitágoras tendremos

$$MC^2 = OC^2 + OM^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$$

Por otra parte

$$MD = MC = \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$OD = MD - MO = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

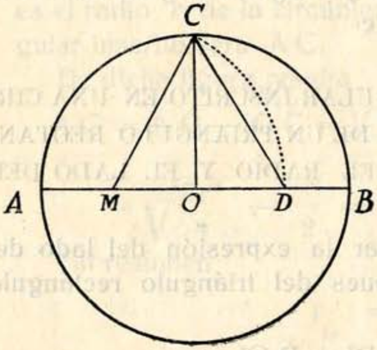


fig. 92

que es la misma expresión del lado del decágono obtenida en el párrafo 171.

Aplicando, finalmente, el teorema del párrafo 172 al triángulo COD, se ve que la hipotenusa CD es el lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia dada.

174. Idea de los polígonos regulares estrellados.—Si se tiene una circunferencia dividida en cinco partes iguales (fig. 93) y unimos los puntos de división en el orden 1 3 5 2 4 1, se formará un polígono cóncavo que tiene todos sus lados iguales, por ser cuerdas de arcos iguales, y todos sus ángulos iguales, por estar inscritos en arcos iguales.

fig. 93

El pentágono obtenido es regular y por tener la forma de estrella se llama polígono estrellado.

Si unimos de dos en dos los vértices de un decágono regular convexo (fig. 94) se obtienen dos pentágonos convexos; para obtener un decágono estrellado hay que unir dichos vértices de tres en tres (fig. 95).

Se pueden construir tantos polígonos estrellados como números primos haya menores que la $\frac{1}{2}$ de n.

En general, todo polígono regular estrellado se determina por dos números n y m. Uno de ellos, n, expresa el número de vértices y el otro, m, indica que dichos vértices han de unirse de m en m.

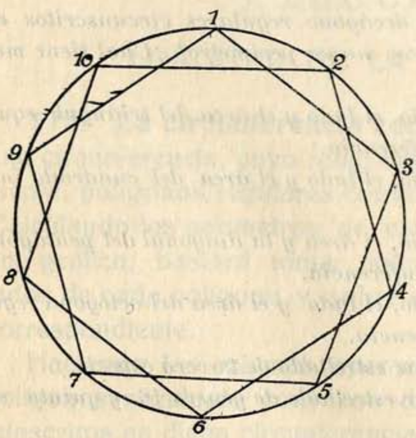


fig. 94

El valor de n se llama género del polígono y el valor de m se llama especie.

Para obtener un polígono estrellado es preciso que m y n sean primos entre sí; en caso contrario no se obtienen polígonos de n lados. Tampoco dan polígonos estrellados los valores $m = 1$ y $m = n - 1$. Finalmente, las especies complementarias n y $n - m$ dan el mismo polígono estrellado. Con estas normas es fácil calcular las especies de polígonos estrellados que existen de un orden determinado.

Ejemplos:

n = 3 no hay polígono estrellado.
n = 4 » » »
n = 5 hay un polígono estrellado de especie 2.
n = 6 no hay polígono estrellado.
n = 7 hay dos polígonos estrellados de especie 2 y 3.
n = 8 hay un polígono estrellado de especie 3.
n = 10 hay un polígono estrellado de especie 3.
n = 15 hay tres polígonos estrellados de especie 2, 4 y 7.

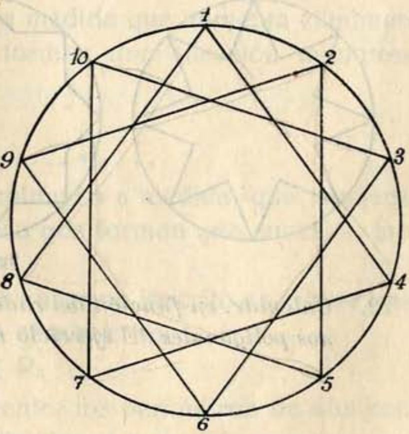


fig. 95

EJERCICIOS

1. *Construir dos octógonos regulares, uno inscrito y otro circunscrito en una circunferencia. ¿Cual tiene mayor perímetro? ¿Cual tiene mayor área?*
2. *Construir un exágono y un dodecágono regulares inscritos en una*

circunferencia. ¿Cual tiene mayor perímetro? ¿Cual tiene mayor área?

3. *Construir un pentágono y un decágono regulares circunscritos en una circunferencia. ¿Cual tiene mayor perímetro? ¿Cual tiene mayor área?*
4. *Calcular, en función del radio, el lado y el área del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia.*
5. *Calcular, en función del radio, el lado y el área del cuadrado inscrito en una circunferencia.*
6. *Calcular, en función del radio, el área y la diagonal del pentágono regular inscrito en una circunferencia.*
7. *Calcular, en función del radio, el lado y el área del octógono regular inscrito en una circunferencia.*
8. *Construir un decágono regular estrellado de tercera especie.*
9. *Construir un polígono regular estrellado de género 16 y quinta especie.*
10. *Construir un polígono regular estrellado de género 20 y séptima especie.*
11. *Determinar el género y la especie de los polígonos estrellados de la fig. 96.*

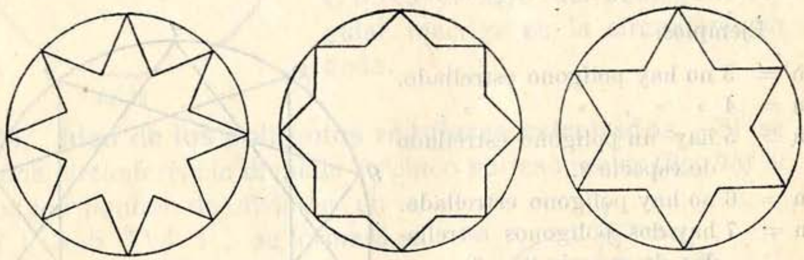


fig. 96

12. *Calcular, en función del radio, las áreas limitadas por los contornos poligonales del ejercicio 11.*

LECCION 39

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

175. La circunferencia como límite. — Supongamos que en una circunferencia, cuyo radio mide 4 cm, se inscriben, sucesivamente, polígonos regulares convexos de 3, 4, 5, 6, 7....n.... lados. Calculando los perímetros de estos polígonos se podrá construir una gráfica; bastará tomar sobre el eje abscisas el número de lados de cada polígono y sobre el eje de ordenadas el perímetro correspondiente.

Haciendo las mismas operaciones con los perímetros de los polígonos regulares convexos de 3, 4, 5, 6, 7....n.... lados, circunscritos en dicha circunferencia, obtendremos otra gráfica:

Las dos gráficas, así obtenidas, se representan en la fig. 97. De ella se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª Los perímetros

$$p_3\,,\ p_4\,,\ p_5\,,\ \ldots .\, p_n \ldots .$$

de los polígonos inscritos crecen a medida que aumenta el número de lados, lo cual significa que, forman una sucesión monótona creciente.

2.ª Los perímetros

$$P_3\,,\ P_4\,,\ P_5\,,\ \ldots .\ P_n \ldots .$$

de los polígonos circunscritos disminuyen a medida que aumenta el número de lados, lo cual significa que forman una sucesión monótona decreciente.

3.ª El perímetro de cualquier polígono inscrito es menor que el perímetro de cualquier polígono circunscrito

$$p_h < P_k$$

4.ª La diferencia, $P_n - p_n$, entre los perímetros de dos polígonos de igual número de lados disminuye a medida que crece n.

Todavía un cálculo más minucioso permite comprobar que la diferencia $P_n - p_n$ puede ser menor que cualquier número positivo. Recordando lo dicho en el párrafo 48, podremos escribir

$$\lim_{n \to \infty} . \,(P_n - p_n) = 0$$

Esto significa que los valores de P_n y p_n tienden a igualarse, cuando el número de lados n crece indefinidamente; dicho de otro modo, ambas sucesiones tienen el mismo límite.

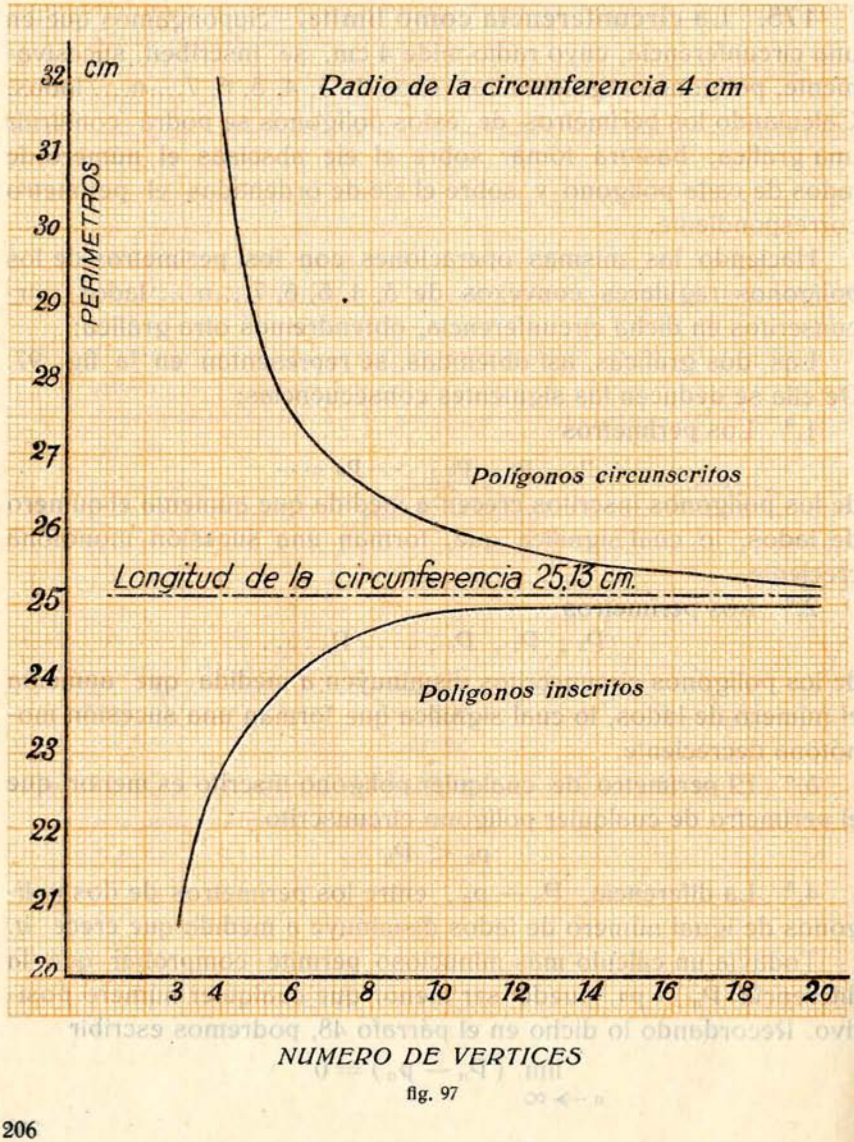


fig. 97

Resumen:

SI TENEMOS UNA CIRCUNFERENCIA, LOS PERIMETROS

$$p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \cdots\cdots p_n \cdots\cdots$$

DE LOS POLIGONOS REGULARES INSCRITOS FORMAN UNA SUCESION MONOTONA CRECIENTE. LOS PERIMETROS

$$P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \cdots\cdots P_n \cdots\cdots$$

DE LOS POLIGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS FORMAN UNA SUCESION MONOTONA DECRECIENTE. AMBAS SUCESIONES SON CONVERGENTES Y TIENEN EL MISMO LIMITE. ESTE LIMITE SE LLAMA LONGITUD DE AQUELLA CIRCUNFERENCIA.

176. Cálculo del límite.—Es evidente que cualquier elemento, p_h ó P_k, de las sucesiones anteriores representa un valor aproximado de la longitud de la circunferencia respectiva y su aproximación crece al aumentar el número de lados. Esto significa que, para el cálculo del límite, no hace falta tomar todos los términos de las sucesiones anteriores; las sucesiones parciales

$$p_6 \;,\; p_{12} \;,\; p_{24} \;,\; p_{48} \;,\; p_{96} \;,\; p_{192} \cdots\cdots$$
$$P_6 \;,\; P_{12} \;,\; P_{24} \;,\; P_{48} \;.\; P_{96} \;,\; P_{192} \cdots\cdots$$

referentes a polígonos cuyo número de lados se duplica a cada avance, tienen también por límite la longitud de la circunferencia.

La ventaja de adoptar estas sucesiones parciales es que se pueden calcular todos sus elementos mediante fórmulas aritméticas. Basta observar que el lado del exágono regular inscrito es igual al radio de la circunferencia; conociendo el lado de dicho exágono inscrito se calcula el lado del circunscrito mediante la fórmula del párrafo 177; por otra parte, la fórmula del párrafo 178 nos permite calcular el lado del polígono inscrito de doce lados; volviendo a la primera fórmula obtendremos el lado del polígono circunscrito de doce lados. Repitiendo indefinidamente estos cálculos se obtienen cuantos elementos queramos de aquellas sucesiones.

177. Lado de un polígono regular circunscrito en una circunferencia.—Cuando se conoce el radio r de una circunferencia y el lado $AB = l_n$ (fig. 98) del polígono regular inscrito de n lados es muy fácil calcular el lado $A'B' = l'_n$ del polígono regular de n lados circunscrito en dicha circunferencia.

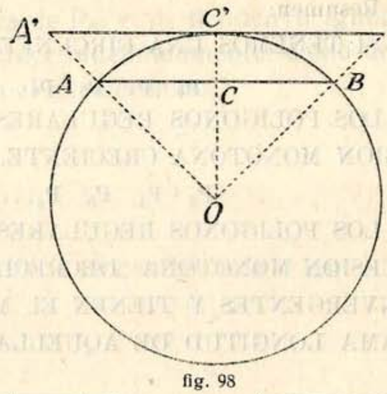


fig. 98

Por ser la recta A' B' tangente a la circunferencia en el punto C', medio del arco A B, tendremos

$$\triangle AOB \sim A'OB'$$

De esta semejanza se deduce la proporción

$$l'_n : l_n = OC' : OC$$

Por otra parte del triángulo rectángulo A O C se deduce

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

Sustituyendo este valor en la proporción anterior y teniendo en cuenta que O C' es igual al radio *r*, tendremos

$$l'_n : l_n = r : \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

de donde

$$l'_n = \frac{2\,r\,l_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Tomando el radio por unidad, tendremos

$$l'_n = \frac{2\,l_n}{\sqrt{4 - l_n^2}}$$

178 Lado del polígono regular inscrito de 2 n lados.—

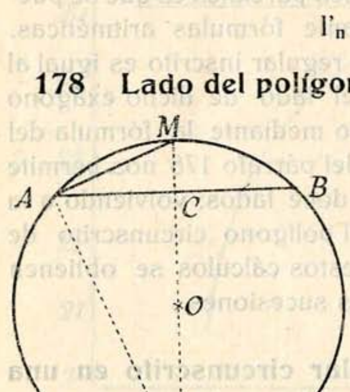


fig. 99

Si A B es el lado, l_n, del polígono regular de *n* lados inscrito en una circunferencia (fig. 98) y M es el punto medio del arco A B es evidente que la cuerda A M será el lado l_{2n} del polígono regular inscrito de 2 n lados.

Aplicando el teorema de Euclides el triángulo M A M' tendremos

$$l_{2n}^2 = MM' \cdot CM$$

Por otra parte, se verifica

$$MM' = 2\,r$$

$$CM = OM - OC = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n} = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - l^2_n}}{2}$$

y sustituyendo ambos valores en la igualdad anterior tendremos

$$l^2_{2n} = 2r \cdot \frac{2r - \sqrt{4r^2 - l^2_n}}{2} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2_n}$$

de donde

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$$

Tomando el radio por unidad tendremos

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2_n}}$$

EJERCICIOS

Dada una circunferencia de 1 m de radio calcular:

1. *El perímetro del cuadrado inscrito.*
2. *El perímetro del cuadrado circunscrito.*
3. *El perímetro del octógono regular inscrito.*
4. *El perímetro del octógono regular circunscrito.*
5. *El perímetro del decágono regular inscrito.*
6. *El perímetro del decágono regular circunscrito.*
7. *El perímetro del icoságono regular inscrito.*
8. *El perímetro del icoságono regular circunscrito.*

LECCION 40

RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA

179. Rectificación de una curva.—Rectificar una curva es determinar su longitud. Esta operación puede efectuarse analíticamente, es decir, mediante cálculos aritméticos o geométricamente, es decir, mediante construcciones gráficas hechas con la regla y el compás.

180. Rectificación analítica de la circunferencia.—Sean dos circunferencias de radios, r y r', cualesquiera e inscribamos en cada una de ellas, una sucesión de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 .... *n* .... lados. Los perímetros respectivos formarán dos sucesiones

$$p_3\ ,\ p_4\ ,\ p_5\ ,\ p_6\ \ldots\ldots p_n \ldots\ldots$$
$$p'_3\ ,\ p'_4\ ,\ p'_5\ ,\ p'_6\ \ldots\ldots p'_n \ldots\ldots$$

La primera sucesión tiene por límite la longitud C de la circunferencia de radio *r*; la segunda sucesión tiene por límite la longitud C' de la circunferencia de radio *r'*.

En virtud de la semejanza de dos polígonos regulares de igual número de lados (párrafo 131) tendremos

$$\left.\begin{array}{l} p_3 : p'_3 = 2\,r : 2\,r' \\ p_4 : p'_4 = 2\,r : 2\,r' \\ p_5 : p'_5 = 2\,r : 2\,r' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n : p'_n = 2\,r : 2\,r' \\ \text{etc} \end{array}\right\} \text{puesto que los diámetros } 2\,r \text{ y } 2\,r' \text{ son líneas homólogas en todas estas semejanzas}$$

Como la razón de los perímetros homólogos es, en todo momento, igual a la razón de los diámetros, también, en el límite, tendremos la igualdad

$$C : C' = 2\,r : 2\,r'$$

o sea

$$C : 2\,r = C' : 2\,r'$$

Como r y r' son dos radios cualesquiera resulta el siguiente

Teorema:

• LA RAZON ENTRE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA Y SU DIAMETRO TIENE UN VALOR CONSTANTE.

Representando este valor constante por la letra π tendremos

$$C : 2r = \pi$$

de donde

$$C = 2\pi r$$

Regla:

LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA SE OBTIENE MULTIPLICANDO EL RADIO POR 2π.

181. Rectificación de un arco de circunferencia.

Si dividimos una circunferencia de radio r en grados sexagesimales, la longitud de cada uno de estos arcos será

$$\frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$$

Por consiguiente la longitud de un arco de n grados sexagesimales será

$$l = \frac{\pi r n}{180}$$

182. Cálculo del número π.—Si en la fórmula que expresa la longitud de la circunferencia, suponemos el radio igual a la unidad tendremos

$$C = 2\pi \quad \text{de donde} \quad \pi = \frac{C}{2}$$

El número π es igual a la longitud de una semicircunferencia cuyo radio sea la unidad; por consiguiente el semiperímetro de cualquier polígono regular inscrito o circunscrito en dicha circunferencia es un valor aproximado de π.

Con las fórmulas expuestas en los párrafos 177 y 178 se han obtenido los valores siguientes

n	$\frac{1}{2}\, p_n$	$\frac{1}{2}\, P_n$
6	3,0000000	3,4641016
12	3,1058285	3,2153903
24	3,1326286	3,1596600
48	3,1393502	3,1460863
96	3,1410320	3,1427147
192	3,1414525	3,1418731
384	3,1415577	3,1416628
768	3,1415839	3,1416102
1536	3,1415905	3,1415971

Los números de la segunda columna representan valores de π aproximados por defecto y los de la tercera columna valores aproximados por exceso, de manera que tendremos

$$3{,}1415905 < \pi < 3{,}1415971$$

de donde se deduce que

$$3{,}14159$$

representa el valor de π con cinco cifras decimales exactas. Para obtener mayor aproximación habríamos de recurrir a polígonos de mayor número de lados.

Este método utilizado por Arquimedes, es sumamente laborioso. Empleando recursos del Análisis matemático pueden obtenerse con cierta rapidez valores muy aproximados de π. Actualmente se conocen 707 cifras decimales exactas; las cuarenta primeras son

$$3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433$$
$$83279\ 50288\ 41971$$

En el siglo pasado, el gran matemático alemán Gauss, logró demostrar, de modo riguroso, que π es un número irracional y por tanto no puede expresarse por una fracción decimal exacta, ni periódica.

183. Rectificación gráfica de la circunferencia.—Método de Kochansky (matemático polaco del siglo 17).

Por un punto A de la circunferencia (fig. 100) se trazan la tangente y una cuerda AH igual al radio. Sea OG la mediatriz de esta cuerda y E la intersección de dicha mediatriz con aquella tangente.

Llevemos, sobre la tangente, el segmento EF cuya longitud sea tres veces el radio y, por último, el segmento BF representa, con gran aproximación, la semicircunferencia rectificada.

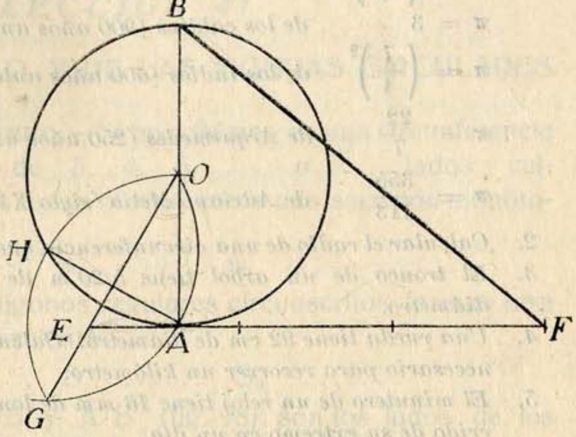


fig. 100

Demostración:

Suponiendo que el radio OA sea la unidad debe resultar

$$FB = \pi$$

En efecto, tendremos

$$BO = OA = AH = 1 \quad ,, \quad \widehat{AOE} = 30^\circ \quad ,, \quad EA = \tan 30^\circ$$

y por consiguiente

$$FB^2 = AB^2 + AF^2 = 2^2 + (3 - \tan 30^\circ)^2$$

y sustituyendo en vez de $\tan 30^\circ$ el valor 0,57735 deducido de las tablas resulta

$$FB^2 = 9{,}8692137 \ldots\ldots$$

de donde

$$FB = 3{,}1415 \ldots\ldots\ldots$$

Observación:

Todos los procedimientos conocidos para rectificar una circunferencia, con la regla y el compás, son aproximados y está demostrado que no puede existir una solución exacta de este problema.

EJERCICIOS

1. Calcular la longitud de una circunferencia de 1 m de diámetro *dando a π los valores aproximados que a continuación se expresan y calcular, en cada caso, el error correspondiente:*

$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ *de los egipcios (2 000 años antes de J. C.)*

$\pi = 3$ *de los caldeos (900 años antes de J. C.)*

$\pi = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ *de los indios (600 años antes de J. C.)*

$\pi = \frac{22}{7}$ *de Arquimedes (250 años antes de J. C.)*

$\pi = \frac{355}{113}$ *de Adriano Metio (siglo XVI)*

2. *Calcular el radio de una circunferencia que tiene 50 cm de longitud.*
3. *El tronco de un arbol tiene 5,20 m de desarrollo. Calcular su diámetro.*
4. *Una rueda tiene 92 cm de diámetro. Calcular el número de vueltas necesario para recorrer un kilómetro.*
5. *El minutero de un reloj tiene 16 mm de longitud. Calcular el recorrido de su extremo en un día.*
6. *Una circunferencia tiene 3 m de radio. Calcular la longitud de un arco de 25° 40'.*
7. *Una circunferencia tiene 8 cm de radio. Calcular la graduación de un arco que mide 15,7 cm.*
8. *Calcular la graduación de un arco cuya longitud es igual al radio.*
9. *Calcular la longitud de un grado de meridiano terrestre ($R = 6370$ kilómetros).*
10. *Calcular la longitud de un minuto de meridiano terrestre.*
11. *Un ventilador tiene 30 cm de diámetro y da 2 500 vueltas por minuto. Calcular, en kilómetros por hora, la velocidad del extremo de una paleta.*
12. *La longitud del paralelo terrestre de un cierto lugar es 20 000 kilómetro. Calcular la longitud geográfica de dicho lugar.*

LECCION 41

AREAS DEL CIRCULO Y DE LAS FIGURAS CIRCULARES

184. Area del círculo.—Si inscribimos en una circunferencia los polígonos regulares de 3, 4, 5, ... *n*...... lados y calculamos sus respectivas áreas obtendremos una sucesión monótona creciente

$$s_3 \;,\; s_4 \;,\; s_5 \;\ldots\ldots\; s_n \;\ldots\ldots$$

Las áreas de los polígonos regulares circunscritos forman otra sucesión monótona decreciente

$$S_3 \;.\; S_4 \;,\; S_5 \;\ldots\ldots\; S_n \;\ldots\ldots$$

Suponiendo que A B y A' B' (fig. 98) son los lados de los ene-ágonos regulares, inscrito y circunscrito, respectivamente, en la circunferencia, tendremos, en virtud de la semejanza de ambos polígonos (párrafo 131), la proporción siguiente:

$$S_n : s_n = \overline{OC'}^2 : \overline{OC}^2$$

de donde se deduce

$$\left(S_n - s_n \right) : s_n = \left(\overline{OC'}^2 - \overline{OC}^2 \right) : \overline{OC}^2$$

y despejando el primer antecedente se obtiene

$$S_n - s_n = \frac{s_n}{\overline{OC}^2} \left(OC' + OC \right) \left(OC' - OC \right)$$

Suponiendo que el número de lados crece indefinidamente, el factor $OC' - OC$, del segundo miembro, llega a ser tan pequeño como se quiera y como los otros factores conservan siempre valores finitos, resulta que el producto, o sea, $S_n - s_n$ puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Por consiguiente:

LAS AREAS DE LOS POLIGONOS REGULARES INSCRITOS EN UNA CIRCUNFERENCIA Y LAS AREAS DE LOS POLIGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS FORMAN DOS SUCESIONES QUE TIENEN EL MISMO LIMITE. ESTE LIMITE SE LLAMA AREA DEL CIRCULO.

Representando por a_n el apotema del polígono inscrito de *n* lados, tendremos

$$s_n = \frac{1}{2}\, p_n\, a_n$$

En el límite, el área s_n del polígono se convierte en el área S del círculo; el perímetro p_n se convierte en la longitud $2\,\pi\,r$ de la circunferencia y el apotema $a_n = OC$ (fig. 98) se convierte en el radio *r*. Sustituyendo cada uno de estos valores en la igualdad anterior tendremos

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\,\pi\,r \cdot r = \pi\,r^2$$

Así queda demostrada la siguiente

Regla:

EL AREA DE UN CIRCULO ES IGUAL AL CUADRADO DEL RADIO MULTIPLICADO POR EL NUMERO π.

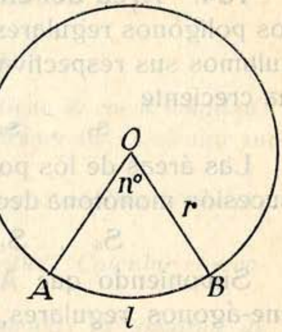


fig. 101

185. Area del sector circular.—Descomponiendo un círculo en 360 sectores iguales, cada uno de ellos tendrá la graduación de 1° sexagesimal. El área de uno de estos sectores valdrá $\frac{\pi\,r^2}{360}$

Por consiguiente, el área de un sector de n° sexagesimales será (fig. 101).

$$\frac{\pi\,r^2}{360} \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi\,r\,n}{180} \cdot r$$

y como $\frac{\pi\,r\,n}{180}$ es la longitud del arco de dicho sector (párrafo 181) tendremos

$$\text{Area sector } AOB = \frac{\text{arco } AB \times \text{radio}}{2}$$

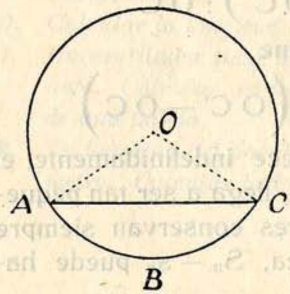


fig. 102

186. Area del segmento circular.—Si por los extremos del segmento ABC (fig. 102) trazamos los radios AO y CO se obtiene un sector circular ABCO y un triángulo ACO. De dicha figura se deduce

área segmento ABC = área sector ABCO — área triángulo AOC

187. Areas de un trapecio y una corona circulares.—El área de un trapecio circular A B C D (fig. 103) es la diferencia entre las áreas de los sectores A B O y D C O. Tendremos

$$\text{Area trapecio } ABCD = \frac{\pi r^2 n}{360} - \frac{\pi r_1^2 n}{360} = \frac{\pi n}{360}\left(r^2 - r_1^2\right)$$

Cuando el ángulo A O B vale 360°, el trapecio se convierte en la corona circular y la fórmula anterior nos da

$$\text{área corona circular} = \pi\,(r^2 - r_1^2)$$

188. Cuadratura del círculo.—El problema de la cuadratura del círculo está resuelto analíticamente por la fórmula

$$S = \pi r^2$$

Sin embargo, es la solución gráfica de este problema la que ha logrado universal celebridad desde tiempos muy remotos; se trata de convertir un círculo en cuadrado equivalente, sin utilizar otros instrumentos que la regla y el compás. Planteado de este modo, el problema de la cuadratura del círculo, es irresoluble.

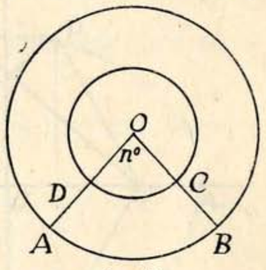


fig. 103

Así lo ha demostrado, con todo rigor, a últimos del siglo XIX, el matemático alemán Lindemann.

Pueden obtenerse soluciones aproximadas, observando que si x es el lado del cuadrado pedido y r el radio del círculo, tendremos

$$x^2 = \pi r^2 = \pi r \cdot r$$

Por consiguiente, el lado del cuadrado es medio proporcional entre la longitud de la semicircunferencia y el radio. Bastará rectificar gráficamente la semicircunferencia y hallar dicho medio proporcional para tener una solución aproximada de la cuadratura del círculo.

EJERCICIOS

1. *Calcular el radio de un círculo equivalente al doble de otro círculo de 1 m de radio.*
2. *Calcular el perímetro de un círculo cuya área vale 3 751 cm².*
3. *¿Qué diámetro debe darse a una ventana circular para que deje la misma superficie libre que otra ventana rectangular de 1,2 × 2 m².*

4. *Un círculo tiene 0, 5 m de radio; calcular el ángulo del sector cuya área vale 0. 4 m^2.*
5. *El ruedo de una plaza de toros tiene 40 m de radio y la anchura del callejón es 2 m. Calcular el área del ruedo y la del callejón.*
6. *Los extremos de un cuadrante, que tiene 15 cm de radio, se unen por una cuerda. Calcular el área del segmento así formado.*
7. *Construir un círculo equivalente a la suma de otros dos dados.*
8. *Construir un círculo equivalente a la diferencia de otros dos dados.*
9. *Calcular el área de la estrella rayada en la fig. 104.*

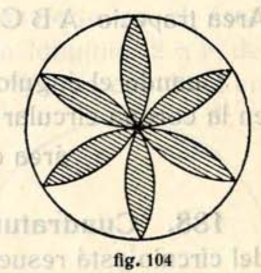


fig. 104

10. *Un círculo está inscrito y otro circunscrito en un cuadrado. Calcular la razón de sus áreas.*

Por consiguiente el punto P" pertenece también a la elipse y el teorema queda demostrado.

LECCION 42

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA ELIPSE

189. Simetrías en la elipse.

1.° Teorema:

LA RECTA QUE UNE LOS FOCOS ES EJE DE SIMETRIA DE LA ELIPSE.

Demostración:

Sea P un punto cualquiera de la elipse; F y F_1 los dos focos (fig. 105). Si P' es el simétrico de P respecto a la recta FF_1, ésta será la mediatriz del segmento PP' y se verificarán las siguientes igualdades

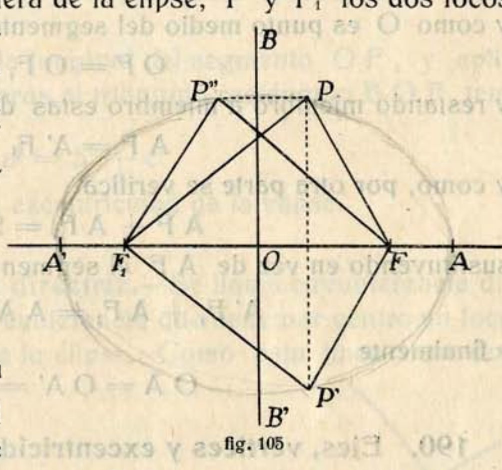


fig. 105

$$P'F = PF$$
$$P'F_1 = PF_1$$

de donde

$$P'F + P'F_1 = PF + PF_1 = 2a$$

Por consiguiente el punto P' también pertenece a la elipse, lo cual demuestra que FF_1 es eje de simetría ortogonal de dicha curva.

2.° Teorema:

LA MEDIATRIZ DEL SEGMENTO DETERMINADO POR LOS FOCOS ES EJE DE SIMETRIA DE LA ELIPSE.

Demostración:

Sea BB' dicha mediatriz y P" el simétrico de P respecto de BB' (fig. 105). En virtud de la simetría se verifican las igualdades

$$P''F = PF_1$$
$$P''F_1 = PF$$

de donde

$$P''F + P''F_1 = PF_1 + PF = 2a$$

Por consiguiente el punto P" pertenece también a la elipse y el teorema queda demostrado.

Consecuencias:

1.ª De los dos teoremas anteriores y recordando las propiedades de las figuras simétricas se deduce que la elipse es una línea simétrica respecto del punto O, de intersección de los ejes $F F_1$ y $B B'$. Este punto se llama centro de la elipse; las rectas que pasan por él se llaman diámetros.

2.ª Si A y A' (fig. 105) son los puntos de intersección del eje focal con la elipse, tendremos en virtud de la simetría respecto al centro O

$$O A = O A'$$

y como O es punto medio del segmento $F F_1$ también tendremos

$$O F = O F_1$$

y restando miembro a miembro estas dos igualdades se deduce

$$A F = A' F_1$$

y como, por otra parte se verifica

$$A F + A F_1 = 2 a$$

sustituyendo en vez de $A F$ el segmento $A' F_1$, tendremos

$$A' F_1 + A F_1 = A A' = 2 a$$

y finalmente

$$O A = O A' = a$$

190. Ejes, vértices y excentricidad de la elipse.—Los ejes de simetría $A A'$ y $B B'$ (figura 106) se llaman ejes de la elipse y los cuatro puntos A, A', B y B' de intersección de estos ejes con la elipse se llaman vértices. Según sabemos la longitud del eje focal es

$$A A' = 2 a$$

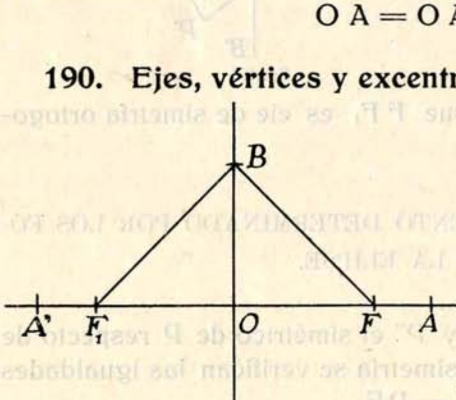


fig. 106

La longitud del otro eje se representa por 2 b, de manera que, $B B' = 2 b$.

Por ser B, punto de la elipse tendremos (fig. 106)

$$BF + BF_1 = 2a$$

y como en virtud de la simetría es

$$BF = BF_1$$

tendremos

$$BF = a$$

Por ser BO perpendicular, y BF oblicua el eje focal tendremos

$$BF > BO$$

o sea

$$a > b$$

de donde

$$2a > 2b$$

Por esta razón el eje focal, AA', se llama eje mayor, y BB', eje menor de la elipse.

Representando por *c* la longitud del segmento OF, y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BOF, tendremos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

El cociente $\frac{c}{a}$ se llama excentricidad de la elipse.

191. Circunferencia directriz.—Se llama circunferencia directriz de una elipse, la circunferencia que tiene por centro un foco y por radio el eje mayor de la elipse. Como esta línea tiene dos focos, habrá dos circunferencias directrices.

Si P es un punto de la elipse y F_1D el radio de la circunferencia directriz (fig. 107) tendremos

$$F_1P + PF = 2a$$
$$F_1P + PD = 2a$$

de donde

$$PF = PD$$

Así queda demostrado el siguiente

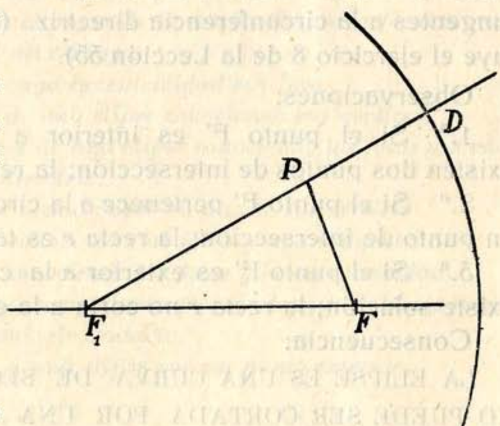


fig. 107

Teorema:

TODO PUNTO DE LA ELIPSE EQUIDISTA DE UN FOCO Y DE LA CIRCUNFERENCIA DIRECTRIZ QUE TIENE POR CENTRO EL OTRO FOCO.

Este teorema nos permite obtener la intersección de una recta con una elipse.

En efecto: Sean F y F_1 los focos de la elipse (fig. 108) y *r* la recta cuya intersección con la elipse queremos determinar. Tracemos la circunferencia directriz de centro F_1. Sea F' el simétrico de F respecto a *r*. Si suponemos que X es uno de los puntos de intersección tendremos

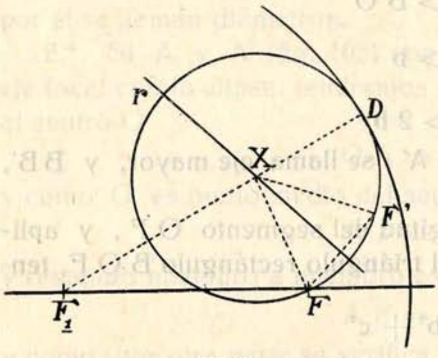


fig. 108

$$XF = XD = XF'$$

Por consiguiente, el punto X es centro de una circunferencia que pasa por F F' y es tangente a la circunferencia directriz F_1.

En resumen: Para obtener la intersección de una recta *r* con una elipse definida por los dos focos y la circunferencia directriz de un foco, basta determinar los centros de las circunferencias que pasan por el otro foco F, por su simétrico F' respecto a *r* y son tangentes a la circunferencia directriz. (Esta construcción constituye el ejercicio 8 de la Lección 35).

Observaciones:

1.ª Si el punto F' es interior a la circunferencia directriz existen dos puntos de intersección; la recta *r* es secante a la elipse.

2.ª Si el punto F' pertenece a la circunferencia directriz, existe un punto de intersección; la recta *r* es tangente a la elipse.

3.ª Si el punto F' es exterior a la circunferencia directriz no existe solución; la recta *r* no corta a la elipse.

Consecuencia:

LA ELIPSE ES UNA CURVA DE SEGUNDO ORDEN, PORQUE NO PUEDE SER CORTADA POR UNA RECTA EN MAS DE DOS PUNTOS.

192. Trazado de tangentes.—Si P es un punto de una elipse (fig. 109) y *t* su tangente en él, según lo dicho en la observación 2.ª del párrafo anterior, el simétrico de F respecto a la recta *t* será el punto D; por consiguiente la tangente *t* es bisectriz del ángulo F P D.

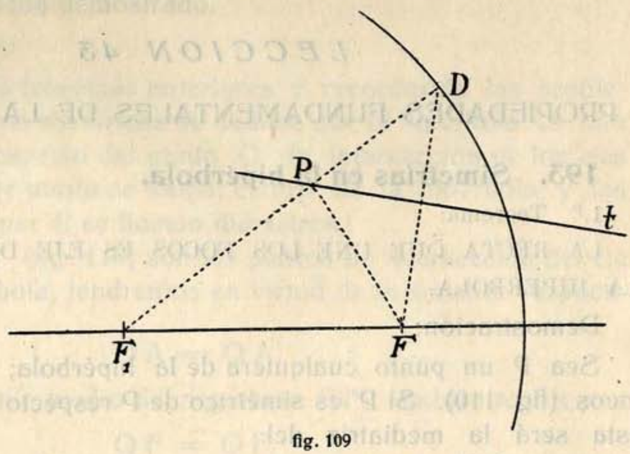


fig. 109

Regla:

PARA CONSTRUIR LA TANGENTE A LA ELIPSE EN UN PUNTO SE TRAZA LA BISECTRIZ DEL ANGULO FORMADO POR UN RADIO VECTOR DE DICHO PUNTO Y LA PROLONGACION DEL OTRO.

EJERCICIOS

1. *El eje mayor de una elipse mide 10 cm y la distancia de los focos es 4 cm. Calcular la excentricidad de esta elipse y la longitud del eje menor.*
2. *Uno de los ejes de una elipse mide 12 cm; la distancia focal es nula. Calcular la longitud del otro eje.*
3. *Construir una elipse cuya excentricidad sea cero.*
4. *Determinar los focos de una elipse conociendo sus vértices.*
5. *Determinar los vértices de una elipse conociendo los focos y el radio de la circunferencia directriz.*
6. *Construir la tangente a una elipse en uno de sus vértices.*
7. *Construir una elipse conociendo los focos y una tangente.*
8. *Construir una elipse conociendo los focos y la excentricidad.*
9. *Construir una elipse conociendo un foco, la longitud del eje mayor, una tangente y su punto de contacto.*
10. *Trazar las tangentes a una elipse por un punto exterior.*

LECCION 43

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA HIPERBOLA

193. Simetrías en la hipérbola.

1.° Teorema:

LA RECTA QUE UNE LOS FOCOS ES EJE DE SIMETRIA DE LA HIPERBOLA.

Demostración:

Sea P un punto cualquiera de la hipérbola; F y F_1 los dos focos (fig. 110). Si P' es simétrico de P respecto a la recta $F F_1$, ésta será la mediatriz del segmento P P' y se verifican las siguientes igualdades

$$P' F_1 = P F_1$$
$$P' F = P F$$

de donde

$$P'F_1 - P'F = PF_1 - PF = 2a$$

Por consiguiente, el punto P' también pertenece a la hipérbola, lo cual demuestra que $F F_1$ es eje de simetría ortogonal de dicha curva.

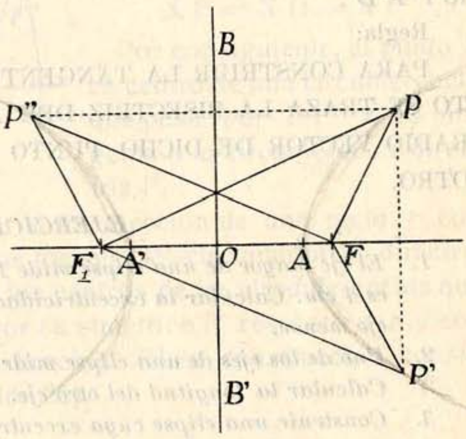


fig. 110

2.° Teorema:

LA MEDIATRIZ DEL SEGMENTO DETERMINADO POR LOS FOCOS ES EJE DE SIMETRIA DE LA HIPERBOLA.

Demostración:

Sea B B' dicha mediatriz y P" el simétrico de P respecto de B B' (fig. 110). En virtud de la simetría se verificarán las igualdades

$$P'' F = P F_1$$
$$P'' F_1 = P F$$

de donde

$$P'' F - P'' F_1 = P F_1 - P F = 2a$$

Por consiguiente, el punto P'' pertenece también a la hipérbola y el teorema queda demostrado.

Consecuencias:

1.ª De los dos teoremas anteriores y recordando las propiedades de las figuras simétricas se deduce que la hipérbola es una línea simétrica respecto del punto O de intersección de los ejes FF_1 y BB'. Este punto se llama, centro de la hipérbola y las rectas que pasan por él se llaman diámetros.

2.ª Si A y A' (fig. 110) son los puntos de intersección del eje focal con la hipérbola, tendremos en virtud de la simetría respecto al centro O

$$OA = OA'$$

y como O es punto medio del segmento FF_1 también tendremos

$$OF = OF_1$$

y restando miembro a miembro estas dos igualdades se deduce

$$AF = A'F_1$$

y como por otra parte se verifica

$$AF_1 - AF = 2a$$

sustituyendo en vez de AF el segmento $A'F_1$, tendremos

$$AF_1 - A'F_1 = AA' = 2a$$

y finalmente

$$OA = OA' = a$$

194. Ejes, vertices y excentridad de la hipérbola.

Los ejes de simetría ortogonal FF_1 y BB' se llaman ejes de la hipérbola. El primero corta a la curva en dos puntos A y A' que son los vértices de la hipérbola. El otro eje no corta a la curva según demostraremos en el párrafo 195.

La longitud del eje focal es

$$AA' = 2a$$

El otro eje carece de longitud, puesto que no tiene vértices sobre él.

Se llama excentricidad de la hipérbola el cociente $\frac{c}{a}$, donde c representa la longitud del segmento OF.

195. Circunferencia directriz.—Se llama circunferencia directriz de una hipérbola, la circunferencia que tiene por centro un foco y por radio la longitud del eje de la hipérbola. Como esta línea tiene dos focos, habrá dos circunferencias directrices.

Si P es un punto de la hipérbola y $F_1 D$ el radio de la circunferencia directriz (fig. 111) tendremos

$$P F_1 - P F = 2a$$

$$P F_1 - P D = 2a$$

de donde

$$P F = P D$$

Así queda demostrado el siguiente

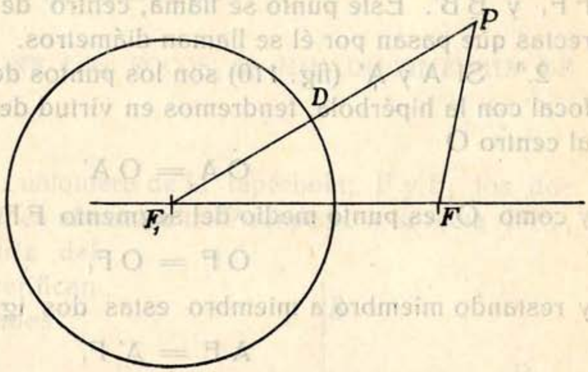


fig. 111

Teorema: TODO PUNTO DE LA HIPERBOLA EQUIDISTA DE UN FOCO Y DE LA CIRCUNFERENCIA DIRECTRIZ QUE TIENE POR CENTRO EL OTRO FOCO.

Este teorema nos permite obtener la intersección de una recta con una hipérbola.

En efecto: Sean F y F_1 los focos de la hipérbola (fig. 112) y *r* la recta cuya intersección con la hipérbola queremos determinar. Tracemos la circunferencia directriz de centro F_1. Sea F' el simétrico de F respecto a *r*.

Si suponemos que X es uno de los puntos de intersección tendremos

$$XF = XD = XF'$$

Por consiguiente, el punto X es centro de una circunferencia que pasa por F, F' y es tangente a la circunferencia directriz F_1.

En resumen, la intersección de una recta con una hipérbola se determina exactamente por el mismo procedimiento explicado en el párrafo 191 para la elipse.

Observaciones.

1.ª Si el punto F' es exterior a la circunferencia directriz, existen dos puntos de intersección; la recta r es secante a la hipérbola.

2.ª Si el punto F' pertenece a la circunferencia directriz, existe un punto de intersección. La recta r es tangente a la hipérbola.

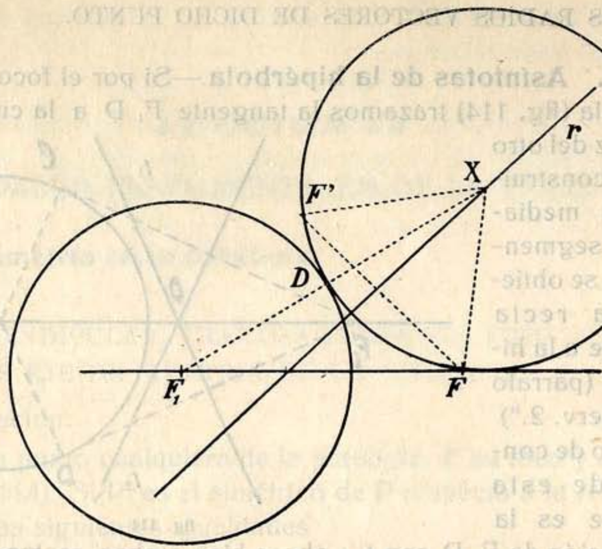


fig. 112

3.ª Si el punto F' es interior a la circunferencia directriz, no existe solución; la recta r no corta a la hipérbola.

4.ª Como el simétrico del foco F respecto al eje B B' (fig. 110) es el otro foco F_1, resulta que dicho eje no corta a la hipérbola.

Consecuencia:

LA HIPERBOLA ES UNA CURVA DE SEGUNDO ORDEN.

196. Trazado de tangentes.

Si P es un punto de la hipérbola (fig. 113) y t su tangente, según lo dicho en la observación 2.ª del párrafo anterior, el simétrico de F_1 respecto a la recta t será el punto D; por consiguiente la tangente t es bisectriz del ángulo F_1 P D que forman los radios vectores del punto de contacto.

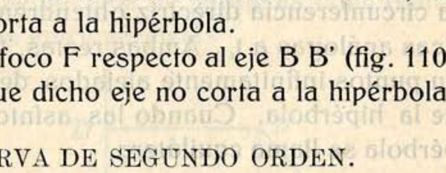


fig. 113

Regla:

PARA CONSTRUIR LA TANGENTE A LA HIPERBOLA EN

UN PUNTO SE TRAZA LA BISECTRIZ DEL ANGULO FORMADO POR LOS RADIOS VECTORES DE DICHO PUNTO.

197. Asíntotas de la hipérbola.—Si por el foco F_1 de una hipérbola (fig. 114) trazamos la tangente F_1 D a la circunferencia directriz del otro foco y construimos la mediatriz del segmento F_1D, se obtiene una recta tangente a la hipérbola (párrafo 195 observ. 2.ª) El punto de contacto de esta tangente es la

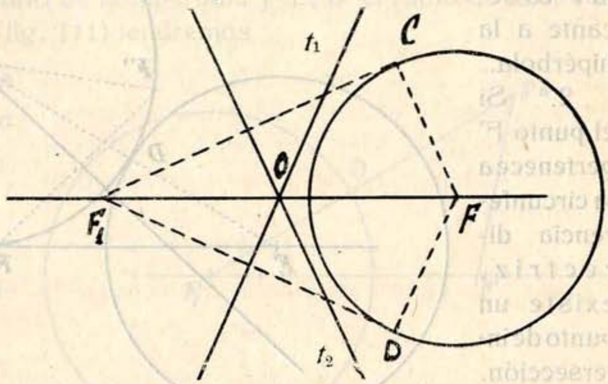


fig. 114

intersección de F D con t_1 ; ahora bien ambas rectas son paralelas y dicho punto estará infinitamente alejado del foco F.

Repitiendo las mismas construcciones con la tangente F_1 C a la circunferencia directriz obtendremos otra recta t_2 de características análogas a t_1. Ambas rectas, t_1 y t_2, tangentes a la hipérbola en puntos infinitamente alejados del foco F se llaman asíntotas de la hipérbola. Cuando las asíntotas son perpendiculares la hipérbola se llama equilátera.

EJERCICIOS

1. *El eje de una hipérbola mide 4 cm y la distancia focal es de 10 cm. Calcular la excentricidad de esta curva.*
2. *Determinar los focos de una hipérbola conociendo los vértices y la excentricidad.*
3. *Determinar los vértices de una hipérbola conociendo los focos y el radio de la circunferencia directriz.*
4. *Construir la tangente a una hipérbola en uno de sus vértices.*
5. *Construir una hipérbola conociendo los focos y una tangente.*
6. *Construir una hipérbola conociendo los focos y la excentricidad.*
7. *Construir una hipérbola conociendo un foco, la longitud del eje, una tangente y su punto de contacto.*
8. *Demostrar que las asintotas de una hipérbola pasan por el centro.*
9. *Trazar los ejes de una hipérbola conociendo las asintotas.*

LECCION 44

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA PARABOLA

198. Simetría en la parábola.

Teorema:

LA PERPENDICULAR, TRAZADA DESDE EL FOCO A LA DIRECTRIZ, ES EJE DE SIMETRIA DE LA PARABOLA.

Demostración:

Sea P un punto cualquiera de la parábola, F su foco y *d* la directriz (fig. 114). Si P' es el simétrico de P respecto a la recta BF tendremos las siguientes igualdades

PF = PD ..... por ser P punto de la parábola

PF = P'F ..... por simetría

PD = P'D'..... por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas

De las tres igualdades anteriores se deduce

P' D' = P' F

y, por tanto, el punto P' también pertenece a la parábola, lo cual demuestra que BF es eje de simetría ortogonal de dicha curva. Esta recta se llama eje de la parábola.

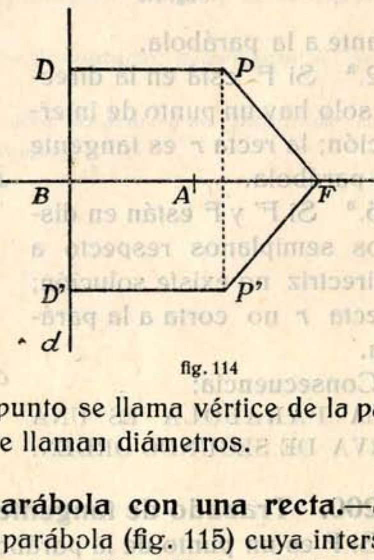


fig. 114

El punto A, medio del segmento BF pertenece a la parábola por ser AF = AB. Este punto se llama vértice de la parábola. Las rectas paralelas al eje se llaman diámetros.

199. Intersección de una parábola con una recta.—Sea F el foco y *d* la directriz de una parábola (fig. 115) cuya intersección con la recta *r* queremos determinar. Sea F' el simétrico de F respecto de la recta r. Suponiendo que X sea uno de los puntos de intersección tendremos

$$XF = XF' = XD$$

Por consiguiente, X es centro de una circunferencia que pasa por los puntos F, F' y es tangente a la directriz d.

En resumen: Para obtener la intersección de una recta r con una parábola definida por el foco y la directriz basta determinar los centros de las circunferencias que pasan por este foco, su simétrico respecto a esta recta y son tangentes a la directriz. (Esta construcción constituye el ejercicio 7 de la Lección 35).

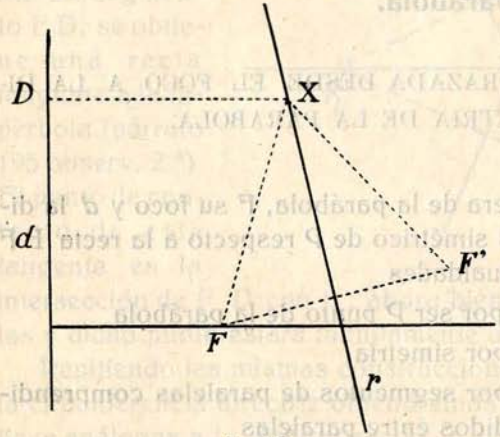


fig. 115

Observaciones:

1.ª Si los puntos F y F' están en un semiplano respecto a la directriz d existen dos puntos de intersección; la recta r es secante a la parábola.

2.ª Si F' está en la directriz solo hay un punto de intersección; la recta r es tangente a la parábola.

3.ª Si F' y F están en distintos semiplanos respecto a la directriz no existe solución; la recta r no corta a la parábola.

Consecuencia:

LA PARABOLA ES UNA CURVA DE SEGUNDO ORDEN.

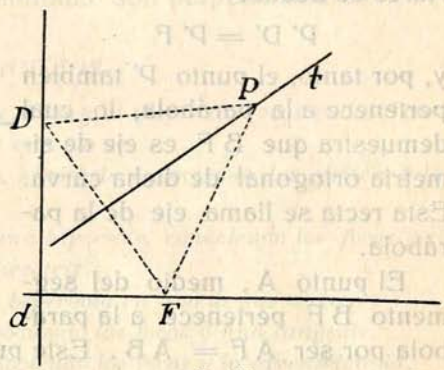


fig. 116

200. Trazado de tangentes.

Si P es un punto de la parábola (fig. 116) y t la tangente en él, según lo dicho en la observación 2.ª del párrafo anterior, el simétrico de F respecto a la recta t será el punto D; por consiguiente la tangente es bisectriz del ángulo F P D.

Regla:

Para construir la tangente a una parábola en un punto se traza la bisectriz del ángulo formado por el radio vector de dicho punto y su diámetro dirigido hacia la directriz.

EJERCICIOS

1. *Construir por puntos una parábola, conociendo el eje y el foco.*
2. *Se dan el foco, un punto de la parábola y su tangente; construir el eje y la directriz.*
3. *Se dan el foco y dos tangentes de la parábola; construir el eje y la directriz.*
4. *Por un punto X se trazan dos tangentes a una parábola; demostrar que el radio vector de X es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de los puntos de contacto.*
5. *Se dan el foco y dos puntos de la parábola; determinar el eje y el vértice.*
6. *Se dan una tangente, el eje y el vértice de una parábola; determinar el foco, la directriz y el punto de contacto de dicha tangente.*
7. *Se dan la tangente en el vértice y otras dos tangentes a una parábola; determinar el foco y los puntos de contacto de dichas tangentes.*
8. *Se dan dos tangentes y sus puntos de contacto; determinar el eje y la directriz de la parábola.*
9. *Se dan la tangente en el vértice, otra tangente y su punto de contacto; determinar el foco y la directriz.*

TABLAS

GONIOMÉTRICAS

Grado	SENO							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0'05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	**80**
10	0.17365	0,17651	0,17937	0,18224	0.18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0 24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0.33929	0,34202	**70**
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0.48989	0,49242	0,49495	0.49748	0,50000	**60**
30	0.50000	0,50252	0,50503	0.50754	0,51004	0,51254	0.51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0.56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0.57596	0,57833	0.58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0 62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	**50**
40	0.64279	0.64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0.66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0.69675	0.69883	0,70091	0.70298	0.70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grado
	COSENO							

Grado	COSENO 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	**80**
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	**70**
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	**60**
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	**50**
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0.71529	0,71325	0.71121	0,70916	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grado
	SENO							

Esto se llama interpolar es decir que 17 no está en la tabla

30° 17'

30°10' = 0'58124
30°20' = -0'58513
0'00389

10' — 389
7' — x
x = 389×7/10 = 272'3

Grado	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
	TANGENTE							
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0.03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,19216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0.42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44871	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0.60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0.77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0.79544	0,80020	0,80498	0 80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grado
	COTANGENTE							

Grado	COTANGENTE							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	**80**
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2.98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	**70**
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1.80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	**60**
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	**50**
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grado
	TANGENTE							

FE DE ERRATAS

Página	*línea*	*dice*	*debe decir*
32	8	$= x^{-mn}$	$= x^{mn}$
32	15	$\left(\frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$
40	$\overline{3}$ y $\overline{7}$	$y : 2$	$y : z$
43	12	0,174	0,175
56	9	$\left(\sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[b]{b}\right)^{n}$	$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^{n}$
66	20	cuadro	cuadrado
79	22	A'	A
93	4	$2 + 7$	$2 . 7$
139	2	114	117

ÍNDICE

Págs.